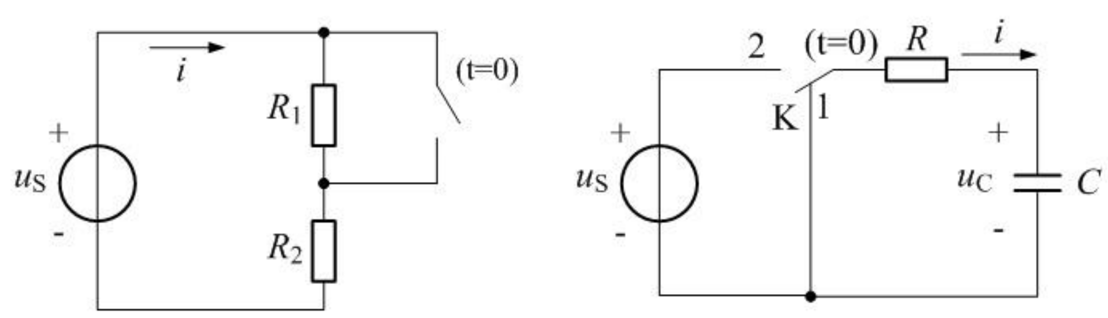
第四章 一阶电路和二阶电路的时域分析（简介）

4.1 动态电路的方程及其初始条件

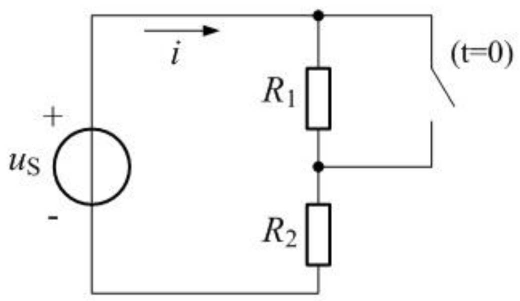
1. 动态电路

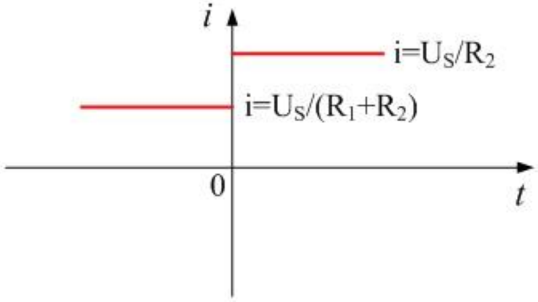
含有动态元件**电容和电感**的电路称动态电路。



后两图为动态电路

电阻电路：

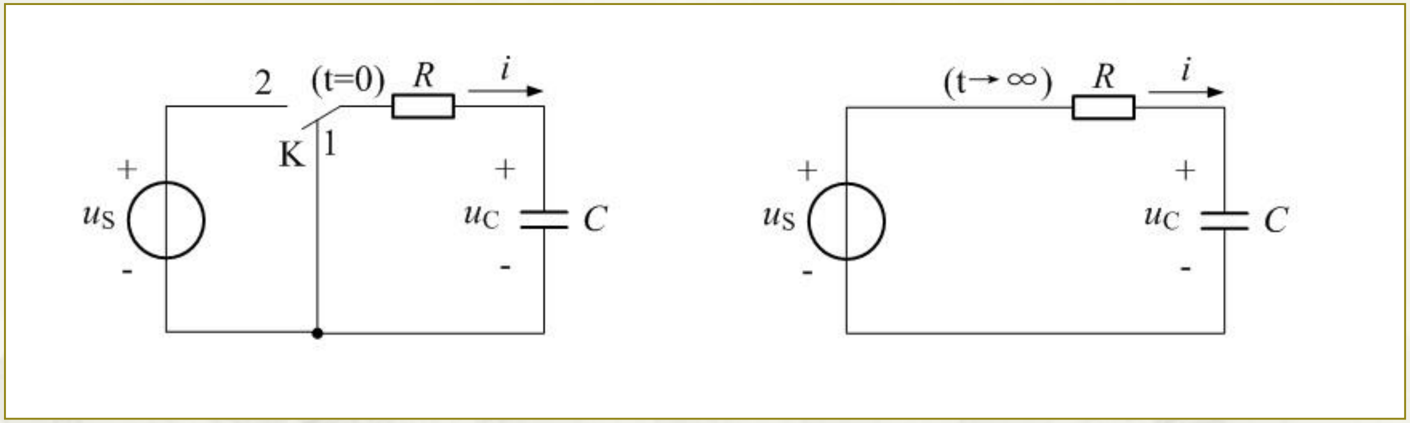




过渡期为零

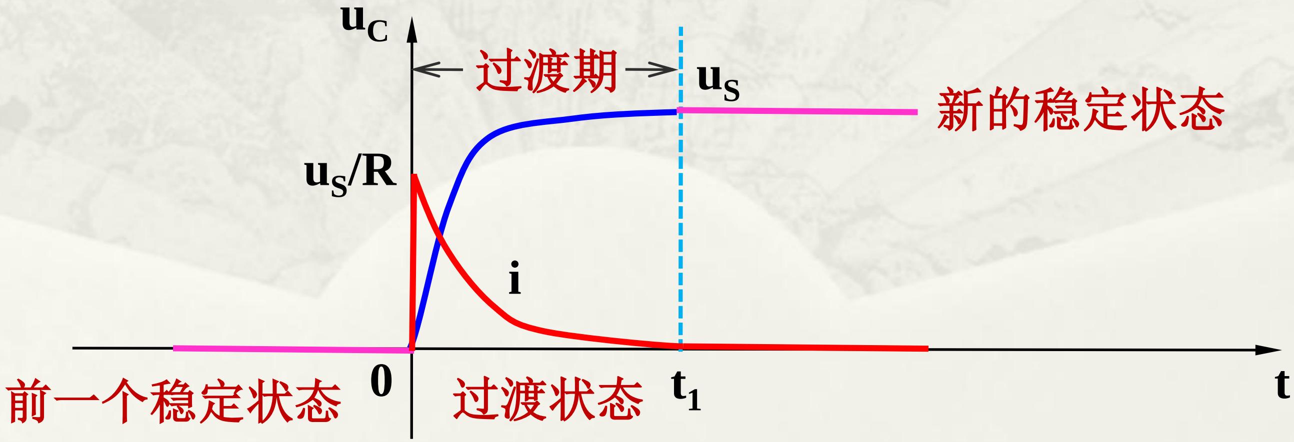
对于纯电阻电路，当电路结构发生变化时，电阻上的电流随电压成比例变化，不存在过渡过程。

电容电路:

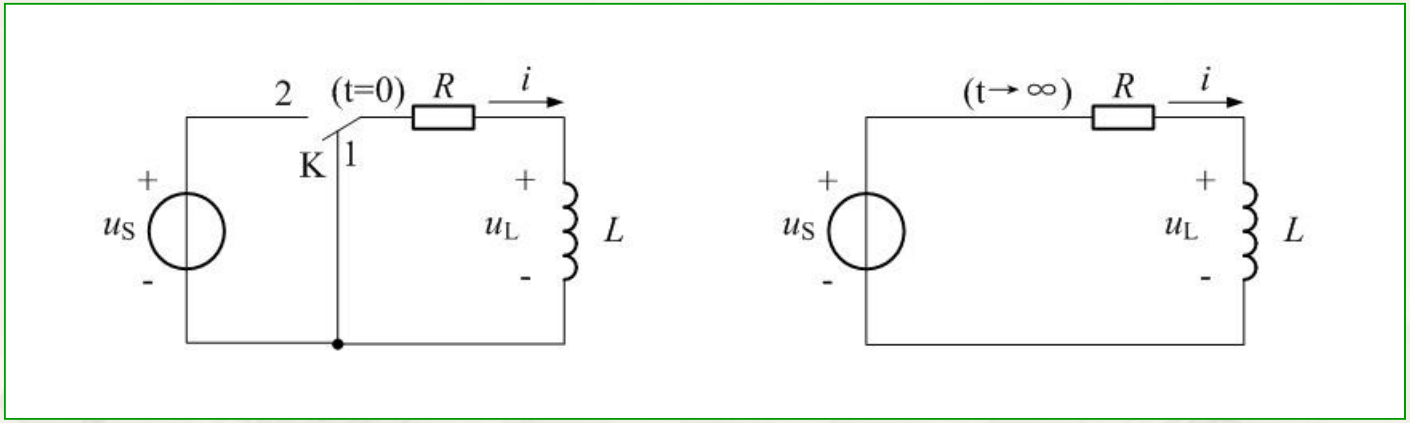


k未动作前，电路处于稳定状态：i=0,U_C=0

k接通电源后很长时间，电容充电完毕，电路达到新的稳定状态： i=0,U_C=U_S

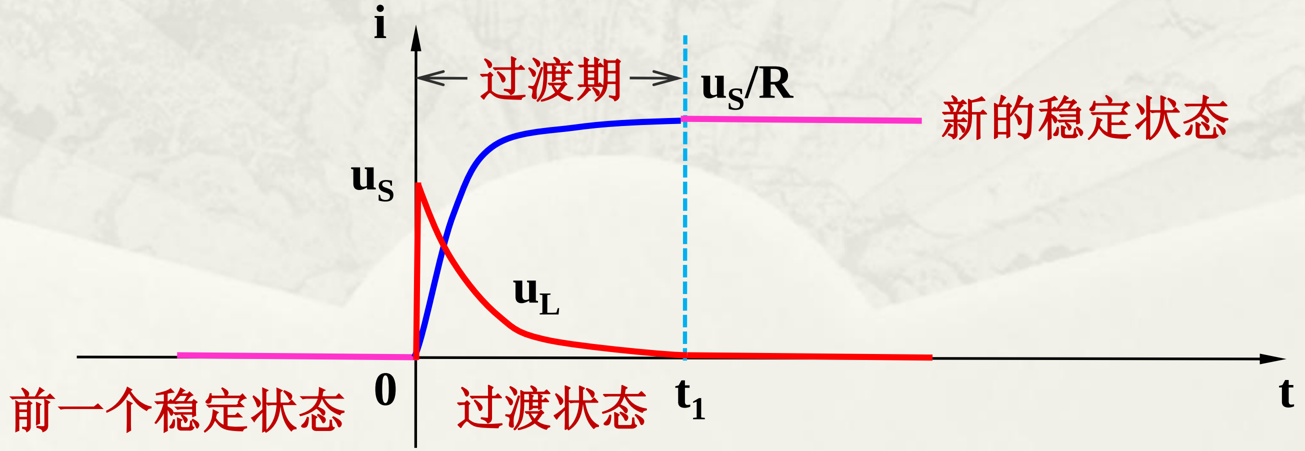


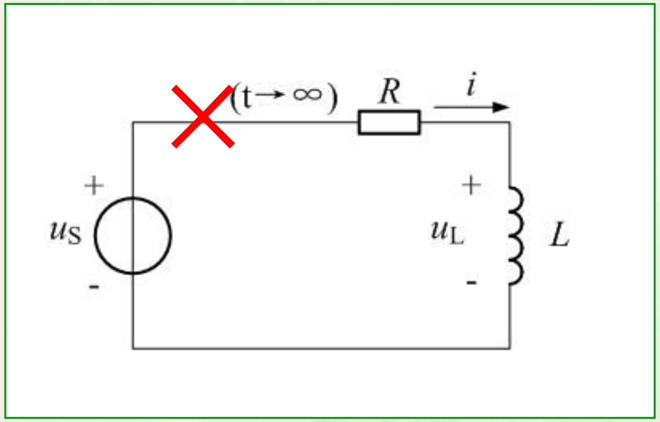
电感电路:



k未动作前，电路处于稳定状态：$i=0, u_L=0$

k接通电源后很长时间，电路达到新的稳定状态,电感视为短路： $u_L=0, i=u_S/R$





电路到达稳态时， $u_L=0, i=u_S/R$

若将K断开，断开之后有：$i=0, u_L=\infty$

注意：工程实际中在切断电容或电感电路时会出现过电压和过电流现象。

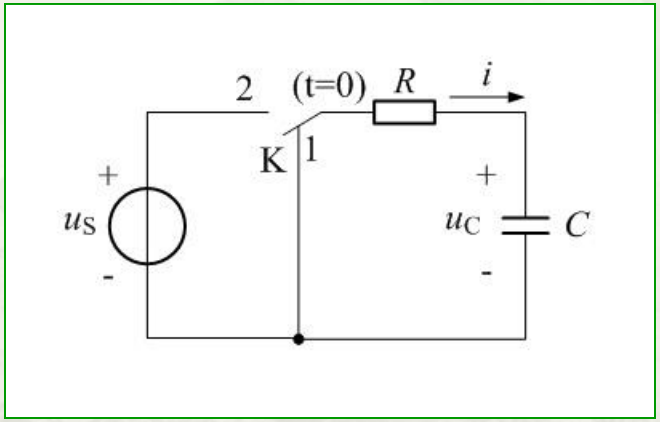
综合以上**RC**、**RL**的分析，可看出电感或电容在从电路中接入或断开时，会存在过渡过程，该过渡过程有时也称为电路的暂态过程。

那么，为什么会有过渡过程的存在？

换路：电路结构或状态的改变。如：支路接入或断开、电路参数发生变化等。

▲过渡过程产生的原因

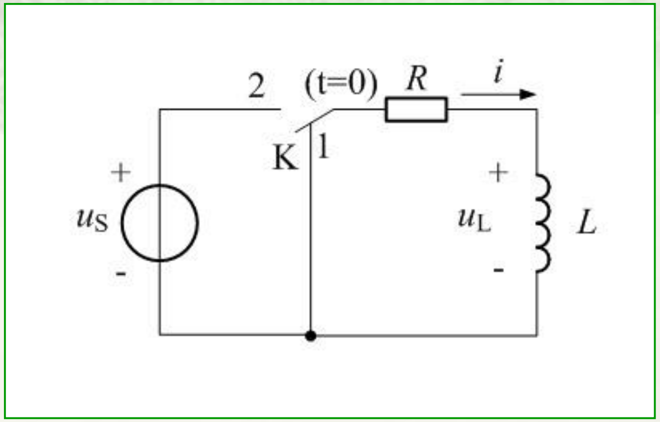
电路内部含有储能元件 *L*、*C*，电路在换路时能量发生变化，而能量的储存和释放都需要一定的时间来完成。



对于电容电路，由于电容为储能元件，假设初始储能为0，它储存的能量为电场能量，其大小为：

$$W_C = \int_0^t uidt = \frac{1}{2}Cu^2$$

因为能量的存储和释放需要一个过程，故电容电路存在过渡过程。



对于电感电路，由于电感为储能元件，假设初始储能为0，它储存的能量为磁场能量，其大小为：

$$W_L = \int_0^t uidt = \frac{1}{2}Li^2$$

故电感的电路也存在过渡过程。

▲研究过渡过程的意义

过渡过程是一种自然现象， 对它的研究很重要。过渡过程的存在有利有弊。有利的方面，如电子技术中常用它来产生各种特定的波形或改善波形；不利的方面，如在暂态过程发生的瞬间，可能出现过压或过流，致使电气设备损坏，必须采取防范措施。

如何研究电路的过渡过程?

2.动态电路的方程

相关预备知识:微分方程的解

微分方程的解：如果把某个函数代入微分方程中，能使该方程成为恒等式，则称此函数为微分方程的解。

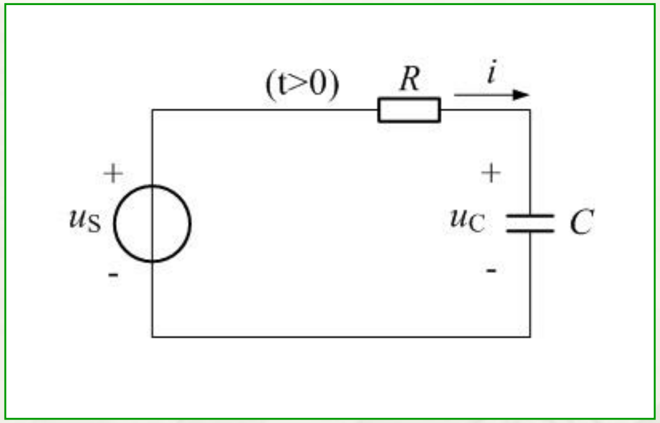
微分方程的通解：如果微分方程的解中包含有任意常数，且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解称为微分方程的通解。

微分方程的特解：微分方程的解中不包含任意常数的解称为微分方程的特解。

RC电路的方程：

应用KVL和电容的VCR得：

$$\begin{cases} Ri + u_C = u_S(t) \\ i = C\dfrac{du_C}{dt} \end{cases}$$



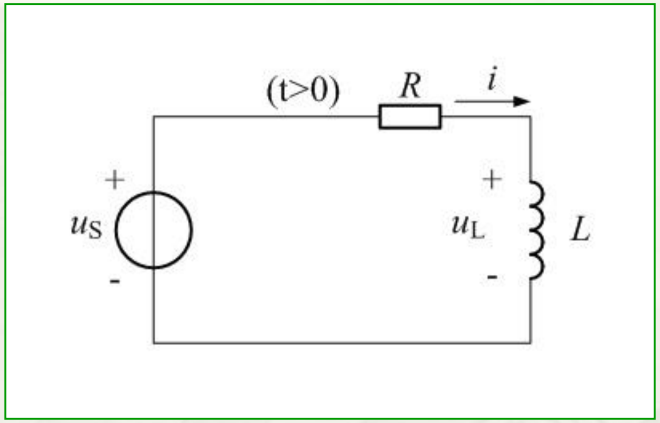
$$\Rightarrow \quad RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_S(t)$$

若以电流为变量：$Ri + \dfrac{1}{C}\int i\mathrm{d}t = u_S(t) \quad \Rightarrow \quad R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i}{C} = \dfrac{\mathrm{d}u_S(t)}{\mathrm{d}t}$

KCL、KVL对于直流电路、交流电路、动态电路，在任何时刻均成立！

RL电路的方程：

应用KVL和电感的VCR得：



$$\begin{cases} Ri + u_L = u_S(t) \\ u_L = L\dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

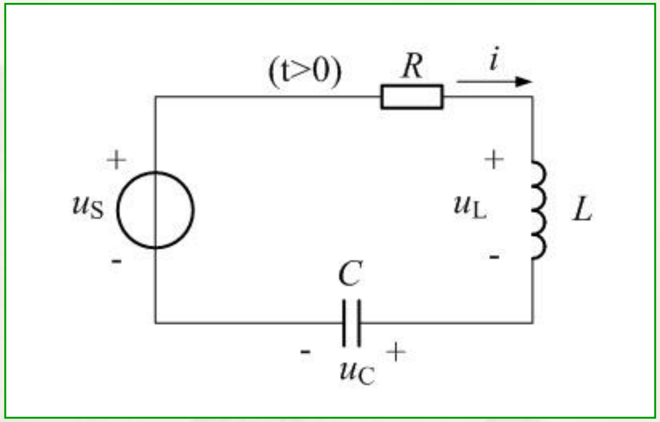
$$\Rightarrow \quad Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = u_S(t)$$

若电感电压为变量： $\dfrac{R}{L}\int u_L \mathrm{d}t + u_L = u_S(t) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{R}{L}u_L + \dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}u_S(t)}{\mathrm{d}t}$

含有一个动态元件电容或电感的线性电路，其电路方程为一阶线性常微分方程，称一阶电路。

RLC电路的方程:

应用KVL和元件的VCR得:



$$\begin{cases} Ri + u_L + u_C = u_S(t) \\ i = C\dfrac{du_C}{dt} \\ u_L = L\dfrac{di}{dt} \end{cases} \quad \Rightarrow u_L = L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \quad LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u_S(t)$$

含有二个动态元件的线性电路，其电路方程为二阶线性常微分方程，称二阶电路。

所得结论：

① 描述动态电路的电路方程为微分方程；

② 动态电路方程的阶数通常等于电路中动态元件的个数。

一阶电路：一阶电路中只有一个动态元件,描述电路的方程是一阶线性微分方程。

$$a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = e(t) \qquad t \geq 0$$

二阶电路：二阶电路中有二个动态元件,描述电路的方程是二阶线性微分方程。

$$a_2 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = e(t) \qquad t \geq 0$$

高阶电路：电路中有多个动态元件，描述电路的方程是高阶微分方程。

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = e(t) \qquad t \geq 0$$

▲动态电路的分析方法：

① 根据KVL、KCL和VCR建立微分方程；

② 求解微分方程

时域分析法

本章采用

- 经典法
- 状态变量法
- 卷积积分
- 数值法

复频域分析法

- 拉普拉斯变换法
- 状态变量法
- 付氏变换

工程中高阶微分方程应用计算机辅助分析求解。

▲稳态分析和动态分析的区别

稳态	动态
恒定或周期性激励	任意激励
换路发生很长时间后状态	换路发生后的整个过程
微分方程的特解	微分方程的通解

直流时 $$a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = U_S$$

$$t \Rightarrow \infty \qquad \frac{dx}{dt} = 0 \qquad a_0 x = U_S$$

3.电路的初始条件

① $t=0_+$与$t=0_-$的概念

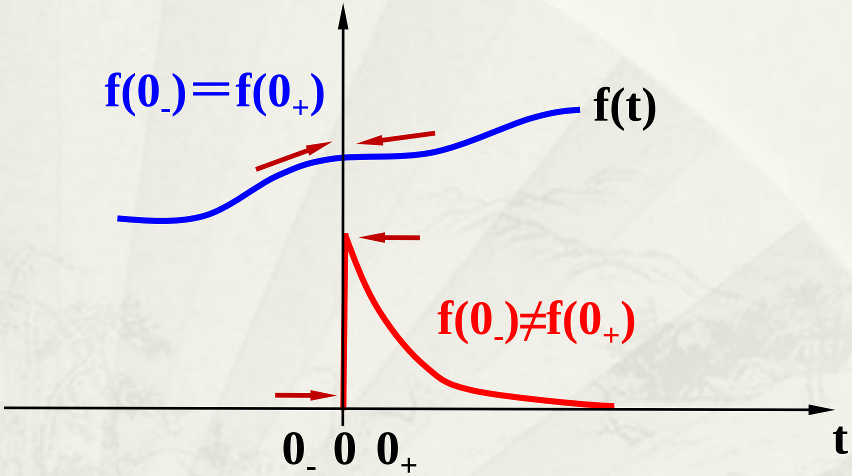
认为换路在t=0时刻进行

0_- 换路前一瞬间

$$f(0_-)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t)$$

0_+ 换路后一瞬间

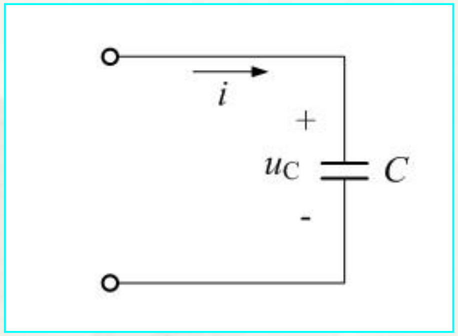
$$f(0_+)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$$



② 电容的初始条件

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0_-} i(t)dt+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(t)dt$$

$$=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(t)dt$$



$t=0_+$ **时刻** $\quad u_C(0_+)=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i(t)\mathrm{d}t$

当i(t)为有限值时 $\quad \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i(t)\mathrm{d}t=0 \quad$ **此时有：**

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)\xrightarrow{q=C\,u_C} q(0_+)=q(0_-)$$

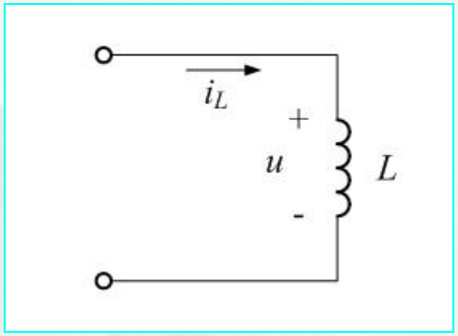
电荷守恒

结论：换路瞬间，若电容电流保持为有限值， 则电容电压（电荷）换路前后保持不变。

③ 电感的初始条件

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(t)dt = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0_-} u(t)dt + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{t} u(t)dt$$

$$= i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{t} u(t)dt$$



$t = 0_+$ 时刻 $\quad i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} u(t)\mathrm{d}t$

当 $i(\mathrm{t})$ 为有限值时 $\quad \frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} u(t)\mathrm{d}t = 0 \quad$ 此时有：

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \xrightarrow{\Psi = Li_L} \Psi(0_+) = \Psi(0_-)$$

磁链守恒

结论：换路瞬间，若电感电压保持为有限值，则电感电流（磁链）换路前后保持不变。

④ 换路定律

$$\begin{cases} q_c(0_+) = q_c(0_-) \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) \end{cases}$$

换路瞬间，若电容电流保持为有限值，则电容电压（电荷）换路前后保持不变。

$$\begin{cases} \psi_L(0_+) = \psi_L(0_-) \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) \end{cases}$$

换路瞬间，若电感电压保持为有限值，则电感电流（磁链）换路前后保持不变。

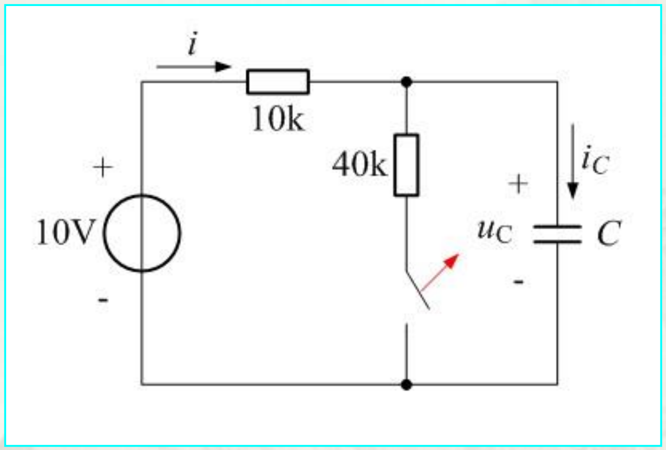
注意:

