

14.2 通路、回路

定义14.11 (通路、回路) 给定图G, 设G中顶点和边的交替序列

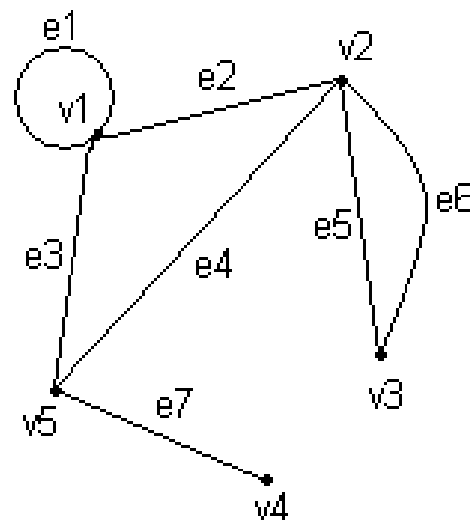
$$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{i-1} e_i v_i \dots e_n v_n$$

若 Γ 满足: 对于 $i=1, 2, \dots, n$, v_{i-1} 和 v_i 是 e_i 的端点 (在G是有向图时, 要求 v_{i-1} 是 e_i 的始点, v_i 是 e_i 的终点), 则称 Γ 为从 v_0 到 v_n 的一条**通路**或**链**。

v_0 和 v_n 分别称为此通路的**起点**和**终点**。

Γ 中边的数目 n 称为通路的**长度 (length)**

当 $v_0 = v_n$ 时, 此通路称为**回路 (circuit)**



说明

- (1) 可以用边的序列 $\Gamma = e_1 e_2 \dots e_n$ 表示通路或回路
- (2) 在简单图中, 可以只用顶点 $\Gamma = v_0 v_1 \dots v_n$ 表示通路或回路

- 1、有边重复出现的通路称为复杂通路；
有边重复出现的回路称为复杂回路。
- 2、若通路中无边重复，则称该通路为简单通路；
无边重复的回路称为简单回路。
- 3、无边且无顶点重复的通路称为初级通路或路径。
无边且无顶点重复的回路称为初级回路或圈。
- 4、将长度为奇数的圈称为奇圈；
将长度为偶数的圈称为偶圈。

说明：

- (1) 初级通路(回路)是简单通路(回路)，
但反之不真。
- (2) 通路、回路是图的子图。

注意

- 1、在无向图中，**环**和**平行边**构成的回路分别是长度为1和2的初级回路（圈）。
- 2、在有向图中，**环**和**两条方向相反边（对称边）**构成的回路分别是长度为1和2的初级回路（圈）。

思考：在简单无(有)向图中，圈的长度至少为多长？
在简单无向图中，圈的长度至少为3
在简单有向图中，圈的长度至少为2

通路、回路的性质

定理14.5 在一个 n 阶图中，若从顶点 v_i 到 v_j ($v_i \neq v_j$) 存在通路，则从 v_i 到 v_j 存在长度小于等于 $(n-1)$ 的通路。

推论 在一个 n 阶图中，若从顶点 v_i 到 v_j ($v_i \neq v_j$) 存在通路，则从 v_i 到 v_j 存在长度小于等于 $(n-1)$ 的初级通路。

定理14.6 在一个 n 阶图中，若存在 v_i 到自身的回路，则从 v_i 到自身存在长度小于等于 n 的回路。

推论 在一个 n 阶图中，若存在 v_i 到自身的简单回路，则从 v_i 到自身存在长度小于等于 n 的初级回路。

例14.4 无向完全图 K_n ($n \geq 3$) 中有几种非同构的圈?

解:

长度相同的圈都是同构的,

因而只有长度不同的圈才是非同构的。

易知 K_n ($n \geq 3$) 中含长度为3, 4, ..., n 的圈,

所以 K_n ($n \geq 3$) 中有 $n-2$ 种非同构的圈。



14.3 图的连通性

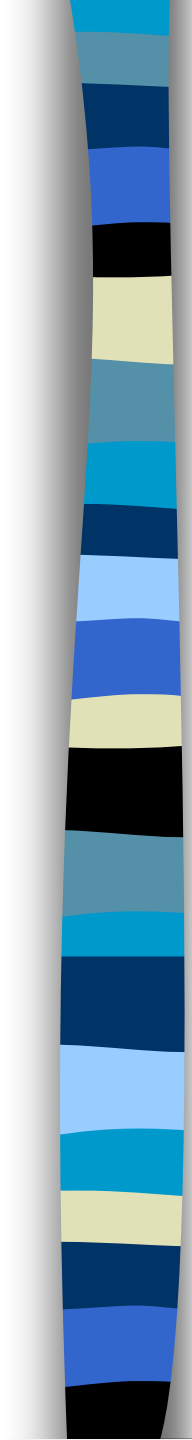
首先讨论无向图连通性的概念。

定义14.12（连通） 在一个无向图 $G=\langle V, E \rangle$ 中，如果顶点 u, v 之间存在通路，则称 u, v 是**连通的**，记作 $u \sim v$ 。 $\forall v \in V$ ，规定 $v \sim v$ 。

由定义可知无向图中顶点之间的连通关系：

$$\sim = \{ \langle u, v \rangle \mid u, v \in V \wedge u \text{ 与 } v \text{ 之间有通路} \}$$

显然 \sim 是**自反的**、**对称的**、**传递的**，所以 \sim 是 V 上的**等价关系**。



定义14.13（无向连通图） 若无向图 G 是平凡图或 G 中的任何两个顶点都是连通的，则称 G 是**连通图**，否则称 G 为**非连通图**或**分离图**。

例：完全图 K_n ($n \geq 1$) 为连通图，
零图 N_n ($n \geq 2$) 都是分离图。

定义14.14 (连通分支)

设无向图 $G=\langle V, E \rangle$, V 关于顶点之间的连通关系 \sim 的商集 $V/\sim = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$, 其中 V_i 为等价类, 称导出子图 $G[V_i]$ ($i=1, 2, \dots, k$) 为 G 的**连通分支**, 连通分支数 k 记为 **$p(G)$** 。

或若无向图 G 由若干彼此不连通的子图组成, 而每个子图是连通的, 称这些子图为 G 的**连通分支**。

显然若 G 为连通图, 则 $p(G)=1$;

若 G 为非连通图, 则 $p(G)\geq 2$;

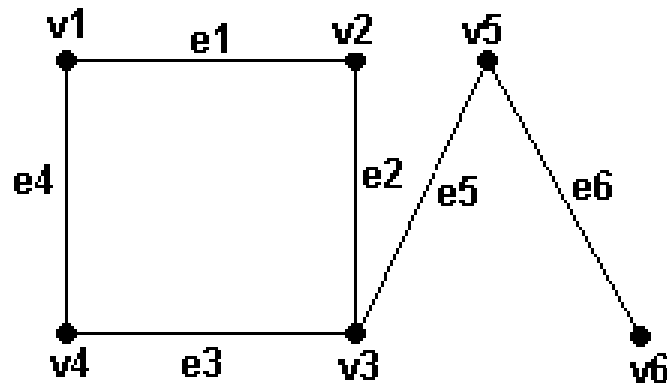
N_n ($n\geq 2$) 的连通分支为 $p(G)=n$

思考题

(1) n 阶非连通的简单图的边数最多有多少条？最少呢？ P312-6 (2)

