

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS



ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS MORFOLÓGICOS EN ROCAS SEDIMENTARIAS USANDO FOURIER ELÍPTICO Y REDES NEURONALES

Erik Mejía Hernández

Tesis de Maestría

presentada a la Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica

de acuerdo a los requerimientos de la Universidad para obtener el título de

MAESTRÍA EN CIENCIAS DEL PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

Directores de tesis:

Dr. José de Jesús Villa Hernández y Dr. Gamaliel Chávez Moreno

UNIDAD ACADÉMICA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Zacatecas, Zac., Algun dia de 2020

Contenido General

	Pag.
Lista de figuras	iii
1 Introducción	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Planteamiento del problema de investigación	5
1.3 Justificación del problema de investigación	5
1.4 Preguntas de Investigación	5
1.5 Hipótesis	6
1.6 Objetivo General	6
1.7 Objetivos Específicos	6
1.8 Estructura de la tesis	7
2 Marco Teórico	8
2.1 La tierra como sistema	8
2.2 Las rocas y su ciclo	11
2.3 Rocas sedimentarias	15
2.4 Morfología de rocas sedimentarias	19
2.5 Forma, redondez y rugosidad	20
2.6 Métodos para obtener la forma	22
2.7 Métodos para obtener la redondez	24
2.8 Clasificación de redondez de rocas sedimentarias	26

3	Modelo y propuesta de Investigación	28
3.1	Modelo de Investigación de la estimación de parámetros morfológicos en rocas sedimentarias usando Fourier Elíptico y redes neuronales	28
3.2	Fourier Elíptico	30
3.3	Algoritmo para estimar la redondez	33
3.4	Redes neuronales	36
3.4.1	Funciones de Activación	37
4	Resultados y discusiones	45
4.1	Esfericidad	45
4.2	Redondez	48
5	Conclusiones	53

Lista de figuras

Figura	Pag.
1.1 Forma, redondez y textura superficial propuestas por Barrett [2].	3
2.1 Ejemplo de las cuatro esferas de la tierra: a) hidrosfera; b) atmósfera; c) biosfera; d) tierra sólida.	9
2.2 Estructura en capas de la Tierra.	10
2.3 Ejemplos de los tres tipos de rocas.	11
2.4 Ciclo de las rocas.	13
2.5 Formación de rocas sedimentarias. Litificación de sedimentos. Compactación y cementación.	16
2.6 Rocas sedimentarias detríticas.	18
2.7 Rocas sedimentarias químicas.	19
2.8 Una representación simplificada de la forma, redondez y rugosidad en 3 dimensiones para ilustrar su independencia [2].	21
2.9 Forma, redondez y textura superficial propuestas por Barrett [2].	22
2.10 Clasificaciones para la redondez de una partícula propuestas por Russell, Taylor y Pettijohn [21].	26

Figura	Pag.
2.11 Clasificaciones para la redondez de una partícula propuestas por Krumbein[14]. . .	27
3.1 Modelo metodológico de la estimación de parámetros morfológicos en rocas sedimentarias usando Fourier Elíptico y redes neuronales	29
3.2 Representación gráfica del código de cadena de un contorno cerrado [17]	31
3.3 Flujo de trabajo para obtener el mayor círculo circunscrito.	34
3.4 Resultado del suavizado de la partícula utilizando Fourier Elíptico.	34
3.5 Flujo para aproximar las esquinas con círculos.	35
3.6 Estructura de una neurona artificial análogo a una biológica.	36
3.7 Arquitectura de una red neuronal artificial.	37
3.8 Función de activación Sigmoide.	38
3.9 Función de activación Tangente Hiperbólico.	39
3.10 Función de activación ReLU (Unidad Lineal Rectificada).	40
3.11 Función de activación PReLU (Unidad Lineal Rectificada Parametrizada).	41
3.12 Función de activación ELU (Unidad Lineal Exponencial).	42
4.1 Clasificación de la redondez usando los conjuntos de entrenamiento y de pruebas. El eje horizontal representa el número de la imagen que se esta analizando, el eje vertical representa el contraste del valor obtenido por la red neuronal (color azul) contra el valor real de esfericidad de la imagen (color naranja).	46

Figura	Pag.
4.2 Medición del error de la red neuronal utilizando la diferencia relativa. El eje horizontal representa la diferencia que hay entre el valor obtenido por la red neuronal y el valor real, el eje vertical representa la frecuencia con que cada una de las diferencias se presentó.	47
4.3 Arquitectura final de la red neuronal para predecir la redondez de rocas sedimentarias. El superíndice corresponde a la cantidad de neuronas en cada capa.	50
4.4 Clasificación de la redondez usando los conjuntos de entrenamiento y de pruebas. El eje horizontal representa el número de la imagen que se está analizando, el eje vertical representa el contraste del valor obtenido por la red neuronal (color azul) contra el valor real de esfericidad de la imagen (color naranja).	51
4.5 Medición del error de la red neuronal utilizando la diferencia relativa. El eje horizontal representa la diferencia que hay entre el valor obtenido por la red neuronal y el valor real, el eje vertical representa la frecuencia con que cada una de las diferencias se presentó.	52

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes

Nuestro planeta está conformado por la hidrosfera, atmósfera, biosfera y tierra sólida. El componente principal de la tierra sólida son las rocas [19]. Las rocas son agregados naturales de uno o más minerales. Estas pueden clasificarse por su origen y proceso en tres clases: ígneas, metamórficas y sedimentarias [29]. Las rocas ígneas son las que se forman a partir del enfriamiento de minerales fundidos (magma) entre la corteza terrestre y el manto superior. Las rocas ígneas algunas veces pueden alcanzar la parte superior de la corteza terrestre por medio de volcanes o por el ascenso de capas de la corteza. En la corteza existe un proceso llamado meteorización que consiste en la fragmentación de rocas por alteraciones físicas y químicas (como la gravedad, erosión, materia orgánica). Estas rocas se transportan generalmente por gravedad y se depositan en las zonas más bajas de la corteza terrestres (la mayoría en los océanos). Estos sedimentos son nuevas rocas y se les conocen como rocas sedimentarias. Las rocas metamórficas se generan a partir de rocas ígneas, sedimentarias o mismas rocas metamórficas. Como su nombre lo indica estas rocas se generan por el cambio (metamorfosis)

de una roca madre, este cambio es generado por altas presiones y temperaturas, pero sin lleguen a fundirse [19].

De estos tres tipos de rocas, las más importantes son las rocas sedimentarias por las siguientes razones: (1) representan el 80% de la corteza terrestre, (2) permiten conocer los procesos e historia de la tierra, (3) son de gran importancia en el sector económico porque de ellas derivan el petróleo, gas natural, carbón, sal, azufre, potasio, yeso, caliza, fosfato, uranio y más minerales [4], (4) en algunos casos representan un riesgo para poblaciones como la asentadas en las cercanías de volcanes o grandes sedimentos, (5) en el estudio de suelo para la construcción [26].

Las rocas sedimentarias se estudian por su composición física, química y mineralógica. El estudio físico se conforma por tres parámetros; tamaño, morfología y orientación. El conocer estos parámetros nos permite deducir el origen, los diversos procesos transporte, el entorno reológico y climático y su deposición. Para medición de tamaño y la orientación existen diversas técnicas muy bien establecidas y muy precisas [35]. Por otro lado la morfología es un concepto reciente, en comparación a los otros y aún se encuentra en desarrollo y búsqueda de conceptos universales [12].

La morfología describe la forma (shape) de objetos o partículas mediante mediciones de su contorno. La morfología no sólo es importante en el estudio de rocas sedimentarios sino que se extiende a otros campos científicos y productivos como la nanomedicina, agricultura, biología, neurociencias, arte visual, entre otros ([7], [30], [34]). ha sido y es una rama muy importante de nuestra vida, ya que ella se ha encargado de entender y estudiar la razón del porque tienen cierto aspecto externo todos y cada uno de los objetos o seres vivos. La morfología de rocas sedimentarias se describe por tres parámetros: forma general (form), redondez (roundness)

y textura superficial (roughness), los cuales se relacionan a procesos geológicos. Estos tres parámetros son jerárquicos y de escalas diferentes, por lo que uno no afecta al otro. La forma es la característica de mayor jerarquía que está relacionada con los aspectos más generales. La forma se calcula mediante relaciones axiales adimensionales o relaciones de circularidad. La redondez es una característica intermedia superpuesta a la forma. El grado de redondez o angularidad está relacionado con las curvas y las esquinas principales del contorno. La rugosidad o textura se refiere a irregularidades más finas superpuestas en la redondez y la forma ([2]; [3]; [20]). Estas propiedades se muestran en la Figura 1.1.

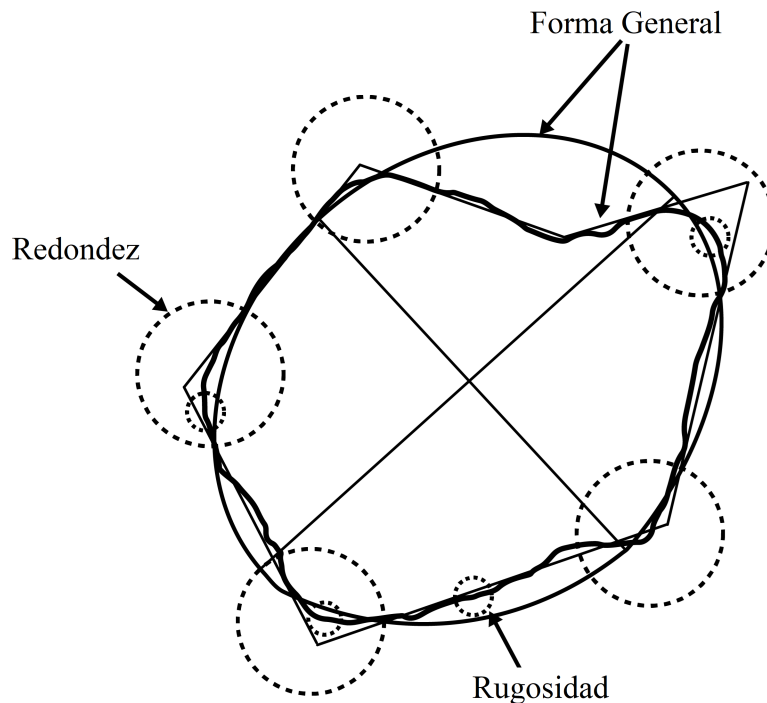


Figura 1.1 Forma, redondez y textura superficial propuestas por Barrett [2].

Existen diversas expresiones para medir forma, una de las más usadas en el campo geológico es la propuesta por Wadell[37], la cual se obtiene de la relación entre el radio del círculo cuya área es igual a la de la partícula y el radio del círculo más pequeño que inscribe a la partícula [37]. Existen tres enfoques para medir la redondez; los basados en curvatura,

los que emplean Fourier y los relacionados con Fractales. El método basado en curvatura es simple y preciso, sin embargo es un método que depende de la escala. Los métodos basados en Fourier son muy populares sin embargo analizar el espectro es complicado y de un alto costo computacional. El uso de fractales para describir la forma se ha vuelto popular sin embargo tiene problemas para identificar algunos tipos de redondez y son muy sensibles al suavizado de contornos.

En la presente tesis planteamos usar redes neuronales para estimar la forma y redondez de rocas sedimentarias. La variable de entrada a la red neuronal son las series de coeficientes Fourier Elíptico concatenados. Se eligió este método de transformación por ser invariante a la escala, la rotación y traslación. Como objetivo para la forma se empleó la circularidad propuesta por Wadell [37] descrita anteriormente. Para la redondez, se eligió como objetivo el grado de angulosidad calculado con el método propuesto por Wadell [36], el cual define el grado de redondez como la relación entre el radio de curvatura promedio de las esquinas de una partícula y el radio del círculo circunscrito más grande posible. Se probaron diversas arquitecturas, y la mejor arquitectura de red neuronal profunda para calcular la redondez fue: una red neuronal profunda de 6 capas, la capa de entrada con la misma cantidad de neuronas que los datos de entrada y función de activación Sigmoide, 4 capas ocultas con una cantidad de neuronas que se iba reduciendo la mitad de la capa anterior, con función de activación Sigmoide. La capa de salida con una sola neurona con función de activación Sigmoide. La base de datos para entrenar la red neuronal se compone de 1123 imágenes de rocas reales de diversos fenómenos geológicos. La red neuronal tiene un error de mínimos cuadrados de $5e-03$ con los datos de entrenamiento. El resultado fue comparado con clasificaciones visual realizadas por Krumbein y Sloss. La red neuronal es invariante a la escala, rotación y traslación,

ademas de permitirnos tener la redondez y la circularidad en tiempo 2800 veces más rápido que el método de Wadell [37].

1.2 Planteamiento del problema de investigación

Los métodos para medir la forma general y redondez no son invariantes a la escala, rotación y traslación. Los métodos basados en Fourier son invariantes a estas 3 transformaciones, pero el tratamiento de su resultado es complejo. Por lo que no existe un método invariante y fácil de ajustar.

1.3 Justificación del problema de investigación

El análisis morfológico de las rocas sedimentarias es importante en geología para la reconstrucción histórica de nuestro planeta. También es importante en sectores económicos y de prevención de riesgo. Por lo que es necesario tener un método el cual sea invariante a la escala, rotación y traslación, así como preciso, fácil y rápido de usar.

1.4 Preguntas de Investigación

- ¿Será capaz una red neuronal profunda de modelar el algoritmo de Zheng [11] que usa el método de Wadell [36]?
- ¿Cuales serán las arquitecturas de red neuronal profunda que tendrán bajo MSE y ME para predecir la Redondez y Circularidad?

1.5 Hipótesis

La red neuronal mide la redondez independientemente de la escala, rotación y traslación con una velocidad mayor que el algoritmo de Zheng [11].

1.6 Objetivo General

Obtener un modelo basado en redes neuronales para clasificar la forma general y redondez de las rocas sedimentarias, utilizando el espectro de Fourier Elíptico como entrada. Con el fin de tener una herramienta precisa, fácil y rápida que pueda ser usada para fines geológicos.

1.7 Objetivos Específicos

1. Estudiar y aplicar la circularidad propuesto por Wadell [37].
2. Estudiar y aplicar la redondez propuesto por Wadell[36] utilizando el algoritmo de círculos circunscritos de Zheng[11].
3. Estudiar y aplicar el método de Fourier Elíptico propuesto por Kuhl [17].
4. Entrenar diversas arquitecturas de redes neuronales profundas con la información del espectro de Fourier Elíptico [17], usando la redondez y circularidad a la que pertenecen como salida.
5. Contrastar los resultados de la mejor red neuronal profunda con los que se obtienen utilizando los objetivos específicos 1 y 2.

