Домашнее задание - Матричные вычисления Манохов М. М

№1 Док-ть $(A+UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$

~~Умно~~ где $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $C\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $U\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $V\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\det(A)\neq 0$, $\det(C)\neq 0$

Домножим на $(A+UCV)$ слева

$(A+UCV)(A+UCV)^{-1} = E$ - слева

$$(A+UCV)\cdot(A^{-1}-A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}) = (E+UCVA^{-1})A\cdot A^{-1}(E-U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}) = (E+UCVA^{-1})(E-U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}) =$$
$$= E - U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} + UCVA^{-1} - UCVA^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} =$$
$$= E + UCVA^{-1} - (U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1} + UCVA^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1})VA^{-1} =$$
$$= E + UCVA^{-1} - U(E+CVA^{-1}U)(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} = E + UCVA^{-1} -$$
$$- UC(C^{-1}+VA^{-1}U)(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} = E + UCVA^{-1} - UCVA^{-1} = E$$

ч.т.д

№2 Упростим каждое из след. выражения

(а) $\|uv^t - A\|_F^2 - \|A\|_F^2$, где $u\in\mathbb{R}^m$, $v\in\mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

$$\|uv^t - A\|_F^2 - \|A\|_F^2 = \langle uv^T - A, uv^T - A\rangle - \langle A, A\rangle = \langle uv^T, uv^T\rangle - 2\langle uv^T, A\rangle + \langle A, A\rangle - \langle A, A\rangle = \langle uv^T, uv^T\rangle - 2\langle uv^T, A\rangle = \langle uv^T, uv^T\rangle - \langle uv^T, 2A\rangle = \langle uv^T, uv^T - 2A\rangle$$

(б) $\mathrm{tr}((2I_n + aa^T)^{-1}(uv^T + vu^T))$, где $a, u, v\in\mathbb{R}^n$

Применим тождество Вудбери

$$(2I_n + aa^T)^{-1} = \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}I_n\cdot a(I_n + a^T\cdot\frac{1}{2}I_n a)^{-1}a^T\frac{1}{2}I_n = \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{4}a\cdot(I_n(1+\frac{1}{2}a^Ta))^{-1}a^T = \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{4}aa^T\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}a^Ta} = \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}\frac{1}{2+a^Ta}aa^T$$

$$\mathrm{tr}\left(\left(\frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}\frac{1}{2+a^Ta}aa^T\right)\cdot(uv^T + vu^T)\right) = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}I_n(uv^T + vu^T)\right) - \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2+a^Ta}aa^T(uv^T + vu^T)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(uv^T + vu^T) - \frac{1}{2}\frac{1}{2+a^Ta}\mathrm{tr}(aa^T(uv^T + vu^T)) = \frac{1}{2}(v^Tu + u^Tv) - \frac{1}{2}\frac{1}{2+a^Ta}\mathrm{tr}(a^Tuv^Ta + a^Tvu^Ta) = v^Tu - \frac{1}{2}\frac{1}{2+a^Ta}((a^Tu)(v^Ta) + (a^Tv)(u^Ta))$$

(в) $\sum_{i=1}^{n}\langle S^{-1}a_i, a_i\rangle$, где $a_1, \dots, a_n\in\mathbb{R}^d$, $S = \sum_{i=1}^{n}a_ia_i^T$, $\det(S)\neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n}\langle S^{-1}a_i, a_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}(S^{-1}a_ia_i^T) = \mathrm{tr}(S^{-1}(\sum_{i=1}^{n}a_ia_i^T)) = \mathrm{tr}((\sum_{i=1}^{n}a_ia_i^T)^{-1}\cdot(\sum_{i=1}^{n}a_ia_i^T)) = \mathrm{tr}(I_d) = d$$