(2) 证明：若无向图 G 中恰有两个奇度顶点，这两个奇度顶点必然连通。 P314-39

定义14.17 (桥) 设无向图 $G=\langle V, E \rangle$, 若存在 $e \in E$, 使得 $p(G-e) > p(G)$, 则称 e 是 G 的桥。



桥: e_6, e_5

下面讨论有向图的连通性

定义14.20 在一个有向图 $D=\langle V, E \rangle$ 中, 如果顶点 u, v 之间存在通路, 则称 u 可达 v , 记作 $u \rightarrow v$ 。

规定任意的顶点总是可达自身的, 即 $\forall u \in V, u \rightarrow u$ 。

若 $u \rightarrow v$ 且 $v \rightarrow u$, 则称 u 与 v 是相互可达的, 记作 $u \leftrightarrow v$, 规定 $u \leftrightarrow u$ 。

说明: \rightarrow 、 \leftrightarrow 都是 V 上的二元关系, 并且 \leftrightarrow 是 V 上的等价关系。

定义14.22（弱、单向、强连通图）

在一个有向图 $D=\langle V, E \rangle$ 中，如果 D 的基图是连通图，则称 D 是弱连通图。

如果对于任意的两个顶点 u, v ， $u \rightarrow v$ 与 $v \rightarrow u$ 至少成立其一，则称 D 是单向连通图。

如果对于任意的两个顶点 u, v ，均有 $u \leftrightarrow v$ ，则称 D 是强连通图。

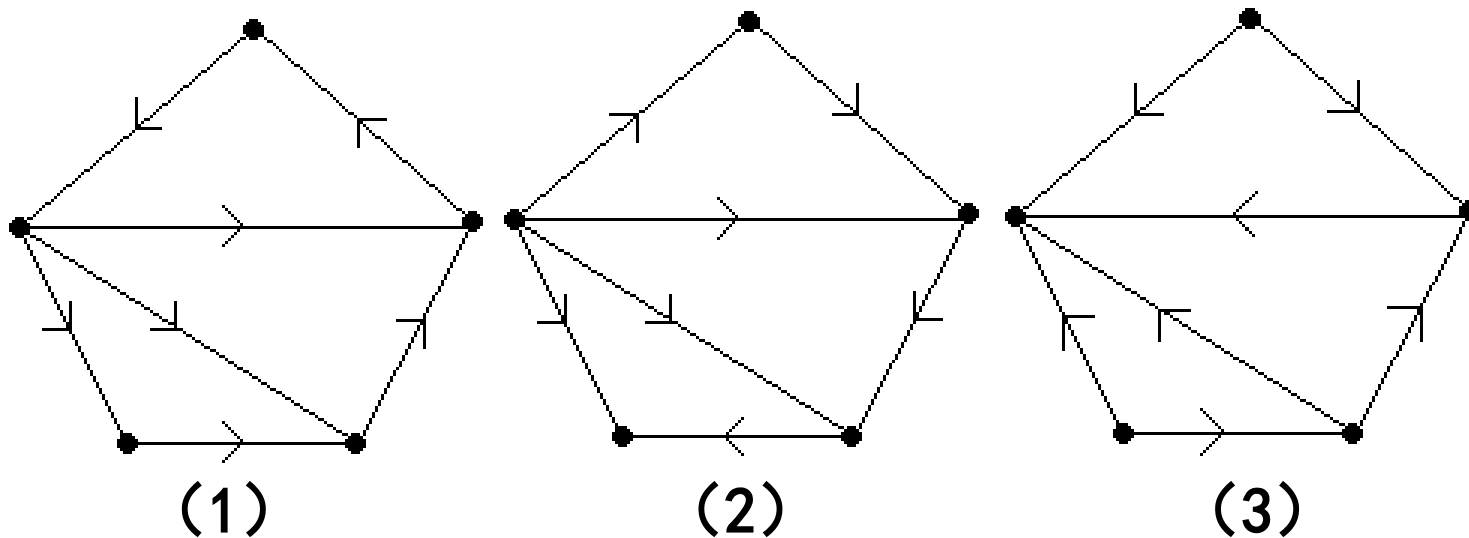
说明：强连通图一定是单向连通图，单向连通图一定是弱连通图。

强连通图和单向连通图的判别定理

定理14.8 有向图 D 是强连通图当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的回路。

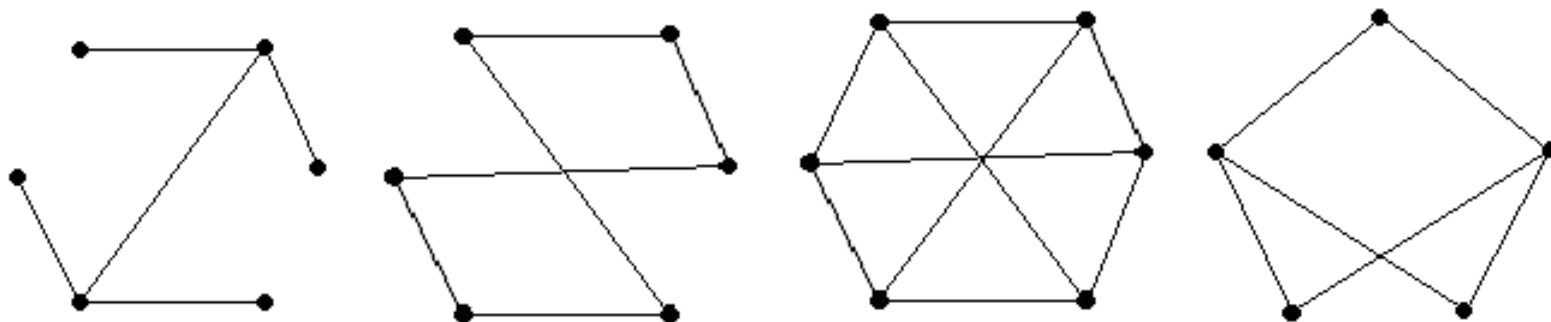
定理14.9 有向图 D 是单向连通图当且仅当 D 中存在经过每个顶点至少一次的通路。

例：如下图



- (1) 是强连通图
- (2) 是单向连通图
- (3) 是弱连通图。

例：



定理14.10（二部图的判别定理） 一个无向图 G 是二部图当且仅当 G 中无奇数长度的回路。



14.4 图的矩阵表示



图的表示

- (1) 集合定义
- (2) 图形表示
- (3) 矩阵表示

目的

- (1) 便于用代数知识来研究图的性质
- (2) 便于用计算机来对图进行处理

本节学习

- (1) 图的关联矩阵(无向图和有向图)
- (2) 有向图的邻接矩阵
- (3) 有向图的可达矩阵

定义14.24（无向图的关联矩阵） 设无向图 $G=\langle V, E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 m_{ij} 为顶点 v_i 与边 e_j 的**关联次数**, 则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 G 的**关联矩阵**, 记为 $M(G)$ 。

