Markov Chains

Gamaliel Moreno Chávez

MCPI

Ago-Dic
2020

Introducción

¿cuál es la característica principal de un procesos Markoviano?

Estados y transiciones

Cadenas de Markov

- Secuencia de paso o intentos discretos numerados por $n = 0, 1, 2, \ldots$
- El resultado de n-th intento es la variable aleatoria X_n
- X_0 es la posición inicial de proceso. Esta variable aleatoria puede tomar valores $i = 1, 2, \ldots, m$
- El resultado actual es llamado estado del sistema y se donota como $E_i (i = 1, 2, \ldots, m)$

[1] La caminata aleatoria es un caso especial de un proceso más general, el de Markov .

Estados y transiciones

Cadenas de Markov
Si la v.a.s $X_{n-1} = i$ y $X_n = j$, entonces el sistema ha realizado un transición $E_i \rightarrow E_j$, esto es, una transición del estado E_i al estado E_j en el intento n-th.
Notese que i puede ser igual que j, las transiciones al mismo estado son posibles. La asignación de potabilidades a las transiciones de $E_i \rightarrow E_j$ es conocida como cadena

Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov tiene la propiedad de que la probabilidad de que $X_n = j$ depende solamente del estado previo del sistema. Formalmente, esto significa que no necesitamos más información en cada paso que, para cada i y j.

$$P\{X_n = j|X_{n-1} = i\} = P\{X_n = j|X_{n-1} = i, X_{n-1} = K_{n-1}, \\ X_{n-2} = K_{n-2}, \dots X_1 = K_1\}$$

lo que significa que la probabilidad $X_n = j$ dado $X_{n-1} = i$: es independiente de los valores $X_{n-2}, X_{n-3}, \dots, X_1$.

Cadenas de Markov

Conceptos básicos

- Probabilidad de transición
- Probabilidad estacionaria o absoluta
- Probabilidad de transición en n pasos

Probabilidades de transición

Para una cadena de Markov finita con m estados $E_1, E_2, \ldots, E_m$, tenemos

$$p_{ij} = P\{X_n = j | X_{n-1} = i\},$$

donde $i, j = 1, 2, \ldots, m$ representan las probabilidades de transición del estado E_i al E_j. Las probabilidades p_{ij} son conocidas y cumplen

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Probabilidades de transición

Si $p_{ij} > 0$, entonces decimos que el estado E_i puede comunicarse con E_j, la comunicación es bidireccional si además $p_{ji} > 0$.
Notese que para cada i fijo, la lista $\{p_{ij}\}$ es una distribución de probabilidad, ya que en cualquier paso de los resultados $E_1, E_2, \ldots, E_m$ debe ocurrir: los estados $E_i, (i = 1, 2, \ldots, m)$.

Probabilidades de transición

Las probabilidades de transición forman un arreglo de *mxm* el cual puede ser represando por un matriz de transición T

$$T = [p_{i,j}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Notese que cada renglones de T es una distribución de probabilidad. Cualquier matriz cuadrad para la cual $p_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$ se dice que es un renglón estocástico.

Probabilidades de transición

Example 4.1. *The matrices $A = [a_{ij}]$ and $B = [b_{ij}]$ are $m \times m$ row-stochastic matrices. Show that $C = AB$ is also row-stochastic.*

By the multiplication rule for matrices

$$C = AB = [a_{ij}][b_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right].$$

Hence c_{ij}, the general element of C, is given by

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}.$$

Since $a_{ij} \geq 0$ and $b_{ij} \geq 0$ for all $i, j = 1, 2, \ldots, m$, it follows that $c_{ij} \geq 0$. Also

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \sum_{j=1}^{m} b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot 1 = 1,$$

since $\sum_{j=1}^{m} b_{kj} = 1$ and $\sum_{k=1}^{m} a_{ik} = 1$.

