Base hexadécimal, décimal, binaire, octal

Les systèmes de numérations binaire et hexadécimal sont très utilisés dans les domaines de l'électronique et de l'informatique. Tout programmeur se doit de les connaître en plus des systèmes décimal et octal.

Principe d'une base

La base est le nombre qui sert à définir un système de numération.
La base du système décimal est dix alors que celle du système octal est huit.
Quelque soit la base numérique employée, elle suit la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^{i=n}(b_i a^i) = b_i a^n + \ldots\ldots + b_5 a^5 + b_4 a^4 + b_3 a^3 + b_2 a^2 + b_1 a^1 + b_0 a^0$$

ou : $\mathbf{b}_i$: chiffre de la base de rang i

et : $\mathbf{a}^i$: puissance de la base a d'exposant de rang i

Exemple : base 10
$1986 = (1 \times 10^3) + (9 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (6 \times 10^0)$

Le système décimal

Le système décimal est celui dans lequel nous avons le plus l'habitude d'écrire.
Chaque chiffre peut avoir 10 valeurs différentes :
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de ce fait, le système décimal a pour **base** 10.
Tout nombre écrit dans le système décimal vérifie la relation suivante :
$745 = 7 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$
$745 = 7 \times 10 \times 10 + 4 \times 10 + 5 \times 1$
$745 = 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

Chaque chiffre du nombre est à multiplier par une puissance de 10 : c'est ce que l'on nomme le **poids du chiffre**.

L'exposant de cette puissance est nul pour le chiffre situé le plus à droite et s'accroît d'une unité pour chaque passage à un chiffre vers la gauche.
$12\,435 = 1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$.
Cette façon d'écrire les nombres est appelée **système de numération de position**.
Dans notre système conventionnel, nous utilisons les puissances de 10 pour **pondérer** la valeur des chiffres selon leur position, cependant il est possible d'imaginer d'autres systèmes de nombres ayant comme base un nombre entier différent.

Le système octal

Le système octal utilise un système de numération ayant comme base 8 (octal => latin octo = huit).
Il faut noter que dans ce système nous n'aurons plus 10 symboles mais 8 seulement :
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Ainsi, un nombre exprimé en base 8 pourra se présenter de la manière suivante :
$(745)_8$
Lorsque l'on écrit un nombre, il faudra bien préciser la base dans laquelle on l'exprime pour lever les éventuelles indéterminations (745 existe aussi en base 10).
Ainsi le nombre sera mis entre parenthèses (745 dans notre exemple) et indicé d'un nombre représentant sa base (8 est mis en indice).

Cette base obéira aux même règles que la base 10, vue précédemment, ainsi on peut décomposer $(745)_8$ de la façon suivante :

$(745)_8 = 7 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 5 \times 8^0$

$(745)_8 = 7 \times 64 + 4 \times 8 + 5 \times 1$

$(745)_8 = 448 + 32 + 5$

Nous venons de voir que :
$(745)_8 = (485)_{10}$.

Le système binaire

Dans le système binaire , chaque chiffre peut avoir 2 valeurs différentes : 0, 1.
De ce fait, le système a pour base 2.
Tout nombre écrit dans ce système vérifie la relation suivante :

$(10\ 110)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

$(10\ 110)_2 = 1 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1$

donc : $(10110)_2 = (22)_{10}$.

Tous les systèmes de numération de position obéissent aux règles que nous venons de voir.

Tableau récapitulatif

Système décimale	Système octal	Système binaire
0	0	0
1	1	1
2	2	10
3	3	11
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111
8	10	1000
9	11	1001
10	12	1010
11	13	1011
12	14	1100
13	15	1101
14	16	1110
15	17	1111
16	20	10000
17	21	10001
-	-	-
-	-	-
63	77	111111
64	100	1000000
65	101	1000001

Voir aussi le code binaire naturel.

Le système hexadécimal

Le système hexadécimal utilise les 16 symboles suivant :
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

De ce fait, le système a pour base 16.
Un nombre exprimé en base 16 pourra se présenter de la manière suivante :
$(5AF)_{16}$
La correspondance entre base 2, base 10 et base 16 est indiquée dans le tableau ci-après :

Base 10	Base 16	Base 2
0	0	0
1	1	1
2	2	10
3	3	11
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Le nombre $(5AF)_{16}$ peut se décomposer comme suit :
$(5AF)_{16} = 5 \times 16^2 + A \times 16^1 + F \times 16^0$
En remplaçant A et F par leur équivalent en base 10, on obtient :
$(5AF)_{16} = 5 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 15 \times 16^0$
$(5AF)_{16} = 5 \times 256 + 10 \times 16 + 15 \times 1$
donc = $(5AF)_{16} = (1455)_{10}$