第六章 集合代数

集合是数学、计算机科学以及其它科学的最基础的知识之一。

（一）集合间的关系及其符号化（6.1）
（二）三类特殊的集合（6.1）
（三）集合的五种基本运算（6.2）
（四）集合恒等式的证明（6.4）
（五）集合计数（文氏图）（6.3）

（一）集合间的关系及其符号化

思考题

采用一阶逻辑构造证明法证明如下推理：

如果A$\subseteq$B并且B$\subseteq$C，则A$\subseteq$C。

集合的关系及其符号化

定义6.1（包含关系） 设A，B为集合，如果B中的每个元素都是A中的元素，则称B为A的**子集**。这时也称**B被A包含**，或**A包含B**。记作$B \subseteq A$。

$B \subseteq A$的符号化为：$\forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$

定义6.2（相等关系） 设A，B为集合，如果$B \subseteq A$且$A \subseteq B$，则称**A与B相等**，记作$A=B$。

显然$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$

$A=B$的符号化为：

$$\forall x(x \in B \rightarrow x \in A) \land \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

定义6.3（真包含关系） 设A，B为集合，如果$B \subseteq A$且$B \neq A$，则称B是A的**真子集**，记作$B \subset A$。

显然$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A$

$B \subset A$的符号化为：

$$\forall x(x \in B \rightarrow x \in A) \wedge$$
$$\neg(\forall x(x \in B \rightarrow x \in A) \wedge \forall x(x \in A \rightarrow x \in B))$$

定义6.3（真包含关系）设A，B为集合，如果$B\subseteq A$且$B\neq A$，则称B是A的真子集，记作$B\subset A$。

显然$B\subset A\Leftrightarrow B\subseteq A\wedge B\neq A$

$B\subset A$的符号化为：

$$\forall x(x\in B\rightarrow x\in A)\wedge\exists x(x\in A\wedge x\notin B)$$

采用一阶逻辑构造证明法证明如下推理：

如果A⊆B并且B⊆C，则A⊆C。

证：设F(x)：x∈A，G(x)：x∈B，H(x)：x∈C

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，$\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论：$\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$

证明：

①	$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
②	$F(y)\rightarrow G(y)$	①UI规则
③	$\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
④	$G(y)\rightarrow H(y)$	③UI规则
⑤	$F(y)\rightarrow H(y)$	①③假言三段论
⑥	$\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$	⑤UG规则

思考题

采用一阶逻辑构造证明法证明如下推理：

(1) 如果A=B并且B=C，则A=C

(2) 如果A⊂B并且B⊂C，则A⊂C

（二）三类特殊的集合

定义6.4（空集）不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$。

空集的性质：

定理6.1 空集是一切集合的子集。

推论 空集是唯一的。

例：判断下列命题的真值。

（1）$\varnothing\subseteq\varnothing$（2）$\varnothing\in\varnothing$（3）$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$（4）$\varnothing\in\{\varnothing\}$

解：（1）（3）（4）为真，（2）为假

注意$\varnothing$和$\{\varnothing\}$的区别：

$\varnothing$不含任何元素

$\{\varnothing\}$含有唯一一个元素$\varnothing$

定义6.5(幂集)　集合的全体子集构成的集合叫作的幂集，记作P（A）或2^A，即P（A）={x|x⊆A}。

含有n个元素的集合简称n元集。

一个集合的含有m个元素的子集称作它的m元子集。

问题：|A|= n，则|P(A)|=?

说明：对于n元集A，不同的子集总数为

$$C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$$

即若|A|= n，则|P(A)|=2^n

例 A={1，2，3}，求P（A）。

解： 将A的子集从小到大分类：

0元子集，即空集，只有一个：$\varnothing$

1元子集，有C_3^1个：{1}，{2}，{3}

2元子集，有C_3^2个：{1，2}，{1，3}，{2，3}

3元子集，有C_3^3个：{1，2，3}

P（A）={$\varnothing$，{1}，{2}，{3}，

{1，2}，{1，3}，{2，3}，{1，2，3}}

例： 已知（1）$A=\varnothing$；（2）$B=\{\varnothing，\{\varnothing\}\}$。

分别求P（A）和P（B）。

解：（1）P（A）为$2^0=1$元集，

P（$\varnothing$）$=\{\varnothing\}$.

