第五章 一阶逻辑等值演算与推理

一阶逻辑公式的基本概念(4.2、5.1)

字母表、公式、量词的辖域

代换实例、等值式等

定义4.1（字母表）

以下是字母表的成员：

(1)个体常项:a，b，c，…，a_i，b_i，c_i，…，i≥1

(2)个体变项:x，y，z，…，x_i，y_i，z_i，…，i≥1

(3)函数符号:f，g，h，…，f_i，g_i，h_i，…，i≥1

(4)谓词符号:F，G，H，…, F_i，G_i，H_i，…，i≥1

(5)量词符号: ∀，∃

(6)联结词符号: ¬，∧，∨，→，↔

(7)括号和逗号:（），

定义4.4（谓词公式）

谓词公式也称为合式公式，其递归定义如下：

（1）单个谓词是谓词公式，称为原子公式

（2）若A谓词公式，则$\neg$ A也是谓词公式

（3）若A，B是谓词公式，则$A\wedge B$，$A\vee B$，$A\rightarrow B$，$A\leftrightarrow B$也是谓词公式

（4）若A是公式，则$\forall xA$，$\exists xA$也是谓词公式

（5）只有有限次使用（1）-（4）生成的符号串才是谓词公式

简单起见，谓词公式简称为公式。

定义4.5（量词的辖域）

在公式$\forall x A$和$\exists x A$中，称x是指导变元，A为相应量词的辖域。

在$\forall x$和$\exists x$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现

A中不是约束出现的变项均称为是自由出现的

说明：量词的辖域以量词后第一个括号的范围为准

定义4.9（代换实例）

设A_0是含命题变项p_1，p_2，…，p_n的命题公式，A_1，A_2，…，A_n是n个谓词公式，用A_i（$1 \leqslant i \leqslant n$）处处代替$A_0$中的$p_i$，所得公式A称为$A_0$的**代换实例**。

例如　$F(x) \to G(x)$，$\forall x F(x) \to \exists y G(y)$
都是$p \to q$的代换实例

定理4.2　永真式的代换实例都是永真式，
永假式的代换实例都是永假式。

定义5.1（等值式）

设A，B是任意两个谓词公式，若A↔B是永真式，则称A和B是**等值的**，记作$A \Leftrightarrow B$，称$A \Leftrightarrow B$是**等值式**。

命题逻辑永真式的代换实例都是一阶逻辑的永真式

命题逻辑的等值式$A \Leftrightarrow B$都有永真等价式$A \leftrightarrow B$成立

所以命题逻辑等值式的代换实例都是一阶逻辑的等值式

如

$$\forall xF(x) \Leftrightarrow \neg\neg\forall xF(x)$$

$$\forall x\exists y(F(x, y)\rightarrow G(x, y)) \Leftrightarrow \neg\neg\forall x\exists y(F(x, y)\rightarrow G(x,y))$$

都是$A \Leftrightarrow \neg\neg A$的代换实例。

三组一阶逻辑固有的等值式。

1、量词否定等值式

对于任意的公式A（x）：

（1）$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

（2）$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

例 证明下列各等值式。

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

$\Leftrightarrow\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

(2) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

(3) $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

(4) $\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg L(x,y))$

证明：

(1) $\neg \exists x(M(x) \wedge F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$

$\neg \exists x(M(x) \wedge F(x))$

$\Leftrightarrow \forall x \neg(M(x) \wedge F(x))$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x) \vee \neg F(x))$

$\Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$

(2) $\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$

证明与（1）类似，略

(3) $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

证明：

$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x\neg\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee H(x,y))$

(4) $\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg L(x,y))$

证明与（3）类似，略

2、量词分配等值式

对于任意的公式A(x)和B(x)：

（1）$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$

（2）$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

说明： 量词分配等值式中，

只有∀对∧的分配和∃对∨的分配的等值式，

而∀对∨和∃对∧无分配律。

例　证明：对于任意的公式A(x)和B(x)

