第八章 函数

函数是一种特殊的二元关系

以前所讨论的有关集合或关系的运算和性质对于函数完全适用

函数也可以称作**映射**

8.1 函数的定义与性质

本节学习函数的有关定义和函数的性质

定义8.1（函数） 设F为二元关系，若$\forall x \in domF$都存在唯一的$y \in ranF$使得xFy，则称F为**函数**。

对于函数F，如果有xFy，则记作$y=F(x)$，并称y为F在x的值。

注意： 对于任意的函数F，若$\langle x,y\rangle \in F \wedge \langle x,z\rangle \in F$，则有$y=z$。（**单值性**）

例8.1 设$F1=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_1\rangle,\langle x_3,y_2\rangle\}$，$F2=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_1,y_2\rangle\}$ 判别它们是否为函数。

解： F1是函数

F2不是函数

定义8.2（函数相等） 设F，G为函数，则 $F=G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$

有上述定义可知，两个**函数F和G相等**，一定要满足下面两个条件：

（1）domF=domG

（2）$\forall x \in domF=domG$都有F（x）= G（x）

例如：函数F（x）=（x^2-1）/(x+1)，G（x）=x−1

两函数是不相等的

因为$domF=\{x \mid x \in R \wedge x \neq -1\}$，而domG=R，

所以$domF \neq domG$

定义8.3 设A，B为集合，如果f为函数，且$\mathrm{dom}f=A$，$\mathrm{ran}f\subseteq B$，则称f为**从A到B的函数**，记作$f: A\rightarrow B$。

例如： $f: N\rightarrow N$，$f(x)=2x$是从N到N的函数；

$g: N\rightarrow N$，$g(x)=2$也是从N到N的函数

定义8.4 所有从A到B的函数的集合记作B^A，读作"B上A"，符号化表示为$B^A=\{f \mid f: A\rightarrow B\}$。

思考： 若$|A|=m$，$|B|=n$，且$m, n>0$，$|B^A|=?$

说明：若$|A|=m$，$|B|=n$，且$m, n>0$，则$|B^A|= n^m$。

定义（空函数） 称$\varnothing$为空函数。

例8.2 设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b\}$，求B^A

解：$B^A=\{f0, f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7,\}$，其中

$f0=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, a\rangle\}$

$f1=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$

$f2=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle\}$

$f3=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, b\rangle\}$

$f4=\{\langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, a\rangle\}$

$f5=\{\langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$

$f6=\{\langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle\}$

$f7=\{\langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle\}$

$|A|=3$，$|B|=2$，$B^A=2^3=8$

定义8.5（函数的像和原像） 设$f:A\to B$，$A1\subseteq A$，$B1\subseteq B$

（1）A1**在f下的像**是$f(A1)=\{f(x)\mid x\in A1\}$，当A1=A时，称$f(A1)= f(A)=\mathrm{ran}f$是**函数的像**。

（2）称$f^{-1}(B1)=\{x\mid x\in A\wedge f(x)\in B1\}$为B1在f下的**完全原像**。

说明：

（1）函数的值f(x)和像f(A)是有区别的：$f(x)\in B$，$f(A)\subseteq B$，$f(x)\in f(A)$

（2）$f^{-1}(B1)\subseteq A$，$A1\subseteq f^{-1}(f(A1))$

例： 设$f:R\to R$，$f(x)=|x|$，令$A1=\{0, 1\}$，$B1=\{0, 1\}$

则$f(A1)=\{f(0), f(1)\}=\{0, 1\}$

$f^{-1}(B1)= f^{-1}(f(A1))=\{-1, 0, 1\}$

可见$A1\subseteq f^{-1}(f(A1))$

函数的性质：

定义8.6 设函数f：A→B，

（1）若ranf=B，即对于任意的y∈B，都存在x∈A使得f(x)=y，则称f是**满射的**。

（2）若∀y∈ranf都存在唯一的x∈A使得f(x)=y，则称f是**单射的**。

（3）若f既是满射的又是单射的，则称f是**双射的**。

说明：

（1）证明单射性，即证：对于任意的x1，x2∈A，如果x1≠x2，则有f(x1) ≠ f(x2)