（2）P（B）为$2^2=4$元集，

P（B）$=\{\varnothing，\{\varnothing\}，\{\{\varnothing\}\}，\{\varnothing，\{\varnothing\}\}\}$

定义6.6（全集）：在一个具体问题中，如果涉及到的集合均是某一个集合的子集，则称该集合是**全集**，记作**E**。

全集的概念是相对，所研究的问题不同，所取的全集也不同。

（三）集合的五种基本运算

设集合A，B为集合，E为全集，则

并： $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

交： $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

（绝对）补： $\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}$

相对补： $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \sim B$

对称差： $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$

例：A={a，b，c}，B={a}，C={b，d}，

分别求A–B、B–A、A-C、C–A、A⊕C。

则有

$A-B=\{b, c\}$

$B-A=\varnothing$

$A-C=\{a, c\}$

$C-A=\{d\}$

$A\oplus C=\{a, c\}\cup\{d\}=\{a, c, d\}$

或$A\oplus C=\{a, b, c, d\}-\{b\}=\{a, c, d\}$

集合运算性质(P94)

$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$

$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$

$A-B\subseteq A$

$A-B=A\cap\sim B$

$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing$

$A\oplus B=B\oplus A$

$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

$A\oplus\varnothing=A$

$A\oplus A=\varnothing$

$A\oplus B=A\oplus C\Rightarrow B=C$

例 化简下列集合表达式

$((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$

解： 因为 $A\cup B \subseteq A\cup B\cup C$，$A \subseteq A\cup(B-C)$

所以 $(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B) = A\cup B$

$(A\cup(B-C))\cap A = A$

原式 $=(A\cup B)-A$

$=(A\cup B)\cap\sim A$

$=(A\cap\sim A)\cup(B\cap\sim A)$

$=B\cap\sim A$

$=B-A$

（四）集合恒等式的证明

恒等式的证明

方法一：等值演算法

证明的基本思想：欲证P=Q，即证明对任意的x, 有$x \in P \Leftrightarrow x \in Q$。

这一方法还可以用于集合**包含关系的证明**:

欲证$P \subseteq Q$，即证明对任意的x有$x \in P \Rightarrow x \in Q$成立

并：　$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

交：　$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

绝对补：　$x \in \sim A \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow \neg (x \in A)$

相对补：　$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

对称差：　$x \in A \oplus B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B)$

或 $\Leftrightarrow x \in (A-B) \cup (B-A)$

例 证明$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

证明 对任意的x，

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge x\notin B\cup C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge\neg(x\in B\cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge(\neg x\in B\wedge\neg x\in C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C \\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A-B\wedge x\in A-C \\
\Leftrightarrow\ & x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

∴原式成立

练习 证明$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

证明 对任意的x，

$$
\begin{aligned}
& x \in (A - B) \cup (B - A) \\
\Leftrightarrow\ & x\in (A - B) \vee x\in (B - A) \\
\Leftrightarrow\ & (x\in A \wedge x\notin B) \vee (x\in B \wedge x\notin A) \\
\Leftrightarrow\ & [(x\in A \wedge x\notin B) \vee x\in B] \wedge [(x\in A \wedge x\notin B) \vee x\notin A] \\
\Leftrightarrow\ & (x\in A \vee x\in B) \wedge (x\notin B \vee x\in B) \\
& \qquad \wedge (x\in A \vee x\notin A) \wedge (x\notin B \vee x\notin A) \\
\Leftrightarrow\ & (x\in A \vee x\in B) \wedge (x\notin A \vee x\notin B) \\
\Leftrightarrow\ & (x\in A \vee x\in B) \wedge (\neg\, x\in A \vee \neg\, x\in B) \\
\Leftrightarrow\ & (x\in A \vee x\in B) \wedge \neg\, (x\in A \wedge x\in B) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A \cup B \wedge \neg\, x\in A \cap B \\
\Leftrightarrow\ & x\in (A \cup B) - (A \cap B)
\end{aligned}
$$

$\therefore$原式成立

恒等式的证明

方法二：恒等变换

即利用已知的恒等式来证明集合恒等式。

集合运算的主要恒等式（P92-93）

其中的A，B，C表示任意的集合，E是全集

幂等律 $A \cup A = A$ $A \cap A = A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

