Mikroøkonomi B
Hjemmeopgave 2

Afleveres senest d. 10. juni kl 18.00

Aflevering sker via Github classroom.

1 Hearthstone

Aage skal til at tage et spil af online kortspillet, Hearthstone. Hans udfordring er, at der er to typer, han kan risikere at skulle spille imod. Med sandsynlighed p møder han Bent, som er sød som person, men skifter lidt temperament fra dag til dag. Med sandsynlighed p er Bent en skarp og dygtig spilteoretiker, men med sandsynlighed $1-p$ har Bent en "off-dag". Spillerne har begge løst hjemmeopgave 1 og set, at kun tre deck var relevante, så spillerne kan kun vælge mellem flg. tre deck:

$$A = \Big\{\text{Control Warlock}, \text{Face Hunter}, \text{Secret Libram Paladin}\Big\}.$$

I dette reducerede spil, er vinderchancerne i procent givet i tabellen nedenfor:

	Control Warlock	**Face Hunter**	**Secret Libram Paladin**
Control Warlock	50.00	35.36	56.63
Face Hunter	64.54	50.00	38.78
Secret Libram Paladin	43.36	61.07	50.00

Aages nytte ved at spille deck a_1 mod deck a_2 er lig med den gennemsnitlige win rate, som deck a_1 har mod a_2. Bents nytte er lig med minus win raten på hans strategiske dage, men på hans "off-dage" er hans nytte lig med -50 uanset hvad han eller Aage spiller (han er bare sur og ligeglad).

1. Opstil situationen som et Bayesiansk spil.

2. Find alle de Bayesianske Nash-ligevægte for $p \in \{0.1, 0.5, 0.9\}$.

   Hint: Opstil spillet i "wide matrix form," og brug `nashpy`*.*

3. Beregn sandsynligheden for at Aage vinder i alle ligevægte, du fandt ovenfor. Hvilken værdi af p foretrækker Aage? Forklar intuitionen på dette.

2 Dynamisk Priskonkurrence

Vi betragter et gentaget priskonkurrencespil mellem to virksomheder, hvor stadiespillet har payoffs givet ved

$$D_i(p_i, p_j) = \frac{\exp(v_i)}{1 + \exp(v_i) + \exp(v_j)},$$

hvor

$$v_i = 1 - p_i - \alpha \mathbf{1}\{p_j > p_i\}.$$

I stadiespillet løser firmaerne

$$\max_{p_i} \pi_i(p_i, p_j) = D_i(p_i, p_j)(p_i - c),$$

hvor $c = 0$ er den fælles marginalomkostning (dvs. der er ingen marginale omkostninger).

Firmaerne spiller nu det uendeligt gentagne spil, hvor stadiespillet er som beskrevet ovenfor, og hvor firmaerne diskonterer med faktoren $\delta \in (0; 1)$.

Vi vil starte med at betragt parameteriseringen, hvor $\alpha = 0.0$ (og kalde den "Cournot").

1. Beregn den statiske Nash-ligevægti rene strategier, (p^*, p^*).

2. Løs for den optimale statiske symmetriske pris, $p_1 = p_2 = \overline{p}$, som et statisk kartel vil sætte, dvs. $\overline{p}$ løser
$$\max_{p \geq 0} \pi_1(p, p) + \pi_2(p, p).$$

3. Bestem den mindste værdi af δ, hvor det er en underspilsperfekt Nash-ligevægt, at begge spillere følger flg. *Trigger*-strategi:
   - Start med at spille kartelprisen, $\overline{p}$,
   - Spil $\overline{p}$ hvis alle har spillet $\overline{p}$ indtil nu; ellers spil p^* som *straffen*.

Betragt nu den situation, hvor $\alpha \to \infty$. Vi kan kalde dette "Bertrand."

4. Forklar, hvorfor Trigger-strategien fra før ikke længere er en underspilsperfekt Nash-ligevægt. Foreslå dernæst en alternativ Trigger-strategi, hvor du finder en anden værdi af straffen at bruge (dvs. løs for den statiske Nash-ligevægt givet $\alpha \to \infty$). Udled til slut den laveste værdi af δ, hvor det er en underspilsperfekt Nash-ligevægt at begge spillere denne Trigger-strategi.

   Hint: Start med at argumentere for, at modellen går mod den rene Bertrand-model, når $\alpha \to \infty$.

Betragt nu situationen, hvor $\alpha = 1$.