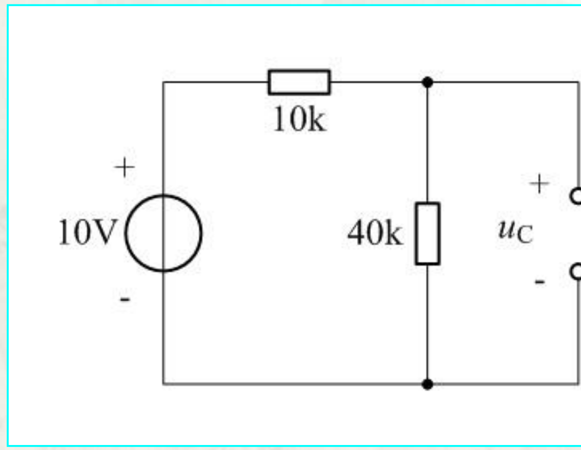
① 电容电流和电感电压为有限值是换路定律成立的条件。

② 换路定律反映了能量不能跃变。

⑤ 电路初始值的确定

【例】求 $i_C(0_+)$





电容开路

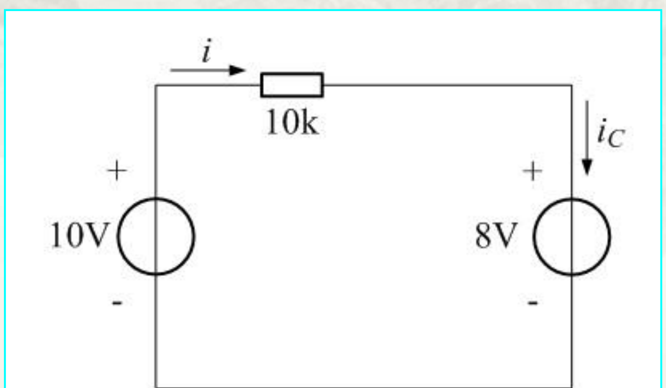
解：

(1) 由0_电路求 $u_C(0_-)$

$u_C(0_-)=8V$

(2)由换路定律

$u_C(0_+) = u_C(0_-)=8V$



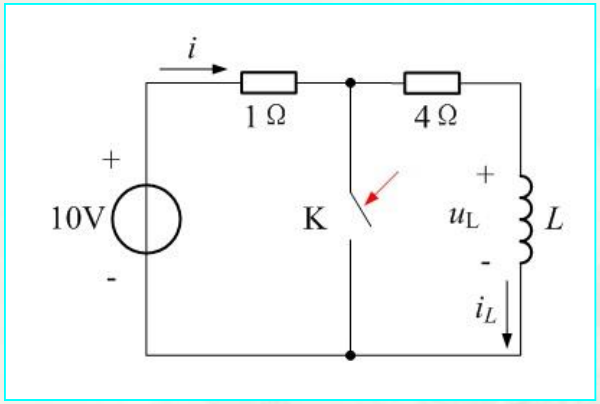
电容用电压源替代

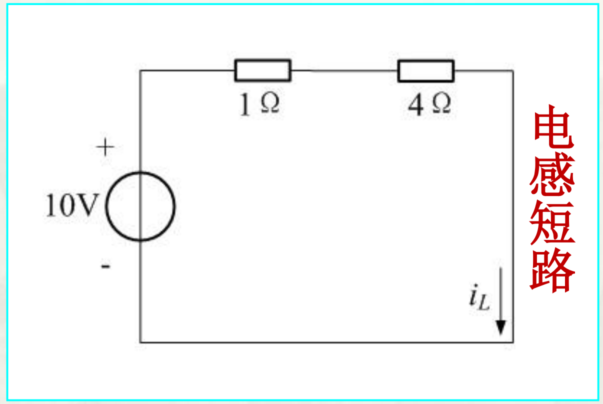
(3) 由0_+等效电路求 $i_C(0_+)$

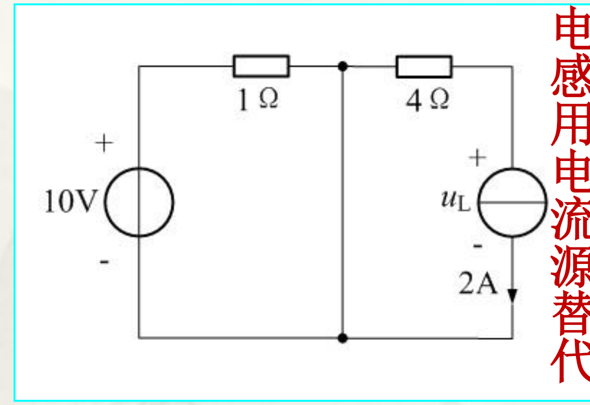
$$i_C(0_+) = \frac{10-8}{10} = 0.2\text{mA}$$

注意：$i_C(0_-) = 0 \neq i_C(0_+)$

【例】$t = 0$时闭合开关k ,求 $u_L(0_+)$







解：（1）先求$i_L(0_-)$

$$i_L(0_-) = \frac{10}{1+4} = 2A$$

（2）应用换路定律:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2A$$

（3）由0_+等效电路求 $u_L(0_+)$

$$u_L(0_+) = -2 \times 4 = -8V$$

注意： $u_L(0_-) \neq u_L(0_+)$

▲求初始值的步骤:

1.由换路前电路（稳定状态）求$u_C(0_-)$和$i_L(0_-)$；

2.由换路定律得 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$。

3.画0_+等效电路。

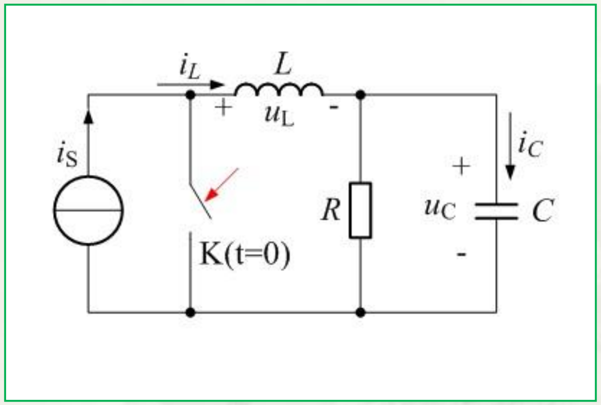
a. 换路后的电路

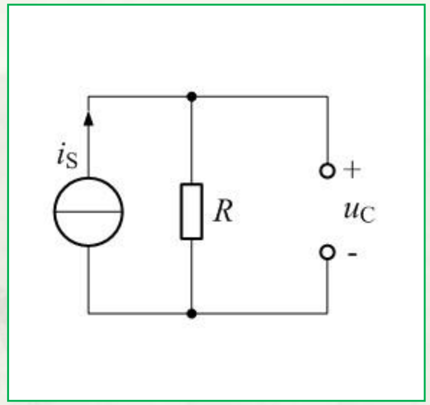
b. 电容（电感）用电压源（电流源）替代。

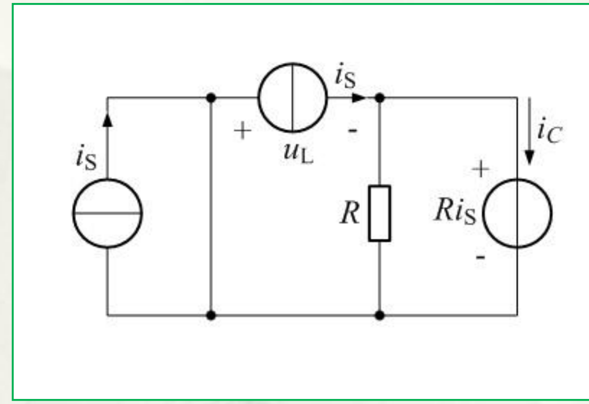
（取0_+时刻值，方向与原假定的电容电压、电感电流方向相同）。

4.由0_+电路求所需各变量的0_+值。

【例】求 $i_C(0_+)$ ， $u_L(0_+)$







解：由0_电路得：

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_S$$

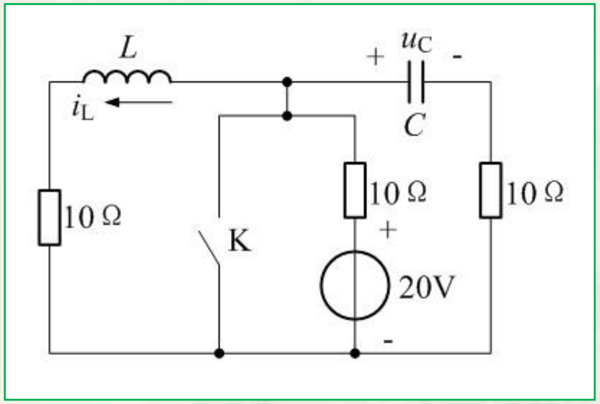
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = Ri_S$$

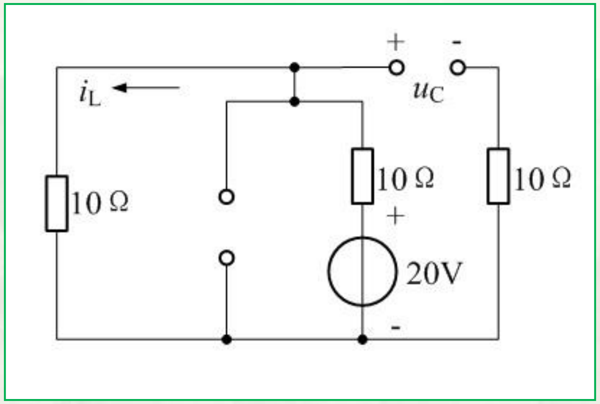
由0_+电路得：

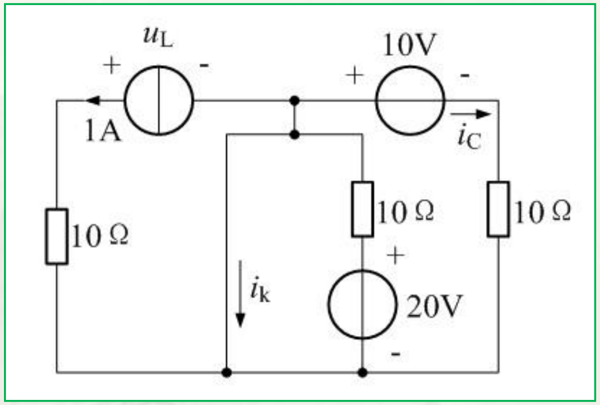
$$i_C(0_+) = i_s - \frac{Ri_S}{R} = 0$$

$$u_L(0_+) = -Ri_S$$

【例】求k闭合瞬间流过它的电流值







解：（1）确定0_值

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{20}{20} = 1A$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10V$$

（2）给出0_+等效电路

$$i_k(0_+) = \frac{20}{10} + \frac{10}{10} - 1 = 2A$$

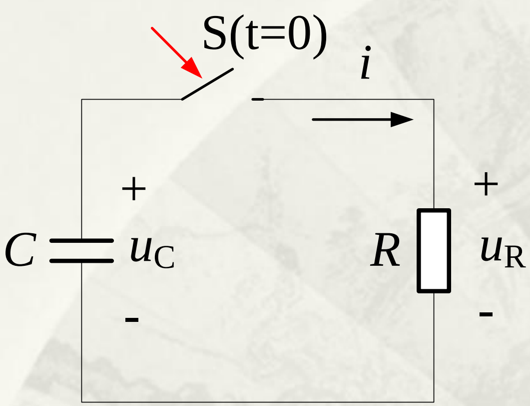
$$u_L(0_+) = i_L(0_+) \times 10 = 10V$$

$$i_C(0_+) = -u_C(0_+) / 10 = -1A$$

4.2 一阶电路的零输入响应

零输入响应 → **换路后外加激励为零，仅由动态元件初始储能产生的电压和电流。**

1.RC电路的零输入响应



已知 $u_C(0_-)=U_0$ $\quad -u_R+u_C=0 \quad i=-C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

$u_R=Ri$

则 $$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 \\ u_C(0_+)=U_0 \end{cases}$$

特征方程 $RCp+1=0$ **特征根** $p=-\dfrac{1}{RC}$

则 $u_C=Ae^{pt}=Ae^{-\frac{1}{RC}t}$ **代入初始值** $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$ → $A=U_0$

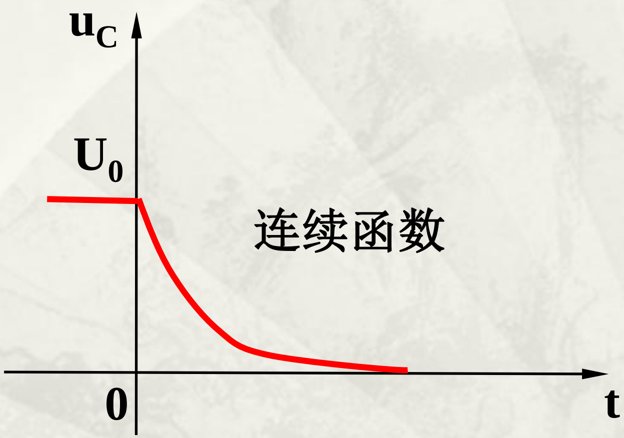
$$u_c=U_0e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t\geq 0$$

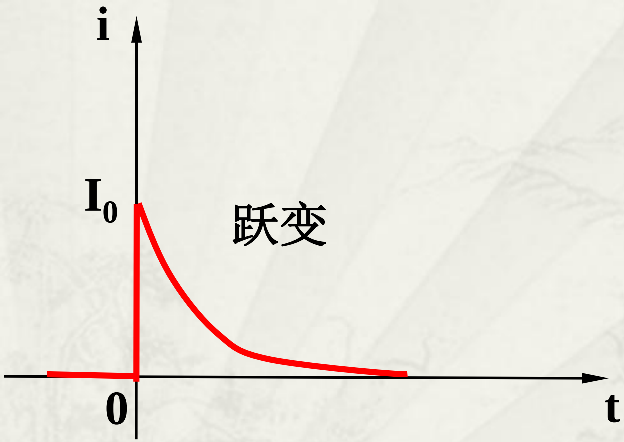
$$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0$$

$$i = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0$$

以上表明:

① 电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数;





② 响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与RC有关;

令 $\tau = RC$ ， 称τ为一阶电路的时间常数

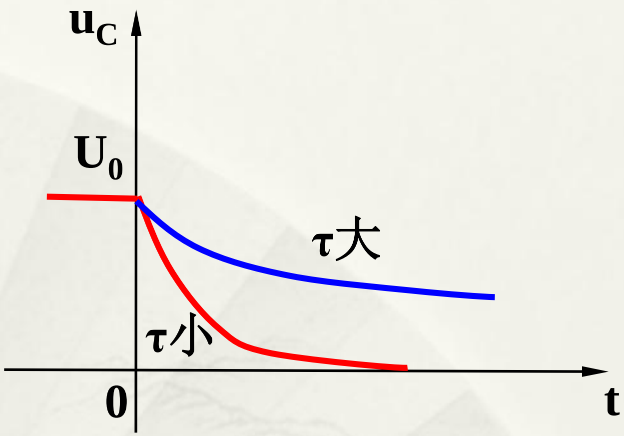
τ = RC = 欧·法 = 欧·库/伏 = 欧·安秒/伏 = 秒

$\tau = RC \qquad p = -\dfrac{1}{RC}$

时间常数τ的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ大→过渡过程时间长

τ小→过渡过程时间短



物理含义 → 电压初值一定：

C 大（R一定） $W=Cu^2/2$ 储能大

R 大（ C一定） $i=u/R$ 放电电流小

→ 放电时间长

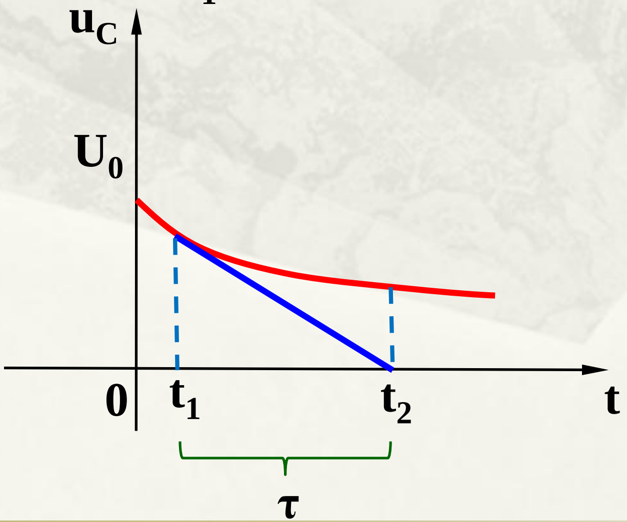
t	**0**	τ	2τ	3τ	5τ
$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	U_0	$U_0 e^{-1}$	$U_0 e^{-2}$	$U_0 e^{-3}$	$U_0 e^{-5}$
u_C小数表示	U_0	$0.368U_0$	$0.135U_0$	$0.05U_0$	$0.007U_0$

注意：

a. τ：电容电压衰减到原来电压36.8%所需的时间。工程上认为，经过 3τ—5τ，过渡过程结束。

b. 时间常数τ的几何意义：　$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

t_1时刻曲线的斜率等于

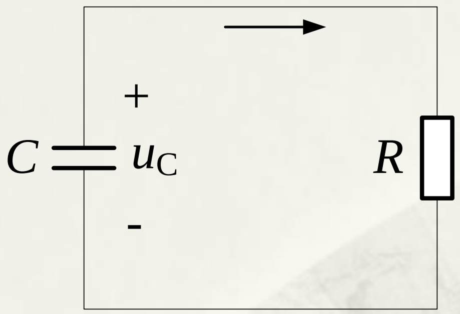


$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t_1} = -\frac{U_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_{t_1} = -\frac{1}{\tau} u_C(t_1) = \frac{u_C(t_1) - 0}{t_1 - t_2}$$

$\tau = t_2 - t_1$ ➡ 次切距的长度

$$u_C(t_2) = 0.368 u_C(t_1)$$

③ 能量关系 → 电容不断释放能量被电阻吸收, 直到全部消耗完毕



设 $u_C(0_+)=U_0$

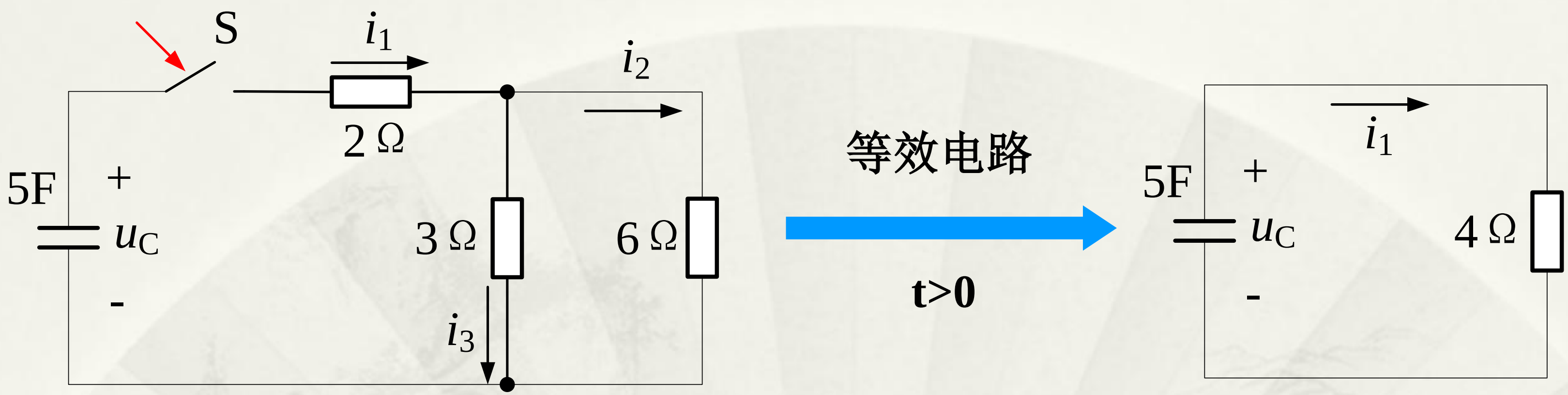
电容放出能量： $\frac{1}{2}CU_0^2$

电阻吸收（消耗）能量：

$$W_R=\int_0^{\infty} i^2 R\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\left(\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R\mathrm{d}t=\frac{U_0^2}{R}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{U_0^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right)\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2}CU_0^2$$

【例】图示电路中的电容原充有24V电压，求k闭合后，电容电压和各支路电流随时间变化的规律。



解：这是一个求一阶*RC*零输入响应问题，有：

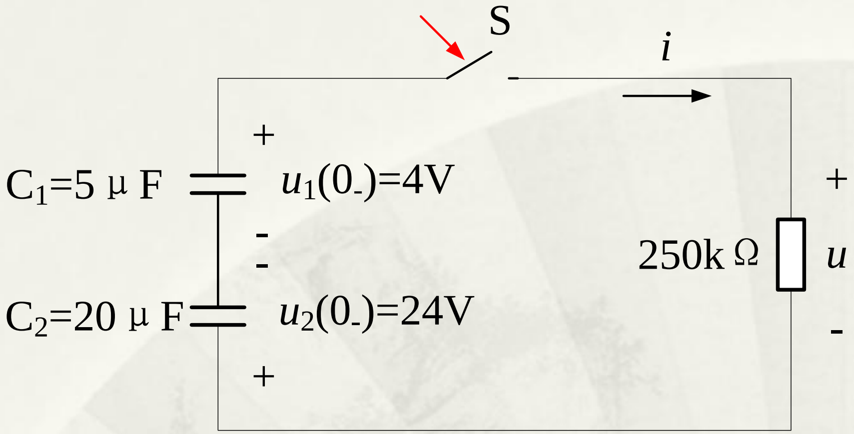
$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0 \qquad U_0 = 24\ \text{V} \qquad \tau = RC = 5 \times 4 = 20\ \text{s}$$

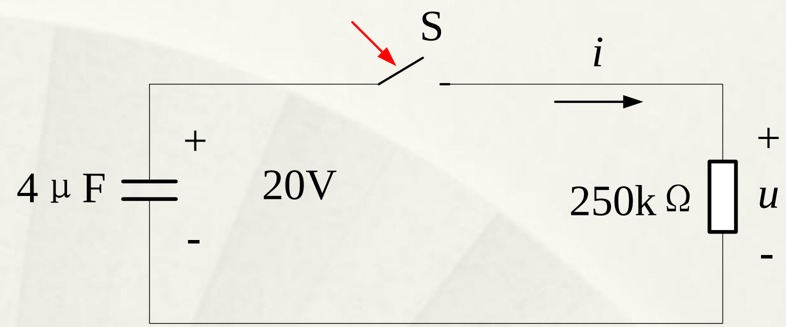
$$u_C = 24 e^{-\frac{t}{20}} \quad t \geq 0 \qquad i_1 = u_C/4 = 6\,e^{-\frac{t}{20}}\text{A}$$

分流得：

$$i_2 = \frac{2}{3} i_1 = 4 e^{-\frac{t}{20}}\text{A} \qquad i_3 = \frac{1}{3} i_1 = 2 e^{-\frac{t}{20}}\text{A}$$

【例】求:(1)图示电路k闭合后各元件的电压和电流随时间变化的规律，(2）电容的初始储能和最终时刻的储能及电阻的耗能。





解：这是一个求一阶RC零输入响应问题，有：

$$C=\frac{C_2C_1}{C_1+C_2}=4\mu\mathrm{F}\quad u(0_+)=u(0_-)=20V\quad \tau=RC=250\times 4\times 10^{-3}=1\ \mathrm{s}$$

$$i=\frac{u}{250\times 10^3}=80e^{-t}\mu\mathrm{A}\qquad u=20e^{-t}\qquad t\geq 0$$

$$u_1=u_1(0)+\frac{1}{C_1}\int_0^t i(\xi)d\xi=-4-\frac{1}{5}\int_0^t 80e^{-t}\mathrm{d}t=(16e^{-t}-20)\mathrm{V}$$

$$u_2=u_2(0)+\frac{1}{C_2}\int_0^t i(\xi)\mathrm{d}\xi=24+\frac{1}{20}\int_0^t 80e^{-t}\mathrm{d}t=(4e^{-t}+20)\mathrm{V}$$

初始储能

$$w_1 = \frac{1}{2}(5 \times 10^{-6} \times 16) = 40\mu\text{J}$$

$$w_2 = \frac{1}{2}(20 \times 10^{-6} \times 24^2) = 5760\mu\text{J}$$

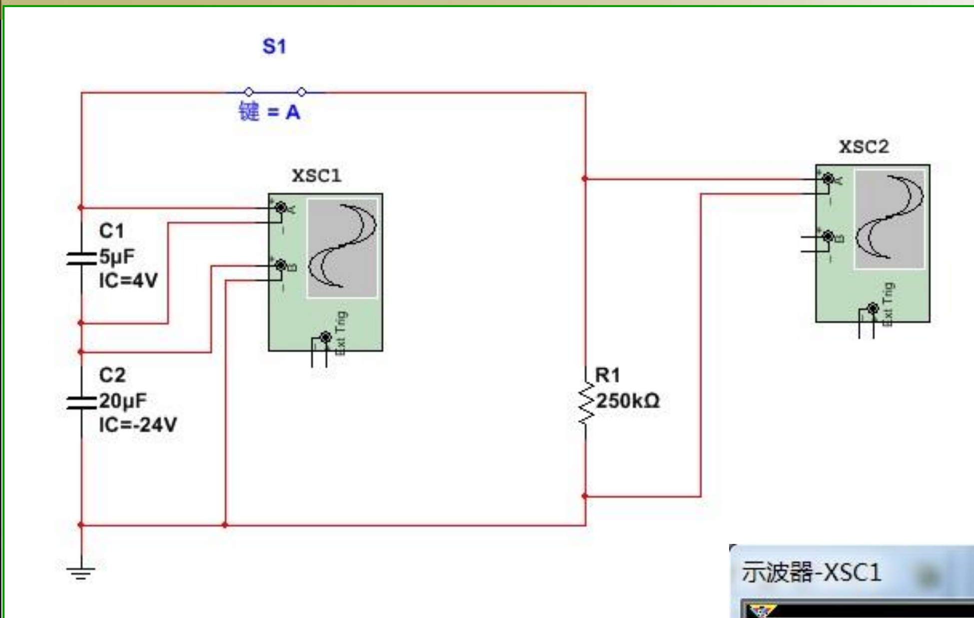
最终储能

$$w = w_1 + w_1 = \frac{1}{2}(5 + 20) \times 10^{-6} \times 20^2 = 5000\mu\text{J}$$