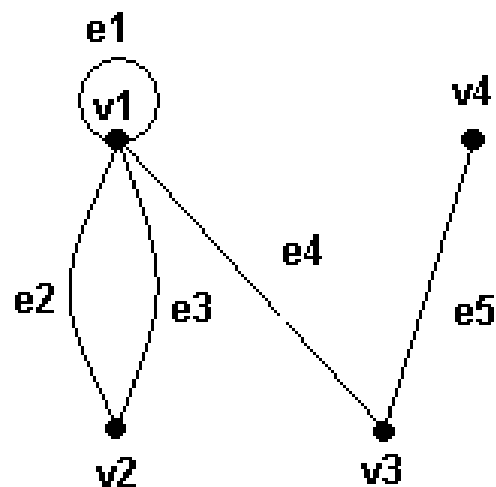
对于 m_{ij} 显然有

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不相关联} \\ 1, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 关联一次} \\ 2, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 关联两次} \end{cases}$$

易见, 矩阵的第 i 行为顶点 v_i 分别与边 e_1, e_2, \dots, e_m 的关联次数。

矩阵的第 j 列为边 e_j 分别与顶点 v_1, v_2, \dots, v_n 的关联次数。

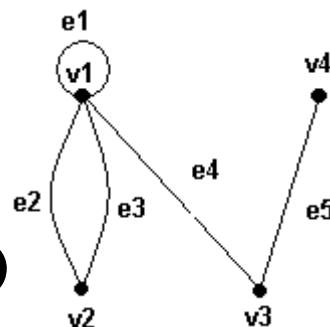
例如：求下图的关联矩阵



关联矩阵为：

$$M(G) = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

无向图关联矩阵的性质：



$$\begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n m_{ij} = 2 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

即关联矩阵中每条边关联两个顶点（环关联的顶点重合）

$$(2) \quad \sum_{j=1}^m m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

即关联矩阵中第*i*行元素之和为顶点 v_i 的度数。

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij} = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$$

即握手定理：各顶点的度数之和等于边数的2倍。

(4) 第*j*列与第*k*列相同，当且仅当边 e_j 与 e_k 是平行边。

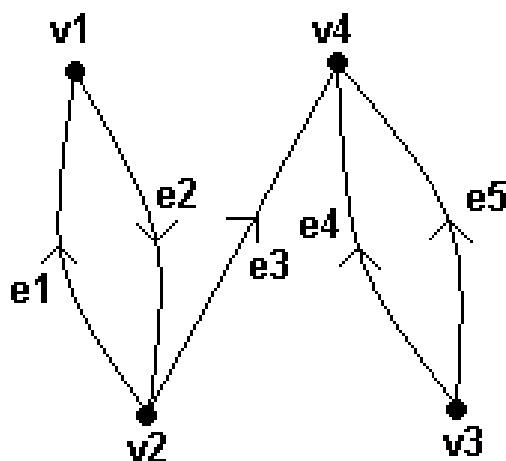
$$(5) \quad \sum_{j=1}^m m_{ij} = 0 \quad \text{当且仅当 } v_i \text{ 是孤立点。}$$

定义14.25 (有向图的关联矩阵) 设有向图 $D=\langle V, E \rangle$ 中无环, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的始点} \\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \\ -1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 D 的**关联矩阵**, 记为 $M(D)$ 。

例如：下图的关联矩阵为



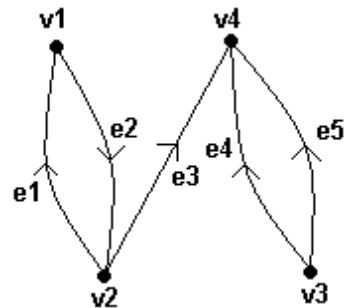
关联矩阵为：

$$M(D) = \begin{Bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{Bmatrix}$$



有向图关联矩阵的性质：

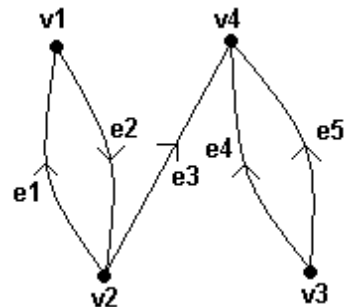
有向图关联矩阵的性质：



(1) $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 0 (j = 1, 2, \dots, m)$, 从而 $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij} = 0$, 这说明有向图关联矩阵中所有元素之和为0。

$$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{Bmatrix}$$

有向图关联矩阵的性质：

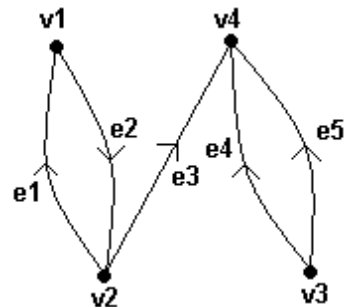


(1) $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 0 (j = 1, 2, \dots, m)$ ，从而 $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij} = 0$ ，这说明有向图关联矩阵中所有元素之和为0。

(2) 有向图关联矩阵中，-1的个数、1的个数、边数m相等。这正是有向图握手定理的内容。

$$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{Bmatrix}$$

有向图关联矩阵的性质：



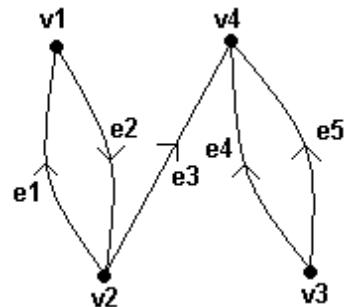
(1) $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 0 (j=1,2,\dots,m)$ ，从而 $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij} = 0$ ，这说明有向图关联矩阵中所有元素之和为0。

(2) 有向图关联矩阵中，-1的个数、1的个数、边数 m 相等。这正是有向图握手定理的内容。

(3) 在有向图关联矩阵第 i 行中，1的个数等于 $d^-(v_i)$ ，-1的个数等于 $d^+(v_i)$ 。

$$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{Bmatrix}$$

有向图关联矩阵的性质：



(1) $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 0 (j=1,2,\dots,m)$ ，从而 $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij} = 0$ ，这说明有向图关联矩阵中所有元素之和为0。

(2) 有向图关联矩阵中，-1的个数、1的个数、边数 m 相等。这正是有向图握手定理的内容。

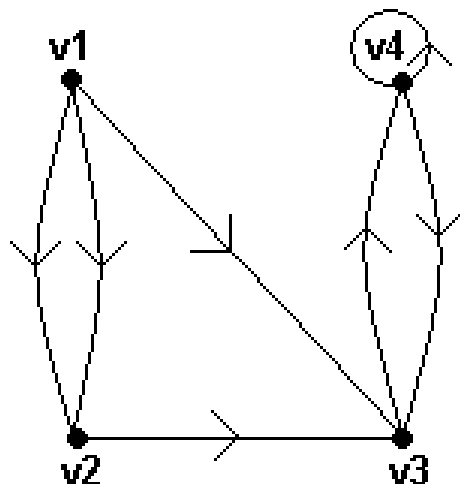
(3) 在有向图关联矩阵第 i 行中，1的个数等于 $d^-(v_i)$ ，-1的个数等于 $d^+(v_i)$ 。

