Mikroøkonomi B
Hjemmeopgave 2

Afleveres senest tirsdag d. 3. juni kl 18.00

Aflevering sker via Github classroom. Lav en undermappe kaldet "submission", hvori du lægger pdf'en med din besvarelse samt endnu en undermappe, "kode", hvori du lægger din kode. På forsiden skrives navnene og KU-brugernavne på alle deltagere i gruppen.

1 Straffespark

Betragt et straffespark spil, hvor spiller 1 er målmand og spiller 2 er angriberen. Angriberen kan være to typer: højre- eller venstrebenet. De to typer har forskellige relative styrker i præcision idet en højrebenede er bedre til at sparke til venstre, mens venstrebenede er mere præcise mod højre.

Tabel 1 viser to matricer med sandsynligheder for, at målmanden (spiller 1, rækkespilleren) har succes med at redde bolden: en for hver angribertype. Det anslås, at der er 10-12% venstrehåndede, så du skal antage, at sandsynligheden for en venstrehåndet er $\Pr(\theta_2 = \theta_V) = 11\%$.

Table 1: Sandsynlighed for Redning i Procent

(a) Venstrebenet angriber, $\theta_2 = \theta_V$

	Angriber		
Målmand	L	C	R
L	41.8	18.8	5.5
C	0.0	100.0	0.0
R	10.9	10.7	51.0

(b) Højrebenet angriber, $\theta_2 = \theta_H$

	Angriber		
Målmand	L	C	R
L	31.8	18.8	15.5
C	0.0	100.0	0.0
R	0.9	10.7	61.0

Note: Hver celle angiver sandsynligheden i procent for, at målmanden redder bolden for de givne valg af retninger for de to spillere. Der er ikke tale om virkelige data, men fiktive tal opfundet af kursets forelæser (på baggrund af tallene fra Chiappori et al. [2002]).

1. Antag først, at begge spillere observerer angriberens type og løs for Nash-ligevægten i de to spil.

2. Antag nu, at kun angriberen kender sin type, θ_2. Find den Bayesianske Nash-ligevægt.

3. Antag nu, at fordelingen af højre og venstrehåndede havde været omvendt, så $\Pr(\theta_2 = \theta_H) = 11\%$. Find den Bayesianske Nash-ligevægt.

4. Kommenter på forskelle og ligheder mellem dine resultater ovenfor og forklar intuitionen bag. Er det bedst at være højre- eller venstrebenet og hvorfor? (Max $\frac{1}{2}$ side.)

2 Dynamisk Priskonkurrence

Vi betragter et gentaget priskonkurrencespil mellem to virksomheder, hvor stadiespillet har payoffs givet ved

$$D_i(p_i, p_j) = \frac{\exp(v_i)}{1 + \exp(v_i) + \exp(v_j)},$$

hvor

$$\begin{aligned} v_i &= 1 - p_i + \alpha R(p_i, p_j), \quad \alpha \geq 0, \\ R_i(p_i, p_j) &= \begin{cases} 1 & \text{hvis } p_i < p_j, \\ \frac{1}{2} & \text{hvis } p_i = p_j, \\ 0 & \text{hvis } p_i > p_j. \end{cases} \end{aligned}$$

I stadiespillet løser firmaerne

$$\max_{p_i} \pi_i(p_i, p_j) = D_i(p_i, p_j)(p_i - c),$$

hvor $c = 0$ er den fælles marginalomkostning (dvs. der er ingen marginale omkostninger).

Firmaerne spiller nu det uendeligt gentagne spil, hvor stadiespillet er som beskrevet ovenfor, og hvor firmaerne diskonterer fremtiden med faktoren $\delta \in (0; 1)$.

Vi vil starte med at betragt parameteriseringen, hvor $\alpha = 0.0$ (og kalde den "Cournot").