№3 (а) $f: E\to\mathbb{R}$, $f(t) = \det(A - tI_n)$, где $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $E = \{t\in\mathbb{R}: \det(A - tI_n)\neq 0\}$

$$df = \det(A - tI_n)\cdot\langle(A - tI_n)^{-T}, d(A - tI_n)\rangle = \det(A - tI_n)\cdot\langle(A^T - tI_n)^{-1}, -dt\cdot I_n\rangle = -\det(A - tI_n)\langle(A^t - tI_n)^{-1}, dt\, I_n\rangle = -\det(A - tI_n)\cdot$$

$$\cdot dt \cdot tr[(A-tI_n)^{-1}]$$

$$\underline{f'(t) = -\det(A-tI_n)\cdot tr[(A-tI_n)^{-1}]}$$

$$d(f'(t)) = -d(\det(A-tI_n))\cdot tr[(A-tI_n)^{-1}] - \det(A-tI_n)\cdot d(tr[(A-tI_n)^{-1}]) = \det(A-tI_n)\,dt\cdot(tr[(A-tI_n)^{-1}])^2 - \det(A-tI_n)\cdot d(\langle (A-tI_n)^{-1}, I_n\rangle) = \det(A-tI_n)\cdot dt\cdot(tr[(A-tI_n)^{-1}])^2 - \det(A-tI_n)\cdot\langle d((A-tI_n)^{-1}), I_n\rangle$$

$$d((A-tI_n)^{-1}) = -(A-tI_n)^{-1}(-dt\cdot I_n)\cdot(A-tI_n)^{-1} = (A-tI_n)^{-2}dt$$

$$d(f'(t)) = \det(A-tI_n)\cdot dt\cdot(tr[(A-tI_n)^{-1}])^2 - \det(A-tI_n)\cdot dt\cdot tr[(A-tI_n)^{-2}]$$

$$\underline{f''(t) = \det(A-tI_n)\cdot\left[(tr[(A-tI_n)^{-1}])^2 - tr[(A-tI_n)^{-2}]\right]}$$

b) $f:\mathbb{R}_{++}\to\mathbb{R}$, $f(t) = \|(A+tI_n)^{-1}b\|$, где $A\in S_+^n$, $b\in\mathbb{R}^n$

$$d(f(t)) = d(\langle (A+tI_n)^{-1}b, (A+tI_n)^{-1}b\rangle^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}\cdot\langle (A+tI_n)^{-1}b, d((A+tI_n)^{-1}b)\rangle$$

$$d((A+tI_n)^{-1}b) = d((A+tI_n)^{-1})b = -(A+tI_n)^{-1}(-dt\,I_n)\cdot(A+tI_n)^{-1}b = dt\,(A+tI_n)^{-2}b$$

$$f'(t) = \frac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}\langle (A+tI_n)^{-1}b, (A+tI_n)^{-2}b\rangle = \frac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}\cdot tr[b^T(A+tI_n)^{-2T}\cdot(A+tI_n)^{-1}b]$$

$$d(f'(t)) = d\left(\frac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}\right)\cdot tr[b^T(A^T+tI_n)^{-2}\cdot(A+tI_n)^{-1}b] + \frac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}\cdot d(tr[b^T(A^T+tI_n)^{-2}\cdot(A+tI_n)^{-1}b])$$

$$d\left(\frac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}\right) = -\frac{d(\|(A+tI_n)^{-1}b\|)}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|^2} = -\frac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|^3}\cdot tr[b^T(A^T+tI_n)^{-2}\cdot(A+tI_n)^{-1}b]\,dt$$

$$d(tr\, b^T(A^T+tI_n)^{-2}\cdot(A+tI_n)^{-1}b]) = tr[b^T d[(A^T+tI_n)^{-2}\cdot(A+tI_n)^{-1}]\, b]$$

$$d[(A^T+tI_n)^{-2}\cdot(A+tI_n)^{-1}] = d[(A^T+tI_n)^{-2}]\cdot(A+tI_n)^{-1} + (A^T+tI_n)^{-2}\cdot$$

$$d[(A+tI_n)^{-1}] = d[(A^T+tI_n)^{-1}]\cdot(A^T+tI_n)^{-1}\cdot(A+tI_n)^{-1} + (A^T+tI_n)^{-1}\cdot$$

