随机事件和概率的测验题

一、填空题

1. 0.07；2. 1/5；3. 0.3； 4. 0.3

5. 0.496； 6. 1/4； 7. 17/25 8.3/5

二、选择题

1. D； 2. B； 3. B； 4. C；5. B

三、计算题

四、（1）P=P{一件次品}+P{没有次品}=$\frac{C_{95}^{49}C_5^1}{C_{100}^{50}}+\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}=0.2794$

（2）A={至少有一本数学书}，P{A}=1-P{没有数学书}=$1-\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{67}{91}$

（3）A_1,A_2,A_3,A_4,A_5分别表示事件“脱落 MM,AA,MA,XA,XM”

B 表示放回仍为 MAXAM，A_1,A_2,A_3,A_4,A_5互不相容

$$P(A_1)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=1/10=P(A_2);$$
$$P(A_3)=4/10;$$
$$P(A_4)=2/10=P(A_5);$$
$$P(B|A_1)=P(B|A_2)=1;$$
$$P(B|A_3)=P(B|A_4)=P(B|A_5)=1/2;$$

由全概公式$P(B)=\sum_{i=1}^{5}P(B|A_i)P(A_i)=3/5$

（4）设 A={先从甲袋取一球为白球}；B={先从甲袋取一球为红球}；

C={再从甲袋取一球为白球}；

$$P(C)=P(C|A)P(A)+P(C|B)P(B)$$

则
$$=\frac{\mathrm{N}+1}{\mathrm{N}+\mathrm{M}+1}\cdot\frac{n}{n+m}+\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}+\mathrm{M}+1}\cdot\frac{m}{n+m}=\frac{n(N+1)+Nm}{(N+M+1)(m+n)}$$

离散型随机变量及其分布测验题

一、填空题

1. 19/27； 2. 2；3. $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 22/35 & 12/35 & 1/35\end{pmatrix}$

4. 6/11，36/49；

二、选择题

1. B； 2. D

三、计算题

1 （1）. $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \frac{10}{13} & \frac{10}{12}\cdot\frac{2}{13} & \frac{10}{11}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{3}{13} & \frac{1}{11}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{3}{13}\end{pmatrix}$

（2）$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k & \cdots\\ \frac{10}{13} & \frac{3}{13}\cdot\frac{10}{13} & \cdots & (\frac{3}{13})^{k-1}\cdot\frac{10}{13} & \cdots\end{pmatrix}$

（3）$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \frac{10}{13} & \frac{11}{13}\cdot\frac{3}{13} & \frac{12}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{3}{13} & 1\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{3}{13}\end{pmatrix}$

2. （1）$X+Y\sim\begin{pmatrix}-3 & -2 & -1 & -3/2 & -1/2 & 1 & 3\\ 1/12 & 1/12 & 3/12 & 2/12 & 1/12 & 2/12 & 2/12\end{pmatrix}$

(2) $X-Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 3/2 & 5/2 & 3 & 5\\ 3/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 2/12 & 2/12 & 2/12\end{pmatrix}$

(3) $X^2-Y-2\sim\begin{pmatrix}-15/4 & -3 & -11/4 & -2 & -1 & 5 & 7\\ 2/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 3/12 & 2/12 & 2/12\end{pmatrix}$

3. 略

连续型随机变量及其分布测验题

一、填空题

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$；2. 3/5；3. $\sqrt{2}+1,(\sqrt{2}+1)(\cos x-\cos(x+\frac{\pi}{4}))$；

4. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}\arcsin(-1), & -1\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$

二、选择题

1. C；2. C；3. A;4. B；5. C;6. D ;7. B; 8. C; 9.B

三、 计算题

1.（1）由 $C\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=1,$ 令 $x=\sin t$，解得 $C=1/\pi$

（2）$P\{-0.5<X<0.5\}=\int_{-0.5}^{0.5}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\pi}dt=1/3$

2.（1）

$$P\{|X|\le 30\}=\int_{-30}^{30}f(x)dx=F(30)-F(-30)$$

$$=\Phi(\frac{30-20}{40})-\Phi(\frac{-30-20}{40})=\Phi(0.25)-\Phi(-1.25)=0.4931$$

