概率统计——习题七参考答案

7.1

$\because f_X(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}$，$\because y=e^{2x}$严格单增，$\therefore x=\dfrac{\ln y}{2}$，$x'=\dfrac{1}{2y}$，于是

$$f_Y(y)=f_X(\frac{\ln y}{2})\cdot\frac{1}{2y}=\begin{cases}\dfrac{1}{2y}, & 1<\dfrac{\ln y}{2}<2即e^2<y<e^4\\ 0, & 其它\end{cases}。$$

7.2 $\because f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1,\ y>0,\\ 0, & 其它,\end{cases}$

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \int_0^z dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=z-1+e^{-z}, & 0<z<1,\\ \int_0^1 dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=1-e^{-(z-1)}+e^{-z}, & z\ge 1,\end{cases}$$

$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}(e-1)e^{-z}, & z\ge 1,\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

或者 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(z-x)dx=\begin{cases}\int_0^1 e^{-(z-x)}dx=(e-1)e^{-z}, & z\ge 1\\ \int_0^z e^{-(z-x)}dx=1-e^{-z}, & 0<z<1\\ 0, & z\le 0\end{cases}。$$

7.3 $$\because F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\begin{cases}0, & z<0,\\ z^2/2, & 0\le z<1,\\ 1-2(1-z/2)^2, & 1\le z<2,\\ 1, & z\ge 2,\end{cases}$$

$$\therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} z, & 0<z<1, \\ 2-z, & 1\le z<2, \\ 1, & \text{其它}. \end{cases}$$

或者 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\begin{cases} \int_0^{z/2} 2dx=z, & 0<z<1 \\ \int_{z/2}^{z-1} 2dx=2-z, & 1\le z<2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$ 。

7.4 （1） $E(X)=4$， $D(X)=2.4$； （2） $E(X)=2$， $E(3X^2-2X)=12$；

（3） $E(X)=-0.2$， $E(X^2)=2.8$， $E(3X^2+5)=13.4$; (4)1/5

7.5 $X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{7}{10} & \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9} & \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8} & \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{7} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{7}{10} & \frac{7}{30} & \frac{7}{120} & \frac{1}{120} \end{pmatrix}$

$E(X)$=1×（7/10）+2×（7/30）+3×（7/120）+4×（1/120）=11/8=1.375;

$E(X^2)$=$(1)^2$×（7/10）+$(2)^2$×（7/30）+$(3)^2$×（7/120）+$(4)^2$×（1/120）=55/24=2.2917;

$E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-[E(X)]^2=2.2917-1.375^2=0.401$

或者 $E\{[X-E(X)]^2\}=E\{[X-1.375]^2\}=(1-1.375)^2$×（7/10）

+$(2-1.375)^2$×（7/30）+$(3-1.375)^2$×（7/120）+$(4-1.375)^2$×（1/120）=0.401。

7.6 由 $E(X)=\int_0^1 x(a+bx^2)dx=\frac{a}{2}+\frac{b}{4}=\frac{3}{5}$, $\int_0^1 (a+bx^2)dx=a+\frac{b}{3}=1$，得

$\begin{cases} a+b/2=6/5, \\ a+b/3=1, \end{cases}$ 故 $b=6/5,\quad a=6/10=3/5.$

7.7 （1） $E(X)=1\times(0.2+0.1+0.1)+2\times(0.1+0.1)+3\times(0.3+0.1)=2,$

$E(Y)=(-1)\times(0.2+0.1)+1\times(0.1+0.1+0.1)=0;$

（2） $\because X-Y\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \end{pmatrix},$

$\therefore E[(X-Y)^2]=1^2\times(0.2)+2^2\times(0.3)+3^2\times(0.4)=5;$

（3） $E(XY)=1\times(-1)\times0.2+1\times1\times0.1+2\times(-1)\times0.1+2\times1\times0.1+3\times1\times0.1$

$=-0.2+0.1-0.2+0.2+0.3=0.2.$

7.8 由题意有 $X \sim U[0,60]$，所以其密度函数为：$\varphi(t)=\begin{cases}\frac{1}{60}, & 0\le t\le 60\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$；

令 Y 表示乘客等候时间，则有：$Y=\begin{cases}10-X, & 0\le X\le 10\\ 30-X, & 10<X\le 30\\ 50-X, & 30<X\le 50\\ 60-X+10, & 50<X\le 60\end{cases}$

$$\therefore E(Y)=\int_0^{10}(10-t)\cdot\frac{1}{60}dt+\int_{10}^{30}(30-t)\cdot\frac{1}{60}dt+\int_{30}^{50}(50-t)\cdot\frac{1}{60}dt+\int_{50}^{60}(70-t)\cdot\frac{1}{60}dt=10\text{(分)}。$$