$d[(A^T+tI_n)^{-1}]\cdot(A+tI_n)^{-1}+(A^T+tI_n)^{-2}\cdot d[(A+tI_n)^{-1}]=$
$=-(A^T+tI_n)^{-1}\cdot dt\,I_n\cdot(A^T+tI_n)^{-1}\cdot(A^T+tI_n)^{-1}\cdot(A+tI_n)^{-1}-dt\cdot$
$\cdot(A^T+tI_n)^{-2}\cdot(A+tI_n)^{-1}\cdot$ ... $(A^T+tI_n)^{-3}\cdot(A+tI_n)^{-1}-dt(A^T+tI_n)^{-2}\cdot(A+tI_n)^{-2}=-dt[2\cdot$
$\cdot(A^T+tI_n)^{-3}\cdot(A+tI_n)^{-1}+(A^T+tI_n)^{-2}\cdot(A+tI_n)^{-2}]$

$d(tr[b^T(A^T+tI_n)^{-2}(A+tI_n)^{-1}b])=-dt\cdot tr[b^T[2(A^T+tI_n)^{-3}\cdot$
$\cdot(A+tI_n)^{-1}+(A^T+tI_n)^{-2}\cdot(A+tI_n)^{-2}]b]$

$f''(t)=-\dfrac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|^3}\cdot[tr[b^T(A^T+tI_n)^{-2}\cdot(A+tI_n)^{-1}b]]^2-$

$-\dfrac{1}{\|(A+tI_n)^{-1}b\|}\cdot tr[b^T[2(A^T+tI_n)^{-3}\cdot(A+tI_n)^{-1}+(A^T+tI_n)^{-2}\cdot$
$\cdot(A+tI_n)^{-2}]b]$

№4. Найти $\nabla f,\ \nabla^2 f$

(a) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}\|xx^T-A\|_F^2$, где $A\in S^n$

$d f=\|xx^T-A\|_F\cdot d(\|xx^T-A\|_F)$

Воспользуемся

$d\|X\|_F=d\langle X,X\rangle^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\|X\|_F}d\langle X,X\rangle=\frac{1}{\|X\|_F}\langle X,dX\rangle$

$d(\|xx^T-A\|_F)=\dfrac{1}{\|xx^T-A\|_F}\langle xx^T-A,d(xx^T)\rangle=\dfrac{1}{\|xx^T-A\|_F}\cdot\langle xx^T-A,dx\cdot$
$\cdot x^T+x(dx)^T\rangle=\dfrac{1}{\|xx^T-A\|_F}\cdot[\langle xx^T-A,dx\cdot x^T\rangle+\langle x(dx)^T,xx^T-A\rangle]$

$=\dfrac{1}{\|xx^T-A\|_F}\cdot[\langle(xx^T-A)x,dx\rangle+\langle(xx^T-A)^Tx,dx\rangle]=$

$=\left\langle\dfrac{(2xx^T-A-A^T)x}{\|xx^T-A\|_F},dx\right\rangle$

$df=\|xx^T-A\|_F\cdot\dfrac{1}{\|xx^T-A\|_F}\cdot\langle(2xx^T-A-A^T)x,dx\rangle=\langle(2xx^T-A-$
$-A^T)x,dx\rangle$

$\nabla f=(2xx^T-A-A^T)x$

$d(df)=\langle d[(2xx^T-A-A^T)x],dx_1\rangle=\langle\underbrace{d[(2xx^T-A-A^T)]\cdot x}_{=I}+$
$+(2xx^T-A-A^T)dx_2,dx_1\rangle$

$I:\ \langle d[(2xx^T-A-A^T)]x,dx_1\rangle=\langle 2(dx_2\cdot x^T+x(dx_2)^T)x,dx_1\rangle=$

