第四章 一阶逻辑的基本概念

4.1 一阶逻辑命题符号化

在一阶逻辑中，个体词、谓词、量词是命题符号化的三个基本要素。

个体词

个体词是独立存在的客体，可以是一个具体的事物，也可以是一个抽象的概念

例如：小王、玫瑰花、黑板、自然数、3、思想、定理等都可以作为个体词。

个体常项：表示具体的或特定的个体的词
用小写的英文字母a，b，c...表示

个体变项：表示抽象的或泛指的个体的词
用小写的英文字母x，y，z...表示

个体词

个体域（也称**论域**）：个体变项的取值范围

个体域可以是有限事物的集合，

如{1, 2, 3}、{a,b,c}、{中华人民共和国所有公民}等

也可以是无限事物的集合，如整数集合、实数集合等。

特别的，当无特殊声明时，将宇宙间的一切事物的集合作为个体域，称为**全总个体域**。

谓词

谓词是用来刻画个体词的性质或个体词之间关系的词语。

例如：指出下面四个陈述中的个体词和谓词

（1）π是无理数。　　（2）王明是程序员。

（3）小王与小李同岁。　　（4）x与y具有关系L。

个体词：“π”，“王明”，“小王”，“小李”，“x”，“y”

谓词：“...是无理数”，“...是程序员”　　个体词的性质

“...与...同岁”，“...与...具有关系L”　　个体词之间关系

谓词的分类

（1）**谓词常项：** 表示具体性质或关系的谓词

用大写英文字母F，G，H，...表示

例如：“...是无理数”，“...是程序员”，“...与...同岁”是谓词常项，可以用F表示“...是无理数”，G表示“...是程序员”，H表示“...与...同岁”