1.8 Estructura de la tesis

La estructura de esta tesis se distribuye como se describe a continuación:

- Marco teórico: Se expone la introducción a lo que son las rocas sedimentarias, así como las teorías base del trabajo.
- Método y propuesta de investigación: Se detalla la metodología empleada en la presente investigación.
- Resultados y discusiones: Se desarrollan los casos de prueba que se usaron para la experimentación y se exponen las limitaciones que se tienen.
- Conclusiones: Se detallan las principales conclusiones de esta investigación.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 La tierra como sistema

La geología, ciencia de la tierra, estudia nuestro planeta como un sistema que engloba cuatro esferas; hidrosfera, atmosfera, biosfera y tierra sólida. En la Figura 2.1 se muestran ejemplos ilustrativos de cada esfera. La hidrosfera es una masa de agua dinámica que está en movimiento continuo, evaporándose de los océanos a la atmósfera, precipitándose sobre la Tierra y volviendo de nuevo al océano por medio de los ríos. La atmósfera es una capa gaseosa que rodea a la Tierra. A pesar de sus modestas dimensiones, este delgado manto de aire es una parte integral del planeta. No sólo proporciona el aire que respiramos, sino que también nos protege del intenso calor solar y de las peligrosas radiaciones ultravioletas. La biosfera incluye toda la vida en la Tierra. Está concentrada cerca de la superficie en una zona que se extiende desde el suelo oceánico hasta varios kilómetros de la atmósfera. Debajo de la atmósfera y los océanos se encuentra la Tierra sólida. Gran parte del estudio de la Tierra sólida se concentra en los eventos geográficos superficiales (más accesibles). Por fortuna, estos eventos externos se relacionan directamente con lo que ocurre debajo de la superficie. Examinando los rasgos superficiales más destacados y su extensión global, podemos obtener pistas para explicar los

procesos dinámicos que han conformado nuestro planeta. Se dice que es un sistema debido a que estas cuatro esferas interactúan constantemente ([19];[24]).

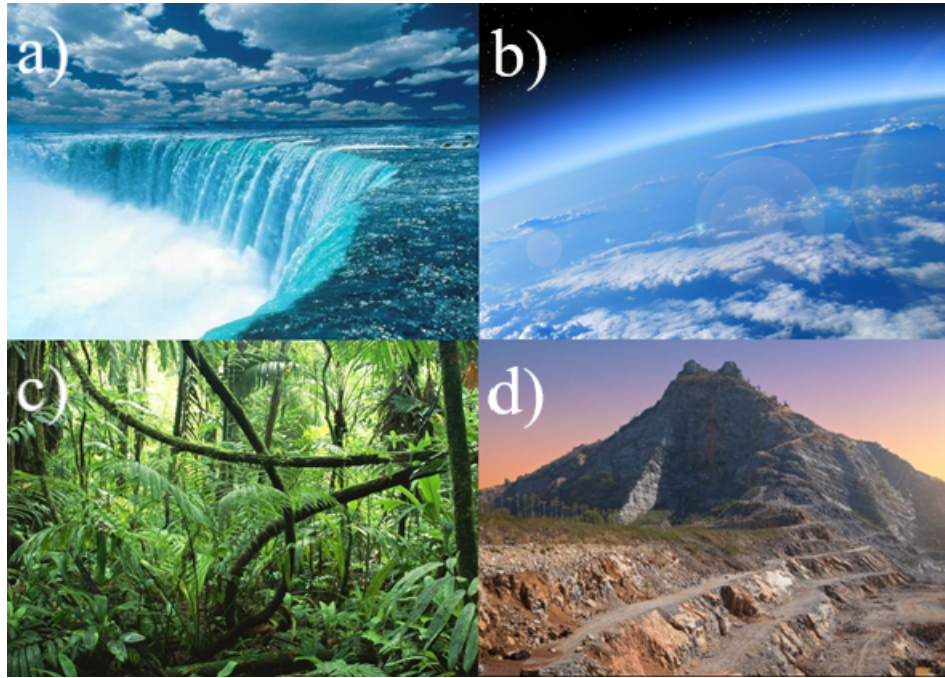


Figura 2.1 Ejemplo de las cuatro esferas de la tierra: a) hidrosfera; b) atmósfera; c) biosfera; d) tierra sólida.

La tierra sólida se divide en tres capas: la corteza, el manto y el núcleo. La corteza, capa rocosa externa, comparativamente fina de la Tierra, se divide generalmente en corteza oceánica y corteza continental. El Manto representa más del 82 por ciento del volumen de la Tierra, una envoltura rocosa sólida que se extiende hasta una profundidad de 2.900 kilómetros. El límite entre la corteza y el manto representa un cambio de composición química. Núcleo. Se cree que la composición del núcleo es una aleación de hierro y níquel con cantidades menores de oxígeno, silicio y azufre, elementos que forman fácilmente compuestos con el hierro ([19]; [24]). En la Figura 2.2 se detalla las subdivisiones de las tres capas.

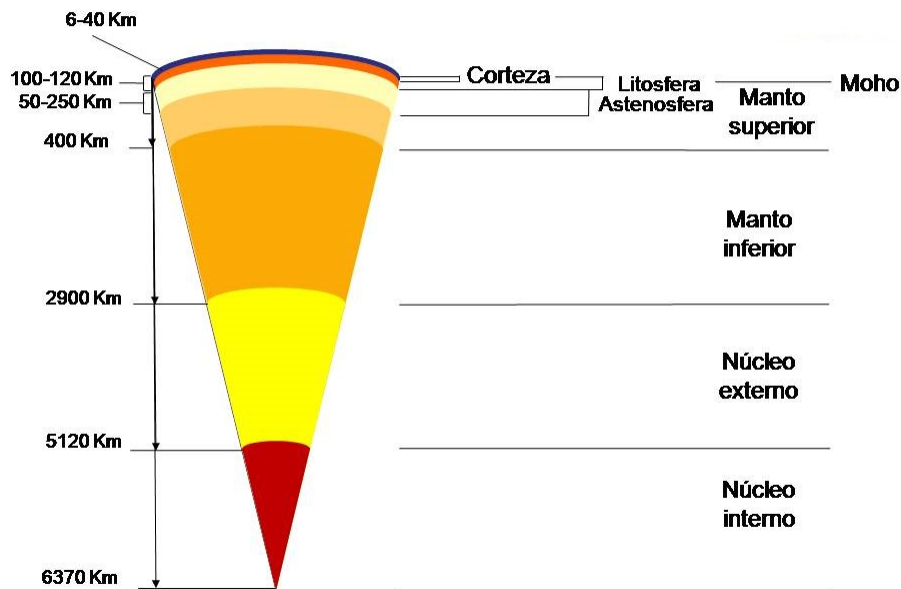


Figura 2.2 Estructura en capas de la Tierra.

De todas las capas existe un alto interés por la corteza ya que en ella se desenvuelve la vida humana y la biosfera en general. Esta superficie terrestre es dividida en continentes y las cuencas oceánicas. Estas dos superficies tienen diferentes características físicas y químicas. Para la superficie terrestre continental el elemento fundamental de mayor abundancia son las rocas. Al examinar una roca con atención, encontramos que consta de cristales o granos más pequeños denominados minerales. Los minerales son compuestos químicos (o en algunas ocasiones elementos únicos), cada uno de ellos con su propia composición y sus propiedades físicas. La naturaleza de la roca está definida por su composición química y por sus propiedades texturales (tamaño, forma y orientación). Estos dos aspectos son reflejo de los procesos geológicos que la crearon. Esta comprensión tiene muchas aplicaciones prácticas, como en la búsqueda de recursos minerales y energéticos básicos y la solución de problemas ambientales.

2.2 Las rocas y su ciclo

Los geólogos dividen las rocas en tres grandes grupos: ígneas, sedimentarias y metamórficas, algunos ejemplos de cada tipo de roca se muestran en la Figura 2.3. Rocas ígneas. Las rocas ígneas (ignis = fuego) se forman cuando la roca fundida, denominada magma, se enfría y se solidifica. El magma es roca fundida que se puede formar a varios niveles de profundidad en el interior de la corteza de la Tierra y el manto superior. A medida que se enfría el magma, se van formando y creciendo los cristales de varios minerales. Cuando el magma permanece en el interior profundo de la corteza, se enfría lentamente durante miles de años. Las rocas ígneas de grano grueso que se forman muy por debajo de la superficie se denominan plutónicas. Las rocas ígneas que se forman en la superficie terrestre se denominan volcánicas y suelen ser de grano fino.



Figura 2.3 Ejemplos de los tres tipos de rocas.

Las rocas sedimentarias se forman por acumulación de sedimentos. Los sedimentos están compuestos de partículas de diversos tamaños transportadas y son sometidos a procesos físicos

y químicos (diagénesis), que dan lugar a materiales consolidados. El agua, el viento o el hielo glacial suelen transportar los productos de la meteorización (fragmentación de rocas) a lugares de sedimentación donde éstos forman capas relativamente planas. Normalmente los sedimentos se convierten en roca o se litifican por la compactación y cementación. La compactación tiene lugar a medida que el peso de los materiales suprayacentes comprime los sedimentos en masas más densas. La cementación se produce conforme el agua que contiene sustancias disueltas se filtra a través de los espacios intergranulares del sedimento. Con el tiempo, el material disuelto en agua precipita entre los granos y los cementa en una masa sólida.

El tercer tipo son las rocas metamórficas. Estas se producen a partir de rocas ígneas, sedimentarias o incluso otras rocas metamórficas. Así, cada roca metamórfica tiene una roca madre, la roca a partir de la que se ha formado. Metamórfico es un adjetivo adecuado porque su significado literal es «cambiar la forma». La mayoría de cambios tienen lugar a temperaturas y presiones elevadas que se dan en la profundidad de la corteza terrestre y el manto superior. Los procesos que crean las rocas metamórficas a menudo progresan de una manera incremental, desde cambios ligeros (metamorfismo de grado bajo) hasta cambios sustanciales (metamorfismo de grado alto).

Estos tres tipos de rocas interactúan, de hecho forman un ciclo, véase la Figura 2.4. Las rocas pueden pasar por cualquiera de los tres estados cuando son forzadas a romper el equilibrio. Una roca ígnea como el basalto puede disgregarse y alterarse cuando se expone a la atmósfera, o volver a fundirse al subducir por debajo de un continente. Debido a las fuerzas generadoras del ciclo de las rocas, las placas tectónicas y el ciclo del agua, las rocas no pueden mantenerse en equilibrio y son forzadas a cambiar ante los nuevos ambientes.

Podemos iniciar explicando el ciclo con el magma. El magma que es la roca fundida que se forma a una gran profundidad por debajo de la superficie de la Tierra. Con el tiempo, el magma se enfría y se solidifica. Este proceso, denominado cristalización, puede ocurrir debajo de la superficie terrestre o, después de una erupción volcánica, en la superficie. En cualquiera de las dos situaciones, las rocas resultantes se denominan rocas ígneas.

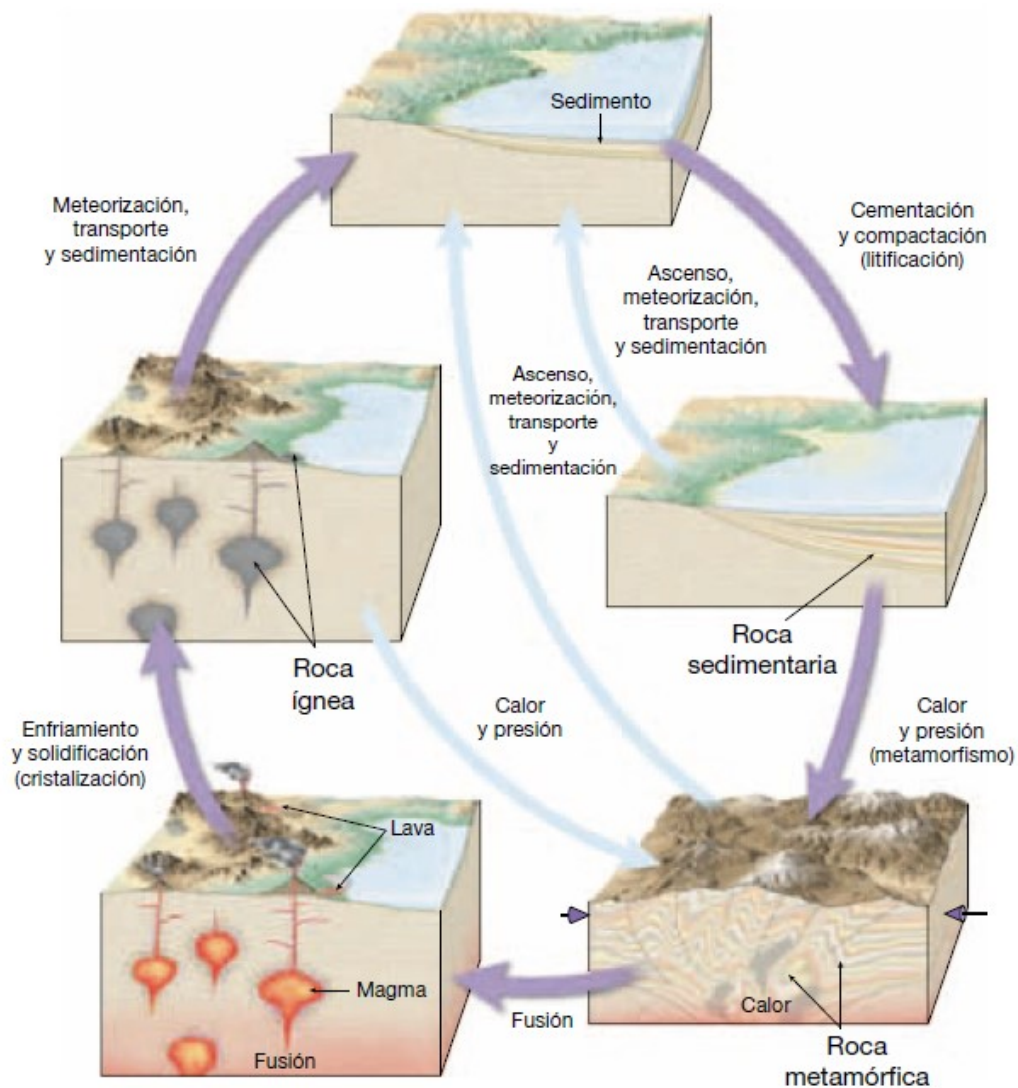


Figura 2.4 Ciclo de las rocas.