1. Bestem den statiske Nash-ligevægt i rene strategier, (p^*, p^*).

2. Løs for den optimale symmetriske pris, $p_1 = p_2 = \overline{p}$, som et statisk kartel vil sætte, dvs. $\overline{p}$ løser
$$\max_{p \geq 0} \pi_1(p, p) + \pi_2(p, p).$$

3. Giv et forslag til, hvordan kartellet kan fordele sin profit mellem de to deltagere begrundet i forhandlingsteori.

   Hint: Du skal basere dit forslag på en af de forhandlingsprotokoller, der er dækket i kurset. Hvis der kræves mere information, fx om diskonteringsfaktorer, så antag en fornuftig værdi. Tænk over, hvad firmaernes "outside option" er.

4. Bestem den mindste værdi af δ, hvor det er en underspilsperfekt Nash-ligevægt, at begge spillere følger flg. *Trigger*-strategi:

   - Start med at spille kartelprisen, $\overline{p}$,
   - Spil $\overline{p}$ hvis alle har spillet $\overline{p}$ indtil nu; ellers spil p^* som *straffen*.

   Hvilken årlig forrentning, r, svarer det til, hvis $\delta = \frac{1}{1+r}$, og er dette realistisk givet nuværende bankrenter?[1]

Betragt nu den situation, hvor $\alpha \to \infty$. Vi kan kalde dette "perfekte substitutter."

5. Forklar, hvorfor Trigger-strategien fra før ikke længere er en underspilsperfekt Nash-ligevægt. Foreslå dernæst en alternativ Trigger-strategi. Udled til slut den laveste værdi af δ, hvor din Trigger-strategi er en underspilsperfekt Nash-ligevægt.

   Hint: Start med at argumentere for, at modellen går mod den rene Bertrand-model, når $\alpha \to \infty$.

Betragt nu situationen, hvor $\alpha = 1$.

6. Forklar, hvorfor ingen af de to foregående Trigger-strategier er underspilsperfekte Nash-ligevægte.

3 Ebay

Den medfølgende notebook, `ebay.ipynb`, indlæser og behandler det medfølgende datasæt, som indeholder 7,9 mio. observationer på solgte produkter på eBay fra Backus et al. [2020].[2] Hver række i datasættet indeholder en række information om et konkret salg af et produkt, og vi kommer til at kalde en observation for *en auktion*, og vi vil indeksere den med a. Der er tre prisvariable i datasættet:

i. Den faktiske transaktionspris i USD (som vi ikke kommer til at bruge)

ii. Prisen relativt til en gennemsnitspris for produkttypen: p_a^2,

iii. Prisen relativt til startprisen, som sælger har spillet ud med: p_a^3.

   Hver af priserne har sine fordele og ulemper fra et teoretisk perspektiv, men p_a^2 og p_a^3 gør resultaterne mere sammenlignelige på tværs af auktioner.

[1] Du kan fx se på udlånsrenter til danske virksomheder på nationalbanken.statistikbank.dk.

[2] Data er tilgængelige på www.nber.org. Kode til databehandling er på github.com/AndersMunkN/PublicData/.

Delopgave A

Datasættet inkluderer et tal for, hvor mange besøgende, der har været på produktets side på eBay.com. Det er dog ikke sikkert, at dette tal direkte er at sammenligne med antallet af aktive bydere, der dukker op til en auktion. I denne opgave, skal du estimere, hvor stor en procentdel af de besøgende på hjemmesiden, der agerer som aktive bydere i auktionen. Du skal estimere dette ved at sammenligne de gennemsnitlige bud i underkategorier med en teoretisk forudsigelse fra en auktionsmodel.

Antag at byderne trækker valueringen $v_i \in \mathcal{U}(0,1)$, og antag at auktionen fungerer som en Second Price Sealed Bid (SPSB) auktion,[3] og at byderne spiller efter den Bayesianske Nash-ligevægt. Der er $\overline{n}_a$ potentielle bydere til en auktion, a, men kun en andel $x \in (0;1)$ deltager aktivt. Dvs. det faktiske antal bydere er $n = x\overline{n}_a$.