(4) 平行边所对应的列相同。

$$\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{Bmatrix}$$

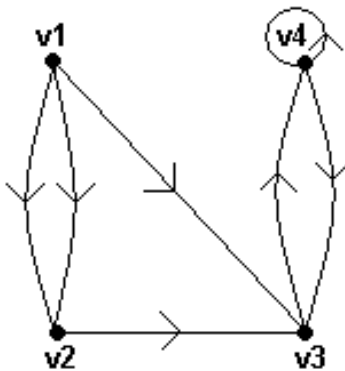
定义14.26（有向图邻接矩阵） 设有向图 $D=\langle V, E \rangle$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 边的条数, 称 $(a_{ij}^{(1)})_{n \times n}$ 为 D 的**邻接矩阵**, 记作 **$A(D)$** , 简记为 **A** 。

例如：下图的邻接矩阵为



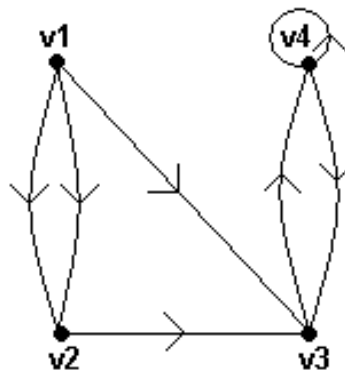
$$A(D) = \begin{Bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

有向图邻接矩阵的性质：



$$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

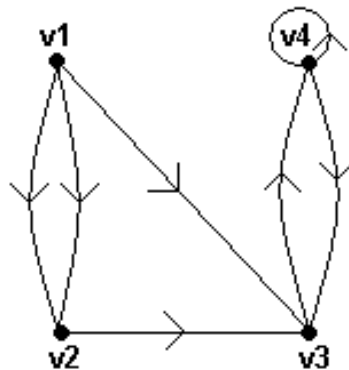
有向图邻接矩阵的性质：



$$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$(1) \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^-(v_i) (i = 1, 2, \dots, n), \text{ 于是 } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^n d^-(v_i) = m$$

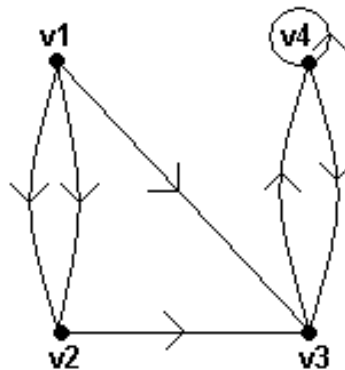
有向图邻接矩阵的性质：



$$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

- (1) $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_i) (i = 1, 2, \dots, n)$, 于是 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^n d^{-}(v_i) = m$
- (2) $\sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_j) (j = 1, 2, \dots, n)$, 于是 $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = \sum_{j=1}^n d^{+}(v_j) = m$

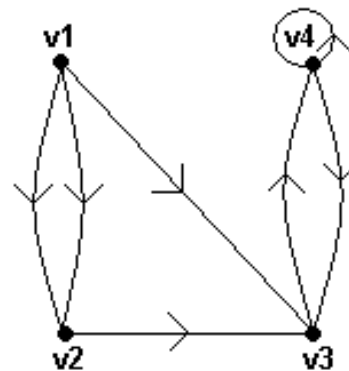
有向图邻接矩阵的性质：



$$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

- (1) $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_i) (i = 1, 2, \dots, n)$, 于是 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^n d^{-}(v_i) = m$
- (2) $\sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_j) (j = 1, 2, \dots, n)$, 于是 $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = \sum_{j=1}^n d^{+}(v_j) = m$

有向图邻接矩阵的性质：



$$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$(1) \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^-(v_i) (i=1,2,\dots,n), \text{ 于是 } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^n d^-(v_i) = m$$

$$(2) \sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^+(v_j) (j=1,2,\dots,n), \text{ 于是 } \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = \sum_{j=1}^n d^+(v_j) = m$$

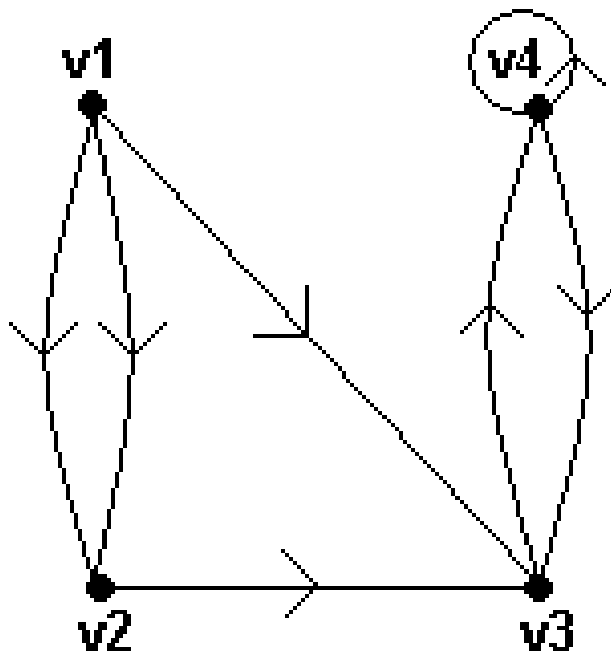
(3) 所有元素之和 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)}$ 为D中边的总数，也可看成D中

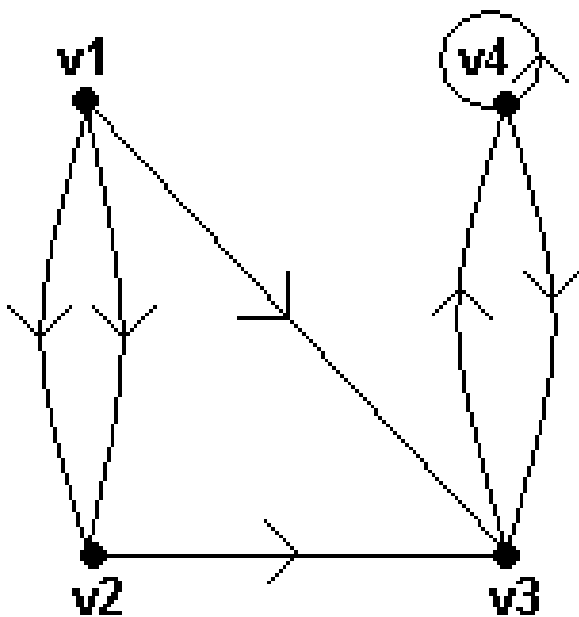
长度为1的通路的总数。

而 $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(1)}$ 为D中环的个数，即D中长度为1的回路总数。



问下图有多少条长度为2、3、4....
的通路？





$$A' = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$A^2 = ?$$

$$A^2 = A'$$

利用有向图邻接矩阵计算D中长度为 $d(d>1)$ 的通路数和回路数。

对于 $d=2,3,\dots$,

定义 $A^d=(a_{ij}^{(d)})_{n \times n}$, 其中 $a_{ij}^{(d)} = \sum_k a_{ik}^{(d-1)} a_{kj}^{(d)}$

在 A^d 中

$a_{ij}^{(d)}$ 为顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 d 的通路数

$a_{ii}^{(d)}$ 为顶点 v_i 到自身的长度为 d 的回路数

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(d)}$ 为D中长度为 d 的通路总数

$\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(d)}$ 为D中始于各顶点的长度为 d 的回路总数

