概率统计——习题四解答

4.1 （1）$\alpha=\frac{2}{9}$，$\beta=\frac{1}{9}$；　　　（2）$Y=X^2\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$.

（3）$U=\max\{X,Y\}\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.25 & 0.75\end{pmatrix}$；$V=\min\{X,Y\}\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.75 & 0.25\end{pmatrix}$

4.2 由于X_1X_4，$X_2X_3\overset{iid}{\sim}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.64 & 0.36\end{pmatrix}$，故

$$\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{vmatrix}=X_1X_4-X_2X_3\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.2304 & 0.5392 & 0.2304\end{pmatrix}.$$

4.3 计算得

P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
X	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin X$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{X^2}{\pi^2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$\cos X$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

故有：$\sin X\sim\begin{pmatrix}-1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16}\end{pmatrix}$；

$\frac{X^2}{\pi^2}\sim\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{8} & \frac{5}{16} & \frac{9}{16}\end{pmatrix}$；　　　$\cos X\sim\begin{pmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\ \frac{9}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$

4.4 $P\{Z=k\}=P\{X+Y=k\}=\sum_{l=0}^{k}P\{X=l,\quad Y=k-l\}=\sum_{l=0}^{k}P\{X=l\}P\{Y=k-l\}$

$$=\sum_{l=0}^{k}C_{n_1}^{l}p^{l}(1-p)^{n_1-l}C_{n_2}^{k-l}p^{k-l}(1-p)^{n_2-(k-l)}=C_{n_1+n_2}^{k}p^{k}(1-p)^{n_1+n_2-k},$$

可见 $Z=X+Y\sim B(n_1+n_2,\quad p)$。

4.5 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{8}, & 0\le x<1\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2\\ \frac{7}{8}, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$

4.6 (1)若 x<0,则 $\{0\le X\le x\}$ 是不可能事件，$F(x)=P\{0\le X\le x\}=P\{\phi\}=0$

（2）若 $0\le x\le 2$，$P\{0\le X\le x\}=kx$；当 x=2 时，$P\{0\le X\le 2\}=2k=1$

k=1/2;所以 $F(x)=P\{0\le X\le x\}=\frac{1}{2}x$

(3)若 x>2,则 $\{0\le X\le x\}$ 是必然事件，$F(x)=1$

因此 $F(x)=P\{0\le X\le x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}x, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

4.7 （1）$\because 1=\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-|x|}dx=2A\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x}dx=2A,\quad \therefore A=1/2$；

（2）$\because 1=\int_{0}^{\infty}\frac{Ax}{(1+x)^4}dx=A\int_{0}^{\infty}(1+x)^{-3}dx-A\int_{0}^{\infty}(1+x)^{-4}dx=A/6,$.

$\therefore A=6$

4.8 （1）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2/2, & 0\le x<1,\\ 2x-\frac{x^2}{2}-1, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2;\end{cases}$

（2）$P\{X<0.5\}=F(0.5)=0.125$；$P\{X>1.3\}=1-F(1.3)=0.245$；

$P\{0.2<X<1.2\}=F(1.2)-F(0.2)=0.66.$

4.9 （1）$F(1)=A\cdot 1^2=1, A=1$

（2）$P\{0.3<X<0.7\}=F(0.7)-F(0.3)=0.7^2-0.3^2=0.4$

（3）$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}2x, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$