交换律 $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

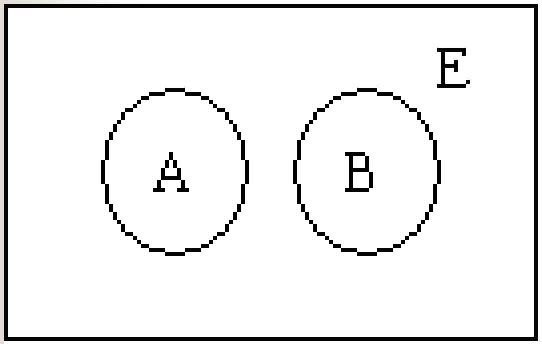
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
零律	$A\cup E=E$	$A\cap\varnothing=\varnothing$
排中律	$A\cup\sim A=E$	
矛盾律	$A\cap\sim A=\varnothing$	
吸收律	$A\cup(A\cap B)=A$	$A\cap(A\cup B)=A$
德摩根律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$	
	$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	
	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$	
	$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$	
	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$
双重否定律	$\sim(\sim A)=A$	

（五）集合计数（文氏图）

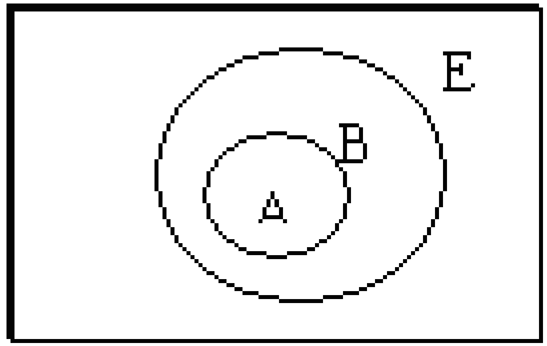
文氏图

以图形的形式来描述集合之间的相互关系和集合之间的运算

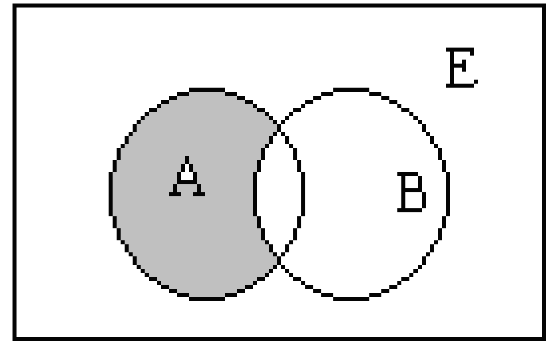
下面列举一些文氏图的实例



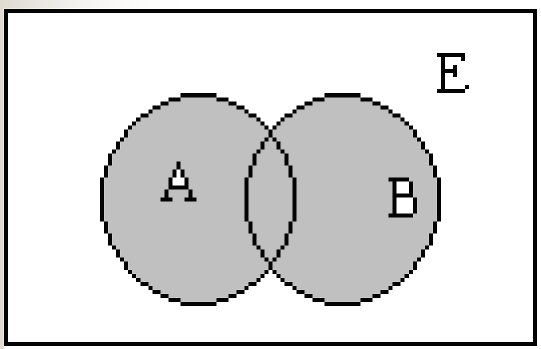
$A \cap B = \varnothing$



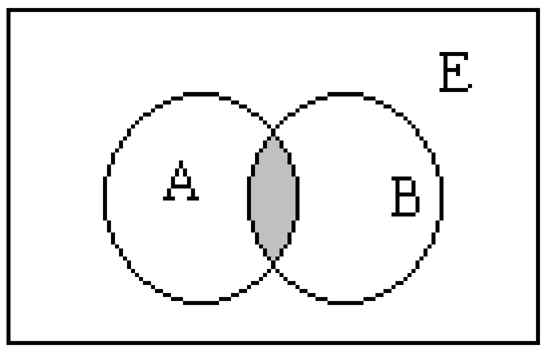
$A \subset B$



