

---

# COURS V

24 février 2026



# PLAN

- Biais de variable omise
- L'estimation d'un modèle APT :
- Exercice

## BIAIS DE VARIABLE OMISE

- En économétrie, nous cherchons à estimer la relation entre des variables explicatives et une variable dépendante.
- **Variable omise** : une variable importante qui influence à la fois la variable dépendante et l'une des variables explicatives, mais qui n'est pas incluse dans le modèle.
- **Conséquence principale** : biais et inconsistance des estimateurs.

## BIAIS DE VARIABLE OMISE

- Vrai modèle :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon$$

- Modèle estimé ( $X_2$  omise) :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \tilde{\epsilon}$$

avec  $\tilde{\epsilon} = \beta_2 X_2 + \epsilon$

- **Biais de variable omise** se produit si :
  - La variable omise  $X_2$  affecte la variable dépendante  $Y$ , c'est-à-dire  $\beta_2 \neq 0$
  - La variable omise  $X_2$  est corrélée avec la variable incluse  $X_1$ , c'est-à-dire, si  $\text{Cov}(X_1, X_2) \neq 0$
- Si les deux phénomènes sont vrais, alors  $\tilde{\beta}_1$  sera biaisé.

## BIAIS DE VARIABLE OMISE

- Formule de l'estimateur MCO à une variable :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\text{Cov}(X_1, Y)}{\text{Var}(X_1)}$$

- Substituons  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon$ :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\text{Cov}(X_1, \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon)}{\text{Var}(X_1)}$$

- On peut développer la covariance :

$$\text{Cov}(X_1, \beta_0) = 0, \text{Cov}(X_1, \beta_1 X_1) = \beta_1 \text{Var}(X_1), \text{Cov}(X_1, \beta_2 X_2) = \beta_2 \text{Cov}(X_1, X_2), \text{Cov}(X_1, \epsilon) = 0$$

- Donc :

$$\text{Cov}(X_1, Y) = \beta_1 \text{Var}(X_1) + \beta_2 \text{Cov}(X_1, X_2)$$

## BIAIS DE VARIABLE OMISE

- Substituer dans la formule de l'estimateur MCO :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\beta_1 \text{Var}(X_1) + \beta_2 \text{Cov}(X_1, X_2)}{\text{Var}(X_1)} = \beta_1 + \beta_2 \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\text{Var}(X_1)}$$

- Si  $\beta_2$  et  $\text{Cov}(X_1, X_2)$  ont le même signe (positif ou négatif), le biais sera positif : on surestime alors  $\hat{\beta}_1$ 
  - Si  $\beta_1 > 0$ , on parle de biais d'amplification
  - Si  $\beta_1 < 0$  et  $\hat{\beta}_1 < 0$ , on parle de biais d'atténuation (la valeur absolue du coefficient est amoindrie à cause du biais)
- Si  $\beta_2$  et  $\text{Cov}(X_1, X_2)$  n'ont pas le même signe (l'un est positif, l'autre est négatif), le biais sera négatif : on sous-estime alors  $\hat{\beta}_1$ 
  - Si  $\beta_1 < 0$  : biais d'amplification
  - Si  $\beta_1 > 0$  et  $\hat{\beta}_1 > 0$  : biais d'atténuation

## SOLUTIONS POSSIBLES

- **Inclure toutes les variables pertinentes ou des proxys** : ajouter des variables de « contrôle »
  - Dans ce cours
- **Variables instrumentales (IV)** : utiliser une variable corrélée avec  $X$  mais pas avec le terme d'erreur
  - Cours 8
- **Modèles de panel avec effets fixes** : contrôler pour des variables inobservables constantes dans le temps
  - Cours 6

# ARBITRAGE PRICING THEORY (APT)

- **Modèle d'évaluation par arbitrage (MEA) de Ross (1976)**
- **1<sup>e</sup> hypothèse** : pas d'opportunités d'arbitrage à long terme
  - Si deux actifs présentent le même risque, à long terme, on a une égalisation de leurs rendements.
- **2<sup>e</sup> hypothèse** : le rendement attendu d'une action est une fonction linéaire de plusieurs facteurs explicatifs spécifiques (contrairement au CAPM, qui n'a qu'une variable explicative).



# COMPARAISON MODÈLES APT ET CAPM

- **Difficulté du Capital Asset Pricing Model (CAPM)** : risque de biais de variables omises
- **Modèle APT**, le principal concurrent du CAPM pour évaluer un actif financier :
  - **modèle multi-facteurs** (choix de facteurs pertinents, qui peuvent influencer le rendement d'un titre)
  - **modèle « fondamental »** (prise en compte de facteurs davantage macroéconomiques)

# CHOIX DES FACTEURS DU MODÈLE APT

- **Facteurs macroéconomiques ou spécifiques au secteur :**
  - Les **variations non anticipées** dans ces variables expliquent les rendements
  - **Exemples :** taux de croissance du PIB, inflation, spreads entre taux longs et courts sur les obligations souveraines, prix du pétrole, quantité de monnaie en circulation, quantité de crédit, etc.
  - On se limite souvent à **4 ou 5 facteurs**

## ESTIMATION DU MODÈLE APT

- **Modèle APT :**

$$E(R_t) = R_{F,t} + \beta_1 (R_{1,t} - E(R_{1,t})) + \beta_2 (R_{2,t} - E(R_{2,t})) + \dots + \beta_m (R_{m,t} - E(R_{m,t}))$$

- **Estimation :**

$$R_t - R_{F,t} = \beta_1 (R_{1,t} - E(R_{1,t})) + \beta_2 (R_{2,t} - E(R_{2,t})) + \dots + \beta_m (R_{m,t} - E(R_{m,t})) + \varepsilon_t$$

- **Prime** associée à chacun des facteurs (soustraction du taux sans risque à chacune des variables explicatives)

---

# EXERCICE 8 - MODÈLE APT

L'ESTIMATION D'UN MODÈLE APT : LA RÉGRESSION LINÉAIRE MULTIPLE