第五章 正弦稳态电路分析

5.1 复数

5.2 正弦量

5.3 相量法的基础

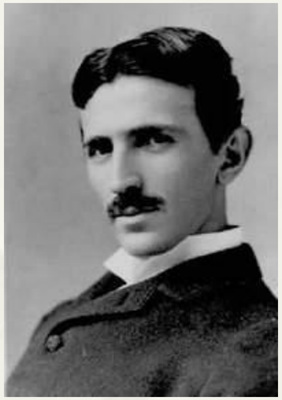
5.4 电路定律的相量形式

目的：交流电路的分析基础!

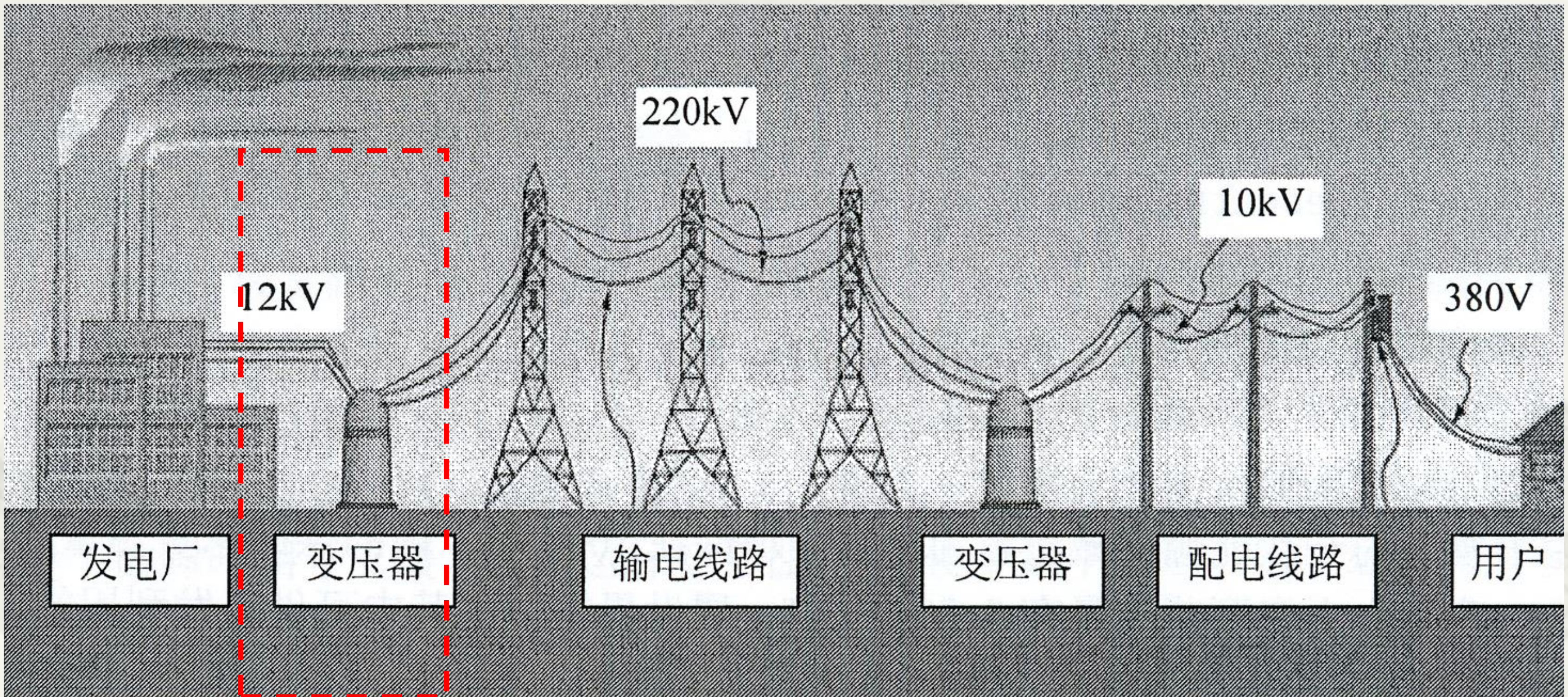
▲交流发电的起源

交流发电和供电系统由发明家尼古拉•特斯拉所发明，1888年，特斯拉获得西屋公司的企业家乔治·西屋的支持，展开为期6年的交流电发明。

再过了半年后，即替他研制的“交流电发电机”取得专利，并在美国电机工程师学会邀请发表和示范讲解“交流电”发电的研究成果。



▲交流电的产生及使用交流电的原因



只有在通过交流电的作用下，才能工作

回顾：直流电路中学习了哪些定理与方法?

三个基本工具：欧姆定理，KCL， KVL

三种基本方法：支路电流法、节点电压法、回路（网孔）电流法

四个基本定理：叠加定理、戴维南定理、替代定理、齐性定理

所有之前介绍的定理和方法在交流电路的是否可以使用?

交流电路中电阻功率如何计算?