Probabilidad estacionaria o absoluta

Otra probabilidad de interés es la del resultado E_j después de n pasos, dada una distribución de probabilidad inicial $\{p_i^{(0)}\}$. Donde $p_i^{(0)}$ es la probabilidad que inicialmente el sistema ocupe el estado E_i. Seguro $\sum_{i=1}^{m} p_i^0 = 1$. Sea $p_j^{(1)}$ la probabilidad de que E_j sea ocupado después de un paso. Por la ley de probabilidad total

$$p_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} p_i^{(0)} p_{ij}$$

podemos expresar $p^{(0)}$ y $p^{(1)}$ esto como dos vectores

$$\mathbf{p}^{(0)} = \left[p_1^{(0)} p_2^{(0)} \dots p_m^{(0)} \right]$$

$$\mathbf{p}^{(1)} = \left[p_1^{(1)} p_2^{(1)} \dots p_m^{(1)} \right]$$

Probabilidad estacionaria o absoluta

La expresión $p_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} p_i^{(0)} p_{ij}$ puede ser representada como un producto matricial

$$\mathbf{p}^{(1)} = \left[p_j^{(1)}\right] = \left[\sum_{i=1}^{m} p_i^{(0)} p_{ij}\right] = \mathbf{p}^{(0)} T$$

Probabilidad estacionaria o absoluta

Sí $p^{(2)}$ es la distribución después de dos pasos, entonces

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)}T = \mathbf{p}^{(0)}TT = \mathbf{p}^{(0)}T^2$$

por lo tanto después de n pasos de repetir el proceso tenemos

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(n-1)}T = \mathbf{p}^{(0)}T^n$$

donde

$$\mathbf{p}^{(n)} = \left[p_1^{(n)} p_2^{(n)} \dots p_m^{(n)} \right]$$

Más generalmente

$$\mathbf{p}^{(n+r)} = \mathbf{p}^{(r)}T^n$$

Probabilidad estacionaria o absoluta

En $\mathbf{p}^{(n)} = \left[p_1^{(n)} p_2^{(n)} \ldots p_m^{(n)}\right]$, el término $p_j^{(n)}$ es la probabilidad absoluta o no condicional del resultado E_j en el paso $n - th$ dada la distribución inicial p^0, esto es, $P\left\{X_n = j\right\} = p_j^{(n)}$. Notese que

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^{(n)} = 1$$

Probabilidad estacionaria o absoluta

Ejercicio. En una cadena de Markov triestado, E_1, E_2, E_3, cuyo inicio de la cadena es E_2 de tal manera que la $\mathbf{p}^{(0)} = [0, 1, 0]$. Encuentre la probabilidad absoluta $\mathbf{p}^{(3)}$ si matriz de transición es

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Probabilidad de transición en el paso-n $p_{ij}^{(n)}$

Ahora definimos $p_{ij}^{(n)}$ como la probabilidad de que la cadena esté en el estado E_j después de n pasos dado que la cadena comenzó en el estado E_i. Las probabilidades de transición del primer paso $p_{ij} = p_{ij}$ son simplemente los elementos de la matriz de transición T. Si tenemos la intención de encontrar una fórmula para $p_{ij}^{(n)}$. Ahora, por definición,

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

también

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} P(X_n = j, X_{n-1} = k | X_0 = i)$$

para $n \geq 2$ ya que la cadena debe haber pasado por uno de todos los m estados posibles en el paso $n - 1$.

Probabilidad de transición en el paso-n $p_{ij}^{(n)}$

Ahora definimos $p_{ij}^{(n)}$ como la probabilidad de que la cadena esté en el estado E_j después de n pasos dado que la cadena comenzó en el estado E_i. Las probabilidades de transición del primer paso $p_{ij} = p_{ij}$ son simplemente los elementos de la matriz de transición T. Si tenemos la intención de encontrar una fórmula para $p_{ij}^{(n)}$. Ahora, por definición,

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

también

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} P(X_n = j, X_{n-1} = k | X_0 = i)$$

para $n \geq 2$ ya que la cadena debe haber pasado por uno de todos los m estados posibles en el paso $n - 1$.

Probabilidad de transición en el paso-n $p_{ij}^{(n)}$

Para tres eventos cualesquiera A, B, y C, tenemos la siguiente identidad

$$P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C)P(B|C)$$

Interpretando A como $X_n = j$, B como $X_{n-1} = k$, and C as $X_0 = i$, queda como sigue

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P(A \cap B|C) = P(X_n = j, X_{n-1} = k|X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{m} (X_n = j|X_{n-1} = k, X_0 = i)P(X_{n-1} = k|X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{m} P(X_n = j|X_{n-1} = k)P(X_{n-1} = k|X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{m} p_{kj}^{(1)} p_{ik}^{n-1} \end{aligned}$$

