河海大学

Ch3 连续型随机变量



• 分布函数

定义 设X随机变量，对任意实数x,事件$\{X\le x\}$的概率$P\{X\le x\}$称为随机变量X的**分布函数**。

记为$F(x)$，即$F(x)=P\{X\le x\}$。

$$F：R\to[0,1]$$

易知，对任意实数$a,b\ (a<b)$有：

$$P\{a<X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X\le a\}=F(b)-F(a)。$$

$F(x) = P\{X \le x\}$

分布函数的性质

1. 单调不减性：

   若$x_1 < x_2$, 则$F(x_1) \le F(x_2)$;

2. 非负规范性：

   对任意实数 x，$0 \le F(x) \le 1$, 且

   $$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

   $$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

3. 右连续性：

对任意实数 $x_0, F(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$.

反之，具有上述三个性质的实函数，必是某个随机变量的分布函数。

故该三个性质是分布函数的**充分必要性质**。

例 $r.v.\ X$的分布律为：

X	3	4	5
P	1/10	3/10	6/10

求 X 的分布函数。

一般的，对离散型随机变量

$$X \sim P\{X = x_k\} = p_k,\quad k = 1, 2, \ldots$$

其分布函数为

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{k: x_k \leq x} P\{X = x_k\} = \sum_{k: x_k \leq x} p_k$$

例 *r.v.* X的分布律为：

X	-2	-1	0	1	3
P	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

求 X 的分布函数；$P\{X \le 2\}$，$P\{-1.5 < X \le 1.5\}$，$P\{-2 \le X \le 1\}$。

离散型随机变量的分布函数是一个右连续的分段阶梯函数。

• 一维连续性随机变量及其分布

1. 密度函数

定义 对于随机变量X，若存在非负可积函数 $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$，使对任意实数 x，都有

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

则称X为连续型随机变量，$f(x)$为X的概率密度函数，简称概率密度或密度函数。

记为 $X \sim f(x)$，$(-\infty < x < +\infty)$

连续型随机变量的分布函数$F(x)$为连续函数。

$$F(x)=P(X \le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$P(a < X \le b)=\int_{a}^{b} f(u)du$$

2. 密度函数的性质

(1) (非负性) $f(x) \ge 0$，$(-\infty < x < \infty)$；

(2)(规范性) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

性质(1)、(2)是密度函数的充要性质；

(3) 若 x是$f(x)$的连续点，$f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$.

(4) 对于任意区域$G \subset R$，有 $P\{X \in G\}=\int_{G} f(x)dx$

例 已知 $r.v.\ X$的密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases} cx^2, & 0<x\le 3, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

求：(1) 常数c； (2) $P\{1<X\le 4\}$； (3) $F(x)$.

例 已知 *r.v.* X的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \ln x, & 1\le x<e,\\ 1, & x\ge e.\end{cases}$$

求：(1) $P\{0<X\le 3\}$; (2) $P\{X<2\}$; (3) $f(x)$.