（1）$\forall x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$

（2）$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

是不成立的。

证明：

（1）即证明$\forall x(A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$不是永真式

取解释I为：个体域为自然数集合N; 取F(x)：x是奇数，代替A(x); G(x)：x是偶数，代替B(x)。

则$\forall x(A(x) \vee B(x))$为真命题，而$\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$为假命题

所以公式存在成假解释，因而不是永真式。

（2）类似证明

3、同种量词顺序置换等值式

对于任意的公式A（x，y）

(1) $\forall x\forall yA(x,y) \Leftrightarrow \forall y\forall xA(x,y)$

(2) $\exists x\exists yA(x,y) \Leftrightarrow \exists y\exists xA(x,y)$

第五章 一阶逻辑等值演算与推理
5.3 一阶逻辑的推理理论

一阶逻辑推理的形式结构

在一阶逻辑中，推理的形式结构仍为

$$(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k) \rightarrow B$$

若该式是永真式，则称推理正确，称B是$A_1, A_2, \ldots, A_k$的逻辑结论。

此时将该式记为$(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k) \Rightarrow B$

一阶逻辑推理采用构造证明法加以证明

一阶逻辑中的推理定律

1、命题逻辑中的重言蕴涵式，在一阶逻辑中的代换实例，都是一阶逻辑中的推理定律。

例如：$\forall xF(x) \land \forall yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$（化简律）

$\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x) \lor \forall yG(y)$（附加律）

2、命题逻辑中的每个等值式均可产生两条推理定律。

例如：$\forall xF(x) \Rightarrow \neg\neg\forall xF(x)$

$\neg\neg\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x)$

3、一些其它的推理定律

例如：

（1）$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

（2）$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists x B(x)$

（3）$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \rightarrow \forall x B(x)$

（4）$\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \exists x B(x)$

构造证明方法在自然推理系统F中进行。

定义（自然推理系统F）

自然推理系统F由以下三个部分组成：

1、字母表

2、公式

3、推理规则（15个）

（1）前提引入规则

（2）结论引入规则

（3）置换规则

（4）假言推理规则 $(A\rightarrow B)\wedge A\Rightarrow B$

（5）附加规则 $A\Rightarrow(A\vee B)$

（6）化简规则 $(A\wedge B)\Rightarrow A$

（7）拒取式规则 $(A\rightarrow B)\wedge\neg B\Rightarrow\neg A$

（8）假言三段论规则 $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)\Rightarrow(A\rightarrow C)$

（9）析取三段论规则 $(A\vee B)\wedge\neg B\Rightarrow A$

（10）构造性二难推理规则

（11）合取引入规则

（12）**UI**规则(universal instantiation)，$\forall$-

（13）**UG**规则(universal generalization)，$\forall$+

（14）**EI**规则(existential instantiation)，$\exists$-

（15）**EG**规则(existential generalization)，$\exists$+

全称量词消去规则（简称UI规则，$\forall-$）

$\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$

$\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$

全称量词引入规则（简称UG规则，$\forall+$）

$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$

存在量词消去规则（简称EI规则，$\exists-$）

$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$

存在量词引入规则（简称EG规则，$\exists+$）

$A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$

$A(y) \Rightarrow \exists x A(x)$

例5.9 在自然推理系统F中，构造下面推理的证明：

任何自然数都是整数。存在着自然数。所以存在着整数。个体域为实数集合R。

解:

设F（x）：x为自然数，G（x）：x为整数

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，$\exists x\, F(x)$

结论：$\exists x\, G(x)$

证明：

①	$\exists x\, F(x)$	前提引入
②	$F(c)$	①EI规则
③	$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
④	$F(c)\rightarrow G(c)$	③UI规则
⑤	$G(c)$	②④假言推理
⑥	$\exists x\, G(x)$	⑤EG规则