Probabilidad de transición en el paso-n $p_{ij}^{(n)}$

Las ecuaciones anteriores son conocidas como las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov. Poniendo n sucesivamente igual a $2, 3, \ldots$, encontramos que las matrices tiene estos elementos, usando la regla del producto para matrices,

$$\left[p_{ij}{}^{(2)}\right] = \left[\sum_{k=1}^{m} p_{kj}^{(1)} p_{kj}^{(1)}\right] = T^2$$

$$\left[p_{ij}{}^{(3)}\right] = \left[\sum_{k=1}^{m} p_{kj}^{(2)} p_{kj}^{(1)}\right] = T^2 T = T^3$$

ya que $p_{ij}{}^{(2)}$ son los elementos de T^2 y así sucesivamente, la regla se generaliza a

$$\left[p_{ij}{}^{(n)}\right] = T^n$$

Ejemplo

En una determinada región, los patrones climáticos tienen la siguiente secuencia. Un día se describe como soleado (S) si el sol brilla durante más del 50 % de las horas de luz y nublado (C) si el sol brilla durante menos del 50 % de las horas de luz. Los datos indican que si está nublado un día, es igualmente probable que esté nublado o soleado al día siguiente; si hace sol hay una probabilidad de 1/3 de que esté nublado y de 2/3 de que esté soleado al día siguiente.

1. Construya la matriz de transición T para este proceso.
2. Si hoy está nublado, ¿cuáles son las probabilidades de que a) esté nublado, b) soleado, dentro de tres días?
3. Calcule T^5 y T^{10}. ¿Cómo crees que T^n se comporta cuando $n \to \infty$? ¿Cómo se comporta $p^{(n)}$ cuando $n \to \infty$? ¿Espera que el límite dependa de $p^{(0)}$?

Ejemplo

1. Construya la matriz de transición T para este proceso.

Se asume que es un proceso Markoviano. Cadena de dos estados

$$E_1 = (\text{clima nublado, C}) \qquad E_2 = (\text{clima soleado, S})$$

Matriz de transición

	C	S
C	1/2	1/2
S	1/3	2/3

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Las probabilidades de transición actuales son

$$p_{11} = 1/2, \quad p_{12} = 1/2, \quad p_{21} = 1/3, \quad p_{22} = 2/3$$

Ejemplo

3. Si hoy está nublado, ¿cuáles son las probabilidades de que a) esté nublado, b) soleado, dentro de tres días?

$$\mathbf{p}^{(0)} = \begin{bmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

lo que significa que hoy está nublado. Dentro de tres días

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^{(3)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}^3 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29/72 & 43/72 \\ 43/108 & 65/108 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 29/72 & 43/72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.40278 & 0.59722 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo que las probabilidades son: (a) $p_1^{(3)} = 29/72$ y (b) $p_2^{(3)} = 43/72$

Cadena de Markov general bi-estado

Considere la siguiente matriz de transición

$$T = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}, \qquad 0 < \alpha, \beta < 1.$$

Queremos encontrar un fórmula general para T^n. Primero encontramos los eigenvalores (λ)de T con $det(T - \lambda I_2) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha-\lambda & \alpha \\ \beta & 1-\beta-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{or} \quad (1-\alpha-\lambda)(1-\beta-\lambda) - \alpha\beta = 0.$$

Cadena de Markov general bi-estado

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha-\lambda & \alpha \\ \beta & 1-\beta-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{or} \quad (1-\alpha-\lambda)(1-\beta-\lambda) - \alpha\beta = 0.$$

Resolviendo

$$\lambda^2 - \lambda(2-\alpha-\beta) + 1 - \alpha - \beta = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1 + \alpha + \beta) = 0.$$

Los eigenvalores de T son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1 - \alpha - \beta = s$. Notese que las matrices estocásticas siempre va a tener un eigenvalor unitario.

Cadena de Markov general bi-estado

Los eigenvalores de T son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1 - \alpha - \beta = s$. Encontrando los eigenvectores asociados a los eigenvalores. Sea $\mathbf{r}_1$ es eigenvector de λ_1 definido por

$$(T - \lambda_1 I_2)\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}, \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1-\alpha-\lambda_1 & \alpha \\ \beta & 1-\beta-\lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{r}_1 = \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix} \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}.$$

Cadena de Markov general bi-estado

$$(T - \lambda_1 I_2)\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}, \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1-\alpha-\lambda_1 & \alpha \\ \beta & 1-\beta-\lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{r}_1 = \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix} \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}.$$

Encontrando alguna solución no trivial a la esta ecuación

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Notese que el vector asociado a eigenvalor unitario es un vector de unos.