1.KCL，KVL对于直流电路、交流电路、动态电路，在任何时刻均成立！

2.线性时不变电阻、电容、电感这三类元件的时域关系式在直流、交流电路中均成立！

$$u(t) = i(t)R$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

电容、电感在直流电路中如何处理？在交流电路中如何处理？

5.1 复数

1. 复数的表示形式

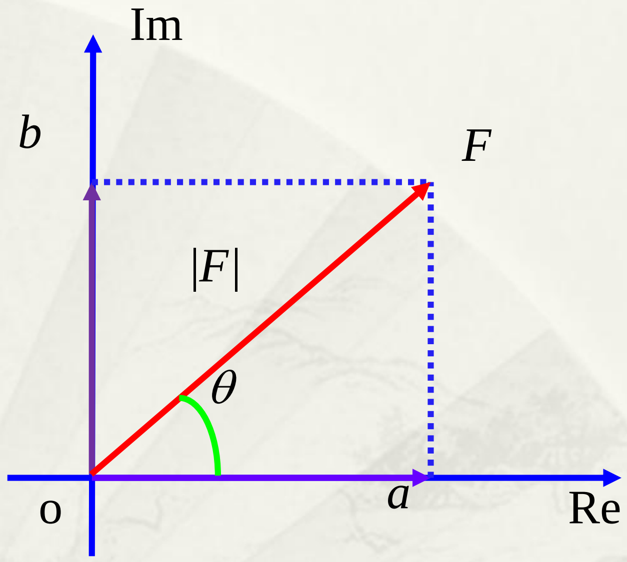
$F = a + \mathrm{j}b$ 代数式

（其中 $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ 为虚数单位）

$F = |F| e^{\mathrm{j}\theta}$ 指数式

$F = |F|(\cos\theta + j\sin\theta)$ 三角函数式

$F = |F| e^{\mathrm{j}\theta} = |F| \angle\theta$ 极坐标式

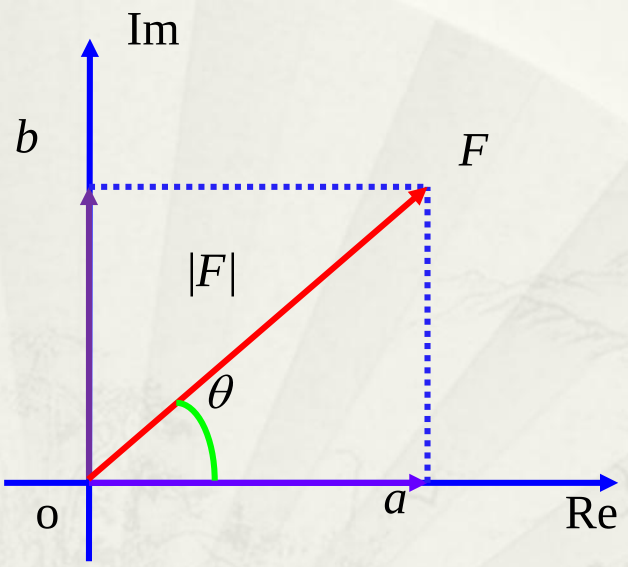


几种表示法的关系：

$$F = a + \mathrm{j}b$$

$$F = |F|e^{\mathrm{j}\theta} = |F|\angle\theta$$

$$\begin{cases} |F| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

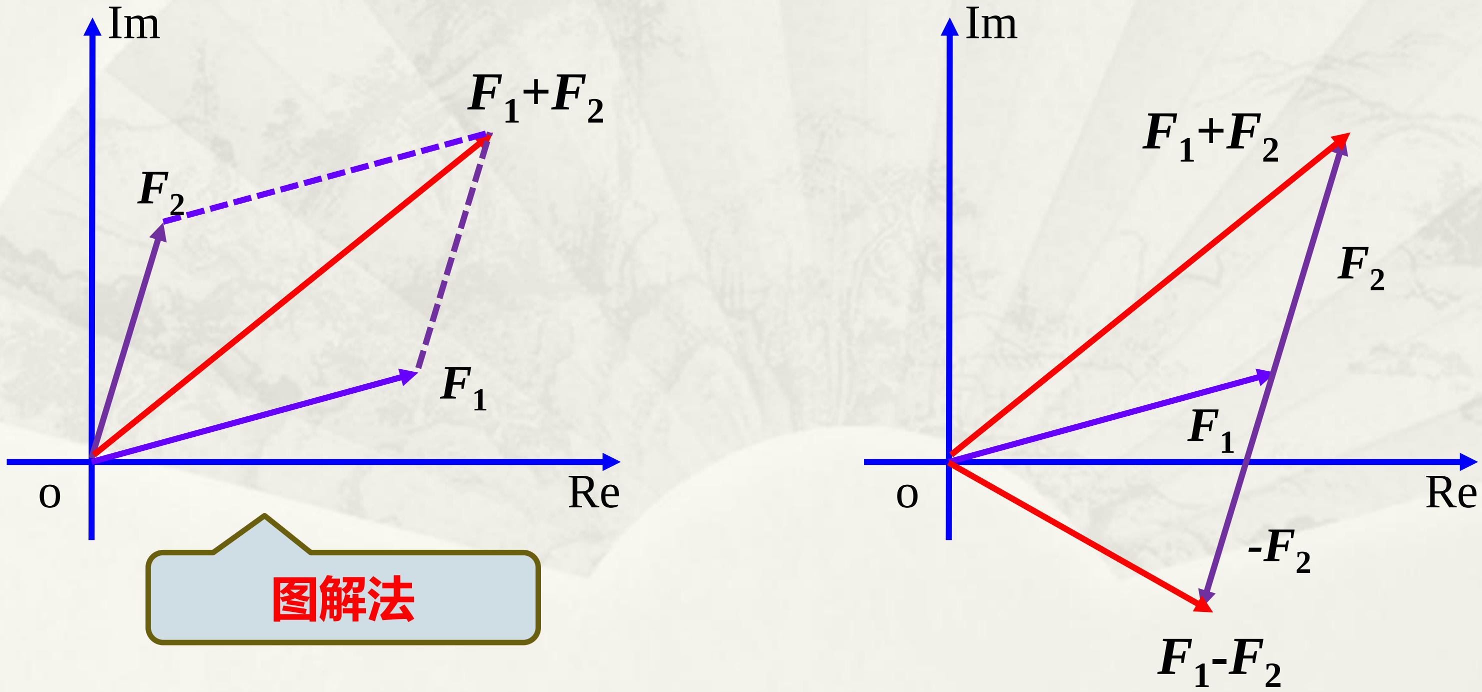


或 $\begin{cases} a = |F|\cos\theta \\ b = |F|\sin\theta \end{cases}$

2. 复数运算

① 加减运算 —— 采用代数式

若　$F_1=a_1+jb_1$，　$F_2=a_2+jb_2$　　则　$F_1 \pm F_2=(a_1 \pm a_2)+j(b_1 \pm b_2)$



② 乘除运算 —— 采用极坐标式

若 $F_1=|F_1|\ \ \theta_1$ ， $F_2=|F_2|\ \ \theta_2$

则 $F_1 \cdot F_2 = |F_1|e^{j\theta_1} \cdot |F_2|e^{j\theta_2} = |F_1||F_2|e^{j(\theta_1+\theta_2)}$

$$= |F_1||F_2|\angle\theta_1+\theta_2$$

模相乘 角相加

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{|F_1|\ \angle\theta_1}{|F_2|\ \angle\theta_2} = \frac{|F_1|\,e^{j\theta_1}}{|F_2|\,e^{j\theta 2}} = \frac{|F_1|}{|F_2|}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

$$= \frac{|F_1|}{|F_2|}\ \angle\theta_1-\theta_2$$

模相除 角相减

【例1】 $5\angle 47^\circ + 10\angle -25^\circ = ?$

解：原式= $(3.41 + j3.657) + (9.063 - j4.226)$

$$= 12.47 - j0.569$$

【例2】 $220\angle 35^\circ + \dfrac{(17 + j9)(4 + j6)}{20 + j5} = ?$

解：原式= $180.2 + j126.2 + \dfrac{19.24\angle 27.9^\circ \times 7.211\angle 56.3^\circ}{20.62\angle 14.04^\circ}$

$$= 180.2 + j126.2 + 6.728\angle 70.16^\circ$$

$$= 180.2 + j126.2 + 2.238 + j6.329$$

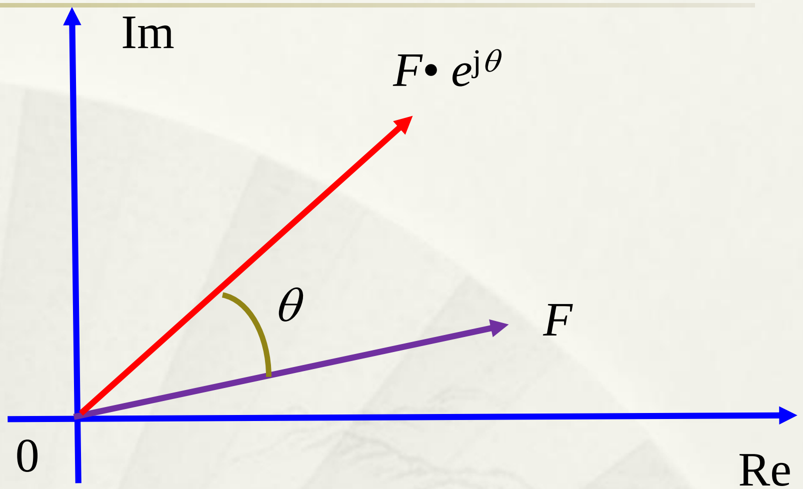
$$= 182.5 + j132.5 = 225.5\angle 36^\circ$$

③ 旋转因子

复数 $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta=1\angle\theta$

为旋转因子

$F\cdot e^{j\theta}$



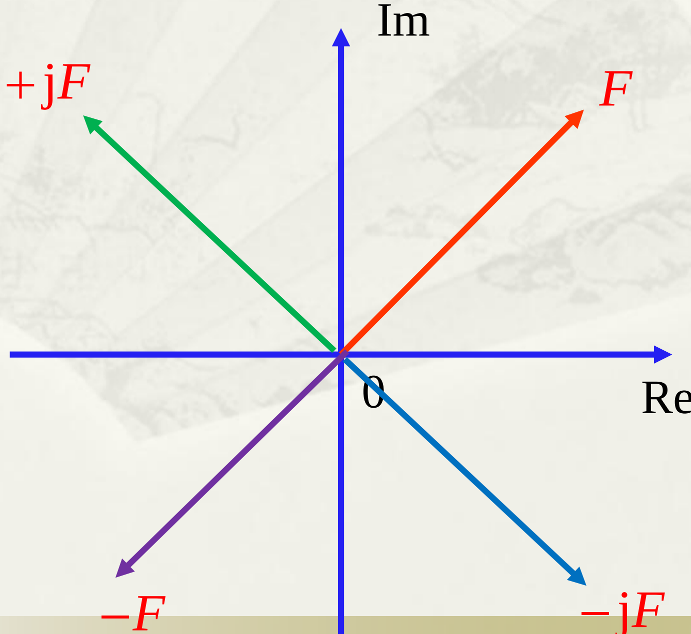
特殊旋转因子

$$\theta=\frac{\pi}{2},$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}=+j$$

$$\theta=-\frac{\pi}{2},\quad e^{j-\frac{\pi}{2}}=\cos(-\frac{\pi}{2})+j\sin(-\frac{\pi}{2})=-j$$

$$\theta=\pm\pi,\quad e^{j\pm\pi}=\cos(\pm\pi)+j\sin(\pm\pi)=-1$$

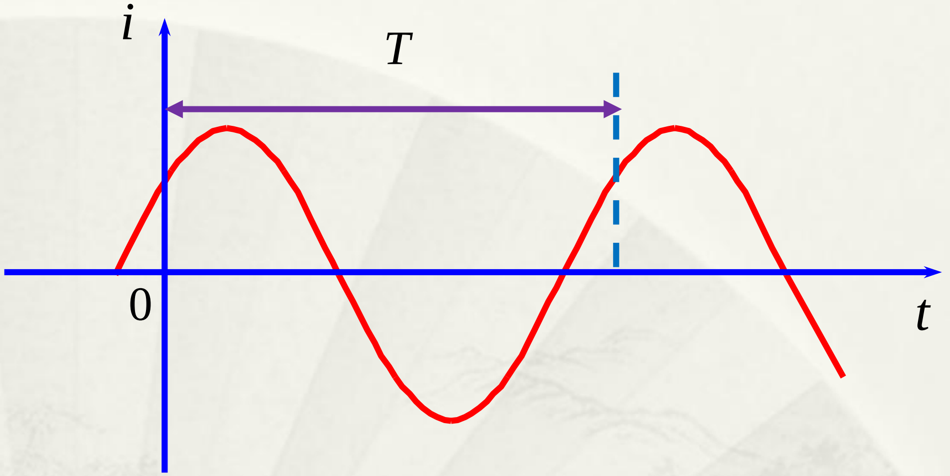


+j, －j, -1 都可以看成旋转因子。

5.2 正弦量

1. 正弦量

●瞬时值表达式



$i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi)$

正弦量为周期函数 $f(t)=f(t+kT)$

●周期 T 和频率 f

周期 T：重复变化一次所需的时间。 单位：秒s

$$f=\frac{1}{T}$$

频率 f：每秒重复变化的次数。 单位：赫(兹)Hz

▲正弦电路的概念及意义

激励和响应均为同频率的正弦量的线性电路（正弦稳态电路）称为正弦电路或交流电路。

正弦交流电在电力系统和电子技术领域占有十分重要的地位，是工农业生产和和日常生活中所使用的电能的主要形式，比直流电具有更为广泛的应用。这主要因为：

① 正弦函数是周期函数，其加、减、求导、积分运算后仍是同频率的正弦函数；

② 正弦信号容易产生、传送和使用。

③ 利用变压器可灵活地将交流电压升高或降 低，因而又具有输送经济、控制方便和使用安全的特点

另外，正弦信号是一种基本信号，任何非正弦周期信号可以分解为按正弦规律变化的分量。

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} A_k \cos(k\omega t+\theta_k)$$

