COURS IV

17 février 2026

PLAN

- Hypothèses du modèle de régression linéaire :
  - Homoscédasticité des aléas
  - Absence d'autocorrélation des aléas
- Exercices sous R

HYPOTHÈSES DU MODÈLE DE RÉGRESSION LINÉAIRE MCO

1. X non stochastique (fixes)
2. Espérance nulle des erreurs : $E[\varepsilon] = 0$
3. Homoscédasticité : variance des erreurs constante $Var(\varepsilon)=\sigma^2$
4. Absence d'autocorrélation : $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pour $i \neq j$
5. Exogénéité : $Cov(X, \varepsilon) = 0$
6. Nombre d'observations > nombre de paramètres (pour que le modèle soit identifiable)
7. Variables explicatives bornées
8. Modèle correctement spécifié
9. Pas de colinéarité parfaite entre les X

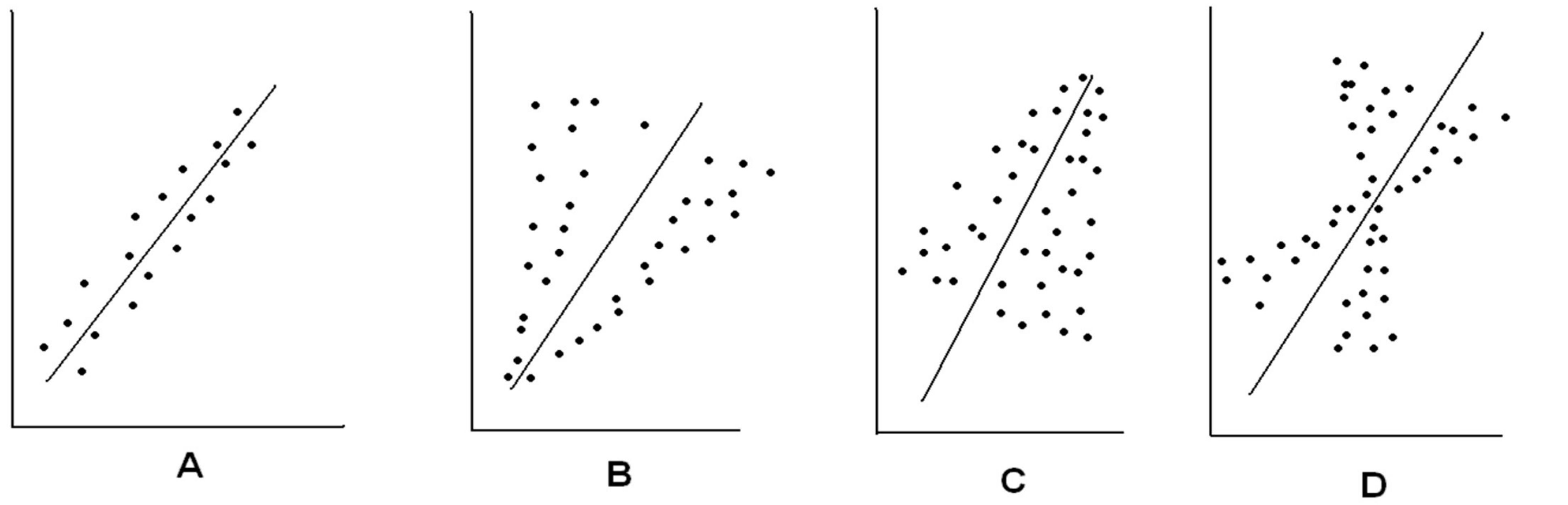
HOMOSCÉDASTICITÉ DES ERREURS THÉORIQUES

- Même variance des erreurs théoriques (stochastiques) $\varepsilon_{i,t}$ quelle que soit l'observation :

$$\boldsymbol{Var(\varepsilon_{i,t}) = \sigma_{i,t}^2}$$

- **Variance du terme d'erreur ne varie pas en fonction de la valeur de la variable explicative = homoscédasticité**
- **Exemple d'hétéroscédasticité** :
  - Moins d'erreur de mesure du poids (variable expliquée) d'un individu quand il est plus âgé (variable explicative) car les individus plus âgés sont plus attentifs à leur poids
  - Variance du terme d'erreur <u>diminue</u> quand la valeur de la variable explicative <u>augmente</u> (ou inversement)

HOMOSCÉDASTICITÉ DES ERREURS THÉORIQUES



- Quel(s) graphique(s) montre des erreurs hétéroscédastiques ?

POURQUOI L'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ EST-ELLE UN PROBLÈME ?

- **Matrice de variance-covariance des estimateurs biaisée**
- **Les tests d'hypothèses usuels ne sont plus applicables (test de Student, de Fisher)**
- En revanche, estimateurs MCO restent sans biais

LES TESTS D'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ

- **Test de Breusch-Pagan (BP)**
  - Objectif : détecter si la variance des résidus dépend des variables explicatives X.
  - Hypothèses :
    - H_0 : Variance constante (homoscédasticité)
    - H_1 : Variance dépend de X (hétéroscédasticité)
  - Principe : on estime sa régression linéaire, on récupère les résidus ε estimés, on calcule le carré des résidus $\hat{\varepsilon}^2$, on régresse les carrés des résidus sur X, puis on calcule la statistique de BP $= N \times R^2$, qui suit une loi de $\chi^2(K-1)$, où N est le nombre d'observations et K le nombre de paramètres estimés dans l'équation auxiliaire.
  - Décision : stat > valeur seuil dans la table de χ^2 , ou p-value ≤ 0,05 → hétéroscédasticité.