Cadena de Markov general bi-estado

De manera similar encontramos los eigenvectores para $\lambda_2 = 1 - \alpha - \beta = s$.

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha-\lambda_2 & \alpha \\ \beta & 1-\beta-\lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}, \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$$

para este caso el vector queda

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Cadena de Markov general bi-estado

Ahora formamos la matriz C con los eigenvectores

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$$

obtenemos su inversa

$$C^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cadena de Markov general bi-estado

Si expandimos el producto matricial $C^{-1}TC$ tenemos

$$\begin{aligned} C^{-1}TC &= \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha s \\ 1 & \beta s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = D, \end{aligned}$$

Ahora D es una matriz diagonal con los valores propios de T como sus elementos diagonales: este proceso se conoce en álgebra lineal como la diagonalización de una matriz.El resultado es significativo ya que las matrices diagonales son fáciles de multiplicar.

Cadena de Markov general bi-estado

Para el caso de potencias

$$\begin{aligned} T^2 &= (CDC^{-1})(CDC^{-1}) = (CD)(C^{-1}C)(DC^{-1}) \\ &= (CD)I_2(DC^{-1}) = CDDC^{-1} = CD^2C^{-1}, \end{aligned}$$

donde

$$D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix}$$

se puede probar que

$$T^n = CD^nC^{-1}$$

Cadena de Markov general bi-estado

se puede probar que

$$T^n = C D^n C^{-1}$$

con

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^n \end{bmatrix}$$

Cadena de Markov general bi-estado

Entonces el producto de matrices queda como

$$T^n = CD^nC^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

dado que $0 < \alpha, \beta < 1$, además $|s| < 1$ y si $n \to \infty$ entonces $s^n \to 0$ por lo tanto

$$T^n \to \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Cadena de Markov general bi-estado

Por lo tanto para cualquier distribución de probabilidad inicial $\mathbf{p}_0$, la distribución sobre los estados después de n pasos esta dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(n)} &= \mathbf{p}^{(0)} T^n = \left[\begin{array}{cc} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} \end{array}\right] T^n \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cc} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} \end{array}\right] \frac{1}{\alpha+\beta} \left[\begin{array}{cc} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{array}\right] \end{aligned}$$

se puede notar que conforme $n \rightarrow \infty$ el limite es independiente de $\mathbf{p}^{(0)}$. Esto es un ejemplo de una distribución invariante de la cadena de Markov, ya que es independiente de la distribución inicial. Se dice que la cadena está en equilibrio.

Cadena de Markov general bi-estado

¿Qué sucede con el limite si $\alpha = \beta = 1$? ¿y qué sucede si $\alpha = 1, 0 < \beta < 1$ or $0 < \alpha < 1,\ \beta = 1$?. tenga presente

$$s = 1 - \alpha - \beta$$

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^n \end{bmatrix}$$

$$T^n = CD^nC^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cadena de Markov general bi-estado

El método derivado para la cadena de dos estados en la sección anterior se puede generalizar a cadenas de m-estados.Sea T una matriz estocástica mxm, en otras palabras, una posible matriz de transición. Los eigenvalores de T están dados por

$$|T - \lambda I_m| = 0,$$

donde I_m es la matriz identidad de orden m. Suponga que los valores propios son distintos y se denotan por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Cadena de Markov general bi-estado

Nuevamente note que la matriz estocástica T siempre tiene un eigenvalor unitario, digamos $\lambda_1 = 1$ con un eigenvector unitario

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^t$$

Todos los vectores tiene que satisfacer

$$[T - \lambda_i I_m]\mathbf{r}_i = \mathbf{0}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

la matriz C quedaría como

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \ldots & \mathbf{r}_m \end{bmatrix}$$

Cadena de Markov general bi-estado

La matriz C nos sirve para diagonalizar la matriz T, quedando como

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

la cual es útil para estimar la potencia n

$$T^n = CD^nC^{-1},$$

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m^n \end{bmatrix}$$

Cadena de Markov general bi-estado

Ejercicio 1
Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de la matriz estocástica

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Encuentre una fórmula para T^n, y encuentre el $lim_{n\to\infty}\ T^n$.

Cadena de Markov general bi-estado

Ejercicio 2

Los estados absorbentes son reconocibles en las cadenas de Markov por un valor 1 en un elemento diagonal de la matriz de transición. Dado que tales matrices son estocásticas, todos los demás elementos de la misma fila deben ser cero.