（2）$p=1-P\{\text{三次误差的绝对值都超过30}\}=1-0.4931^3=1-0.12=0.88$

3. $P\{X<150\}=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}dx=1/3;\ P\{X\ge 150\}=1-1/3=2/3=p$

（1）$P\{\text{三只元件中没有一只损坏}\}=p^3=\frac{8}{27}\approx 0.296$

（2）$P\{\text{三只元件全损坏}\}=(1-p)^3=\frac{1}{27}$

(3) $P\{\text{三只元件只有一个元件损坏}\}=C_3^1(\frac{2}{3})^2\frac{1}{3}=4/9$

4.直径 d 的密度函数是 $\varphi(d)=\begin{cases} 1, & 5\le d\le 6 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

假设 $X=\pi D^2/4$，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{\pi D^2\le 4x\}$

1） $x \le 0, F(x) = 0;$

2） $x > 0, F(x) = P\{-\sqrt{\frac{4x}{\pi}} \le D \le \sqrt{\frac{4x}{\pi}}\}$

当 $\sqrt{\frac{4x}{\pi}} < 5$,即 $x < 25\pi/4, F(x) = 0;$

当 $5 \le \sqrt{\frac{4x}{\pi}} \le 6$,即 $25\pi/4 \le x \le 9\pi, F(x) = \int_5^{\sqrt{\frac{4x}{\pi}}} dt = \sqrt{\frac{4x}{\pi}} - 5;$

当 $x > 9\pi, F(x) = 1$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0, & x < 25\pi/4 \\ \sqrt{\frac{4x}{\pi}}, & 25\pi/4 \le x \le 9\pi \\ 1, & x > 9\pi \end{cases}，F'(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi x}}, & 25\pi/4 \le x \le 9\pi \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

5.（1）当 $x \le 0$ 或 $x \ge 1$ 时， $f_X(x) = 0$；

当 $0 < x < 1$ 时， $f_X(x) = \int_0^{1-x} 24y(1-x-y)dy = 4(1-x)^3$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 4(1-x)^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

（2） $$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{6y(1-x-y)}{(1-x)^3}, & x > 0, y > 0, x + y < 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$f(y|x = 1/2) = \begin{cases} 24y(1-2y), & 0 < y < 1/2 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

随机变量的数字特征测验题

一、填空题

1. 12；2. N（0，5）；3. 0.495；4. 8/9；　5. B(3,0.2)，0.6，0.48；　6. 0；　7. 4；　8. 46

二、选择题

1. D; 2. B；　3. A; 4. C；　5. A；　6. B

三、计算题

1. $$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kP\{X=k\}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{a}{1+a})^{k+1}=a$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}(k+1-1)k\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}=a+2a^2$$

$$\therefore D(X)=a+a^2$$

2. $$E(X)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=0;$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot\frac{2}{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}$$

4. $$\sin(\frac{\pi(X+Y)}{2})\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0.45 & 0.40 & 0.15\end{pmatrix}$$

$$\therefore E(\sin(\frac{\pi(X+Y)}{2}))=0\times0.45+1\times0.40+(-1)\times0.15=0.25$$

5. X 可取值 0，1，2，3，A_i 表示第 i 个路口遇红灯

（1）$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$ （2）$E(\frac{1}{1+X})=1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{67}{96}$

6.

$$E(\sqrt{X^2+Y^2})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}4xye^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$=\int_{0}^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_{0}^{+\infty}r\cdot4r^2\cdot e^{-r^2}\cdot rdr=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

7. $E(X)=\frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2\le1}xdxdy=0$；　$E(Y)=\frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2\le1}ydxdy=0$

$$E(X^2)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} x^2dxdy=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^1 r^3dr=1/4$$；

$$E(Y^2)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} y^2dxdy=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^1 r^3dr=1/4$$；

$$E(XY)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} xydxdy=0；\quad D(X)=1/4; D(Y)=1/4; \rho_{XY}=0.$$

8. X 表示一周内发生故障的天数，则 X～B(5,0.2)

$$P\{X=0\}=C_5^0(0.2)^0(0.8)^5=0.33；\quad P\{X=1\}=C_5^1(0.2)^1(0.8)^4=0.41；$$

$$P\{X=2\}=C_5^2(0.2)^2(0.8)^3=0.20；\quad P\{X\ge 3\}=1-0.33-0.41-0.20=0.06$$

Y 表示该企业的利润，$Y\sim\begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & -2 \\ 0.33 & 0.41 & 0.20 & 0.06 \end{pmatrix}$

