概率统计——习题六参考答案

6.1 $\frac{1}{4}$. 6.2（1）由 $\begin{cases} F(-\infty,0)=A(B-\frac{\pi}{2})C=0, \\ F(0,-\infty)=AB(C-\frac{\pi}{2})=0, \\ F(-\infty,\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} B=C=\frac{\pi}{2}, \\ A=\frac{1}{\pi^2}; \end{cases}$

（2）$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{4}{\pi^2(4+x^2)(4+y^2)}$， $-\infty<x,y<\infty$；

（3）$F_X(x)=F(x,\infty)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})$， $-\infty<x<\infty$，

$F_Y(y)=F(\infty,y)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{2})$， $-\infty<y<\infty$，

$f_X(x)=F_X'(x)=\frac{2}{\pi(4+x^2)}$， $-\infty<x<\infty$， $f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{2}{\pi(4+y^2)}$， $-\infty<y<\infty.$

6.3 $p=p\{X<\frac{1}{2}\}+P\{Y<\frac{1}{2}\}-P\{X<\frac{1}{2},Y<\frac{1}{2}\}=\frac{5}{8}$

6.4 (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 4.8y(2-x)dy=2.4x^2(2-x)$, $(0\le x\le 1)$，其它 $f_X(x)=0$；

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 4.8y(2-x)dx=2.4y(3-4y+y^2)$, $(0\le y\le 1)$，其它 $f_Y(y)=0$。

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}$, $(x>0)$，其它 $f_X(x)=0$；

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^y e^{-y}dx=ye^{-y}$, $(y>0)$，其它 $f_Y(y)=0$。

6.5（1）$\int_0^2 dx\int_2^4 k(6-x-y)dy=1\Rightarrow$ k=1/8;

（2）$P\{X<1,\ \ Y<3\}=\int_0^1 dx\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{3}{8}$；

（3）$P\{X<1.5\}=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}dx\int_2^4(6-x-y)dy=\frac{27}{32}$；

（4） $P\{X+Y\le 4\}=\iint\limits_{x+y\le 4} f(x,\ y)dxdy=\frac{1}{8}\int_2^4 dy\int_2^{4-y}(6-x-y)dx=\frac{2}{3}.$

6.6（1） $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}25e^{-5y} & ,\quad 0<x<0.2,\ y>0\\ 0 & ,\quad \text{其它}\end{cases}$；

（2） $P\{Y\le X\}=\iint\limits_{y\le x} f(x,\ y)dxdy=\int_0^{0.2}dx\int_0^x 25e^{-5y}dy=e^{-1}.$

6.7 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^2(x^2+\frac{1}{3}xy)dy=2x^2+\frac{2x}{3}$，$(0\le x\le 1)$，其它 $f_X(x)=0$；

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1(x^2+\frac{1}{3}xy)dx=\frac{1}{3}+\frac{y}{6}$，$(0\le y\le 2)$，其它 $f_Y(y)=0$。

显然 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不相互独立。

6.8 (1) 由边缘密度分布函数的定义知

$$\boldsymbol{F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}};\quad \boldsymbol{F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-0.5y}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}}$$

则对任意的 $\boldsymbol{x,y\in R,}$ 有 $\boldsymbol{F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)}$，故 X 与 Y 相互独立；

（2） $\boldsymbol{P\{X>\frac{100}{1000},y>\frac{100}{1000}\}=1-P\{X\le\frac{100}{1000},y\le\frac{100}{1000}\}=e^{-0.1}}$