定理14.11 设A为有向图D的邻接矩阵，则 A^d ($d \geq 1$) 中元素为 $a_{ij}^{(d)}$ 为顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为d的通路数，

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(d)}$ 为D中长度为d的通路总数，

$\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(d)}$ 为D中长度为d的回路总数。

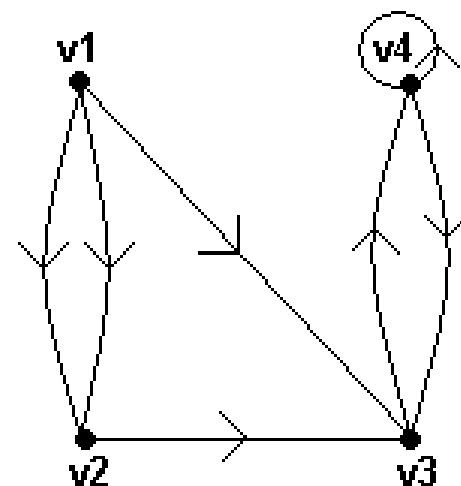
推论 设 $B_d = A + A^2 + \dots + A^d$ ($d \geq 1$)，则 B_d 中元素 $b_{ij}^{(d)}$ 为D中顶点 v_i 到顶点 v_j 长度小于等于d的通路数，

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(d)}$ 为D中长度小于等于d的通路总数，

$\sum_{i=1}^n b_{ii}^{(d)}$ 为D中长度小于等于d的回路总数。

例：求右边有向图D中

- (1) 端点v2到v4长度为1, 2, 3, 4的通路分别为多少条？
- (2) 端点v4到自身长度为1, 2, 3, 4的回路分别为多少条？
- (3) 长度小于等于4的通路和回路分别有多少条？



解：有向图D的邻接矩阵为

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \quad A^2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Bmatrix} \quad A^3 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{Bmatrix} \quad A^4 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{Bmatrix}$$

端点v2到v4长度为1, 2, 3, 4的通路分别为0, 1, 1, 2条

端点v4到自身长度为1, 2, 3, 4的回路分别为1, 2, 3, 5条

长度小于等于4的通路和回路分别有53条和15条

定义14.27 (有向图的可达矩阵) 设有向图 $D=\langle V, E \rangle$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 对 $i, j=1, 2, \dots, n$, 令

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 可达 } v_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

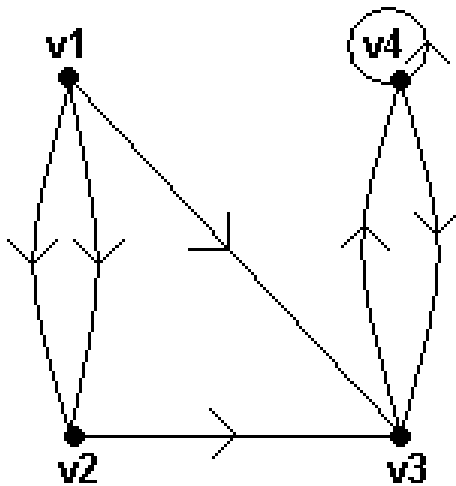
称 $(p_{ij})_{n \times n}$ 为 D 的 **可达矩阵**, 记作 $P(D)$, 简记为 P 。

说明:

若顶点 v_i 到顶点 v_j 存在通路, 则称 v_i 可达 v_j 。
规定对于任意的顶点 v_i 可达自身。

由于任意的顶点 v_i 与其自身相互可达, 所以 $P(D)$ 主对角线上的元素全为1。

例如：下图的可达矩阵为



$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$



可由D的邻接矩阵求可达矩阵

D的可达矩阵 $P=(p_{ij})_{n \times n}$ ，其中

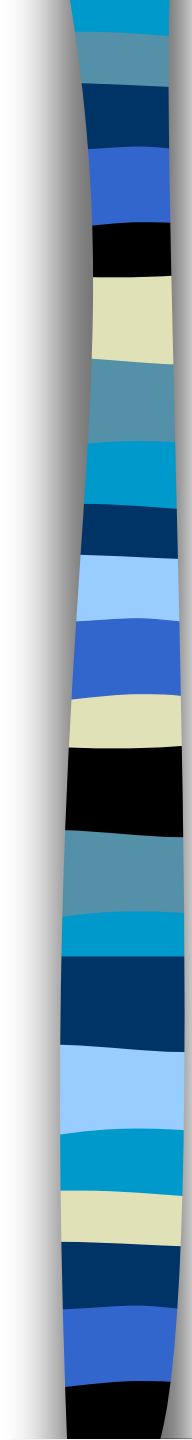
$$p_{ij} = \begin{cases} 1, v_i \text{ 可达 } v_j \\ 0, \text{ 否则} \end{cases}$$

由定理14.11及其推论可得

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, b_{ij}^{(n-1)} \neq 0 (i \neq j) \text{ 或 } i = j \\ 0, \text{ 否则} \end{cases}$$



补充 图的计算机存储

- 
- 图有两种基本的存储方式：
 - （1）邻接矩阵
 - （2）邻接表

图的存储—邻接矩阵法

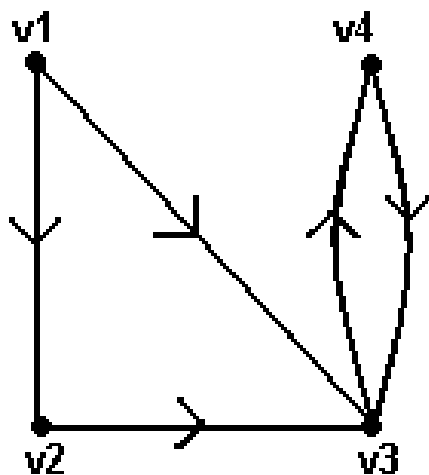
若图 $G=\langle V, E \rangle$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 则图的邻接矩阵为 $A=(a_{ij})_{n \times n}$, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \langle v_i, v_j \rangle \in E \text{ or } (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