说明

一阶逻辑推理的构造证明分为三个步骤：

1、引入前提消去量词

2、采用命题逻辑的构造方法推理出结论消去量词的形式

3、引入量词

① $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 前提引入

② $F(c)\rightarrow G(c)$ ①UI规则

③ $\exists x\ F(x)$ 前提引入

④ $F(c)$ ③EI规则

在②中取c = ½，则$F(1/2)\rightarrow G(1/2)$为真。但在④中， $F(1/2)$为假，这样从真的前提推出了假的中间结果

① $\exists x\ F(x)$ 前提引入

② $F(c)$ ①EI规则

③ $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 前提引入

④ $F(c)\rightarrow G(c)$ ③UI规则

说明：在证明序列中应先引进带存在量词的前提，否则可能会产生错误。

例5.10在自然推理系统F中，构造下面推理的证明。

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，$\exists x(F(x)\land H(x))$

结论：$\exists x(G(x)\land H(x))$

证明：

①	$\exists x(F(x)\land H(x))$	前提引入
②	$F(c)\land H(c)$	①EI规则
③	$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
④	$F(c)\rightarrow G(c)$	③UI规则
⑤	$F(c)$	②化简
⑥	$H(c)$	②化简
⑦	$G(c)$	④⑤假言推理
⑧	$G(c)\land H(c)$	⑥⑦合取
⑨	$\exists x(G(x)\land H(x))$	⑧EG规则

例5.11 在自然推理系统 F中，构造下面推理的证明：

不存在能表示成分数的无理数。有理数都能表示成分数。因此，有理数都不是无理数。个体域为实数集合。

解：

设 $F(x)$：x为无理数，$G(x)$：x为有理数，

$H(x)$：x能表示成分数。

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow\neg H(x))$，$\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论：$\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

前提：$\forall x(F(x)\to\neg H(x))$，$\forall x(G(x)\to H(x))$

结论：$\forall x(G(x)\to\neg F(x))$

证明：

① $\forall x(F(x)\to\neg H(x))$ 前提引入

② $F(y)\to\neg H(y)$ ①UI规则

③ $\forall x(G(x)\to H(x))$ 前提引入

④ $G(y)\to H(y)$ ③UI规则

⑤ $H(y)\to\neg F(y)$ ② 置换

⑥ $G(y)\to\neg F(y)$ ④⑤假言三段论

⑦ $\forall x(G(x)\to\neg F(x))$ ⑥UG规则

例5.11 在自然推理系统 F中，构造下面推理的证明：

不存在能表示成分数的无理数。有理数都能表示成分数。因此，有理数都不是无理数。个体域为实数集合。

解：

设 $F(x)$：x为无理数，$G(x)$：x为有理数，

$H(x)$：x能表示成分数。

前提：$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$，$\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论：$\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

前提：$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$，$\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论：$\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

证明：

①	$\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$	前提引入
②	$\forall x(\neg F(x)\vee\neg H(x))$	①置换
③	$\forall x(H(x)\rightarrow\neg F(x))$	②置换
④	$H(y)\rightarrow\neg F(y)$	③UI规则
⑤	$\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
⑥	$G(y)\rightarrow H(y)$	⑤UI规则
⑦	$G(y)\rightarrow\neg F(y)$	④⑥假言三段论规则
⑧	$\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$	⑦UG规则

例 证明苏格拉底三段论："凡人要死。苏格拉底是人。所以苏格拉底要死。"

解： 设F（x）：x是人；G（x）：x是要死的；

a ：苏格拉底

前提：∀x（F（x）→G（x）），F（a）

结论：G（a）

证明：

① ∀x（F（x）→G（x））　前提引入

② F（a）→G（a）　①UI规则

③ F（a）　前提引入

④ G（a）　②③假言推理

思考：在自然推理系统F中，构造下面推理的证明：

所有的人都是动物。因此，所有人头都是动物头。

解：设$F(x)$: x是人，$G(x)$: x是动物，$H(x, y)$: x是 y的头

前提：$\forall x(F(x) \to G(x))$

结论：$\forall x(\exists y(F(y) \land H(x, y)) \to \exists z(G(z) \land H(x, z)))$

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

结论：$\forall x(\exists y(F(y)\land H(x,y))\rightarrow \exists z(G(z)\land H(x,z)))$

