概率统计——习题十五 参考答案

15.1 据题意假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$；$H_1:\mu_1\neq\mu_2$。 这是两总体在方差相同未知条件下的均值差检验，故可选$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$作为统计量，其中$S_\omega=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$。

本题中$n_1=4,n_2=6$，拒绝域为$W=\{|T|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(8)=2.306\}$。

由样本数据计算统计量的值为

$$\bar{x}=131,\bar{y}=135,s_1^2=36.667,s_2^2=11.20,\ T=\frac{131-135}{\sqrt{\dfrac{3\times36.667+5\times11.2}{8}}\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}}}=-1.36,$$

可见统计量T的值不在拒绝域中，故接受H_0，即不能认为一种羊毛较另一种羊毛强度要好。

15.2 据题意可作假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$；$H_1:\mu_1\neq\mu_2$。这是两总体在方差相同未知条件下的均值差检验，故可选$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$作为统计量，其中$S_\omega=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$。

本题中$n_1=9,n_2=18$，拒绝域为$W=\{|T|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(25)=2.0595\}$。

由已知条件可得：

$$\bar{x}=1532,\bar{y}=1412,s_1^2=423^2,s_2^2=380^2,\ T=\frac{1532-1412}{\sqrt{\dfrac{8\times423^2+17\times380^2}{8}}\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{18}}}=0.4217$$

可见统计量T的值不在拒绝域中，故接受H_0，即可认为这两箱灯泡是同一批生产的。

15.3 根据题意提出假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$；$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$。这是两总体方差比的检验问题，可选$F=S_1^2/S_2^2$作为统计量。

本题中$n_1=6,n_2=9$，对于α=0.05，$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(5,8)=4.82$，

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(5,8)=\frac{1}{F_{0.025}(8,5)}=\frac{1}{6.76}=0.148,$$

拒绝域为$W=\{F\geq4.82\text{或}F\leq0.148\}$。

由已知条件可得统计量F的值为$F=s_1^2/s_2^2=0.9664$，不在拒绝域中，故接受H_0，即可认为两总体的方差无显著差异。

15.4 根据题意提出假设$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$；$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$。可选$F=S_1^2/S_2^2$作为统计量。

本题中$n_1=8, n_2=7$，对于$\alpha=0.05$，$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(7,6)=5.70$，

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(7,6)=\frac{1}{F_{0.025}(6,7)}=\frac{1}{5.12}=0.195,$$

拒绝域为$W=\{F\geq 5.70\text{或}F\leq 0.195\}$。

由样本数据可得统计量值为$s_1^2=0.2164, s_2^2=0.3967, f=s_1^2/s_2^2=0.546$，可见统计量$F$的值$f$不在拒绝域中，故接受$H_0$，即可认为两总体的方差无显著差异。

15.5 对于假设$H_0:\mu_1=C\mu_2$；$H_1:\mu_1\neq C\mu_2$，$(C\neq 0)$，由

$$U=\frac{\overline{X}-C\overline{Y}}{\sqrt{\sigma^2/n_1+C^2\sigma^2/n_2}}\overset{H_0\text{真}}{\sim}N(0,1),\quad \eta=\frac{(n_1+n_2-2)S_w^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2),$$

且两随机变量相互独立知，可构造统计量：

$$T=\frac{\overline{X}-C\overline{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+C^2/n_2}}\overset{H_0\text{真}}{\sim}t(n_1+n_2-2),$$

在H_0真时，令$P\{|T|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}=\alpha$，得拒绝域为$W=\{|T|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\}$

查表，得$t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$的值，计算，得统计量T的值。

比较$t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$与$|T|$二者的大小，即可得出结论:

若$|T|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$，则拒绝$H_0$；否则，则接受$H_0$，即认为$\mu_1$与$C\mu_2$无显著差异。

15.6 本题是检验两正态总体均值是否有显著差异，但题中未指出两总体方差是否相同，故可先讨论：

（1）检验$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ ； $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

选取$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$为检验统计量， 当H_0为真时，$F\sim F(26,25)$，查F分布表得

$$F_{0.025}(26,25)=2.26, F_{0.975}(26,25)=1/2.26=0.4425,$$

故拒绝域为$W=\left\{F\geq 2.26\text{或}F\leq 0.4425\right\}$。

由题意知$s_1=8, s_2=6$，统计量F的值为$F=\dfrac{64}{36}=1.778$不在拒绝域中，所以接受H_0，即认为两总体的方差无显著差异。

现再讨论：

（2）检验假设$H_0:\mu_1=\mu_2$；$H_1:\mu_1\neq\mu_2$

由（1）知这是两总体在方差相同但未知的条件下的均值检验，故可选取$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$作为统计量，其中$S_\omega=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$。本题中$n_1=27,n_2=26$，拒绝域为

$$W=\{|t|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(51)=1.96\}$$。

由已知条件知

$\bar{x}=67,\bar{y}=71,s_1=8,s_2=6$，$T=\dfrac{67-71}{\sqrt{\dfrac{26\times64+25\times36}{51}}\sqrt{\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{26}}}=-2.053$，

可见统计量T的值在拒绝域中，故拒绝H_0，即认为两校英语成绩有显著差异。

15.7 略