$\therefore E(Y)=5.23$（万元）

数理统计测验题

一、填空题

1. F(1,1);2. 1/2,1/4; 3. H_0真，n-1，t

二、选择题

1. C；2. D； 3. B

三、计算题

1. σ已知，构造$r.v.Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

由$P\{\dfrac{|\overline{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2}\}=1-\alpha=0.95,\alpha=0.05,z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96,$

$$\Rightarrow P\{\overline{X}-1.96\sigma/\sqrt{n}<\mu<\overline{X}+1.96\sigma/\sqrt{n}\}=0.95，$$

因此$\overline{X}$作为μ的近似值，$1.96\sigma/\sqrt{n}\le 0.01\Rightarrow n>96.04.$取$n=97.$

2. （1）$E(X)=\int_0^{\theta}xf(x;\theta)dx=\int_0^{\theta}(\dfrac{6}{\theta^2}x^2-\dfrac{6}{\theta^3}x^3)dx=\dfrac{1}{2}\theta\overset{令}{=}\overline{X},$

$$\Rightarrow\hat{\theta}_M=2\overline{X}$$

（2）$D(X)=E(X-\dfrac{1}{2}\theta)^2=\int_0^{\theta}(x-\dfrac{1}{2}\theta)^2f(x;\theta)dx=\dfrac{1}{20}\theta^2,$

故$D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=D(\dfrac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\dfrac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\dfrac{4}{n^2}\cdot n\cdot\dfrac{1}{20}\theta^2=\dfrac{1}{5n}\theta^2$

3. $X\sim N(\mu,\sigma^2),\mu$未知，构造$\eta=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$

由$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\eta<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha=0.99,\ \alpha=0.01$

由观察数据，$\overline{x}=12.0875,n=16,s^2=0.07605,$

查表$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.995}(15)=4.601,,\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.005}(15)=32.801$，

所以σ^2的置信水平为 0.99 的置信区间为$(15s^2/\chi^2_{0.005}(15),15s^2/\chi^2_{0.995}(15))=(0.03478,0.24794)$

4. 假设检验$H_0:\mu=\mu_0=18;H_1:\mu\ne\mu_0$

构造统计量$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\overset{H_0真}{=}\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

由$P\{|Z|<z_{\alpha/2}\}=1-\alpha,\alpha=0.05,$查表$z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$，

由观测值 $\bar{x}=18,\ z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=0<1.96,$ 从而接受 H_0，即改天灌装合格。

5. 由题 $X \sim N(\mu,12^2), n=15, s=16$

假设检验 $H_0:\sigma=\sigma_0=12; H_1:\sigma\neq\sigma_0$

构造统计量 $\eta=\dfrac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2}\overset{H_0\text{真}}{=}\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$

由 $P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\eta<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha, \alpha=0.05,$

查表 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(14)=5.629,, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(14)=26.119,$

由观测值 $\eta=\dfrac{(n-1)s^2}{{\sigma_0}^2}=\dfrac{14\cdot16^2}{12^2}=24.889$，故接受 H_0，即考试标准差符合要求。

6. $\because \sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}({X_i}^2-2\overline{X}X_i+\overline{X}^2)=\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2-n\overline{X}^2,$

同理 $\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2=\sum_{i=1}^{m}{Y_i}^2-m\overline{Y}^2,$ 又 $E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+E^2(\overline{X})=\sigma^2/n+\mu^2,$

同理 $E(\overline{Y}^2)=\sigma^2/m+\mu^2$。

$$\begin{aligned}
\therefore E(S^2)&=E\left(\frac{1}{m+n-2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2+\sum_{i=1}^{m}Y_i^2-m\overline{Y}^2\right)\right)\\
&=\frac{1}{m+n-2}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)+\sum_{i=1}^{m}E(Y_i^2)-mE(\overline{Y}^2)\right)\\
&=\frac{1}{m+n-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n(\sigma^2/n+\mu^2)+\sum_{i=1}^{m}(\sigma^2+\mu^2)-m(\sigma^2/m+\mu^2)\right)\\
&=\sigma^2
\end{aligned}$$

故 S^2 是 σ^2 的无偏估计量。