Series de Fourier

Gamaliel Moreno

Universidad Autónoma de Zacatecas
Taller Fourier

Verano 2024

Introducción

- Combinación lineal de funciones

Series de Fourier

- Serie de exponenciales complejas
- Serie de cosenos desfasados
- Serie de cosenos y senos

Combinación lineal de funciones

Un conjunto de funciones ortogonales $u_i(t)$ conforman una base de un espacio funcional

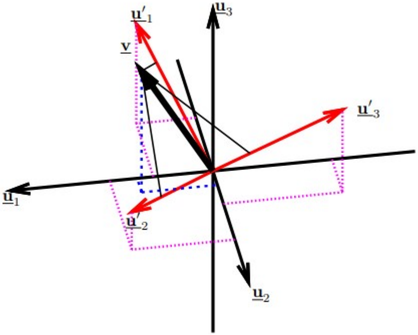
$$\mathcal{U} = \{u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)\}$$

Que engendra funciones

$$X_m(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(t)$$

Combinación lineal de funciones

Ejemplo



$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_2 = c_1' u_1' + c_2' u_2' + c_3' u_2'$$

Combinación lineal de funciones

Ecuación de síntesis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_k(t)$$

Ecuación de análisis

$$c_k = \frac{\langle\langle u_k(t), x(t)\rangle\rangle}{||u_k(t)||^2}$$

para una base funciona $\{u_k(t)\}, k \in \mathbb{Z}$ sea completa

Determinación de coeficientes

$$\langle u_k(t), x(t)\rangle \approx \langle u_k(t), \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(t)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u_k(t), c_i u_i(t)\rangle$$

$$= c_i \sum_{i=1}^{n} \langle u_k(t), u_i(t)\rangle = c_k \langle u_k(t), u_k(t)\rangle$$

$$c_k = \frac{\langle u_k(t), x(t)\rangle}{\|u_k(t)\|^2}$$

Funciones periódicas

- se dice que $x(t)$ es periódica, si para todo t se cumple

$$x(t) = x(t + T)$$

- A T se le denomina periodo de la función $x(t)$
- Al menor T que satisface $x(t) = x(t + T)$ se le denomina periodo fundamental.

Funciones exponenciales complejas

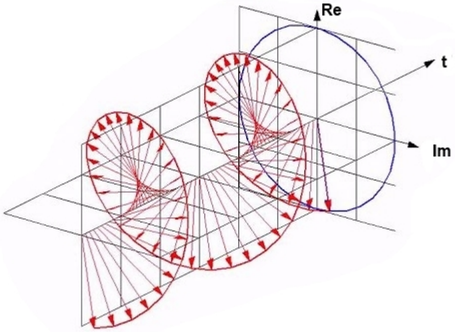
Base de exponenciales complejas

$$s_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{j2\pi k f_0 t}$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, estas funciones tienen como periodo común $T_p = 1/f_0$ y se conocen como exponencial armónicamente relacionadas.

Identidad de Euler

$$e^{jk\omega_0 t} = cos(k\omega_0 t) + jsin(k\omega_0 t) \tag{1}$$



Funciones armónicamente relacionadas

Vamos a demostrar que las funciones exponencial complejas armónicamente relacionadas son funciones ortogonales por lo que se pueden usar como base para representar funciones periódicas.

$$
\begin{aligned}
\langle s_i(t), s_k(t)\rangle &= \int_{t_0}^{t_0+T} s_i^*(t)\, s_k(t)\, dt \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} \left(e^{j\omega_0 i t}\right)^* e^{j\omega_0 k t}\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-j\omega_0 i t} e^{j\omega_0 k t}\, dt \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j\omega_0 (k-i) t}\, dt
\end{aligned}
$$

Ortogonalidad de las exponeciales

Universidad Autonóma de Zacatecas

$$= \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j\omega_0(k-i)t}\, dt$$

Para el caso $k = i$ se obtiene

$$\langle s_k(t), s_k(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j\omega_0 0t}\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T} 1\, dt = T$$

Lo que quiere decir

$$\|s_k(t)\|^2 = \langle s_k(t), s_k(t) \rangle = T$$

Ortogonalidad de las exponeciales

En el caso $k \neq i$

$$\langle s_i(t), s_k(t) \rangle = \left. \frac{e^{j\omega_0(k-i)t}}{j\omega_0(k-i)} \right|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{e^{j\omega_0(k-i)t_0}\left(e^{j\omega_0(k-i)T} - 1\right)}{j\omega_0(k-i)}.$$

