河海大学

Ch8 假设检验

- **假设检验的基本概念和思想**

例 某糖厂用自动包装机将糖装箱。已知规定每箱的标准重量为100公斤。设每箱的糖重服从正态分布。由以往经验知重量的均方差为0.9 公斤并保持不变。某日开工后，为了检验包装机的工作是否正常，随机抽取该机所包装的9箱，称得其净重为(单位：*kg*)：99.3 , 98.7 , 100.5，101.2，98.3，99.7，105.1，102.6，100.5。问该日此包装机的工作是否正常？($\alpha = 0.05$)

1. 两类问题

$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} f(x;\theta),\ \theta\in\Theta,$

(1) 参数假设检验

总体分布已知，参数未知，

由观测值x_1，…，x_n检验假设

$$H_0:\theta=\theta_0;\ H_1:\theta\neq\theta_0$$

(2) 非参数假设检验 $X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} X,$

总体分布未知，由观测值x_1，…，x_n检验假设

$$H_0:F(x)=F_0(x;\theta);\ H_1:F(x)\neq F_0(x;\theta)$$

本课程主要讨论参数假设检验.

2. 检验法则与拒绝域

以样本$(X_1, \cdots, X_n)$出发制定一个法则，一旦观测值$(x_1, \cdots, x_n)$确定后，我们由这个法则就可作出判断是拒绝H_0还是接受H_1，这种法则称为H_0对H_1的一个**检验法则**，简称**检验法**。

样本观测值的全体组成样本空间S，把S分成两个互不相交的子集C和C*，即$S=C\cup C^*$，$C\cap C^*=\varnothing$，

假设当$(x_1, \cdots, x_n)\in C$时，我们就拒绝H_0；

当$(x_1, \cdots, x_n)\in C^*$时，我们就接受$H_0$。

子集$C\subset S$就称为检验的**拒绝域**(或**临界域**)。

3. 检验的两类错误

给出了H_0对H_1的某个检验法则，即给出了S的两个划分C与C*，由于样本的随机性，在进行判断时，还可能犯错误。

$\{$拒绝$H_0 | H_0$真$\} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in C \mid H_0$真$\}$

——第一类错误或弃真

$\{$接受$H_0 | H_0$假$\} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in C^* \mid H_0$假$\}$

——第二类错误或取伪

这两个事件都是小概率事件.

常记$P\{$拒绝$H_0 | H_0$真$\} = \alpha$，$P\{$接受$H_0 | H_0$假$\} = \beta$，α，β在0~1之间，通常不超过0.1。

4. 显著性检验

对于给定的一对H_0和H_1，总可找出许多临界域，人们自然希望找到这种临界域C，使得犯两类错误的概率α和β都很小。但在样本容量n一定时，这又是做不到的，除非容量 n无限增大。

奈曼—皮尔逊 (*Neyman*—*Pearson*)提出了一个原则:在控制犯第一类错误的概率α的条件下，尽量使犯第二类错误 β小，这是最优检验 (MPT) .

但是有时MPT法则很难找到，甚至不存在。在这种情况下，我们不得不降低要求，另提一些原则。应用上常采纳的原则是“只对α加以限制，而不考虑 β的大小”。按这种法则做出的检验称为“显著性检验”，此时α称为显著性水平或检验水平。

显著性检验的思想和步骤：

(1)根据实际问题作出假设H_0与H_1；

(2)构造统计量，在H_0真时其分布已知；

(3)给定水平α的值(一般为0.05，0.025，0.01，0.005等),求出H_0对H_1的拒绝域C；

(4)查表、计算得分位点和统计量的值；

(5)比较统计量与分位点值的大小，得出结论，依据是小概率原理。

- 单正态总体的假设检验

一、单总体均值的假设检验

设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$,水平$\alpha$，由观测值$x_1,\cdots,x_n$检验假设$H_0$：$\mu=\mu_0$；$H_1$：$\mu\neq\mu_0$。

1. σ^2已知的情形

构造

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0\text{真}}{=} \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

由$P\{|U|>z_{\alpha/2}\}=\alpha$, 可得拒绝域：$|U|>z_{\alpha/2}$

查表，计算，比较大小，即得结论：

若$|U|=\dfrac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}>z_{\alpha/2}$，则拒绝$H_0$而接受

H_1：$\mu\neq\mu_0$，反之，接受H_0：$\mu=\mu_0$。

例 某电器零件的平均电阻 2.64 Ω，标准差保持在 0.06 Ω，改变加工工艺后，测得100个零件，其平均电阻为 2.62 Ω，标准差不变。假设电阻近似地服从正态分布，问新工艺对此零件的电阻有无显著影响？（α=0.01）

说明

(1) H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu\neq\mu_0$称为双边HT问题；

H_0：$\mu=\mu_0$；H_1：$\mu>\mu_0$(或$\mu<\mu_0$)，则称为单边问题；这是一个不完备的HT问题。

(2) H_0：$\mu\leq\mu_0$；H_1：$\mu>\mu_0$ 或H_0：$\mu\geq\mu_0$；H_1：$\mu<\mu_0$ 也称为单边HT问题，这是一个完备的HT问题。