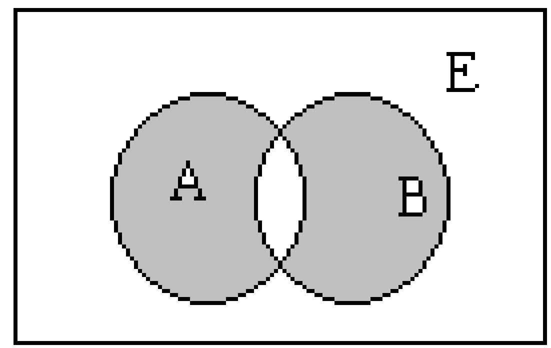
$A - B$



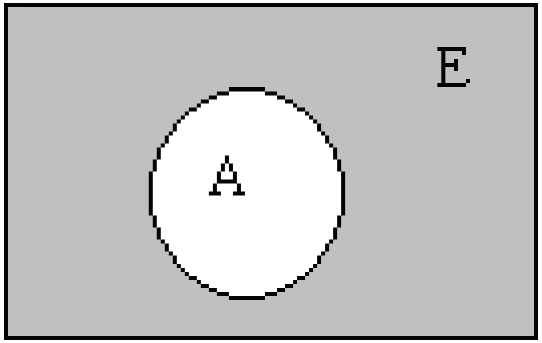
$A \cup B$



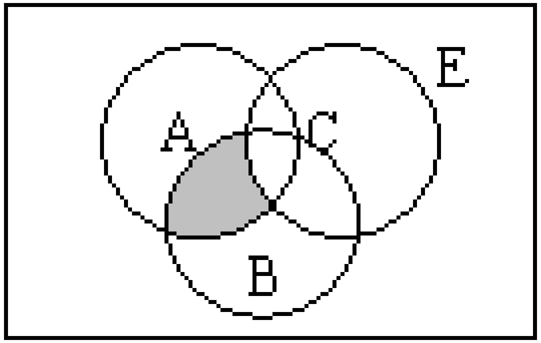
$A \cap B$



$A \oplus B$



~A



（A∩B）－C

文氏图的构造方法：

1、首先画一个大矩形表示全集E

2、其次在矩形内画一些圆（或任何其它适当的闭曲线），用圆的内部表示集合。

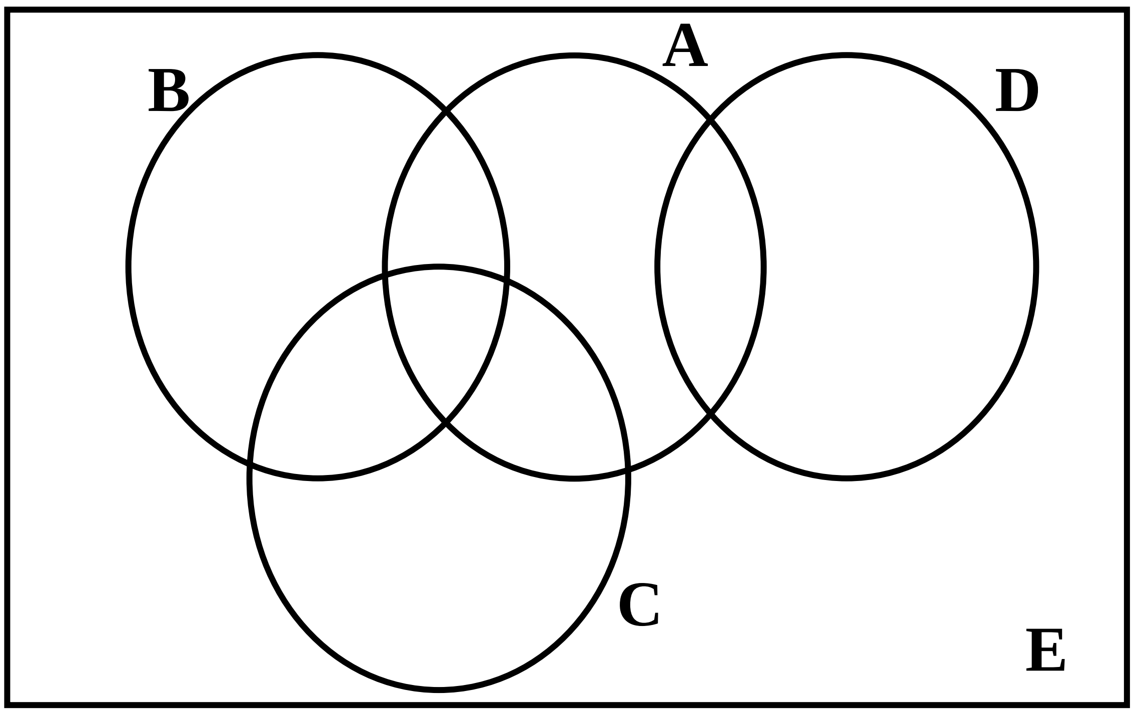
在一般情况下，如果不作特殊说明，这些表示集合的圆应该是彼此相交的。

如果两个集合是不交的，则表示它们的圆彼此相离

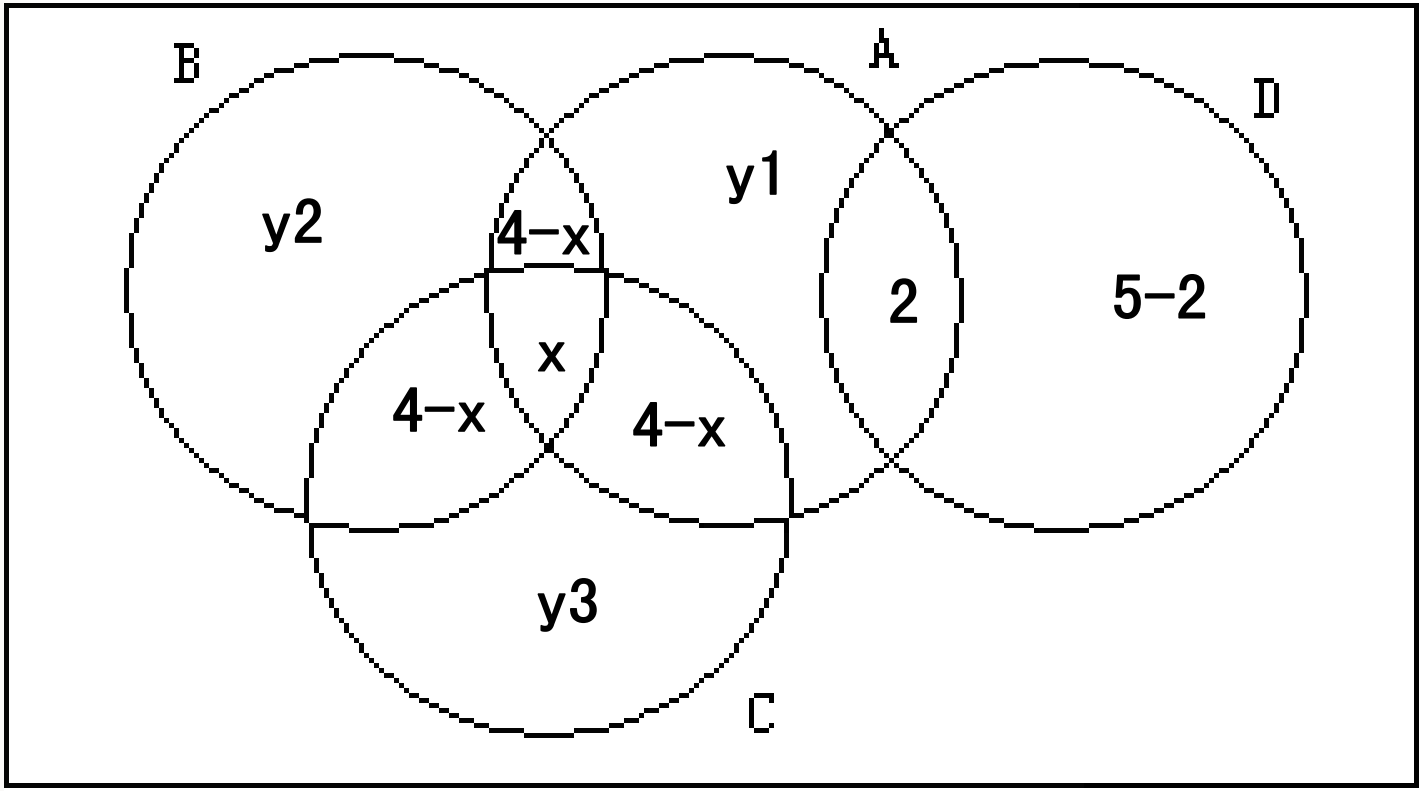
通常在图中用画有阴影的区域表示新组成的集合

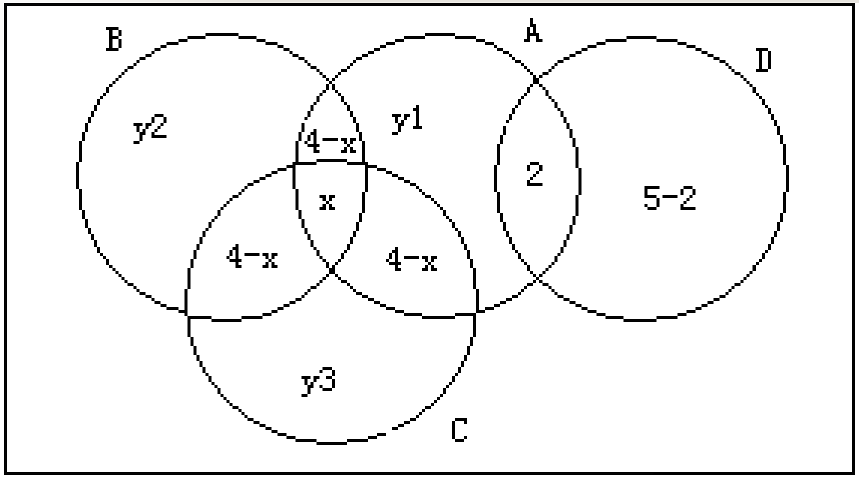
