14.2 通路、回路

通路与回路是图论中两个重要而又基本的概念

本节所述定义一般说来既适合无向图，也适合有向图，否则将加以说明或分开定义。

定义14.11（通路、回路）

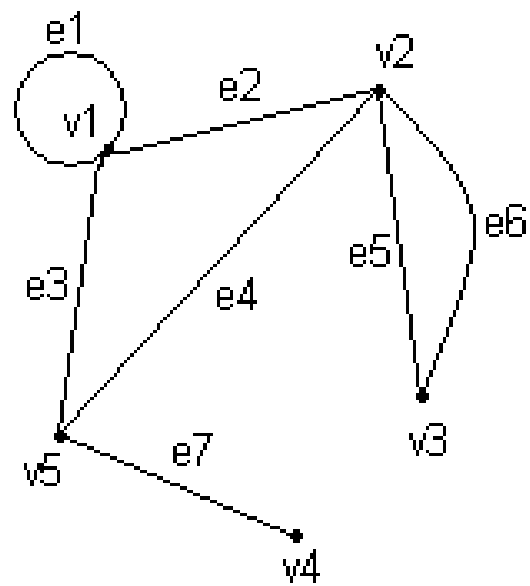
给定图G=<V，E>，设G中顶点和边的交替序列为 $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_n v_n$。

若Γ满足如下条件：对于i=1，2，...n，v_{i-1}和v_i是e_i的端点（在G是有向图时，要求v_{i-1}是e_i的始点，v_i是e_i的终点），则称是Γ为v_0到v_n的的**通路**。

v_0和v_n分别称为此通路的**起点**和**终点**。

Γ中边的数目n称为通路的**长度**

当$v_0=v_n$时，此通路称为**回路**。

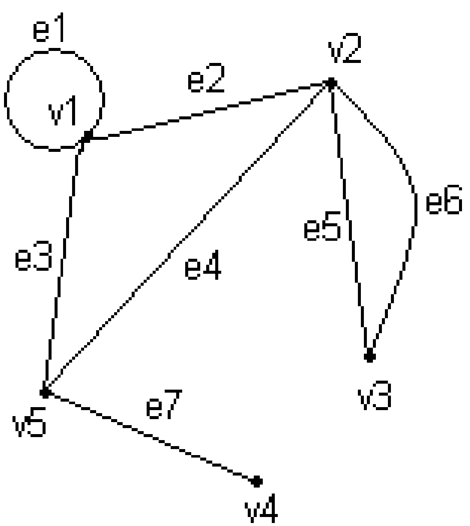


若Γ中所有边各异，则称Γ为**简单通路**，又若$v_0=v_n$，则称Γ为**简单回路**。

若Γ的所有顶点各异，所有边也各异，则称Γ为**初级通路**或**路径**，此时又若$v_0=v_n$，则称Γ为**初级回路**或**圈**。

将长度为奇数的圈称为**奇圈**，长度为偶数的圈称为**偶圈**。

有边重复出现的通路称为**复杂通路**，有边重复出现的回路称为**复杂回路**。



注意:

（1）有向图的通路、回路需要注意有向边方向。

（2）初级通路（回路）是简单通路（回路），但反之不真。

（3）通路、回路是图的子图。

（4）在无向图中，环和平行边构成的回路分别是长度为1和2的初级回路（圈）。

（5）在有向图中，环和两条方向相反边构成的回路分别是长度为1和2的初级回路（圈）。

（6）在简单无向图中，圈的长度至少为3。

（7）可以用边的序列表示通路或回路，如 $\Gamma = e_1 e_2 \ldots e_n$

（8）在简单图中可以只用顶点表示通路或回路，如 $\Gamma = v_0 v_1 \ldots v_n$

通路、回路的性质

定理14.5 在一个n阶图中，若从顶点vi到vj（vi≠vj）存在通路，则从vi到vj存在长度小于等于（n-1）的通路。

推论 在一个n阶图中，若从顶点vi到vj（vi≠vj）存在通路，则从vi到vj存在长度小于等于（n-1）的初级通路。

定理14.6在一个n阶图中，若存在vi到自身的回路，则从vi到自身存在长度小于等于n的回路。

推论 在一个n阶图中，若存在vi到自身的简单回路，则从vi到自身存在长度小于等于n的初级回路。

例14.4 无向完全图Kn（n≥3）中有几种非同构的圈？

解：

长度相同的圈都是同构的，

因而只有长度不同的圈才是非同构的。

易知Kn（n≥3）中含长度为3，4，…，n的圈，

所以Kn（n≥3）中有n-2种非同构的圈。

例14.5无向完全图K_3的顶点依次标定为a，b，c。在同构意义下和定义意义下K_3中各有多少个不同的圈。

解：在同构意义下，K_3只有一个长度为3的圈。

但在定义意义下，不同起点的圈是不同的，顶点间排列顺序不同的圈也是不同。

因此K_3中共有６个不同的长为３的圈：abca，acba，bacb，bcab，cabc，cbac。

14.3 图的连通性

连通的概念是定义在通路的基础之上的重要的概念

首先讨论无向图的连通性。

定义14.12（连通） 在一个无向图G=<V，E>中，如果顶点u，v之间存在通路，则称u，v是**连通的**，记作$u \sim v$。$\forall v \in V$，规定$v \sim v$。

由定义可知无向图中顶点之间的连通关系:

$\sim = \{\langle u, v\rangle \mid u, v \in V \wedge u\text{与}v\text{之间有通路}\}$

显然~是自反的、对称的、传递的，所以~是V上的等价关系。

定义14.13（无向连通图）若无向图G是平凡图或G中的任何两个顶点都是连通的，则称G是**连通图**，否则称G为**非连通图**或**分离图**。

例：完全图K_n（$n \geq 1$）为连通图，而零图N_n（$n \geq 2$）都是分离图。

定义14.14（连通分支）设无向图G=<V，E>，V关于顶点之间的连通关系~的商集V/~={V1,V2,...,Vk}，Vi为等价类，称导出子图G[Vi]（i=1,2,...,k）为G的**连通分支**，**连通分支数**k常记为**p(G)**。

或若无向图G由若干彼此不连通的子图组成，而每个子图自身是连通的，称这些子图为G的**连通分支。**

若G为连通图，则p(G)=1；

若G为非连通图，则p(G)≥2；

零图N_n（n≥2）的连通分支为p(G)= n。

思考题

n阶非连通的简单图的边数最多有多少条？最少呢？[p312 6(2)]

思考题

证明：若无向图G中恰有两个奇度顶点，这两个奇度顶点必然连通。[p314 39]

定义14.15（短程线）设u，v为无向图G中任意两个顶点，若u~v，称u，v之间长度最短的通路为u，v之间的**短程线**，短程线的长度称为u，v之间的**距离**，记作$d(u, v)$。当u，v不连通时，规定$d(u, v)=\infty$。

例如：在完全图K_n（$n\geq2$）中，任何两个顶点之间的距离都是1；

而在零图N_n（$n\geq2$）中，任何两个顶点之间的距离都是∞。

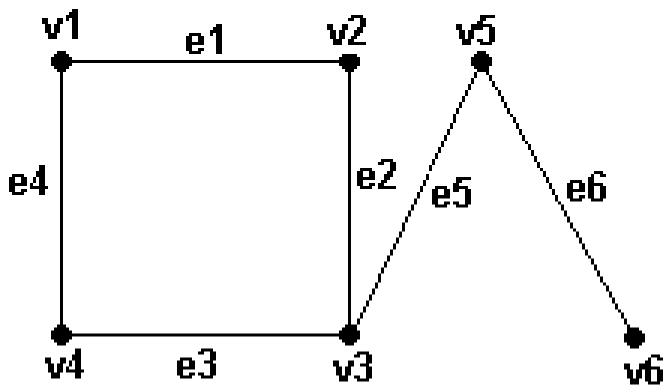
距离的性质：

1. $d(u, v)\geq0$。当u=v时，等号成立。
2. 具有对称性：$d(u, v)= d(v, u)$。
3. 满足三角不等式：

   $\forall u, v, w\in V(G)$，则$d(u, v)+ d(v, w)\geq d(u, w)$

定义14.16（点割集、割点）设无向图G=<V，E>，若存在V'⊂V，且V'≠∅，使得p(G−V')>p(G)，而对于任意的V''⊂V'，均有p(G−V'')=p(G)，则称V'是G的**点割集**。