Si las rocas ígneas afloran en la superficie experimentarán meteorización, en la cual la acción de la atmósfera desintegra y descompone lentamente las rocas. Los materiales resultantes pueden ser desplazados pendiente abajo por la gravedad antes de ser captados y transportados por algún agente erosivo como las aguas superficiales, los glaciares, el viento o las olas. Por fin, estas partículas y sustancias disueltas, denominadas sedimentos, son depositadas. Aunque la mayoría de los sedimentos acaba llegando al océano, otras zonas de acumulación son las llanuras de inundación de los ríos, los desiertos, los pantanos y las dunas. A continuación, los sedimentos experimentan litificación, un término que significa «conversión en roca». El sedimento suele litificarse dando lugar a una roca sedimentaria cuando es compactado por el peso de las capas suprayacentes o cuando es cementado conforme el agua subterránea de infiltración llena los poros con materia mineral. Si la roca sedimentaria resultante se entierra profundamente dentro de la tierra e interviene en la dinámica de formación de montañas, o si es intruida por una masa de magma, estará sometida a grandes presiones o a un calor intenso, o a ambas cosas. La roca sedimentaria reaccionará ante el ambiente cambiante y se convertirá en un tercer tipo de roca, una roca metamórfica. Cuando la roca metamórfica es sometida a cambios de presión adicionales o a temperaturas aún mayores, se fundirá, creando un magma, que acabará cristalizando en rocas ígneas. Los procesos impulsados por el calor desde el interior de la Tierra son responsables de la creación de las rocas ígneas y metamórficas. La meteorización y la erosión, procesos externos alimentados por una combinación de energía procedente del Sol y la gravedad, producen el sedimento a partir del cual se forman las rocas sedimentarias. Caminos alternativos. Las vías mostradas en el ciclo básico no son las únicas posibles. Al contrario, es exactamente igual de probable que puedan seguirse otras vías distintas de las descritas en la sección precedente. Esas alternativas se indican mediante las líneas azules en la Figura 2.4. Las rocas ígneas, en vez de ser expuestas

a la meteorización y a la erosión en la superficie terrestre, pueden permanecer enterradas profundamente. Esas masas pueden acabar siendo sometidas a fuertes fuerzas de compresión y a temperaturas elevadas asociadas con la formación de montañas. Cuando esto ocurre, se transforman directamente en rocas metamórficas. Las rocas metamórficas y sedimentarias, así como los sedimentos, no siempre permanecen enterrados. Antes bien, las capas superiores pueden ser eliminadas, dejando expuestas las rocas que antes estaban enterradas. Cuando esto ocurre, los materiales son meteorizados y convertidos en nueva materia prima para las rocas sedimentarias. Las rocas pueden parecer masas invariables, pero el ciclo de las rocas demuestra que no es así. Los cambios, sin embargo, requieren tiempo; grandes cantidades de tiempo.

2.3 Rocas sedimentarias

Las rocas sedimentarias son de gran interés por las siguientes razones: (1) Cubren alrededor del 80% de la corteza terrestre, que es la parte de la tierra sólida con la que más interactuamos. (2) Representan la base del conocimiento de otras áreas geológicas como la estratigrafía y la geología estructural. (3) Un alto porcentaje de la actividad económica está relacionada con depósitos de rocas sedimentarias, algunos ejemplos son: el petróleo, el gas natural, carbón, sal, sulfuro, potasio, yeso, caliza, fosfato, uranio, hierro, magnesio y una numerosa lista de elementos en la construcción. (4) En la geotecnia son una parte importante para caracterizar el tipo de suelo. (5) En la petrología sedimentaria es clave para determinar la litología, relieve, clima y actividad tectónica.

Como se describió anteriormente las rocas sedimentarias son resultante del depósito de material sólido producto de la meteorización mecánica y química. La transformación del sedimento en roca sedimentaria se conoce como litificación. El sedimento puede experimentar

grandes cambios desde el momento en que fue depositado hasta que se convierte en una roca sedimentaria y posteriormente es sometido a las temperaturas y las presiones que lo transforman en una roca metamórfica. El término *diagénesis* (día=cambio; génesis=origen) es un término general para todos los cambios químicos, físicos y biológicos que tienen lugar después de la deposición de los sedimentos, así como durante y después de la litificación. La litificación se refiere a los procesos mediante los cuales los sedimentos no consolidados se transforman en rocas sedimentarias sólidas (lithos=piedra; fic=hacer). Los procesos básicos de litificación son la compactación y la cementación, véase la Figura 2.5.

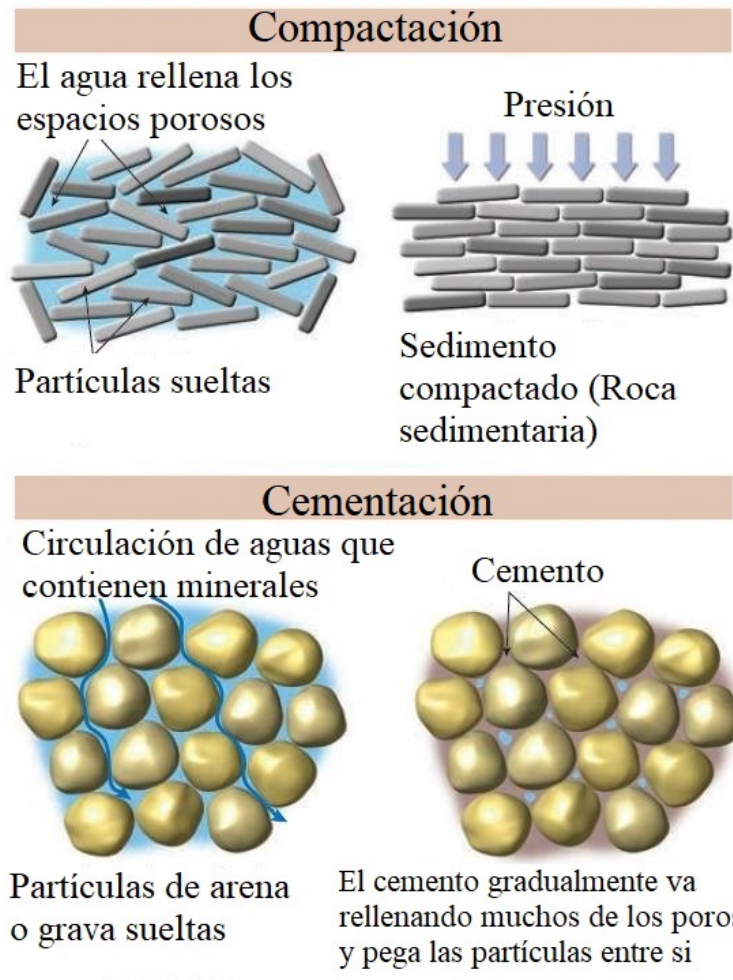


Figura 2.5 Formación de rocas sedimentarias. Litificación de sedimentos. Compactación y cementación.

El cambio diagenético físico más habitual es la compactación. Conforme el sedimento se acumula a través del tiempo, el peso del material suprayacente comprime los sedimentos más profundos. Cuanto mayor es la profundidad a la que está enterrado el sedimento, más se compacta y más firme se vuelve. Al inducirse cada vez más la aproximación de los granos, hay una reducción considerable del espacio poroso (el espacio abierto entre las partículas). Conforme se reduce el espacio del poro, se expulsa gran parte del agua que estaba atrapada en los sedimentos. Dado que las arenas y otros sedimentos gruesos son sólo ligeramente compresibles, la compactación, como proceso de litificación, es más significativa en las rocas sedimentarias de grano fino. La cementación es el proceso más importante mediante el cual los sedimentos se convierten en rocas sedimentarias. Es un cambio diagenético químico que implica la precipitación de los minerales entre los granos sedimentarios individuales. Los materiales cementantes son transportados en solución por el agua que percola a través de los espacios abiertos entre las partículas. A lo largo del tiempo, el cemento precipita sobre los granos de sedimento, llena los espacios vacíos y une los clastos. De la misma manera que el espacio del poro se reduce durante la compactación, la adición de cemento al depósito sedimentario reduce también su porosidad.

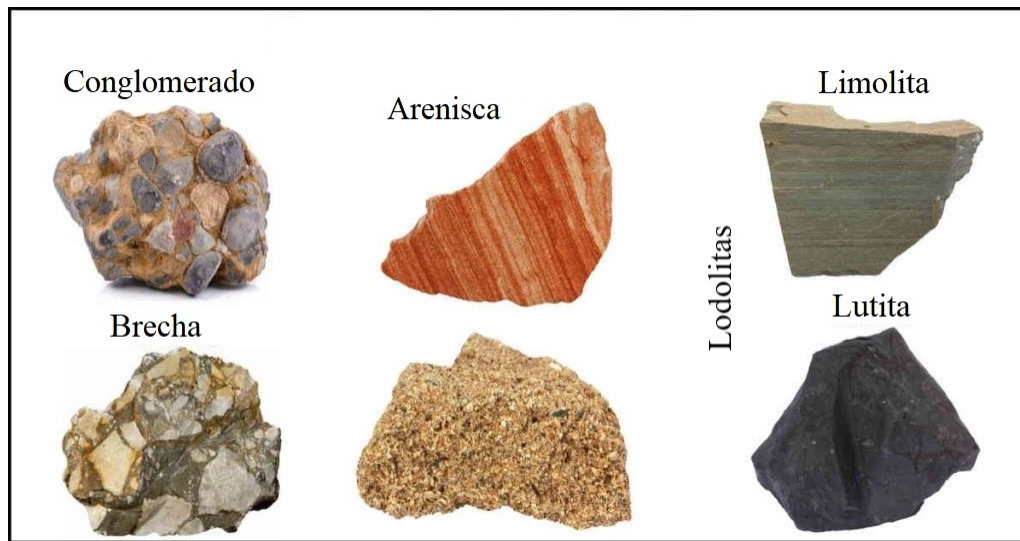


Figura 2.6 Rocas sedimentarias detríticas.

El sedimento tiene dos orígenes principales. En primer lugar, el sedimento puede ser una acumulación de material que se origina y es transportado en forma de clastos sólidos derivados de la meteorización mecánica y química. Los depósitos de este tipo se denominan detríticos y las rocas sedimentarias que forman, rocas sedimentarias detríticas, como se muestra en la Figura 2.6.

La segunda fuente principal de sedimento es el material soluble producido en gran medida mediante meteorización química. Cuando estas sustancias disueltas son precipitadas mediante procesos orgánicos o inorgánicos, el material se conoce como sedimento químico y las rocas formadas a partir de él se denominan rocas sedimentarias químicas, como se muestra en la Figura 2.7.

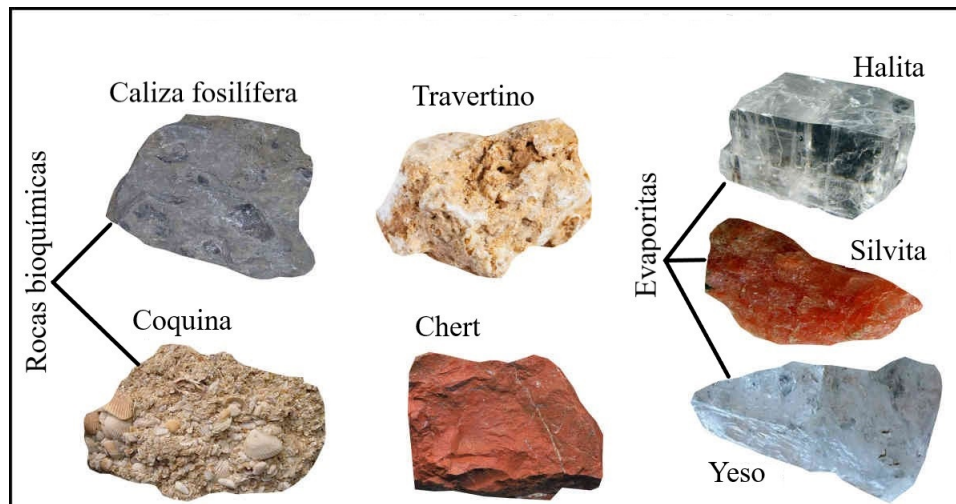


Figura 2.7 Rocas sedimentarias químicas.

2.4 Morfología de rocas sedimentarias

El análisis de las rocas sedimentarias contempla aspectos físicos, químicos y mineralógicos. Dentro de los físicos existen tres descriptores; el tamaño, la morfología y la orientación. El tamaño y la orientación de la roca es un tema bien establecido. Sin embargo la morfología es un tema relativamente reciente y se encuentra en desarrollo.

En la morfología de la roca se graban la configuración de la génesis, el ambiente, transporte y deposición. Por ejemplo, cuando las corrientes de agua, el viento o las olas mueven la arena y otros clastos sedimentarios, los granos pierden sus bordes y esquinas angulosos y se van redondeando más a medida que colisionan con otras partículas durante el transporte. Por tanto, es probable que los granos redondeados hayan sido transportados por el aire o por el agua. Además, el grado de redondez indica la distancia o el tiempo transcurrido en el transporte del sedimento por corrientes de aire o agua. Granos muy redondeados indican que se ha producido una gran abrasión y, por consiguiente, un prolongado transporte. Los granos muy angulosos,

por otro lado, significan dos cosas: que los materiales sufrieron transporte durante una distancia corta antes de su depósito, y que quizá los haya transportado algún otro medio. Por ejemplo, cuando los glaciares mueven los sedimentos, los clastos suelen volverse más irregulares por la acción de trituración y molienda del hielo. Además de afectar al grado de redondez y al grado de selección que los clastos experimentan, la duración del transporte a través de corrientes de agua y aire turbulentas influye también en la composición mineral de un depósito sedimentario. Una meteorización sustancial y un transporte prolongado llevan a la destrucción gradual de los minerales más débiles y menos estable. Así en la morfología esta parte de la clave para reconstruir la historia y características de procesos sedimentarios.

2.5 Forma, redondez y rugosidad

La morfología de una roca sedimentaria puede ser descrita por tres componentes: la forma, la redondez y la rugosidad como se muestra en la Figura 2.8 respectivamente. Estas propiedades son independientes entre sí, esto es que una puede variar sin afectar las otras dos. Estas tres propiedades se distinguen, al menos, por sus diferentes escalas. Esta característica permite ordenarlas de manera jerárquica, como se muestra en la Figura 2.9. La forma, propiedad de primer orden, refleja los grandes rasgos que tiene la partícula; la redondez, propiedad de segundo orden, refleja los cambios en las esquinas. Estas variaciones se encuentran superpuestas en la forma. La rugosidad, propiedad de tercer orden, son las variaciones superpuestas en la superficie y en las esquinas [2].

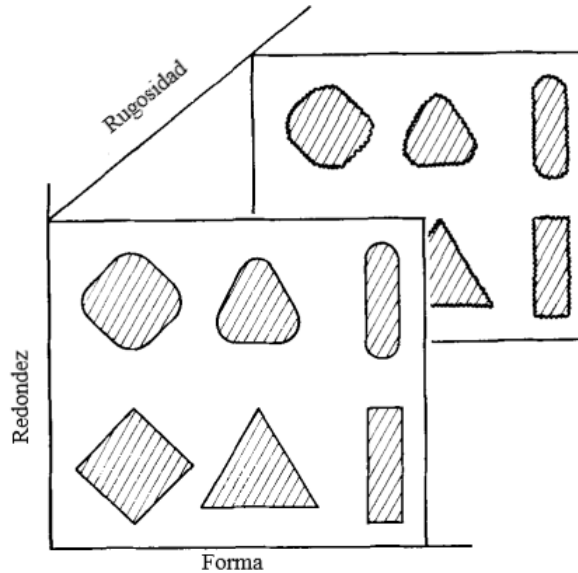


Figura 2.8 Una representación simplificada de la forma, redondez y rugosidad en 3 dimensiones para ilustrar su independencia [2].

Este modo jerárquico de la forma, redondez y rugosidad está basado en los fenómenos geológicos a los que se exponen las rocas. Cambios en la rugosidad no necesariamente afectan a la redondez. La meteorización puede aumentar la rugosidad de una roca, pero las esquinas muy redondeadas se mantendrán igual. Estrías, quebraduras y otras características se pueden obtener sin cambiar la redondez. Esto no imposibilita que este proceso haga que la rugosidad cambie la redondez después de un largo período de tiempo. La redondez de una roca, puede incrementar a través de la abrasión, sin afectar mucho a la forma. En contraste, un cambio en la forma inevitablemente afectará a la redondez y rugosidad, porque las superficies nuevas son expuestas, y aparecerían nuevas esquinas, y un cambio en la redondez debería afectar a la rugosidad, así que por cada cambio resulta en una nueva morfología [2].