因此，研究正弦交流电路具有重要的理论价值和实际意义。

2. 正弦量的三要素

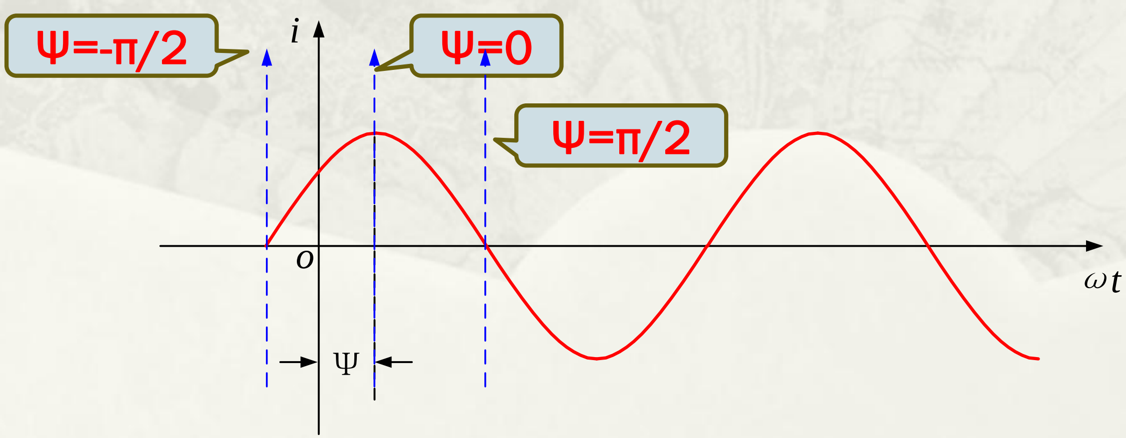
对于一正弦量 $i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi)$，可看出其构成要素有:

(1) 幅值 (振幅、最大值) I_m → 反映正弦量变化幅度的大小。

(2) 角频率 ω → 相位变化的速度，反映正弦量变化快慢。

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$$ 单位: rad/s ，弧度/秒

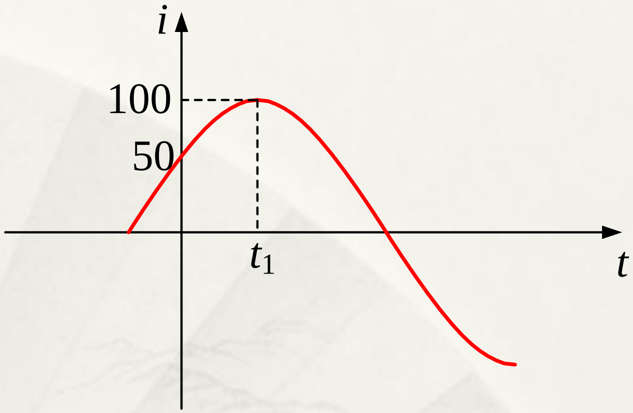
(3) 初相位 Ψ → 反映正弦量的计时起点，常用角度表示。



同一个正弦量，计时起点不同，初相位不同。

一般规定：$|\psi| \le \pi$ 。

【例】已知正弦电流波形如图，ω＝10³rad/s，**1.**写出 $i(t)$ 表达式；**2.**求最大值发生时间 t_1



解：$i(t)=100\cos(10^3 t+\psi)$

$t=0 \rightarrow 50=100\cos\psi$ ➡ $\psi=\pm\pi/3$

➡ $\psi=-\dfrac{\pi}{3}$

由于最大值发生在计时起点右侧

$$i(t)=100\cos(10^3 t-\frac{\pi}{3})$$

波形取最大值时有 $10^3 t_1=\pi/3$ ➡ $t_1=\dfrac{\pi/3}{10^3}=1.047\text{ms}$

3. 同频率正弦量的相位差

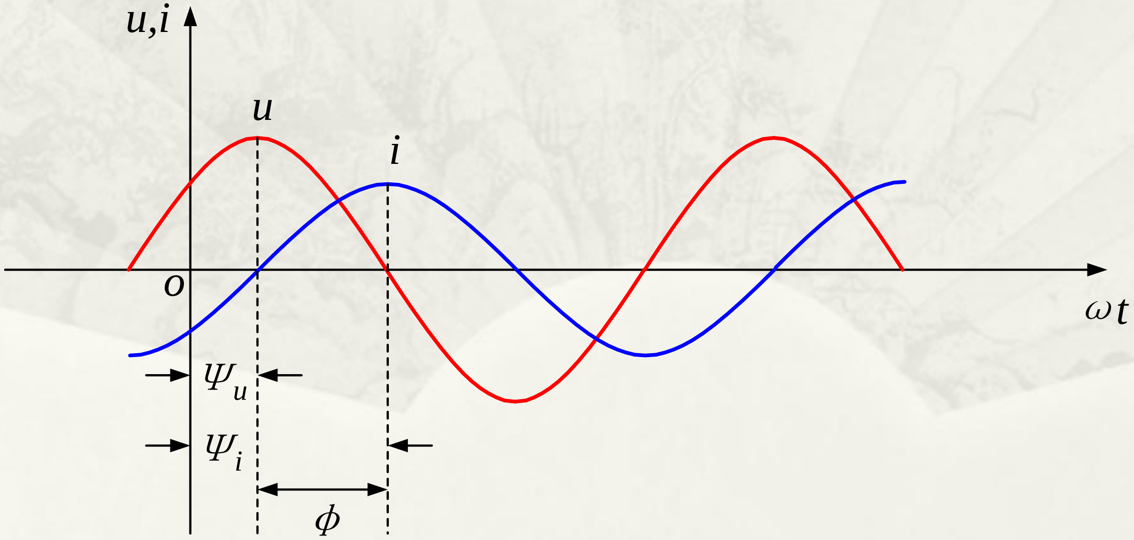
设 $u(t)=U_m\cos(\omega t+\psi_u)$, $i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi_i)$

规定： $|\varphi|\le\pi$ (180°)

相位差 ： $\varphi = (\omega t+\psi_u) - (\omega t+\psi_i) = \psi_u - \psi_i$

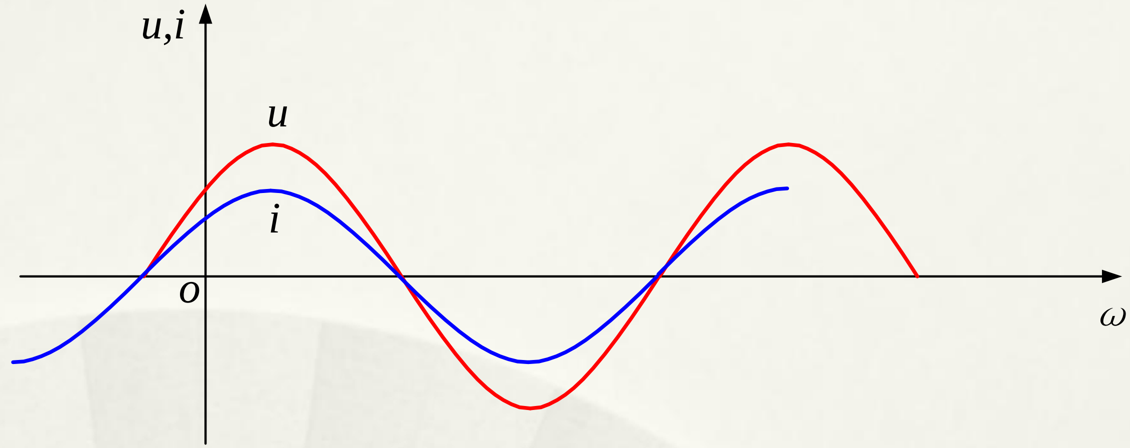
等于初相位之差

- $\varphi>0$， u超前i φ 角，或i 滞后 u φ 角, (u 比 i 先到达最大值);
- $\varphi<0$， i 超前 u φ 角，或u 滞后 i φ 角, i 比 u 先到达最大值）。