对$\forall\, b\in R$，若$X\sim f(x)$，则$P\{X=b\}=0$。

即：连续型随机变量取单点值的概率为零。

对于连续型随机变量有：

$$P\{a<X<b\}=P\{a\le X<b\}=P\{a<X\le b\}=P\{a\le X\le b\}$$

- **几个常用的连续型分布**

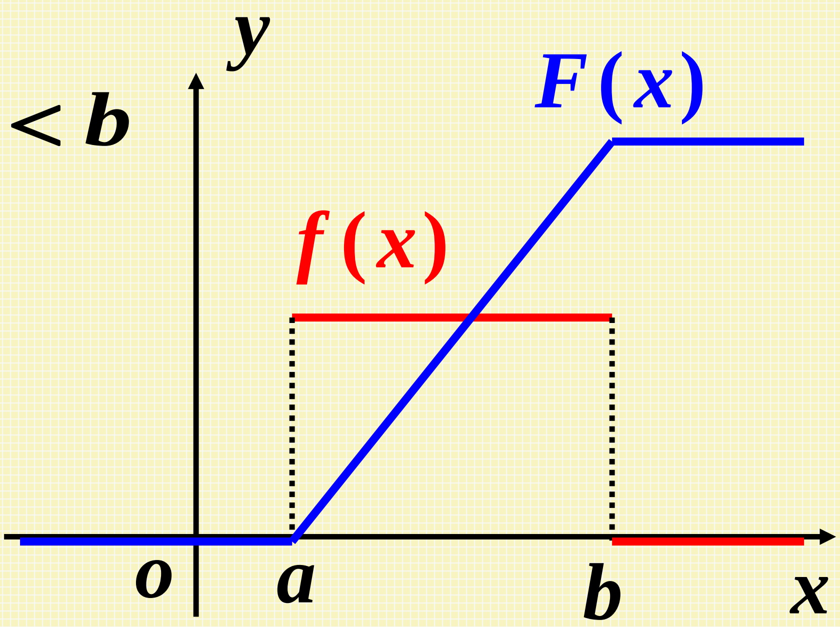
1. 均匀分布

$$若\ X \sim f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

则称X在(a, b)内服从**均匀分布**。记为$X \sim U(a, b)$

相应地还有：$U[a, b]$，$U[a, b)$，$U(a, b]$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$



$$\therefore F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

2. 指数分布

若 $X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

则称 X 服从参数为 $\lambda > 0$ 的**指数分布，记为 $X \sim E(\lambda)$**。

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

指数分布常用来作为各种“寿命”分布的近似。

指数分布的性质:无记忆性 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$\forall s>0$，$t>0$:

$$P\{X>s+t \mid X>s\}=\frac{P\{X>s+t,\ X>s\}}{P\{X>s\}}$$

$$=\frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=1-F(t)=P\{X>t\}$$

$$\therefore\ P\{X>s+t \mid X>s\}=P\{X>t\}$$

3. 正态分布(高斯(Gauss)分布)

若 $X \sim f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$

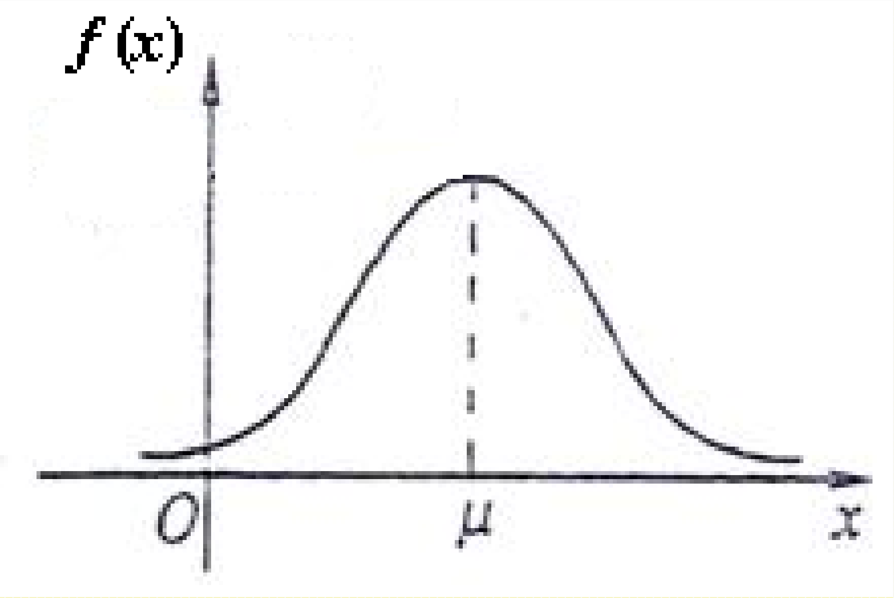
其中$\sigma > 0$，μ为实数，

则称X服从参数为

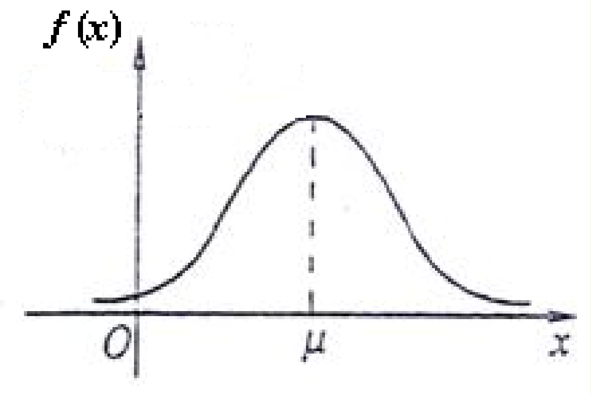
(μ, σ^2)的正态分布，

记为$N(\mu, \sigma^2)$，

或 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。



$$X \sim f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty < x < +\infty$$