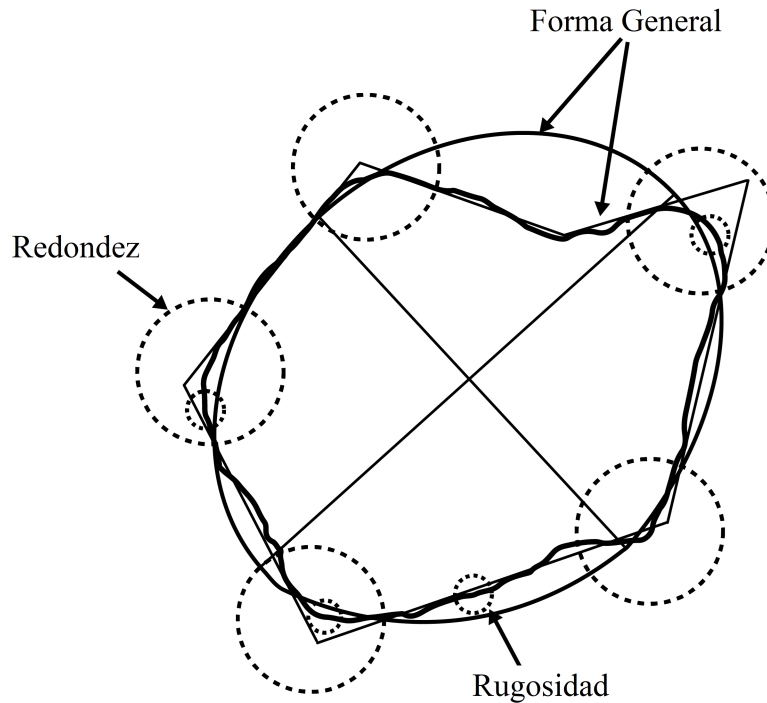


Figura 2.9 Forma, redondez y textura superficial propuestas por Barrett [2].

Existen definiciones y clasificaciones bien definidas para medir la forma y redondez. Por otro lado, en lo que respecta a la rugosidad no existe un acuerdo entre los científicos, sin embargo hay algunos intentos de caracterizarla y medirla [26].

El presente trabajo se enfoca a la medición de la forma y la redondez, dejando de lado la rugosidad por no existir aún un consenso en su descripción. Los diferentes métodos para medir la forma y redondez se discutirán en los siguientes dos subsecciones.

2.6 Métodos para obtener la forma

El parámetro más útil para medir la forma es el grado de esfericidad. La esfericidad cuantifica el grado de similitud entre la partícula y una esfera. Una de las métricas más usadas para medir la esfericidad es la propuesta por Wadell[38], que define la esfericidad como la

relación entre el área de superficie de la esfera del mismo volumen y el área de la superficie real de la partícula. Esta métrica necesita las tres dimensiones de la partículas, sin embargo existe su equivalente bidimensional [1].

Las siguientes métricas representan las formas más comunes para medir la esfericidad en dos dimensiones son:

$$\text{Esfericidad por el área: } S_A = \frac{A_s}{A_{cir}} \quad (2.1)$$

donde A_s es el área proyectada de la partícula y A_{cir} es el área del círculo mínimo que inscribe a la partícula, fórmula propuesta por Tickell[33].

$$\text{Esfericidad por el diámetro: } S_D = \frac{d_c}{D_{cir}} \quad (2.2)$$

donde d_c es el diámetro del círculo igual en área a la de la partícula en el tamaño original cuando descansa en una de sus caras más largas, más o menos paralela a el plano con los diámetros más largos e intermedios, y D_{cir} es el diámetro del círculo más pequeño que inscribe a la partícula en su tamaño original. Los rangos de valor de está fórmula están distribuidos de 0.54 a 1, propuesta por Wadell[37].

$$\text{Esfericidad por la relación de círculos: } S_C = \frac{D_{ins}}{D_{cir}} \quad (2.3)$$

donde D_{ins} es el diámetro del mínimo círculo circunscrito en la partícula y D_{cir} es el diámetro del círculo más pequeño que inscribe a la partícula, fórmula propuesta por Santamarina y Cho[27].

$$\text{Esfericidad por el Perímetro: } S_P = \frac{P_c}{P_s} \quad (2.4)$$

donde P_c es el perímetro del círculo que tiene la misma área que la partícula y P_s es el perímetro de la partícula, fórmula propuesta por Altuhafi [1].

$$\text{Esfericidad por relación entre anchura y altura: } S_{WL} = \frac{d_1}{d_2} \quad (2.5)$$

donde d_1 y d_2 son el ancho y el largo de la partícula respectivamente, fórmula propuesta por Krumbein [15].

Existen más definiciones para la esfericidad que se basan en el volumen, como la propuesta por Wadell [36], pero no se toman en cuenta porque en este trabajo las partículas que serán caracterizadas son en dos dimensiones.

Para fines de este trabajo, la esfericidad que se usa es la propuesta por Wadell [37] para dos dimensiones, debido a que es una de las más conocidas y usadas para describir la forma de una partícula.

2.7 Métodos para obtener la redondez

La redondez es un concepto que suele confundirse con propiedades de la forma, es por eso que su concepto debe ser aclarado ([16]; [31]). Como se mencionó anteriormente, la redondez es una propiedad superpuesta a la forma que estima la suavidad (o angulosidad) superficial de la partícula. [25]

Las tres formas más comunes para medir la redondez se basan en Círculos Circunscritos, Espectro de Fourier, y Fractales.

El método basado en círculos circunscritos parte de que el radio de curvatura de una esquina no puede ser mayor al radio del máximo círculo circunscrito en la partícula, por lo que la redondez de una esquina puede ser expresada como $\frac{r}{R}$, donde r es el radio de curvatura de la esquina y R es el radio del máximo círculo circunscrito. [38]

La redondez total de un sólido en un solo plano (2 dimensiones) se obtiene usando la media de la redondez de cada una de las esquinas en ese plano. Por lo que la fórmula queda así:

$$\frac{\sum \frac{r}{R}}{N} = \text{Grado de redondez} \quad (2.6)$$

donde $\sum \frac{r}{R}$ es la sumatoria de los valores de redondez de cada esquina, y N es el número de esquinas de la partícula en el plano dado. El máximo valor de redondez que puede ser obtenido es de 1, fórmula propuesta por Wadell[38].

El método que se basa en el espectro de Fourier parte de que se puede descomponer todas las frecuencias que posee el contorno de la imagen de una partícula, obteniendo claramente cuales pertenecen a la redondez.

La geometría basada en fractales es también otro buen método para clasificar la redondez ([13], [23], [28]). La técnica más usada para analizar los límites de las partículas es conocido como "*Structured Walk*". En esta técnica, las irregularidades en el perímetro de una partícula están relacionadas con la dimensión de fractal, la cual es estimada para superficies de clastos en tres dimensiones por polígonos o segmentos de línea. Los lados de el polígono incrementan progresivamente. La dimensión de fractal es calculada por la pendiente de la línea que mejor se ajusta. Las limitaciones de este método son, como la identificación de los límites de una

partícula relacionada a el proceso de abrasión, y la sensibilidad a la difuminación y el ruido de la imagen, son descritas por Leavers[18] y Stachowiak[32]. Información obtenida en [5].

2.8 Clasificación de redondez de rocas sedimentarias

Desde un punto de vista práctico, no es suficiente solo medir el grado de redondez sino también clasificarla. Una herramienta muy usada por los sedimentólogos para clasificar la morfología de clastos es un gráfico visual comparativo. Russell, Taylor y Pettijohn ([21]) desarrolló un gráfico visual comparativo de un conjunto de referencias de partículas de la redondez conocidas. Este gráfico ofrecía un manera fácil y rápida para estimar la redondez de partículas en dos dimensiones. The Russell, Taylor y Pettijohn (RTP) referenciaban la figura con veinticinco partículas organizadas en cinco diferentes categorías de redondez; angular, sub-angular, sub-redondeada, redondeada y bien redondeada [4]. En la Figura 2.10, las clasificaciones en filas corresponden a las de la redondez y las clasificaciones por columna son la esfericidad.

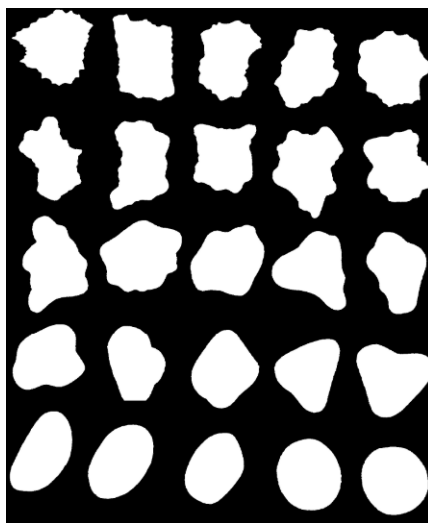


Figura 2.10 Clasificaciones para la redondez de una partícula propuestas por Russell, Taylor y Pettijohn [21].

Aparte de la propuesta Russell, Taylor y Pettijohn, existe también la propuesta que hizo Krumbein, en la Figura 2.11, se observa que el clasifica el término de redondez en nueve clases, muy utilizada también.

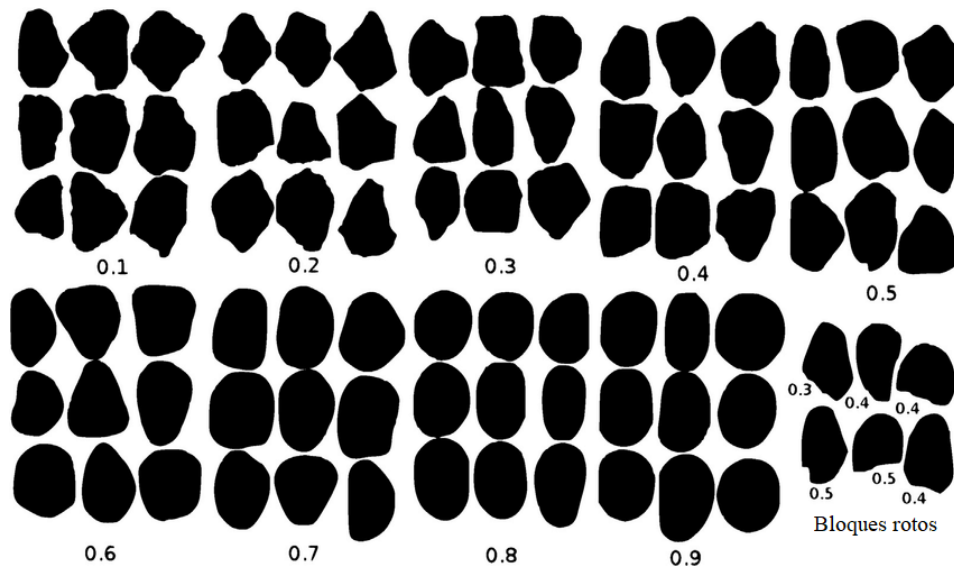


Figura 2.11 Clasificaciones para la redondez de una partícula propuestas por Krumbein[14].

El método a utilizar para la redondez va a ser el propuesto por Wadell[38], debido a su simplicidad con respecto a los métodos basados en Fourier y Fractales, a su vez, la escala que se utilizará será la de Krumbein y Sloss [14] por el hecho de trabajar con una clasificación más conocida.

Capítulo 3

Modelo y propuesta de Investigación

3.1 Modelo de Investigación de la estimación de parámetros morfológicos en rocas sedimentarias usando Fourier Elíptico y redes neuronales

En la Figura 3.1 se describen las etapas de investigación, para después ser detalladas.

- La primera etapa consiste en conseguir 1123 imágenes de todas las clases de esfericidad y redondez para poder entrenar de manera equitativa la red, y después probar con las imágenes de Krumbein ([14]) y verificar los resultados.
- La segunda etapa se obtiene el valor de redondez y esfericidad de cada una de las imágenes de entrenamiento con los métodos propuestos.
- La tercera etapa se saca el valor de las constantes de los primeros 40 armónicos de la serie de Fourier Elíptico de cada una de las imágenes de entrenamiento, aparte, relacionar estos armónicos con su valor de esfericidad y redondez.

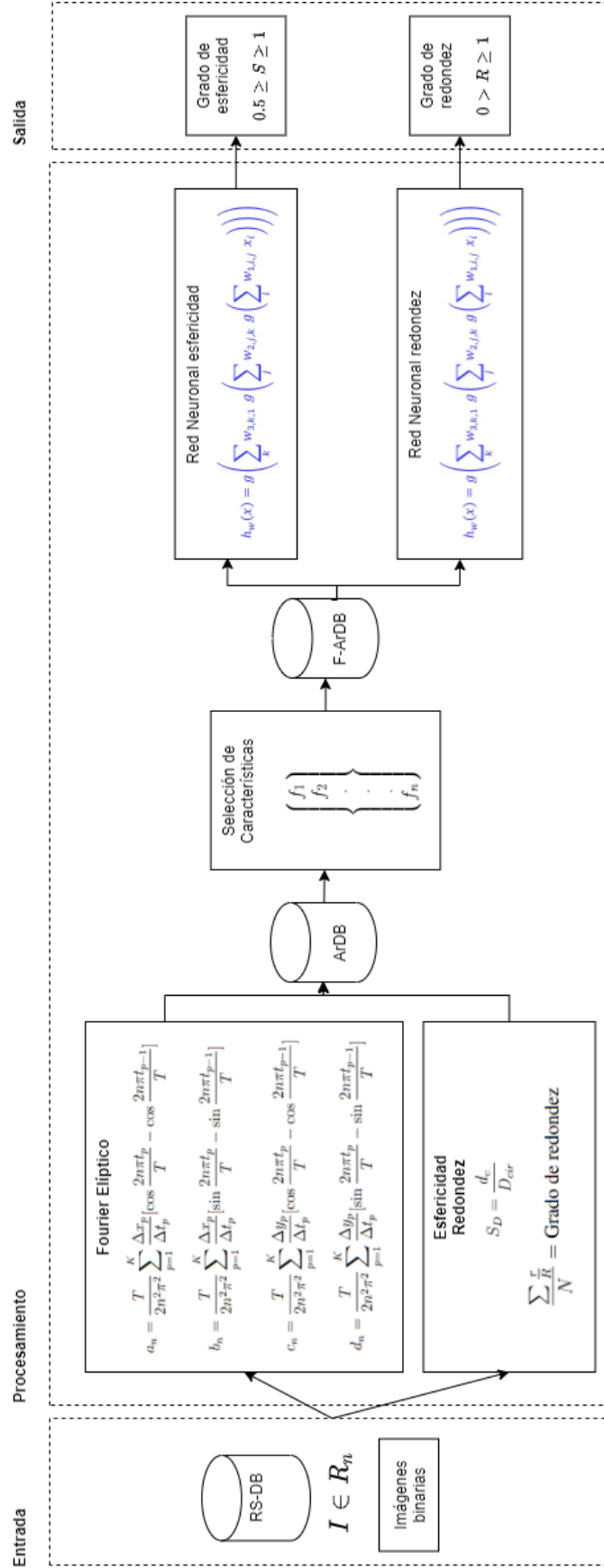


Figura 3.1 Modelo metodológico de la estimación de parámetros morfológicos en rocas sedimentarias usando Fourier Elíptico y redes neuronales

- La cuarta etapa consiste entrenar las 2 redes neuronales, la que va a clasificar la esfericidad, y la que va a clasificar la redondez, con los valores de entrada que será los armónicos de Fourier Elíptico y su respectiva salida.
- Una vez entrenada cada red, obtener los armónicos de Fourier Elíptico de las imágenes de prueba.
- La última etapa es clasificar las imágenes de prueba y observar los resultados.