（2）**谓词变项：** 表示抽象的或泛指的谓词

也用大写英文字母F，G，H，...表示，

F，G，H，...表示的是谓词常项还是谓词变项要根据上下文而定

例如：“...与...具有关系L” 是谓词变项

谓词应符号化成个体词和谓词的联合体的形式

如F（a）、F（x）、F（a，b）、F（x，y）等

F（a）表示个体常项a具有性质F；

F（x）表示个体变项x具有性质F；

F（a，b）表示个体常项a，b具有关系F；

F（x，y）表示个体变项x，y具有关系F。

例：（1）π是无理数。（2）小王与小李同岁。

令F（x）：x是无理数

H（x，y）：x与y同岁

谓词的元

一个谓词中所包含的个体变项的数目称为该谓词的元数。含有n（n≥1）个体变项的谓词称为n元谓词。常用P(x1，x2，…，xn)表示n元谓词。

一元谓词通常表示个体变项具有性质P；

n（n≥2）元谓词通常表示个体变项之间具有关系P。

不带个体变项的谓词称为0元谓词。

例如：F（a），G（a，b），P（a1，a2，…，an）都是0元谓词。

例 将下面命题用0元谓词符号化。

（1）只有2是素数，4才是素数

（2）如果5大于4，则4大于6

命题的谓词符号化步骤：

（a）找出谓词、个体词常项

（b）符号化谓词和个体词常项

（c）使用符号化了的谓词和个体词以及逻辑运算符对命题符号化

解：（1）令F（x）：x是素数，a：2，b：4

则命题符号化为：F（b）→F（a）

（2）令G（x，y）：x大于y。a：4，b：5，c：6

则命题符号化为：G（b，a）→G（a，c）

有些命题除了个体词和谓词之外，还有表示数量的词。

例如：（1）所有的人都呼吸。

（2）有的人用左手写字。

量词

量词是表示个体常项或变项之间数量关系的词。

量词分为两种：

（1）**全称量词**：对应日常语言中的"一切"，"所有的"，"任意的"，"每一个"等等，用符号"∀"表示。

用$\forall x$表示对个体域里的所有个体，$\forall xF(x)$表示个体域里的所有个体都有性质F。

$\forall x\forall yG(x, y)$表示个体域里的任意两个个体都有关系G。

（2）**存在量词**：对应日常语言中的"存在"，"有一个"，"有的"，"至少有一个"等词，用符号"∃"表示。

用$\exists x$表示个体域里有的个体，$\exists xF(x)$表示个体域里存在个体具有性质F。

$\exists x\exists yG(x, y)$表示个体域里存在两个个体具有关系G。

例 在个体分别限制为（a）和（b）条件时，将下面两个命题符号化：

（1）所有的人都呼吸。

（2）有的人用左手写字。

其中：（a）个体域D1为人类集合

（b）个体域D2为全总个体域

个体词"人"需不需要进行符号化？

解：

（a）个体域为人类集合

令F（x）：x呼吸；G（x）：x用左手写字

（1）命题符号化为：$\forall x F(x)$

（2）命题符号化为：$\exists x G(x)$

（b）现在假设个体域D2是全总个体域

这时，$\forall x\ F(x)$ 和 $\exists x\ G(x)$ 不能表示原命题的意义了，因为

（1）所有的人都呼吸。 ➔所有的个体都呼吸。

（2）有的人用左手写字。➔有的个体用左手写字。

所以个体域是全总个体域时，命题应转述为：

（1）对于任意的个体x，如果x是人，则x呼吸。

（2）存在着个体x，x是人并且x用左手写字。

需要引进一种新的谓词（特性谓词）将人与其它事物区分开来 令M（x）：x是人。

使用特性谓词M（x），所给命题就可以符号化为：

（1）$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$

（2）$\exists x(M(x)\wedge G(x))$

例 在个体域限制为（a）和（b）条件时，将下列命题符号化：

（1）对于任意的数x，均有$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

（2）存在数x，使得$x+5=3$

其中：（a）个体域D1=N（自然数集合）

（b）个体域D2=R（实数集合）

解：令$F(x): x2-3x+2=(x-1)(x-2)$；$G(x): x+5=3$

在个体域限制为（a）和（b）条件时

命题（1）的符号化均为：$\forall xF(x)$

命题（2）的符号化均为：$\exists xG(x)$

个体域为（a）时，（1）为真命题，（2）为假命题

个体域为（b）时，（1）为真命题，（2）为真命题

使用量词时的注意点

（1）在不同的个体域中，命题符号化的形式可能一样，也可能不一样

（2）在引入特性谓词后，使用全称量词与存在量词符号化的形式是不同的

（3）同一个命题，在不同的个体域中的真值可能不一样

（4）如果事先没有给出个体域，都应以全总个体域为个体域

例 将下列命题符号化。

（1）所有的人都长着黑头发。

（2）有的人登上过月球。

（3）没有人登上木星。

（4）在美国留学的学生未必都是亚洲人。

解：本题未给出个体域，因而以全总个体域为个体域

令M（x）：x为人

（1）令F（x）：x长着黑头发

可将命题转述为：对于任意的个体x，如果x是人，那么x长着黑头发。

命题符号化为：$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$

（2）有的人登上过月球。

令G（x）：x登上过月球

可将命题转述为：存在着个体x，x是人并且x登上过月球。

命题符号化为：$\exists x(M(x) \land G(x))$

（3）没有人登上木星。

令H（x）：x登上过木星

命题可看成："有人登上木星"的否定。

命题符号化为：$\neg \exists x(M(x) \land H(x))$

命题也可看成：所有人都没登上木星

命题符号化为：$\forall x(M(x) \to \neg H(x))$

