

# 第三章 命题逻辑的推理理论

- ⊕ 数理逻辑的主要任务是推理，即提供一套推理规则，从给定的前提出发，推导出一个结论来。
- ⊕ 前提是指已知的公式的集合。
- ⊕ 结论是对前提应用推理规则推出的公式。

## 3.1 推理的形式结构

## 定义（推理的形式结构）

设  $A_1, A_2, \dots, A_k, B$  都是命题公式，若  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$  为重言式，则称由前提  $A_1, A_2, \dots, A_k$  推出  $B$  的推理是**有效的**或**正确的**，称  $B$  是  $A_1, A_2, \dots, A_k$  的**有效结论**或**正确结论**。

称  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$  为由前提  $A_1, A_2, \dots, A_k$  推出结论  $B$  的**推理的形式结构**。

## 说明：

（1）用  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \Rightarrow B$  来表示  $A_1, A_2, \dots, A_k$  推出  $B$  的推理是有效的，即  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$  为重言式。

（2）判断推理是否正确的方法就是判断重言蕴涵式的方法：真值表法，等值演算法，主析取范式法

例：判断下面各推理是否正确。

(1) 马芳或去看电影或去游泳。她没去看电影。所以她去游泳了。

(2) 若下午气温超过30度，则王燕必去游泳。若她去游泳，她就不去看电影了。所以，若王燕没去看电影，下午气温必超过30度。

解推理问题的步骤：

(1) 将简单命题符号化

(2) 以下述形式写出前提、结论和推理的形式结构

前提： $A_1, A_2, \dots, A_k$

结论： $B$

推理的形式结构： $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$

(3) 进行判断(真值表法，等值演算法，主析取范式法)

(1) 马芳或去看电影或去游泳。她没去看电影。  
所以她去游泳了。

解：

设：  $p$ ： 马芳去看电影，  $q$ ： 马芳去游泳

前提：  $p \vee q, \neg p$

结论：  $q$

推理的形式结构：  $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$



## 判断方法一：真值表法

$p$	$q$	$\neg p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1

真值表的最后一列全为1，所以  $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$  为重言式。因而推理正确。

## 判断方法二：等值演算法

$$\begin{aligned}& ((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q \\ \Leftrightarrow & ((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \rightarrow q \\ \Leftrightarrow & (q \wedge \neg p) \rightarrow q \\ \Leftrightarrow & \neg q \vee p \vee q \\ \Leftrightarrow & 1\end{aligned}$$

因为  $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$  为重言式，所以推理正确。

### 判断方法三：主析取范式法

$$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$$

所以  $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$  为重言式，推理正确。



(2) 若下午气温超过30度，则王燕必去游泳。若她去游泳，她就不去看电影了。所以，若王燕没去看电影，下午气温必超过30度。

**解：** 设 $p$ ：下午气温超过30度；  $q$ ：王燕去游泳；  
 $r$ ：王燕去看电影

前提：  $p \rightarrow q$ ,  $q \rightarrow \neg r$

结论：  $\neg r \rightarrow p$

推理的形式结构：

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg r) \rightarrow (\neg r \rightarrow p) \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow m1 \vee m3 \vee m4 \vee m5 \vee m6 \vee m7$$

可见  $(*)$  不是重言式，所以推理不正确。

## 推理定律（重言蕴涵式）

(1)  $A \Rightarrow A \vee B$  附加律

(2)  $A \wedge B \Rightarrow A$  化简律

(3)  $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$  假言推理

(4)  $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$  拒取式

(5)  $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$  析取三段论

(6)  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$  假言三段论

(7)  $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$  等价三段论

(8)  $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$

构造性二难

(9)  $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$

破坏性二难

思考：  $A \Rightarrow B$  和  $A \Leftrightarrow B$  的关系？

如果  $A \Leftrightarrow B$  成立，则推理  $A \Rightarrow B$  是正确的；  
同时推理  $B \Rightarrow A$  也是正确的。

**说明：**第2.1节 等值式中给出的24个等值式，每个等值式可以派生出两条推理定律。

**例如：** $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ 产生两条推理定律

$A \rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B$ 和 $\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B$

在解推理问题的过程中，如果命题变项较多，则采用真值表法，等值演算法，主析取范式法这三种方法来判断推理的形式结构的公式类型都不方便。

解推理问题的**构造证明法**。

构造证明是一个描述推理过程的**命题公式的序列**，其中每个公式或者是已知前提，或者是由某些前提应用**推理规则**得到的结论。



## 构造证明法的证明形式

前提:  $p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg s$

结论:  $r \wedge (p \vee q)$

证明:

- |                         |         |
|-------------------------|---------|
| ① $p \rightarrow s$     | 前提引入    |
| ② $\neg s$              | 前提引入    |
| ③ $\neg p$              | ①②拒取式   |
| ④ $p \vee q$            | 前提引入    |
| ⑤ $q$                   | ③④析取三段论 |
| ⑥ $q \rightarrow r$     | 前提引入    |
| ⑦ $r$                   | ⑤⑥假言推理  |
| ⑧ $r \wedge (p \vee q)$ | ⑦④合取引入  |

## 3.2 自然推理系统 $P$

## 定义（自然推理系统 $P$ ）

自然推理系统 $P$ 由以下三个部分组成：

### 1、字母表

(1) 命题变项符号：  $p, q, r, \dots,$

$p_i, q_i, r_i, \dots$

(2) 联结词符号：  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(3) 括号与逗号：  $( ) ,$