3.2 Fourier Elíptico

Los coeficientes de Fourier han sido muy utilizados para caracterizar contornos cerrados. Fourier Elíptico es una manera simple de obtener los coeficientes de Fourier del código de cadena de un contorno cerrado. Los coeficientes resultantes son invariantes a la escala, rotación y traslación.

El código de cadena es el primer paso en Fourier Elíptico, fue descrito inicialmente por Freeman[8], aproximando un contorno cerrado por una secuencia en partes con 8 posibles valores. El código de un contorno es la cadena V de longitud K :

$$V = a_1 a_2 a_3 \dots a_K, \quad (3.1)$$

donde cada unión a_i es un entero del 0 al 7 orientado en la dirección $(\frac{\pi}{r})a_i$ [17]. En la Figura 3.2 se puede observar como un contorno cerrado separado en píxeles, se puede obtener el código de cadena, trazando una trayectoria desde un punto inicial, hasta volver a llegar a ese mismo punto, pasando por todo el contorno. El código de cadena de la Figura 3.2a iniciando de el

extremo superior izquierdo es:

$$V = 0005676644422123 \quad (3.2)$$

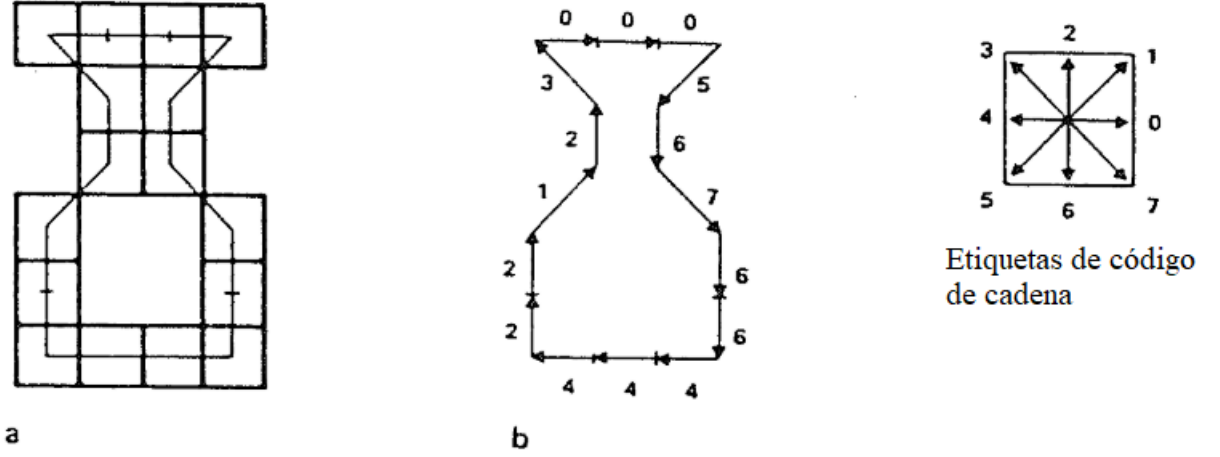


Figura 3.2 Representación gráfica del código de cadena de un contorno cerrado [17]

Debido a que el cambio en el código de cadena es constante y no varía, los coeficientes pueden ser encontrados más fácilmente. Por lo que los coeficientes de la componente x son:

$$a_n = \frac{T}{2n^2\pi^2} \sum_{p=1}^K \frac{\Delta x_p}{\Delta t_p} \left[\cos \frac{2n\pi t_p}{T} - \cos \frac{2n\pi t_{p-1}}{T} \right] \quad (3.3)$$

$$b_n = \frac{T}{2n^2\pi^2} \sum_{p=1}^K \frac{\Delta x_p}{\Delta t_p} \left[\sin \frac{2n\pi t_p}{T} - \sin \frac{2n\pi t_{p-1}}{T} \right] \quad (3.4)$$

donde, la K es el número de píxeles del contorno, T el período fundamental, Δx_p el cambio en el eje de las x , Δt_p el cambio en el tiempo.

Con eso obtendríamos los coeficientes de la componente x , pero como una imagen es una señal en dos dimensiones necesitamos también obtener los coeficientes de la componente y .

$$c_n = \frac{T}{2n^2\pi^2} \sum_{p=1}^K \frac{\Delta y_p}{\Delta t_p} \left[\cos \frac{2n\pi t_p}{T} - \cos \frac{2n\pi t_{p-1}}{T} \right] \quad (3.5)$$

$$d_n = \frac{T}{2n^2\pi^2} \sum_{p=1}^K \frac{\Delta y_p}{\Delta t_p} \left[\sin \frac{2n\pi t_p}{T} - \sin \frac{2n\pi t_{p-1}}{T} \right] \quad (3.6)$$

Con eso ya se tendría los coeficientes necesarios, debido a que el cambio de la x no siempre sera igual al cambio en las y , Fourier Elíptico generaría elipses en vez de círculos como el método tradicional.

Para que este método obtenga la invarianza a la escala, rotación y traslación, es necesario aplicar una normalización y ajustar los ángulos en los que va a iniciar cada elipse, para que independientemente la escala, rotación y traslación que tenga el contorno cerrado, siempre de el mismo resultado.

$$E_p = ((A_0 - x_p)^2 + (C_0 - y_p)^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

donde A_0 y C_0 son el promedio de la energía de las componentes x y y respectivamente. Para obtener el ángulo de rotación inicial θ_p a el índice p :

$$\theta_p = \frac{2\pi t_p}{T}, 0 < \theta_p \leq 2\pi \quad (3.8)$$

y para obtener el ángulo de rotación espacial ψ_p

$$\psi_p = \arctan\left[\frac{y_p - C_0}{x_p - A_0}\right], 0 \leq \psi_p < 2\pi \quad (3.9)$$

Al iniciar el cálculo de los coeficientes, se tendría que obtener E_1 , θ_1 y ψ_1 para influir en los siguiente coeficientes a que se reajusten de acuerdo a estos ángulos iniciales, y dividirlo entre E_0 para mantener la invarianza a la escala, por lo que la obtención de los nuevos coeficientes sería:

$$\begin{bmatrix} 1a_n^{**} & 1b_n^{**} \\ 1c_n^{**} & 1d_n^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos n\theta_1 & -\sin n\theta_1 \\ \sin n\theta_1 & \cos n\theta_1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} 2a_n^{**} & 2b_n^{**} \\ 2c_n^{**} & 2d_n^{**} \end{bmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} 1a_n^{**} & 1b_n^{**} \\ 1c_n^{**} & 1d_n^{**} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

El resultado de la ecuación 3.11 nos daría los coeficientes a, b, c, d para el n armónico que se está calculando. Siendo invariante a la escala, rotación y traslación. Para más información, consultar [17].

3.3 Algoritmo para estimar la redondez

Debido a que el término de redondez es de segundo orden, por lo tanto más complejo, se propuso utilizar el algoritmo de Zheng [39]. Basado en la propuesta de Wadell [37] consiste en identificar círculos en cada una de las esquinas y que se ajusten a ellas. Resulta complejo debido a que el número de esquinas varía de partícula a partícula.

Iniciamos obteniendo el radio del máximo círculo circunscrito de la partícula: el paso a) es tener nuestra imagen de la partícula en binario, en el paso b) es transformar nuestra imagen en un mapa de distancias euclidianas, una matriz que nos indica que tan retirado está un píxel de un contorno cerrado, entre más distancia allá, más valor va a tener; y por último, en el paso

c), agarramos el píxel más retirado del contorno de la partícula como el centro del círculo, y su valor en la matriz del paso b) será el radio. En la Figura 3.3 se observan estos pasos antes mencionados.

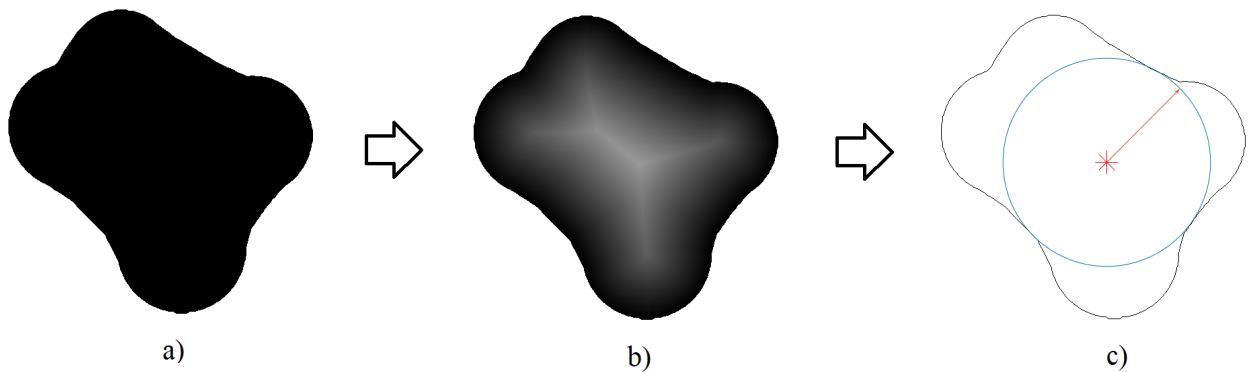


Figura 3.3 Flujo de trabajo para obtener el mayor círculo circunscrito.

Al haber obtenido el mayor círculo circunscrito, ahora se tiene que trazar un círculo que se ajuste a cada una de las esquinas, pero antes de eso, se tiene que suavizar el contorno de la partícula, para evitar que la información de la rugosidad afecte con el ajuste de los círculos. En el artículo de Zheng [39] usan la regresión *LOESS* y *k-folds* para suavizar la partícula, pero nosotros decidimos usar Fourier Elíptico solo tomando en cuenta los primeros 30 armónicos de la serie por la facilidad que resulta quitar la información de la rugosidad.

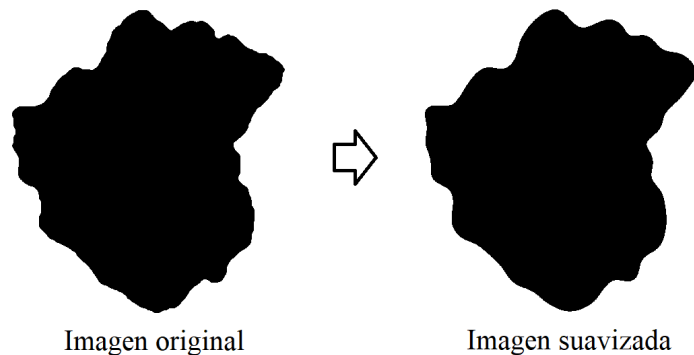


Figura 3.4 Resultado del suavizado de la partícula utilizando Fourier Elíptico.

En la figura 3.4, se observa el suavizado generado por Fourier Elíptico. Para poder identificar las esquinas de la partícula, se necesita analizar todo el contorno de la partícula iniciando desde cualquier punto e ir analizando que la sucesión de puntos tenga un valor de curvatura positiva, de esta manera se puede discriminar cuando esa curvatura se encuentra por fuera de la partícula y solo dejando las que están por dentro. Para formar los círculos, se utiliza una distancia máxima la cual regula que tan retirados deben de estar los píxeles del contorno para ser considerados como una sola esquina para después ajustar un círculo a todos esos puntos.

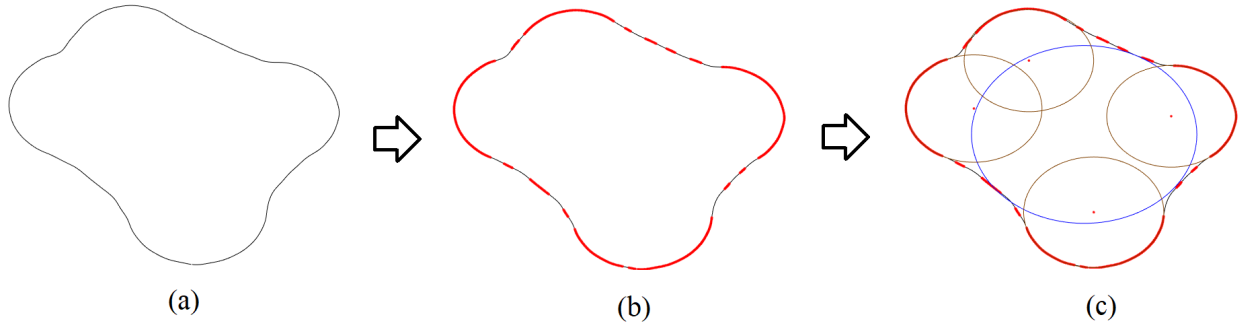


Figura 3.5 Flujo para aproximar las esquinas con círculos.

En la Figura 3.3 se muestra como obtener los círculos. (a) tenemos el contorno de la partícula; (b) remarcamos las posibles partes del contorno que podrían ser esquinas utilizando geometría computacional; (c) en base a discriminar las regiones por medio de la curvatura y longitud que poseén, se seleccionan las esquinas y se aproxima un círculo para representarlas.

$$\frac{\sum \frac{r}{R}}{N} = \text{Grado de redondez} \quad (3.12)$$

Una vez obtenido lo anterior, se pasa a calcular el grado de redondez, la fórmula 3.12. La parte del numerador es el promedio de los radios de todos los círculos de las esquinas entre el radio

del círculo circunscrito más grande en la partícula, obteniendo un valor que esta entre 0 y 1, como se describe en el artículo de Zheng y Hryciw [39].

Solo existe un pequeño problema con este algoritmo, se tiene que ajustar ciertos problemas para que pueda funcionar de manera correcta con todas las partículas ya que no es invariante a la escala, lo que ocasionaría en que se obtenga un grado de redondez diferente al real dependiendo de la escala de cada partícula, solo hay que tener mucho cuidado con estos parámetros.

3.4 Redes neuronales

Una red neuronal artificial es un tipo de algoritmo de *Machine Learning* el cual trata de simular el comportamiento del cerebro, al cual le llega una entrada, por medio de neuronas que se activan o no, se obtiene un resultado.

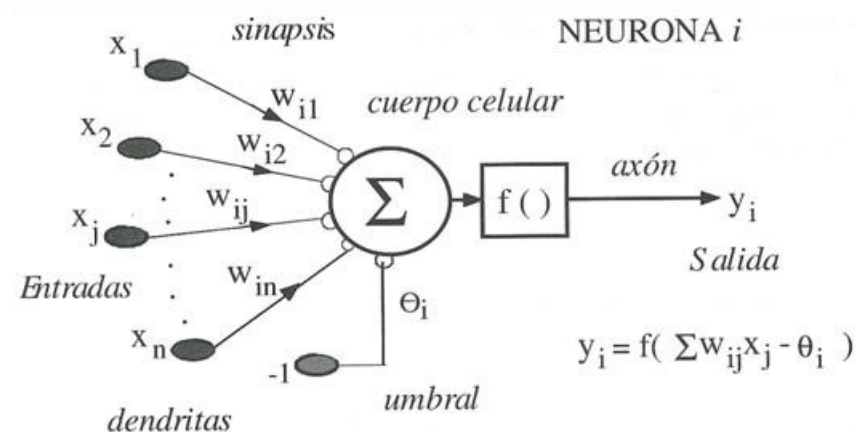


Figura 3.6 Estructura de una neurona artificial análogo a una biológica.