电阻耗能

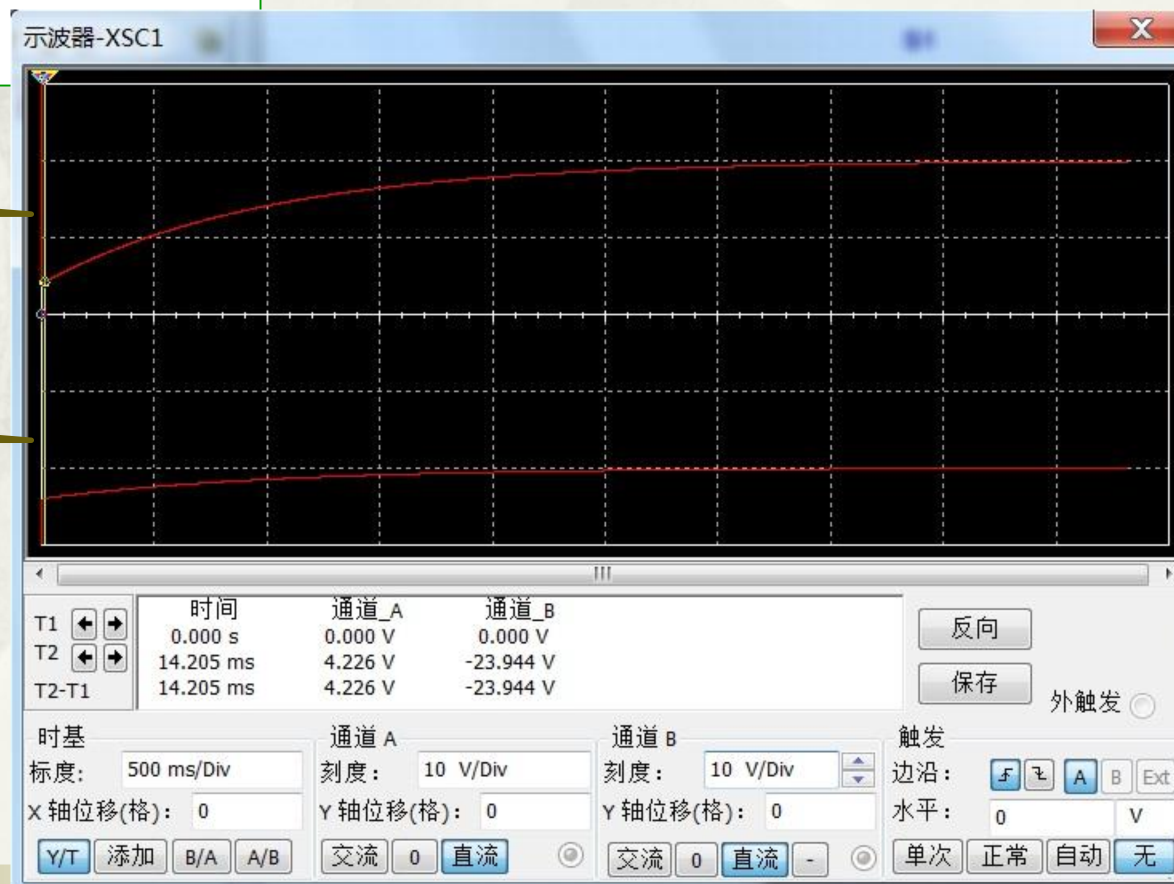
$$w_\text{R} = \int_0^\infty Ri^2 \text{d}t = \int_0^t 250 \times 10^3 \times (80e^{-t})^2 \text{d}t$$

$$= 5800 - 5000 = 800\mu\text{J}$$

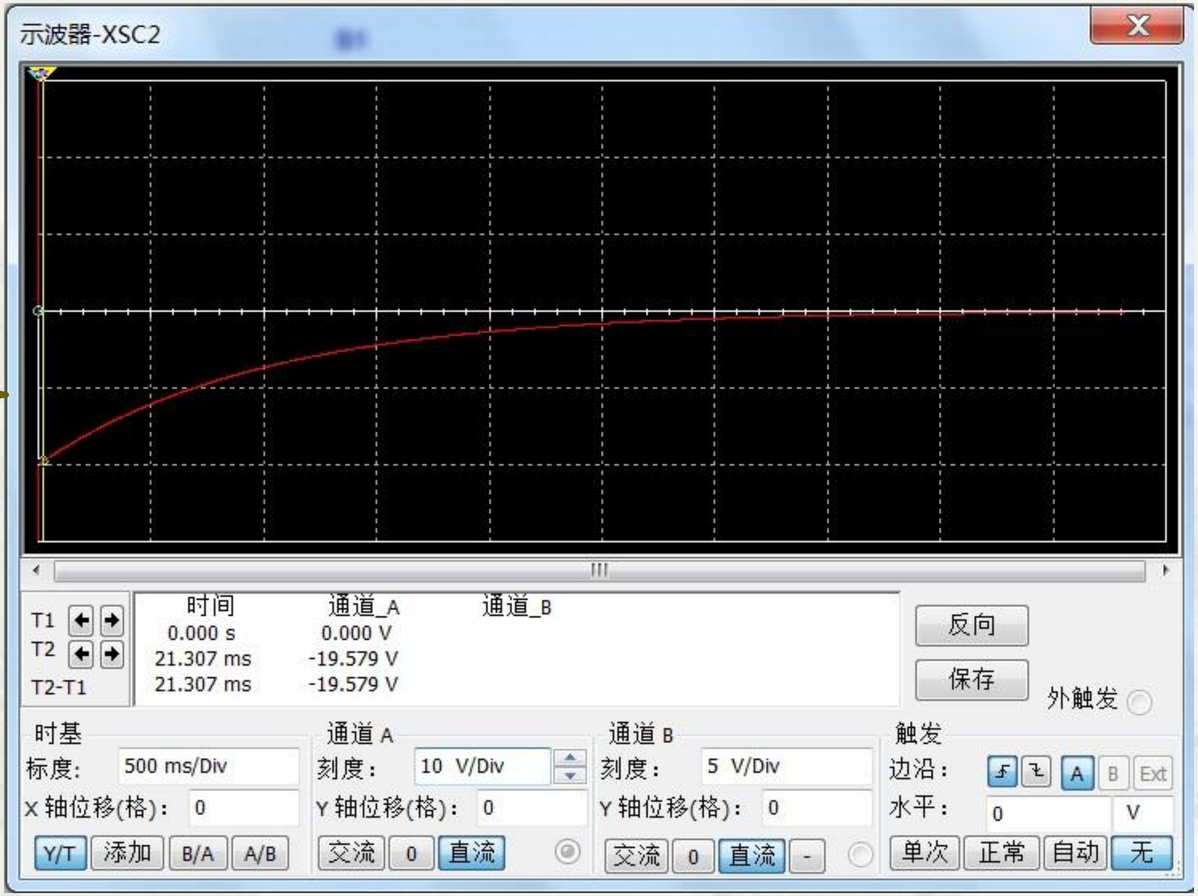

S1
键 = A
XSC1
XSC2
C1
5μF
IC=4V
C2
20μF
IC=-24V
R1
250kΩ
Ext Trig

u_1波形

u_2波形

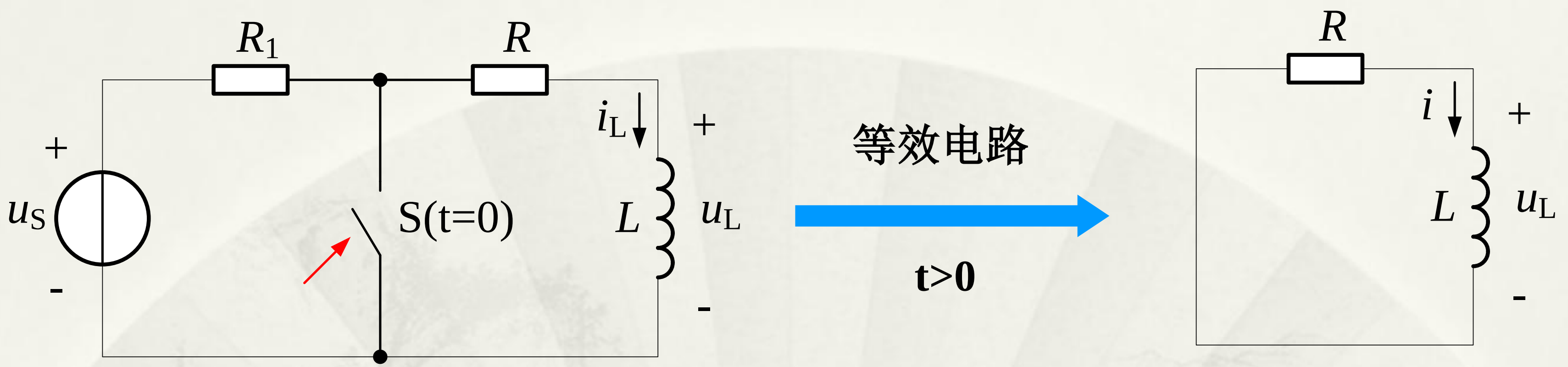

示波器-XSC1
T1
T2
T2-T1
时间
通道_A
通道_B
0.000 s
0.000 V
0.000 V
14.205 ms
4.226 V
-23.944 V
14.205 ms
4.226 V
-23.944 V
反向
保存
外触发
时基
标度:
500 ms/Div
X 轴位移(格):
0
Y/T
添加
B/A
A/B
通道 A
刻度:
10 V/Div
Y 轴位移(格):
0
交流
0
直流
通道 B
刻度:
10 V/Div
Y 轴位移(格):
0
交流
0
直流
-
触发
边沿:
A
B
Ext
水平:
0
V
单次
正常
自动
无

电阻电压u波形



示波器-XSC2
T1
T2
T2-T1
时间
0.000 s
21.307 ms
21.307 ms
通道_A
0.000 V
-19.579 V
-19.579 V
通道_B
反向
保存
外触发
时基
标度: 500 ms/Div
X 轴位移(格): 0
Y/T 添加 B/A A/B
通道 A
刻度: 10 V/Div
Y 轴位移(格): 0
交流 0 直流
通道 B
刻度: 5 V/Div
Y 轴位移(格): 0
交流 0 直流 -
触发
边沿:
A B Ext
水平: 0 V
单次 正常 自动 无

2. *RL*电路的零输入响应



$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_1 + R} = I_0 \qquad L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + Ri_L = 0 \qquad t \geq 0$$

特征方程 $Lp+R=0$　　特征根 $p = -\frac{R}{L}$　　$i_L(t) = Ae^{pt}$

代入初始值 → A= $i_L(0_+)= I_0$

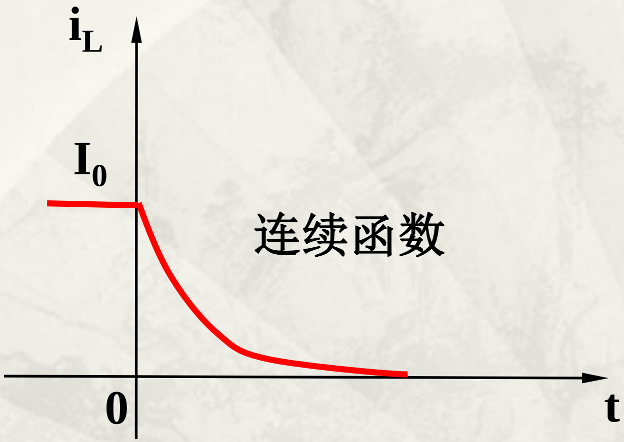
→ $i_L(t) = I_0 e^{pt} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad t \geq 0$　　$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -RI_0 e^{-\frac{t}{L/R}}$

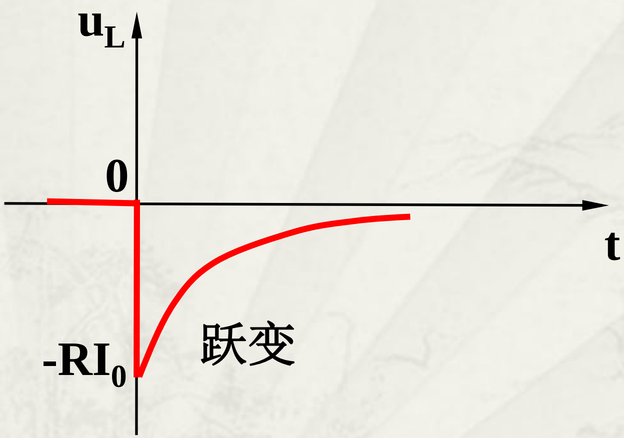
$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \qquad t \geq 0$$

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -RI_0 e^{-\frac{t}{L/R}}$$

以上表明:

① 电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数;





② 响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与L/R有关;

令**τ=L/R**称为一阶RL电路时间常数

τ = L/R = 亨/欧 = 韦/（安·欧） = 伏·秒/（安·欧）= 秒

时间常数τ的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ大→过渡过程时间长

τ小→过渡过程时间短

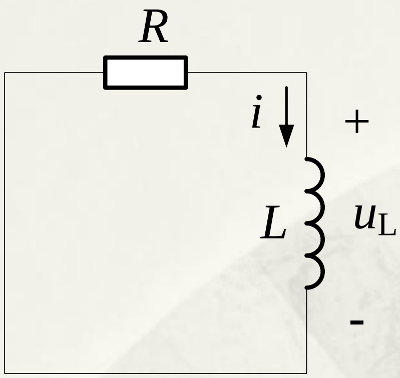
物理含义 → 电流初值$i_L(0)$一定：

L大　$W=Li_L^2/2$　起始能量大

R小　$P=Ri^2$　放电过程消耗能量小

放电慢，τ大

③ 能量关系 → 电感不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕。



设 $i_L(0_+)=I_0$

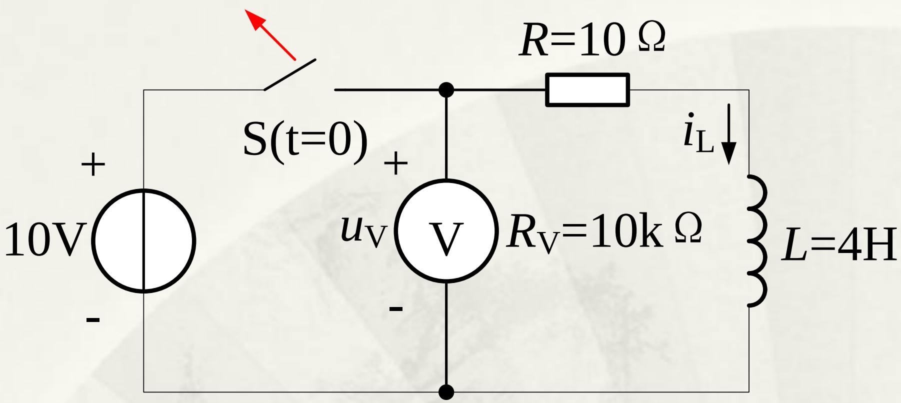
电感放出能量： → $\frac{1}{2}LI_0^2$

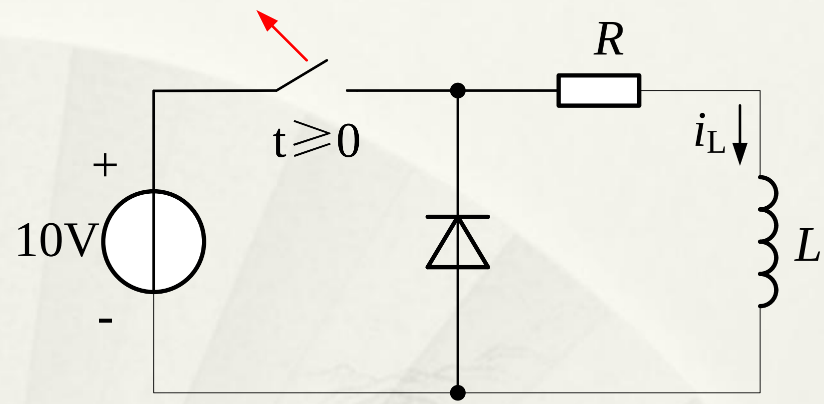
电阻吸收（消耗）能量： →

$$W_R=\int_0^{\infty} i^2R\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}(I_0e^{-\frac{t}{L/R}})^2R\mathrm{d}t=I_0^2R\int_0^{\infty}e^{-\frac{2t}{L/R}}\mathrm{d}t$$

$$=I_0^2R(-\frac{L/R}{2}e^{-\frac{2t}{RC}})\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2}LI_0^2$$

【例】t=0时,打开开关S，求u_V（电压表量程：50）





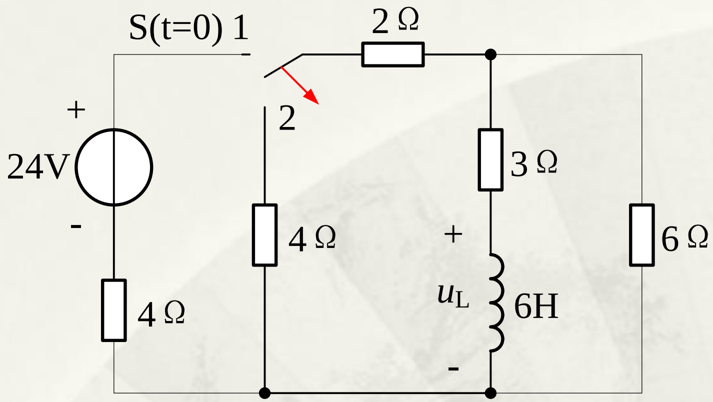
解： $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\ \text{A}$ $\qquad i_L = e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0$

$$\tau = \frac{L}{R + R_V} = \frac{4}{10000} = 4 \times 10^{-4} s$$

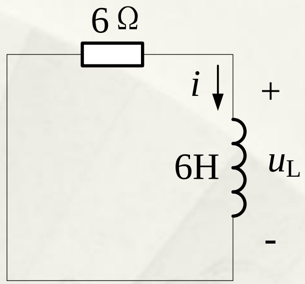
$$u_V = -R_V i_L = -10000e^{-2500t} \qquad t \geq 0$$

$u_V(0_+)$=— 10000V 造成电压表损坏

【例】t=0时,开关S由1→2，求电感电压和电流及开关两端电压u_{12}。



$t>0$



解： $i_L(0_+)=i_L(0_-)=\dfrac{24}{4+2+3//6}\times\dfrac{6}{3+6}=2\text{A}$

$$R=3+(2+4)//6=6\Omega \qquad \tau=\frac{L}{R}=\frac{6}{6}=1\text{s}$$

$$i_L=2e^{-t}\text{A} \qquad u_L=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-12e^{-t}\text{V} \qquad t\geq 0$$

$$u_{12}=24+4\times\frac{i_L}{2}=24+4e^{-t}\text{V}$$

小结:

① 一阶电路的零输入响应是由储能元件的初值引起的响应, 都是由初始值衰减为零的指数衰减函数。

$$y(t) = y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

*RC*电路　$u_C(0_+) = u_C(0_-)$　$\tau = RC$

*RL*电路　$i_L(0_+) = i_L(0_-)$　$\tau = L/R$

其中*R*为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻。

② 衰减快慢取决于时间常数τ

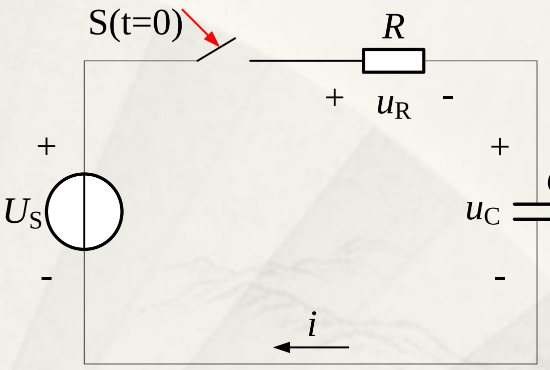
③ 同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

④ 一阶电路的零输入响应和初始值成正比，称为零输入线性。

4.3 一阶电路的零状态响应

零状态响应 ⟶ 动态元件初始能量为零，由$t>0$电路中外加激励作用所产生的响应

1.RC电路的零状态响应



$u_C(0_-)=0$

方程： $$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

解答形式为： $$u_C=u_C'+u_C''$$

u_C' ⟶ 非齐次线性常微分方程 $RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$ 的特解（强制分量）$u_C'=U_S$

与输入激励的变化规律有关，为电路的稳态解

u_C'' ⟶ 齐次线性常微分方程 $RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$ 的通解（自由分量，暂态分量）

$u_C''=Ae^{-\frac{t}{RC}}$ 变化规律由电路参数和结构决定

全解： $u_C(t) = u_C' + u_C'' = U_S + Ae^{-\frac{t}{RC}}$

由初始条件 $u_C(0_+)=0$ 定积分常数 A　　$u_C(0_+)=A+U_S=0$ ➡ $A=-U_S$

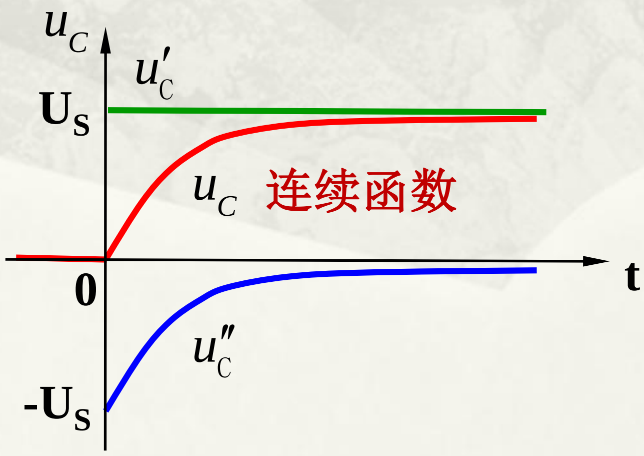
$$u_C = U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}} = U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad (t \geq 0)$$

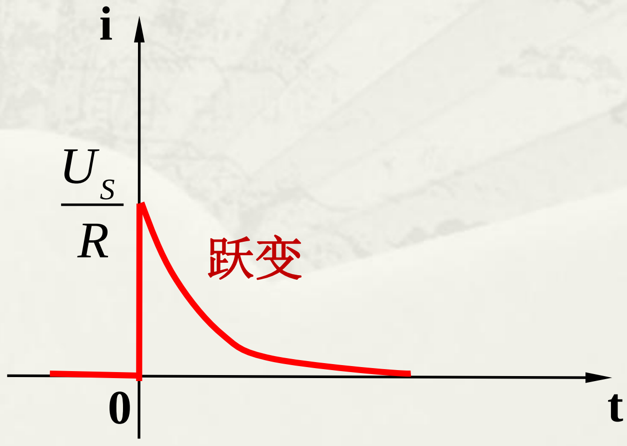
从以上式子可以得出： $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

以上分析表明：

① 电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数；电容电压由两部分构成：

稳态分量（强制分量） + 暂态分量（自由分量）

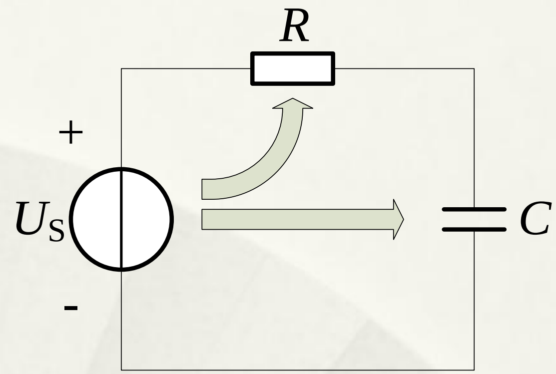




② 响应变化的快慢，由时间常数$\tau=RC$决定；τ大，充电慢，τ小充电就快。

③ 响应与外加激励成线性关系；

④ 能量关系



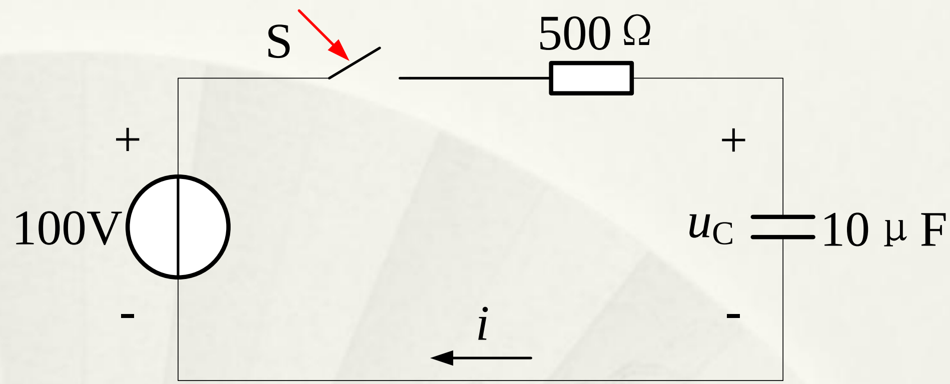
电源提供能量：$\int_0^\infty U_S i \mathrm{d}t = U_S q = CU_S^2$