正态分布的特性：

(1) 单峰对称

其图形关于直线 $x=\mu$ 对称；

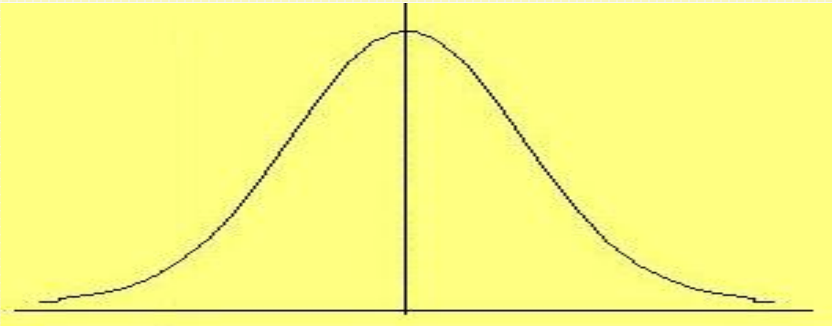
(2)σ的大小直接影响概率的分布

σ越大，曲线越平坦，概率分布越分散，曲线又矮又胖；

σ越小，曲线越陡峻，概率分布越集中，曲线又高又瘦。

4. 标准正态分布

参数$\mu=0$，$\sigma^2=1$的正态分布称为**标准正态分布**，可表为$N(0, 1)$。



其密度函数表示为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty.$$

分布函数表示为

$$\Phi(x)=P\{X\le x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,-\infty<x<+\infty$$

$N(0, 1)$的性质：

(1) $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$；

(2) 若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$。

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\} = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}).$$

$$P\{a < X \le b\} = P\{a \le X \le b\} = P\{a < X < b\}$$

$$= P\{a \le X < b\} = P\{X \le b\} - P\{X \le a\}$$

$$= \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

书后附有标准正态分布表供读者查阅$\Phi(x)$的值。

例 已知 $r.v.\ X\sim N(8, 0.5^2)$，求 $P\{X\le 9.2\}$，$P\{3<X<10\}$及$P\{|X-8|<1\}$.