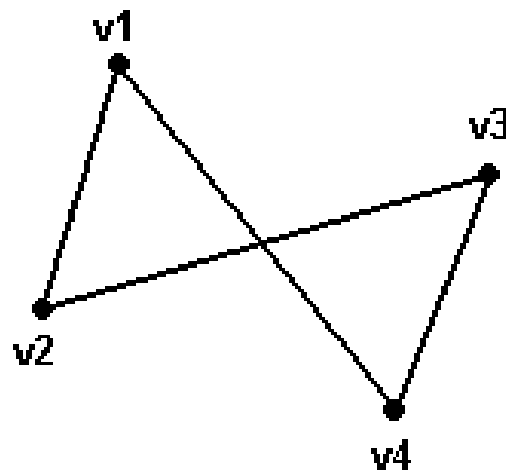
在绝大部分应用中，都不考虑环和平行边。

无向图的邻接矩阵是对称矩阵。

例 给出下图的邻接矩阵。



$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$



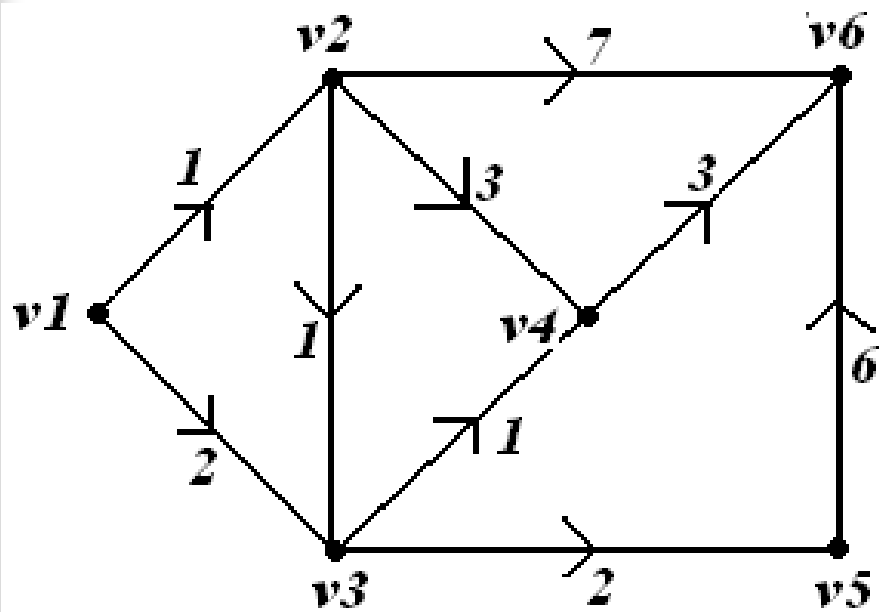
$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

图的存储—邻接矩阵

- 对于带权图 $G = \langle V, E, W \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $W = \{w_{ij}\}_{n \times n}$, 则图的邻接矩阵为 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \langle v_i, v_j \rangle \in E \text{ or } (v_i, v_j) \in E \\ \infty, & \text{other} \end{cases}$$

例：给出下图的邻接矩阵。


$$\begin{bmatrix} \infty & 1 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 3 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$



邻接矩阵的不足

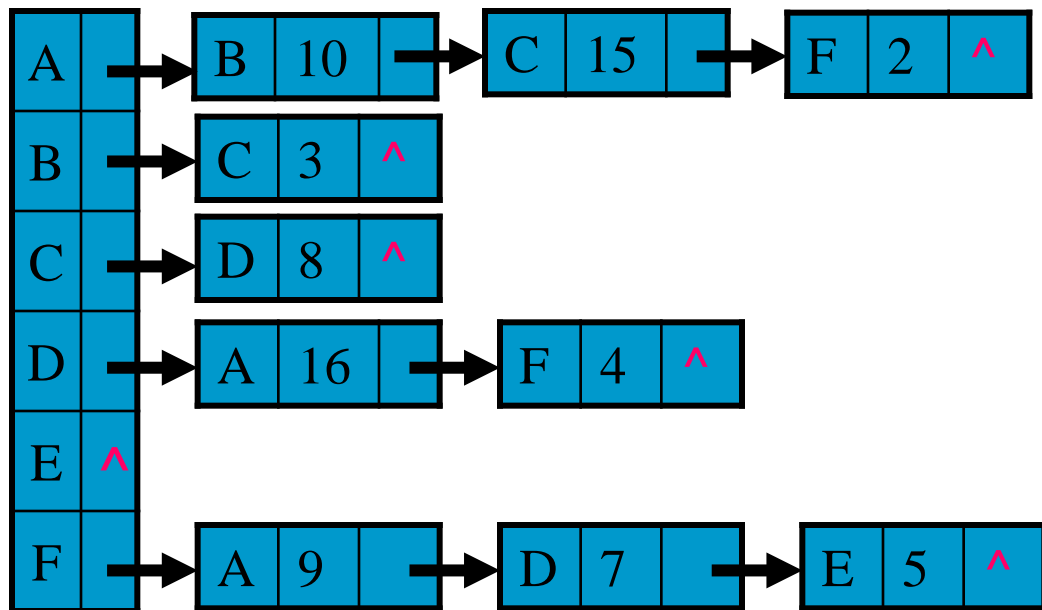
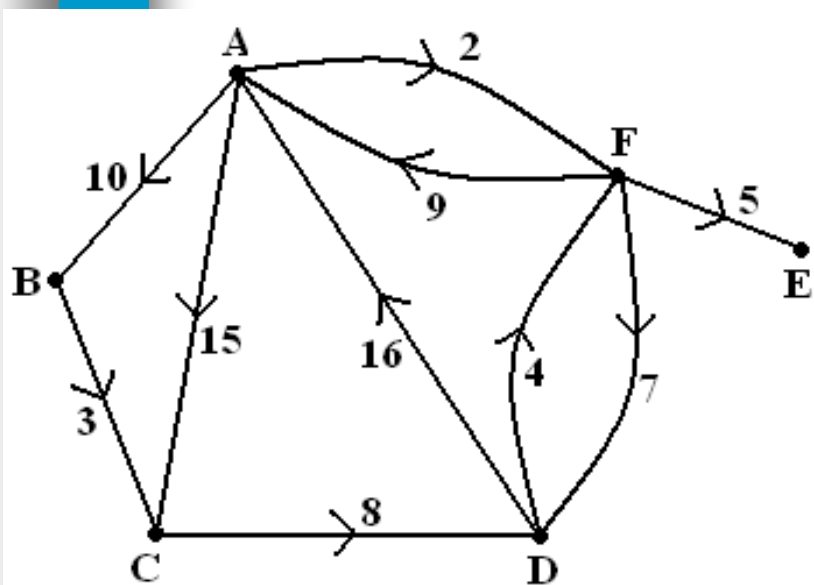
- 采用邻接矩阵存储图时，当图中的边数少于顶点个数时（如稀疏图），邻接矩阵中出现大量无用的零元素或无穷元素，这样会导致存储利用率比较低。

图的存储—邻接表法

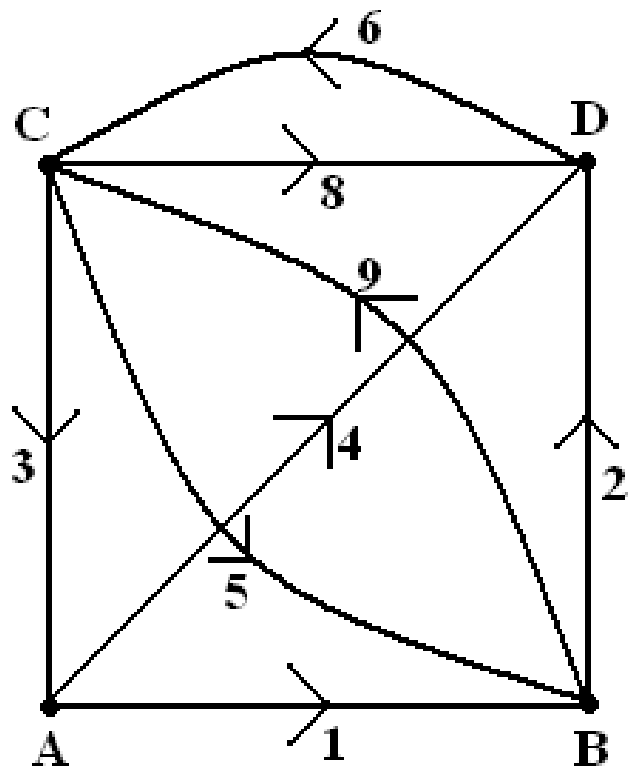
- 邻接表是邻接矩阵的改进，采用了一种链接存储结构。
- 邻接表把邻接矩阵中的 n 行改为 n 个单链表，把同一个结点作为起点的边链接在同一个称之为边链表的单链表中。此外邻接表还需使用一个结点链表作为边链表的表头。

