河海大学

概率论与数理统计

Probability & Statistics

主讲：朱永忠

群名称：2017级《概率统计...

群　号：855032932

概率论

17--18世纪：

Pascal 、Fermat、Huygens、Bernoulli、

De Moivre、Simpson、Buffon;

19世纪：

Laplace、Gauss、Poisson、

Chebyshev、Markov;

20世纪：

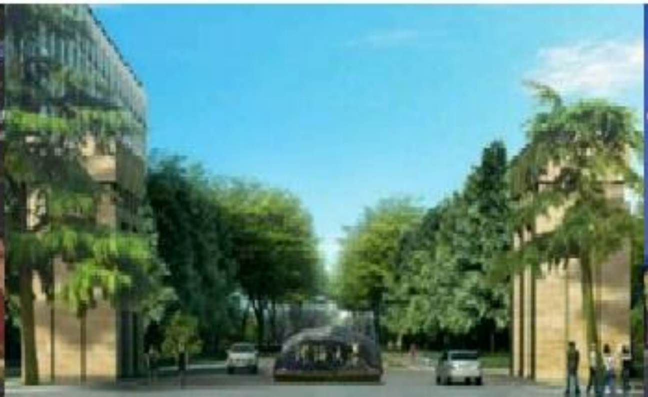
Kolmogorov、Khintchine;

数理统计

R. A. Fisher 、K. Pearson、
W. S. Gosset(Student)、J. Neyman、
E. S. Pearson(K. Pearson 的儿子)、
A. Wald、H. Cramer、许宝騄等等。

河海大学

Ch1 随机事件与概率



- **确定性现象：**在一定条件下必然发生。

  随机现象：在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象。

- **随机试验**

*E*1：掷一枚硬币，观察正面（*H*）、反面（*T*）出现的情况；

*E*2：抛一颗骰子，考虑可能出现的点数；

*E*3：测试出厂日光灯的质量，观察记录结果；

*E*4：记录南京市每天的最高温度和最低温度；

*E*5：早上7：30在校食堂某摊位前排队买早点的人数。

综上随机试验有以下特点：

1.可在相同条件下重复进行;

2.试验结果不止一个,但能确定所有的可能结果;

3.一次试验之前无法确定具体是哪种结果出现。

具有上述三个特点的试验称为**随机试验**，记为E。

- **样本空间Ω**

随机试验E的所有可能试验结果组成的集合称为**样本空间**，记为Ω。

样本点：组成样本空间的元素，即随机试验E的每个可能结果，记为ω。

样本点又叫**基本事件**，所以Ω={ω}。

$E1$： 掷一枚硬币，观察正面（H）、反面（T）出现的情况；

$E2$： 抛一颗骰子，考虑可能出现的点数；

$E3$： 测试出厂日光灯的质量，观察记录结果；

$E4$： 记录南京市每天的最高温度和最低温度；

$E5$： 早上7：30在校食堂某摊位前排队买早点的人数。

Notes :

样本空间的元素是由试验的目的所确定的。

- 随机事件

试验E的样本空间Ω的子集称为E的随机事件，简称事件，记为A、B等。

即试验E的部分试验结果组成的集合为随机事件。

在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生。

基本事件：由一个样本点构成的单点集。

必然事件：在每次试验中总是发生的事件。

比如样本空间Ω。

Notes：样本空间为必然事件，必然事件不一定为样本空间。

不可能事件：在每次试验中都不发生的事件。

比如空集$\varnothing$。

Notes： 空集为不可能事件，不可能事件不一定为空集。

例 一袋里有四个球，它们分别标号为1、2、3和4。现从袋中任取一球后，不放回袋中，再从袋中任取一球，记录两次取球的结果。

若取出一个球后再放回去呢？

若改为一次从袋中任取两个球呢？

若改为从袋中不放回地一个接一个地取球，直到取出1号球为止，记录所取的球的号码。

• 事件之间的关系

1. 包含关系

$A \subset B \Leftrightarrow A$发生必导致$B$发生

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$

2. 和事件

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\} \Leftrightarrow A$与$B$至少一个发生

$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \Leftrightarrow n$个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$的和事件

$\Leftrightarrow n$个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$至少发生一个

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow$可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的和事件

$\Leftrightarrow$可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$至少发生一个

3. 积事件

$A \cap B = AB = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\} \Leftrightarrow A$与$B$同时发生

$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \Leftrightarrow n$个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$的积事件

$\Leftrightarrow n$个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow$可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的积事件

$\Leftrightarrow$ 可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$同时发生

4. 差事件

$A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\} \Leftrightarrow A$发生但$B$不发生