若$X\sim N(\mu, \sigma^2)$，则

$$P\{|X-\mu|\le\sigma\}=2\Phi(1)-1=0.6826$$

$$P\{|X-\mu|\le 2\sigma\}=2\Phi(2)-1=0.9544$$

$$P\{|X-\mu|\le 3\sigma\}=2\Phi(3)-1=0.9974$$

质量控制的3σ原则

例 将一温度调节器放置在储存着某种液体的容器里，调节器整定在 d 度，液体的温度X(以度计)是一个随机变量，且 $X\sim N(d\,,0.5^2)$。

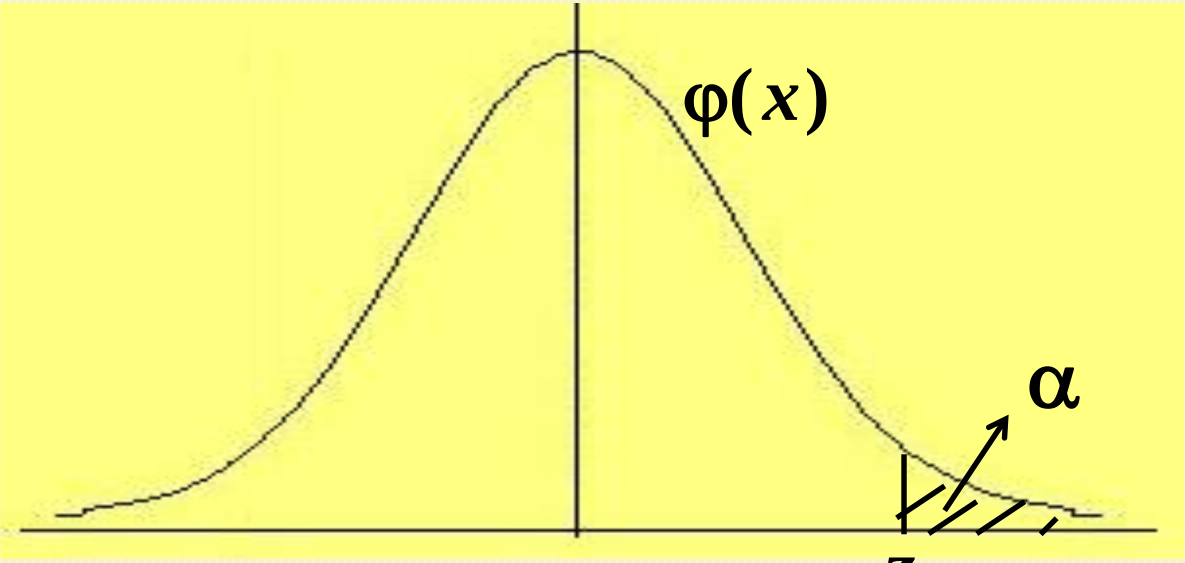
（1）若$d=90$，求 X小于89的概率；

（2）若要保持液体的温度至少为80的概率不低于0.99，问d 至少为多少？

一般地对于$Z \sim N(0, 1)$，如 z_α 满足：

$$P\{Z > z_\alpha\}=\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

则称 z_α 为标准正态分布的上α分位点。



z_α

$P\{X \le z_\alpha\}=1-\alpha$,

即 $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$

$$z_{1-\alpha} = -z_\alpha$$

- **二维连续型随机变量及其分布**

1. 联合分布函数

设(X,Y)是二维随机变量，$(x,y)\in R^2$, 则称

$$F(X,Y)=P\{X\le x, Y\le y\}$$

为(X,Y)的**分布函数**，或 X与Y 的**联合分布函数**。

对于$(x_1, y_1), (x_2, y_2)\in R^2$, $(x_1< x_2$， $y_1<y_2)$,则

$$P\{x_1<X\le x_2,\ y_1<Y\le y_2\}$$

$$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1).$$

联合分布函数 $F(x,y)$ 具有如下性质：

(1)非负规范

对任意 $(x,y)\in R^2$，$0\le F(x,y)\le 1$,

且 $F(+\infty,+\infty)=1$;

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y)=0,$$

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty} F(x,y)=0,$$

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty} F(x,y)=0。$$

(2)单调不减

对任意 $y\in R$，当 $x_1<x_2$时，$F(x_1,y)\le F(x_2,y)$；

对任意 $x\in R$，当 $y_1<y_2$时，$F(x,y_1)\le F(x,y_2)$.

(3)右连续

对任意 $y\in R$，

$$F(x_0+0,y)=\lim_{x\to x_0^+}F(x,y)=F(x_0,y);$$

对任意 $x\in R$，

$$F(x,y_0+0)=\lim_{y\to y_0^+}F(x,y)=F(x,y_0).$$

2. 边缘分布

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$$

$$= P\{X \le x,\ Y < +\infty\} = P\{X \le x\}$$

称为二维随机变量(X, Y)关于X的**边缘分布函数**；

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y)$$

$$= P\{X < +\infty,\ Y \le y\} = P\{Y \le y\}$$

称为二维随机变量(X, Y)关于Y的**边缘分布函数**.

• 二维连续型随机变量及其密度函数

对于二维随机变量(X, Y)，若存在一个非负可积函数 $f(x,y)$，使对$\forall(x,y)\in R^2$，其分布函数可以写成

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv,$$

则称 (X, Y)为二维连续型随机变量，

$f(x,y)$称为(X, Y)的密度函数(概率密度)，

或X与Y的联合密度函数，可记为

$$(X, Y)\sim f(x,y),\quad (x,y)\in \mathrm{R}^2$$

联合密度 $f(x,y)$ 的性质

(1)(非负性) $f(x,y)\ge 0,\ (x,y)\in R^2$;

(2)(规范性) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$;

反之，具有以上两个性质的二元函数 $f(x,y)$，必是某个二维连续型随机变量的密度函数。

此外，$f(x,y)$还有下述性质

(3)若 $f(x,y)$在$(x,y)\in R^2$处连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} = f(x,y);$$