例 有24人，其中会英、日、德和法语的人分别为13，5，10和9人，同时会英语和日语的有2人，会英、德和法语中任两种的都是4人。已知会日语的人不会法语和德语，分别求只会一种语言（英、法、德、日）的人数和会三种语言的人数。

解： 令A，B，C，D分别表示会英、法、德、日语的人的集合。根据题意画出文氏图。



设同时会三种语言的有x人，只会英、法、德语一种语言的分别为y_1，y_2和y_3人。将x和y_1，y_2，y_3填入图中相应的区域，然后依次填入其它区域的人数.





因为会英、法、德和日语的人分别为13， 9 ，10 ，5人，所以可得方程组

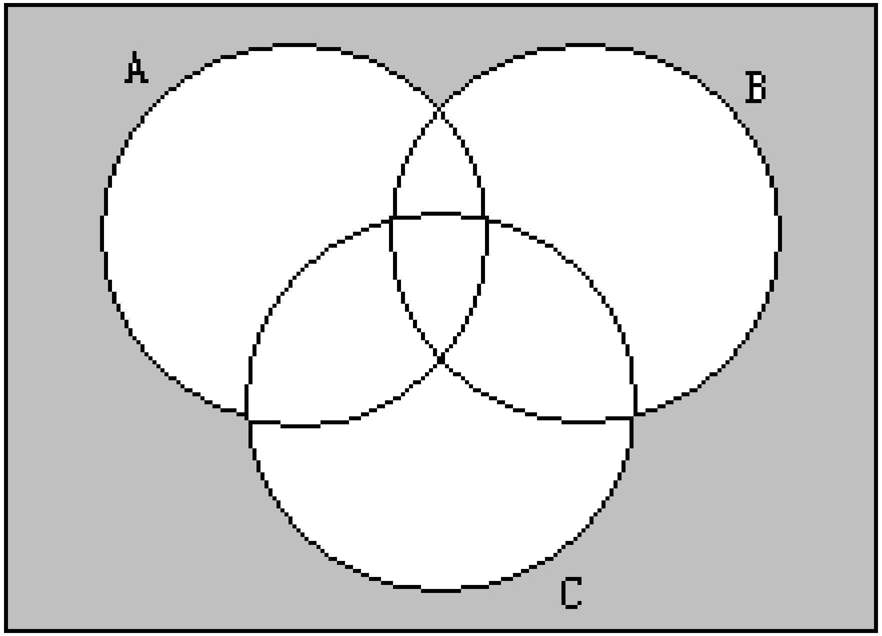
$$\begin{cases} y_1+2(4-x)+x+2=13 \\ y_2+2(4-x)+x=9 \\ y_3+2(4-x)+x=10 \\ y_1+y_2+y_3+3(4-x)+x=24-5 \end{cases}$$