$= \langle 2\|x\|^2 dx_2 + 2x(dx_2)^T x, dx_1\rangle = 2\|x\|^2\langle dx_2, dx_1\rangle + 2\langle\langle dx_2, x\rangle x,$
$dx_1\rangle = 2\|x\|^2 \langle dx_2, dx_1\rangle + \underbrace{2\langle dx_2, x\rangle\langle x, dx_1\rangle}_{= \mathrm{II}}$

$\mathrm{II}: 2\langle x, dx_2\rangle\langle x, dx_1\rangle = \langle xx^T dx_2, dx_1\rangle$

$\mathrm{I}: \langle (2\|x\|^2 I + xx^T) dx_2, dx_1\rangle$

$d(df(x)) = \langle (2xx^T - A - A^T + xx^T + 2\|x\|^2 I) dx_1, dx_1\rangle$

$\nabla^2 f(x) = 3xx^T - A - A^T + 2\|x\|^2 I$

(б) $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle}$

$f(x) = e^{\ln \langle x, x\rangle^{\langle x,x\rangle}} = e^{\langle x,x\rangle \cdot \ln\langle x, x\rangle}$

$df = d(e^{\langle x,x\rangle\cdot \ln\langle x,x\rangle}) = e^{\langle x,x\rangle \ln\langle x,x\rangle} \cdot d(\langle x,x\rangle \cdot \ln\langle x,x\rangle) =$

$= \langle x, x\rangle^{\langle x,x\rangle}\Big[\underbrace{d(\langle x,x\rangle)\cdot \ln\langle x,x\rangle}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\langle x,x\rangle \cdot d(\ln\langle x,x\rangle)}_{\mathrm{II}}\Big]$

$\mathrm{I}: d(\langle x,x\rangle)\cdot \ln\langle x,x\rangle = 2\langle x, dx\rangle \cdot \ln\langle x,x\rangle = \langle 2\ln\langle x,x\rangle x, dx\rangle$

$\mathrm{II}: \langle x,x\rangle d(\ln\langle x,x\rangle) = d(\langle x,x\rangle) = 2\langle x, dx\rangle$

$df = \langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle} \cdot (\langle 2(\ln\langle x,x\rangle + 1) x, dx\rangle)$

$\nabla f(x) = 2(\ln\langle x,x\rangle + 1)\cdot \langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle} x$

$d(df) = \underbrace{d(\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle})}_{= \mathrm{III}} \cdot \langle 2(\ln\langle x,x\rangle + 1)\cdot x, dx_1\rangle + \langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle} \cdot$

$\cdot \langle \underbrace{d(2(\ln\langle x,x\rangle+1)\cdot x)}_{= \mathrm{IV}}, dx_1\rangle$

$\mathrm{III}: \langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle} \cdot \langle 2(\ln\langle x,x\rangle + 1)x, dx_2\rangle$

$\mathrm{IV}: d(2(\ln\langle x,x\rangle + 1)\cdot x) = 2\cdot d(\ln\langle x,x\rangle)\cdot x + 2(\ln\langle x,x\rangle + 1)dx_2 =$

$= 4\dfrac{\langle x, dx_2\rangle}{\langle x,x\rangle} x + 2(\ln\langle x,x\rangle + 1)\cdot dx_2$

Объединяем

$d(df) = 4\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\Big[\underbrace{\langle(\ln\langle x,x\rangle+1)x, dx_2\rangle\langle(\ln\langle x,x\rangle+1)x, dx_1\rangle}_{= \mathrm{V}}$

$+ \underbrace{\Big\langle \dfrac{\langle x, dx_2\rangle}{\langle x,x\rangle} x + \dfrac{1}{2}(\ln\langle x,x\rangle+1)dx_2, dx_1\Big\rangle}_{= \mathrm{VI}}\Big]$

$\mathrm{V}: (\ln\langle x,x\rangle+1)^2\langle x, dx_2\rangle\langle x, dx_1\rangle = (\ln\langle x,x\rangle+1)^2\cdot\langle xx^T dx_2, dx_1\rangle$