电阻消耗能量：$\int_0^\infty i^2 R \,\mathrm{d}\,t = \int_0^\infty \left(\frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R \,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2} CU_S^2$

电容储存能量：$\frac{1}{2} CU_S^2$

可看出，电源提供的能量一半消耗在电阻上，一半转换成电场能量储存在电容中。

【例】t=0时,开关S闭合，已知 $u_C(0_-)=0$，求(1)电容电压和电流,(2) $u_C=80\text{V}$时的充电时间t 。



解：(1)这是一个RC电路零状态响应问题，有：

$$\tau = RC = 500 \times 10^{-5} = 5 \times 10^{-3}\text{s}$$

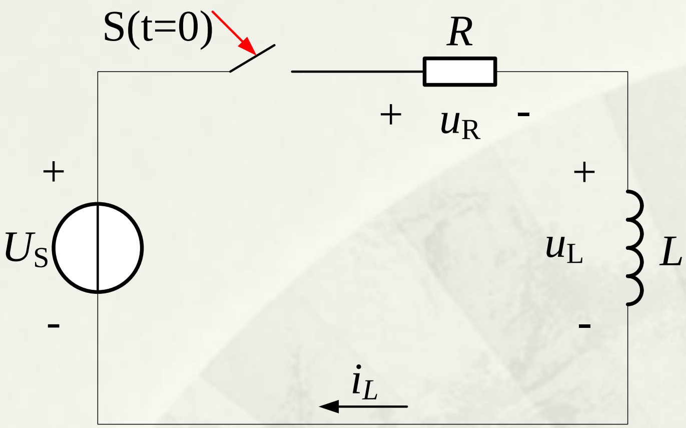
$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 100(1 - e^{-200t})\text{V} \quad (t \geq 0)$$

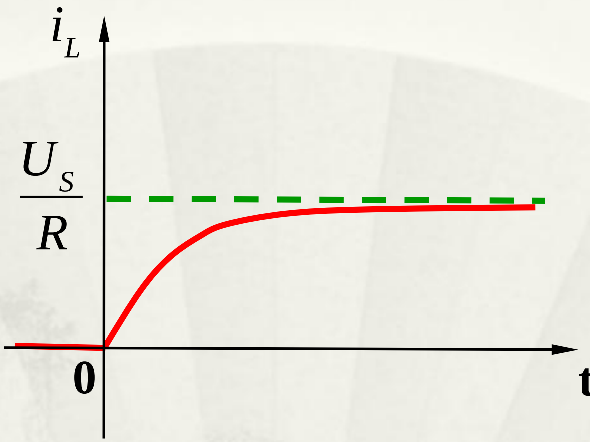
$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = 0.2e^{-200t}\text{A}$$

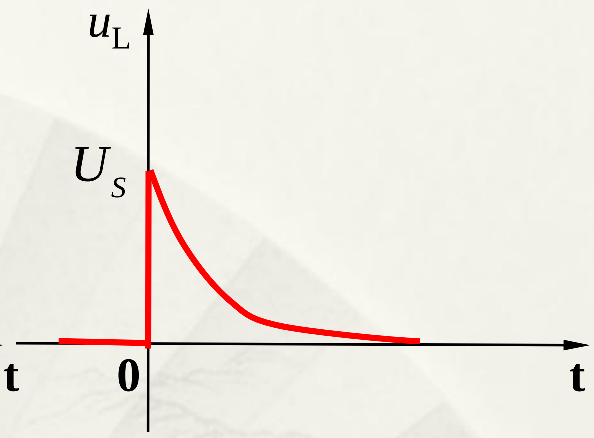
(2)设经过t_1秒，$u_C=80\text{V}$

$$80 = 100(1 - e^{-200t_1}) \rightarrow t_1 = 8.045\text{ms}$$

2. *RL*电路的零状态响应







已知$i_L(0_-)=0$，电路方程为：

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=U_S$$

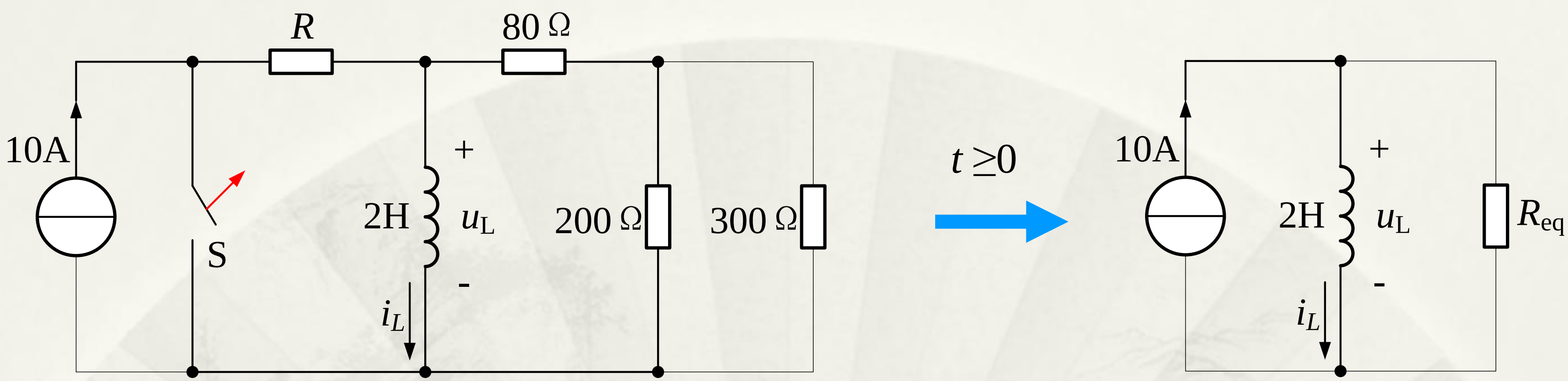
$$i_L=i_L'+i_L''=\frac{U_S}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L(0_+)=0\rightarrow A=-\frac{U_S}{R}$$

$$i_L=\frac{U_S}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=U_Se^{-\frac{R}{L}t}$$

【例】t=0时,开关S打开，求$t>0$后i_L、u_L的变化规律。



解：这是RL电路零状态响应问题，先化简电路，有：

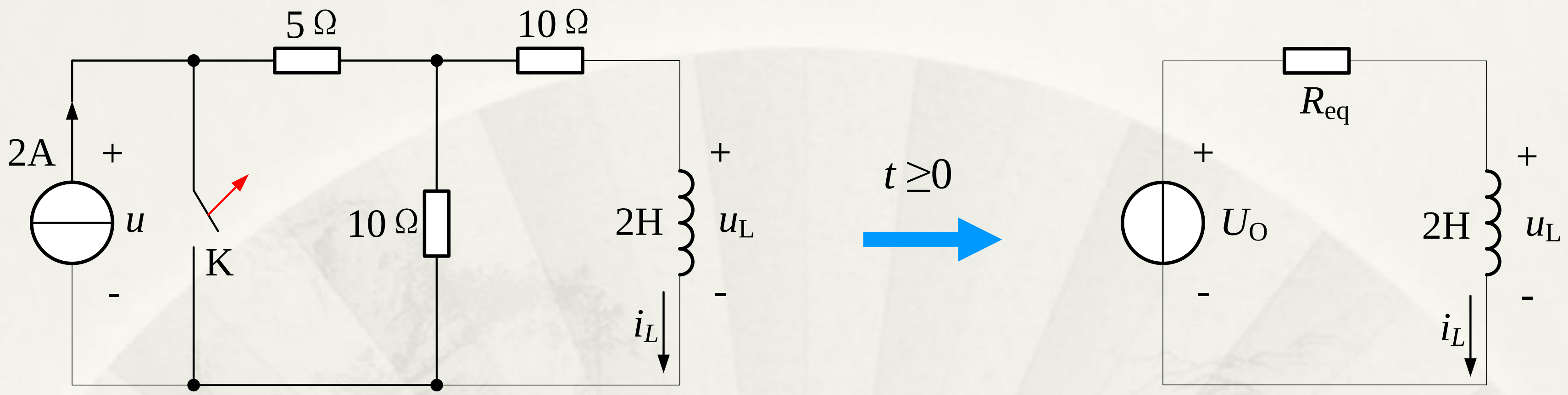
$$R_{eq} = 80 + 200 // 300 = 200\Omega$$

$$\tau = L / R_{eq} = 2 / 200 = 0.01\text{s}$$

$$i_L(\infty) = 10\text{A} \qquad i_L(t) = 10(1 - e^{-100t})\text{A}$$

$$u_L(t) = 10 \times R_{eq} e^{-100t} = 2000e^{-100t}\text{V}$$

【例】t=0开关k打开，求$t>0$后i_L、u_L及电流源的电压。



解：这是RL电路零状态响应问题，先化简电路，有：

$$R_{eq}=10+10=20\Omega \qquad U_0=2\times 10=20\text{V}$$

$$\tau=L/R_{eq}=2/20=0.1\text{s} \qquad i_L(\infty)=U_0/R_{eq}=1\text{A}$$

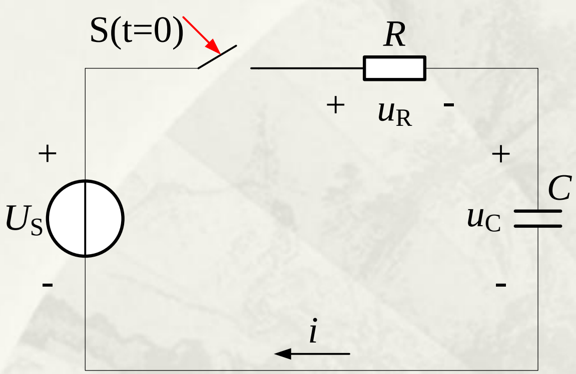
$$i_L(t)=(1-e^{-10t})\text{A} \qquad u_L(t)=U_0e^{-10t}=20e^{-10t}\text{V}$$

$$u=5I_S+10i_L+u_L=(20+10e^{-10t})\text{V}$$

4.4 一阶电路的全响应

全响应 → 电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。

1. 全响应



以*RC*电路为例，电路微分方程：

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

解答为：$u_C(t)=u_C'+u_C''$

特解 $u_C'=U_S$

通解 $u_C''=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

其中 $\tau=RC$

由初始值定*A*： $u_C(0_-)=U_0$ $u_C(0_+)=A+U_S=U_0$ $\therefore A=U_0-U_S$

$$u_C=U_S+Ae^{\frac{-t}{\tau}}=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{\tau}}\qquad t\geq 0$$

强制分量(稳态解)

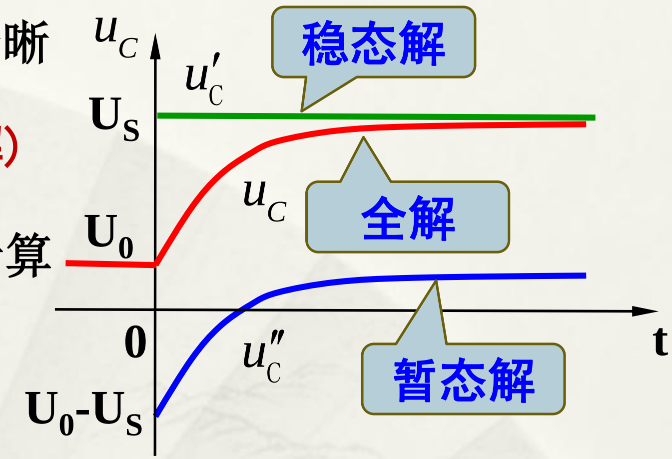
自由分量(暂态解)

2. 全响应的两种分解方式

① 着眼于电路的两种工作状态 → 物理概念清晰

全响应 = 强制分量(稳态解)+自由分量(暂态解)

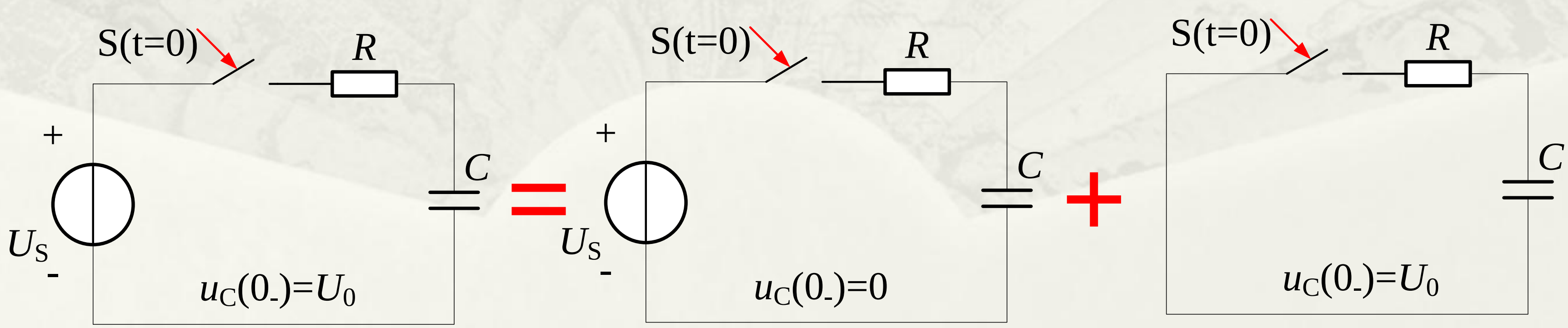
② 着眼于因果关系 → 便于叠加计算



$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0$$

零状态响应　　零输入响应

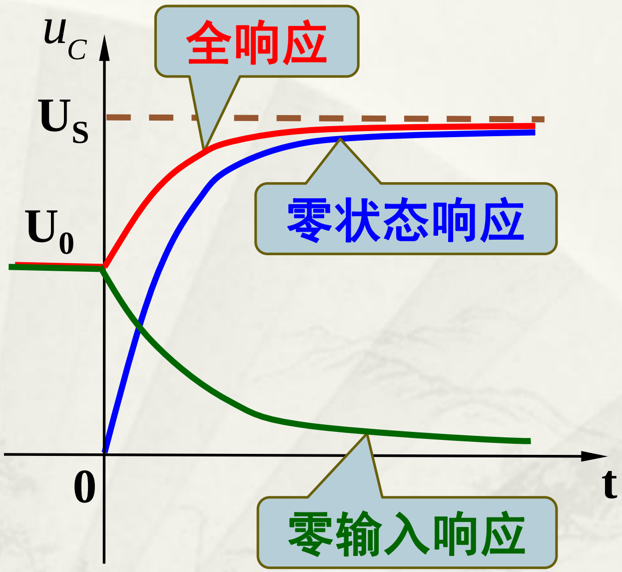
全响应 = 零状态响应 + 零输入响应



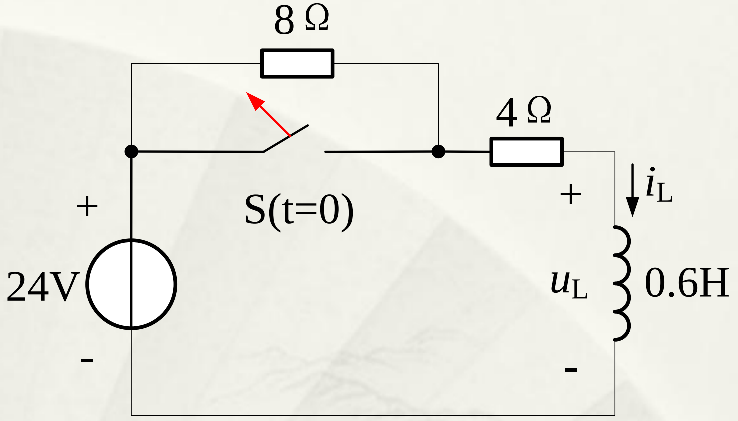
由零状态响应和零输入响应叠加的全响应曲线为：

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0$$

零状态响应　　零输入响应



【例】t=0 时，开关k打开，求t >0后的i_L、u_L。



解：这是RL电路全响应问题，

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 24/4 = 6\text{A}$$

$$\tau = L/R = 0.6/12 = 1/20\text{s}$$

零输入响应： $i'_L(t) = 6e^{-20t}\text{A}$

零状态响应： $i''_L(t) = \frac{24}{12}(1-e^{-20t})\text{A}$

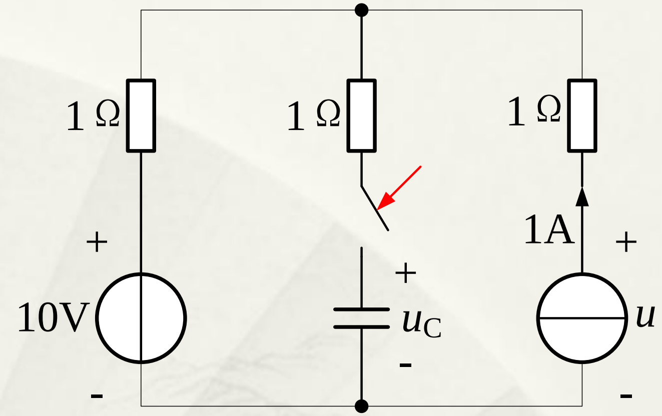
全响应： $i_L(t) = 6e^{-20t} + 2(1-e^{-20t}) = 2 + 4e^{-20t}\text{A}$

或求出稳态分量： $i_L(\infty) = 24/12 = 2\text{A}$

全响应： $i_L(t) = 2 + Ae^{-20t}\text{A}$

代入初值有： $6 = 2 + A \Rightarrow A=4$

【例】t=0时 ,开关K闭合，求t >0后的i_C、u_C及电流源两端的电压。
（已知$u_C(0^-)$=1V,C=1F）



解：这是RC电路全响应问题，

稳态分量：$$u_C(\infty) = 10 + 1 = 11\text{V}$$

$$\tau = RC = (1 + 1) \times 1 = 2\text{s}$$

全响应：$$u_C(t) = 11 + Ae^{-0.5t}\text{V}$$

带入初值求A：$$u_C(0^-) = 1\text{V} = 11 + Ae^{-0.5\times 0}\text{V}$$

$$A = -10$$

$$u_C(t) = 11 - 10e^{-0.5t}\text{V}$$

$$i_C(t) = \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 5e^{-0.5t}\text{A}$$

$$u(t) = 1 \times 1 + 1 \times i_C + u_C = 12 - 5e^{-0.5t}\text{V}$$

3. 三要素法分析一阶电路

特解

一阶电路的数学模型是一阶线性微分方程 $a\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+bf=c$

其解答一般形式为： $f(t)=f'(t)+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

令 $t=0_+$ $f(0_+)=f'(t)\big|_{0_+}+A$ $\longrightarrow$ $A=f(0_+)-f'(t)\big|_{0_+}$

$$f(t)=f'(t)+[f(0_+)-f'(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

直流激励时： $f'(t)=f'(0_+)=f(\infty)$ $\longrightarrow$

$$f(t)=f(\infty)+[f(0_+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

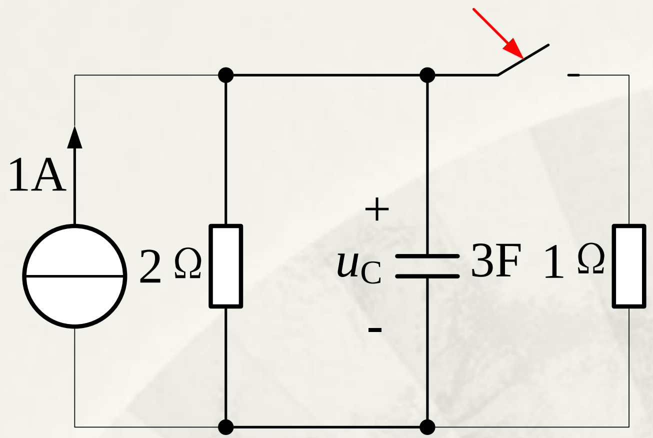
要素3：τ 时间常数

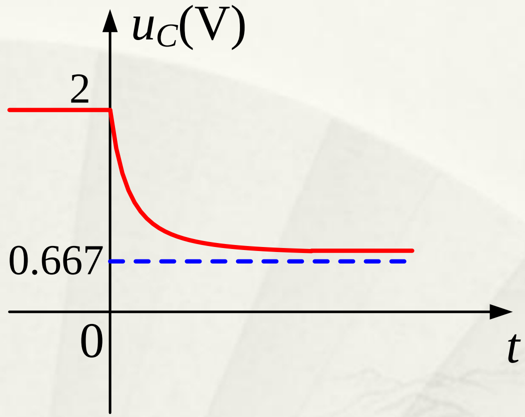
要素1：f(∞)稳态解，可用$t\to\infty$的稳态电路求解

要素2：$f(0^+)$初始值，可用0^+等效电路求解

由此分析一阶电路问题便可转为求解电路的三个要素的问题。

【例】已知：t=0 时合开关，求换路后的$u_C(t)$





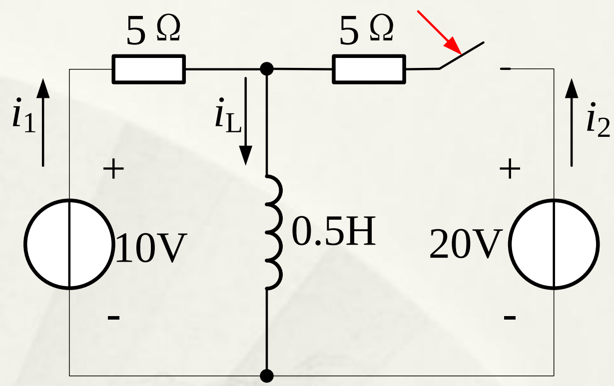
解： $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\text{V}$

$u_C(\infty) = (2//1) \times 1 = 0.667\text{V}$ $\tau = R_{eq}C = \frac{2}{3} \times 3 = 2\ \text{s}$

$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

$u_C = 0.667 + (2 - 0.667)e^{-0.5t} = 0.667 + 1.33e^{-0.5t} \quad t \geq 0$

【例】t=0时 ,开关闭合，求t >0后的i_L、i_1、i_2



解：三要素为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 10 / 5 = 2\text{A}$$

$$i_L(\infty) = 10 / 5 + 20 / 5 = 6\text{A}$$

$$\tau = L / R = 0.5 / (5 / /5) = 1 / 5\text{s}$$

三要素公式 $i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$i_L(t) = 6 + (2 - 6)e^{-5t} = 6 - 4e^{-5t} \quad t \geq 0$$

$$u_L(t) = L\frac{\text{d}i_L}{\text{d}t} = 0.5 \times (-4e^{-5t}) \times (-5) = 10e^{-5t}\text{V}$$

$$i_1(t) = (10 - u_L) / 5 = 2 - 2e^{-5t}\text{A}$$

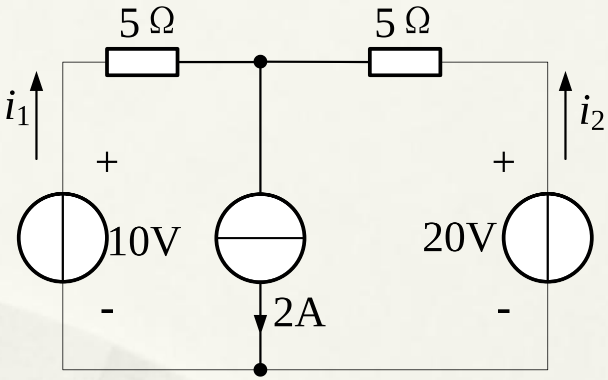
$$i_2(t) = (20 - u_L) / 5 = 4 - 2e^{-5t}\text{A}$$

也可用三要素法分别求i_1和i_2

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 10/5 = 2A$$

$$i_L(\infty) = 10/5 + 20/5 = 6A$$

$$\tau = L/R = 0.6/(5//5) = 1/5s$$



0_+等效电路

$$i_1(0_+) = \frac{(10-20)}{10} + 1 = 0A$$

$$i_2(0_+) = \frac{(20-10)}{10} + 1 = 2A$$

$$i_1(\infty) = 10/5 = 2A$$

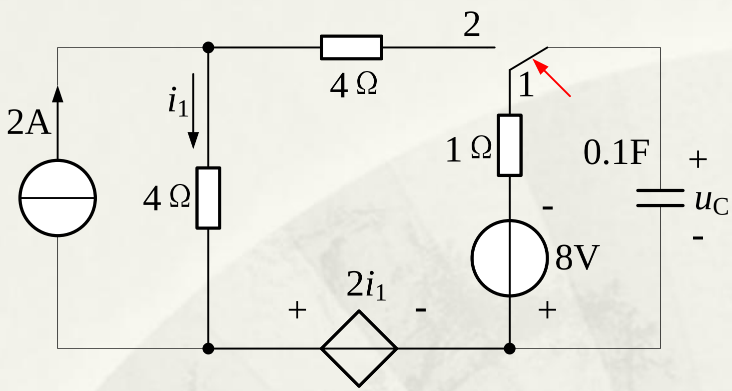
$$i_2(\infty) = 20/5 = 4A$$

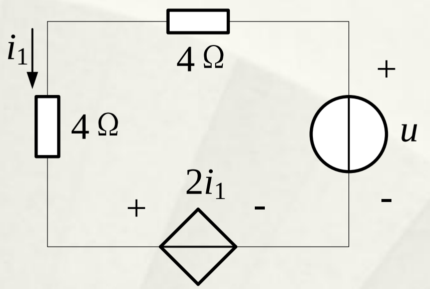
$$i_L(t) = 6 + (2-6)e^{-5t} = 6 - 4e^{-5t} \quad t \geq 0$$

$$i_1(t) = 2 + (0-2)e^{-5t} = 2 - 2e^{-5t}A$$

$$i_2(t) = 4 + (2-4)e^{-5t} = 4 - 2e^{-5t}A$$

【例】已知：t=0时开关由1→2，求换路后的$u_C(t)$





解：该动态电路三要素为：

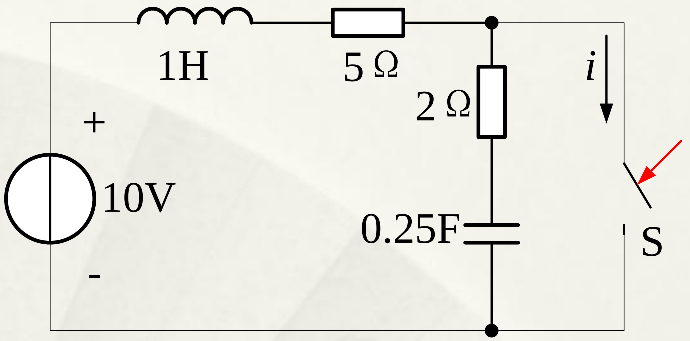
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = -8\text{V} \qquad u_C(\infty) = 4i_1 + 2i_1 = 6i_1 = 12\text{V}$$

$$u = 10i_1 \rightarrow R_{eq} = u / i_1 = 10\Omega \qquad \tau = R_{eq}C = 10 \times 0.1 = 1\text{s}$$