5. 互不相容或互斥

$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A$、$B$互不相容或互斥

Notes: 基本事件是两两互不相容的事件

6. 对立事件或逆事件

$A \cap B = \varnothing$且 $A \cup B = \Omega$

$\Leftrightarrow A$与B互为逆事件或对立事件

A的对立事件记为$\overline{A}$

$\overline{A} = \Omega - A$

- 事件与集合对应关系类比

概率论	集合论
样本空间	$\Omega=\{\omega\}$
事件	子集
事件A发生	$\omega \in A$
事件A不发生	$\omega \notin A$
事件A发生导致事件B发生	$A\subset B$

概率论	集合论
事件A与B至少有一个发生	$A\cup B$
事件A与B同时发生	$A\cap B$(或AB)
事件A发生而B不发生	$A-B$
事件A与B互不相容	$AB=\varnothing$

事件的运算

1、交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

2、结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$$(AB)C=A(BC)$$

3、分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，

$$(AB)\cup C=(A\cup B)(B\cup C)$$

4、对偶(De Morgan)律：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

可推广 $\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k \overline{A_k}$；$\overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k \overline{A_k}$

例 设A、B、C表示三个事件，试将下列事件用A、B、C表示出来

（1）A出现，B、C不出现；

（2）三个事件中至少一个事件出现；

（3）不多于一个事件出现；

（4）不多于两个事件出现；

（5）A、B、C中恰有两个出现。

• 排列与组合

加法原理：

设完成一件事情有n种方法（只要选择其中一种方法即可完成这件事），若第一类方法有m_1种，第二类方法有m_2种，···，第n类方法有m_n种，则完成这件事情共有：

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

乘法原理:

设完成一件事情有n个步骤（仅当n个步骤都完成，才能完成这件事），若第一步有m_1种，第二步有m_2种，…，第n步有m_n种，则完成这件事情共有： $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$

Notes: 加法原理与乘法原理的区别：前者完成一步即完成一件事；后者须n步均完成才完成一件事。

排列：

从n个不同元素中任取$m(m \le n)$个按照一定的顺序排成一列，称为从n个不同元素中取出m个元素的一个**排列**。从n个不同元素取出m个元素的所有排列种数，记为：

$$P_n^m = n(n-1)\cdots[n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}$$

从n个不同元素中全部取出的排列称为**全排列**，其排列的种数，记为：

$$P_n = n(n-1)\cdots 1 = n! \quad \text{规定 } 0! = 1$$

允许重复的排列：

从n个不同元素中有放回地取m个按照一定的顺序排成一列，其排列的种数为：

$$N = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m\text{个}} = n^m$$

组合:

从n个不同元素中任取m个元素，不管其顺序并组成一组，称为从n个不同元素中取出m个元素的一个**组合**，其组合总数记为:

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

有性质: (1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;　(2) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

Notes: 排列与组合的**区别**：前者与次序有关；后者与次序无关。

• 频率与概率

定义 事件A在n次重复试验中出现n_A次，则比值n_A/n称为事件A在n次重复试验中出现的**频率**，记为$f_n(A)$. 即 $f_n(A) = n_A/n$.

频率的性质

(1) 非负性： $f_n(A) \geq 0$； (2) 规范性： $f_n(\Omega) = 1$；

(3) 有限可加性：若$A_1, A_2, \cdots, A_m$为两两互不相容的事件,则:

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = \\ = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_m)$$

实践证明：当试验次数n增大时，$f_n(A)$ 逐渐趋向一个定值。

历史上曾有人做过试验,试图证明抛掷匀质硬币时，出现正反面的机会均等。

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
K. Pearson	12000	6019	0.5016
K. Pearson	24000	12012	0.5005

定义 若对随机试验E所对应的样本空间Ω中的每一事件A，均赋予一实数$P(A)$，集合函数$P(A)$满足条件：

(1)非负性： 对任一事件A，有$P(A)\geq 0$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：设A_1，A_2，$\cdots$, 是一列两两互不相容的事件，即$A_iA_j=\varnothing$，$(i\neq j)$, $i, j=1, 2,\cdots$, 有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

则称$P(A)$为事件A发生的**概率**。

事实上： $f_n(A)\xrightarrow{P}P$, $n\to\infty$

概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$;

(2) 有限可加性：设A_1，A_2，$\cdots A_n$, 是n个两两互不相容的事件，即$A_iA_j=\varnothing$，$(i\neq j)$, $i,j=1, 2, \cdots, n$,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

(3) 单调不减性：

若事件$B\supset A$，则$P(B)\geq P(A)$,

且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$;

(4) 互补性：$P(\overline{A})=1-P(A)$，且$P(A)\leq 1$;

(5) 加法公式:

对任意两事件A、B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

推论 $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

上式可推广到任意n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的情形;

(6) 可分性:

对任意事件A、B，有 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$

一般的，有如下定义

定义 事件组B_1，B_2，$\cdots$，B_n(n可为∞)，称为样本空间Ω的一个**划分**(或**完备事件组**)，若满足：

$$(1)\ \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega;$$

$$(2) B_i B_j = \varnothing\ ,\quad (i \neq j), i, j = 1,2,\ldots,n.$$

- **古典概型(等可能概率)**

特征：

1^0 样本空间的元素只有有限个；

2^0 试验中每个基本事件发生的可能性相同；

满足上述两个特征的试验称为等可能概型（或古典概型）。

有限性：样本空间$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$;

等可能性：$P(\omega_i)=\dfrac{1}{n}$，$(i=1, 2, \cdots, n)$.