$\mathrm{VI}: \dfrac{1}{\langle x,x\rangle}\cdot\langle x, dx_2\rangle\langle x, dx_1\rangle + \dfrac{1}{2}(\ln\langle x,x\rangle+1)\langle dx_2, dx_1\rangle$

$d(df) = 4\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\Big[\Big\langle\Big[(\ln\langle x,x\rangle+1)^2 xx^T + \dfrac{1}{\langle x,x\rangle}xx^T + \dfrac{1}{2}(\ln\langle x,x\rangle +$
$+ 1)I\Big]dx_2, dx_1\Big\rangle$

$\nabla^2 f = 4\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle}\Big[\Big((\ln\langle x,x\rangle+1)^2 + \dfrac{1}{\langle x,x\rangle}\Big)xx^T + \dfrac{1}{2}(\ln\langle x,x\rangle+1)I\Big]$

(c) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|Ax - b\|^p$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $p \geq 2$

$$df = p\|Ax - b\|^{p-1} \cdot d(\|Ax - b\|)$$

$$d(\|Ax - b\|) = d(\langle Ax - b, Ax - b\rangle^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \frac{d(\langle Ax - b, Ax - b\rangle)}{\|Ax - b\|} =$$

$$= \frac{1}{2\|Ax - b\|} \cdot d(\langle Ax, Ax\rangle - 2\langle Ax, b\rangle + \langle b, b\rangle) = \frac{1}{2\|Ax - b\|}(d(\langle Ax, Ax\rangle - 2\langle d(Ax), b\rangle) = \frac{1}{2\|Ax - b\|}[d(\langle A^TAx, x\rangle - 2\langle A\,dx, b\rangle) =$$

$$= \frac{1}{2\|Ax - b\|}(\langle 2A^TAx, dx\rangle - 2\langle A^Tb, dx\rangle) = \frac{1}{\|Ax - b\|}(\langle A^TAx - A^Tb, dx\rangle$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\|Ax - b\|} \cdot \langle A^T(Ax - b), dx\rangle$$

$$df = p \cdot \|Ax - b\|^{p-1} \cdot \frac{1}{\|Ax - b\|} \cdot \langle A^T(Ax - b), dx\rangle = p \cdot \|Ax - b\|^{p-2} \cdot$$

$$\cdot \langle A^T(Ax - b), dx\rangle$$

$$\cancel{df = p} \cdot \nabla f = p \cdot \|Ax - b\|^{p-2} A^T(Ax - b)$$

$d(df) = d(p\,\|Ax-b\|^{p-2} \cdot \langle A^T(Ax-b), dx_1\rangle) =$

$= p\cdot(p-2)\,\|Ax-b\|^{p-3} \cdot d(\|Ax-b\|)\,\langle A^T(Ax-b), dx_1\rangle +$

$+ \; p\,\|Ax-b\|^{p-2}\,\langle \underbrace{d(A^T(Ax-b))}_{I}, dx_1\rangle$

I: $\langle d(A^T(Ax-b)), dx_1\rangle = \langle A^T A\, dx_2, dx_1\rangle \; = \text{II}$

$d(df) = p\,(p-2)\,\|Ax-b\|^{p-3}\,\frac{1}{\|Ax-b\|}\,\langle A^T(Ax-b), dx_2\rangle$

$\cdot \langle A^T(Ax-b), dx_1\rangle + p\,\|Ax-b\|^{p-2} \cdot \langle A^T A\, dx_2, dx_1\rangle$,

II $\langle A^T(Ax-b), dx_2\rangle \cdot \langle A^T(Ax-b), dx_1\rangle = \langle A^T(Ax-b)$

$\cdot (Ax-b)^T A\, dx_2, dx_1\rangle$

$d(df) = p\cdot(p-2)\,\|Ax-b\|^{p-4} \cdot \langle A^T(Ax-b)(Ax-b)^T A$

$\cdot dx_2, dx_1\rangle + p\cdot\|Ax-b\|^{p-2}\,\langle A^T A\, dx_2, dx_1\rangle$

$\nabla^2 f = p\,\|Ax-b\|^{p-4}\,[(p-2)\,A^T(Ax-b)(Ax-b)^T A +$

$+ \|Ax-b\|^2 \cdot A^T A]$

N5 | Показать, что $d^2 f(x)[dx, dx]$ имеет постоян. знак и установить этот знак.