La neurona es la unidad básica, posee dos tareas las cuales son combinar entrada y producir la señal de activación, siendo un nodo en un grafo dirigido (Red neuronal artificial). La

conexión entre 2 neuronas es conocida como la sinapsis y su fuerza esta determinada por el estímulo externo.

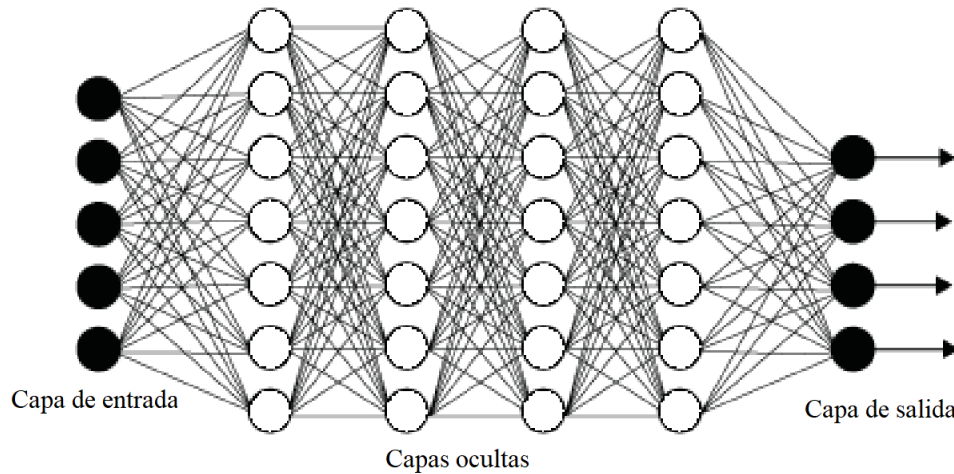


Figura 3.7 Arquitectura de una red neuronal artificial.

Las conexiones o aristas están regidas por pesos (w_{ij}), esos pesos se mezclan con las entradas para producir el "estímulo", todos los estímulos de entrada hacia una neurona se combinan para después ingresarlas a la función de activación ($f()$) que determinará la salida hacia la siguiente neurona. En la Figura 3.6 se puede observar los elementos relacionados a una neurona de una red neuronal artificial.

En la Figura 3.7 se observa la arquitectura de una red neuronal con su capa de entrada con 4 neuronas, 4 capas ocultas con 7 neuronas cada una, y su capa de salida con 4 neuronas.

3.4.1 Funciones de Activación

Las funciones de activación tienen como objetivo el acotar los valores de salida de una neurona a un cierto rango de valores. La selección de las funciones de activación dependerá del problema con el cual se este manejando. Existen funciones lineales y no lineales, solamente

que las lineales tienen un uso exclusivo unicamente cuando el problema se trate de regresión, y solamente en la capa de salida.

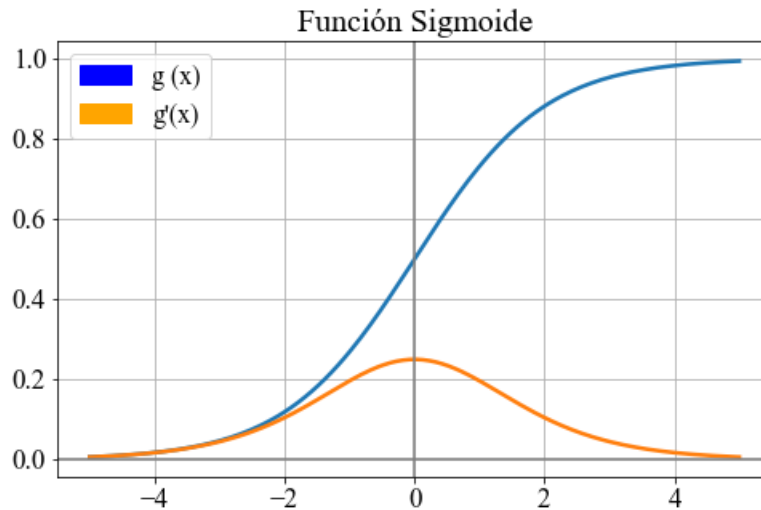


Figura 3.8 Función de activación Sigmoide.

$$g(x) = \sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad g'(x) = \sigma(x)(1 - \sigma(x)) \quad (3.13)$$

La primer función de activación que surgió fue la Sigmoide, representada en la Figura 3.8 y expresada por la función $g(x)$ y su derivada $g'(x)$ 3.13. Utilizada principalmente para clasificar un conjunto de datos en 2 clases. La utilización de ella se ha visto mermada porque presenta 2 grandes problemas a la hora de utilizarla como función de activación en las capas ocultas:

- Asimetría positiva
- Desvanecimiento del gradiente
- Utilización de la función exponencial es costoso.

La asimetría positiva provoca que el gradiente se vuelva muy ineficiente a la hora de buscar el mínimo, debido a que solo puede tomar direcciones totalmente negativas o totalmente positivas, haciendo como una especie de zigzag hasta encontrar el punto mínimo. El desvanecimiento del gradiente se puede observar en la Figura 3.8, ya que, a medida que los valores de x van incrementando, el valor de la derivada va teniendo a 0, provocando que no haya una retroalimentación a la hora de retropropagar hacia atrás, terminando en que se la red neuronal deje de aprender ya que sus pesos no se van a ir actualizando.

La función se puede seguir usando en la capa de salida pero solo sí el problema lo requiere. Las funciones posteriores trataron de eliminar estos problemas antes mencionados

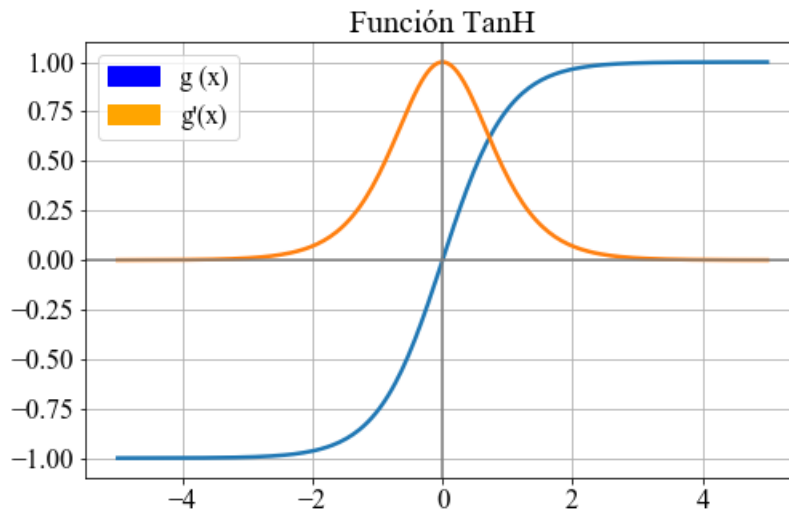


Figura 3.9 Función de activación Tangente Hiperbólico.

$$g(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad g'(x) = 1 - \tanh^2 x = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \quad (3.14)$$

La siguiente función que surgió fue la Tangente Hiperbólico (TanH), introducida por LeCun en 1991, representada en la Figura 3.9, expresada junto con su derivada en la Ecuación 3.14.

Al observar los problemas que presentaba la función Sigmoide, lo que se trataba de encontrar con la función TanH era eliminarlos, sin embargo, solo fue capaz de solucionar el problema de la asimetría positiva centrando los datos de -1 a 1, para que el descenso del gradiente fuera más eficiente. Sigue presentando los problemas de desvanecimiento del gradiente conforme los valores de x son más grandes, y sigue existiendo el alto costo por usar la función exponencial.

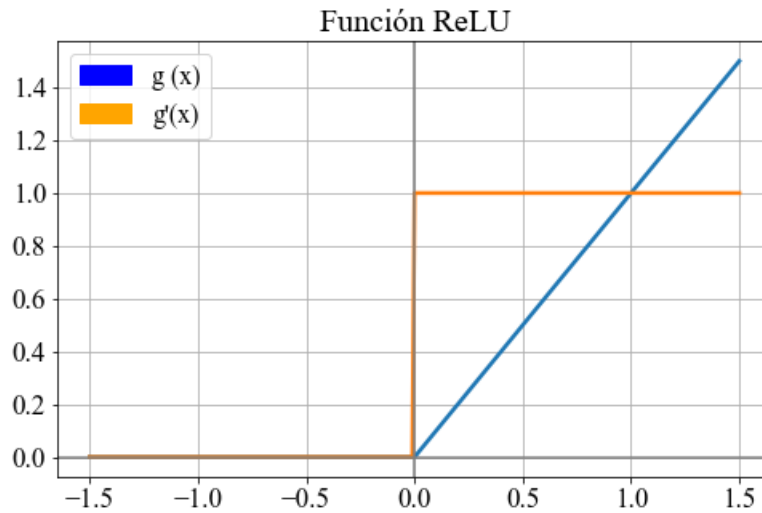


Figura 3.10 Función de activación ReLU (Unidad Lineal Rectificada).

$$g(x) = \max(0, x) \quad g'(x) = u(x) \quad (3.15)$$

La función ReLU o Unidad Lineal Rectificada fue introducida por Vinod Nair en 2010 [22], representada en la Figura 3.10, expresada junto a su derivada en la Ecuación 3.15, la función $u(x)$ es el escalón unitario. Nació para atacar el problema del desvanecimiento del gradiente, pero sigue conservando, en una menor magnitud, que las otras 2 funciones. Sigue poseyendo el problema de la asimetría positiva por no centrar los datos, y se corre el riesgo de que partes de la red neuronal se desconecten si la función empieza a enviar puros ceros, pero tiene la ventaja de que tiene un costo bastante bajo.

Fue muy popular años más tarde de su nacimiento, pero por los problemas que siguieron existiendo se trató de buscar una variante la cual controlara o eliminara por completo los problemas, son las siguientes 2 funciones de activación.

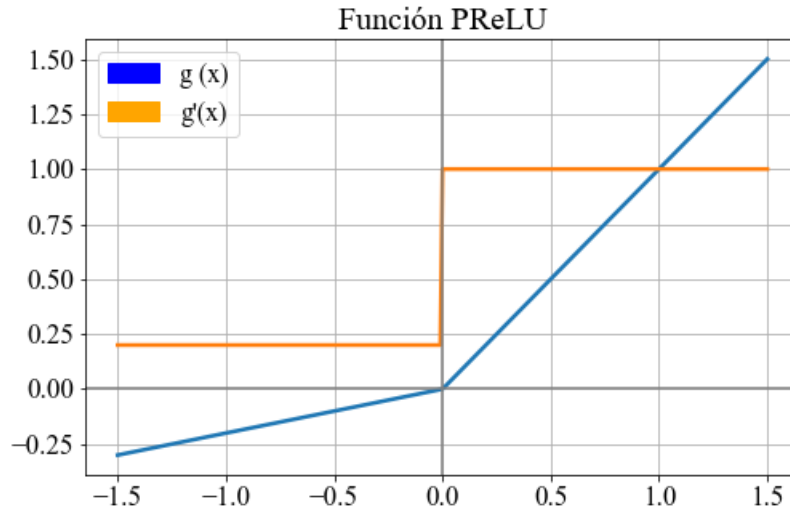


Figura 3.11 Función de activación PReLU (Unidad Lineal Rectificada Parametrizada).

$$g(x) = \max(\alpha x, x) \quad g'(x) = \alpha + (1 - \alpha)u(x) \quad (3.16)$$

La función PReLU o Unidad Lineal Rectificada Parametrizada fue introducida por Xiangyu Zhang en el año 2015 [10], representada en la Figura 3.11, expresada junto a su derivada en la Ecuación 3.16. El parámetro α es un coeficiente que va irse adaptando y aprendiendo a lo largo del proceso de aprendizaje de la red neuronal, promoviendo la rapidez del aprendizaje. Ataca principalmente el desvanecimiento del gradiente, ya que la derivada no sería cero, y estaría habiendo retroalimentación en la red, evitando que se desconecten partes de la misma, como a su vez logra reducir la asimetría positiva. La función Leaky ReLU es un caso particular de esta función en la cual se igual α a una constante.

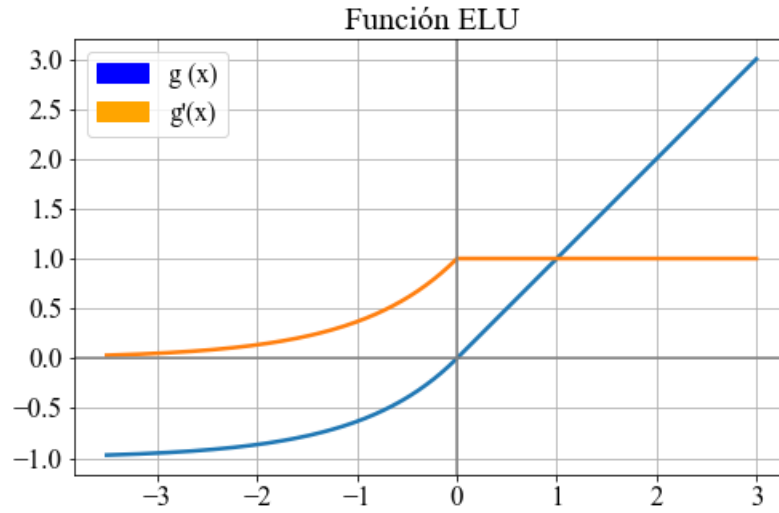


Figura 3.12 Función de activación ELU (Unidad Lineal Exponencial).

$$g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ e^x - 1 & x < 0 \end{cases} \quad g'(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ e^x & x < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Por último, se tiene la función ELU o Unidad Lineal Exponencial introducido por Djork-Arne Clevert en 2016 [6]. Una gran mejora a comparación de ReLU, ya que no sufre del problema de que se desconecten partes de la red, ataca de mejor manera la asimetría positiva, mejora la velocidad de aprendizaje de la red neuronal, a pesar de utilizar la función exponencial y aumentar el tiempo de procesamiento, es un buen trato por obtener una buena función de activación.

Para este trabajo, se tomaron en cuenta las funciones PReLU y ELU por ser las más confiables y las que poseen menos problemas, solamente para las capas ocultas. La capa de salida se tomó en cuenta una función lineal de la esfericidad, para verlo como un problema de regresión; y para la redondez, se tomó en cuenta la función Softmax para verlo como un problema de clasificación.

La función Softmax transforma la salida en probabilidades de semejanza que puede tener el sujeto en cuestión a cada una de las clases que se tienen, de esta manera, la clase con mayor probabilidad, sería la clase definida para ese sujeto.

