Markov Chains

Gamaliel Moreno Chávez

MCPI

Ago-Dic
2020

Introducción

¿cuál es la característica principal de un procesos Markoviano?

Estados y transiciones

Cadenas de Markov

- Secuencia de paso o intentos discretos numerados por $n = 0, 1, 2, \ldots$
- El resultado de n-th intento es la variable aleatoria X_n
- X_0 es la posición inicial de proceso. Esta variable aleatoria puede tomar valores $i = 1, 2, \ldots, m$
- El resultado actual es llamado estado del sistema y se donota como $E_i (i = 1, 2, \ldots, m)$

´

[1] La caminata aleatoria es un caso especial de un proceso más general, el de Markov .

Estados y transiciones

Cadenas de Markov

Si la v.a.s $X_{n-1} = i$ y $X_n = j$, entonces el sistema ha realizado un transición $E_i \to E_j$, esto es, una transición del estado E_i al estado E_j en el intento n-th.

Notese que i puede ser igual que j, las transiciones al mismo estado son posibles. La asignación de potabilidades a las transiciones de $E_i \to E_j$ es conocida como cadena

Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov tiene la propiedad de que la probabilidad de que $X_n = j$ depende solamente del estado previo del sistema. Formalmente, esto significa que no necesitamos más información en cada paso que, para cada i y j.

$$P\{X_n = j | X_{n-1} = i\} = P\{X_n = j | X_{n-1} = i, X_{n-1} = K_{n-1}, X_{n-2} = K_{n-2}, \ldots X_1 = K_1\}$$

lo que significa que la probabilidad $X_n = j$ dado $X_{n-1} = i$: es independiente de los valores $X_{n-2}, X_{n-3}, \ldots, X_1$.

Cadenas de Markov

Conceptos básicos

- Probabilidad de transición
- Probabilidad estacionaria o absoluta
- Probabilidad de transición en n pasos

Probabilidades de transición

Para una cadena de Markov finita con m estados $E_1, E_2, \ldots, E_m$, tenemos

$$p_{ij} = P\{X_n = j | X_{n-1} = i\},$$

donde $i, j = 1, 2, \ldots, m$ representan las probabilidades de transición del estado E_i al E_j. Las probabilidades p_{ij} son conocidas y cumplen

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Probabilidades de transición

Si $p_{ij} > 0$, entonces decimos que el estado E_i puede comunicarse con E_j, la comunicación es bidireccional si además $p_{ji} > 0$. Notese que para cada i fijo, la lista $\{p_{ij}\}$ es una distribución de probabilidad, ya que en cualquier paso de los resultados $E_1, E_2, \ldots, E_m$ debe ocurrir: los estados $E_i, (i = 1, 2, \ldots, m)$.

Probabilidades de transición

Las probabilidades de transición forman un arreglo de *mxm* el cual puede ser represando por un matriz de transición T

$$T = [p_{i,j}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Notese que cada renglones de T es una distribución de probabilidad. Cualquier matriz cuadrad para la cual $p_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$ se dice que es un renglón estocástico.

Probabilidades de transición

Example 4.1. *The matrices $A = [a_{ij}]$ and $B = [b_{ij}]$ are $m \times m$ row-stochastic matrices. Show that $C = AB$ is also row-stochastic.*

By the multiplication rule for matrices

$$C = AB = [a_{ij}][b_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right].$$

Hence c_{ij}, the general element of C, is given by

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}.$$

Since $a_{ij} \geq 0$ and $b_{ij} \geq 0$ for all $i, j = 1, 2, \ldots, m$, it follows that $c_{ij} \geq 0$. Also

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\sum_{j=1}^{m} b_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot 1 = 1,$$

since $\sum_{j=1}^{m} b_{kj} = 1$ and $\sum_{k=1}^{m} a_{ik} = 1$.

Probabilidad estacionaria o absoluta

Otra probabilidad de interés es la del el resultado E_j después de n pasos, dada una distribución de probabilidad inicial $\{p_i^{(0)}\}$. Donde $p_i^{(0)}$ es la probabilidad que inicialmente el sistema ocupe el estado E_i. Seguro $\sum_{i=1}^{m} p_i^0 = 1$. Sea $p_j^{(1)}$ la probabilidad de que E_j sea ocupado después de un paso. Por la ley de probabilidad total

$$p_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} p_i^{(0)} p_{ij}$$

podemos expresar $p^{(0)}$ y $p^{(1)}$ esto como dos vectores

$$\mathbf{p}^{(0)} = \left[p_1^{(0)} p_2^{(0)} \ldots p_m^{(0)} \right]$$

$$\mathbf{p}^{(1)} = \left[p_1^{(1)} p_2^{(1)} \ldots p_m^{(1)} \right]$$

Probabilidad estacionaria o absoluta

La expresión $p_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} p_i^{(0)} p_{ij}$ puede ser representada como un producto matricial

$$\mathbf{p}^{(1)} = \left[p_j^{(1)} \right] = \left[\sum_{i=1}^{m} p_i^{(0)} p_{ij} \right] = \mathbf{p}^{(0)} T$$