例：给出下图的邻接表。

结点列表



练习：给出下图的邻接表。



A	→	B	1	→	D	4	^
B	→	C	9	→	D	2	^
C	→	A	3	→	D	8	^
D	→	C	6	→			



补充

图的遍历 *Graph Traversal*



图的遍历及其意义

- 图是一种很重要的数据模型，我们经常需要通过程序检查图的每个顶点和每条边来了解其性质。
- 获取这些性质的自然方式就是沿着图的边从一个顶点移到另一个顶点，直至走遍图的所有顶点，这就是所谓的图的遍历（*Graph Traversal*）。

探索迷宫



迷宫是一个在西方文化中经常出现的一种形象概念。各个时期和不同的地域都有着不同的隐喻含义。不过其中大多表示路途艰难和神秘性。

探索迷宫

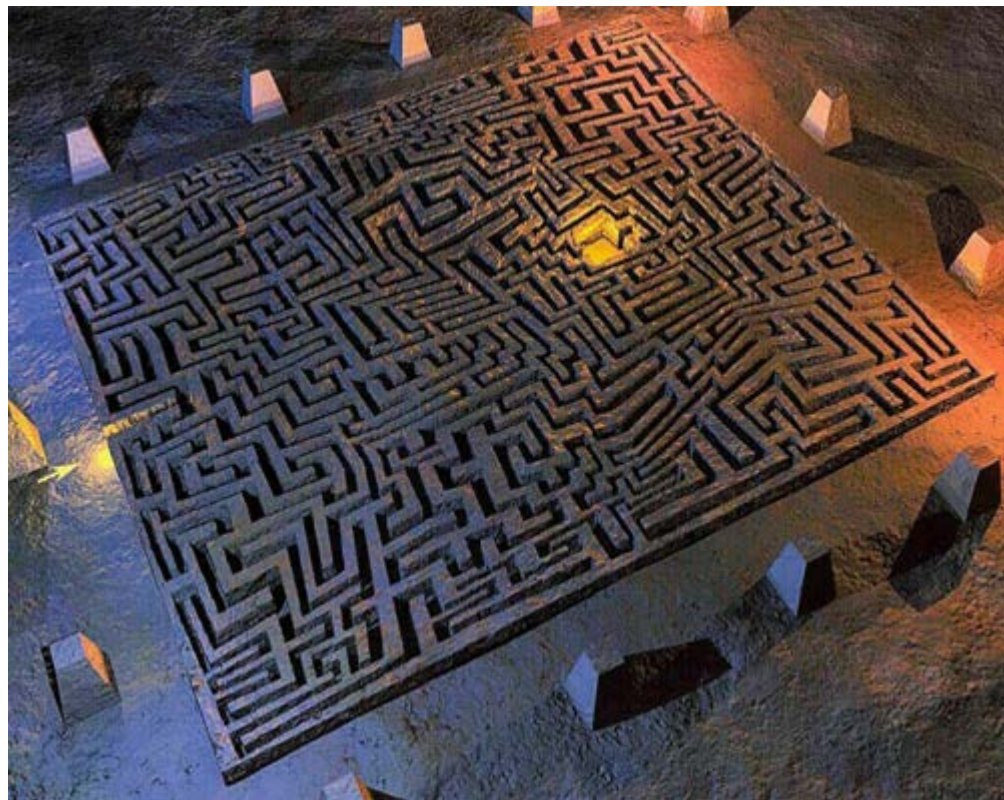
■ 特修斯和米诺陶洛斯的传说

- 特修斯是雅典的英雄和国王；
- 米诺陶洛斯半人半牛的怪物，住在克里特岛的迷宫中，专吃雅典进贡的童男童女。
- 克里特岛希腊东南沿海的一个岛屿，位于地中海东部。它的迈诺斯文明是世界最早的文明之一，并在公元前17世纪达到其财富和权势的顶峰。克里特岛先后被希腊人、罗马人、拜占廷人、阿拉伯人、威尼斯人和奥托曼土耳其人攻陷。岛上居民在1908年宣布与现代的希腊结成联盟。

探索迷宫的方法

铺设绳索探索法 Trémaux探索法

Trémaux探索法用油灯来代替绳索，即在所到达的每一个交叉处点亮一盏油灯。



探索迷宫和图的遍历

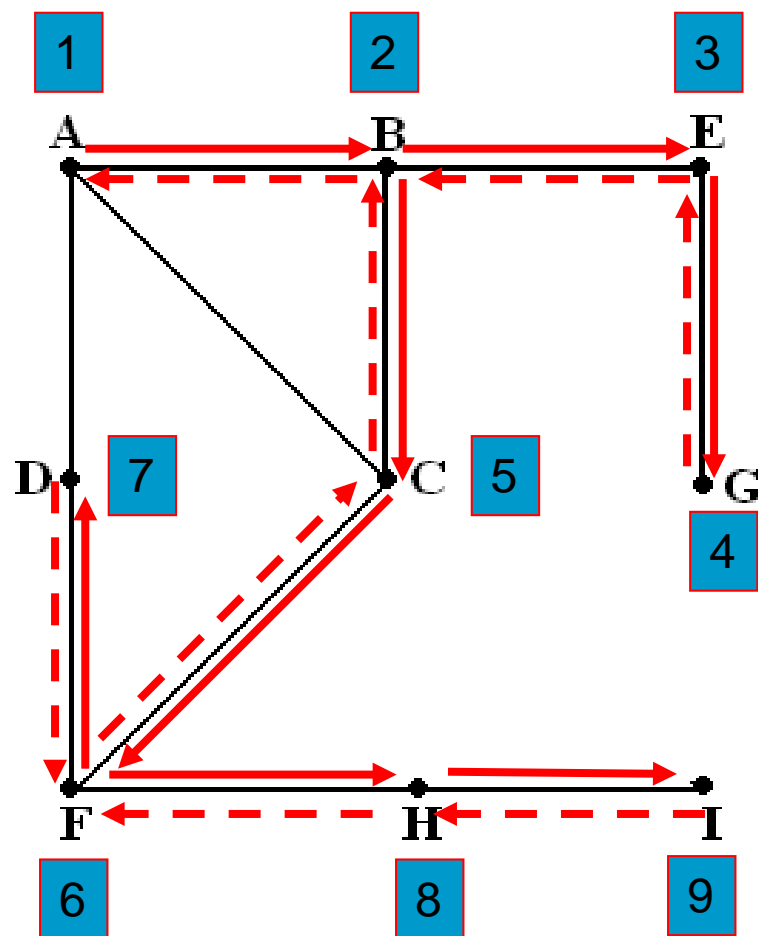
- 探索迷宫问题和图的遍历问题是等价的
 - 迷宫的通道对应于图的边，迷宫中通道的交叉点对应于图中的顶点。
- 在实际的应用中，被广泛使用的图的遍历方法主要有两种：
 - 深度优先搜索 *DFS* (*Depth First Search*)
 - 广度优先搜索 *BFS* (*Breadth First Search*)