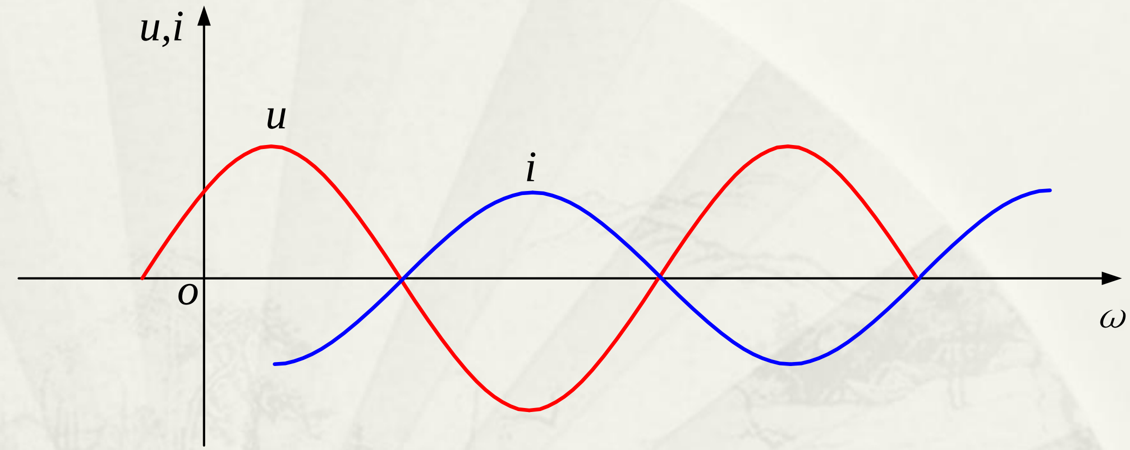


▲特殊相位关系

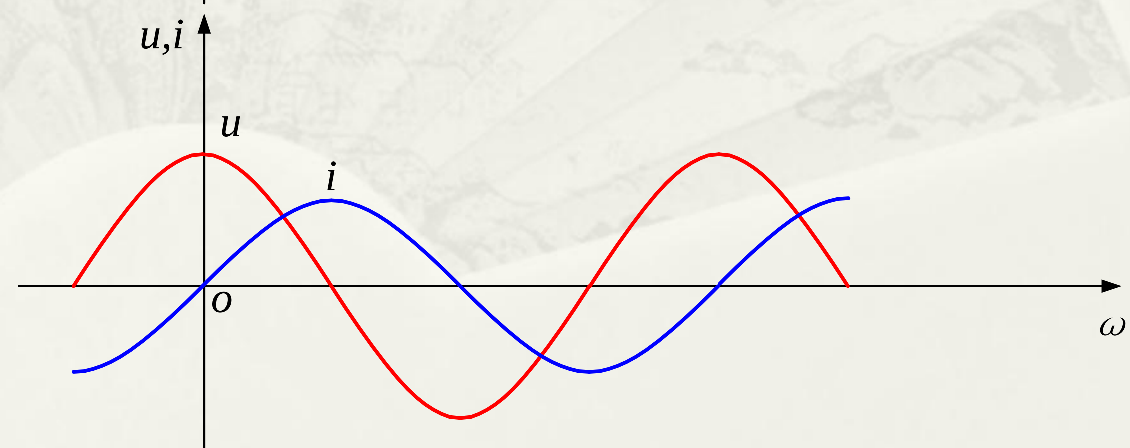
$\varphi = 0$， 同相



$\varphi = \pm\pi$ $(\pm 180^{\circ})$， 反相



$\varphi = \pi/2$：u 领先 i $\pi/2$



【例】计算下列两正弦量的相位差。

(1) $i_1(t)=10\cos(100\pi t+3\pi/4)$　　$\phi=3\pi/4-(-\pi/2)=5\pi/4>0$

$i_2(t)=10\cos(100\pi t-\pi/2)$　　$\longrightarrow$ $\phi=5\pi/4-2\pi=-3\pi/4$

(2) $i_1(t)=10\cos(100\pi t+30^0)$　　$i_2(t)=10\cos(100\pi t-105^0)$

$i_2(t)=10\sin(100\pi t-15^0)$　　$\longrightarrow$ $\phi=30^0-(-105^0)=135^0$

(3) $u_1(t)=10\cos(100\pi t+30^0)$

$u_2(t)=10\cos(200\pi t+45^0)$

角频率$\omega_1\neq\omega_2$，不能比较相位

(4) $i_1(t)=5\cos(100\pi t-30^0)$　　$i_2(t)=3\cos(100\pi t-150^0)$

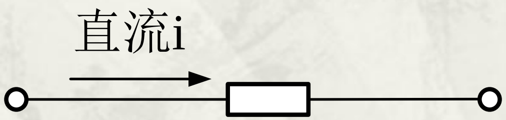
$i_2(t)=-3\cos(100\pi t+30^0)$　　$\longrightarrow$ $\phi=-30^0-(-150^0)=120^0$

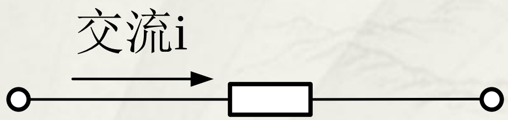
两个正弦量进行相位比较时应满足同频率、同函数、同符号，且在主值范围比较

4. 周期性电流、电压的有效值

周期性电流、电压的瞬时值随时间而变，为了衡量其平均效果工程上采用有效值来表示。

●周期电流、电压有效值定义





$$W = RI^2T \quad \overset{\text{能量相等}}{\Longleftrightarrow} \quad W = \int_0^T Ri^2(t)\mathrm{d}t$$

在相同的两个电阻中，分别通以正弦电流 I 和直流电流 I, 在一个周期内若周期电流 i 所做的功等于直流电流 I 所做的功，则把直流 I 称为周期电流 i 的有效值。

定义电流有效值 $I = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,\mathrm{d}t}$ 定义电压有效值 $U = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t}$

均方根值

- 正弦电流、电压的有效值

设 $i(t)=I_m\cos(\omega t+\Psi)$ $$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2(\omega t+\Psi)\,\mathrm{d}t}$$

$$\because \int_0^T \cos^2(\omega t+\Psi)\,\mathrm{d}t=\int_0^T \frac{1+\cos 2(\omega t+\Psi)}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t\Big|_0^T=\frac{1}{2}T$$

$$\therefore \quad I=\sqrt{\frac{1}{T}I_m^2\cdot\frac{T}{2}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=0.707I_m$$

$$\boxed{I_m=\sqrt{2}I}$$

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\Psi)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)$$

同理，可得正弦电压有效值与最大值的关系： $\boxed{U_m=\sqrt{2}U}$

若交流电压有效值为 ***U*=220V**， ***U*=380V**

其最大值为 **U_m≈311V** **U_m≈537V**

注意：

① 工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如设备铭牌额定值、电网的电压等级等。但绝缘水平、耐压值指的是最大值。因此，在考虑电器设备的耐压水平时应按最大值考虑。

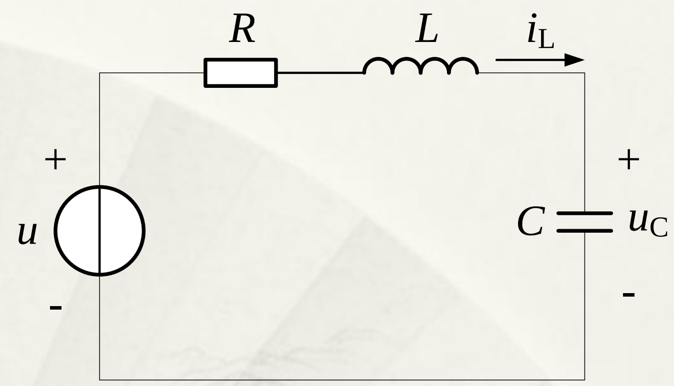
② 测量中，交流测量仪表指示的电压、电流读数一般为有效值。

③ 区分电压、电流的瞬时值、最大值、有效值的符号。

$$i, I_{\mathrm{m}}, I\ , \quad u, U_{\mathrm{m}}, U$$

5.3 相量法的基础

1. 问题的提出



电路方程是微分方程:

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u(t)$$

两个正弦量的相加：如KCL、KVL方程运算:

$$i_1=\sqrt{2}\,I_1\cos(\omega\,t+\psi_1)\qquad i_2=\sqrt{2}\,I_2\cos(\omega\,t+\psi_2)$$

若将以上两正弦电流量相加，简化起见，令:

$$A=\sqrt{2}\,I_1\qquad B=\sqrt{2}\,I_2$$

$$i = i_1 + i_2 = \sqrt{2} I_1 \cos(\omega t + \psi_1) + \sqrt{2} I_2 \cos(\omega t + \psi_1) \quad = A\cos(\omega t + \psi_1) + B\cos(\omega t + \psi_1)$$

$$= A(\cos\omega t \cos\psi_1 - \sin\omega t \sin\psi_1) + B(\cos\omega t \cos\psi_2 - \sin\omega t \sin\psi_2)$$

$$= \cos\omega t (A\cos\psi_1 + B\cos\psi_2) - \sin\omega t (A\sin\psi_1 + B\sin\psi_2)$$

令 $\gamma = \mathrm{arctg}\dfrac{A\sin\psi_1 + B\sin\psi_2}{A\cos\psi_1 + B\cos\psi_2}$ ，则有

$$= \sqrt{(A\cos\psi_1 + B\cos\psi_2)^2 + (A\sin\psi_1 + B\sin\psi_2)^2}\left[\cos\omega t \cos\gamma - \sin\omega t \sin\gamma\right]$$

$$= \underbrace{\sqrt{(A\cos\psi_1 + B\cos\psi_2)^2 + (A\sin\psi_1 + B\sin\psi_2)^2}}_{\text{与}\omega t\text{无关}} \cos(\underbrace{\omega t + \gamma}_{\text{频率未变}})$$

同频的正弦量相加仍得到同频的正弦量，所以，只需确定初相位和有效值。因此采用

正弦量 ⟷ 复数

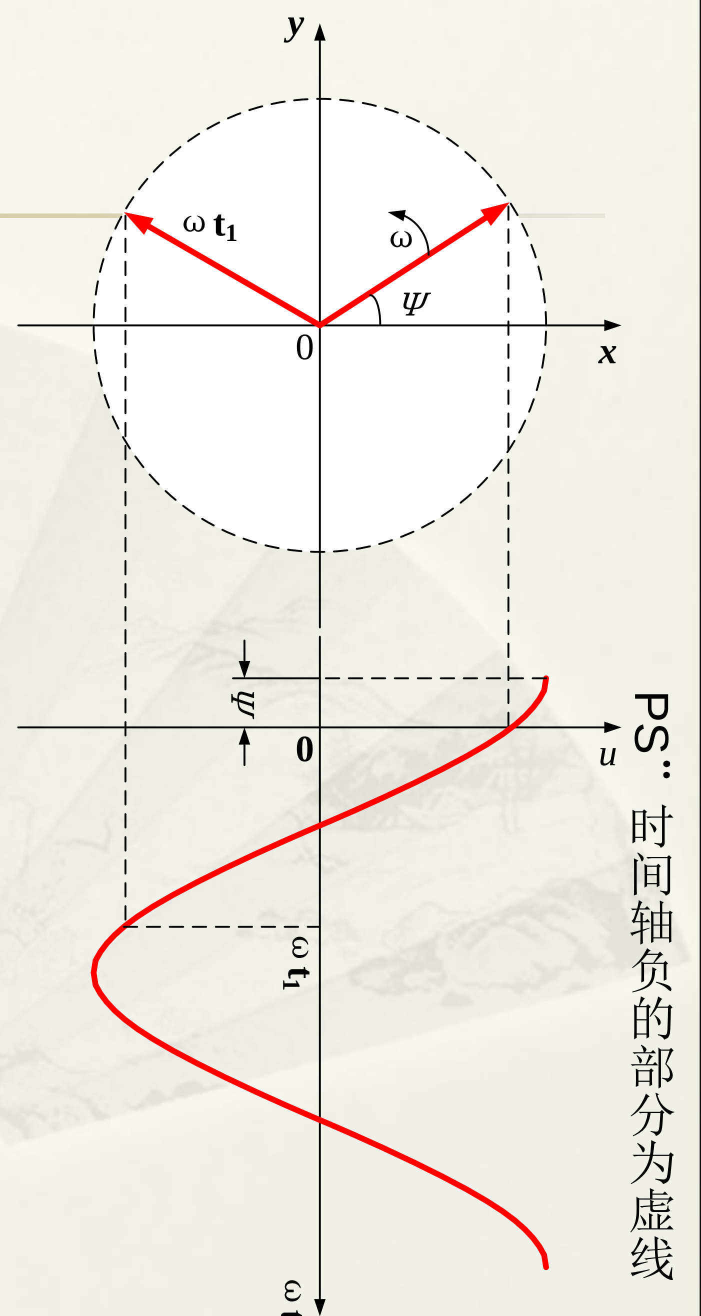
2.正弦量与复数的关系

以角速度ω旋转的复数在X轴的投影就是正弦函数!