(4)对于任意平面区域$G\subset R^2$,

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy.$$

例 已知二元 r.v.(X,Y)的概率密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} Ax^2y(1-y), & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

（1）求A;

（2）G为XOY平面内由不等式 $x+y<1$ 所确定的区域，求 $P\{(X,Y)\in G\}$。

两个常用的二维连续型分布

(1)二维均匀分布

若二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{G\text{的面积}}, & (x,y)\in G\subset R^2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则称(X, Y)在区域G上(内) 服从均匀分布。

(2) 二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

若二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

其中, μ_1、μ_2为实数, $\sigma_1>0$、$\sigma_2>0$、$|\rho|<1$, 则称(X,Y)服从参数为μ_1, μ_2, σ_1, σ_2, ρ的二维正态分布，可记为 $(X, Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

- **边缘密度函数**

$F_X(x) = P\{X \le x\}$;　　$F_Y(y) = P\{Y \le y\}$

设$(X, Y) \sim f(x, y)$, $(x, y) \in R^2$, 则称

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$$

为(X, Y)关于X的**边缘密度函数**；

同理，称 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$

为(X, Y)关于Y的**边缘密度函数**。

例 已知二元 $r.v.(X,Y)$ 的概率密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{5}{2}x^2(2-y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求边缘概率密度函数。

例 已知二元 $r.v.(X,Y)$ 的概率密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{16}xy, & 0\le y\le 2,\ 0\le x\le y^2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求边缘概率密度函数。

例 已知二元 $r.v.(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

求边缘概率密度函数。

故二维正态分布的边缘分布也是正态分布。

即若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，

则 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$， $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$。

- **随机变量的独立性**

1. 随机变量相互独立的一般定义

设X_1，X_2，…，X_n为n个随机变量，若对任意$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in R^n$，有

$$P\{X_1\le x_1, \cdots, X_n\le x_n\}=P\{X_1\le x_1\}\cdots P\{X_n\le x_n\}$$

即 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$,

则称X_1，X_2，…，X_n **相互独立**。

2. 随机变量相互独立的等价定义

若对任意的 i、j，有 $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$，

则称随机变量X与Y相互独立。

定理 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为一个n维离散型随机变量，若对任意的 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 有:

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$$

$$= P\{X_1 = x_1\}P\{X_2 = x_2\} \cdots P\{X_n = x_n\}$$

则称随机变量X_1，X_2，$\cdots$，X_n相互独立。

定理 设$(X, Y)\sim f(x, y)$，$(x, y)\in R^2$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$分别为X与Y的边缘密度，则X与Y **相互独立**等价于

$$f(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)，对任意(x, y)\in R^2$$

几乎处处成立。

例 已知二元 $r.v.(X,Y)$的概率密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{3}xy, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

证明X与Y不相互独立。

例 设X和 Y为二个相互独立的 r.v.，X~U(0, 1)，Y的密度函数为：

$$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-\frac{y}{2}}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$$

（1）求X和Y的联合密度函数；

（2）设含有a的二次方程为$a^2+2Xa+Y=0$，求a有实根的概率。

例 已知二元 $r.v.(X, Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

判断X与Y是否独立?

定理 若$(X, Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$X$与$Y$相互独立 $\Leftrightarrow \rho=0.$

上述可以推广到 n维连续型随机变量的情形:

设X_1，X_2，…，X_n为n 个连续型随机变量，若对任意的$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$，

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

几乎处处成立，则称X_1，X_2，…，X_n**相互独立**。

定理 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$与$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立，则$X_i\,(i=1, 2, \cdots, m)$与$Y_j\,(j=1, 2, \cdots, n)$相互独立；又若h，g是连续函数，则$h(X_1, X_2, \cdots, X_n)$与$g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立。

• 连续型随机变量函数的密度函数

1. 一维变量的情形

(1) 一般方法

若$X\sim f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, $Y=g(X)$为随机变量X的函数，则可先求Y的分布函数:

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=$$

$$=P\{g(X)\le y\}=\int_{g(x)\le y} f(x)dx$$

然后再求Y的密度函数：$f_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}$

此法也叫“分布函数法”。

(2) 公式法

若$X \sim f(x), x \in R, y = g(x)$是**单调可导**函数，则

$$Y = g(X) \sim \psi_Y(y) = \begin{cases} f[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中$h(y)$为$y = g(x)$的反函数，

$\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$，$\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$.