设事件A中包含k个样本点(基本事件)

$$P(A)=\frac{A\text{中所含基本事件数}}{\Omega\text{中包含的基本事件总数}}=\frac{k}{n}$$

例 一口袋装有8只球，其中3只白球，5只红球。

（1）从袋中一次取球4只，求取出2只白球和2只红球的概率；

（2）从袋中不放回地依次取球4只，求取出2只白球和2只红球的概率；

（3）从袋中有放回地依次取球4只，求取出2只白球和2只红球的概率。

例 将n只球随机地放到N（$N \geq n$）个盒子中去。

（1）试求指定的n个盒子各有一只球的概率；

（2）试求每个盒子至多有一只球的概率;

（3）试求指定的盒子中有k只球的概率。

例 在1~2000的整数中随机地取一个数，问取到的整数既不能被6整除，又不能被8整除的概率是多少？

例 盒中有a只黑球，b只白球，把球随机地一只只摸出来（不放回），求第k次摸到黑球的概率。（$1\le k \le a+b$）

例 某接待站在某一周曾接待过12次来访，已知所有这12次接待都是在周二和周四进行的，问是否可以推断接待时间是有规定的？

• 几何概型

特征

1.基本事件数无限：

$\Omega=\{\omega\}$，ω充满区域Ω；即Ω是一个区域。

2.等可能性： 随机点落在某区域G的概率与区域G的几何测度(长度、面积、体积等)成正比，而与其位置及形状无关。

以A_G表示“在区域Ω中随机地取一点落在区域G中”这一事件，则

$$P(A_G)=\frac{G\text{的几何测度(长度,面积,体积)}}{\Omega\text{的几何测度(长度,面积,体积)}}$$

例 从(0,1)中随机地取两个数，求下列事件的概率。（1）两数之和小于1.2；（2）两数之积小于0.25。

例 (蒲丰(Buffon)投针问题)

1777年法国科学家蒲丰提出了下列著名问题：平面上画着一些平行线，它们之间的距离都等于d，向此平面上任投一长度为$L(L< d)$的针，试求此针与任一平行线相交的概率。

- **条件概率**

引例 某班有100人，其中男生60人，女生40人，考试及格95人，其中男生58人，女生37人。

记A：任取一人考试及格；B：任取一人为男生。

（1）求任取一人考试及格的概率；

（2）已知任取一人为男生, 求他考试及格的概率。

定义 设A、B是Ω中的两个事件，且$P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件B发生的条件下事件A发生的**条件概率**。

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Notes: 1^0 条件概率的计算除了按上式计算之外，也可在缩减的样本空间Ω_B里直接计算。

2^0 条件概率$P(A|B)$也是概率。它也具有概率所具有的一切性质。

比如：i) $0\le P(A|B)\le 1$； i i) $P(\Omega|B)=1$；

iii)设A_1，A_2，…, 是一列两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\,\middle|\,B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B)$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

还有:

$$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$$

$$P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$$ 等等

例 设 A、B为随机事件，$P(A)=0.92$，$P(B)=0.93$，$P(B|\overline{A})=0.85$，求$P(A|\overline{B})$和$P(A\cup B)$。

- **乘法公式**

$$\because\ P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad \therefore\ P(AB)=P(A|B)P(B)$$

事件A、B的概率乘法公式

上式还可推广到三个事件的情形：

$$P(ABC)=P(A|BC)P(B|C)P(C)$$

一般的，有下列公式：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1)$$

例 对产品作抽样检验时，每100件为一批，逐批进行。对每批检验时。从中任取1件作检查，如果是次品，就认为这批产品不合格；如果是合格品，则再检查一件，检验过的产品不放回。如此连续检查5件，如果检查5件产品都是合格品，则认为这批产品合格而被接受。假定一批产品中有5%是次品，求一批产品被接受的概率？

- **全概率公式**

定理 设B_1，…，B_n是Ω的一个划分，且 $P(B_i)>0$，($i=1$，…，n)，则对任何事件A，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

