概率统计——习题八参考答案

8.1 4;

8.2

设 t（单位：公斤）表示进货数，$t\in[300,500]$，进货 t 所获利润记为 Y，则有：

$$Y=\begin{cases}1.5X-(t-X)\times 0.5, & 300<X\le t\\ 1.5t, & t<X<500\end{cases}$$

又 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{500-300}, & 300<x<500\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

所以 $E(Y)=\int_{300}^{t}[1.5x-(t-x)0.5]\frac{1}{200}dx+\int_{t}^{500}1.5t\frac{1}{200}dx=\dfrac{[-t^2+(0.5\times 300+1.5\times 500)t-300^2]}{200}$

令 $\dfrac{dE(Y)}{dt}=\dfrac{[-2t+900]}{200}=0$，得 $t=450$。

所以该店应该进 **450** 公斤商品，才可使利润的数学期望最大。

8.3 设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{只球与盒配对},\\ 0, & \text{否则},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n$ 则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

$$\because E(X_i)=P\{X_i=1\}=\frac{1}{n},\quad \therefore E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=1.$$

8.4 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)\frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}dx+\mu=\int_{-\infty}^{+\infty}t\frac{1}{2}e^{-|t|}dt+\mu=\mu$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2e^{-|y|}dy=\int_{0}^{+\infty}y^2e^{-y}dy=2$$

8.5 设 X，Y 为线段上的两点，则 $X\sim U(0,d),Y\sim U(0,d)$，且它们相互独立，

（X，Y）的联合分布为 $\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d^2}, & 0\le x,y\le d\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

又设 $Z=|X-Y|$，$D_1=\{(x,y)\,|\,x>y,0\le x,y\le d\}$，$D_2=\{(x,y)\,|\,x\le y,0\le x,y\le d\}$

则

$$\begin{aligned}E(Z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|\varphi(x,y)dxdy\\&=\iint_{D_1}(x-y)\varphi(x,y)dxdy+\iint_{D_2}(y-x)\varphi(x,y)dxdy\\&=\frac{1}{d^2}\int_0^d\int_0^x(x-y)dydx+\frac{1}{d^2}\int_0^d\int_0^y(y-x)dxdy=d/3\end{aligned}$$

$E(Z^2)=\dfrac{d^2}{6}$，$D(Z)=\dfrac{d^2}{18}$。

8.6 用切比雪夫不等式即得

$$\frac{1}{2}=P\{|X|<2\}=P\{|X-E(X)|<2\}\ge 1-\frac{D(X)}{2^2},$$

故 $D(X)\ge 4(1-\frac{1}{2})=2.$

8.7　（1）$\rho_{XY}=1$；

（2）$D(X+Y)=0.73$；

（3）X与Y相互独立 $\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$；　X与Y不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY}=0$；

事件A与B互不相容 $\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$；

事件A与B互为对立事件 $\Leftrightarrow A\cup B=\Omega$且$A\cap B=\varnothing$或 $B=\overline{A}$；

事件A与B相互独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$。

8.8 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^2 dy\int_0^2 x\frac{1}{8}(x+y)dx=\frac{7}{6}$;

$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2 y\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$;

$\because E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^2 ydy\int_0^2 x\frac{1}{8}(x+y)dx=\frac{4}{3}$;

$\therefore \operatorname{cov}(X,Y)=\frac{4}{3}-(\frac{7}{6})(\frac{7}{6})=-\frac{1}{36}$;

$\because E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^2 dy\int_0^2 x^2\frac{1}{8}(x+y)dx=\frac{5}{3}=E(Y^2)$,

$D(X)=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36}=D(Y)$,　$\therefore \rho_{XY}=-\frac{1}{36}\Big/\frac{11}{36}=-\frac{1}{11}$;

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)=2(\frac{11}{36})+2(-\frac{1}{36})=\frac{5}{9}$.

8.9（1）$\boldsymbol{E(X+Y+Z)==E(X)+E(Y)+E(Z)=1;}$

$\boldsymbol{D(X+Y+Z)=E[(X+Y+Z)-E(X+Y+Z)]^2}$

$\boldsymbol{=E[(X-E(X)+(Y-E(Y))+(Z-E(Z))]^2}$

$\boldsymbol{=D(X)+D(Y)+D(Z)+2\operatorname{cov}(X,Y)+2\operatorname{cov}(X,Z)+2\operatorname{cov}(Y,Z)}$

$\boldsymbol{=D(X)+D(Y)+D(Z)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}+2\rho_{XZ}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}+2\rho_{YZ}\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(Z)}}$

$\boldsymbol{=3}$

8.10 由题设可知（如图所示）：

$P\{X\le Y\}=\frac{1}{4}$，$P\{X>Y\}=\frac{1}{2}$，$P\{Y<X\le 2Y\}=\frac{1}{4}$

（1）(U,V)所有可能取值为：（0，0），（0，1），（1，0），（1，1）。且

$P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=\frac{1}{4}$

$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y,X>2Y\}=0$

$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\le 2Y\}=P\{Y<X\le 2Y\}=\frac{1}{4}$

$P\{U=1,V=1\}=1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$

（2）由（1）的结构易知 UV、U 和 V 的分布律分别为：

$$UV\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix};\quad U\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix};\quad V\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

于是有 $E(U)=\frac{3}{4}$， $D(U)=\frac{3}{16}$， $E(V)=\frac{1}{2}$， $D(V)=\frac{1}{4}$， $E(UV)=\frac{1}{2}$，

$\operatorname{cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{1}{8}$， $\therefore$ $\rho=\frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)D(V)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$