Notes：只有当Y是X的单调可导函数时，才可用以上公式推求Y的密度函数。

例 设 $r.v.\ X$的密度函数为 $f(x)$，求$Y=a+bX\ (b\neq 0)$的密度函数。

例 设 $r.v.\ X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求$Y = e^X$的密度函数。

例 设 $r.v.\ X \sim \mathrm{U}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，求$Y = \cos(X)$的密度函数.

2. 多个随机变量函数的密度函数

(1) 一般的方法：分布函数法

若$(X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$, Y=g$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 则可先求Y的分布函数:

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X_1,\cdots,X_n) \le y\}$$

$$= \int\cdots\int_{g(x_1,\cdots,x_n)\le y} f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n;$$

然后再求出Y的密度函数：$f_Y(y) = F_Y'(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy}$.

(2) 几个常用函数的密度函数

a. 和的分布

已知$(X, Y)\sim f(x, y)$, $(x, y)\in R^2$, 求 $Z=X+Y$的密度.

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy \text{ 或 } = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx.$$

若X与Y相互独立，则$Z=X+Y$的密度函数

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \text{ 或 } = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx.$$

上式称为连续型随机变量的**卷积公式**。

例 设 $r.v.\ X$ 与 Y 相互独立，其密度函数分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases};\quad f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

例 已知二元 $r.v.(X,Y)$ 的概率密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x-y), & 0<x<1, 0<y<1, x+y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

例 设 r.v. X 与 Y 相互独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

推论1 设 r.v. X 与 Y 相互独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，则 $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

推论2 设 X 与 Y 相互独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 则 $aX+bY \sim N(a\mu_1+b\mu_2, a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$.

推论3 设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$，$i=1,\cdots,n$. 则 $\sum a_i X_i \sim N(\sum a_i\mu_i, \sum a_i^2\sigma_i^2)$.

b. 商的分布

已知$(X, Y)\sim f(x, y)$，$(x, y)\in R^2$，求 $Z=\dfrac{X}{Y}$的密度。

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f(yz, y)dy.$$

特别，当X、Y相互独立时，上式可化为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,f_X(yz)f_Y(y)dy,$$

其中 $f_X(x)$，$f_Y(y)$分别为X和Y的密度函数。

例 设 *r.v.* X 与 Y 相互独立，$X \sim \mathrm{U}(1, 3)$, $Y \sim \mathrm{U}(1, 3)$.

求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的密度函数。

c. 极大值与极小值的分布

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，其分布函数分别为$F_1(x_1), F_2(x_2), \cdots, F_n(x_n)$，则

$$M = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\},$$

$$N = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

分别为$X_1, X_2, \cdots, X_n$的**极大值和极小值**。

$$F_M(z) = P\{M \le z\} = P\{\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \le z\}$$
$$= P\{X_1 \le z, \cdots, X_n \le z\} = P\{X_1 \le z\} \cdots P\{X_n \le z\}$$
$$= F_1(z) \cdots F_n(z) = \prod_{i=1}^{n} F_i(z);$$
$$F_N(z) = P\{N \le z\} = P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \le z\}$$
$$= 1 - P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} > z\}$$
$$= 1 - P\{X_1 > z, \cdots, X_n > z\}$$
$$= 1 - P\{X_1 > z\} \cdots P\{X_n > z\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(z)].$$

$$F_M(z)=\prod_{i=1}^{n}F_i(z)\;;\qquad F_N(z)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-F_i(z)].$$

特别，当$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布(分布函数相同)时，则有

$$F_M(z)=[F(z)]^n;\ F_N(z)=1-[1-F(z)]^n.$$

进一步地，若$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立且具相同的密度函数$f(x)$，则M和N的密度函数分别为

$$f_M(z)=n[F(z)]^{n-1}f(z);$$

$$f_N(z)=n[1-F(z)]^{n-1}f(z).$$

例 设 *r.v.* X 与 Y 相互独立， $X \sim U(0, 1)$， $Y \sim U(0, 2)$， 求 $M=\max\{X, Y\}$， $N=\min\{X, Y\}$ 的密度函数。