若V'是单元集，即V'={v}，则称v为**割点**。

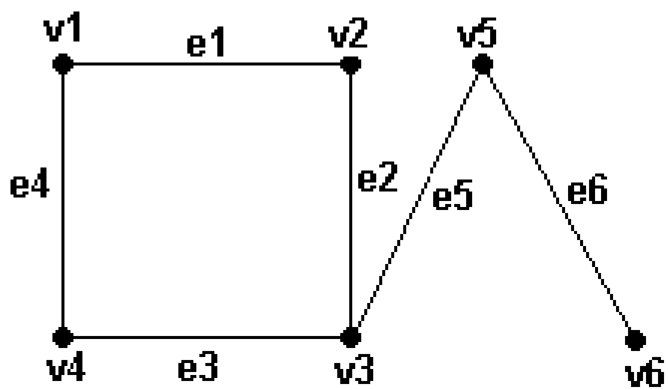


点割集： {v2, v4}，{v3}，{v5}

割点 ：v3，v5

定义14.17（边割集、桥） 设无向图$G=\langle V, E\rangle$，若存在$E'\subset E$，且$E'\neq\varnothing$，使得$p(G-E')>p(G)$，而对于任意的$E''\subset E'$，均有$p(G-E'')=p(G)$，则称E'是G的**边割集**，简称为**割集**。

若E'是单元集，即$E'=\{e\}$，则称e为**割边**或**桥**。



边割集 ：$\{e6\}$，$\{e5\}$，$\{e2, e3\}$，$\{e1, e2\}$，$\{e3, e4\}$，$\{e1, e4\}$，$\{e1, e3\}$，$\{e2, e4\}$