Los pesos de cada conexión entre neuronas se actualiza al final de cada época, ese valor esta definido por una función optimizadora que se necesita una velocidad de aprendizaje o "*learning rate*" y una función de error que calcula que tan errónea fue la salida de la red neuronal con respecto al valor original, si la velocidad de aprendizaje es muy alta, nunca va a encontrar el punto mínimo debido a que siempre se lo va a pasar y regresar una y otra vez, si el valor es muy pequeño, la función tardaría demasiado en llegar y quizás nunca converja.

Actualmente existen funciones las cuales se les puede asignar un valor de aprendizaje alto pero a su vez asignar un valor de caída del aprendizaje, haciendo que en las época iniciales sea muy rápido pero su velocidad vaya bajando gradualmente para ayudar en la convergencia. Tal es el caso de la función RMSprop, que se describen en las siguientes ecuaciones:

$$V_{dw} = \beta \cdot V_{dw} + (1 - \beta) \cdot dw^2 \quad (3.18)$$

$$V_{db} = \beta \cdot V_{db} + (1 - \beta) \cdot db^2 \quad (3.19)$$

$$W = W - \alpha \cdot \frac{dw}{\sqrt{V_{dw}} + \epsilon} \quad (3.20)$$

$$b = b - \alpha \cdot \frac{db}{\sqrt{V_{db}} + \epsilon} \quad (3.21)$$

La función de error ayuda a la de optimización a medir el error que hay entre el resultado obtenido y el real, de tal manera que se sepa que tanto se tienen que actualizar los pesos para ir reduciendo el error lo más posible.

Una época esta definida por la ejecución de cierto flujo de pasos, inicia al ingresar el primer registro de los datos, después actualizar los pesos en base al error, así hasta acabar con cada uno de los registros, esa es la duración de una época.

Capítulo 4

Resultados y discusiones

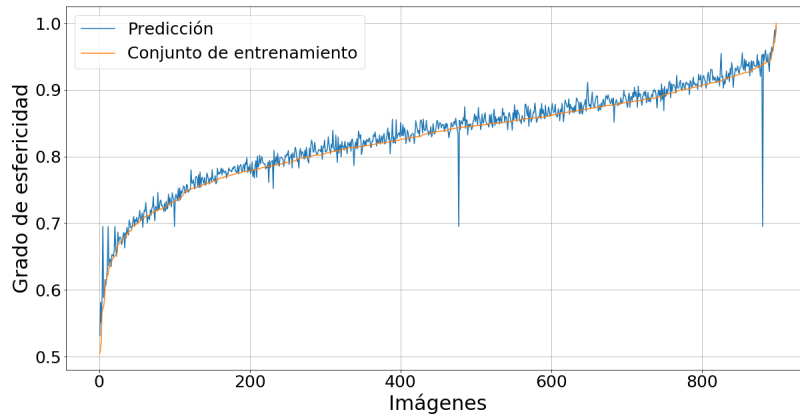
El dataset utilizado consta de 1125 partículas. Para caracterizar las propiedades de esfericidad y redondez, se creó una red específica para cada propiedad, debido a que el rango de los armónicos de la serie de Fourier Elíptico son diferentes para cada una de ellas.

4.1 Esfericidad

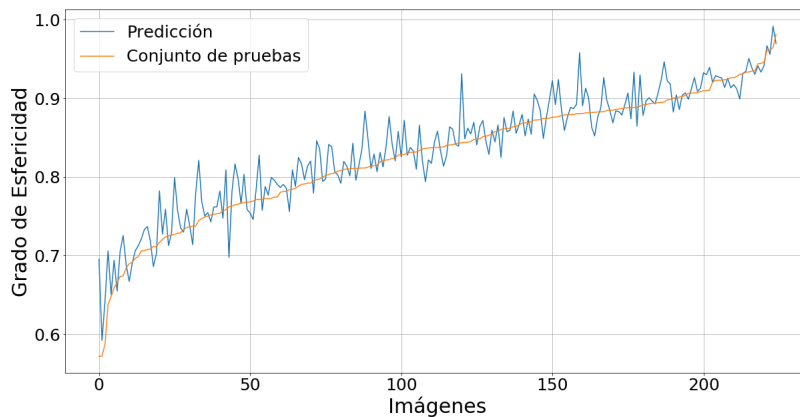
La arquitectura de la red neuronal para el caso de la esfericidad consiste en una capa de entrada con 100 neuronas y función de activación leaky ReLU, 9 capas ocultas con 100 neuronas y también con función de activación leaky ReLU, por último, la capa de salida que consta de una sola neurona y, con función de activación Lineal debido a que se trabaja en una regresión, para optimizar los pesos de la red neuronal se utilizó RMSprop junto a la función de error MSE.

Como se había comentado en el capítulo 2, la caracterización de la esfericidad es muy sencillo hacerlo por medio de Fourier Elíptico, ya que no se requieren más de los 5 primeros armónicos para hacerlo, de hecho, se utilizaron solamente los primeros 3, ya que se obtuvieron excelentes resultados, los cuales se muestran a continuación.

Resultados de clasificar la esfericidad utilizando las imágenes de entrenamiento y las de prueba.



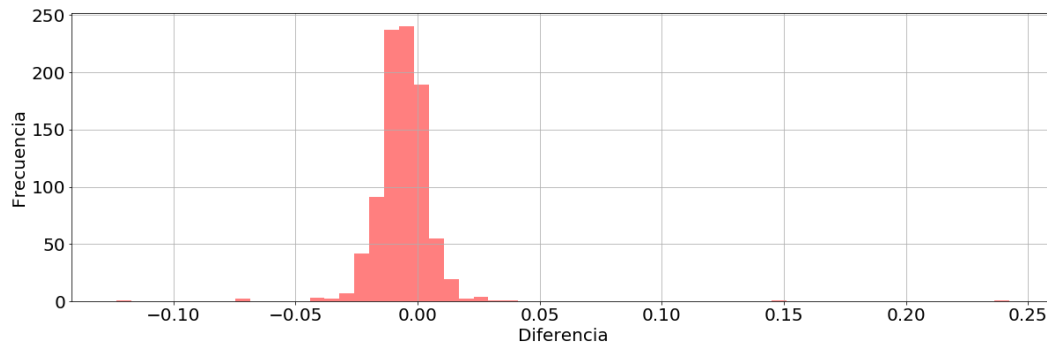
(a) Contraste de los resultados de la red neuronal contra la esfericidad real, conjunto de entrenamiento.



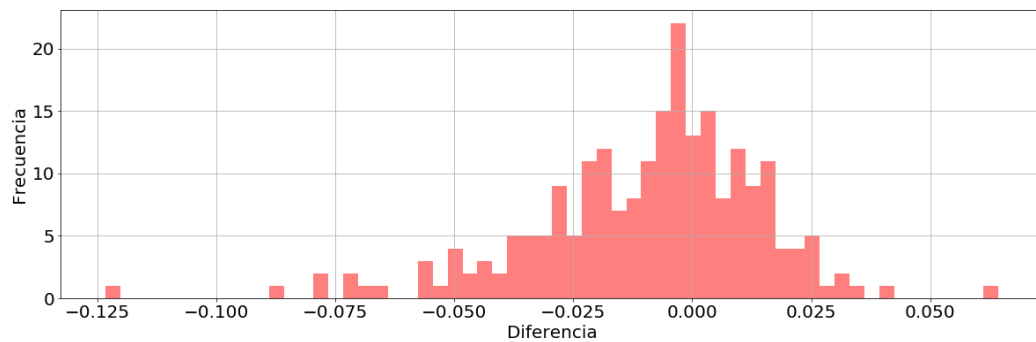
(b) Contraste de los resultados de la red neuronal contra la esfericidad real, conjunto de pruebas.

Figura 4.1 Clasificación de la redondez usando los conjuntos de entrenamiento y de pruebas. El eje horizontal representa el número de la imagen que se está analizando, el eje vertical representa el contraste del valor obtenido por la red neuronal (color azul) contra el valor real de esfericidad de la imagen (color naranja).

Debido a que estamos trabajando con valores continuos (predicción/regresión), la manera para medir el error de la red neuronal se hace en base a histogramas, el error promedio y el error cuadrático medio.



(a) Histograma de los errores del conjunto de entrenamiento.



(b) Histograma de los errores del conjunto de prueba.

Figura 4.2 Medición del error de la red neuronal utilizando la diferencia relativa. El eje horizontal representa la diferencia que hay entre el valor obtenido por la red neuronal y el valor real, el eje vertical representa la frecuencia con que cada una de las diferencias se presentó.

En la Figura 4.2, se puede apreciar que la distribución de los errores esta bastante comprimida en el eje horizontal, llevándonos a que nuestro proceso conjunto entre redes neuronales y los armónicos de Fourier Elíptico generan un 92.8% de confianza con ± 0.05 de error para el conjunto de pruebas, lo cual que el 92.8% de las imágenes los va clasificar

entre un intervalo ± 0.05 al real. En la Figura 4.1 se puede observar claramente que el error no es representativo en el conjunto de pruebas en contraste con el valor.

4.2 Redondez

Dentro de la experimentación para encontrar la arquitectura de red neuronal que nos diera mejores resultados para el caso de la redondez, se pasó por un sin fin de arquitecturas con diferentes cantidades de entradas, además de normalizaciones o reducciones de dimensionalidad de estas, y encontrando que no se desempeñaban muy bien. A continuación se va a describir cada una de estas 5 etapas, cabe destacar que en cada una se utilizó la estandarización z-score a las entradas antes de entrenar o probar la red neuronal.

La primera etapa, se intentó utilizar arquitecturas de entre 10 a 20 capas, en las cuales cada capa contenía de 100 a 200 neuronas, todas con la misma cantidad, utilizando los 40 armónicos de la serie de Fourier Elíptico. El entrenamiento era bueno y se percibía el sobreajuste, al momento de probar la red, los resultados eran fatales, llegando a dar un MSE de 0.5.

Al observar este problemas, se decidió reducir la cantidad de armónicos del 5 al 40, siendo 140 entradas para la red, para eliminar la información de la Forma General o esfericidad, las capas y el número de neuronas seguía en el mismo rango que la etapa anterior, entrenamiento muy bueno, pero con mucho sobreajuste; las pruebas seguían siendo malas, pero eran un poco mejor que la primera etapa, con un MSE de 0.3.

Al ver que no había una mejora, se utilizó el PCA de los datos de entrada. La reducción de dimensionalidad que aplica el PCA suponía una ventaja abismal para conocer cuales de las características son las más importantes, el problema que solo el 45% era descrito por el

primer componente principal, 75% con el primero y el segundo componente principal, y el 90% con los 3 primeros componentes principales. Al menos se lograba reducir 1 dimensión. Al momento de hacer entrenar la red, esta lograba acomodarse sin sobreajustarse, pero, las pruebas no daban un buen resultado todavía, MSE de 0.2.

Después del PCA, se propuso utilizar los métodos de selección de características *Forward Selection* y *Backward Elimination*, con la finalidad de obtener las mejores características de las 160 que tenemos. Al hacer varias pruebas, se llegó que la mejor cantidad de características eran 60, por lo que se procedió a entrenar la red con dichas características, y posteriormente a probarlas. El entrenamiento presentaba un poco de sobreajuste, pero de todos modos, las pruebas fueron bastante aceptables, llegando a obtener un MSE de 0.015, muy cercana al resultado de la arquitectura final. La arquitectura siguió siendo la misma que la primera etapa.

Como paso extra, se intentó normalizar los datos de entrada de la red de manera que las entradas que tuvieran un valor muy pequeño se escalara y tuvieran un mayor impacto en la red, en este caso, se eliminó el primer armónico ya que Fourier Elíptico normaliza los demás armónicos en base a este y se convierten en una señal con un valor muy muy pequeño. La normalización consiste en obtener la normalización z-score de la magnitud de X y de Y del armónico en cuestión, siendo 78 entradas. La arquitectura utilizada fue una red neuronal de 2,3,4 y 5 capas, en el entrenamiento todas daban un resultado muy similar, muy sobreajustado, pero a la hora de probar fue mucho peor que los resultados obtenidos con *Forward Selection* y *Backward Elimination*, siendo un MSE de 0.3.

Después de experimentar mucho con diversas arquitecturas, se llegó a la conclusión que las primeras arquitecturas eran demasiado exageradas para predecir el problema, por lo que se optó por reducir la cantidad de capas y la cantidad de neuronas en cada una, utilizando las

series de coeficientes del armónico 3 al 40, llegando a la arquitectura final de la red neuronal para el caso de la redondez que se puede ver en la Figura 4.3, consiste en una capa de entrada con 148 neuronas y función de activación Sigmoide; 4 capas ocultas con diferentes cantidades de neuronas (siempre una cantidad menor que la capa anterior), y también con función de activación Sigmoide; por último, la capa de salida que consta de una sola neurona y, con función de activación Sigmoide.

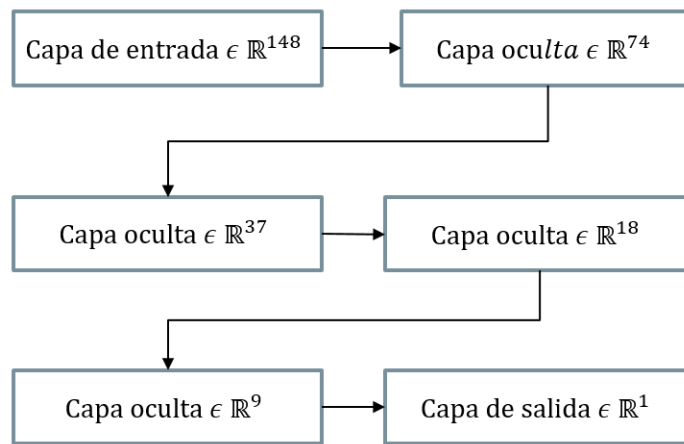
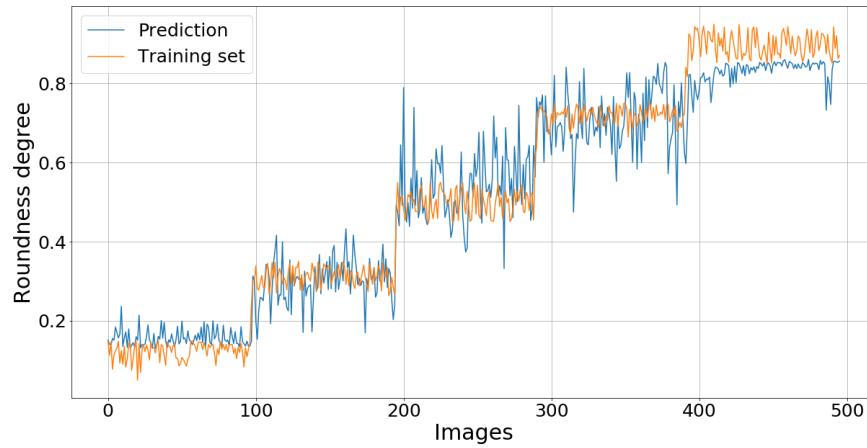


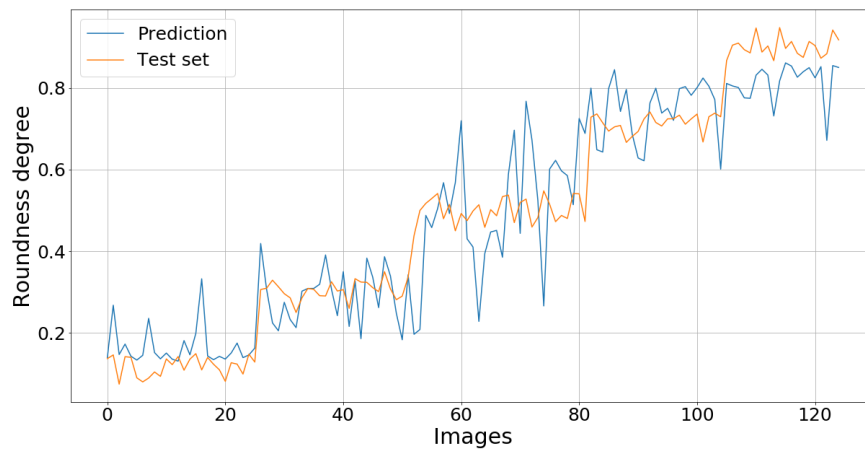
Figura 4.3 Arquitectura final de la red neuronal para predecir la redondez de rocas sedimentarias. El superíndice corresponde a la cantidad de neuronas en cada capa.