I den medfølgende kode er der for hver produktkategori, c (`metacat`), beregnet den gennemsnitlige pris, $\overline{p}_c^3$, og det gennemsnitlige antal views, $\overline{n}_c$ (`view_item_count`). Der er 30 kategorier, dvs. $c \in \{1, 2, ..., 30\}$.

1. Angiv den Bayesianske Nash-ligevægt i auktionen, og opskriv en analytisk formel for den forventede betaling (provenu), som auktionarius modtager, $\hat{p}_c(x)$, som funktion af x og $\overline{n}_c$.

   Hint: Udnyt resultatet om SPSB-auktionen, samt formlen for den k'te ordensstatistik for den uniforme fordeling.

2. Beregn de predikterede[4] forventede betalinger for hver af de 30 produktkategorier, hvis 20% af de besøgende (views) er auktionsdeltagere, dvs. hvis $x = 0.20$. Sammenlign dine prediktioner med data.

3. Bestem et estimat $\hat{x}$ som den værdi, der bedst forklarer data ud fra mindste kvadrerede residualer:

$$\hat{x} = \arg\min_{x\in[0;1]} Q(x), \quad Q(x) \equiv \frac{1}{30}\sum_{c=1}^{30}\left[\hat{p}_c(x) - \overline{p}_c^3\right]^2.$$

   Angiv $\hat{x}$ og $Q(\hat{x})$, og vis et plot af kriteriefunktionen $Q(x)$.

   Hint: Du kan starte med at plotte $Q(x)$ over et grid for x, fx $\{0.1, 0.2, ..., 0.9\}$. Baseret på dette kan du vælge en startværdi, som du giver til en numerisk optimizer. Husk at argumentere for dit valg af optimizer.

4. Betragt kategorien $c =$ `Cell Phones` & `Accesories`: Simulér $R = 100,000$ auktioner med det antal bydere, som impliceres af dit estimeree x fra før og med $\overline{n}_c =$

[3] I virkeligheden afgiver flere bydere simultant bud til sælger, som sælger så kan afslå, acceptere, eller give modbud til. På den måde indløber der bud over tid, indtil sælger endelig accepterer på et tidspunkt.

[4] En "predikteret" værdi betyder, at værdien kommer fra en model, i modsætning til en "observeret" værdi, som betyder, at værdien kommer fra et datasæt.

64 (antal views for denne kategori). Find for hver simulation $r = 1, ..., R$ den betaling, som vinderen i en SPSB auktion skal give, $p_{(r)}$. Sammenlign fordelingen af $\{p_{(r)}\}_{r=1}^{R}$ med fordelingen af de faktiske priser fra denne kategori, $\{p_a^3\}_{a \in \text{Cell Phones}}$.

Hint: udnyt det faktum, at hvis $v_i \sim IID\mathcal{U}(0,1)$, så er $v_{(k)} \sim \mathcal{B}(k, n+1-k)$, hvor $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ står for beta-fordelignen med parametre α og β. Du kan trække fra denne fordeling med kommandoen `np.random.beta()`. Du kan sammenligne fordelingerne ved at plotte dem i et histgram, `plt.hist(p, density=True, alpha=0.5)`.

5. Formulér en hypotese for, hvornår auktionsmodellen burde virke særligt godt hhv. særligt dårligt, og afprøv din hypotese.

   Hint: Du kan fx sammenligne auktioner med forskellige produktkateagorier (`metacat`), antal af fotos (`photo_count`), sælgererfaring (`to_lst_cnt`, antal tidligere listings fra sælger), eller hvorvidt sælgeren er en butik (`store`).

Delopgave B

I denne delopgave skal du fokusere på prisvariablen P2 (dvs. pris relativt til gennemsnittet for den produkttype). Målet er, at du skal estimere den underliggende fordeling af valueringer for alle bydere på basis udelukkende af de vindende priser.