Probabilidad estacionaria o absoluta

Sí $p^{(2)}$ es la distribución después de dos pasos, entonces

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)}T = \mathbf{p}^{(0)}TT = \mathbf{p}^{(0)}T^2$$

por lo tanto después de n pasos de repetir el proceso tenemos

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(n-1)}T = \mathbf{p}^{(0)}T^n$$

donde

$$\mathbf{p}^{(n)} = \left[p_1^{(n)} p_2^{(n)} \dots p_m^{(n)} \right]$$

Más generalmente

$$\mathbf{p}^{(n+r)} = \mathbf{p}^{(r)}T^n$$

Probabilidad estacionaria o absoluta

En $\mathbf{p}^{(n)} = \left[p_1^{(n)} p_2^{(n)} \ldots p_m^{(n)}\right]$, el término $p_j^{(n)}$ es la probabilidad absoluta o no condicional del resultado E_j en el paso $n - th$ dada la distribución inicial p^0, esto es, $P\left\{X_n = j\right\} = p_j^{(n)}$. Notese que

$$\sum_{j=1}^{m} p_j^{(n)} = 1$$

Probabilidad estacionaria o absoluta

Ejercicio. En una cadena de Markov triestado, E_1, E_2, E_3, cuyo inicio de la cadena es E_2 de tal manera que la $\mathbf{p}^{(0)} = [0, 1, 0]$. Encuentre la probabilidad absoluta $\mathbf{p}^{(3)}$ si matriz de transición es

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Probabilidad de transición en el paso-n $p_{ij}^{(n)}$

Ahora definimos $p_{ij}^{(n)}$ como la probabilidad de que la cadena esté en el estado E_j después de n pasos dado que la cadena comenzó en el estado E_i. Las probabilidades de transición del primer paso $p_{ij} = p_{ij}$ son simplemente los elementos de la matriz de transición T. Si tenemos la intención de encontrar una fórmula para $p_{ij}^{(n)}$. Ahora, por definición,

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

también

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} P(X_n = j, X_{n-1} = k | X_0 = i)$$

para $n \geq 2$ ya que la cadena debe haber pasado por uno de todos los m estados posibles en el paso $n-1$.

Probabilidad de transición en el paso-n $p_{ij}^{(n)}$

Ahora definimos $p_{ij}^{(n)}$ como la probabilidad de que la cadena esté en el estado E_j después de n pasos dado que la cadena comenzó en el estado E_i. Las probabilidades de transición del primer paso $p_{ij} = p_{ij}$ son simplemente los elementos de la matriz de transición T. Si tenemos la intención de encontrar una fórmula para $p_{ij}^{(n)}$. Ahora, por definición,

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

también

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} P(X_n = j, X_{n-1} = k | X_0 = i)$$

para $n \geq 2$ ya que la cadena debe haber pasado por uno de todos los m estados posibles en el paso $n-1$.

Probabilidad de transición en el paso-n $p_{ij}^{(n)}$

Para tres eventos cualesquiera A, B, y C, tenemos la siguiente identidad

$$P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C)P(B|C)$$

Interpretando A como $X_n = j$, B como $X_{n-1} = k$, and C as $X_0 = i$, queda como sigue

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P(A \cap B|C) = P(X_n = j, X_{n-1} = k|X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{m} (X_n = j|X_{n-1} = k, X_0 = i)P(X_{n-1} = k|X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{m} P(X_n = j|X_{n-1} = k)P(X_{n-1} = k|X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{m} p_{kj}^{(1)} p_{ik}^{n-1} \end{aligned}$$

Probabilidad de transición en el paso-n $p_{ij}^{(n)}$

Las ecuaciones anteriores son conocidas como las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov. Poniendo n sucesivamente igual a $2, 3, \ldots$, encontramos que las matrices tiene estos elementos, usando la regla del producto para matrices,

$$\left[p_{ij}{}^{(2)}\right] = \left[\sum_{k=1}^{m} p_{kj}^{(1)} p_{kj}^{(1)}\right] = T^2$$

$$\left[p_{ij}{}^{(3)}\right] = \left[\sum_{k=1}^{m} p_{kj}^{(2)} p_{kj}^{(1)}\right] = T^2 T = T^3$$

ya que $p_{ij}{}^{(2)}$ son los elementos de T^2 y así sucesivamente, la regla se generaliza a

$$\left[p_{ij}{}^{(n)}\right] = T^n$$