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(t) = 12 + [-8 - 12]e^{-t} = 12 - 20e^{-t}\text{V}$$

【例】已知：t=0时开关闭合，求换路后的电流$i(t)$ 。



解：该动态电路三要素为：

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10\text{V}$$

$$u_C(\infty) = 0$$

$$\tau_1 = R_{\text{eq}}C = 2 \times 0.25 = 0.5\text{s}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0 \qquad i_L(\infty) = 10/5 = 2\text{A} \qquad \tau_2 = L/R_{eq} = 1/5 = 0.2\text{s}$$

$$u_{\text{C}}(t) = u_{\text{C}}(\infty) + [u_{\text{C}}(0^+) - u_{\text{C}}(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 10e^{-2t}\text{V}$$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0^+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 2(1 - e^{-5t})\text{A}$$

$$i(t) = i_L(t) + \frac{u_C(t)}{2} = (2(1 - e^{-5t}) + 5e^{-2t})\,\text{A}$$

【例】已知：电感无初始储能$t = 0$ 时合S_1，t =0.2s时合S_2，求两次换路后的电感电流$i(t)$。

解： $0 < t < 0.2\text{s}$

$$i(0_+) = i(0_-) = 0$$

$$\tau_1 = L / R = 1 / 5 = 0.2 \text{ s}$$

$$i(\infty) = 10 / 5 = 2\text{A}$$

$$i(t) = 2 - 2e^{-5t} \text{ A}$$

$t > 0.2\text{s}$

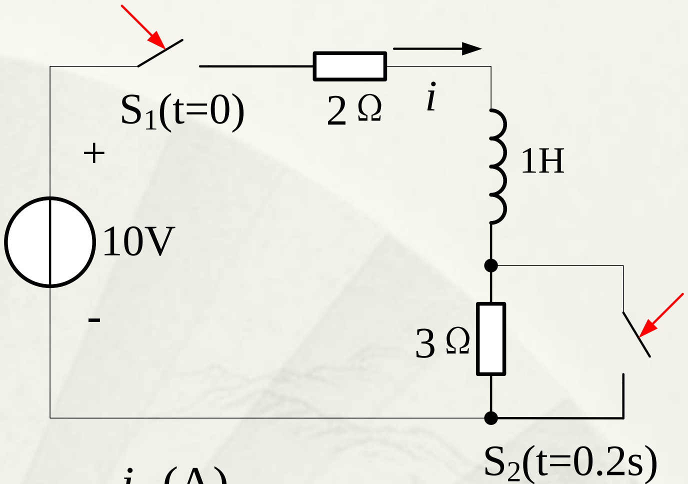
$$i(0.2_-) = 2 - 2e^{-5\times 0.2} = 1.26$$

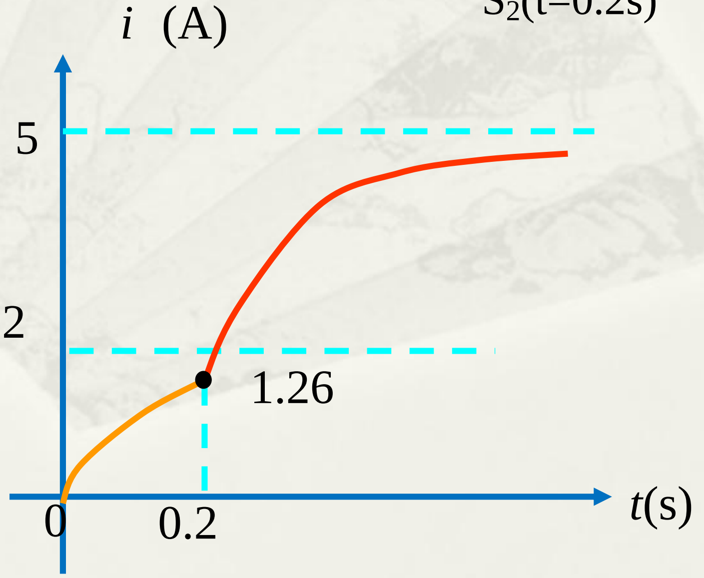
$$i(0.2_+) = 1.26\text{A}$$

$$\tau_2 = L / R = 1 / 2 = 0.5$$

$$i(\infty) = 10 / 2 = 5\text{A}$$

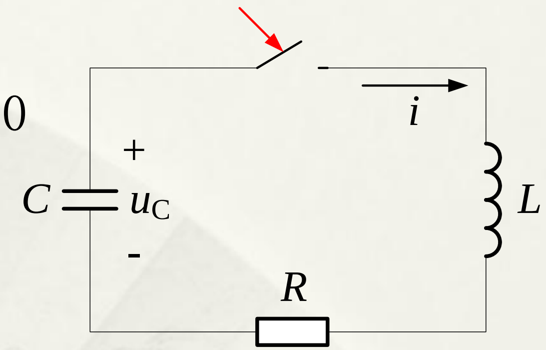
$$i(t) = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)} \text{ A}$$





4.5 二阶电路的零输入响应

1. 二阶电路的零输入响应



已知： $u_C(0_+)=U_0$ $i(0_+)=0$ 电路方程： $Ri + u_L - u_C = 0$

$$i = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \qquad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

以电容电压为变量： $LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$

以电感电流为变量： $LC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t} + RC\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = 0$

以电容电压为变量时的初始条件： $u_C(0_+)=U_0$ $i(0_+)=0$ ➡ $\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+} = 0$

以电感电流为变量时的初始条件： $i(0_+)=0$ $u_C(0_+)=U_0$

➡ $u_C(0_+) = u_L(0_+) = L\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+} = U_0$ ➡ $\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+} = \frac{U_0}{L}$

电路方程：
$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

特征方程：
$$LCP^2+RCP+1=0$$

特征根：
$$P=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}}$$

2. 零状态响应的三种情况

$R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 两个不等负实根 过阻尼

$R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 两个相等负实根 临界阻尼

$R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 两个共轭复根 欠阻尼

（1） $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ $u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

$$u_C(0_+) = U_0 \rightarrow A_1 + A_2 = U_0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{(0_+)} \rightarrow P_1 A_1 + P_2 A_2 = 0$$

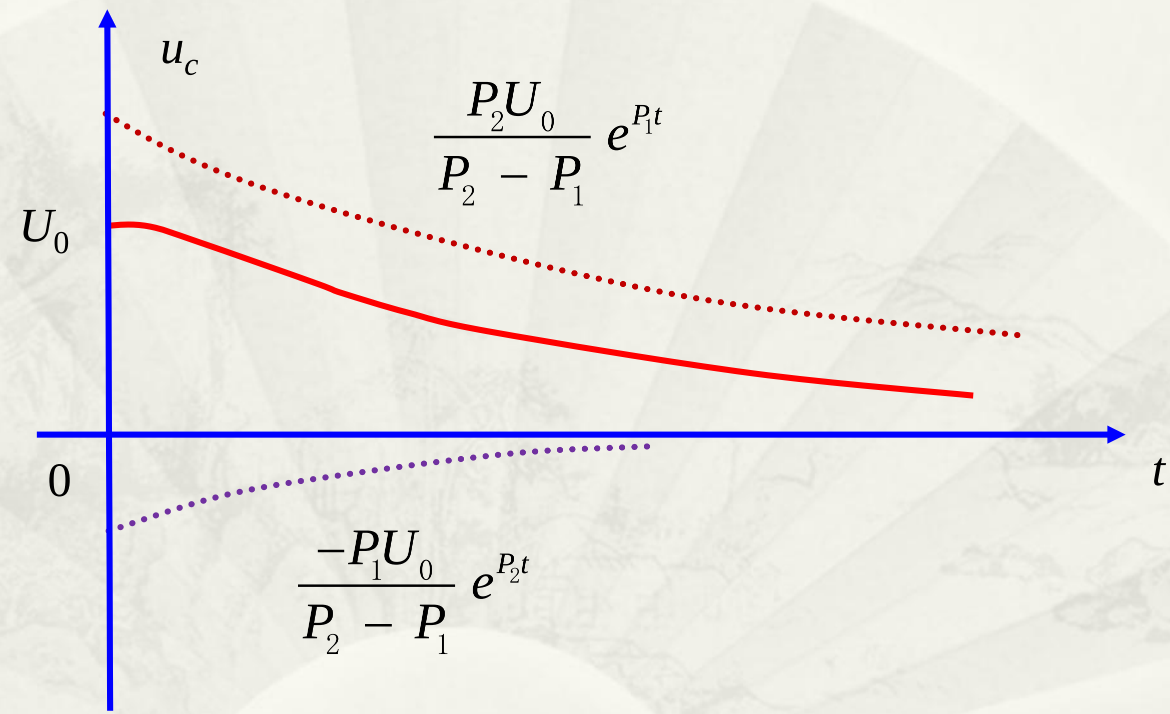
$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{P_2}{P_2 - P_1} U_0 \\ A_2 = \dfrac{-P_1}{P_2 - P_1} U_0 \end{cases}$$

$$u_C = \frac{U_0}{P_2 - P_1}(P_2 e^{P_1 t} - P_1 e^{P_2 t})$$

① 电容电压

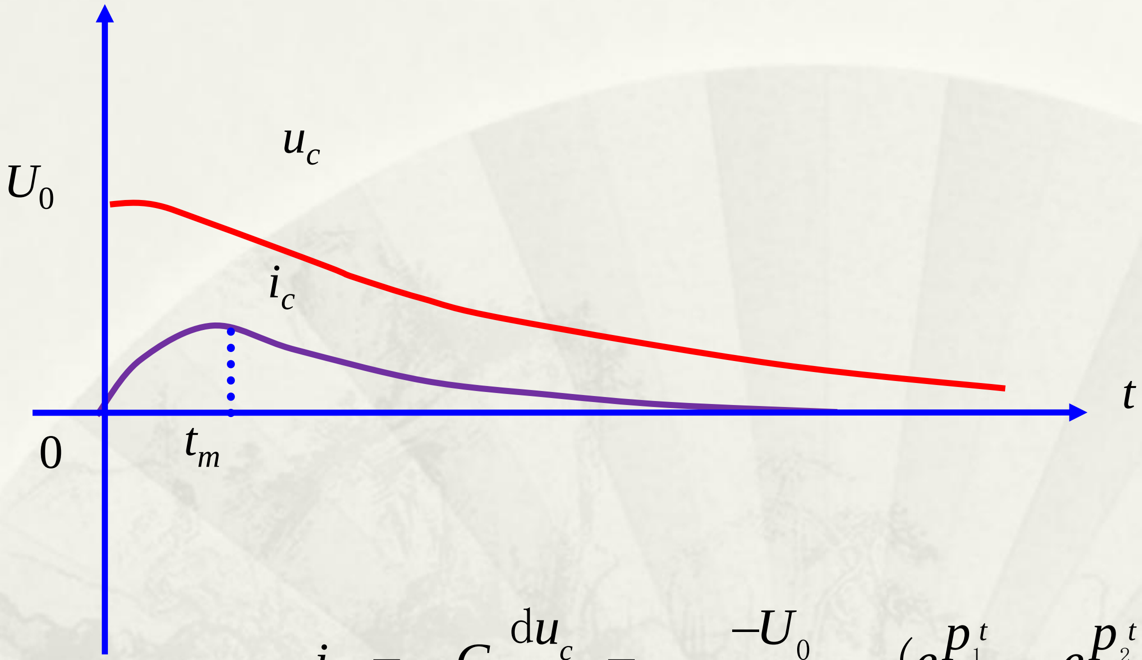
$$u_C = \frac{U_0}{P_2 - P_1}\left(P_2 e^{P_1 t} - P_1 e^{P_2 t}\right)$$

设 $|P_2|>|P_1|$



② 电容和电感电流

$$u_C = \frac{U_0}{P_2 - P_1}(P_2 e^{P_1 t} - P_1 e^{P_2 t})$$



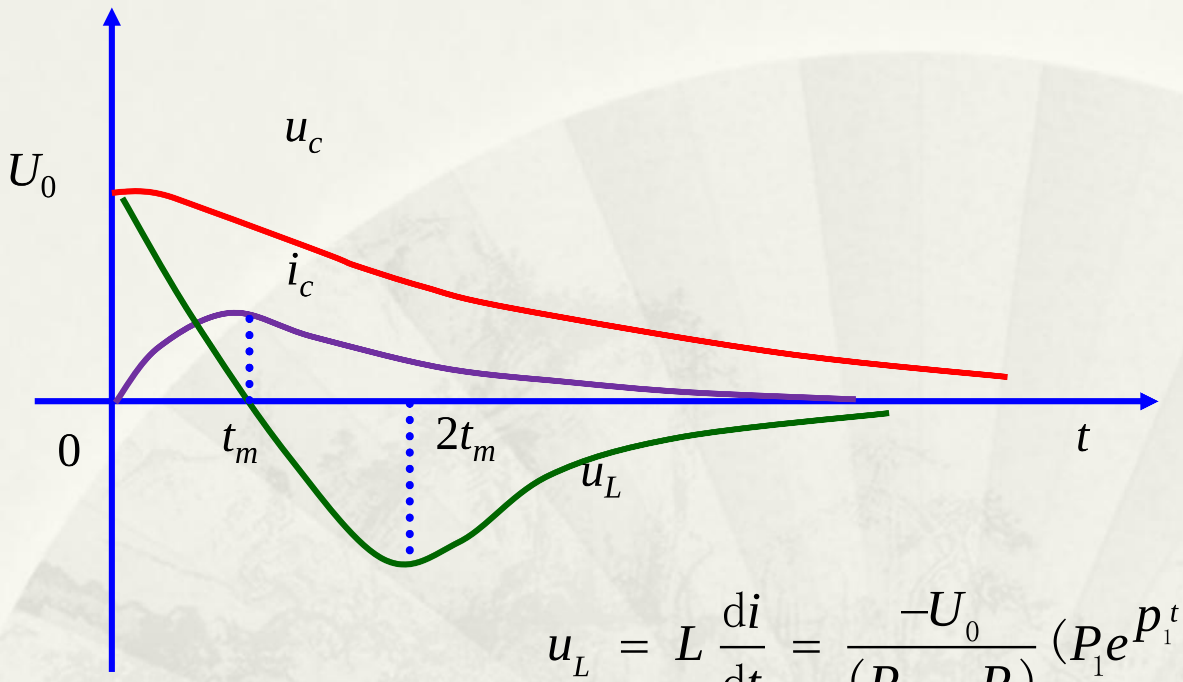
$$i_C = -C\frac{du_c}{dt} = \frac{-U_0}{L(P_2 - P_1)}(e^{P_1 t} - e^{P_2 t})$$

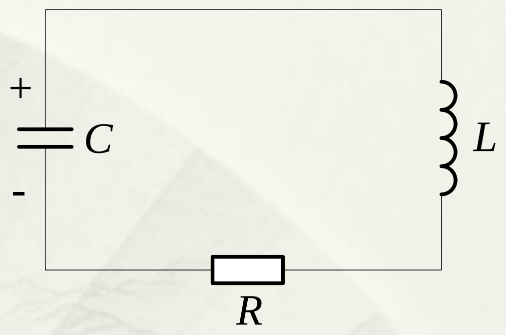
$t=0_+$ $i_c=0$, $t=\infty$ $i_c=0$

$i_c>0$ $t = t_m$ 时 i_c 最大

③ 电感电压

$$u_C = \frac{U_0}{P_2 - P_1}(P_2 e^{P_1 t} - P_1 e^{P_2 t})$$





$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{-U_0}{(P_2 - P_1)}(P_1 e^{p_1 t} - P_2 e^{p_2 t})$$

t=0时，$u_L=U_0$； $t=\infty$时，$u_L=0$

0< t < t_m，i 增加，u_L>0； t > t_m i 减小，u_L <0

t=2 t_m时| u_L |最大

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{-U_0}{(P_2 - P_1)}(P_1 e^{p_1 t} - P_2 e^{p_2 t})$$

$i_C = i$ 为极值时，即 $u_L = 0$ 时的 t_m 计算如下:

$$(P_1 e^{p_1 t} - P_2 e^{p_2 t}) = 0$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{e^{P_1 t_m}}{e^{P_2 t_m}}$$

$$t_m = \frac{\ell n \dfrac{p_2}{p_1}}{p_1 - p_2}$$

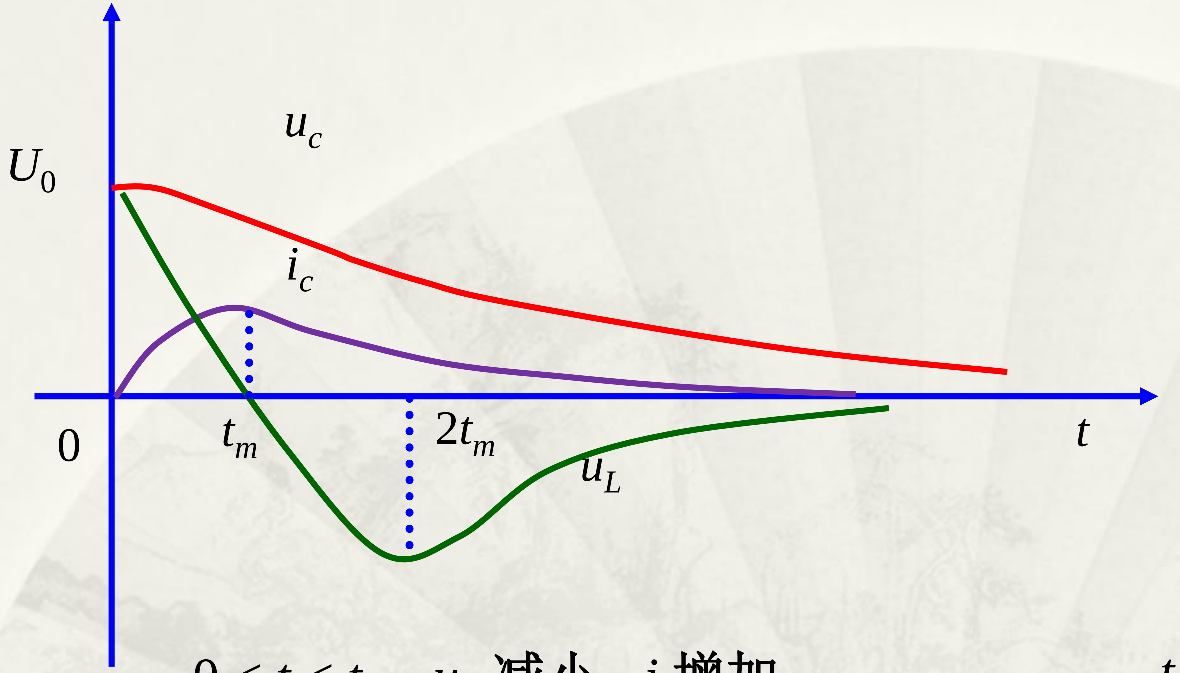
由 $\mathrm{d}u_L/\mathrm{d}t$ 可确定 u_L 为极小时的 t

$$(P_1^2 e^{p_1 t} - P_2^2 e^{p_2 t}) = 0$$

$$t = \frac{2\ell n \dfrac{p_2}{p_1}}{p_1 - p_2}$$

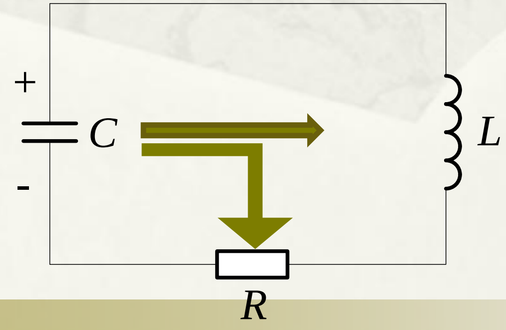
$$t = 2t_m$$

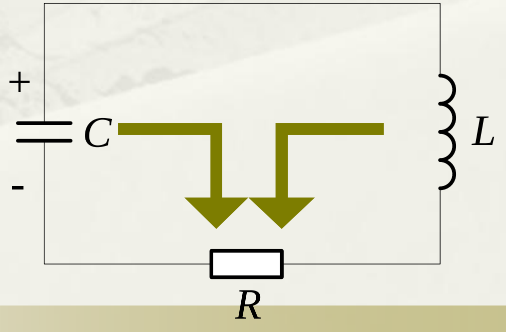
④ 能量转换关系



$0 < t < t_m$ u_C 减小，i 增加。

$t > t_m$ u_C 减小，i 减小.