解得$x=1$，$y_1=4$，$y_2=2$，$y_3=3$。

例　求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6，也不能被8整除的数有多少个？

解：设1到1000之间的整数构成全集E，而A，B，C分别代表其中可被5，6，8整除的数的集合。

按题意画出文氏图

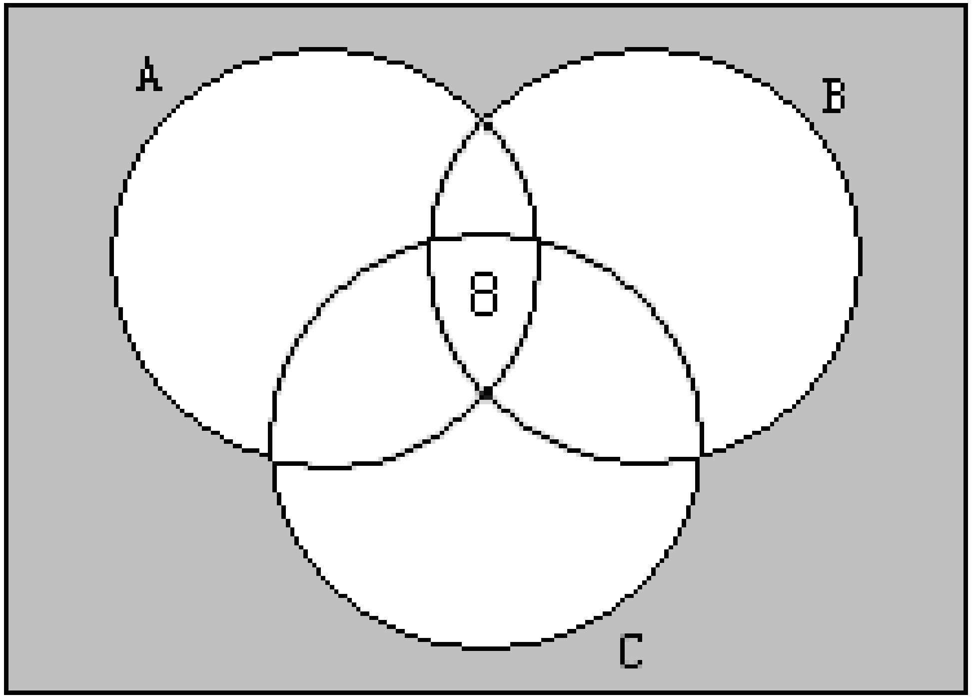


说明：用$\lfloor x \rfloor$表示小于等于x的最大整数，lcm（x_1，x_2，…x_n）表示x_1，x_2，…x_n的最小公倍数。

首先计算$|A\cap B\cap C|$

$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5, 6, 8) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$