（4）在美国留学的学生未必都是亚洲人。

命题可看成“存在在美国留学的学生不是亚洲人”。

令F（x）：x是在美国留学的学生；

G（x）：x是亚洲人

命题符号化为：$\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$

或者命题可看成“在美国留学的任意学生都是亚洲人”的否定。

命题符号化为：$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

例 使用多元谓词将下列命题符号化。

（1）兔子比乌龟跑得快。

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑的快。

（4）不存在跑的同样快的两只兔子。

解： 本题未给出个体域，因而以全总个体域为个体域

令F（x）：x是兔子； G（y）：y是乌龟；

H（x，y）：x比y跑的快；

L（x，y）：x和y跑得同样快

（1）兔子比乌龟跑得快。

可将命题转述为：对于任意的一个个体x，如果x是兔子，那么对于任意的个体y，如果y是乌龟，那么x比y跑得快。

命题可以符号化为：

$$\forall x\,(F(x) \rightarrow \forall y\,(G(y) \rightarrow H(x, y)))$$

例 使用多元谓词将下列命题符号化。

（1）兔子比乌龟跑得快。

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑的快。

（4）不存在跑的同样快的两只兔子。

解： 本题未给出个体域，因而以全总个体域为个体域

令F（x）：x是兔子； G（y）：y是乌龟；

H（x，y）：x比y跑的快；

L（x，y）：x和y跑得同样快

（1）兔子比乌龟跑得快。

可将命题转述为：对于任意的两个个体x和y，如果x是兔子，并且y是乌龟，那么x比y跑得快。

命题可以符号化为：

$$\forall x \forall y (F(x) \land G(y) \rightarrow H(x, y))$$

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

可将命题转述为：存在着个体x，x是兔子，并且对于所有的个体y，如果y是乌龟，那么x比y跑得快。

命题可以符号化为：

$$\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$$

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

命题可看成“兔子比乌龟跑得快”的否定

命题可以符号化为：

$$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$$

命题也可看成“存在着兔子和乌龟，兔子跑得不比乌龟快”

则命题可转述为：存在两个个体x和y，x是兔子，y是乌龟，并且x跑得不比y快。

则命题也可以符号化为：

$$\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$$

（4）不存在跑的同样快的两只兔子。

命题可看成“存在跑的同样快的两只兔子”的否定

命题可以符号化为：

$$\neg \exists x \exists y (F(x) \wedge F(y) \wedge L(x, y))$$

命题也可看成“任意的两只兔子跑的不一样快”

命题也可以符号化为：

$$\forall x \forall y (F(x) \wedge F(y) \rightarrow \neg L(x, y))$$

使用多元谓词符号化命题时的注意点：

（1）使用n元谓词符号化命题需要n个量词。

（2）有些命题的符号化形式可以不止一种。

（3）多个量词同时出现，不能随意颠倒它们的顺序，颠倒后会改变命题的含义。

例如：考虑个体域为实数集，H（x，y）表示“x+y=10”。

则命题“对于任意的x，都存在y，使得x+y=10”的符号化为：$\forall x \exists y H(x, y)$，命题为真命题。

颠倒顺序后，得$\exists y \forall x H(x, y)$，这表示“存在y，对任意的x有x+y=10”，显然是假命题。

思考： 符号化命题：张三的父亲是校长。

解一：令F(x)：x是校长，a：张三的父亲

命题符号化为F(a)

解二：令F(x)：x的父亲是校长，a：张三

命题符号化为F(a)

解三：令F(x)：x是校长，G(x, y)：x是y的父亲

M(x)：x是人，a：张三

命题符号化为$\exists x(M(x)\land G(x, a)\land F(x))$

解四：设F(x): x是校长，f(x): x的父亲，a：张三

命题符号化为：F(f(a)))

谓词是一个完整的句子；函数则是一个短语

例：符号化下列命题。

（1）所有实数的平方是非负的。

（2）对于任意的实数x与y，总存在实数z，使得$x+y=z$。

解：

（1）设$F(x)$: x是实数，$f(x)$: x的平方，$G(x)$: x非负

命题符号化为：$\forall x(F(x) \rightarrow G(f(x)))$

（2）设$F(x)$: x是实数，$G(x,y,z)$: $x+y=z$

命题符号化为：$\forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \rightarrow \exists z(F(z) \wedge G(x,y,z)))$

或设$F(x)$: x是实数，$f(x,y)$: $x+y$，$H(x,y)$: $x=y$

命题符号化为：$\forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \rightarrow \exists z(F(z) \wedge H(f(x,y),z)))$