河海大学

Ch5 大数定律与中心极限定理

• 依概率收敛

设$\{X_n\}$为随机变量序列，X为随机变量，若$\forall \varepsilon > 0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$$

则称$\{X_n\}$依概率收敛于X. 可记为$X_n \xrightarrow{P} X$。

大数定律

设$\{X_n\}$为随机变量序列，令$Y_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$,

若有$\frac{1}{n}Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{P} \frac{1}{n}E(Y_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)$,

即对任意的$\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}Y_n-\frac{1}{n}E(Y_n)|<\varepsilon\}=1.$$

即 $\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)|<\varepsilon\}=1$

则称$\{X_n\}$服从大数定律。

几个常用的大数定律

1.切比雪夫大数定律

设$\{X_n\}$为独立随机变量序列，若$E(X_k)<\infty$，$D(X_k)\le C$，C为正数, k=1, 2, …, (称$\{X_n\}$为方差一致有界), 则$\{X_n\}$服从大数定律。即

$$\frac{1}{n}Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{P} \frac{1}{n}E(Y_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k).$$

推论 若$\{X_n\}$为独立同分布随机变量序列，且$E(X_k)=\mu<\infty$, $D(X_k)=\sigma^2<\infty$, $k=1, 2, \ldots$ 则$\{X_n\}$服从大数定律。

即 $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)=\mu$$

2. 伯努里大数定律

设$\{X_n\}$为独立随机变量序列, 且$X_k \sim B(1, p)$, $0< p <1, k=1, 2, \ldots$ 则$\{X_n\}$服从大数定律。

即 $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

即 $$\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p$$

3. 辛钦大数定律

若$\{X_n\}$为独立同分布随机变量序列, 且$E(X_k)=\mu<\infty$, $k=1, 2, \ldots$ 则$\{X_n\}$服从大数定律。

即
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\mu$$

大数定律说的是：

对于随机变量序列$\{X_n\}$，只要它满足一定的条件，即有

$$\frac{1}{n}Y_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{\quad P \quad} \frac{1}{n}E(Y_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)$$

大数定律可以用来说明频率的稳定性。

• 依分布收敛

设$\{X_n\}$为随机变量序列，X为随机变量，其对应的分布函数分别为$F_n(x)$, $F(x)$. 若在 $F(x)$的连续点，有 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$,

则称$\{X_n\}$依分布收敛于X. 可记为 $X_n \xrightarrow{L} X$.

- **中心极限定理**

现令$Y_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$，若Y_n的标准化$r.v.Y_n^* \xrightarrow{L} \xi \sim N(0,1)$，

则称$\{X_n\}$满足**中心极限定理**。

$$Y_n^* = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{D(Y_n)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} E(X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}}$$

几个常用的中心极限定理

1.独立同分布中心极限定理(*Levy-Lindeberg*)

设$\{X_n\}$为独立同分布随机变量序列，若$E(X_k)=\mu<\infty$，$D(X_k)=\sigma^2<\infty$，$k=1, 2,\cdots$, 则$\{X_n\}$满足中心极限定理。

2. 德莫佛-拉普拉斯中心极限定理
(De Moivre-Laplace)

设随机变量η_n $(n=1, 2, \cdots)$服从参数为n, $p(0< p <1)$的二项分布，则

$$\eta_n^* \xrightarrow{L} \xi \sim N(0, 1).$$

对于独立同分布 $r.v.$序列$\{X_n\}$，大数定律给出了前n项算术平均值所遵循的规律; 而中心极限定理则在n充分大时, 给出了$\{X_n\}$前n项之和落在某区间$(a, b]$的近似概率，事实上

$$P\{a < Y_n \le b\} \approx \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right).$$

例 一部件包括10部分，每部分的长度是一个随机变量，它们相互独立，其数学期望是$2mm$，均方差为$0.05mm$。规定总长度为$(20 \pm 0.1)mm$时产品合格，试求产品合格的概率。

例 某药厂断言，该厂生产的某种药品对于医治一种疑难的血液病的治愈率为0.8。医院检验员任意抽查100个服用此药的病人，如果其中多于75人治愈，就接受这一断言，否则就拒绝这一断言。若实际上此药品对这种疾病的治愈率为0.7，问接受这一断言的概率是多少？