（2） $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 　　$P_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$

令： $\delta = \frac{R}{2L}$（衰减系数）； $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$（谐振角频率）

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$（固有振荡角频率） $P = -\delta \pm j\omega$

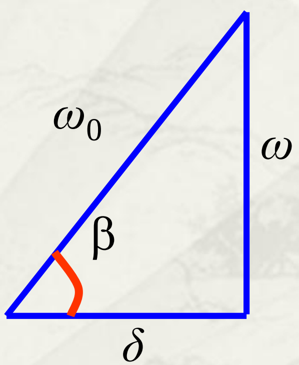
u_c的解答形式： $u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = e^{-\delta(t)}(A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t})$

经常写为： $u_C = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)$

$$u_C = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)$$

由初始条件 $\begin{cases} u_C(0^+) = U_0 \rightarrow A\sin\beta = U_0 \\ \dfrac{du_C}{dt}(0^+) = 0 \rightarrow A(-\delta)\sin\beta + A\omega\cos\beta = 0 \end{cases}$

$$A = \frac{U_0}{\sin\beta} \qquad \beta = arctg\,\frac{\omega}{\delta}$$



$$\sin\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad A = \frac{\omega_0}{\omega}U_0$$

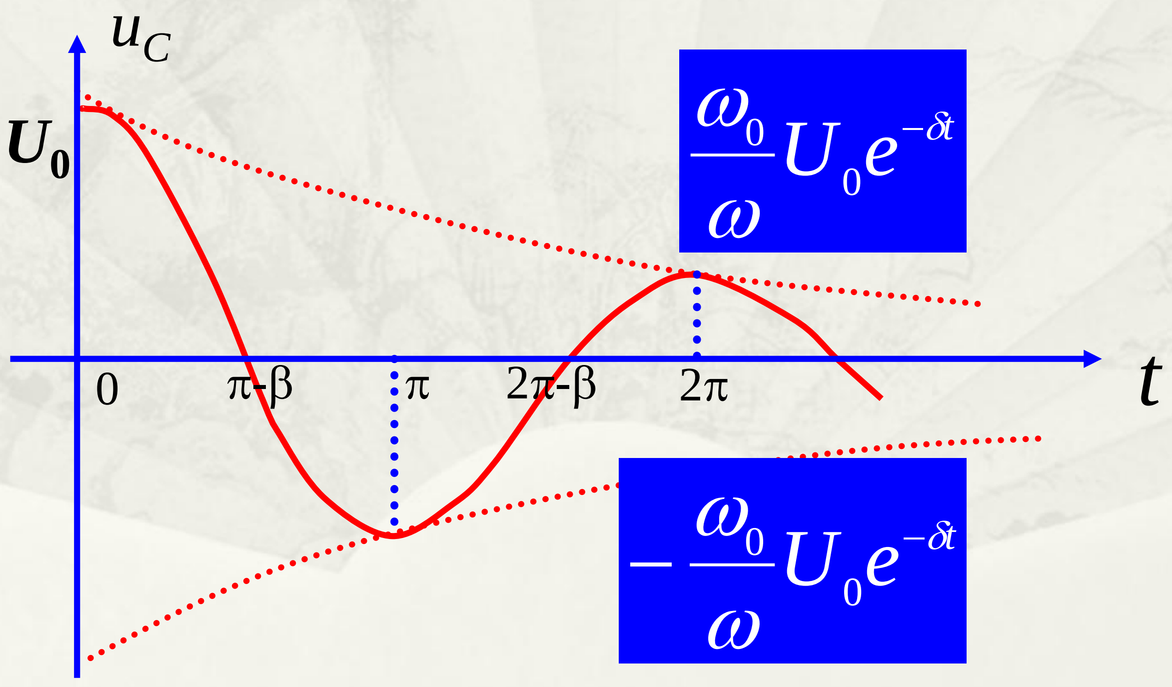
ω，ω₀，δ的关系

$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega}U_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)$$

$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

u_C是振幅以 $\pm \frac{\omega_0}{\omega} U_0$ 为包络线依指数规律衰减的正弦函数

$t=0$ 时 $u_c=U_0$ $u_C=0$：$\omega t = \pi-\beta$，$2\pi-\beta$ ... $n\pi-\beta$



$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

$$i_C = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t} \sin \omega t$$

$$i_C = -C\frac{\omega_0}{\omega} U_0 \left[-\delta e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) + \omega e^{-\delta t} \cos(\omega t + \beta)\right]$$

$$= -C\frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \left[-\delta \sin(\omega t + \beta) + \omega \cos(\omega t + \beta)\right]$$

$$= -C\frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \left[-\delta \sin \omega t \cos \beta - \delta \cos \omega t \sin \beta + \omega \cos \omega t \cos \beta - \omega \sin \omega t \sin \beta\right]$$

$$= -C\frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \left[-\delta \sin \omega t \frac{\delta}{\omega_0} - \delta \cos \omega t \frac{\omega}{\omega_0} + \omega \cos \omega t \frac{\delta}{\omega_0} - \omega \sin \omega t \frac{\omega}{\omega_0}\right]$$

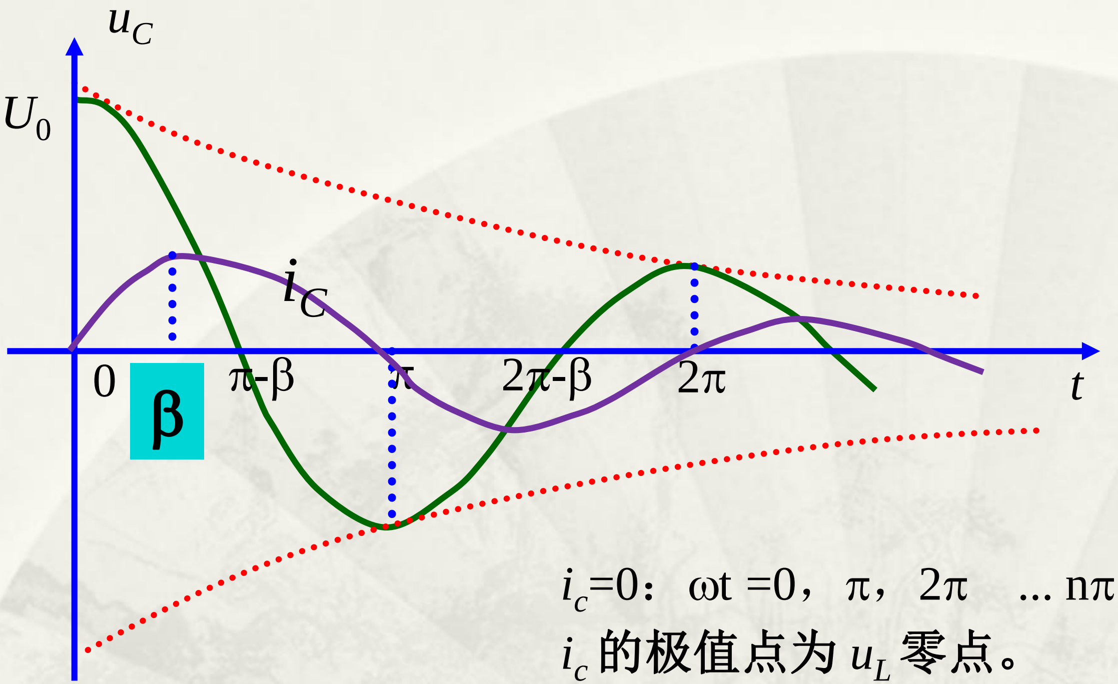
$$= -C\frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \left[-\delta \sin \omega t \frac{\delta}{\omega_0} - \omega \sin \omega t \frac{\omega}{\omega_0}\right] = -C\frac{1}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin \omega t \left[-\delta^2 - \omega^2\right]$$

$$= C\frac{\omega_0^2}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin \omega t = C\frac{1}{LC\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin \omega t$$

$$= \frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t} \sin \omega t$$

$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

$$i_C = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t} \sin \omega t$$



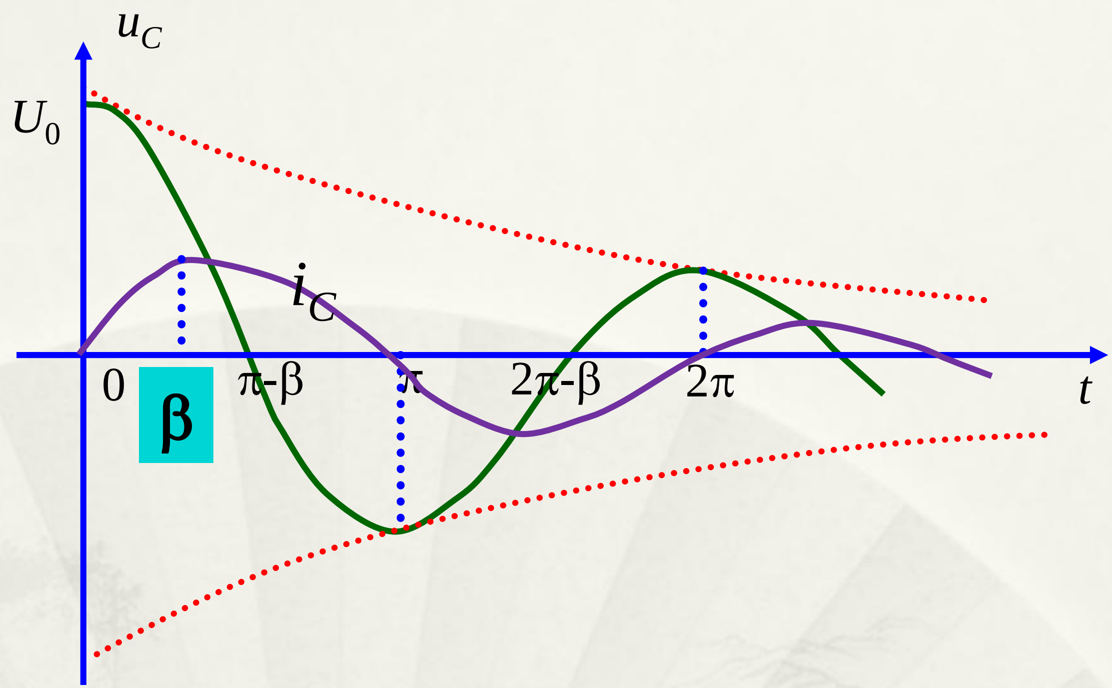
i_c=0：ωt =0，π，2π ... nπ，为 u_c极值点，

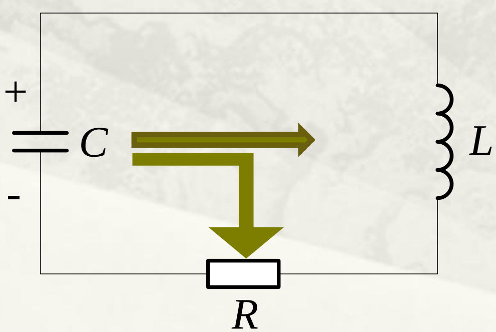
i_c的极值点为 u_L零点。

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \beta)$$

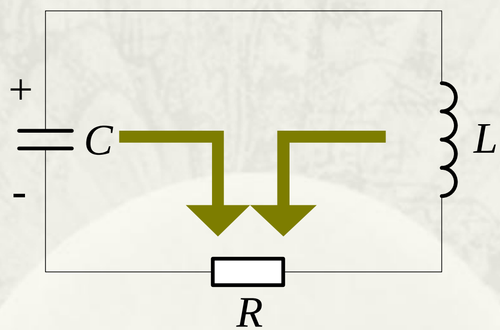
u_L=0：ωt = β，π+β，2π+β ... nπ+β

能量转换关系：

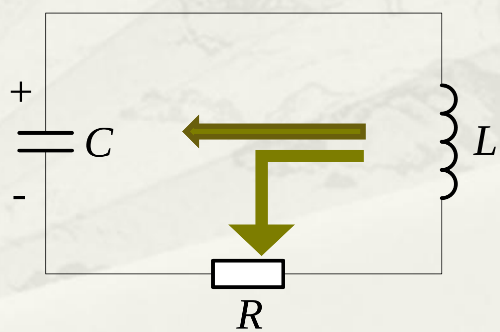




$0 < \omega t < \beta$



$\beta < \omega t < \pi-\beta$



$\pi-\beta < \omega t < \pi$

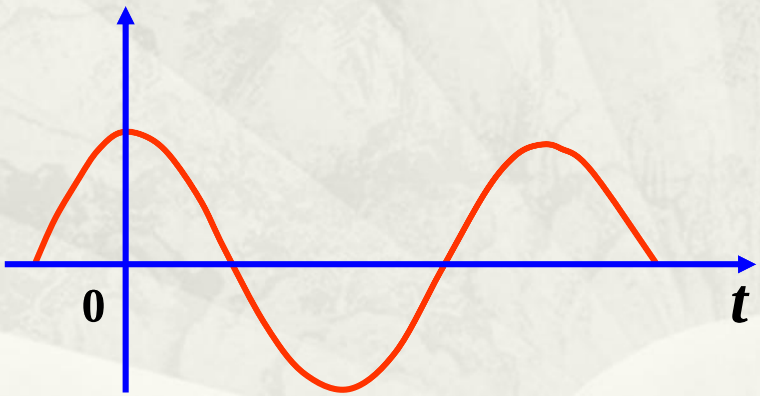
特例：R=0 时

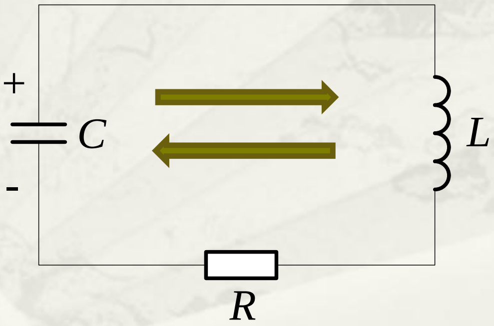
$$\delta = 0 \quad , \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$u_C = U_0 \sin(\omega t + 90^0) = u_L$$

$$i = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t$$

→ 等幅振荡





（3） $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ $P_1 = P_2 = -\dfrac{R}{2L} = -\delta$

$$u_C = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$$

由初始条件

$$\begin{cases} u_c(0^+) = U_0 \rightarrow A_1 = U_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0 \rightarrow A_1(-\delta) + A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = U_0 \\ A_2 = U_0\delta \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} u_C &= U_0 e^{-\delta t}(1 + \delta t) \\ i_C &= -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \\ u_L &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U_0 e^{-\delta t}(1 - \delta t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{非振荡放电}$$

小结：

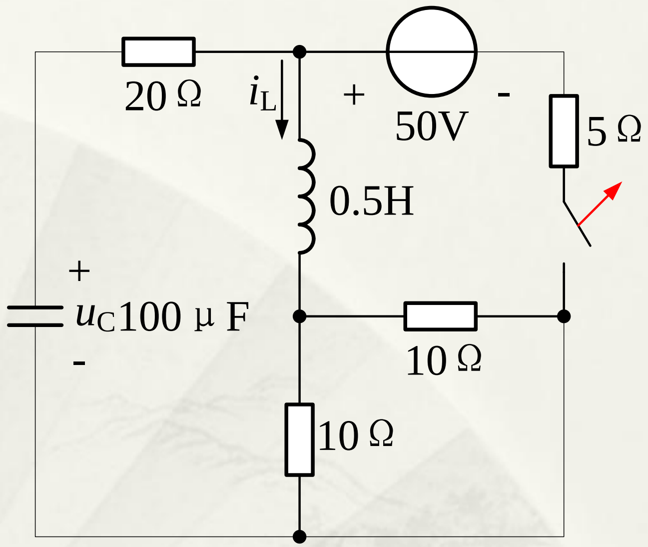
$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 两个不等负实根，过阻尼，非振荡放电 $u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 两个相等负实根，临界阻尼，非振荡放电 $u_C = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$

$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 两个共轭复根，欠阻尼，振荡放电 $u_C = A e^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta)$

由初始条件 $\begin{cases} u_C(0_+) \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0_+) \end{cases}$ 定常数

【例】电路如图，t=0 时打开开关。求 u_C并画出其变化曲线。



解：（1） $u_C(0_-)=25V$　　$i_L(0_-)=5A$

(2) 开关打开为*RLC*串联电路，方程为：

$$LC\frac{d^2u_C}{dt} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

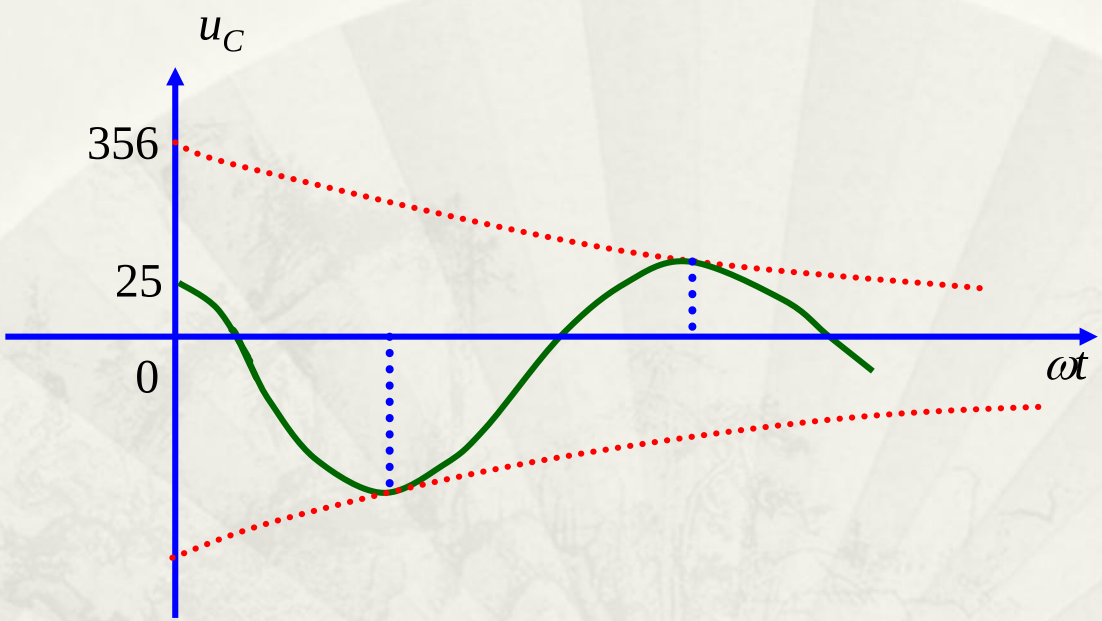
特征方程为： $50P^2+2500P+10^6=0$

$$P = -25 \pm j139 \qquad u_C = Ae^{-25t}\sin(139t+\beta)$$

(3)
$$\begin{cases} u_C(0_+) = 25 \\ C\dfrac{du_C}{dt}\Big|_{0_+} = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\sin\beta = 25 \\ A(139\cos\beta - 25\sin\beta) = \dfrac{-5}{10^{-4}} \end{cases}$$

$$A = 356\ ,\qquad \beta = 176^0 \qquad u_C = 356e^{-25t}\sin(139t + 176^0)V$$

$$u_C = 356e^{-25t}\sin(139t + 176^0)\mathrm{V}$$



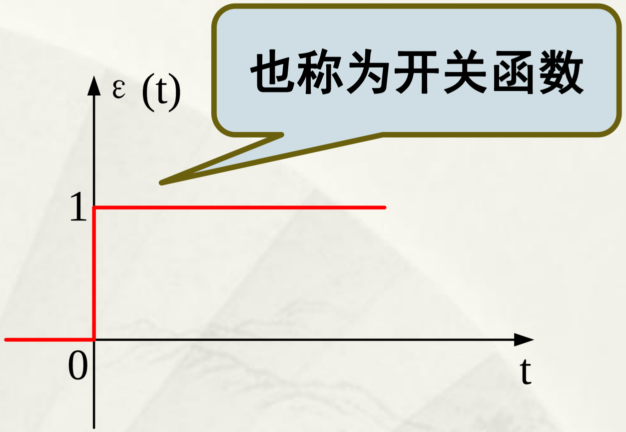
4.6 一阶电路阶跃响应和冲激响应

4.6.1 一阶电路阶跃响应

1. 单位阶跃函数

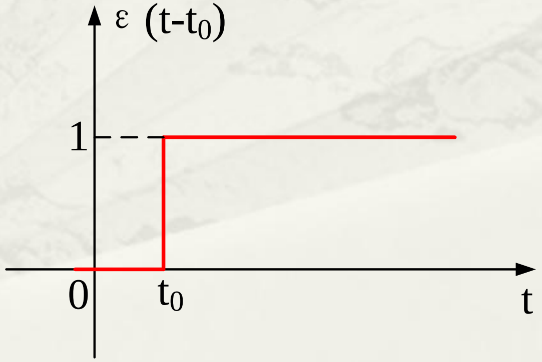
（1） 定义

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$$



（2） 单位阶跃函数的延迟

$$\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & (t < t_0) \\ 1 & (t > t_0) \end{cases}$$

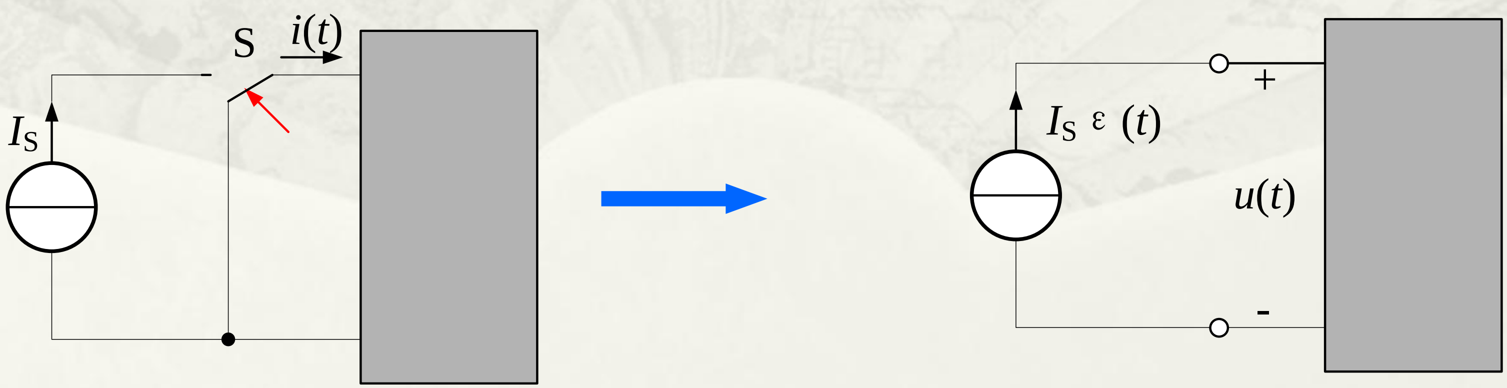


（3） 单位阶跃函数的作用

① 在电路中模拟开关的动作

$t=0$ 合闸 $u(t)=E\varepsilon(t)$

$t=0$ 合闸 $i(t)=I_S\varepsilon(t)$



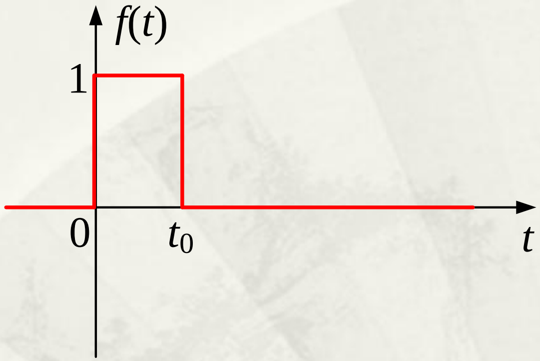
② 起始一个函数

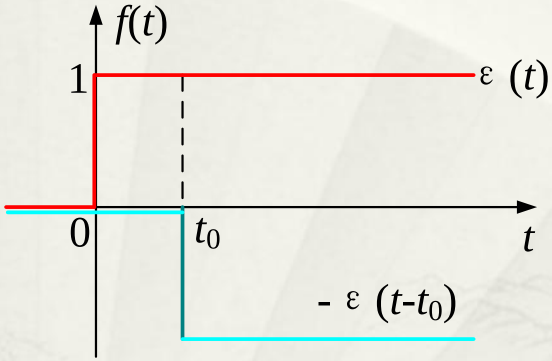
$\mathrm{Sin}(t\text{-}t_0)\ \varepsilon\ (t\text{-}t_0)$ **?**

③ 延迟一个函数

（4）用单位阶跃函数表示复杂的信号

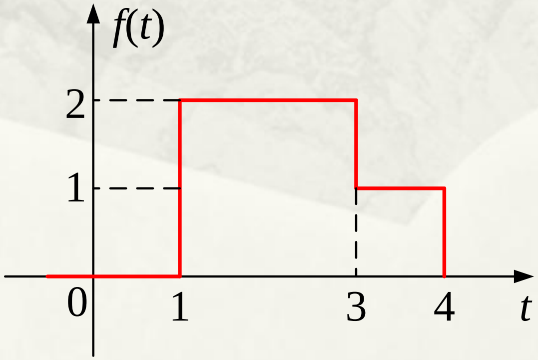
[例1]





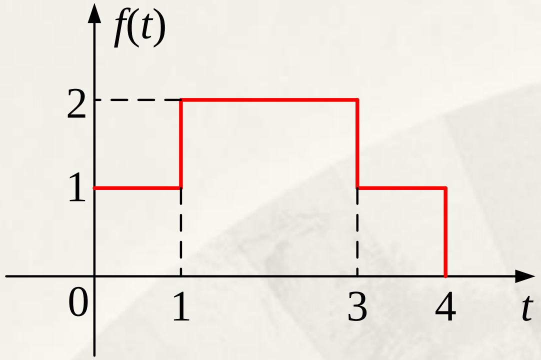
$$f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_0)$$

[例2]



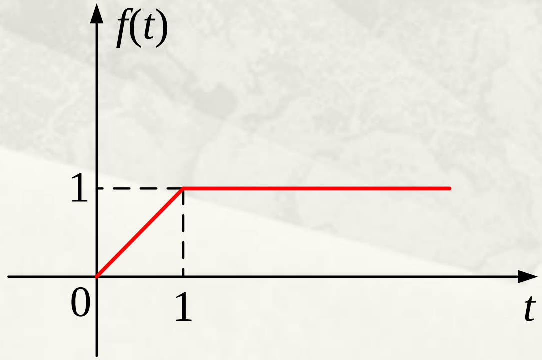
$$f(t) = 2\varepsilon(t - 1) - \varepsilon(t - 3) - \varepsilon(t - 4)$$

[例3]



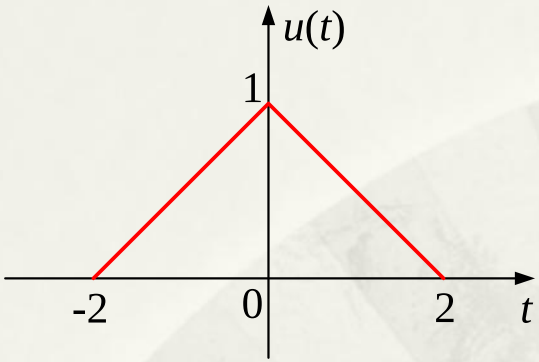
$$f(t) = \varepsilon(t) + \varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-3) - \varepsilon(t-4)$$

[例4]



$$f(t) = t[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] + \varepsilon(t-1) = t\,\varepsilon(t) - (t-1)\,\varepsilon(t-1)$$