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dibuje el grafo y encuentre una fórmula para T^n, y $lim_{n \to \infty} \ T^n$.

Cadena de Markov general bi-estado

Ejercicio 3

Un modelo enfermedad-muerte. Un posible modelo simple enfermedad-muerte se puede representar mediante una cadena de Markov de cuatro estados en la que E_1 es un estado en el que un individuo está libre de una enfermedad particular, E_2 es un estado en el que el individuo tiene la enfermedad, y E_3 y E_4 son respectivamente estados de muerte que surgen como consecuencia de la enfermedad o por otras causas. Durante algún intervalo de tiempo apropiado (quizás un ciclo anual), asignamos probabilidades a la transición entre los estados. Supongamos que la matriz de transición es (en el orden de los estados)

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cadena de Markov general bi-estado

Ejercicio 3

Dibuje la cadena. Encuentre las probabilidades de que una persona muera finalmente después de una gran cantidad de transiciones de la enfermedad, dado que inicialmente no la padeció.

Cadena de Markov general bi-estado

Ejercicio 4

En el problema de la ruina de un jugador, suponga que p es la probabilidad de que el jugador gane en cada jugada, y que $a = 5$ y que la apuesta inicial del jugador es $k = 3$ unidades. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador realmente gane en la cuarta jugada?

Clasificación de estados

Estado absorbente

En el estado absorbente una vez ingresado, no hay escapatoria. Un estado absorbente E_i se caracteriza por las probabilidades

$$p_{ii} = 1, \qquad p_{ij} = 0, (j \neq i, \quad j = 1, 2, \ldots m)$$

en el i-th renglón de T

Clasificación de estados

Estado periódico

La probabilidad de un retorno a E_i en el paso n es $p_{ii}^{(n)}$. Sea t un entero mayor a 1. Supongamos

$$p_{ii}^{(n)} = 0 \text{ for } n \neq t, 2t, 3t, \ldots$$
$$p_{ii}^{(n)} \neq 0 \text{ for } n = t, 2t, 3t, \ldots.$$

en este caso el estado E_i es periódico con periodo t. Si, para un estado, no existe tal t con esta propiedad, entonces el estado se describe como aperiódico.

Clasificación de estados

Regla general para estados periódico

sea

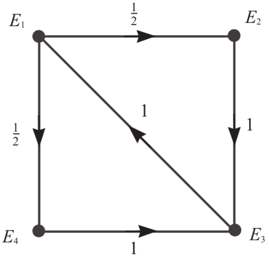
$$d(i) = \gcd\{n | p_{ii}^{(n)} > 0\},$$

el máximo común divisor (greatest common divisor) del conjunto de enteros n para los cuales $p_{ii}^{(n)} > 0$. Entonces se dice que el estado E_i es periódico si $d(i) > 1$ y aperiódico si $d(i) = 1$.

Clasificación de estados

Ejemplo de estados periódicos.
Una cadena de Markov de cuatro estados tiene la matriz de transición

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



se observa que todos los estados tienen un período 3. Por ejemplo, si la cadena comienza en E_1, los retornos a E_1 posibles en los pasos en los pasos $3, 6, 9, \ldots$ ya sea a través de $1E_2$ o E_3.

Clasificación de estados

Estado persistente - recurrente

Sea $f_j^{(n)}$ la probabilidad de que el primer regreso a E_j ocurra en el n-ésimo paso. Esta probabilidad no es la misma que $p_{jj}^{(n)}$, que es la probabilidad de que se produzca un retorno en el n-ésimo paso, e incluye los posibles retorno en los pasos $1, 2, 3, \ldots, n-1$ también. Esto es

$$p_{jj}^{(1)} (= p_{jj}) = f_j^{(1)},$$
$$p_{jj}^{(2)} = f_j^{(2)} + f_j^{(1)} p_{jj}^{(1)},$$
$$p_{jj}^{(3)} = f_j^{(3)} + f_j^{(1)} p_{jj}^{(2)} + f_j^{(2)} p_{jj}^{(1)},$$

Clasificación de estados

Estado persistente - recurrente

en general

$$p_{jj}^{(n)} = f_j^{(n)} + \sum_{r=1}^{n-1} f_j^{(r)} p_{jj}^{(n-r)} \qquad (n \geq 2).$$

De las ecuaciones anteriores se puede despejar $f_j^{(n)}$

$$f_j^{(1)} = p_{jj},$$

$$f_j^{(n)} = p_{jj}^{(n)} - \sum_{r=1}^{n-1} f_j^{(r)} p_{jj}^{(n-r)} \qquad (n \geq 2).$$

Clasificación de estados

Estado persistente - recurrente

La probabilidad de que una cadena regrese en algún paso al estado E_j es

$$f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}.$$

Si $f_j = 1$, entonces un retorno a E_j es seguro, y E_j se llama **estado persistente**.