或证：对于任意的x1，x2∈A，如果f(x1)=f(x2)，则x1=x2

（2）证明双射性，即分别证明单射性和满射性

例8.5 判断下列各题中的f是否为从A到B的函数，如果是说明它是否为单射、满射或双射。

（1）$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{6, 7, 8, 9, 10\}$，

$f=\{\langle 1, 8\rangle, \langle 3, 9\rangle, \langle 4, 10\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 5, 9\rangle\}$

解题步骤：

（a）是否A到B的函数：f为函数$\wedge \mathrm{dom}f=A \wedge \mathrm{ran}f \subseteq B$

（b）是否单射：函数值是否有重复

（c）是否满射：$\mathrm{ran}f=B$

（d）是否双射：单射+满射

解：（a）是A到B的函数：f为函数$\wedge \mathrm{dom}f=A \wedge \mathrm{ran}f \subseteq B$

（b）不是单射：$f(3)=f(5)=9$

（c）不是满射：$7 \notin \mathrm{ran}f$

（2）A={1，2，3，4，5}，B={6，7，8，9，10}，

f={<1，8>，<3，10>，<2，6>，<4，9>}

解： 不是A到B的函数：$\mathrm{dom}f \neq A$

（3）A={1，2，3，4，5}，B={6，7，8，9，10}，

f={<1，7>，<2，6>，<4，5>，<1，9>，<5，10>}

解： 不是A到B的函数：

f不是函数，<1，7>$\in$f并且<1，9>$\in$f，与函数定义矛盾。

（4）A，B为实数集，$f(x)=x^3$

解： 是A到B的双射函数

定义8.7 （常用函数）

（1）设f：A→B，如果存在c∈B使得对所有的x∈A都有f(x)=c，则称f是**常函数**。

（2）A上的恒等关系I_A就是A上的**恒等函数**，对于所有的x∈A都有$I_A(x)=x$。

（3）设<A，≤>，<B，≤>为偏序集，f：A→B，对于任意的x1，x2∈A，

如果x1< x2就有f(x1)≤f(x2)，则称f为**单调递增的**

如果x1< x2就有f(x1) <f(x2)，则称f为**严格单调递增的**

类似的可以定义**单调递减**和**严格单调递减**的函数。

它们统称为**单调函数**。

（4）设A为集合，对于任意的$A' \subseteq A$，A'的**特征函数**$\chi_{A'}$：$A \to \{0，1\}$定义为

$$\chi_{A'} = \begin{cases} 1 & a \in A' \\ 0 & a \in A - A' \end{cases}$$

例如： $A=\{a, b, c\}$，$A'=\{a\}$，
则有$\chi_{A'}(a)=1$，$\chi_{A'}(b)=0$，$\chi_{A'}(c)=0$

（5）设R是A上的等价关系，定义一个从A到商集A/R的函数g：$A \to A/R$且$g(a)=[a]$，易见函数g把A中的元素a映射到a的等价类[a]。则称g是从A到商集A/R的**自然映射**。

例如： $A=\{1, 2, 3\}$，$R=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\} \cup I_A$
则$g(1)=g(2)=\{1, 2\}=[1]=[2]$
$g(3)=\{3\}=[3]$

8.2 函数的复合与反函数

由于函数是特殊的二元关系，所以两个函数的复合本质上就是两个关系的复合，以前给出的有关关系复合的所有定理都适用于函数的复合。

本节着重考虑函数在复合中特有的性质。

定理8.1（函数复合）设F，G为函数，则F·G也是函数，且满足以下条件：

（1）$\mathrm{dom}(F\cdot G)=\{x \mid x\in \mathrm{dom}F \wedge F(x)\in \mathrm{dom}G\}$