5. Forklar, hvorfor ingen af de to foregående Trigger-strategier er underspilsperfekte Nash-ligevægte.

   Hint: Der findes en profitabel afvigelse fra Defection-fasen.

3 Ebay

Den medfølgende notebook, `ebay.ipynb`, indlæser og det medfølgende datasæt, som indeholder 7,9 mio. observationer på solgte produkter på eBay.[1] Hver række i datasættet indeholder en række information om et konkret salg af et produkt, og vi kommer til at kalde en observation for *en auktion*, og vi vil indeksere den med a.

Vi vil arbejde med tre forskellige mål for pris:

P1. Den faktiske transaktionspris i USD,

P2. Prisen relativt til en gennemsnitspris for produkttypen,

P3. Prisen relativt til startprisen, som sælger har spillet ud med.

Hver af priserne har sine fordele og ulemper fra et teoretisk perspektiv. Vi kommer i resten af opgaven til at fokusere på P2 og P3. Vi gør dette i håb om, at priserne således er mere sammenlignelige på tværs af auktioner.

Delopgave A

Datasættet inkluderer et tal for, hvor mange besøgende, der har været på produktets side på eBay.com. Det er dog ikke sikkert, at dette tal direkte er at sammenligne med antallet af aktive bydere, der dukker op til en auktion. I denne opgave, skal du estimere, hvor stor en procentdel af de besøgende på hjemmesiden, der agerer som aktive i auktionen. Du skal estimere dette ved at sammenligne de gennemsnitlige bud i underkategorier med en teoretisk forudsigelse fra en auktionsmodel.

Antag at byderne trækker valueringen $v_i \in \mathcal{U}(0,1)$, og antag at auktionen fungerer som en Second Price Sealed Bid (SPSB) auktion,[2] og at byderne spiller efter den Bayesianske Nash-ligevægt. Der er $\overline{n}_a$ potentielle bydere til en auktion, a, men kun en andel $x \in (0;1)$ deltager aktivt. Dvs. $n = x\overline{n}_a$.

1. Angiv den Bayesianske Nash-ligevægt i auktionen, og opskriv en formel for den forventede betaling, som auktionarius modtager.

   Hint: Udnyt resultatet om SPSB-auktionen, samt formlen for den k'te ordensstatistik for den uniforme fordeling.

2. Beregn for hver produktkategori gennemsnittet af flg. variable:

   (a) $\overline{p}_c^3$ den gennemsnitlige pris P3 (`price2start`),

[1] Data kommer fra https://www.nber.org/research/data/best-offer-sequential-bargaining, og følger artiklen *"Sequential Bargaining in the Field: Evidence from Millions of Online Interactions"* af Backus, Blake, Larsen & Tadelis (2020) i *Quarterly Journal of Economics.*

[2] I virkeligheden afgiver flere bydere simultant bud til sælger, som sælger så kan afslå, acceptere, eller give modbud til. På den måde indløber der bud over tid, indtil sælger endelig accepterer på et tidspunkt.

(b) $\overline{n}_c$: det gennemsnitlige antal views (`view_item_count`).

3. Beregn de predikterede priser for hver produktkategori, hvis 20% af de besøgende (views) er auktionsdeltagere, dvs. $x = 0.20$. Rapporter resultaterne i en graf med produkterne langs x-aksen og pris på y-aksen, hvor du viser både data og modelprediktion.

4. Find dernæst det $x \in [0; 1]$, som bedst forklarer data ift. mindste kvadrerede residualer på tværs af produktkategorier (`metacat`). Vis et plot af kriteriefunktionen, hvor x er på x-aksen, og de gennemsnitlige kvadrerede residualer er på y-aksen.

   Hint: Skriv en funktion, der for ethvert x først beregner $n = x\overline{n}_c$ for hver kategori c (`metacat`), og dernæst beregner den predikterede ligevægtspris, og til sidst beregner den kvadrerede afvigelse mellem prediktion og data for kategorien, og til slut tager gennemsnittet over kategorier. Du kan starte med at plotte denne funktion over et grid for x, fx $\{0.1, 0.2, ..., 0.9\}$. Baseret på dette kan du vælge en startværdi, som du giver til en numerisk optimizer. Husk at argumentere for dit valg af optimizer.

5. Betragt kategorien $c =$ `Cell Phones & Accesories`: Simulér $R = 100,000$ auktioner med det x, du estimerede ovenfor. Find den betaling, som vinderen i en SPSB auktion skal give, og lav et histogram af betalingen sammen med de faktiske priser fra denne kategori.