$i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi) \Longleftrightarrow I_m e^{j(\omega t+\psi)}$

两者是否相等?

每个正弦函数都有唯一一个旋转的复数与其对应!



3. 正弦量的相量表示

没有物理意义

造一个复函数 $F(t)=\sqrt{2}Ie^{\mathrm{j}(\omega t+\Psi)} = \sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)+\mathrm{j}\sqrt{2}I\sin(\omega t+\Psi)$

对 **F(t)** 取实部 $\mathrm{Re}[F(t)]=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)=i(t)$

有物理意义

按照上述对应规则，该复函数与其实部对应关系是唯一的，即

$$i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi) \leftrightarrow F(t)=\sqrt{2}Ie^{\mathrm{j}(\omega t+\Psi)}$$

$$F(t)=\underbrace{\sqrt{2}Ie^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}}_{\text{三要素}}=\sqrt{2}\underbrace{Ie^{\mathrm{j}\psi}}_{\text{两要素}}e^{\mathrm{j}\omega t}=\sqrt{2}\underbrace{\dot{I}}_{\text{记为正弦量对应的相量}}e^{\mathrm{j}\omega t}$$

故有

$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi) \Leftrightarrow \dot{I}=I\angle\Psi$　　相量的模表示正弦量的有效值

$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta) \Leftrightarrow \dot{U}=U\angle\theta$　　相量的幅角表示正弦量的初相位

【例1】将 $i = 141.4\cos(314t + 30^{\circ})\mathrm{A}$　　$u = 311.1\cos(314\mathrm{t} - 60^{\circ})\mathrm{V}$ 用相量表示

解：　$\dot{I} = 100\angle 30^{\circ}\,\mathrm{A},\quad \dot{U} = 220\angle -60^{\circ}\,\mathrm{V}$

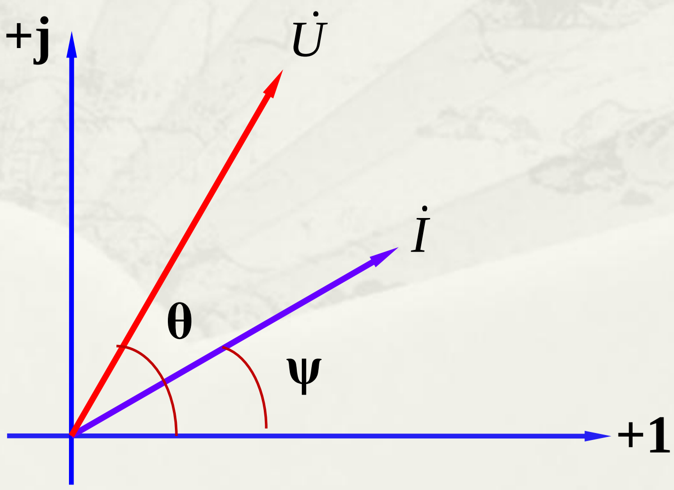
【例2】已知 $\dot{I} = 50\angle 15^{\circ}\,\mathrm{A},\ f = 50\mathrm{Hz}$，试写出电流瞬时表达式

解：　$i = 50\sqrt{2}\cos(314t + 15^{\circ})\ \mathrm{A}$

相量图 → 在复平面上用向量表示相量的图

$$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega\, t + \Psi) \rightarrow \dot{I} = I\angle\Psi$$

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega\, t + \theta) \rightarrow \dot{U} = U\angle\theta$$



4. 相量法的应用

① 同频率正弦量的加减

$$u_1(t)=\sqrt{2}\,U_1\cos(\omega t+\Psi_1)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1 e^{\mathrm{j}\omega t}) \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{U}_1$$

$$u_2(t)=\sqrt{2}\,U_2\cos(\omega t+\Psi_2)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_2 e^{\mathrm{j}\omega t}) \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{U}_2$$

$$u(t)=\ u_1(t)+u_2(t)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1 e^{\mathrm{j}\omega t})+\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_2 e^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1 e^{\mathrm{j}\omega t}+\sqrt{2}\,\dot{U}_2 e^{\mathrm{j}\omega t})=\mathrm{Re}(\sqrt{2}(\underline{\dot{U}_1+\dot{U}_2})e^{\mathrm{j}\omega t}) \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{U}_1+\dot{U}_2$$

$$=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\underline{\dot{U}}\,e^{\mathrm{j}\omega t})$$

相量关系为： $\boxed{\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2}$

同频正弦量的加减运算变为对应相量的加减运算。

$\boxed{i_1 \pm i_2 = i_3}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\dot{I}_1 \pm \dot{I}_2 = \dot{I}_3}$

【例】已知$u_1(t)=6\sqrt{2}\cos(314t+30^\circ)\ \text{V}$　　$u_2(t)=4\sqrt{2}\cos(314t+60^\circ)\ \text{V}$

求两电压信号之和

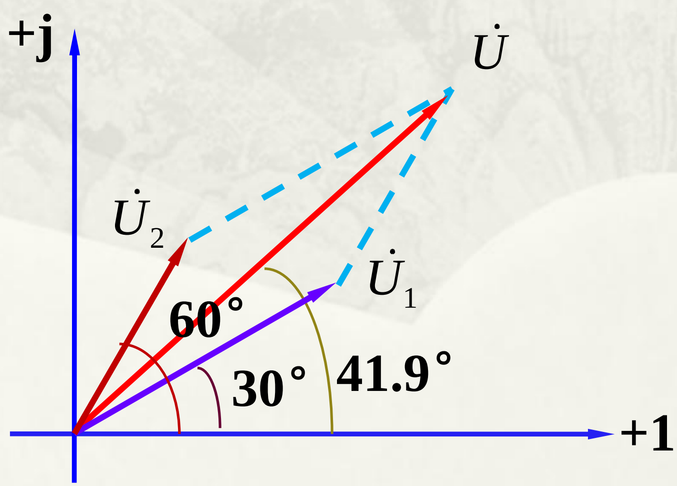
解：$\dot{U}_1=6\angle 30^\circ\ \text{V}$　　$\dot{U}_2=4\angle 60^\circ\text{V}$

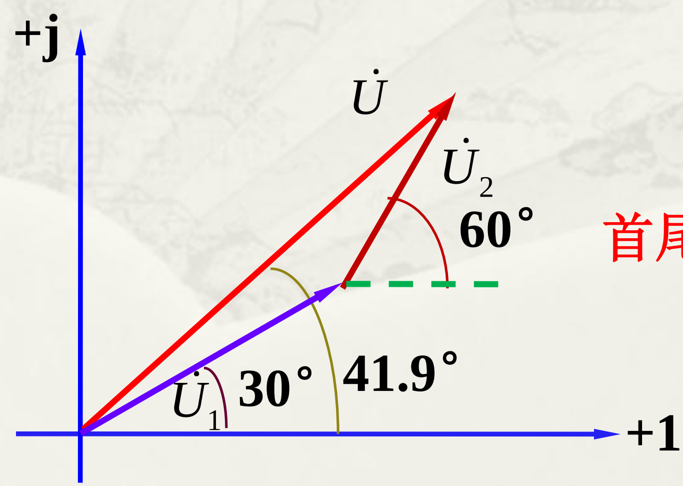
$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=6\angle 30^\circ+4\angle 60^\circ=5.19+\text{j}3+2+\text{j}3.46=7.19+\text{j}6.46$$

$$=9.64\angle 41.9^\circ\ \text{V}$$

$$\therefore\quad u(t)=u_1(t)+u_2(t)=9.64\sqrt{2}\cos(314t+41.9^\circ)\ \text{V}$$

也可借助相量图计算　　$\dot{U}_1=6\angle 30^\circ\ \text{V}$　　$\dot{U}_2=4\angle 60^\circ\text{V}$





首尾相连

② 正弦量的微分、积分运算

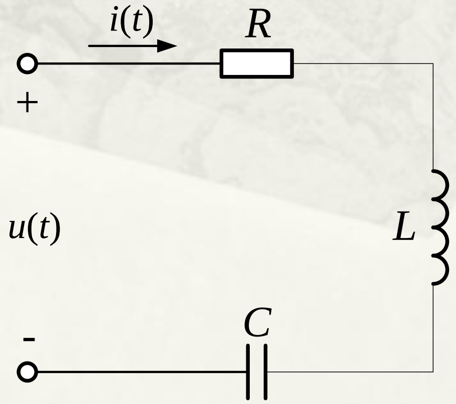
$$i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)\leftrightarrow \dot{I}=I\angle\psi_i$$

微分运算 $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\dot{I}e^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\dot{I}\cdot\mathrm{j}\omega\, e^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

积分运算 $$\int i\mathrm{d}t=\int\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\dot{I}e^{\mathrm{j}\omega t}\right]\mathrm{d}t=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega}e^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\rightarrow \mathrm{j}\omega\dot{I}=\omega I\angle(\psi_i+\frac{\pi}{2})\qquad \int i\mathrm{d}t\rightarrow\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega}=\frac{I}{\omega}\angle(\psi_i-\frac{\pi}{2})$$

【例】



$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)\qquad u(t)=Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$$

相量运算 $$\dot{U}=R\dot{I}+\mathrm{j}\omega L\dot{I}+\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega C}$$

