概率统计——习题十三参考答案

13.1 置信区间；置信度；越短

13.2 可算得 $\bar{x}=6.0,\quad s=0.5745.$

(1) 引进 $r.v.\quad U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,\ 1)$，由 $P\{|U|<z_{\alpha/2}\}=1-\alpha=0.95$，可解得μ的置信度为 0.95 的置信区间为 $\bar{x}\pm z_{0.025}\sigma/\sqrt{n}=6.0\pm1.96(0.6/3)=(5.608,\quad 6.392).$

(2) 引进 $r.v.\quad T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，由 $P\{|T|<t_{\alpha/2}\}=1-\alpha=0.95$，可解得μ的置信度为 0.95 的置信区间为 $\bar{x}\pm t_{0.025}(n-1)s/\sqrt{n}=6.0\pm2.3060(0.5745/3)=(5.5584,\quad 6.4416).$

13.3 已知 $X\sim N$（μ，0.5^2），σ=0.5，由置信区间的概念知

$$P\{\frac{|\overline{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2}\}=1-\alpha\text{，即 }P\{|\overline{X}-\mu|<z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\}=1-\alpha.$$

由于 $\quad 1-\alpha=0.95,\quad \alpha=0.25,\quad z_{\alpha/2}=z_{0.25}=1.96$，

由题意知 $z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}=1.96\times\dfrac{0.5}{\sqrt{n}}<0.1,\ n>(1.96\times5)^2=96.04$，可取 $n\ge97.$

故至少要取 $n=97$ 的样本，才能满足要求。

13.4 已知 n=9，总体 $X\sim N$（μ，σ^2），μ未知。

$\because r.v.\ \eta=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，令 $P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\eta<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha=0.95$，得

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right\}=1-\alpha.$$

查表得 $\quad \boldsymbol{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(8)=17.534,\quad \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(8)=2.180}$

$\therefore$ 所求的置信区间为 $\left(\mathbf{11}\sqrt{\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{17.534}}},\quad \mathbf{11}\sqrt{\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{2.180}}}\right)=\mathbf{(7.430,\quad 21.072).}$

13.5 已算得 $\bar{x}=6.0,\quad s=0.5745.$

(1) 引进 $r.v.\quad U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,\ 1)$，由 $P\{U<z_{\alpha}\}=1-\alpha=0.95$，可解得μ的置信度为 0.95 的单侧置信上限为 $\bar{x}+z_{0.05}\sigma/\sqrt{n}=6.0\pm1.645(0.6/3)=6.329.$

(2) 引进 $r.v.\quad T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，由 $P\{T<t_\alpha\}=1-\alpha=0.95$，可解得μ的置信度为 0.95 的单侧置信上限为 $\overline{x}+t_{0.05}(9-1)s/\sqrt{n}=6.0\pm 1.8695(0.5745/3)=6.358.$

13.6 设两总体分别为 X，Y，可算得 $\overline{x}=0.1425,\quad s_1=0.00287;$

$$\overline{y}=0.1392,\quad s_2=0.00228;\quad s_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=(0.00255)^2.$$

$\because T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)=t(7)$，$\therefore$ 由 $P\{|T|<t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$，可解得所求置信区间为

$$\overline{x}-\overline{y}\pm t_{\alpha/2}(7)s_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}=(0.002\pm 2.3646(0.00255)\sqrt{1/4+1/5})=(-0.002,\quad 0.006).$$

13.7 略；

13.8 略