（2）$\forall x\in \mathrm{dom}(F\cdot G)$ 有 $F\cdot G(x)=G(F(x))$

说明： 复合函数F·G的定义域可能要比函数F的定义域小。

例如： 对于函数

$F: R \to R,\ F(x)=x+1$

$G: R^+ \to R,\ G(x)=\ln x$

有$domF=ranF=R,\ domG=R^+,\ ranG=R$

$F \cdot G(x)=G(F(x))=\ln(x+1)$

则$dom(F \cdot G)=\{x \mid x \in R \land x>-1\}$

显然$dom(F \cdot G) \subseteq domF$

其原因是$ranF \neq domG$

推论1 设F，G，H为函数，则（F·G）·H和F·（G·H）都是函数，且（F·G）·H=F·（G·H）。

推论2 设f:A→B，g:B→C，则f·g:A→C，且∀x∈A都有f·g(x)=g(f(x))。

定理8.3 设f:A→B，则有$f=f\cdot I_B=I_A\cdot f$。

定理8.2（关于函数单射、满射、双射的性质）设$f:A \to B$，$g:B \to C$。

（1）如果f，g是满射的，则$f \cdot g:A \to C$也是满射的

（2）如果f，g是单射的，则$f \cdot g:A \to C$也是单射的

（3）如果f，g是双射的，则$f \cdot g:A \to C$也是双射的

证明：

（1）即证:对于任意的$c \in C$，存在$a \in A$，使得$f \cdot g(a)=g(f(a))=c$。

对于任意的$c \in C$，因为$g:B \to C$是满射的，所以存在$b \in B$使得$g(b)=c$。

对于b，由于$f:A \to B$是满射的，所以存在$a \in A$使得$f(a)=b$。

于是有$f \cdot g(a)=g(f(a))=g(b)=c$。

从而证明了$f \cdot g:A \to C$是满射的。

（2）即证：对于任意的$x1$，$x2 \in A$，若$x1 \neq x2$，则$f \cdot g(x1) \neq f \cdot g(x2)$

因为$f:A \to B$是单射的，所以$f(x1) \neq f(x2)$，并且$f(x1)$，$f(x2) \in B$

因为$g:B \to C$是单射的，所以$g(f(x1)) \neq g(f(x2))$

即$f \cdot g(x1) \neq f \cdot g(x2)$

从而证明了$f \cdot g:A \to C$是单射的。

说明： 由定义可见函数的复合运算能保持函数单射、满射、双射的性质。但该定理的逆命题不一定成立。

例如：

$A=\{a1, a2, a3\}$，$B=\{b1, b2, b3, b4\}$，$C=\{c1, c2, c3\}$

$f1=\{\langle a1, b1\rangle, \langle a2, b2\rangle, \langle a3, b3\rangle\}$

$g1=\{\langle b1, c1\rangle, \langle b2, c2\rangle, \langle b3, c3\rangle, \langle b4, c3\rangle\}$

则有$f1\cdot g1=\{\langle a1, c1\rangle, \langle a2, c2\rangle, \langle a3, c3\rangle\}$

易见f1，f1·g1是单射的，g1不是单射的。

$A=\{a1, a2, a3\}$，$B=\{b1, b2, b3\}$，$C=\{c1, c2\}$

$f2=\{\langle a1, b1\rangle, \langle a2, b2\rangle, \langle a3, b2\rangle\}$

$g2=\{\langle b1, c1\rangle, \langle b2, c2\rangle, \langle b3, c2\rangle\}$

则有$f2\cdot g2=\{\langle a1, c1\rangle, \langle a2, c2\rangle, \langle a3, c2\rangle\}$

易见g2，f2·g2是满射的，f2不是满射的。

函数的逆

任意给定一个函数f，作为一个关系，可以求f的逆，但是，它的逆不一定是函数，

例如： 对于$f=\{\langle x1, y1\rangle, \langle x2, y1\rangle, \langle x3, y2\rangle\}$

则f的逆为$f^{-1}=\{\langle y1, x1\rangle, \langle y1, x2\rangle, \langle y2, x3\rangle\}$

它是关系，但不是函数。

下面讨论在什么条件下，函数$f:A\to B$的逆也是函数。

定理8.4 设$f:A\to B$是双射的，则$f^{-1}:B\to A$也是双射的，并称$f^{-1}:B\to A$是f的**反函数**。

定理8.5 设$f:A\to B$是双射的，则$f^{-1}\cdot f=I_B$ ，$f\cdot f^{-1}=I_A$。

例8.7 设f:R→R，g:R→R

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 3\\ -2 & x<3\end{cases} \qquad g(x)=x+2$$

求f·g，g·f。如果f和g存在反函数，求出它们的反函数。

解:

$$f\bullet g:R\to R,\quad f\bullet g(x)=\begin{cases}x^2+2 & x\geq 3\\ 0 & x<3\end{cases}$$

$$g\bullet f:R\to R,\quad g\bullet f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & x\geq 1\\ -2 & x<1\end{cases}$$

f不是双射函数，不存在反函数。

而g是双射函数，反函数为 $g^{-1}:R\to R,\quad g^{-1}(x)=x-2$