

Markov Chains

Gamaliel Moreno Chávez

MCPI

Ago-Dic
2020

Introducción

¿cuál es la característica principal de un procesos Markoviano?

Estados y transiciones

Cadenas de Markov

- Secuencia de paso o intentos discretos numerados por $n = 0, 1, 2, \dots$
- El resultado de n -th intento es la variable aleatoria X_n
- X_0 es la posición inicial de proceso. Esta variable aleatoria puede tomar valores $i = 1, 2, \dots, m$
- El resultado actual es llamado estado del sistema y se denota como $E_i (i = 1, 2, \dots, m)$

¹La caminata aleatoria es un caso especial de un proceso más general, el de Markov .

Estados y transiciones

Cadenas de Markov

Si la v.a.s $X_{n-1} = i$ y $X_n = j$, entonces el sistema ha realizado un transición $E_i \rightarrow E_j$, esto es, una transición del estado E_i al estado E_j en el intento n -th.

Notese que i puede ser igual que j , las transiciones al mismo estado son posibles. La asignación de potabilidades a las transiciones de $E_i \rightarrow E_j$ es conocida como cadena

Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov tiene la propiedad de que la probabilidad de que $X_n = j$ depende solamente del estado previo del sistema. Formalmente, esto significa que no necesitamos más información en cada paso que, para cada i y j .

$$P\{X_n = j | X_{n-1} = i\} = P\{X_n = j | X_{n-1} = i, X_{n-1} = K_{n-1}, \\ X_{n-2} = K_{n-2}, \dots, X_1 = K_1\}$$

lo que significa que la probabilidad $X_n = j$ dado $X_{n-1} = i$: es independiente de los valores $X_{n-2}, X_{n-3}, \dots, X_1$.

Cadenas de Markov

Conceptos básicos

- Probabilidad de transición
- Probabilidad estacionaria o absoluta
- Probabilidad de transición en n pasos

Probabilidades de transición

Para una cadena de Markov finita con m estados E_1, E_2, \dots, E_m , tenemos

$$p_{ij} = P\{X_n = j | X_{n-1} = i\},$$

donde $i, j = 1, 2, \dots, m$ representan las probabilidades de transición del estado E_i al E_j . Las probabilidades p_{ij} son conocidas y cumplen

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$$

para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

Probabilidades de transición

Si $p_{ij} > 0$, entonces decimos que el estado E_i puede comunicarse con E_j , la comunicación es bidireccional si además $p_{ji} > 0$.

Notese que para cada i fijo, la lista $\{p_{ij}\}$ es una distribución de probabilidad, ya que en cualquier paso de los resultados E_1, E_2, \dots, E_m debe ocurrir: los estados $E_i, (i = 1, 2, \dots, m)$.

Probabilidades de transición

Las probabilidades de transición forman un arreglo de $m \times m$ el cual puede ser representado por una matriz de transición T

$$T = [p_{i,j}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Notese que cada renglón de T es una distribución de probabilidad. Cualquier matriz cuadrada para la cual $p_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$ se dice que es un renglón estocástico.

Probabilidades de transición

Example 4.1. *The matrices $A = [a_{ij}]$ and $B = [b_{ij}]$ are $m \times m$ row-stochastic matrices. Show that $C = AB$ is also row-stochastic.*

By the multiplication rule for matrices

$$C = AB = [a_{ij}][b_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \right].$$

Hence c_{ij} , the general element of C , is given by

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}.$$

Since $a_{ij} \geq 0$ and $b_{ij} \geq 0$ for all $i, j = 1, 2, \dots, m$, it follows that $c_{ij} \geq 0$. Also

$$\sum_{j=1}^m c_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \sum_{j=1}^m b_{kj} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot 1 = 1,$$

since $\sum_{j=1}^m b_{kj} = 1$ and $\sum_{k=1}^m a_{ik} = 1$.

Probabilidad estacionaria o absoluta

Otra probabilidad de interés es la del resultado E_j después de n pasos, dada una distribución de probabilidad inicial $\{p_i^{(0)}\}$. Donde $p_i^{(0)}$ es la probabilidad que inicialmente el sistema ocupe el estado E_i . Seguro $\sum_{i=1}^m p_i^{(0)} = 1$. Sea $p_j^{(1)}$ la probabilidad de que E_j sea ocupado después de un paso. Por la ley de probabilidad total

$$p_j^{(1)} = \sum_{i=1}^m p_i^{(0)} p_{ij}$$

podemos expresar $p^{(0)}$ y $p^{(1)}$ esto como dos vectores

$$\mathbf{p}^{(0)} = \left[p_1^{(0)} p_2^{(0)} \dots p_m^{(0)} \right]$$

$$\mathbf{p}^{(1)} = \left[p_1^{(1)} p_2^{(1)} \dots p_m^{(1)} \right]$$

Probabilidad estacionaria o absoluta

La expresión $p_j^{(1)} = \sum_{i=1}^m p_i^{(0)} p_{ij}$ puede ser representada como un producto matricial

$$\mathbf{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} p_j^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m p_i^{(0)} p_{ij} \end{bmatrix} = \mathbf{p}^{(0)} T$$