[例5] 已知电压u(t)的波形如图，试画出下列电压的波形。

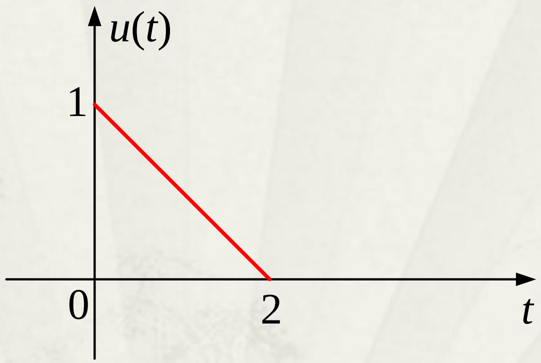


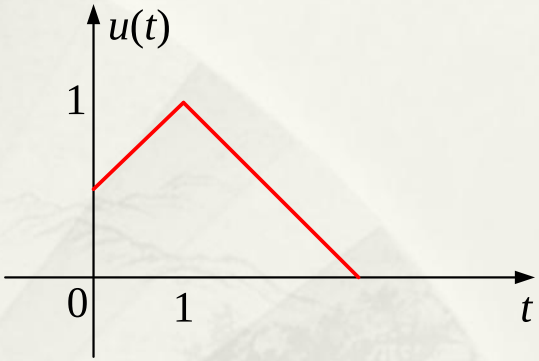
(1) $u(t)\varepsilon(t)$

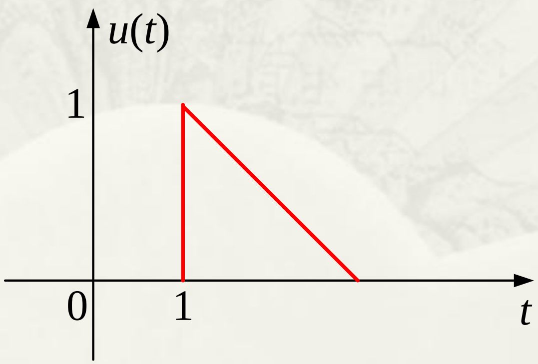
(2) $u(t-1)\varepsilon(t)$

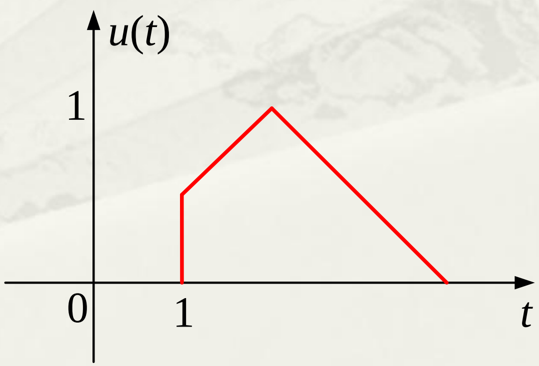
(3) $u(t-1)\varepsilon(t-1)$

(4) $u(t-2)\varepsilon(t-1)$







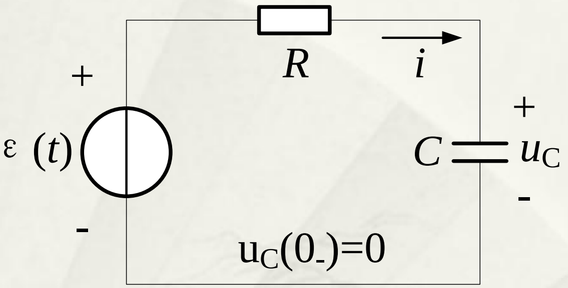


2. 一阶电路的阶跃响应

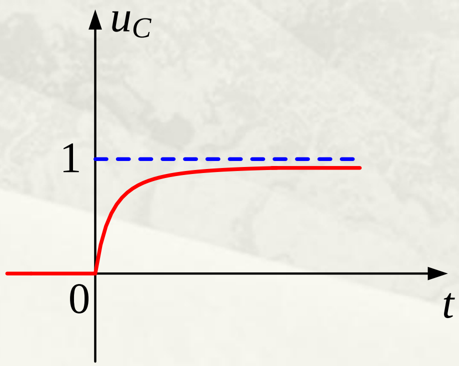
阶跃响应 → 激励为单位阶跃函数时，电路中产生的零状态响应。

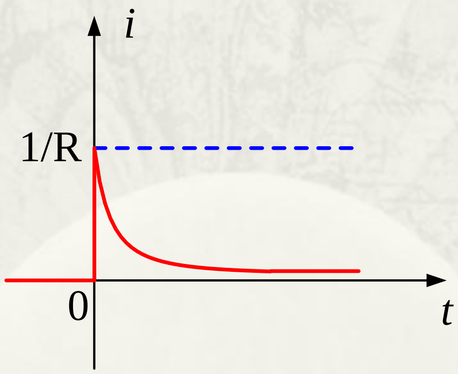
$$u_C(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

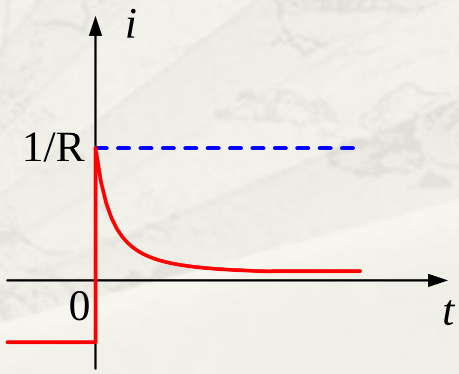
$$i(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$



注意 $i = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$ **与** $i = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad i \geq 0$ **相区别**



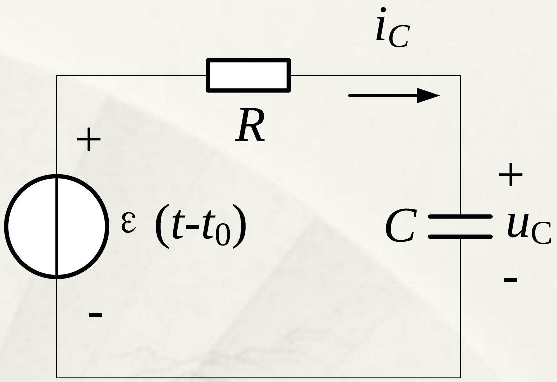




$i = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$ $\qquad$ $i = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad i \geq 0$

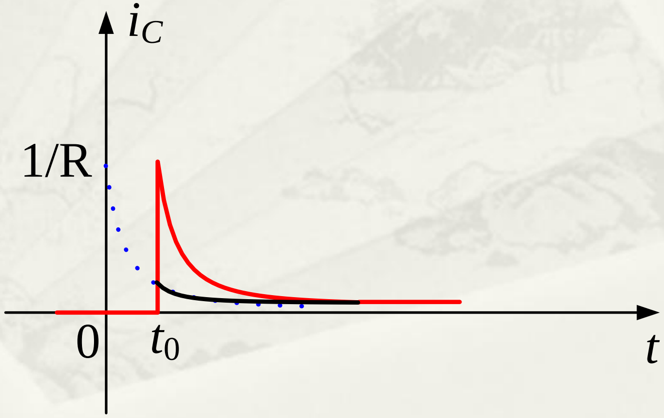
若激励在 $t = t_0$ 时加入，则响应从$t = t_0$开始。

$$i_C = \frac{1}{R} e^{-\frac{t-t_0}{RC}} \varepsilon(t - t_0)$$

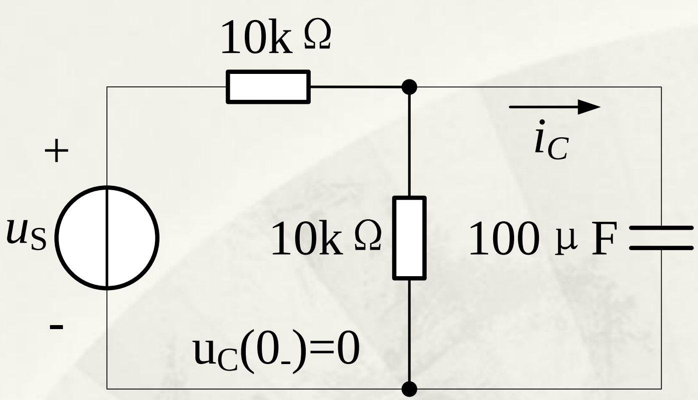


不要误写为

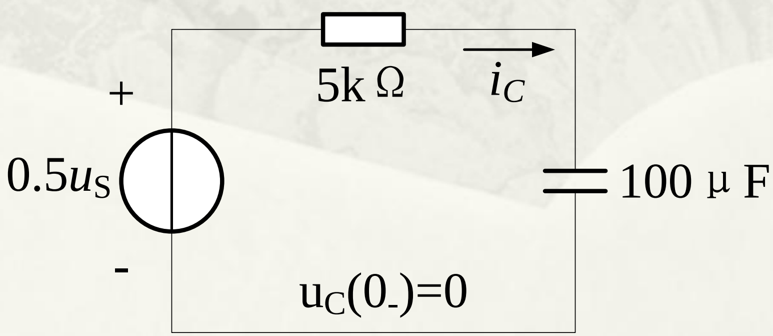
$$i_C = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t - t_0)$$



【例】求图示电路中电流 $i_C(t)$



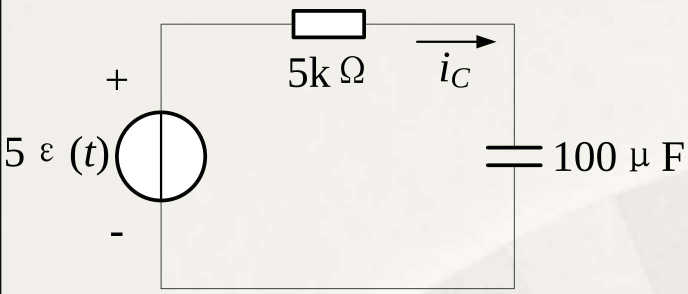
等效为

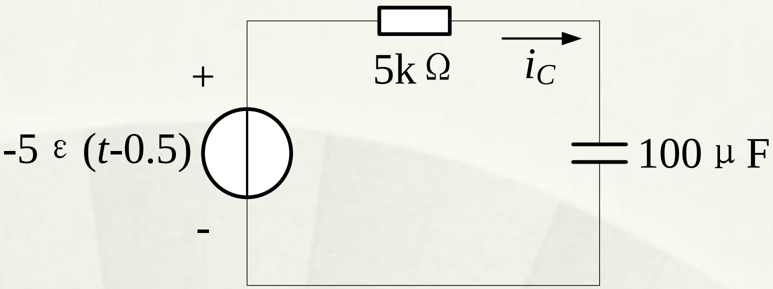


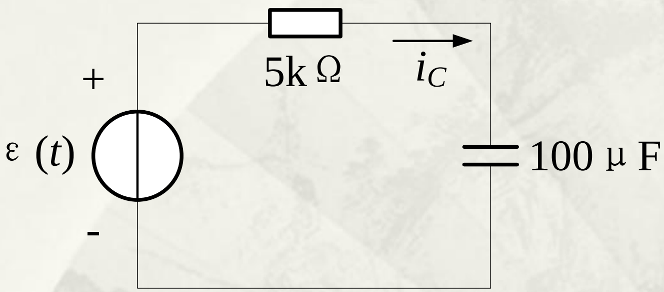
$$u_S = 10\varepsilon(t) - 10\varepsilon(t - 0.5)$$

应用叠加定理

$$u_S = 10\varepsilon(t) - 10\varepsilon(t-0.5)$$







阶跃响应为：

$$\tau = RC = 100\times10^{-6}\times5\times10^{3} = 0.5\text{s}$$

$$u_C(t) = (1-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}e^{-2t}\varepsilon(t) \quad \text{mA}$$

由齐次性和叠加性得实际响应为：

$$i_C = 5\left[\frac{1}{5}e^{-2t}\varepsilon(t) - \frac{1}{5}e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)\right] = e^{-2t}\varepsilon(t) - e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5) \quad \text{mA}$$

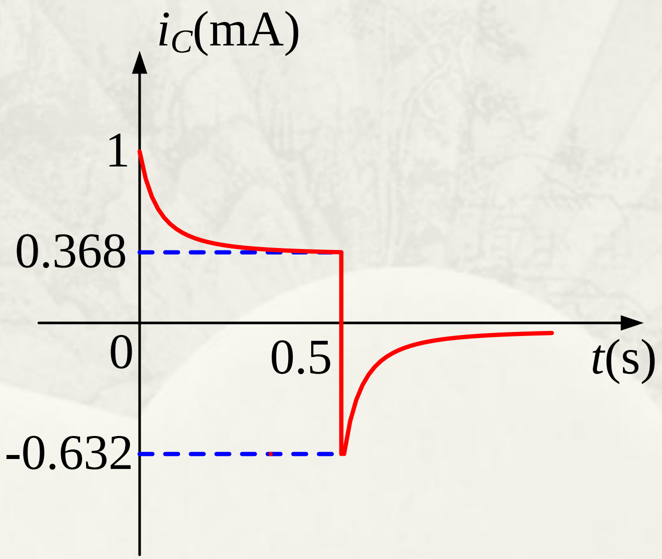
对于电容电流表达式 $i_C = e^{-2t}\varepsilon(t) - e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)$ mA 可分段表示为

$0 < t < 0.5$ $\quad \varepsilon(t) = 1 \quad \varepsilon(t-0.5) = 0 \quad i_C = e^{-2t}$

$0.5\text{s} < t$ $\quad \varepsilon(t) = 1 \quad \varepsilon(t-0.5) = 1 \quad i_C = e^{-2t} - e^{-2(t-0.5)} = e^{-2(t-0.5)}(e^{-1} - 1)$

$$= -0.632e^{-2(t-0.5)}$$

故 $$i_C(t) = \begin{cases} e^{-2t} \text{ mA} & (0 < t < 0.5\text{ s}) \\ -0.632e^{-2(t-0.5)} \text{ mA} & (t > 0.5\text{ s}) \end{cases}$$

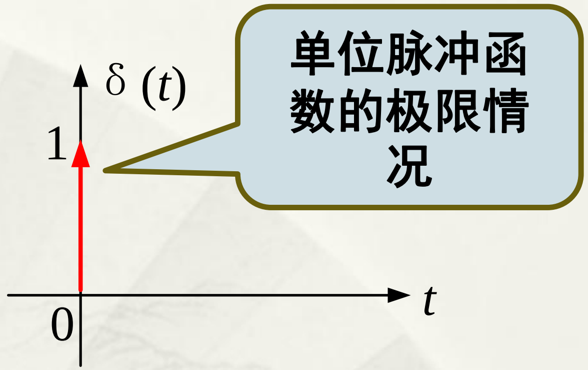


4.6.2 一阶电路冲激响应

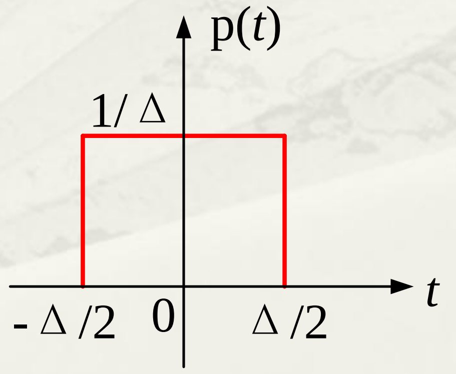
1. 单位冲激函数

（1） 定义

$$\begin{cases} \delta(t)=0 \quad (t\neq 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1 \end{cases}$$



$$p(t)=\frac{1}{\Delta}[\varepsilon(t+\frac{\Delta}{2})-\varepsilon(t-\frac{\Delta}{2})]$$

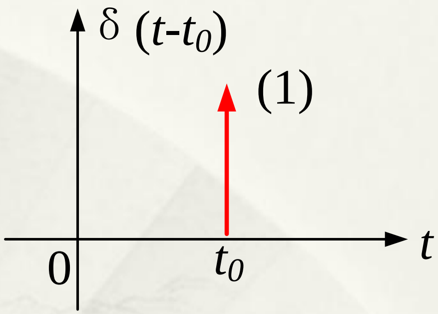


$$\Delta\to 0 \qquad \frac{1}{\Delta}\to\infty$$

$$\lim_{\Delta\to 0} p(t)=\delta(t)$$

（2） 单位冲激函数的延迟

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 \quad (t\neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1 \end{cases}$$



（3） 单位冲激函数的性质

① 冲激函数对时间的积分等于阶跃函数

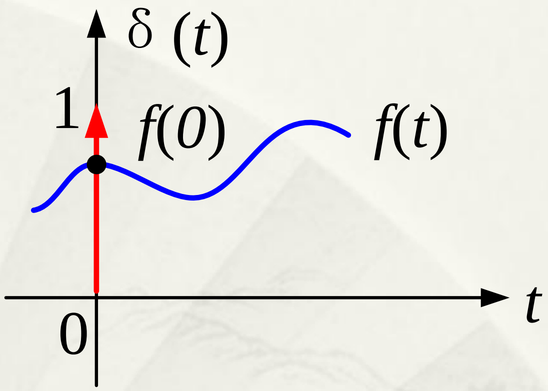
$$\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & t<0_- \\ 1 & t>0_+\end{cases}=\varepsilon\ (t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon\ (t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$$

② 冲激函数的‘筛分性’

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

$$f(0)\delta(t)$$



同理 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$

（要求f(t)在t_0处连续）

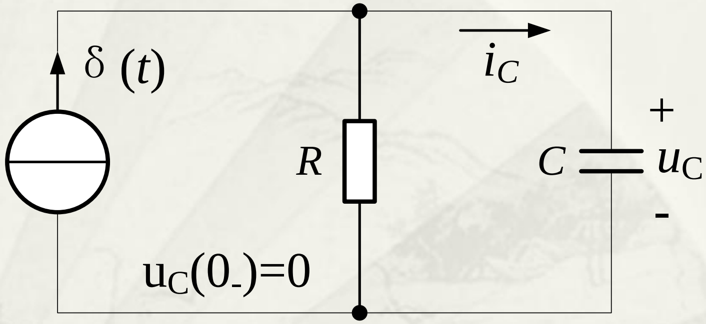
[例] $\int_{-\infty}^{\infty}(\sin t + t)\delta(t-\frac{\pi}{6})\mathrm{d}t$

$$= \sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}=1.02$$

2. 一阶电路的冲激响应

冲激响应 ⟶ 激励为单位冲激函数时，电路中产生的零状态响应。

【例】求单位冲激电流激励下的RC电路的零状态响应。



解：分二个时间段考虑冲激响应

(1) t 在 $0_- \to 0_+$间 电容充电，方程为

$$C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}+\frac{u_c}{R}=\delta(t)$$

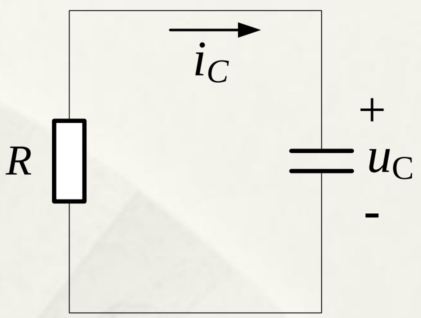
$$\int_{0_-}^{0_+} C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\int_{0_-}^{0_+}\frac{u_C}{R}\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \quad \longrightarrow \quad C[u_C(0_+)-u_C(0_-)]=1$$

$$\longrightarrow \quad u_C(0_+)=\frac{1}{C}\neq u_C(0_-)$$

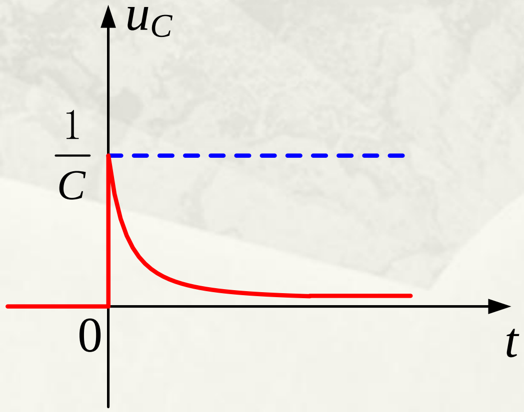
电容中的冲激电流使电容电压发生跃变。

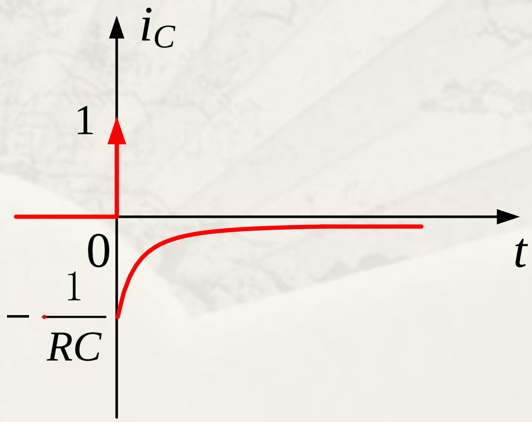
(2) $t > 0_+$ 为零输入响应（*RC*放电）

$$u_C = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \ge 0_+ \qquad i_C = -\frac{u_C}{R} = -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \ge 0_+$$

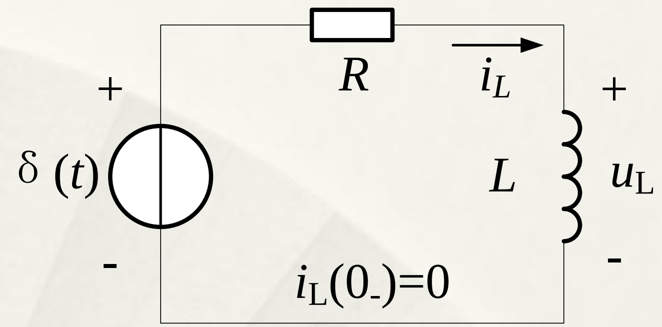


$$\begin{cases} u_C = \dfrac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \\ i_C = \delta(t) - \dfrac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \end{cases}$$





【例】求单位冲激电压激励下的RL电路的零状态响应。



解：分二个时间段考虑冲激响应

(1) t 在 $0_- \to 0_+$间

$$Ri_L + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \delta(t)$$

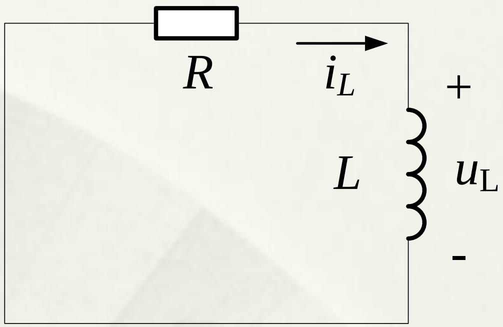
$$\int_{0_-}^{0_+} Ri_L \mathrm{d}t + \int_{0_-}^{0_+} L\frac{di_L}{dt}\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \Rightarrow L\left[i_L(0_+) - i_L(0_-)\right] = 1$$

$$\Rightarrow i_L(0_+) = \frac{1}{L} \neq i_L(0_-)$$

电感上的冲激电压使电感电流发生跃变。

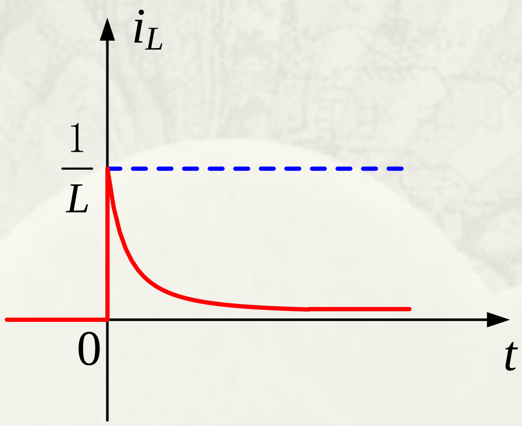
(2) $t > 0_+$ 为零输入响应（RL放电）

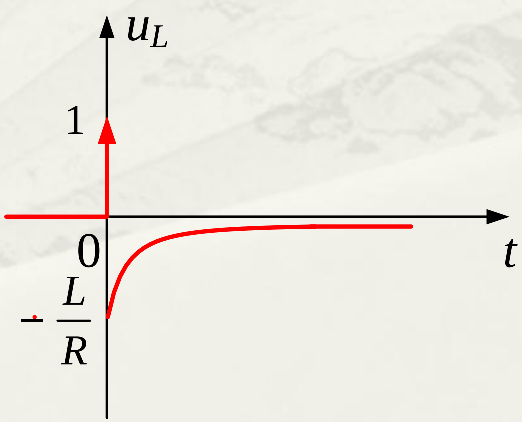
$$\tau = \frac{L}{R} \qquad i_L(0_+) = \frac{1}{L} \qquad i_L = \frac{1}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0_+$$



$$u_L = -i_L R = -\frac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0_+$$

$$\begin{cases} i_L = \dfrac{1}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t) \\ u_L = \delta(t) - \dfrac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t) \end{cases}$$





3. 单位阶跃响应和单位冲激响应关系

激励e(t) → 零状态 → 响应r(t)

单位阶跃

$\varepsilon(t)$

单位阶跃响应

$s(t)$

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$

单位冲激

$\delta(t)$

单位冲激响应

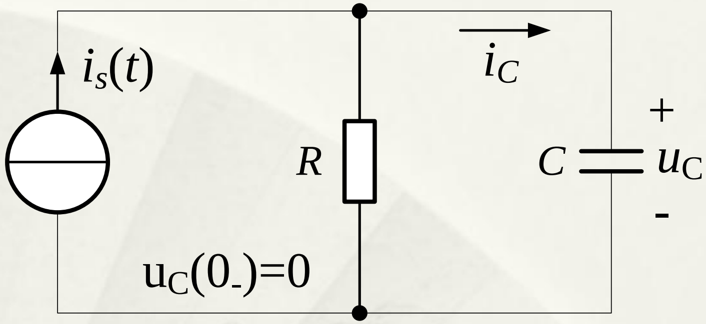
$h(t)$

$$h(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t)$$

【例】求:$i_s(t)$为单位冲激时电路响应$u_C(t)$和$i_C(t)$.