将结果填入$A\cap B\cap C$的区域



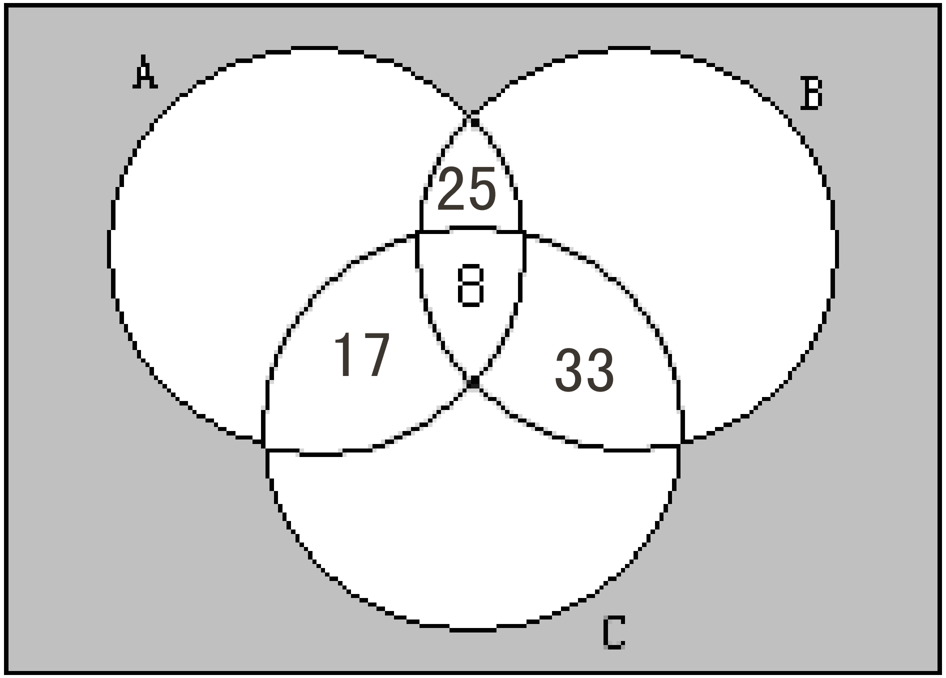
其次计算|A∩B|、 |A∩C|、 |B∩C|

$|A\cap B|=\lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6)\rfloor=33$

$|A\cap C|=\lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8)\rfloor=25$

$|B\cap C|=\lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8)\rfloor=41$

将结果分别填入A∩B 、A∩C、B∩C的区域中去



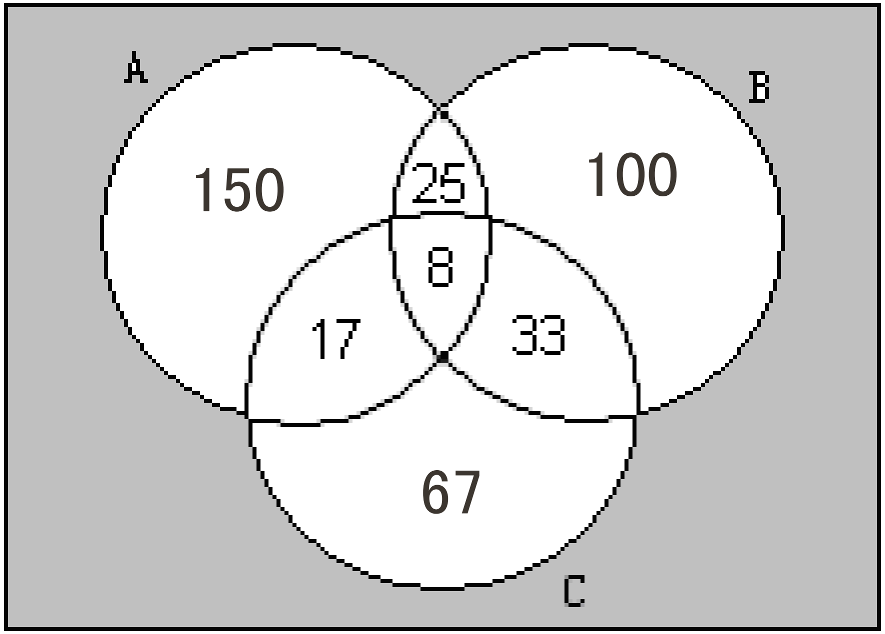
最后计算|A|、|B|、|C|

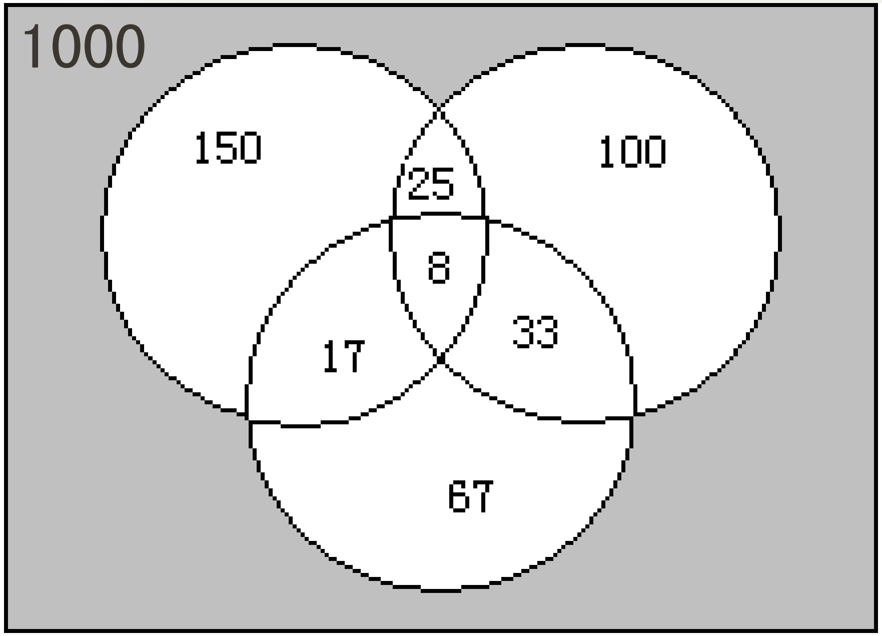
$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$

$|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$

$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$

将这些数据依次填入文氏图





由图可知，不能被5，6和8整除的数有1000-（150+100+67+25+33+17+8）=600个。