I den medfølgende kode er der foretaget en stikprøveudvælgelse for dig, som snævrer data ind til kategorien $c =$ `Cell Phones & Accesories`, og som fjerner nogle outliers, der ellers besværliggør dataarbejdet. [5]

Du skal antage, at data er fremkommet ved, at der er budt i en Second Price Sealed Bid (SPSB) auktion blandt $n = 10$ bydere, som spiller den Bayesianske Nash-ligevægt, hvor byderne har trukket deres valueringer, $v_i \sim \text{IID}F$, fra en fordeling F. Denne opgave handler om at prøve at bestemme fordelingen F.

1. Vis et histogram for de faktiske priser i data sammen med de vindende priser fra $R = 100,000$ simulerede SPSB auktioner, hvor valueringerne er trukket fra hhv.

   (a) en $\chi^2(1)$ fordeling,

   (b) $\mathcal{LN}(\mu, \sigma)$: en lognormal fordeling med $\mu = -0.5$ og $\sigma = 0.5$.[6]

   Hint: Brug funktionerne `np.random.chisquare(1,(N,R))` og `np.exp(np.random.normal(-.5,.5,(N,R)))` til at trække valueringerne. Brug dernæst den dominante strategi i en SPSB auktion og find for hvert $r = 1, ..., R$ betalingen, som den vindende byder skal betale.

[5] Prisen p^2 (`price2ref`) er under 2, $p_a^2 < 2$, og antallet af observationer brugt til at konstruere `price2ref` skal være mindst 10: `count1 >= 10`. (I data er 86% har observationer med `count1 < 10` sat `price_ref = item_price`, så den relative pris bliver 1.0.)

[6] Hvis $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, så er $\exp(X_i) \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$.

Antag nu, at fordelingen af valueringerne, F, faktisk er en log normal fordeling, $\mathcal{LN}(\mu, \sigma)$ med $\sigma = \frac{1}{2}$.

2. Bestem den værdi af μ, der bedst rationaliserer data.
   (Hvis du kan, så prøv om du også kan estimere σ.)

   Hint: Som minimum bør du prøve forskellige værdier og illustrere grafisk, hvorfor dit valg af $\hat{\mu}$ er godt. Det vil være bedre at bruge funktionen `ECDF` til at kunne måle afstanden mellem de to fordelinger. Se den medfølgende notebook, `ecdf.ipynb` for hjælp.

Forestil dig nu, at individer med den samme underliggende fordeling af valueringer skulle byde i en First Price Sealed Bid (FPSB) auktion i stedet en SPSB auktion.

3. Find den Bayesianske Nash-ligevægt i FPSB auktionen, $b^*(v)$. Evaluér funktionen for $v \in \{0.5, 1.0\}$ og vis funktionen grafisk.

   Hint: Udnyt Provenuækvivalens. Husk at løsningen er en funktion, $b^*(v)$, som skal kunne evalueres for forskellige v.

4. Simulér vinderens betaling over $R = 100.000$ simulationer i hhv. en FPSB og en SPSB auktion.
   Sammenlign gennemsnittet af betalingerne i de to formater og vis et plot med histogrammerne sammen. Diskuter fordele og ulemper ved de to auktionsformater og giv din anbefaling til, hvilket format der bør bruges af privatpersoner.

References

Matthew Backus, Thomas Blake, Brad Larsen, and Steven Tadelis. Sequential bargaining in the field: Evidence from millions of online bargaining interactions. *The Quarterly Journal of Economics*, 135(3):1319–1361, 2020.

P-A Chiappori, Steven Levitt, and Timothy Groseclose. Testing mixed-strategy equilibria when players are heterogeneous: The case of penalty kicks in soccer. *American Economic Review*, 92(4):1138–1151, 2002.