▲相量法的优点：

① 把时域问题变为复数问题；

② 把微积分方程的运算变为复数方程运算；

③ 可以把直流电路的分析方法直接用于交流电路。

注意：

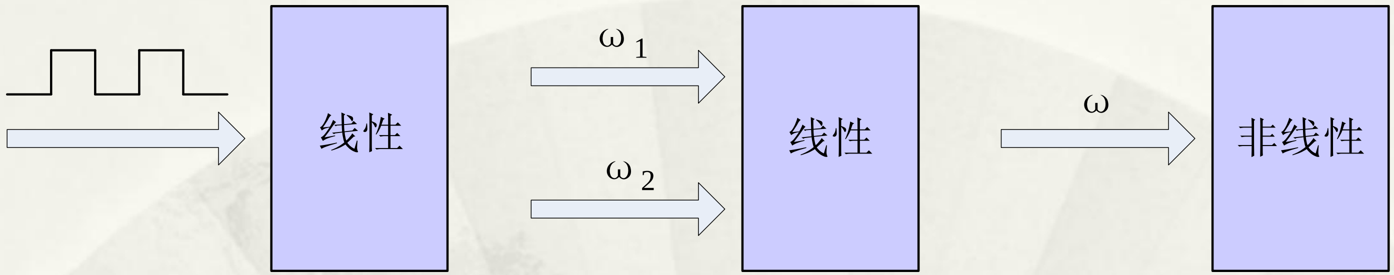
① 对应关系

正弦量 ⟷ 相量

时域 ⟷ 频域

正弦波形 ⟷ 相量图

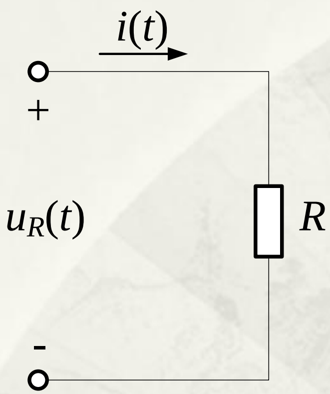
② 相量法只适用于激励为同频正弦量的非时变线性电路。

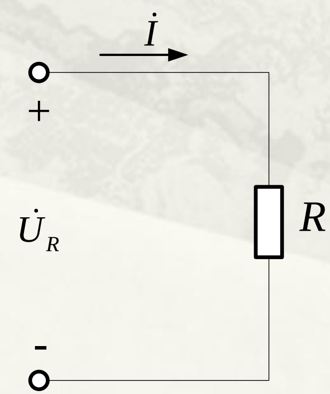


③ 相量法用来分析正弦稳态电路。

5.4 电路定律的相量形式

1. 电阻元件VCR的相量形式





相量模型

时域形式：

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi_i)$$

$$u_R(t)=Ri(t)=\sqrt{2}RI\cos(\omega t+\Psi_i)$$

$$=\sqrt{2}U_R\cos(\omega t+\Psi_u)$$

相量形式：

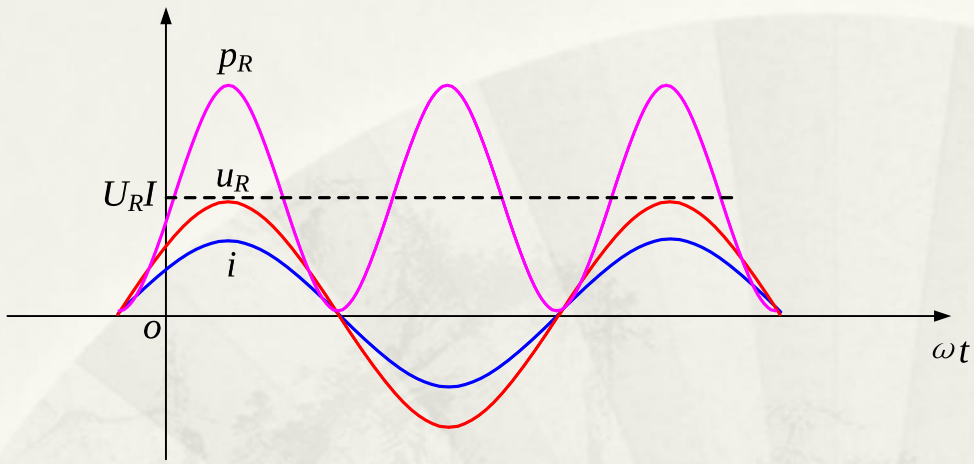
$$\dot{I}=I\angle\Psi_i$$

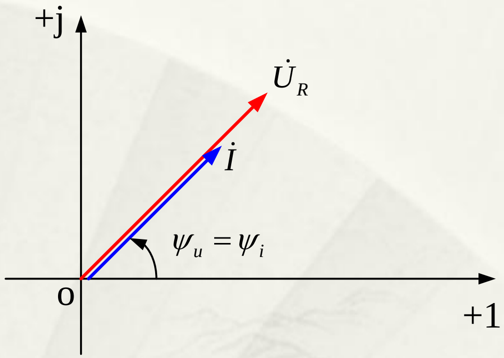
$$\dot{U}_R=RI\angle\Psi_i$$

相量关系：
$$\begin{cases} U_R=RI & \text{有效值关系} \\ \Psi_u=\Psi_i & \text{相位关系} \end{cases}$$

$$\dot{U}_R=R\dot{I}$$

波形图及相量图



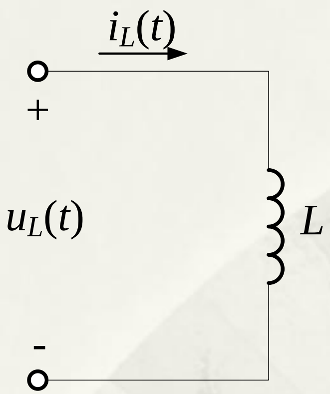


同相位

瞬时功率 $p_R = u_R i = \sqrt{2} U_R \sqrt{2} I \cos^2(\omega t + \Psi_i) = U_R I [1 + \cos 2(\omega t + \Psi_i)]$

瞬时功率以2ω交变，始终大于零，表明电阻始终吸收功率

2. 电感元件VCR的相量形式



时域形式:

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$$

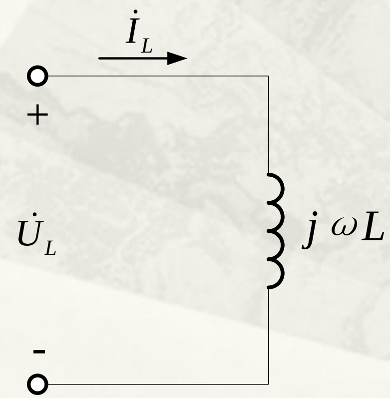
$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{2}\omega LI\sin(\omega t+\Psi_i)$$

$$=\sqrt{2}\omega LI\cos(\omega t+\Psi_i+\frac{\pi}{2})$$

相量形式:

$$\dot{I}=I\angle\Psi_i$$

$$\dot{U}_\mathrm{L}=\omega LI\angle(\Psi_i+\frac{\pi}{2})$$



相量模型

相量关系: $\dot{U}_L=\mathrm{j}\omega L\dot{I}=\mathrm{j}X_L\dot{I}$

$$\begin{cases}U_L=\omega LI & \text{有效值关系}\\ \Psi_u=\Psi_i+\dfrac{\pi}{2} & \text{相位关系}\end{cases}$$

感抗和感纳

$X_L=\omega L=2\pi fL$，称为感抗，单位为Ω (欧姆)

$B_L=-1/\omega L=-1/2\pi fL$， 称为感纳，单位为 S

感抗的性质

① 表示限制电流的能力；

② 感抗和频率成正比。

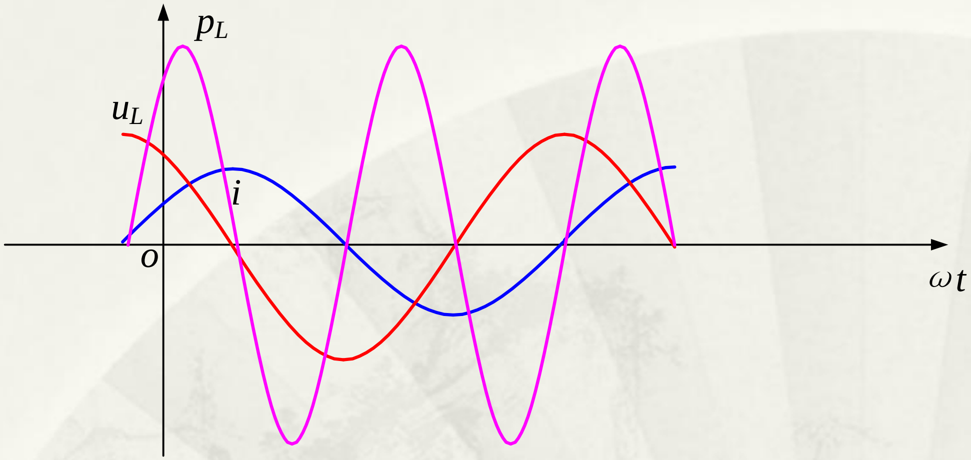
$\omega=0$时（直流），$X_L=0$，短路

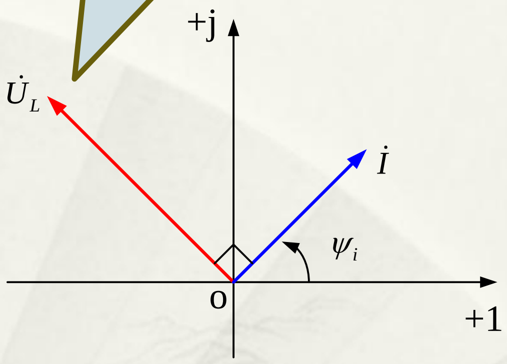
$\omega\to\infty$，$X_L\to\infty$，开路

相量表达式

$$\dot{U}=\mathrm{j}X_L\dot{I}=\mathrm{j}\omega L\dot{I}\ ,\qquad \dot{I}=\mathrm{j}B_L\dot{U}=\mathrm{j}\frac{-1}{\omega L}\dot{U}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}\dot{U}$$