桥：e6，e5

下面讨论有向图的连通性

定义14.20在一个有向图D=<V，E>中，如果顶点u，v之间存在通路，则称u**可达**v，记作**u→v**。

规定任意的顶点总是可达自身的，即∀u∈V，**u→u**。

若u→v且v→u，则称u与v是**相互可达的**，记作**u↔v**，规定**u↔u**。

说明：→、↔都是V上的二元关系，并且↔是V上的等价关系。

定义14.21（短程线）设u，v为有向图D中任意两个顶点，若u→v，称u到v长度最短的通路为u到v的**短程线**。

短程线的长度称为u到v的**距离**，记作$d(u,v)$。当u不可达v时，规定$d(u,v)=\infty$。

距离的性质：

1．$d(u,v)\geq 0$。当$u=v$时，等号成立。

2．不具有对称性，即$d(u,v)\neq d(v,u)$。

3．满足三角不等式：

$\forall u,v,w\in V$，则$d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$

定义14.22（弱、单向、强连通图）

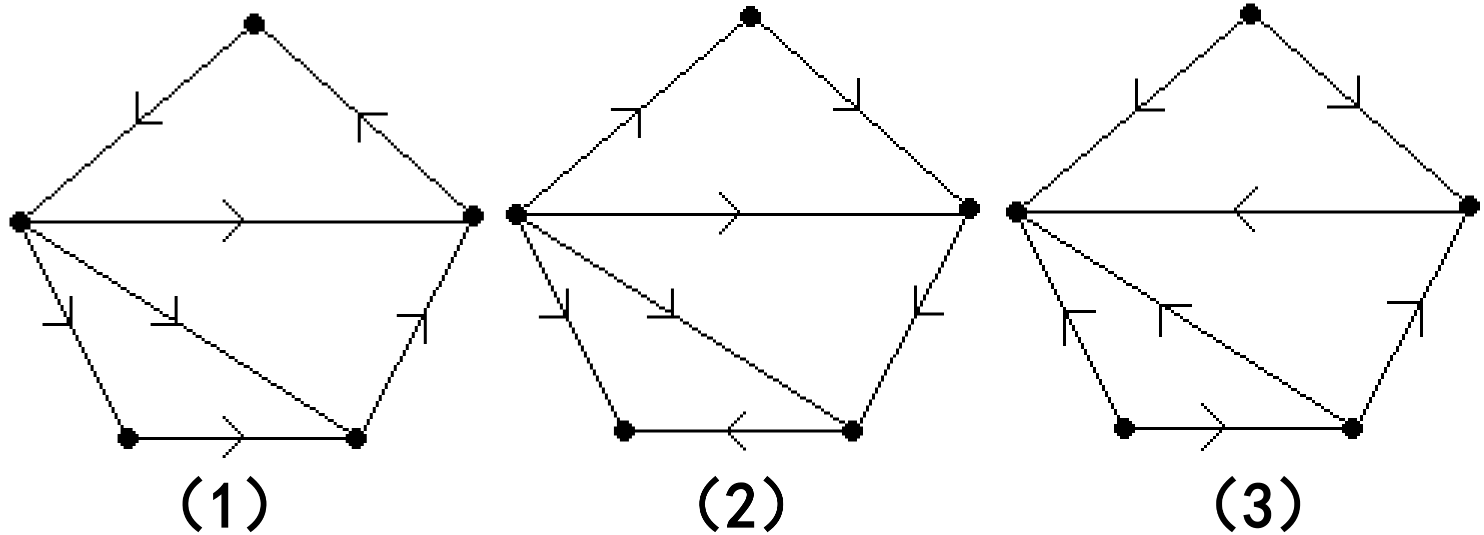
在一个有向图D=<V，E>中，如果D的基图是连通图，则称D是**弱连通图**。

如果对于任意的两个顶点u，v，u→v与v→u至少成立其一，则称D是**单向连通图**。

如果对于任意的两个顶点u，v，均有u↔v，则称D是**强连通图**。

说明：强连通图一定是单向连通图，单向连通图一定是弱连通图。

例：如下图

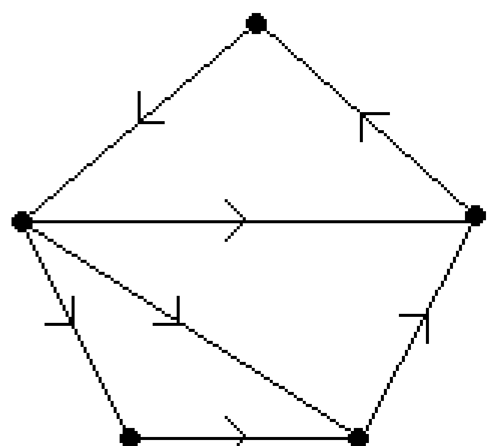


（1）是强连通图
（2）是单向连通图
（3）是弱连通图。

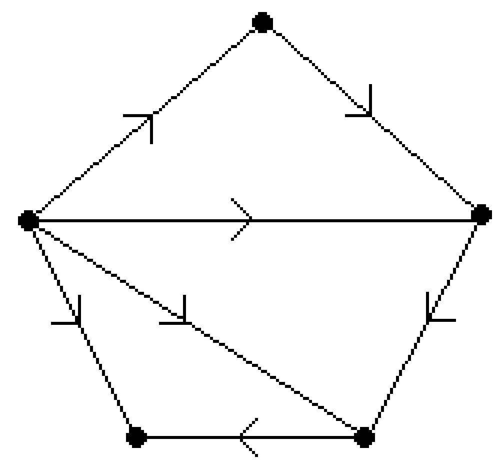
强连通图和单向连通图的判别定理

定理14.8 有向图D是强连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路。

定理14.9 有向图D是单向连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路。



(1)



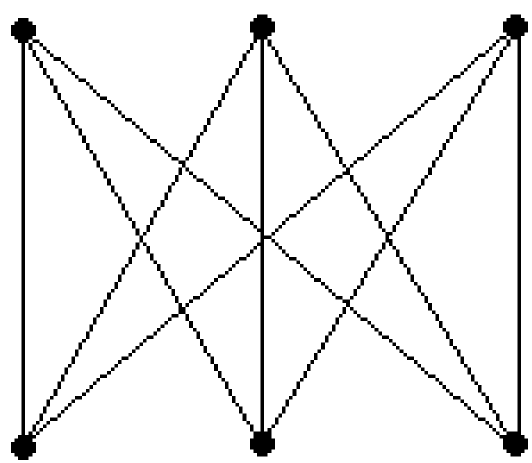
(2)