Probabilidad estacionaria o absoluta

Sí $p^{(2)}$ es la distribución después de dos pasos, entonces

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)} T = \mathbf{p}^{(0)} TT = \mathbf{p}^{(0)} T^2$$

por lo tanto después de n pasos de repetir el proceso tenemos

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(n-1)} T = \mathbf{p}^{(0)} T^n$$

donde

$$\mathbf{p}^{(n)} = \left[p_1^{(n)} p_2^{(n)} \dots p_m^{(n)} \right]$$

Más generalmente

$$\mathbf{p}^{(n+r)} = \mathbf{p}^{(r)} T^n$$

Probabilidad estacionaria o absoluta

En $\mathbf{p}^{(n)} = [p_1^{(n)} p_2^{(n)} \dots p_m^{(n)}]$, el término $p_j^{(n)}$ es la probabilidad absoluta o no condicional del resultado E_j en el paso n - th dada la distribución inicial p^0 , esto es, $P\{X_n = j\} = p_j^{(n)}$. Notese que

$$\sum_{j=1}^m p_j^{(n)} = 1$$

Probabilidad estacionaria o absoluta

Ejercicio. En una cadena de Markov triestado, E_1, E_2, E_3 , cuyo inicio de la cadena es E_2 de tal manera que la $\mathbf{p}^{(0)} = [0, 1, 0]$. Encuentre la probabilidad absoluta $\mathbf{p}^{(3)}$ si matriz de transición es

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Probabilidad de transición en el paso- n $p_{ij}^{(n)}$

Ahora definimos $p_{ij}^{(n)}$ como la probabilidad de que la cadena esté en el estado E_j después de n pasos dado que la cadena comenzó en el estado E_i . Las probabilidades de transición del primer paso $p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$ son simplemente los elementos de la matriz de transición T . Si tenemos la intención de encontrar una fórmula para $p_{ij}^{(n)}$. Ahora, por definición,

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

también

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m P(X_n = j, X_{n-1} = k | X_0 = i)$$

para $n \geq 2$ ya que la cadena debe haber pasado por uno de todos los m estados posibles en el paso $n - 1$.

Probabilidad de transición en el paso- n $p_{ij}^{(n)}$

Ahora definimos $p_{ij}^{(n)}$ como la probabilidad de que la cadena esté en el estado E_j después de n pasos dado que la cadena comenzó en el estado E_i . Las probabilidades de transición del primer paso $p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$ son simplemente los elementos de la matriz de transición T . Si tenemos la intención de encontrar una fórmula para $p_{ij}^{(n)}$. Ahora, por definición,

$$p_{ij}^{(1)} = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

también

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m P(X_n = j, X_{n-1} = k | X_0 = i)$$

para $n \geq 2$ ya que la cadena debe haber pasado por uno de todos los m estados posibles en el paso $n - 1$.

Probabilidad de transición en el paso- n $p_{ij}^{(n)}$

Para tres eventos cualesquiera A , B , y C , tenemos la siguiente identidad

$$P(A \cap B | C) = P(A | B \cap C)P(B | C)$$

Interpretando A como $X_n = j$, B como $X_{n-1} = k$, and C as $X_0 = i$, queda como sigue

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P(A \cap B | C) = P(X_n = j, X_{n-1} = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^m P(X_n = j | X_{n-1} = k, X_0 = i) P(X_{n-1} = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^m P(X_n = j | X_{n-1} = k) P(X_{n-1} = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^m p_{kj}^{(1)} p_{ik}^{n-1} \end{aligned}$$

Probabilidad de transición en el paso- n $p_{ij}^{(n)}$

Las ecuaciones anteriores son conocidas como las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov. Poniendo n sucesivamente igual a 2, 3, ..., encontramos que las matrices tiene estos elementos, usando la regla del producto para matrices,

$$\left[p_{ij}^{(2)} \right] = \left[\sum_{k=1}^m p_{kj}^{(1)} p_{ki}^{(1)} \right] = T^2$$

$$\left[p_{ij}^{(3)} \right] = \left[\sum_{k=1}^m p_{kj}^{(2)} p_{ki}^{(1)} \right] = T^2 T = T^3$$

ya que $p_{ij}^{(2)}$ son los elementos de T^2 y así sucesivamente, la regla se generaliza a

$$\left[p_{ij}^{(n)} \right] = T^n$$

Ejemplo

En una determinada región, los patrones climáticos tienen la siguiente secuencia. Un día se describe como soleado (S) si el sol brilla durante más del 50 % de las horas de luz y nublado (C) si el sol brilla durante menos del 50 % de las horas de luz. Los datos indican que si está nublado un día, es igualmente probable que esté nublado o soleado al día siguiente; si hace sol hay una probabilidad de $1/2$ de que esté nublado y de $2/3$ de que esté soleado al día siguiente.

- 1 Construya la matriz de transición T para este proceso.
- 2 Si hoy está nublado, ¿cuáles son las probabilidades de que a) esté nublado, b) soleado, dentro de tres días?
- 3 Calcule T^5 y T^{10} . ¿Cómo crees que T^n se comporta cuando $n \rightarrow \infty$? ¿Cómo se comporta $p^{(n)}$ cuando $n \rightarrow \infty$? ¿Espera que el límite dependa de $p^{(0)}$?

Ejemplo

1 Construya la matriz de transición T para este proceso.

Se asume que es un proceso Markoviano. Cadena de dos estados

$$E_1 = (\text{clima nublado, C}) \quad E_2 = (\text{clima soleado, S})$$

Matriz de transición

	C	S
C	1/2	1/2
S	1/3	2/3

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Las probabilidades de transición actuales son

$$p_{11} = 1/2, \quad p_{12} = 1/2, \quad p_{21} = 1/3, \quad p_{22} = 2/3$$

Ejemplo

- 3** Si hoy está nublado, ¿cuáles son las probabilidades de que a) esté nublado, b) soleado, dentro de tres días?

$$\mathbf{p}^{(0)} = \begin{bmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

lo que significa que hoy está nublado. Dentro de tres días

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(3)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}^3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29/72 & 43/72 \\ 43/108 & 65/108 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 29/72 & 43/72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.40278 & 0.59722 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que las probabilidades son: (a) $p_1^{(3)} = 29/72$ y (b) $p_2^{(3)} = 43/72$