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

解：先求单位阶跃响应：



令 $i_S(t)=\varepsilon(t)$

$u_C(0_+)=0$ $u_C(\infty)=R$ $\tau=RC$

$$u_C(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$i_C(0_+)=1$ $i_C(\infty)=0$ $\quad i_C=e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$

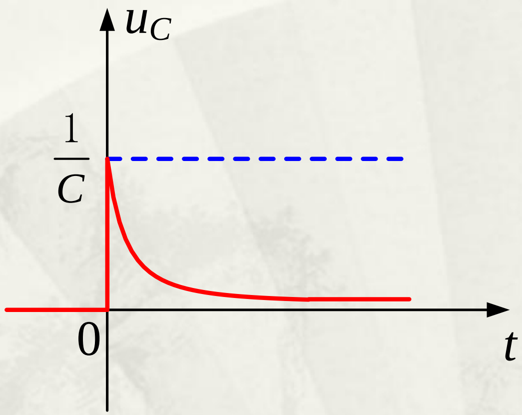
再求单位冲激响应,令： $i_S(t)=\delta(t)$

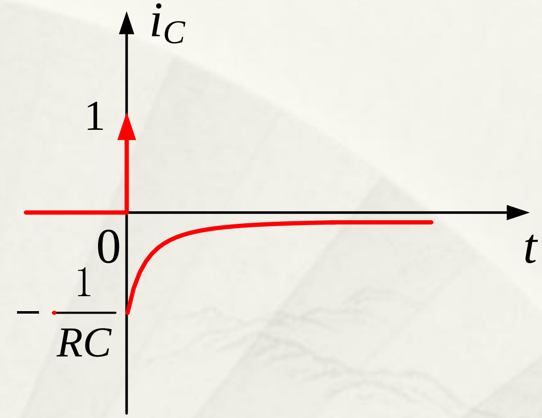
$$u_C=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\delta(t)+\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$i_C=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)]=e^{-\frac{t}{RC}}\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)=\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

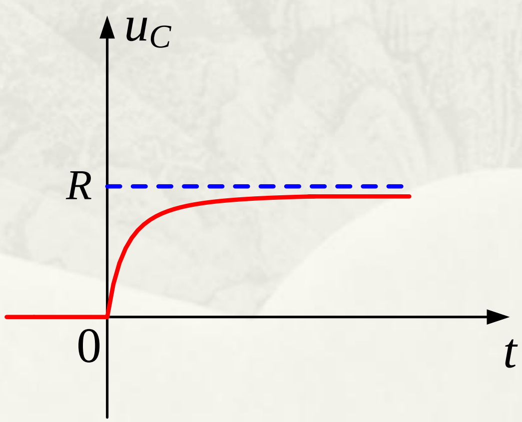
$$u_C = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \qquad i_C = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

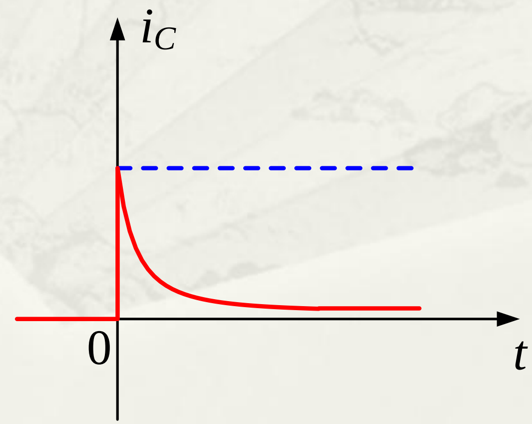
阶跃响应

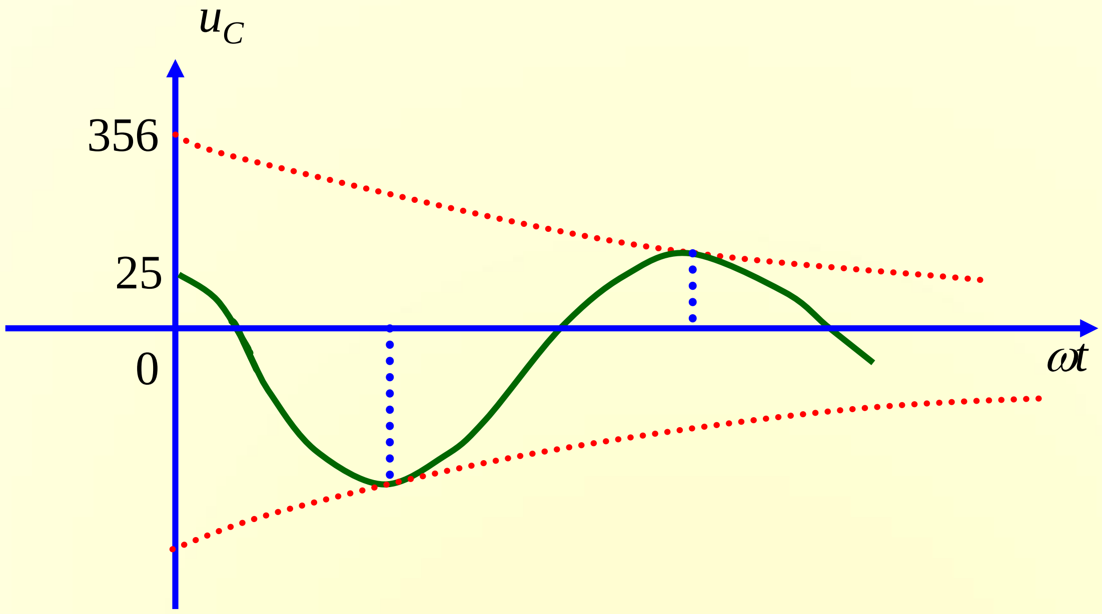




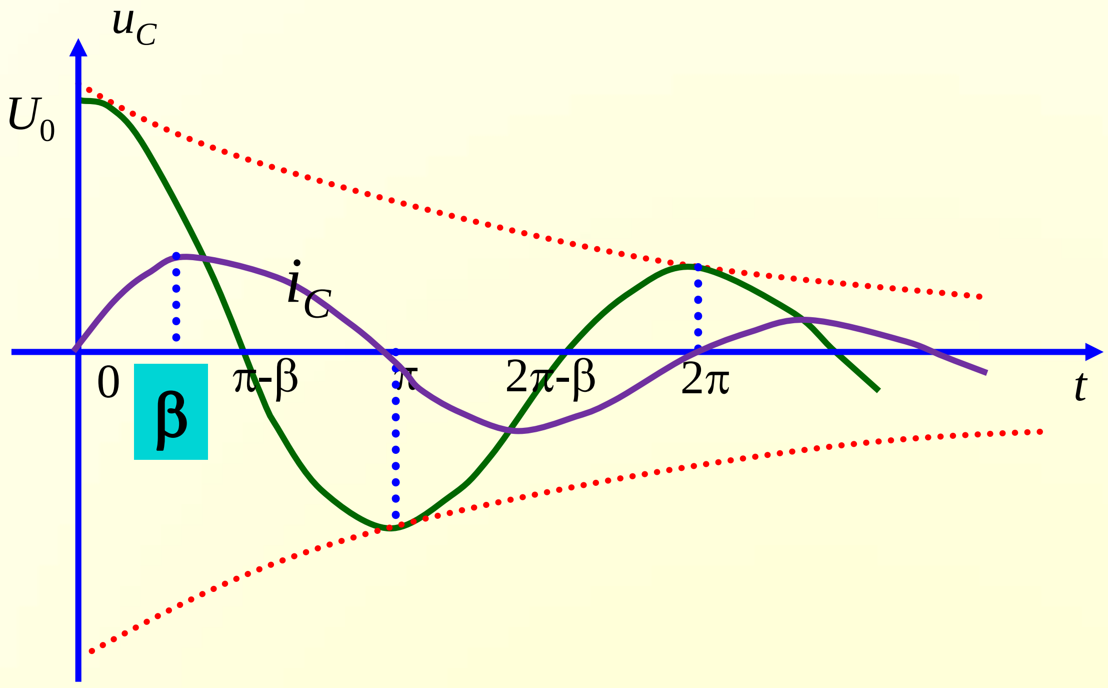
冲激响应



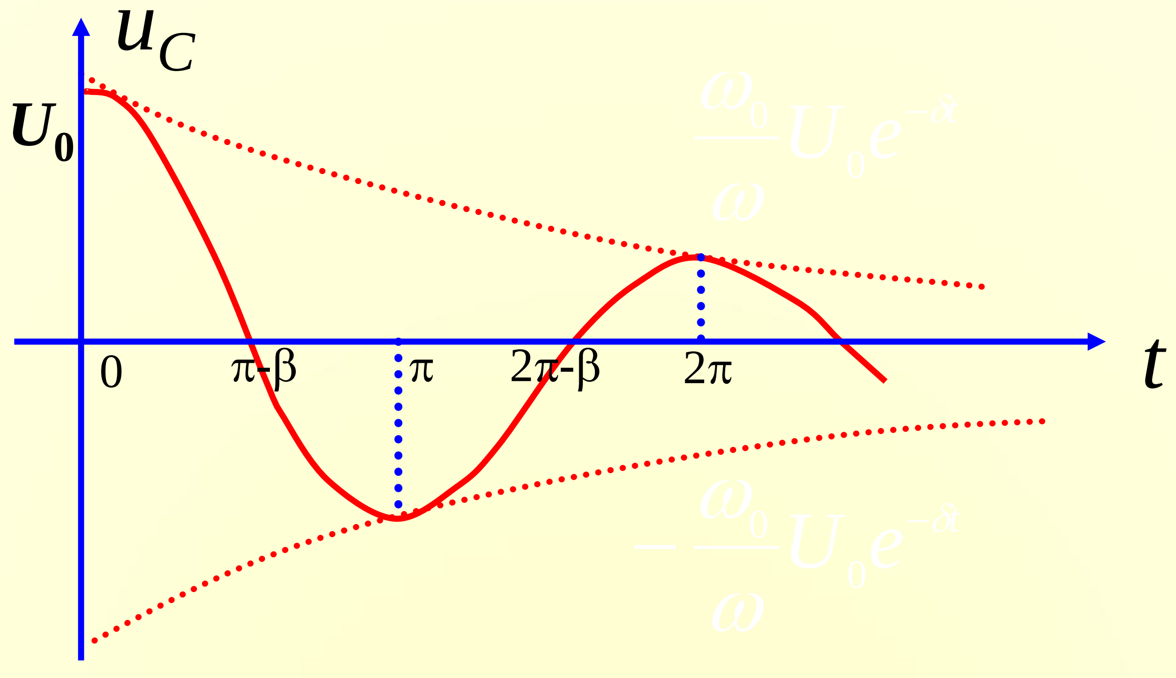




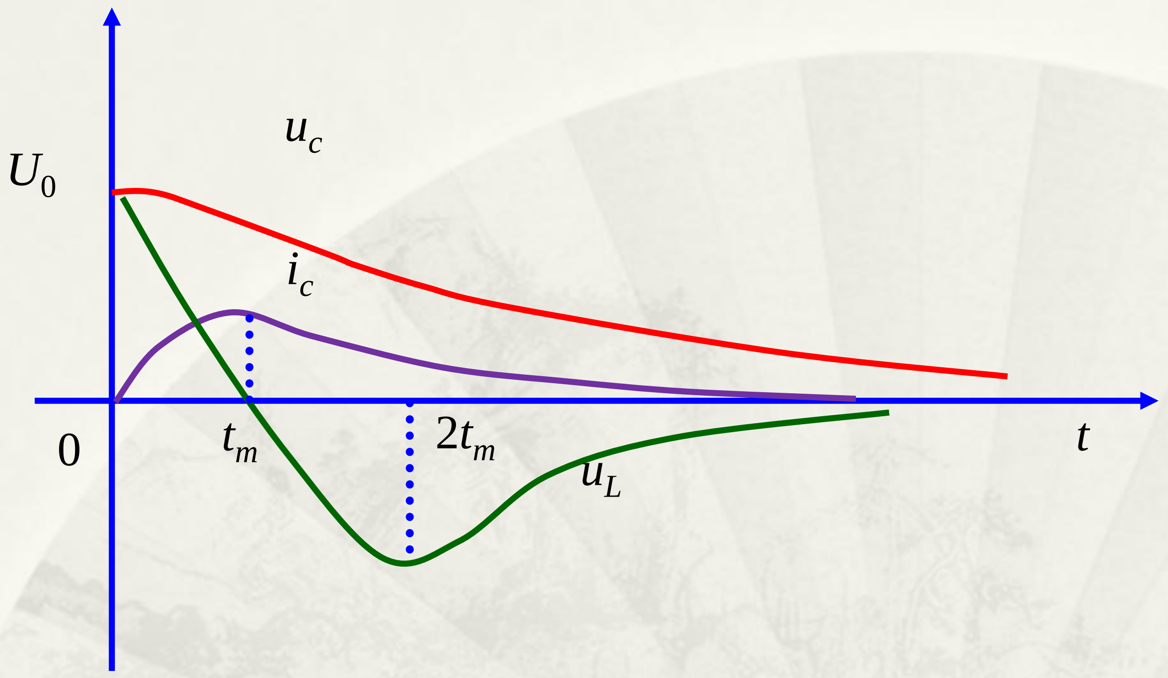
u_C
356
25
0
ωt



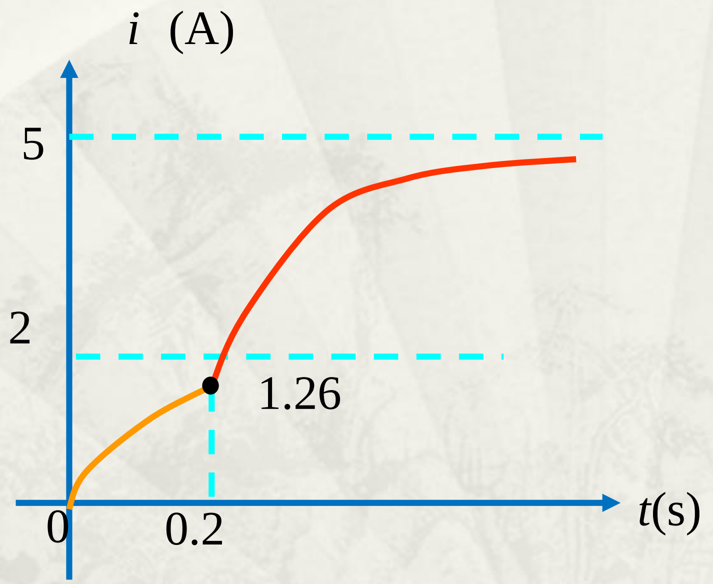
u_C
U_0
i_C
0
β
π-β
π
2π-β
2π
t



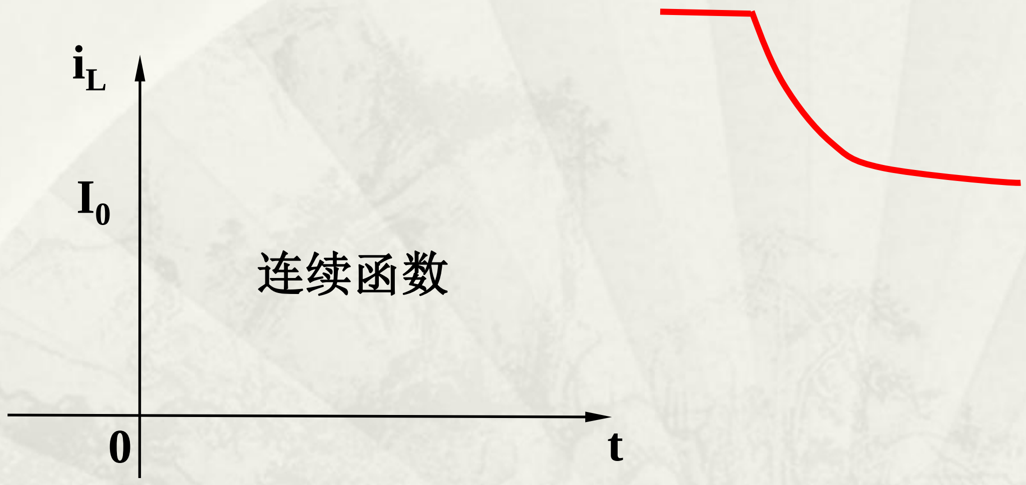
uC
U0
0
π-β
π
2π-β
2π
t



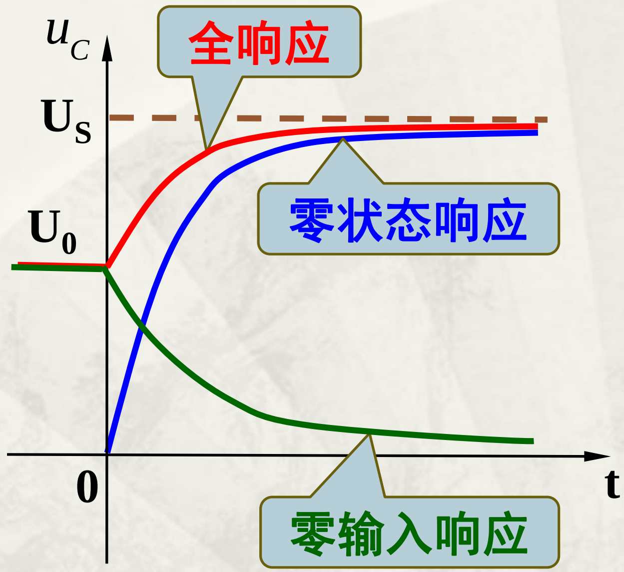
u_c
U_0
i_c
0
t_m
$2t_m$
t
u_L



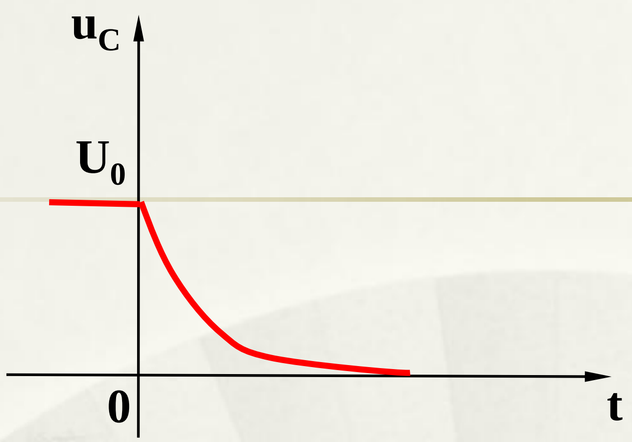
i (A)
5
2
1.26
0
0.2
t(s)



i_L
I_0
连续函数
0
t

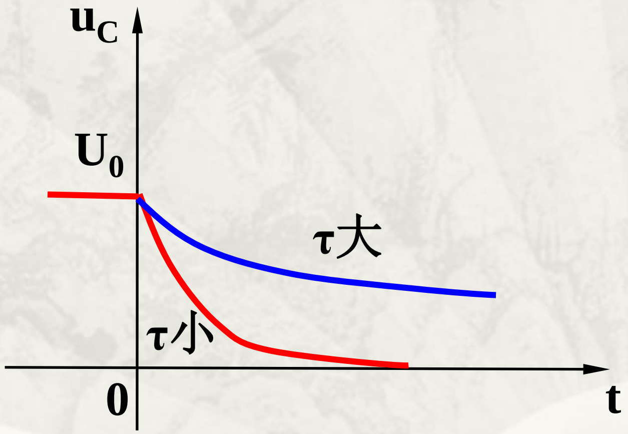


u_C
全响应
U_S
U_0
零状态响应
0
t
零输入响应

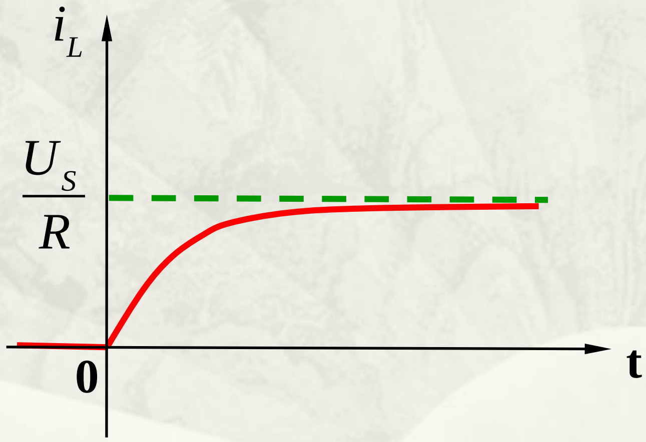


u_C
U_0
0
t

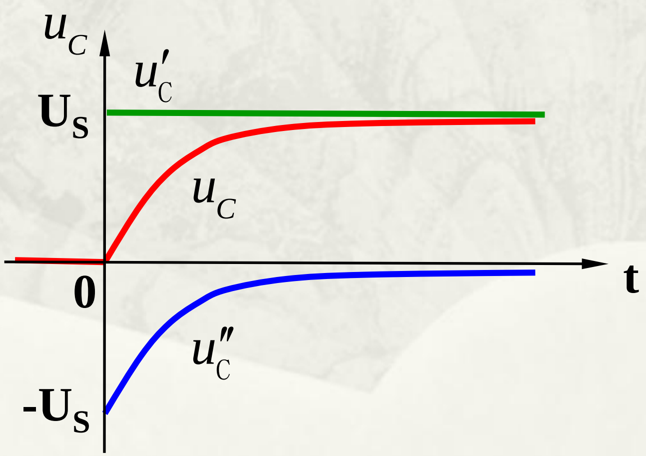
i
I_0
0
t



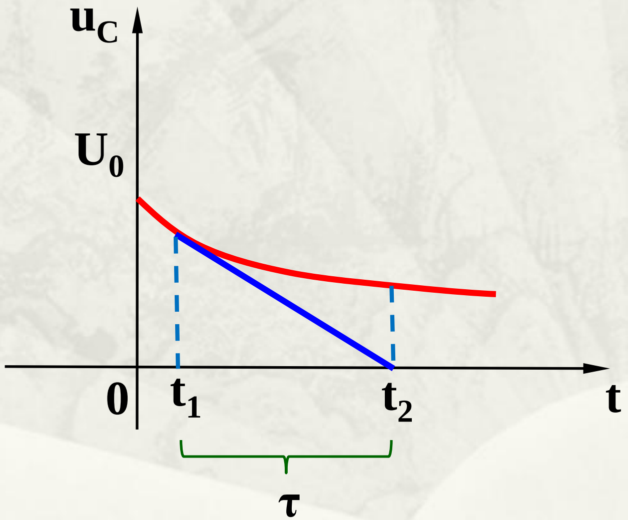
u_C
U_0
τ大
τ小
0
t

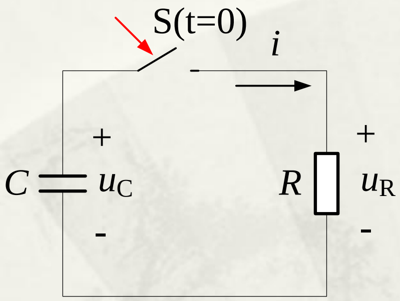

i_L
$\frac{U_S}{R}$
0
t

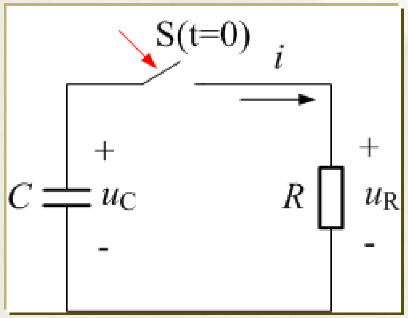
i
$\frac{U_S}{R}$
0
t

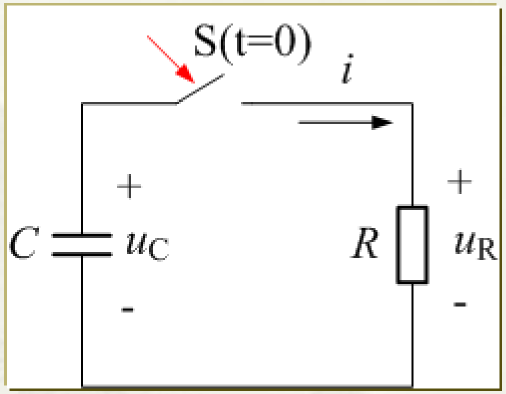


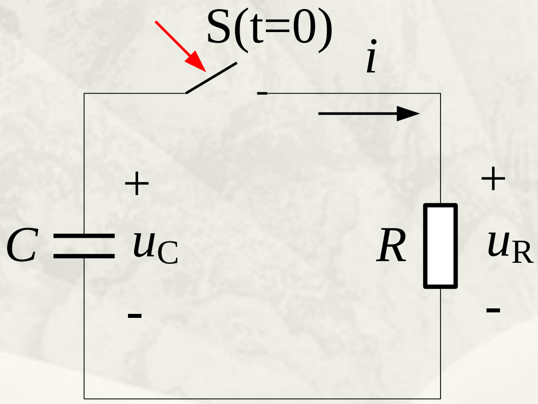
u_C
u_C'
U_S
u_C
0
t
u_C''
$-U_S$

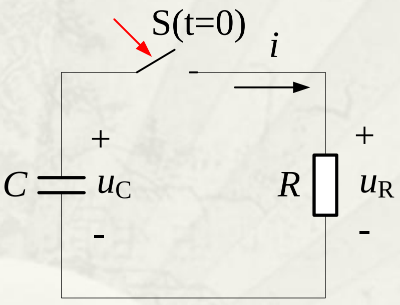

u_C
U_0
0
t_1
t_2
t
τ

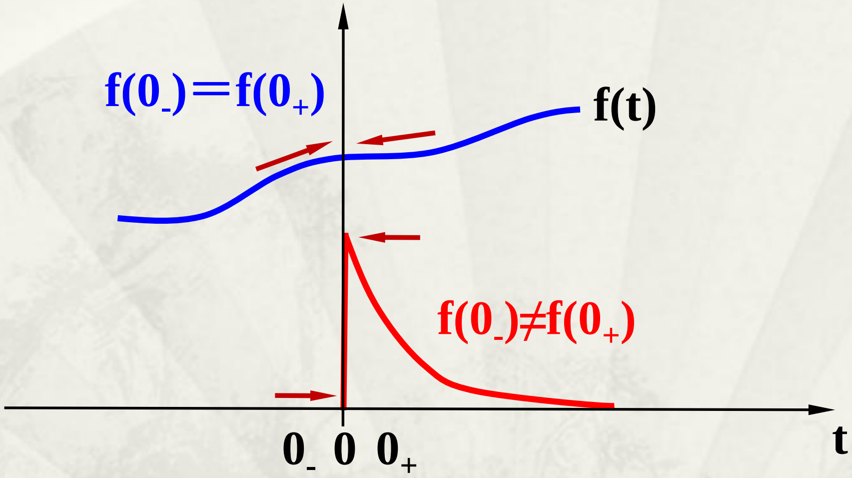

S(t=0)
i
+
C
u_C
-
R
u_R
+
-


S(t=0)
i
+
C
u_C
-
R
u_R
+
-


S(t=0)
i
+
C
u_C
-
R
u_R
+
-


S(t=0)
i
+
C
u_C
-
R
u_R
+
-


S(t=0)
i
+
C
u_C
-
R
u_R
+
-



$f(0_-)=f(0_+)$
$f(t)$
$f(0_-)\neq f(0_+)$
0_- 0 0_+
t