图（1）存在经过每个顶点的回路，所以是强连通图

图（2）存在经过每个顶点的通路，所以是单向连通图

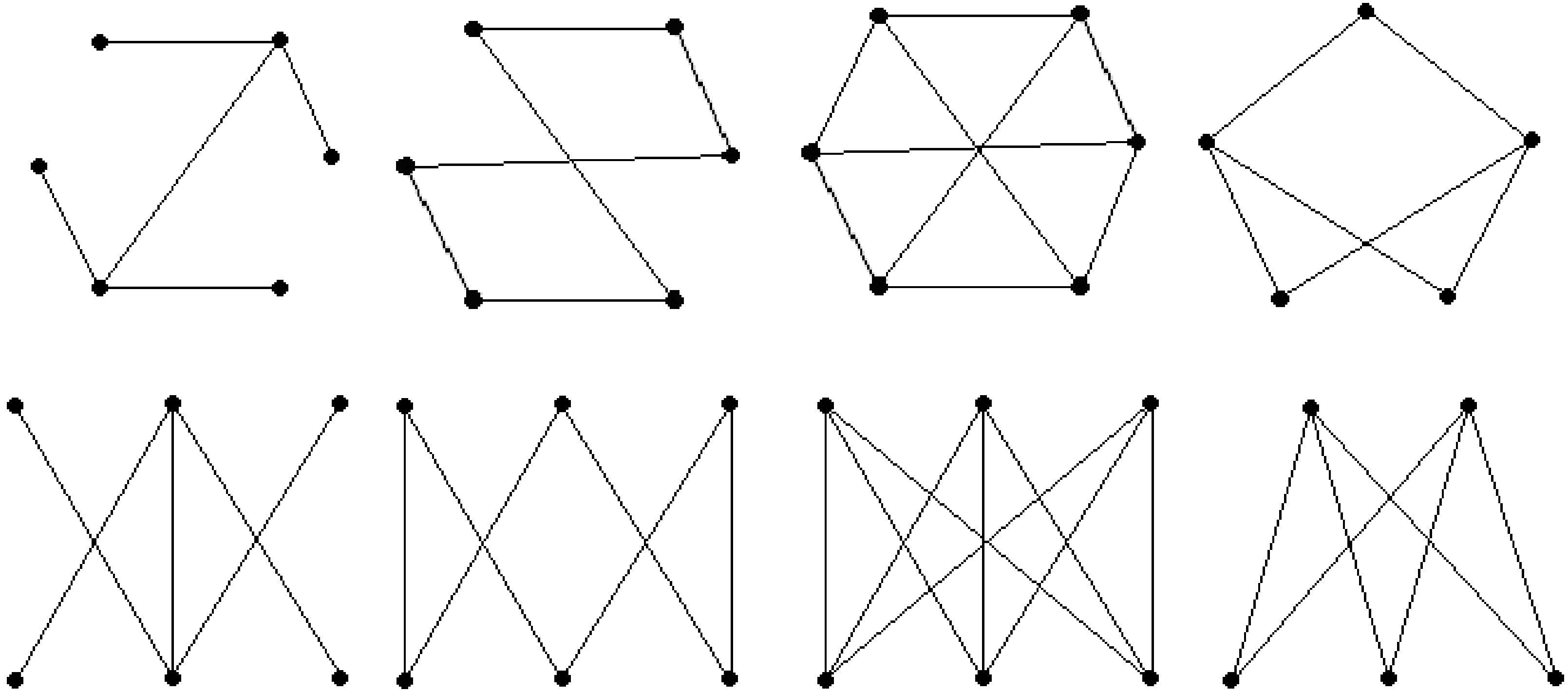
定义14.23（二部图）设G是一个无向图，如果能将V分成V1和V2（$V1 \cup V2=V$，$V1 \cap V2=\varnothing$），使得G中的每条边的两个端点都是一个属于V1，另一个属于V2，则称G为二部图（二分图、偶图），称V1和V2为互补顶点子集，常将二部图G记为$\langle V1, V2, E\rangle$。

又若G是简单二部图，V1中每个顶点均与V2中所有顶点相邻，则称G为完全二部图，记为$K_{r,s}$，其中$r=|V1|$，$s=|V2|$。



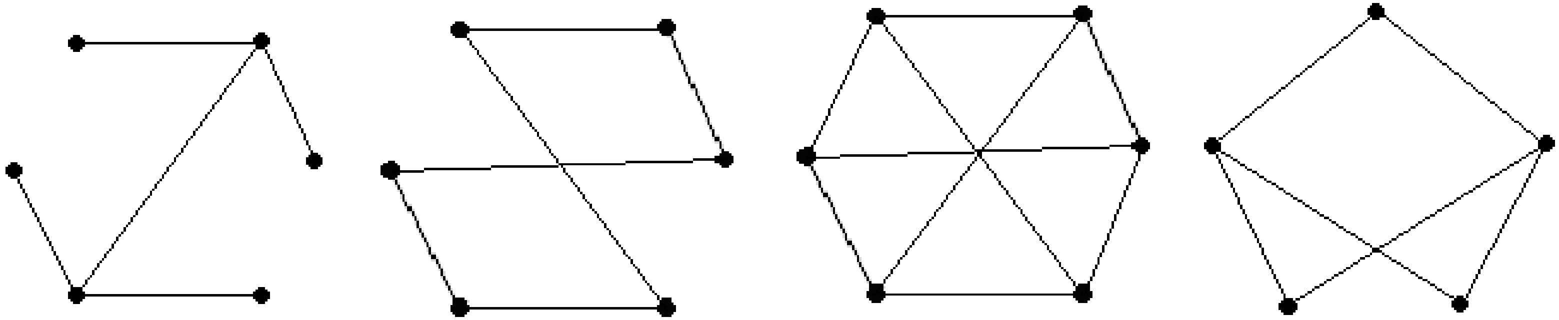
$K_{3,3}$

例：



$K_{3,3}$ $K_{2,3}$

例：



定理14.10（二部图的判别定理） 一个无向图G是二部图当且仅当G中无奇圈。