H_1：$\mu>\mu_0$ 称为右边HT问题；H_1：$\mu<\mu_0$称为左边HT问题。

对于 $H_0: \mu = \mu_0$； $H_1: \mu < \mu_0$，σ^2已知

构造 $$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0\text{真}}{=} \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{iid}{\sim} N(0,1)$$

可得拒绝域 $U < -z_\alpha = z_{1-\alpha}$

同理 $H_0: \mu = \mu_0$； $H_1: \mu > \mu_0$，σ^2已知

构造 $$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0\text{真}}{=} \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{iid}{\sim} N(0,1)$$

其拒绝域为 $U > z_\alpha$

例 在一批木材中抽出100根，测量其小头直径，测得样本均值$\bar{x} = 11.20cm$. 已知小头直径服从正态分布且方差为$\sigma^2 = 6.76$. 检验$(\alpha = 0.05)$:

$$H_0: \mu = 12; \quad H_1: \mu < 12.$$

现以H_0：$\mu \le \mu_0$；H_1：$\mu > \mu_0$，σ^2已知为例，说明完备单边问题与不完备单边问题有相同的拒绝域。

完备单边问题与不完备单边问题有相同的拒绝域。

2. σ^2未知的情形

对于假设$H_0:\mu=\mu_0$; $H_1:\mu\neq\mu_0$，构造

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\overset{H_0\text{真}}{=}\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

可得拒绝域：$|T|>t_{\alpha/2}(n-1)$

例 某批矿砂的5个样品中的镍含量，经测定为(%)：3.25, 3.27, 3.24, 3.26, 3.24。设测定值总体服从正态分布，问在$\alpha=0.01$下能否接受假设：这批矿砂的镍含量的均值为3.25。

$H_0: \mu = \mu_0;\ \ H_1: \mu < \mu_0$

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \overset{H_0\text{真}}{=} \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

拒绝域： $T < -t_\alpha(n-1) = t_{1-\alpha}(n-1)$

$H_0: \mu = \mu_0;\ \ H_1: \mu > \mu_0$

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \overset{H_0\text{真}}{=} \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

拒绝域：$T > t_\alpha(n-1)$

例 已知用某种钢生产的钢筋强度 X 服从正态分布，且 $E(X)=52.00(kg/mm^2)$。今改变炼钢的配方，利用新法炼了七炉钢，从这七炉钢生产的钢筋中每炉抽一根测得其强度分别为：52.45, 48.51, 56.02, 51.53, 49.02, 53.38, 54.04。问用新方法炼钢生产的钢筋其强度的均值是否有明显提高 ($\alpha=0.05$)。

二、单总体方差的假设检验

设$X_1,\cdots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，水平$\alpha$，由观测值$x_1,\cdots, x_n$检验假设

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2;\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2。$$

1. μ未知的情形

构造 $$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0\text{真}}{=} \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

拒绝域：$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$。

$$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2;\quad H_1:\ \sigma^2<\sigma_0^2$$

构造 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\overset{H_0\text{真}}{=}\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

拒绝域：$\chi^2<\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

$$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2;\quad H_1:\ \sigma^2>\sigma_0^2$$

构造 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\overset{H_0\text{真}}{=}\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

拒绝域：$\chi^2>\chi^2_{\alpha}(n-1)$

例 某厂生产一批某种型号的汽车蓄电池，由以往经验知其寿命X近似地服从正态分布，它的均方差为0.80(年)。现从该厂生产的该型号蓄电池中任意抽取13个，算得样本均方差为0.92(年)，取显著性水平α=0.10，问该厂生产的这批蓄电池寿命的方差是否有明显改变？

2. μ已知的情形

$$H_0: \ \sigma^2=\sigma_0^2; \quad H_1: \ \sigma^2\neq\sigma_0^2$$

构造 $\chi^2=\dfrac{nS_\mu^2}{\sigma_0^2}\overset{H_0\text{真}}{\sim}\chi^2(n)$，

其中$S_\mu^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$。

即可作相应的假设检验。（留做练习）

综上有单个正态总体的检验表：

关于均值 μ 的假设检验：

H_0	H_1	拒绝(H_0)域	
		σ^2已知 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0真}{\sim} N(0,1)$	σ^2未知 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \overset{H_0真}{\sim} t(n-1)$
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert U\rvert > z_{\alpha/2}$	$\lvert T\rvert > t_{\alpha/2}(n-1)$
	$\mu>\mu_0$	$U>z_\alpha$	$T>t_\alpha(n-1)$
	$\mu<\mu_0$	$U<-z_\alpha$	$T<-t_\alpha(n-1)$

关于均值σ^2的假设检验：

H_0	H_1	拒绝(H_0)域	
		μ已知 $\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\overset{H_0\text{真}}{\sim}\chi^2(n)$	μ未知 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\overset{H_0\text{真}}{\sim}\chi^2(n-1)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$ or $\chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n)$	$\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ or $\chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$
	$\sigma^2>\sigma_0^2$	$\chi^2>\chi^2_{\alpha}(n)$	$\chi^2>\chi^2_{\alpha}(n-1)$
	$\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2<\chi^2_{1-\alpha}(n)$	$\chi^2<\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