(a) $f: S^n_{++} \to \mathbb{R}$, $f(X) = tr(X^{-1})$

$df(X) = d(tr(X^{-1})) = tr(d(X^{-1})) = tr(-X^{-1}dX\,X^{-1}) =$

$= -tr(X^{-1}dX\,X^{-1})$

$d(df(X)) = d(-tr(X^{-1}dX_1 X^{-1})) = -tr(d(X^{-1})\,dX_1$

$\cdot X^{-1} + X^{-1}dX_1 \cdot d(X^{-1})) = -tr(-X^{-1}dX_2 X^{-1}$

$\cdot dX_1\,X^{-1} + X^{-1}dX_1\,(-X^{-1}dX_2\,X^{-1})) = tr(X^{-1}dX_2 X^{-1}$

$\cdot dX_1\,X^{-1} + X^{-1}dX_1\,X^{-1}dX_2\,X^{-1}) = tr(X^{-1}(dX_2\,X^{-1}$

$\cdot dX_1 + dX_1\,X^{-1}dX_2)\,X^{-1})$ пусть $X_1 = X_2$

$d(df(X)) = tr(2X^{-1}dX\,X^{-1}dX\,X^{-1}) = tr(2\,\overbrace{(X^{-1}dX)(X^{-1}dX)}^{\geq 0}$

$X^{-1})$

> 0

~~К. Нер-во Коши-Буняковского для матриц~~

~~$|tr(A,B)| \leq \sqrt{tr(A^TA)}\,\sqrt{tr(B^TB)}$~~ $\Rightarrow d^2 f(X)[X][X]$

≥ 0

~~$tr(A,B) \leq$~~

(б) $S^n_{++} \to \mathbb{R}$, $f(X) = (\det(X))^{1/n}$

$df(X) = \det(X)^{\frac{1}{n}-1} \cdot d(\det(X)) = \det(X)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \det(X)\, \langle X^{-T}, dX\rangle = \det(X)^{\frac{1}{n}} \cdot \langle X^{-T}, dX\rangle$

$d(df(X)) = d(\det(X)^{\frac{1}{n}}) \langle X^{-T}, dX\rangle + \det(X)^{\frac{1}{n}} \cdot d(\langle X^{-T}, dX\rangle) = \det(X)^{\frac{1}{n}}(\langle X^{-T}, dX\rangle)^2 + \det(X)^{\frac{1}{n}} \langle -X^{-T} X^{T} X\, dX^{T}, dX\rangle = \det(X)^{\frac{1}{n}} \cdot$

$\cdot [(\langle X^{-T}, dX\rangle)^2 - \langle X^{-T}(dX)^T X^{-T}, dX\rangle] =$

$= \det(X)^{\frac{1}{n}} [X^{-1}dX \cdot X^{-1}dX - X^{-1}dX\, X^{-1}dX] =$

$= \det(X)^{\frac{1}{n}} [(X^{-1}dX)^2 - \langle X^{-T}(dX)^T X^{-T}, dX\rangle]$

$= \det(X)^{\frac{1}{n}} [(X^{-1}dX)^2 - \langle X^{-T}(dX)^T \cdot X^{-T}, dX\rangle]$

$\langle X^{-T}(dX)^T X^{-T}, dX\rangle = \langle (dX)^T \cdot X^{-T}, X^{-1}dX\rangle$

$= (X^{-1}dX)^2 \Rightarrow d(df(X)) = 0$

№61

Найти все точки стационар. и указать значения параметров, при которых они $\exists$

(a) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle c, x\rangle + \frac{\sigma}{3}\|x\|^3$, где $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$, $\sigma > 0$