A pesar que la función Sigmoide padece del problema del desvanecimiento del gradiente, se ajusta bastante bien a este problema porque los rangos de salida esperados están entre 0 y 1, siendo el mismo rango de valores que la función, carecería de sentido si el valor esperado estuviese en un rango mucho más alto.

En contraste a la esfericidad, la caracterización de la redondez resulta ser más complejo debido a que se tiene que analizar un rango de armónico mucho más amplio, para este caso se analizo el rango del 3 al 40, ya que fue el rango con el que se han obtenido los mejores resultados, los cuales se muestran en la Figura 4.4.



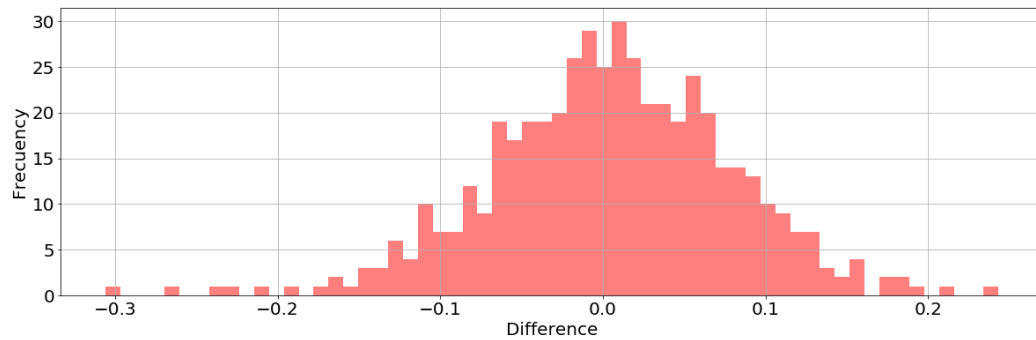
(a) Contraste de los resultados de la red neuronal contra la redondez real, conjunto de entrenamiento.



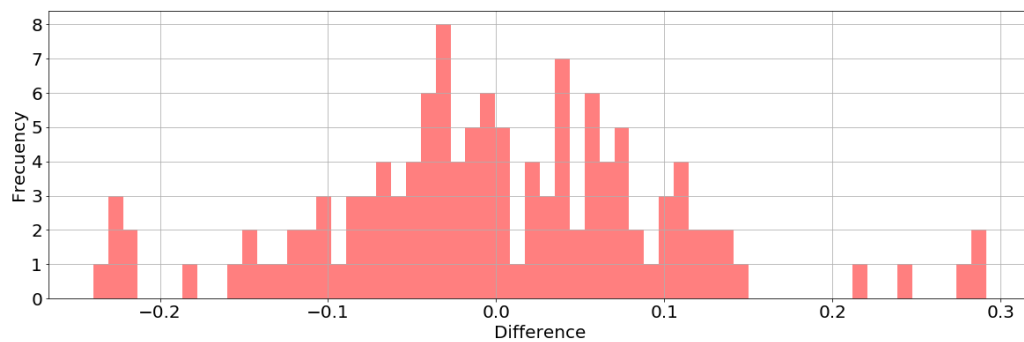
(b) Contraste de los resultados de la red neuronal contra la redondez real, conjunto de pruebas.

Figura 4.4 Clasificación de la redondez usando los conjuntos de entrenamiento y de pruebas. El eje horizontal representa el número de la imagen que se está analizando, el eje vertical representa el contraste del valor obtenido por la red neuronal (color azul) contra el valor real de esfericidad de la imagen (color naranja).

Debido a que estamos trabajando con valores continuos (predicción/regresión), la manera para medir el error de la red neuronal se hace en base a histogramas, el error promedio y el error cuadrático medio.



(a) Histograma de los errores del conjunto de entrenamiento.



(b) Histograma de los errores del conjunto de prueba.

Figura 4.5 Medición del error de la red neuronal utilizando la diferencia relativa. El eje horizontal representa la diferencia que hay entre el valor obtenido por la red neuronal y el valor real, el eje vertical representa la frecuencia con que cada una de las diferencias se presentó.

En la Figura 4.5b, se puede apreciar que la distribución de los errores esta bastante comprimida en el eje horizontal, llevándonos a que nuestro proceso conjunto entre redes neuronales y los armónicos de Fourier Elíptico, la diferencia relativa tiene una varianza de 0.0102 en el conjunto de pruebas, lo cual quiere decir que esta varianza es bastante aceptable y no se considera que el error es muy grande a la hora de predecir el grado de redondez. En la Figura 4.4 se puede observar que el error del conjunto de prueba es un poco representativo pero sigue tendiendo a adaptarse al valor real.

Capítulo 5

Conclusiones

Con este trabajo se obtuvo un modelo tanto para la esfericidad como para la redondez el cual es invariante a la escala, rotación, y traslación utilizando la curvatura y el análisis de frecuencias en una red neuronal profunda, además de ser mucho más rápido para calcular la redondez.

La red neuronal de la esfericidad por si sola obtuvo un muy buen resultado clasificando de manera muy óptima el grado de las partículas, por ser un término muy simple. Para el caso de la redondez para el caso de 5 clases, se logró obtener una red la cual arroja que el 70% de las partículas de las pruebas estuvo debajo del ± 0.1 , algo que nos interesa porque es la varianza entre las clases y que se puede predecir el 70% de las veces de manera correcta, además de que está muy cerca al valor que los geólogos obtienen al clasificar rocas sedimentarias, que es el 80%, siendo el nuestro un valor muy aceptable en el campo geológico, unos resultados bastante buenos. A medida que se va aumentando la cantidad de clases, el error cada vez va a ser mayor.

Dentro de los trabajos futuros:

- Mejorar la arquitectura o las variables de entrada para poder clasificar las 9 clases de redondez.
- Buscar un modelo el cual prediga el grado de redondez en números reales.
- Seleccionar los coeficientes que más aporten a la predicción del grado de redondez.
- Montar todo el flujo de trabajo dentro de una app o una página web el cual realice el proceso entero desde que se ingresa la imagen de un roca sedimentaria hasta la salida que sería su grado de redondez.
- Abstraer todo este trabajo para poder predecir el grado de redondez de cualquier objeto, no solamente rocas sedimentarias.

Referencias

- [1] F. Altuhafi, C. O’Sullivan, and I. Cavarretta. “Analysis of an image-based method to quantify the size and shape of sand particles”. In: *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 139.8 (2013), pp. 1290–1307. ISSN: 10900241. DOI: 10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000855.
- [2] P. J. BARRETT. “The shape of rock particles, a critical review”. In: *Sedimentology* 27.3 (1980), pp. 291–303. ISSN: 13653091. DOI: 10.1111/j.1365-3091.1980.tb01179.x.
- [3] Simon J. Blott and Kenneth Pye. “Particle shape: A review and new methods of characterization and classification”. In: *Sedimentology* 55.1 (2008), pp. 31–63. ISSN: 00370746. DOI: 10.1111/j.1365-3091.2007.00892.x.
- [4] Sam jr. Boggs. *Petrology of sedimentary rocks*. Vol. 3. 2013, 30. ISBN: 9780521897167.
- [5] G Moreno Chávez et al. “A method and software solution for classifying clast roundness based on the radon transform”. In: *Computers Geosciences* 138 (2020), p. 104451.
- [6] Djork-Arné Clevert, Thomas Unterthiner, and Sepp Hochreiter. “Fast and accurate deep network learning by exponential linear units (elus)”. In: *arXiv preprint arXiv:1511.07289* (2015).

- [7] Luciano da Fontoura Costa and Roberto Marcondes Cesar Jr. *Shape classification and analysis: theory and practice*. CRC Press, Inc., 2009.
- [8] Herbert Freeman. “Computer processing of line-drawing images”. In: *ACM Computing Surveys (CSUR)* 6.1 (1974), pp. 57–97.
- [9] Ovidiu Hâruga. “Elliptic Fourier analysis of crown shapes in *Quercus petraea* trees”. In: *Annals of Forest Research* 54.1 (2011), pp. 99–117.
- [10] Kaiming He et al. “Delving deep into rectifiers: Surpassing human-level performance on imagenet classification”. In: *Proceedings of the IEEE international conference on computer vision*. 2015, pp. 1026–1034.
- [11] Roman D. Hryciw, Junxing Zheng, and Kristen Shetler. “Particle roundness and sphericity from images of assemblies by chart estimates and computer methods”. In: *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 142.9 (2016), pp. 1–15. ISSN: 10900241. DOI: 10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0001485.
- [12] Diepenbroek Michael y Bartholomä Alexander y Ibbeken Hillert. “How round is round? A new approach to the topic roundness by Fourier grain shape analysis”. In: *Sedimentology* 39.3 (1992), pp. 411–422. ISSN: 13653091. DOI: 10.1111/j.1365-3091.1992.tb02125.x.
- [13] BH Kaye. “Specification of the ruggedness and/or texture of a fine particle profile by its fractal dimension”. In: *Powder Technology* 21.1 (1978), pp. 1–16.
- [14] W C Krumbein. “OF S E D I M E N T A R Y”. In: 11.2 (1941), pp. 64–72.
- [15] William Christian Krumbein and Laurence Louis Sloss. *Stratigraphy and sedimentation*. Vol. 71. 5. LWW, 1951.

- [16] Paul D Krynine. “1. Uniformitarianism is a Dangerous Doctrine”. In: *Journal of Sedimentary Research* 26.2 (1956).
- [17] Frank P. Kuhl and Charles R. Giardina. *Elliptic Fourier features of a closed contour*. 1982. DOI: 10.1016/0146-664X(82)90034-X.
- [18] Violet F Leavers. “Use of the two-dimensional Radon transform to generate a taxonomy of shape for the characterization of abrasive powder particles”. In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 22.12 (2000), pp. 1411–1423.
- [19] Frederick K. Lutgens and Edward J. Tarbuck. (*Spanish Edition*) *Edward J. Tarbuck, Frederick K. Lutgens, Dennis Tasa-Ciencias de la Tierra_ Una Introduccion a la Geologia Fisica with CDROM-Pearson Educacion* (2006). 2005, p. 258. ISBN: 9788483226902.
- [20] M. C. Powers. “A New Roundness Scale for Sedimentary Particles”. In: *SEPM Journal of Sedimentary Research* Vol. 23.2 (1953), pp. 117–119. ISSN: 1527-1404. DOI: 10.1306/d4269567-2b26-11d7-8648000102c1865d.
- [21] German Müller. “Methods in sedimentary petrology”. In: (1967).
- [22] Vinod Nair and Geoffrey E Hinton. “Rectified linear units improve restricted boltzmann machines”. In: *ICML*. 2010.
- [23] JD Orford and WB Whalley. “The use of the fractal dimension to quantify the morphology of irregular-shaped particles”. In: *Sedimentology* 30.5 (1983), pp. 655–668.
- [24] John P Rafferty et al. *Geological Sciences*. Britannica Educational Publishing, 2011.
- [25] Alberto Resentini, Sergio Andò, and Eduardo Garzanti. “Quantifying Roundness of Detrital Minerals By Image Analysis: Sediment Transport, Shape Effects,

- and Provenance Implications”. In: *Journal of Sedimentary Research* 88.2 (2018), pp. 276–289. ISSN: 1527-1404. DOI: 10.2110/jsr.2018.12.
- [26] Juan M. Rodriguez, Tommy Edeskär, and Sven Knutsson. “Particle shape quantities and measurement techniques-A review”. In: *Electronic Journal of Geotechnical Engineering* 18 A (2013), pp. 169–198. ISSN: 10893032.
- [27] J. C. Santamarina and G. C. Cho. “Soil behaviour: The role of particle shape”. In: *Advances in Geotechnical Engineering: The Skempton Conference - Proceedings of a Three Day Conference on Advances in Geotechnical Engineering, organised by the Institution of Civil Engineers* (2004), pp. 604–617.
- [28] D Sarocchi et al. “The 17 July 1999 block-and-ash flow (BAF) at Colima Volcano: new insights on volcanic granular flows from textural analysis”. In: *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 204.1-4 (2011), pp. 40–56.
- [29] Jürgen H Schön. *Physical properties of rocks: Fundamentals and principles of petrophysics*. Elsevier, 2015.
- [30] Samar Shah et al. “Modeling particle shape-dependent dynamics in nanomedicine”. In: *Journal of Nanoscience and Nanotechnology* 11.2 (2011), pp. 919–928. ISSN: 15334880. DOI: 10.1166/jnn.2011.3536.
- [31] Edmund D Sneed and Robert L Folk. “Pebbles in the lower Colorado River, Texas a study in particle morphogenesis”. In: *The Journal of Geology* 66.2 (1958), pp. 114–150.
- [32] GW Stachowiak. “Numerical characterization of wear particles morphology and angularity of particles and surfaces”. In: *Tribology International* 31.1-3 (1998), pp. 139–157.
- [33] Frederick George Tickell et al. “Examination of fragmental rocks”. In: (1939).

- [34] Randall Toy et al. “Shaping cancer nanomedicine: the effect of particle shape on the in vivo journey of nanoparticles”. In: *Nanomedicine* 9.1 (2014), pp. 121–134.
- [35] Maurice E Tucker. *Sedimentary petrology: an introduction to the origin of sedimentary rocks*. John Wiley Sons, 2009.
- [36] Hakon Wadell. “Sphericity and roundness of rock particles”. In: *The Journal of Geology* 41.3 (1933), pp. 310–331.
- [37] Hakon Wadell. “Volume, Shape, and Roundness of Quartz Particles”. In: *The Journal of Geology* 43.3 (1935), pp. 250–280. ISSN: 0022-1376. DOI: 10.1086/624298.
- [38] Hakon Wadell. “Volume, Shape, and Roundness of Rock Particles”. In: *The Journal of Geology* 40.5 (1932), pp. 443–451. ISSN: 0022-1376. DOI: 10.1086/623964.
- [39] Junxing Zheng and Roman D. Hryciw. “Roundness and Sphericity of Soil Particles in Assemblies by Computational Geometry”. In: *Journal of Computing in Civil Engineering* 30.6 (2016), pp. 1–13. ISSN: 08873801. DOI: 10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000578.