Considerando finalmente que $\omega_0 T = 2\pi$ se obtiene

$$\langle s_i(t), s_k(t) \rangle = \frac{e^{j\omega_0(k-i)t_0}\left(e^{j2\pi(k-i)} - 1\right)}{j\omega_0(k-i)} = 0$$

Serie de Fourier

La serie de Fourier nos va a sintetizar funciones periódicas $x(t) = x(t + kT_p)$ con

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

y analiza, o extrae cada componente

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-jk\omega_0 t} x(t) dt$$

Función síntesis

En la mayoría de las aplicaciones se utilizarán funciones $x(t)$ de valor real. Para este caso especial, puesto que $x^*a = (xa)^*$ cuando $x \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}$, y $x^* + y^* = (x+y)^*$, entonces se cumple para los coeficientes de la serie con $k \in \mathbb{N}^+$ que

$$\begin{aligned} c_{-k} &= \frac{\langle s_{-k}(t), x(t)\rangle}{\|s_{-k}(t)\|^2} = \frac{\left\langle e^{-j\omega_0 kt}, x(t)\right\rangle}{\|e^{-j\omega_0 kt}\|^2} = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} \left(e^{-j\omega_0 kt}\right)^* x(t)\,dt \\ &= \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} \left(e^{-j\omega_0 kt} x(t)\right)^* dt = \frac{1}{T_p}\left(\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t)\,dt\right)^* \\ &= \left(\frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t)\,dt\right)^* = {c_k}^* \end{aligned}$$

Simetría hermítica

A la relación que puede escribirse como $c^*_{-k} = c_k$ se le conoce como simetría conjugada o simetría hermítica de los coeficientes de Fourier para funciones reales.

Simetría hermítica implica que la magnitud de $c_k y c_{-k}$ son iguales y que el ángulo de c_k es igual al inverso aditivo del ángulo de c_{-k} $(\angle c_k = -\angle c_{-k})$

Componente CD

$$c_0 = \frac{1}{T_p}\int_{t_0+T_p}^{t_0} x(t)dt$$

Componente CD

Al coeficiente c_0 se le denomina en ingeniería la componente CD de la señal o función x(t)

Representación cosenos desfasados

Otra representación de la serie de Fourier para funciones reales

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{j\omega_0 kt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-j\omega_0 kt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(c_k e^{j\omega_0 kt} \right)^* + c_k e^{j\omega_0 kt} \right) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\{c_k e^{j\omega_0 kt}\} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k|\,\mathrm{Re}\{e^{j(\omega_0 kt + \theta_k)}\}
\end{aligned}
$$

Representación cosenos desfasados

Otra representación de la serie de Fourier para funciones reales

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\{c_k e^{j\omega_0 kt}\} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k|\,\mathrm{Re}\{e^{j(\omega_0 kt + \theta_k)}\}$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k| \cos\left(\omega_0 kt + \theta_k\right)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k \cos\left(\omega_0 kt + \theta_k\right)$$

$$c_0 = \frac{1}{T_p}\int_{t_0+T_p}^{t_0} x(t)dt$$

Componente CD

Al coeficiente c_0 se le denomina en ingeniería la componente CD de la señal o función x(t)

Serie de cosenos y senos

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-j\omega_0 kt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \left(\cos(\omega_0 kt) - j \operatorname{sen}(\omega_0 kt)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\cos(\omega_0 kt) + j \operatorname{sen}(\omega_0 kt)\right) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_{-k}) \cos(\omega_0 kt) + j \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c_{-k}) \operatorname{sen}(\omega_0 kt)
\end{aligned}
$$

Considerando la simetría hermítica

$$
x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_k^*) \cos(\omega_0 kt) + j \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c_k^*) \operatorname{sen}(\omega_0 kt)
$$

Serie de cosenos y senos

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_k^*) \cos(\omega_0 kt) + j \sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c_k^*) \operatorname{sen}(\omega_0 kt)$$

simplificando

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\{c_k\} \cos(\omega_0 kt) - \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Im}\{c_k\} \operatorname{sen}(\omega_0 kt) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_0 kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(\omega_0 kt) \end{aligned}$$

con $a_k = 2\,\mathrm{Re}\{c_k\} = 2\,|c_k| \cos\theta_k$ y $b_k = -2\,\mathrm{Im}\{c_k\} = -2\,|c_k| \operatorname{sen}\theta_k$, es decir:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \ .$$

Thank You

Gamaliel Moreno gamalielmcha@uaz.edu.mx