• 双正态总体均值差与方差比的假设检验

一、均值差的假设检验

设$X_1,\cdots,X_{n_1} \overset{iid}{\sim} N(u_1, \sigma_1^2)$; $Y_1,\cdots,Y_{n_2} \overset{iid}{\sim} N(u_2, \sigma_2^2)$,

两样本独立，水平α，由观测值$x_1,\cdots,x_{n_1}$;

$y_1,\cdots,y_{n_2}$检验假设 H_0: $\mu_1 = \mu_2$; H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

即 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

1. σ_1^2、σ_2^2已知的情形

$$H_0:\mu_1-\mu_2=0; \quad H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$$

构造 $$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\overset{H_0\text{真}}{=}\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

可得拒绝域: $|U|>z_{\alpha/2}$

对应单边问题的拒绝域分别为

左边 $H_1:\mu_1-\mu_2<0$ 为: $U<-z_\alpha$;

右边 $H_1:\mu_1-\mu_2>0$ 为: $U>z_\alpha$.

2. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 未知的情形

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \overset{H_0\text{真}}{=} \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{2}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

可得拒绝域：$|T| > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$

对应单边问题的拒绝域分别为

左边 $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ 为：$T < -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$;

右边 $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ 为：$T > t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$.

3. σ_1^2、σ_2^2未知的情形

此时没有已知精确分布的统计量来作检验，只有在大样本(n_1，$n_2 \geq 30$)的情况下，可认为

$$\sigma_1^2 \approx S_1^2,\ \sigma_2^2 \approx S_2^2,$$

从而得到第一种情形。

例　在漂白工艺中要考察温度对针织品断裂强力的影响。在70^0C与80^0C下分别作了七次和九次测试，测得断裂强力的数据如下(单位:kg)：

70^0C : 20.5, 18.8, 20.9, 21.5, 19.5, 21.6, 21.8；

80^0C : 17.7, 19.2, 20.3, 20.0, 18.6, 19.0, 19.1, 20.0, 18.1；

根据以往经验知两种温度下的断裂强力都近似服从正态分布，其方差相等且相互独立，试问两种温度下的平均断裂强力有无显著差别（α=0.05）？

二、方差比的假设检验

设$X_1,\cdots,X_{n_1} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1,\sigma_1^2); Y_1,\cdots,Y_{n_2} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

两样本独立，水平 α，由观测值

$$x_1,\cdots,x_{n_1};\qquad y_1,\cdots,y_{n_2}$$

检验假设 H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$；H_1：$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

1. μ_1、μ_2未知的情形

H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$; H_1: $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

构造 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\overset{H_0\text{真}}{=}\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,\ n_2-1)$

即得拒绝域

$$F<F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\text{ 或 }F>F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$$

而对应的单边问题的拒绝域分别是

左边: $F<F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$;

右边: $F>F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$。

2. μ_1、μ_2 已知的情形

构造 $$F=\frac{S_{\mu_1}^2}{S_{\mu_2}^2}\overset{H_0\text{真}}{=}\frac{S_{\mu_1}^2\big/\sigma_1^2}{S_{\mu_2}^2\big/\sigma_2^2}\sim F(n_1,\ n_2),$$

即可得到检验的拒绝域。（自己完成）

例 机器包装食盐，假设每袋盐的净重服从正态分布，规定每袋标准重量为1kg，标准差为 0.02 kg。某天开工后，为检验其机器工作是否正常，从装好的食盐中随机抽取9袋，测其净重(单位：kg)为：0.994，1.014，1.02，0.95，1.03，0.968，0.976，1.048，0.982，问这天包装机工作是否正常（$\alpha=0.05$）？

关于均值差$\mu_1-\mu_2$的假设检验：

H_0	H_1	拒绝(H_0)域：σ_1^2,σ_2^2已知 $U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\overset{H_0\text{真}}{\sim}N(0,1)$	拒绝(H_0)域：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知 $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\overset{H_0\text{真}}{\sim}t(n_1+n_2-2)$
$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$\lvert U\rvert>z_{\alpha/2}$	$\lvert T\rvert>t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$
	$\mu_1>\mu_2$	$U>z_\alpha$	$T>t_\alpha(n_1+n_2-2)$
	$\mu_1<\mu_2$	$U<-z_\alpha$	$T<-t_\alpha(n_1+n_2-2)$

关于方差比σ_1^2/σ_2^2的假设检验：

H_0	H_1	拒绝(H_0)域: μ_1,μ_2已知	拒绝(H_0)域: μ_1,μ_2未知
		$F=\dfrac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\overset{H_0真}{\sim}F(n_1,n_2)$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\overset{H_0真}{\sim}F(n_1-1,n_2-1)$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\neq$	$F<F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)$ or $F>F_{\alpha/2}(n_1,n_2)$	$F<F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$ or $F>F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$
	$>$	$F>F_{\alpha}(n_1,n_2)$	$F>F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$
	$<$	$F<F_{1-\alpha}(n_1,n_2)$	$F<F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$