Redes Neuronales profundas

Introducción

Gamaliel Moreno

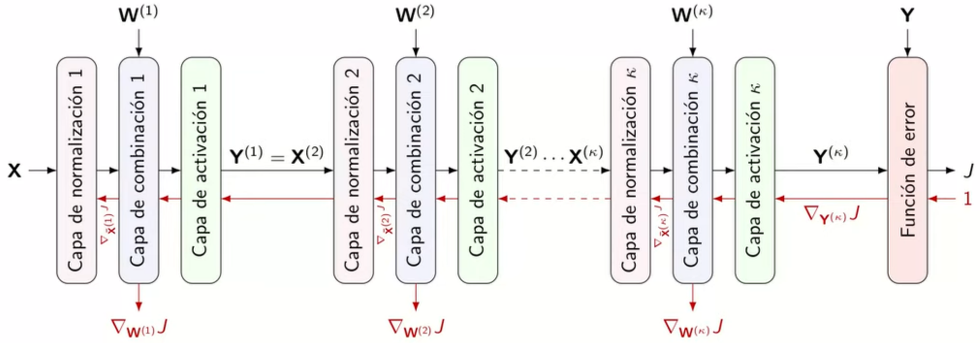
gamalielmch@uaz.edu.mx

Enero-julio 2021

Contenido

- Estructuras de redes profundas
- Capas de combinación
- Capas de activación
  - Capas simples
  - Softmax
- Normalización
- Funciones de pérdida
  - MSE
  - Entropía cruzada

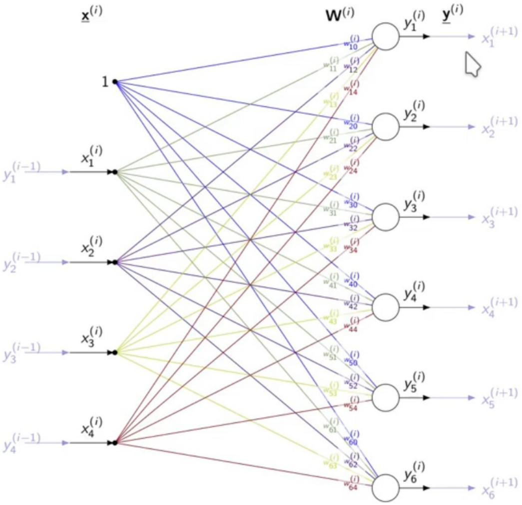
Estructura genérica de red neuronal profunda



Contenido

- Capas de combinación o transferencia
  - Capas totalmente conectadas
  - Capas convolucionales
- Capas de activación
  - Capas simples
    - Problemas : asimetría postiva, desvanecimiento del gradiente
- Normalización
- Funciones de pérdida
  - MSE
  - Entropía cruzada

Capa totalmente conectada o densa



$$\underline{\mathbf{y}}^{(i)} = \underline{\mathbf{g}}(\mathbf{W}^{(i)}\underline{\mathbf{x}}^{(i)})$$

$$\mathbf{W}^{(i)} = \begin{bmatrix} w_{10}^{(i)} & w_{11}^{(i)} & w_{12}^{(i)} & w_{13}^{(i)} & w_{14}^{(i)} \\ w_{20}^{(i)} & w_{21}^{(i)} & w_{22}^{(i)} & w_{23}^{(i)} & w_{24}^{(i)} \\ w_{30}^{(i)} & w_{31}^{(i)} & w_{32}^{(i)} & w_{33}^{(i)} & w_{34}^{(i)} \\ w_{40}^{(i)} & w_{41}^{(i)} & w_{42}^{(i)} & w_{43}^{(i)} & w_{44}^{(i)} \\ w_{50}^{(i)} & w_{51}^{(i)} & w_{52}^{(i)} & w_{53}^{(i)} & w_{54}^{(i)} \\ w_{60}^{(i)} & w_{61}^{(i)} & w_{62}^{(i)} & w_{63}^{(i)} & w_{64}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$\underline{\mathbf{w}}_{:,0}^{(i)}$ es vector de **sesgo**/*bias*