LES TESTS D'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ

- **Test de White**
  - Objectif : détecter **toute forme d'hétéroscédasticité**, même complexe (non linéaire ou interactions).
  - Hypothèses :
    - H_0 : Homoscédasticité
    - H_1 : Variance des erreurs varie avec X, X^2, et interactions $X \cdot X$.
  - Principe : on estime sa régression linéaire, on récupère les résidus ε estimés, on calcule le carré des résidus $\hat{\varepsilon}^2$, on régresse les carrés des résidus sur X, X^2, et interactions $X \cdot X$, puis on calcule la statistique de $W = N \times R^2$, qui suit une loi de $\chi^2(K-1)$, où N est le nombre d'observations et K le nombre de paramètres estimés dans l'équation auxiliaire.
  - Avantage : ne suppose pas de forme spécifique pour la variance.

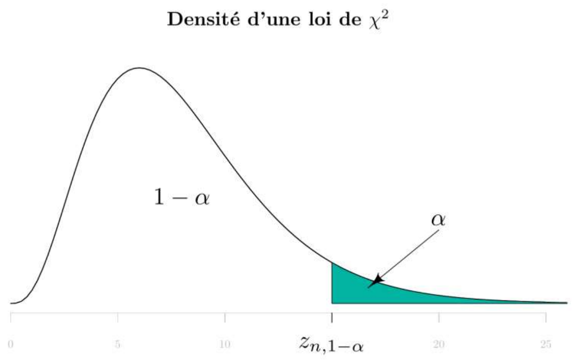
Le test de BP et de White

- **Hypothèses**

$$\begin{cases} H_0 : aléas\ homoscédastiques \\ H_1 : aléas\ hétéroscédastiques \end{cases}$$

- **Statistique** NR^2 suit une loi de χ^2

- **Conclusion du test :** on rejette H0 au seuil de significativité de 5 % si la statistique est > valeur table χ^2 ou valeur-p < 0,05.



LES TESTS D'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ SOUS R

- **Test de Breusch-Pagan (BP) :** fonction **bptest()** issue du package **lmtest**
- **Test de White :** fonction **modelCorrectSE()** issue du package **lmSupport**
- **Test de Goldfeld & Quandt :** fonction **gqtest()** issue du package **lmtest**

ABSENCE D'AUTOCORRÉLATION DES ALÉAS

- Pourquoi l'autocorrélation des résidus ($\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$ ou $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) \neq 0$) est-elle un problème ?
  - Les estimateurs OLS restent non biaisés, mais ne sont plus efficaces (variance minimale perdue).
  - Les erreurs-types des coefficients sont mal estimées,
  - Donc les tests classiques (t, F) deviennent invalides.
- Exemple d'autocorrélation
  - Dans une série temporelle, si les ventes d'un jour influencent celles du lendemain, les résidus du modèle présentent une autocorrélation positive.
  - Si les prix des maisons voisines ont tendance à être similaires pour des raisons locales (quartier, proximité des transports, commodités).

TEST DE DURBIN & WATSON

- **Objectif :** Vérifier si les résidus ε_t d'un modèle de régression sont **autocorrélés** (souvent au premier ordre, c'est-à-dire corrélation entre ε_t et ε_{t-1})
- **Hypothèses** $\begin{cases} H_0: \textit{les résidus ne sont pas autocorrélés } (\rho = 0) \\ H_1: \textit{les résidus sont autocorrélés } (\rho \neq 0) \end{cases}$
- **Statistique du test** $DW = \frac{\sum_{t=2}^{T}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2}$
- Valeurs possibles : $0 \leq DW \leq 4$
- **Interprétation :**
  - $DW \approx 2 \longrightarrow$ pas d'autocorrélation
  - $DW < 2 \longrightarrow$ autocorrélation positive
  - $DW > 2 \longrightarrow$ autocorrélation négative
- **Décision**
  - **H0 retenue** si $DW \approx 2$ ou p-value > 0,05
  - **H0 rejetée** si DW trop loin de 2 ou p-value < 0,05

Attention ! Si le modèle inclut des **variables dépendantes retardées** (Y_{t-1}) le test DW **n'est plus valide**. Dans ce cas, utiliser **la statistique H de Durbin** pour corriger l'autocorrélation.

TEST DE DURBIN & WATSON SOUS R

- **Test de Durbin & Watson :**
  - fonction **dwtest()** issue du package **MASS**
  - ou **durbinWatsonTest()** issue du package **CAR**

- **Statistique H de Durbin :**
  - **durbinH()** issue du package **ecm**

EXERCICE 6 - HOMOSCÉDASTICITÉ ET AUTOCORRÉLATION DES ALÉAS

SOUPÇON D'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ ET D'AUTOCORRÉLATION DU MODÈLE D'ÉVALUATION DU TITRE FINANCIER MOBIL

EXERCICE 7 - AUTOMATISER LES RÉPÉTITIONS DE PROCÉDURE

BOUCLE AVEC CAPM