波形图及相量图

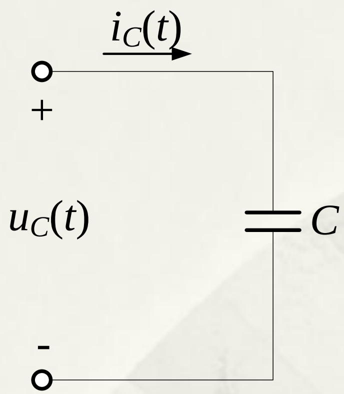




瞬时功率 $p_L = u_L i \ = -U_{Lm} I_m \cos(\omega t + \Psi_i)\sin(\omega t + \Psi_i) = -U_L I \sin 2(\omega t + \Psi_i)$

瞬时功率以2ω交变，有正有负，一周期内刚好互相抵消，表明电感只储能不耗能。

3. 电容元件VCR的相量形式



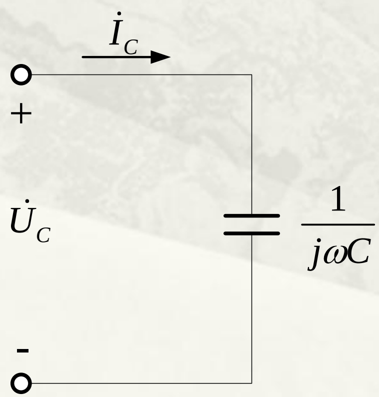
时域形式:

相量形式:

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\Psi_u) \Longleftrightarrow \dot{U}=U\angle\Psi_u$$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{2}\omega CU\sin(\omega t+\Psi_u)$$

$$=\sqrt{2}\omega CU\cos(\omega t+\Psi_u+\frac{\pi}{2}) \Longleftrightarrow \dot{I}_C=\omega CU\angle(\Psi_u+\frac{\pi}{2})$$



相量模型

相量关系: $\dot{U}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}_C=\mathrm{j}X_C\dot{I}_C$ $\begin{cases} I_C=\omega CU & \text{有效值关系} \\ \Psi_i=\Psi_u+\frac{\pi}{2} & \text{相位关系} \end{cases}$

容抗与容纳

$X_C = -1/\omega C$，　称为容抗，单位为 Ω(欧姆)

$B_C = \omega C$，　称为容纳，单位为 S

容抗和频率成反比

$\omega \to 0$，$|X_C| \to \infty$ 直流开路(隔直)

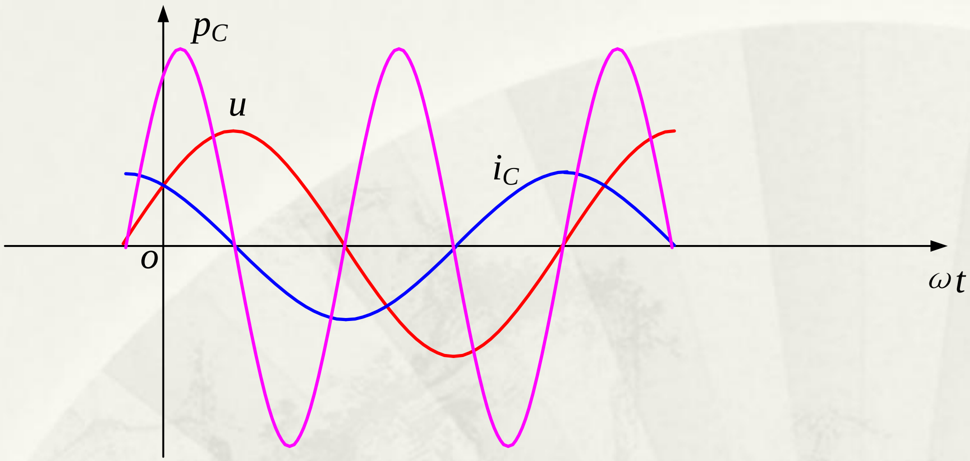
$\omega \to \infty$，$|X_C| \to 0$ 高频短路

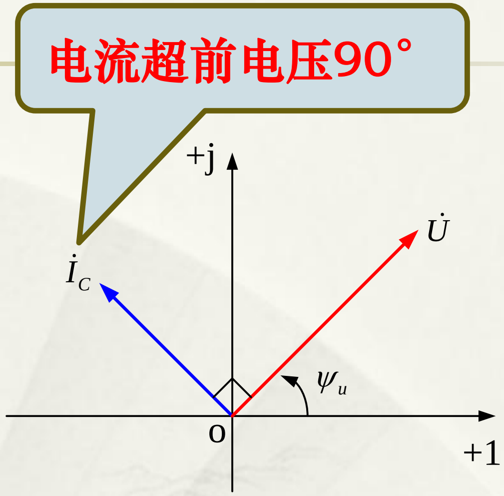
相量表达式

$$\dot{U} = \mathrm{j}X_C\dot{I} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}$$

$$\dot{I} = \mathrm{j}B_C\dot{U} = \mathrm{j}\omega C\dot{U}$$

波形图及相量图





瞬时功率 $p_C = ui_C = -2UI_C\cos(\omega t + \Psi_u)\sin(\omega t + \Psi_u) = -UI_C\sin 2(\omega t + \Psi_u)$

瞬时功率以2ω交变，有正有负，一周期内刚好互相抵消，表明电容只储能不耗能。

4. 基尔霍夫定律的相量形式

同频率的正弦量加减可以用对应的相量形式来进行计算。因此，在正弦电流电路中，KCL和KVL可用相应的相量形式表示：

$$\sum i(t)=0 \rightarrow \sum i(t)=\sum \mathrm{Re}\sqrt{2}\left[\dot{I}_1+\dot{I}_2+\cdots\right]e^{\mathrm{j}\omega t}=0$$

$$\rightarrow \sum \dot{I}=0$$

$$\sum u(t)=0 \rightarrow \sum \dot{U}=0$$

流入某一结点的所有正弦电流用相量表示时仍满足KCL；而任一回路所有支路正弦电压用相量表示时仍满足KVL。

【例】试判断下列表达式的正、误。

1. $u = \omega Li$ × ⟶ $U = \omega LI$

2. $i = 5\cos\omega t = 5\angle 0^0$ × ⟶ $i = 5\cos\omega t \neq 5\angle 0^0$

3. $\dot{I}_m = j\omega CU_m$ × ⟶ $\dot{I}_m = j\omega C\dot{U}_m$

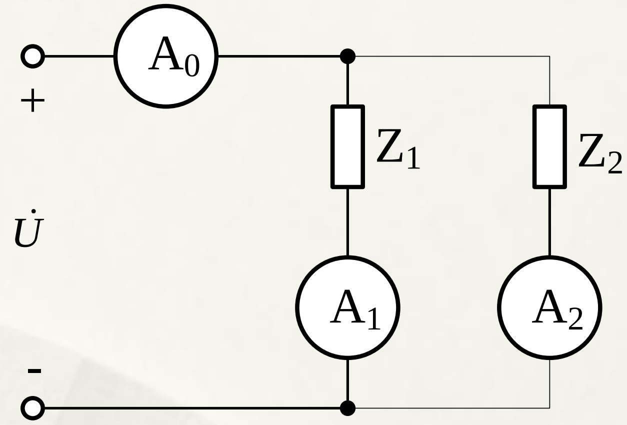
4. $X_L = \dfrac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L}$ × ⟶ $jX_L = \dfrac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L}$

5. $\dfrac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = j\omega C\ \Omega$ × ⟶ $\dfrac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} = \dfrac{1}{j\omega C}$

6. $\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}_L$ √

7. $u = C\dfrac{di}{dt}$ × ⟶ $u = L\dfrac{di}{dt}$

【例】若已知电流表A1读数=8A，A2读数=6A



若（1）Z_1=R, Z_2=jX_C，A0读数=?

（2）Z_1=R, Z_2=? ，A0读数=I_{0max}=?

（3）Z_1=jX_L, Z_2=? ，A0读数=I_{0min}=?

（4）Z_1=jX_L, Z_2=? ，A0读数=A1读数，此时A2读数=?

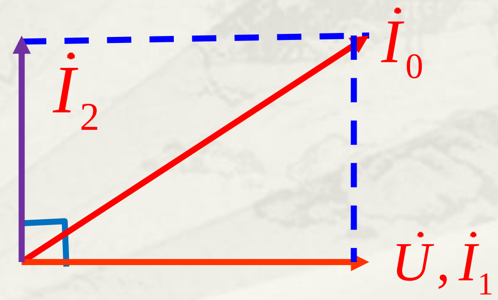
解:

(1) $I_0 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\text{A}$

(2) $Z_2 = R, \quad I_{0\max} = 8 + 6 = 14\text{A}$

(3) $Z_2 = \text{j}X_\text{C}, \quad I_{0\min} = 8 - 6 = 2\text{A}$

(4) $Z_2 = \text{j}X_\text{C}, \quad I_0 = I_1 = 8\text{A}, \quad I_2 = 16\text{A}$



【例】若已知 $u(t)=120\sqrt{2}\cos(5t)$ **，求i(t)**

解: $\dot{U}=120\angle 0^0$ $\quad \mathrm{j}X_L=\mathrm{j}4\times 5=\mathrm{j}20\Omega$ $\quad \mathrm{j}X_C=-\mathrm{j}\dfrac{1}{5\times 0.02}=-\mathrm{j}10\Omega$

$$\dot{I}=\dot{I}_{\mathrm{R}}+\dot{I}_{\mathrm{L}}+\dot{I}_{\mathrm{C}}=\frac{\dot{U}}{R}+\frac{\dot{U}}{\mathrm{j}X_{\mathrm{L}}}+\frac{\dot{U}}{\mathrm{j}X_{\mathrm{C}}}$$

$$=120\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{j20}-\frac{1}{j10}\right)$$

$$=8-j6+j12=8+j6=10\angle 36.9^0\,\mathrm{A}$$

$$i(t)=10\sqrt{2}\cos(5t+36.9^0)\mathrm{A}$$

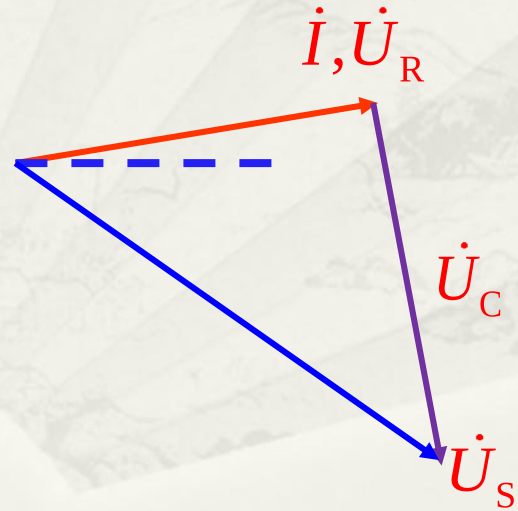
【例】若已知 $i(t)=5\sqrt{2}\cos(10^6 t+15^o)$ **，求$u_S(t)$**