   Hint: udnyt det faktum, at hvis $v_i \sim IID\mathcal{U}(0, 1)$, så er $v_{(k)} \sim \mathcal{B}(k, n+1-k)$, hvor $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ står for beta-fordelignen med parametre α og β. Du kan trække fra denne fordeling med kommandoen `np.random.beta()`.

6. Formulér en hypotese for, hvornår auktionsmodellen burde virke særligt godt hhv. særligt dårligt, og afprøv din hypotese.

   Hint: Du kan fx tage udgangspunkt i andre kateagorier (`metacat`), antallet af fotos (`photo_count`), sælgerens antal tidligere listings (`to_lst_cnt`), hvorvidt sælgeren er en butik (`store`), osv.

Delopgave B

I denne delopgave skal du fokusere på prisvariablen P2 (dvs. pris relativt til gennemsnittet for den produkttype). Målet er, at du skal estimere den underliggende fordeling af valueringer for alle bydere på basis udelukkende af de vindende priser.

Du skal overalt i denne delopgave kun bruge data, der opfylder flg.

- Kategorien $c =$ `Cell Phones & Accesories`,
- Prisen (P2, `price2ref`) er under 2, $p_a^2 < 2$,

- Antallet af observationer brugt til at konstruere `price2ref` skal være mindst 10: `count1 >= 10`.[3]

Endvidere skal du antage, at data er fremkommet ved, at der er budt i en Second Price Sealed Bid (SPSB) auktion blandt $n = 10$ bydere, som spiller den Bayesianske Nash-ligevægt, hvor byderne har trukket deres valueringer, $v_i \sim \text{IID}F$, fra en fordeling F. Denne opgave handler om at prøve at bestemme F.

1. Vis et histogram for de faktiske priser i data sammen med de vindende priser fra $R = 100,000$ simulerede SPSB auktioner, hvor valueringerne er trukket fra hhv.

   (a) en $\chi^2(1)$ fordeling,

   (b) $\mathcal{LN}(\mu, \sigma)$: en lognormal fordeling med $\mu = -0.5$ og $\sigma = 0.5$.[4]

   Hint: Brug funktionerne `np.random.chisquare(2,(N,R))` og `np.exp(np.random.normal(-.5,.5,(N,R)) )` til at trække valueringerne. Brug dernæst den dominante strategi i en SPSB auktion og find for hvert $r = 1, ..., R$ betalingen, som den vindende byder skal betale.

Antag nu, at fordelingen af valueringerne, F, faktisk er en log normal fordeling, $\mathcal{LN}(\mu, \sigma)$ med $\sigma = \frac{1}{2}$.

2. Bestem den værdi af μ, der bedst rationaliserer data.
   (Hvis du kan, så prøv også at se, om du kan estimere σ.)

   Hint: Skriv en funktion, der tager to inputs, μ og σ, og returnerer simulerede vindende priser. Nu kan du lave et histogram af de simulerede vindende priser. Du skal så vælge μ, så dette histogram kommer til at ligne data bedst muligt.
   Den minimalt acceptable løsning er blot at prøve en masse forskelligel værdier for μ. En endnu bedre metode ville være at finde en måde at måle "afstanden" mellem de to histogrammer. Her kan du med fordel bruge funktionen `ECDF`[5]: her skal du definere et grid, hvor du vil evaluere din empiriske CDF, og så evaluere den i data og i simulerede trækninger på det samme grid og tage forskellen mellem de to.

Forestil dig nu, at individer med den samme underliggende fordeling af valueringer skulle byde i en First Price Sealed Bid (FPSB) auktion i stedet en SPSB auktion.

3. Find den Bayesianske Nash-ligevægt i FPSB auktionen.

   Hint: Udnyt Provenuækvivalens.

[3] I data er 86% har observationer med `count1 < 10` sat `price_ref = item_price`, så den relative pris bliver 1.0.

[4] Hvis $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, så er $\exp(X_i) \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$.

[5] Importeres med `from statsmodels.distributions.empirical_distribution import ECDF`.

4. Simulér vinderens betaling over $R = 100.000$ simulationer i hhv. en FPSB og en SPSB auktion. Sammenlign gennemsnittet af betalingerne i de to formater og vis et plot med histogrammerne sammen. Diskuter fordele og ulemper ved de to auktionsformater og giv din anbefaling til, hvilket format der bør bruges af privatpersoner.