全概率公式

例 某电子设备制造厂所用的晶体管是由三家元件制造厂提供的。根据以往的记录有以下数据：

元件制造厂	次品率	提供晶体管的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这家工厂的产品在仓库中是均匀混合的，且无区别的标记，在仓库中随机地取一只晶体管，求它是次品的概率。

例 玻璃杯成箱出售，每箱20只，假设各箱含0、1、2只残次品的概率相应为0.8，0.1，0.1。一顾客欲购玻璃杯，售货员随意取一箱，而顾客随机地察看4只杯，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回。求顾客买下该箱的概率。

- **贝叶斯(*Bayes*)公式**

定理 设B_1，…, B_n是Ω的一个划分，且 $P(B_i)>0$，(i＝1，…，n)，则对任何事件A，有

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{P(A)}=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)},$$

$$(j=1,\ldots,n)$$

贝叶斯公式或逆概率公式

例 已知男人中有5%是色盲患者，女人中有0.25%是色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

例 在无线电通讯中，由于随机因素的影响，当发出短号“•”时，收到“•”、“不清”和长号“—”的概率分别是0.7、0.2和0.1，当发出长号“—”时，收到“—”、“不清”和“•”“的概率分别是0.85、0.1和0.05。若在整个发报过程中信号“•”及“—”出现的概率分别是0.6和0.4，当收到信号“不清”时，试推测原发信号。

• 事件的独立性

两个事件的独立性

定义 设A、B是两事件，若

$$P(A)=P(A|B)$$

则称事件A与B**相互独立**。

上式等价于：$P(AB)=P(A)P(B)$

定理 以下命题等价：

1. 事件A、B相互独立；2. 事件$\overline{A}$、B相互独立；

3. 事件A、$\overline{B}$相互独立；4. 事件$\overline{A}$、$\overline{B}$相互独立。

多个事件的独立性

定义 若三个事件A、B、C满足：

(1) $P(AB)=P(A)P(B)$,

$P(AC)=P(A)P(C)$,

$P(BC)=P(B)P(C)$,

则称事件 A、B、C 两两相互独立；

若在此基础上还满足：

(2) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,

则称事件 A、B、C 相互独立。

两两独立 $\left\{\begin{array}{l} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{array}\right\}\text{相互独立}$$

相互独立 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 两两相互独立

　　一般地，设A_1，A_2，…，A_n是n个事件，如果对任意k $(1< k \le n)$, 任意的$1\le i_1< i_2<\cdots< i_k \le n$,具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称n个事件A_1，A_2，…，A_n相互独立。

例　三人独立去破译一密码，他们能译出的概率分别为1/5，1/3，1/4，问能将此密码译出的概率为多少？

例　若 $0 < P(A) < 1$，$P(B|A) = P(B|\overline{A})$。证明$A$、$B$相互独立。

例　一个均匀的正四面体，其第一面染成红色，第二面染成白色，第三面染成黑色，而第四面同时染上红、白、黑三种颜色。以A、B、C表示掷一次四面体出现红、白、黑颜色的事件。问这三个事件是否独立？

相互独立 $\not\Longleftarrow$ 两两相互独立

- **贝努里(*Bernoulli*)概型**

1. 只有两个可能结果的试验称为**贝努里试验**，常记为E. E也叫做“成功－失败试验”。若记A＝“成功”，其概率常用$p=P(A)$表示。

2. 把E重复独立地进行n次，所得的试验称为**n重贝努里试验**，记为E^n。

3. 把E重复独立地进行可列多次，所得的试验称为**可列重贝努里试验**，记为E^∞。

以上三种贝努里试验统称为**贝努里概型**

即 若试验可以看成或分解成独立重复进行的试验，且每次试验的结果只需考虑两个结果 A 与 $\overline{A}$，则该试验就是一个**贝努里试验**或**贝努里概型**。

几种概率：

1. E^n 中成功 k 次的概率(即 n 重贝努里试验中 A 发生 k 次的概率)是

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ (0\le k\le n)$$

例 甲、乙二人下象棋，假定每局比赛甲胜乙的概率为0.6，乙胜甲的概率为0.4，若采取5局3胜的比赛规则，问甲胜的可能性有多大？

例 一个平面上的质点从原点出发作随机游动，若每秒(s)走一步(步长为1)，向右走的概率为p，向上走的概率为q=1– p ($0 < p < 1$)。问8s走到点A(5, 3)的概率是多少?

2. E^{∞}中首次成功发生在第k次试验的概率(即可列重贝努里试验中A首次发生在第k次试验的概率)是

$$(1-p)^{k-1}p, \quad (k=1,2,\ldots)$$

3. E^{∞}中第r次成功发生在第k次试验的概率(即可列重贝努里试验中A发生r次需要k次试验的概率)是

$$C_{k-1}^{r-1}(1-p)^{k-r}p^{r}, \quad 1\le r\le k$$