解： $\dot{I}=5\angle 15^0$

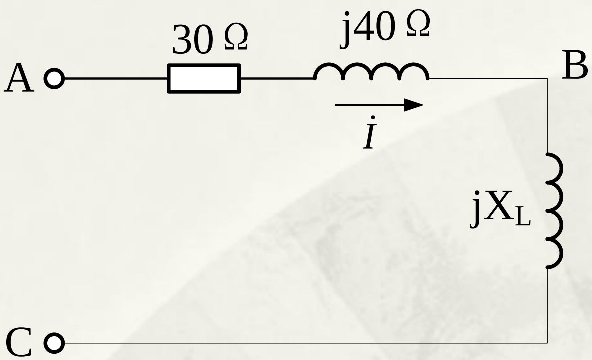
$$jX_C=-j\frac{1}{10^6\times 0.2\times 10^{-6}}=-j5\Omega$$

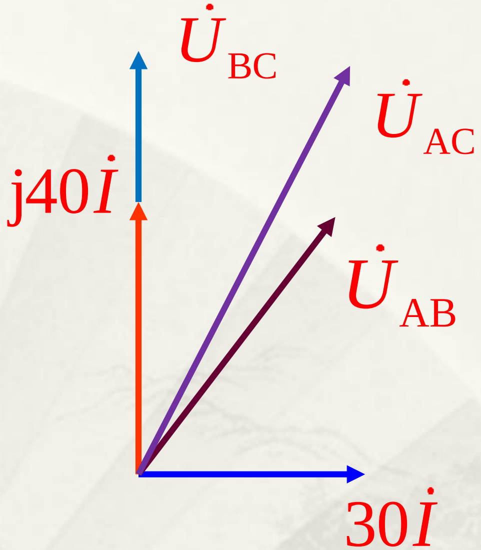
$$\dot{U}_S=\dot{U}_R+\dot{U}_C=5\angle 15^0(5-j5)$$

$$=5\angle 15^0\times 5\sqrt{2}\angle -45^0=25\sqrt{2}\angle -30^0\,V$$



【例】若已知U_{AB}=50V，U_{AC}=78V ，求U_{BC}





解:

$$U_{AB} = \sqrt{(30I)^2 + (40I)^2} = 50I$$

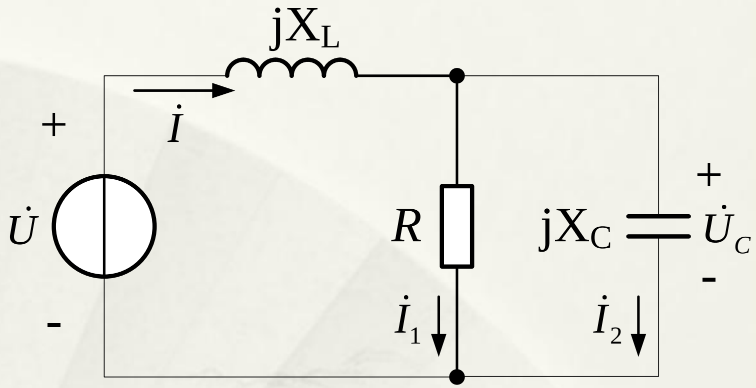
$$I = 1\text{A}, \quad U_R = 30\text{V}, \quad U_L = 40\text{V}$$

$$U_{AC} = 78 = \sqrt{(30)^2 + (40 + U_{BC})^2}$$

$$U_{BC} = \sqrt{(78)^2 - (30)^2} - 40 = 32\text{V}$$

【例】图示电路$I_1=I_2=5A$，$U=50V$，总电压与总电流同相位，求I、R、X_C、X_L。

解法1：令 $\dot{U}_C=U_C\angle 0^0$



$$\dot{I}_1=5\angle 0^0,\quad \dot{I}_2=\text{j}5$$

$$\dot{I}=5+\text{j}5=5\sqrt{2}\angle 45^0$$

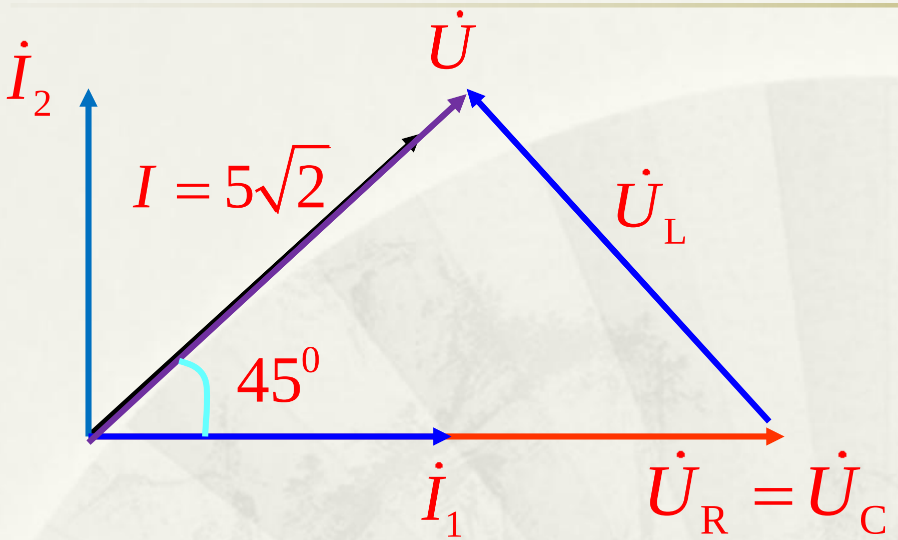
$$\dot{U}=50\angle 45^0=(5+\text{j}5)\times \text{j}X_L+5R=\frac{50}{\sqrt{2}}(1+\text{j})$$

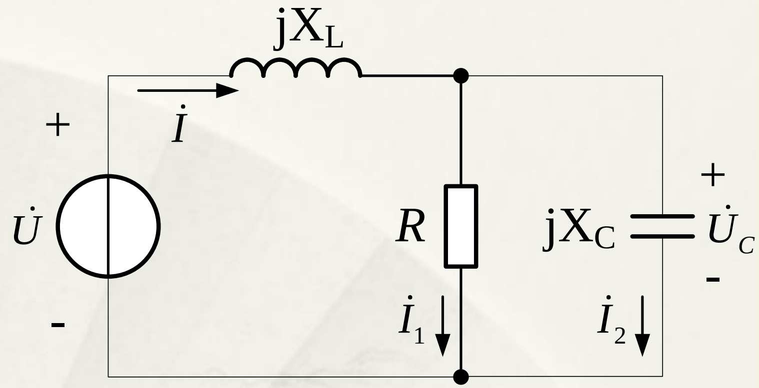
令等式两边实部等于实部，虚部等于虚部

$$5X_L=50/\sqrt{2}\Rightarrow X_L=5\sqrt{2}$$

$$5R=\frac{50}{\sqrt{2}}+5\times 5\sqrt{2}=50\sqrt{2}\Rightarrow R=|X_C|=10\sqrt{2}\Omega$$

解法2：画相量图计算





$$U = U_L = 50\text{V}$$

$$X_L = \frac{50}{5\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}\Omega$$

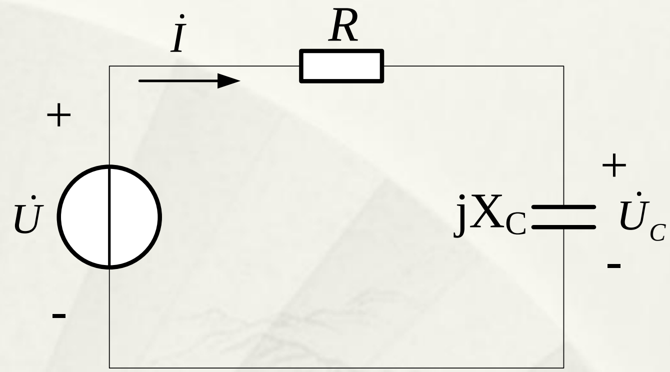
$$|X_C| = R = \frac{50\sqrt{2}}{5} = 10\sqrt{2}\Omega$$

[例]图示电路为阻容移项装置，如要求电容电压滞后于电源电压π/3，问*R*、*C*应如何选择。

解法1：

$$\dot U = R\dot I + \mathrm{j}X_{\mathrm{C}}\dot I$$

$$\dot I = \frac{\dot U}{R + \mathrm{j}X_{\mathrm{C}}},\quad \dot U_{\mathrm{C}} = \mathrm{j}X_{\mathrm{C}}\frac{\dot U}{R + \mathrm{j}X_{\mathrm{C}}}$$



$$\frac{\dot U}{\dot U_{\mathrm{C}}} = \mathrm{j}\omega CR + 1 \quad \Rightarrow \quad \omega CR = \tan 60^0 = \sqrt{3}$$

解法2：画相量图计算

$$\tan 60^0 = \sqrt{3} = \frac{U_R}{U_C} = \frac{RI}{I/\omega C} = \omega CR$$