$df = \langle c, dx\rangle + \frac{1}{2}\sigma\|x\| \cdot d(\langle x, x\rangle) = \langle c, dx\rangle +$

$+ \sigma\|x\| \cdot \langle x, dx\rangle = \langle c + \sigma\|x\| x, dx\rangle$

$\nabla f = c + \sigma\|x\| x = c + \sigma\|x\| x$

Т. стационарности $c + \sigma\|x\|x = \bar{0}$

$$\begin{cases} c + \sigma\|x\|x = \bar{0} \\ \sigma > 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$$

$\|x\| = r$

$\sigma\|x\|x = -c$

$\sigma \cdot r \cdot x = -c \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sigma r} c \\ \|x\| = r \end{cases}$

$\Rightarrow \|x\| = \frac{\|c\|}{\sigma \|x\|}$

$\|x\|^2 = \frac{\|c\|}{\sigma}$

$\|x\| = \sqrt{\frac{\|c\|}{\sigma}}$ +

Т.к. $x = -\frac{1}{\sigma\|x\|} c$, то он противонаправ. c

$\Rightarrow x = - \sqrt{\frac{\|c\|}{\sigma}} \cdot \frac{c}{\|c\|}$

$x = -\frac{c}{\sqrt{\sigma\|c\|}}$ - стац. точка

(б) $f: E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x\rangle - \ln(1 - \langle b, x\rangle)$, где $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a, b \neq 0$

$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle b, x\rangle < 1\}$

$df(x) = \langle a, dx\rangle + \frac{1}{1-\langle b,x\rangle}\langle b, dx\rangle = \langle a + \frac{b}{1-\langle b,x\rangle}, dx\rangle$

$\nabla f(x) = a + \frac{b}{1-\langle b,x\rangle}$

$$\begin{cases} a + \frac{b}{1-\langle b,x\rangle} = 0 \\ \langle b,x\rangle < 1 \\ a \neq 0,\ b \neq 0 \end{cases} \qquad a = -\frac{b}{1-\langle b,x\rangle} \quad \cancel{a - a\langle b,x\rangle = b}$$

$\cancel{a\langle b,x\rangle = a-b}$

$\cancel{a\langle b,x\rangle = -(a-b)}$

~~a сонаправлен a-b с коэфф~~ $\langle b,x\rangle$

$-a(1-\langle b,x\rangle) = b$, a сонапр. с b с коэф. $1-\langle b,x\rangle$

$\cancel{a(\langle b,x\rangle 1-\langle b,x\rangle) = b}$

ψ ~~<a, b> + ν<b, b> =~~ $\frac{b+a}{a}$

$a(1-\langle b,x\rangle) = -b$

$a - a\langle b,x\rangle = -b$

$a\langle b,x\rangle = a+b$

$\langle b,x\rangle < 1 \Rightarrow \|a\|\,|\langle b,x\rangle| = \|a+b\|$

$|\langle b,x\rangle| = \frac{\|a+b\|}{\|a\|}$

~~$\Rightarrow \|a+b\| < \|a\|$, т.к. $b \uparrow\downarrow a$~~

(c) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle c, x\rangle e^{-\langle Ax, x\rangle}$, где $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$, $A \in S^n_{++}$

- $df(x) = \langle c, dx\rangle e^{-\langle Ax,x\rangle} - \langle (A+A^T)x, dx\rangle e^{-\langle Ax,x\rangle} \langle c, x\rangle = \langle e^{-\langle Ax,x\rangle} c, dx\rangle - e^{-\langle Ax,x\rangle} \langle c, x\rangle \cdot \langle (A+A^T)x, dx\rangle = e^{-\langle Ax,x\rangle}\left[\langle c, dx\rangle - c^T x \cdot x^T (A+A^T) dx\right] \cancel{= e^{-\langle Ax,x\rangle}\left[\langle c, dx\rangle - \langle c^T x x^T (A+A^T), dx\rangle\right.}$