证明：

(1) $\neg\forall x(\exists y(F(y)\land H(x,y))\rightarrow \exists z(G(z)\land H(x,z)))$	结论的否定引入
(2) $\exists x(\exists y(F(y)\land H(x,y))\land\forall z(\neg G(z)\lor\neg H(x,z)))$	(1)置换
(3) $\exists y(F(y)\land H(a,y))\land\forall z(\neg G(z)\lor\neg H(a,z))$	(2)EI规则
(4) $\exists y(F(y)\land H(a,y))$	(3)化简
(5) $F(b)\land H(a,b)$	(4) EI规则
(6) $\forall z(\neg G(z)\lor\neg H(a,z))$	(3)化简
(7) $\neg G(b)\lor\neg H(a,b)$	(6) UI规则
(8) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
(9) $F(b)\rightarrow G(b)$	(8)UI规则
(10) $F(b)$	(5)化简
(11) $H(a,b)$	(5)化简
(12) $G(b)$	(9) (10)假言推理
(13) $\neg H(a,b)$	(7) (12)析取三段论
(14) $H(a,b)\land\neg H(a,b)$	(11) (13)合取引入

思考题

采用一阶逻辑构造证明法证明如下推理：

如果$A \subseteq B$并且$B \subseteq C$，则$A \subseteq C$。

集合的关系及其符号化

定义6.1（包含关系） 设A，B为集合，如果B中的每个元素都是A中的元素，则称B为A的**子集**。这时也称**B被A包含**，或**A包含B**。记作$B\subseteq A$。

$B\subseteq A$的符号化为：$\forall x(x\in B\rightarrow x\in A)$

定义6.2（相等关系） 设A，B为集合，如果$B\subseteq A$且$A\subseteq B$，则称**A与B相等**，记作$A=B$。

显然$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$

$A=B$的符号化为：

$$\forall x(x\in B\rightarrow x\in A)\wedge\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$$

定义6.3（真包含关系） 设A，B为集合，如果$B \subseteq A$且$B \neq A$，则称B是A的**真子集**，记作$B \subset A$。

显然$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A$

$B \subset A$的符号化为：

$\forall x(x \in B \to x \in A) \wedge$

$\neg(\forall x(x \in B \to x \in A) \wedge \forall x(x \in A \to x \in B))$

定义6.3（真包含关系）设A，B为集合，如果$B\subseteq A$且$B\neq A$，则称B是A的**真子集**，记作$B\subset A$。

显然$B\subset A \Leftrightarrow B\subseteq A \wedge B\neq A$

$B\subset A$的符号化为：

$$\forall x(x\in B\rightarrow x\in A)\wedge\exists x(x\in A\wedge x\notin B)$$

采用一阶逻辑构造证明法证明如下推理：

如果$A \subseteq B$并且$B \subseteq C$，则$A \subseteq C$。

证：设$F(x)$：$x \in A$，$G(x)$：$x \in B$，$H(x)$：$x \in C$

前提：$\forall x(F(x) \to G(x))$，$\forall x(G(x) \to H(x))$

结论：$\forall x(F(x) \to H(x))$

证明：

① $\forall x(F(x) \to G(x))$　　前提引入

② $F(y) \to G(y)$　　①UI规则

③ $\forall x(G(x) \to H(x))$　　前提引入

④ $G(y) \to H(y)$　　③UI规则

⑤ $F(y) \to H(y)$　　①③假言推理

⑥ $\forall x(F(x) \to H(x))$　　⑤UG规则

思考题

采用一阶逻辑构造证明法证明如下推理：

(1) 如果A=B并且B=C，则A=C

(2) 如果A⊂B并且B⊂C，则A⊂C