深度优先搜索DFS

■ 基本思想

- (1) 从图中某一点 u 出发，访问它的任一邻接顶点 w_1 ；再从 w_1 出发，访问与 w_1 邻接但还没有访问过的顶点 w_2 ；如此进行下去，直至到达所有的邻接顶点都被访问过的顶点 v 为止。
- (2) 退回一步，退到前一次刚访问过的顶点，看是否还有其它没有访问过的邻接顶点。如果有，则采用(1)的方法进行访问；如果没有，则再退回一步进行搜索。重复这个过程，直至图中所有的顶点都被访问过为止。

例：采用深度优先搜索法从A出发遍历下图

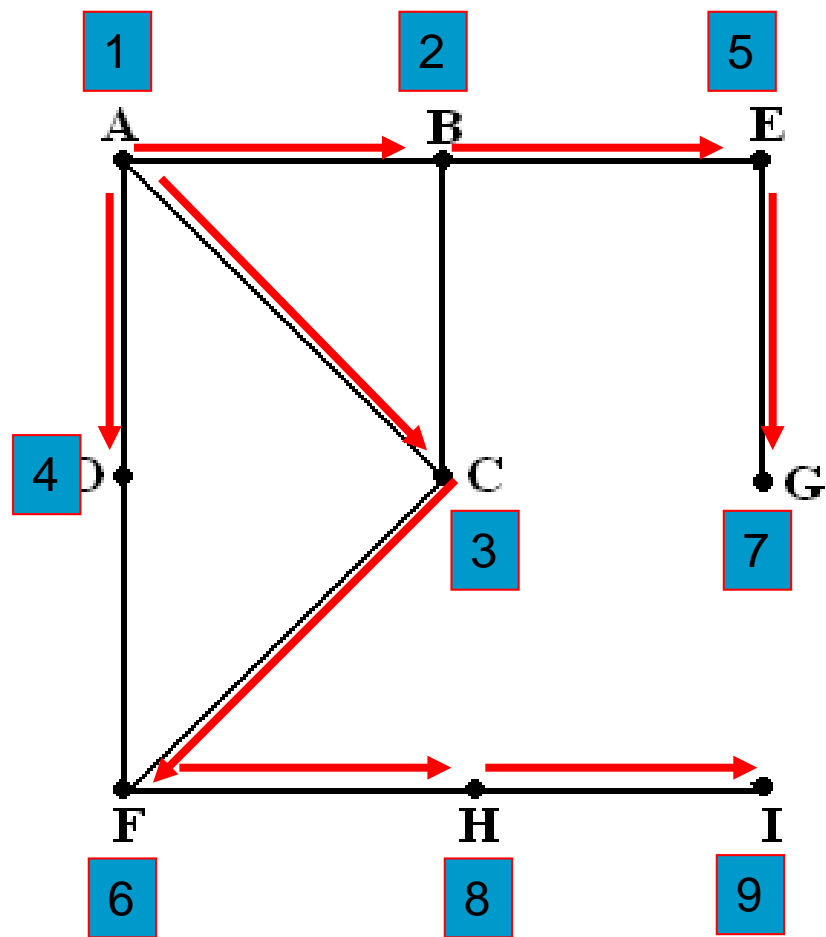


广度优先搜索 *BFS*

■ 基本原理

- 从图中某一点 u 出发，依次访问它的所有邻接顶点 $w_1 w_2 w_3 \dots$ ；再分别从 $w_1 w_2 w_3 \dots$ 出发，访问所有与它们邻接但还没有访问过的顶点；如此进行下去，直至所有的顶点都被访问过为止。

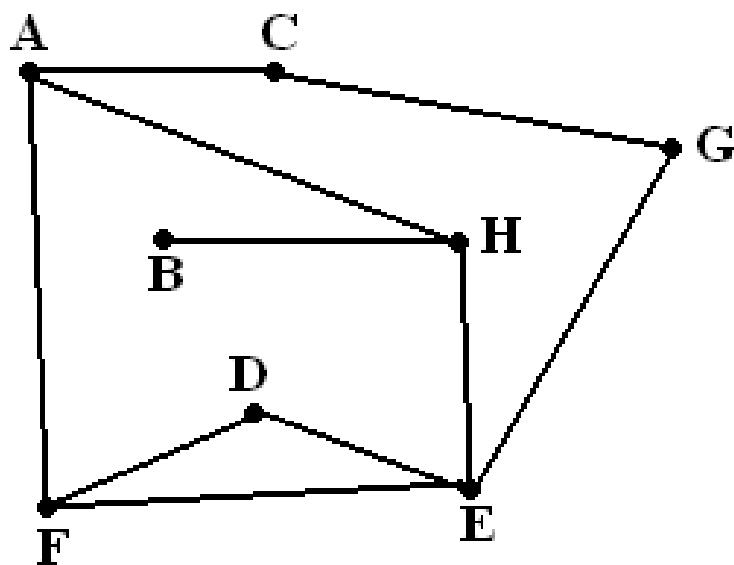
例：采用广度优先搜索法从A出发遍历下图



课后练习题

(1) 基于深度优先搜索法或广度优先搜索法，设计一个算法判断图的连通性。

(2) 分别采用深度和广度优先搜索法从A出发遍历下图。



14.5 图的运算

本节将集合的有关运算应用到图中来，给出几种图的运算：**不交**、**并图**、**差图**、**交图**、**环和**。

定义14.28（不交） 设 $G_1=\langle V_1, E_1 \rangle$ ， $G_2=\langle V_2, E_2 \rangle$ 为两个图。若 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ，则称 G_1 和 G_2 是**不交**的。若 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ，则称 G_1 和 G_2 是**边不交**的或**边不重**的。

说明：不交的图必然是边不交的。但反之不真。

定义14.29 设 $G_1=\langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2=\langle V_2, E_2 \rangle$ 为不含孤立点的两个图（它们同为无向图或同为有向图）

(1) 称以 $E_1 \cup E_2$ 为边集，以 $E_1 \cup E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的**并图**，记作 $G_1 \cup G_2$ 。

(2) 称以 $E_1 - E_2$ 为边集，以 $E_1 - E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的**差图**，记作 $G_1 - G_2$ 。

(3) 称以 $E_1 \cap E_2$ 为边集，以 $E_1 \cap E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的**交图**，记作 $G_1 \cap G_2$ 。

(4) 称以 $E_1 \oplus E_2$ 为边集，以 $E_1 \oplus E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的**环和**，记作 $G_1 \oplus G_2$ 。

说明：

(1) 若 $G_1 = G_2$ ，则 $G_1 \cup G_2 = G_1 \cap G_2 = G_1 (G_2)$ ，
而 $G_1 - G_2 = G_2 - G_1 = G_1 \oplus G_2 = \emptyset$ 。

(2) 当 G_1 和 G_2 是边不交时， $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ ， $G_1 - G_2 = G_1$ ，
而 $G_2 - G_1 = G_2$ ， $G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2$ 。

(3) $G_1 \oplus G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$