$\cancel{\Rightarrow \nabla f(x) = e^{-\langle Ax,x\rangle} (c - c^T x^T x (A+A^T))}$

$\cancel{\nabla f(x) = 0}$

$\cancel{c = c^T x^T x (A+A^T)}$

- $\cancel{c^T x x^T = c(A+A^T)^{-1}}$, $\cancel{\text{т.к. } A + A^T \in S^n_{++}}$

$\cancel{c = c^T x^T x (A+A^T)}$

$\cancel{c(x^T x (A+A^T) - I) = 0}$

$\cancel{x^T x = \sum_{i=1}^n x_i}$

$= e^{-\langle Ax,x\rangle}\left[\langle c, dx\rangle - \langle (A+A^T) x x^T c, dx\rangle\right]$

$\Rightarrow \nabla f(x) = c - (A+A^T) x x^T c = c(I - (A+A^T) x x^T) = 0$

$I = (A+A^T) x x^T \Rightarrow x x^T = (A+A^T)^{-1}$

- ??? откуда x^* - стац. решение

№7| Пусть $X \in S^n_{++}$. Вычислите значение след выраж

$$\lim_{k \to +\infty} tr\left(X^{-k} - (X^k + X^{2k})^{-1}\right)$$

Из спектрального разложения

$X = Q \Lambda Q^T$, где Q - ортог матрица из нормир собств векторов X

Λ - диагон матрица, содерж соотв собств зн $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы X $\quad Q^{-1} = Q^T$, т.е $Q^T Q = I$

$\cancel{\lim_{k \to +\infty} tr}\,($ $X^{-1} = Q \Lambda^{-1} Q^T$

$$X^{-k} - (X^k + X^{2k})^{-1} = Q \Lambda^{-k} Q^T - (Q \Lambda^k Q^T + Q \Lambda^{2k} Q^T)^{-1} = Q\left(\Lambda^{-k} - (\Lambda^k + \Lambda^{2k})^{-1}\right) Q^T$$

$$tr\left(X^{-k} - (X^k + X^{2k})^{-1}\right) = tr\left(Q\left(\Lambda^{-k} - (\Lambda^k + \Lambda^{2k})^{-1}\right) Q^T\right) =$$

$$= tr\left(\Lambda^{-k} - (\Lambda^k + \Lambda^{2k})^{-1}\right) = \frac{1}{\lambda_1^k} + \dots + \frac{1}{\lambda_n^k} - \left(\frac{1}{\lambda_1^k + \lambda_1^{2k}} + \dots + \frac{1}{\lambda_n^k + \lambda_n^{2k}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^k}\left(1 - \frac{1}{1 + \lambda_i^k}\right)$$

Рассмотрим $\lim\limits_{k \to +\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^k}\left(1 - \frac{1}{1+\lambda_i^k}\right)\right) =$

Есть три случая $\quad = \sum\limits_{i=1}^{n} \lim\limits_{k \to +\infty}\left(\frac{1}{\lambda_i^k}\left(1 - \frac{1}{1+\lambda_i^k}\right)\right)$

$\exists \lambda_i \in (0, 1)$:

$\lim \lambda_i^k \to 0$, тогда $tr(\dots) \to +\infty$

Рассмотрим случай, когда $\forall i: \lambda_i > 1$

$$\lim_{k \to +\infty}\left(\frac{1}{\lambda_i^k}\left(1 - \frac{1}{1+\lambda_i^k}\right)\right) = 0$$

$\forall i: \lambda_i = 1$

$$\lim_{k \to +\infty}\left(\frac{1}{1}\left(1 - \frac{1}{1+1}\right)\right) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{k \to +\infty} tr\left(X^{-k} - (X^k + X^{2k})^{-1}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\,\mathbb{I}(\lambda_i = 1)$ при,

где $\forall \lambda_i \notin (0,1)$, иначе выражение $\to +\infty$

(случаи $\lambda_i \le 0$ не рассм.; т.к $X \in S^n_{++} \Leftrightarrow \forall \lambda_i > 0$)