Clasificación de estados

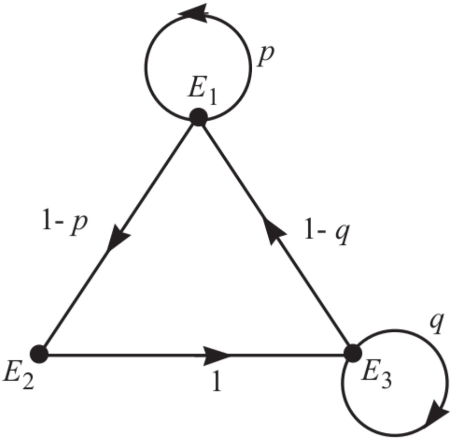
Ejemplo. Estado persistente - recurrente Una cadena de Markov de tres estados tiene la matriz de transición

$$T = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1-q & 0 & q \end{bmatrix}$$

donde $0 < p < 1, 0 < q < 1$. Demuestre que el estado E_1 es persistente.

Clasificación de estados

Diagrama de transición



Clasificación de estados

Si una secuencia comienza en E_1, entonces se puede ver que primero se pueden volver de E_1 a E_1 en cada paso excepto para $n = 2$, ya que después de dos pasos la cadena debe estar en el estado E_3. Entonces

$$f_1^{(1)} = p, \qquad f_1^{(2)} = 0, \qquad f_1^{(3)} = (1-p) \cdot 1 \cdot (1-q),$$
$$f_1^{(n)} = (1-p).1.q^{n-3}.(1-q), \quad (n \geq 4).$$

El último resultado para $f_1^{(n)}$ para $n \geq 4$ se deriva de la siguiente secuencia de transiciones:

$$E_1 \; E_2 \; \overbrace{E_3 \; E_3 \; \cdots \; E_3}^{(n-3) \text{ times}} \; E_1.$$

Clasificación de estados

La probabilidad f_1 de que el sistema regrese al menos una vez a E_1 es

$$\begin{aligned} f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_1^{(n)} &= p + \sum_{n=3}^{\infty}(1-p)(1-q)q^{n-3}, \\ &= p + (1-p)(1-q)\sum_{s=0}^{\infty} q^s, \qquad (s = n-3) \\ &= p + (1-p)\frac{(1-q)}{(1-q)} = 1, \end{aligned}$$

Por tanto, $f_1 = 1$, y en consecuencia el estado E_1 es persistente.

Clasificación de estados

número de recurrencias promedio

El número de recurrencias promedio μ_j de un estado persistente E_j, del cual $\sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} = 1$ esta dado por

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_j^{(n)}.$$

Clasificación de estados

Del ejemplo anterior, el estado persistente E_1, el promedio de veces recurrentes esta dado por

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_1^{(n)} = p + (1-p)(1-q)\sum_{n=3}^{\infty} n q^{n-3}$$
$$= p + (1-p)(1-q)\left[\frac{3-2q}{(1-q)^2}\right] = \frac{3-2p-2q+pq}{1-q},$$

que es finito. Para algunas cadenas, el numero medio de recurrencia puede ser infinito. Se dice que un estado persistente E_j es nulo si $\mu_j = \infty$, y no nulo si $\mu_j < \infty$.

Clasificación de estados

Estado transitorio

Para un estado persistente, la probabilidad de un primer retorno en algún paso en el futuro es cierta. Para algunos estados,

$$f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} < 1,$$

lo que significa que la probabilidad de un primer retorno no es segura. Estos estados se describen como **transitorios**.

Clasificación de estados

Ejercicio. Una cadena de Markov de cuatro estados tiene la matriz de transición

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

demuestre que el estado E_1 es transitorio.

Clasificación de estados

Estado ergódico

El estado que es persistente, no nulo y aperiódico es llamado ergódico. Los estados ergódicos son importantes en la clasificación de cadenas y en la existencia de distribuciones de probabilidad limitantes.