Capa totalmente conectada o densa

- Estas capas producen y con una entrada x como combinación lineal :

$$y = W \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$$

- Concepto se generaliza para procesar mini-lotes para matriz de diseño $\boldsymbol{X}$ con los datos en sus filas (y salidas en filas de $\boldsymbol{Y}$)

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{X} \end{bmatrix} W^T$$

Inicialización de pesos

- ¿Cómo inicializamos las matrices W?
  - No es simple de responder
- Dependerá de los tipos de capas de activación que usamos
- Usualmente serán números aleatorios distribuidos de cierta forma
- El rango de valores utilizables es limitado
- Si se eligen muy pequeños, el entrenamiento los aniquila ($\rightarrow 0$)
- Si se eligen muy grandes, explotan (NaN)
- Buena elección acelera convergencia
- Marcos de trabajo ofrecen alternativas "estándar", pero cada método tiene un uso particular

Inicialización en capa totalmente conectada

- Asumamo que
  - entrada $\boldsymbol{x}$ tiene componentes i.i.d. $x_i \; \mathcal{N}(0\sigma_x)$
  - entrada $\boldsymbol{W}$ tiene componentes i.i.d. $w_{ij} \; \mathcal{N}(0\sigma_w)$
- Si $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x}$ ¿cómo se distribuyen los y_i ?
- Para responder esto necesitamos dos propiedades :

$$E\left[\sum_i a_i\right] = \sum_i E\left[a_i\right]$$

$$E\left[\prod a_i\right] = \prod_i E\left[a_i\right]$$

siempre que a_i sea independiente
- Se cumple que $y_i = \boldsymbol{w}_{i,:}^T \boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} w_{ik} x_k$ particular

Inicialización en capa totalmente conectada

- Valor esperado para y_i es entonces

$$E\left[y_i\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n} w_{ik}x_k\right] = \sum_{k=1}^{n} E\left[w_{ik}x_k\right] = \sum_{k=1}^{n} E\left[w_{ik}\right] E\left[x_k\right] = 0$$

  es decir, el valor medio sigue siendo cero
- la varianza de y_i es (considerando que $E[y_i] = 0$)

$$\begin{aligned} Var[y_i] &= E\left[(y_i - E[y_i])^2\right] = E[y_i^2] = E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} w_{ik}x_k\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} w_{ik}x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} w_{ik}x_k\right)\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} w_{ik}x_k w_{il}x_l\right] \end{aligned}$$

Inicialización en capa totalmente conectada

$$= E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} w_{ik}x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} w_{ik}x_k\right)\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} w_{ik}x_k w_{il}x_l\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} E\left[w_{ik}w_{il}x_k x_l\right] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} E\left[w_{ik}w_{il}\right] E\left[x_k x_l\right]$$

donde x_k y x_l son i.i.d solo si $k \neq l$, y lo mismo para w_{ik} y w_{il}

- Esto quiere decir que si $k \neq l$ entonces $E[w_{ik}w_{il}] = 0$ y $E[x_k x_l] = 0$

$$Var[y_i] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} E\left[w_{ik}w_{il}\right] E\left[x_k x_l\right] = \sum_{k=1}^{n} E\left[w_k^2\right] E\left[x_k^2\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_w^2 \alpha_x^2 = n\alpha_w^2\alpha_x^2$$

Inicialización en capa totalmente conectada

- Si la entrada tiene $\alpha_x = 1$, entonces $Var[y_i] = n\sigma_w^2$
- Si pegáramos varias capas, la varianza ¡crece con n !
- luego de varias capas, esos números alcanzarían NaN
- Si queremos que $Var[y_i] = 1$ entonces tenemos que elegir $\sigma_w = 1/\sqrt{n}$
- El análisis anterior solo considera la capa conectada aislada
- Falta considerar la capa de activación
- Salida de esa capa debería tener varianza unitaria (entrada a siguiente capa)