### 2、公式

参见命题公式的定义

### 3、推理规则（12个）

（1）**前提引入规则**：在证明的任何步骤上都可以引入前提。

（2）**（中间）结论引入规则**：在证明的任何步骤上所得到的中间结论都可以作为后继证明的前提。  
（这是12个推理规则中唯一的一个隐规则。）

（3）**置换规则**：在证明的任何步骤上，命题公式中的子公式都可以用与之等值的公式置换，得到公式序列中的又一个公式。

由九条推理定律和结论引入规则可以导出以下各条推理定律。

(4) 假言推理规则 (分离推理规则)：若证明的公式序列中出现过 $A \rightarrow B$ 和 $A$ ，则由假言推理定律 $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ 可知， $B$ 是 $A \rightarrow B$ 和 $A$ 的有效结论，由结论引入规则可知，可将 $B$ 引入到命题序列中来。

(5) 附加规则： $A \Rightarrow (A \vee B)$

(6) 化简规则： $A \wedge B \Rightarrow A$

(7) 拒取式规则： $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

(8) 假言三段论规则：

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$



(9) 析取三段论规则:  $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

(10) 构造性二难推理规则:

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$$

(11) 破坏性二难推理规则:

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \\ \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$$

(12) 合取引入规则: 若证明的公式序列中出现过A和B, 则 $A \wedge B$ 是A和B的有效结论。

## 推理规则（12个）

- (1) 前提引入规则
- (2) 结论引入规则（隐规则）
- (3) 置换规则：等值置换
- (4) 假言推理规则：  $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$
- (5) 附加规则：  $A \Rightarrow (A \vee B)$
- (6) 化简规则：  $A \wedge B \Rightarrow A$
- (7) 拒取式规则：  $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
- (8) 假言三段论规则：  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$
- (9) 析取三段论规则：  $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$
- (10) 构造性二难推理规则
- (11) 破坏性二难推理规则
- (12) 合取引入规则

利用构造证明来证明形式结构为  
 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$ 的推理时

首先写出：

前提：  $A_1, A_2, \dots, A_k$

结论：  $B$

证明：

注意：不用写出推理的  
形式结构：

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$$

例 在自然推理系统P中构造下面推理的证明:

(1) 前提:  $p \vee q$ ,  $q \rightarrow r$ ,  $p \rightarrow s$ ,  $\neg s$

结论:  $r \wedge (p \vee q)$

证明:

- |                         |  |
|-------------------------|--|
| ① $p \rightarrow s$     | 前提引入   |
| ② $\neg s$              | 前提引入   |
| ③ $\neg p$              | ①②拒取式 $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ |
| ④ $p \vee q$            | 前提引入   |
| ⑤ $q$                   | ③④析取三段论 $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$           |
| ⑥ $q \rightarrow r$     | 前提引入   |
| ⑦ $r$                   | ⑤⑥假言推理 $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$          |
| ⑧ $r \wedge (p \vee q)$ | ⑦④合取引入   |

(2) 前提:  $\neg p \vee q, r \vee \neg q, r \rightarrow s$

结论:  $p \rightarrow s$

证明:

- |                     |           |
|---------------------|-----------|
| ① $\neg p \vee q$   | 前提引入      |
| ② $p \rightarrow q$ | ①置换       |
| ③ $r \vee \neg q$   | 前提引入      |
| ④ $q \rightarrow r$ | ③置换       |
| ⑤ $p \rightarrow r$ | ②④假言三段论   |
| ⑥ $r \rightarrow s$ | 前提引入      |
| ⑦ $p \rightarrow s$ | ⑤⑥假言三段论规则 |



例 在自然推理系统P中构造下面的推理的证明：

若数 $a$ 是实数，则它不是无理数就是有理数。若 $a$ 不能表示成分数，则它不是有理数。 $a$ 是实数且它不能表示成分数。所以 $a$ 是无理数。

解题步骤：

- (1) 简单命题的符号化
- (2) 写出前提和结论
- (3) 证明

解：首先将简单命题符号化：

令  $p$ :  $a$ 是实数；       $q$ :  $a$ 是有理数；  
      $r$ :  $a$ 是无理数；     $s$ :  $a$ 能表示成分数

前提:  $p \rightarrow (q \vee r)$  ,  $\neg s \rightarrow \neg q$  ,  $p \wedge \neg s$

结论:  $r$

前提:  $p \rightarrow (q \vee r)$ ,  $\neg s \rightarrow \neg q$ ,  $p \wedge \neg s$

结论:  $r$

证明:

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| ① $p \wedge \neg s$           | 前提引入  |
| ② $p$                         | ①化简 $(A \wedge B) \Rightarrow A$                  |
| ③ $\neg s$                    | ①化简   |
| ④ $\neg s \rightarrow \neg q$ | 前提引入  |
| ⑤ $\neg q$                    | ③④假言推理 $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ |
| ⑥ $p \rightarrow (q \vee r)$  | 前提引入  |
| ⑦ $q \vee r$                  | ②⑥假言推理  |
| ⑧ $r$                         | ⑤⑦析取三段论 $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$  |

## 使用构造证明法进行推理时的证明技巧

### (1) 附加前提证明法

有时要证明的结论以蕴涵式的形式出现，即推理的形式结构为

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

对该式进行等值演算：

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \star$$

$$\Leftrightarrow \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee (\neg A \vee B)$$

$$\Leftrightarrow (\neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee \neg A) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge A) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B \quad \star\star$$

可见，如果能证明 $\star\star$ 是重言式，则 $\star$ 也是重言式。  
在 $\star\star$ 中，原来的结论中的前件A已经变成前提了，称A为**附加前提**。称这种将结论中的前件作为前提的证明方法为**附加前提法**。

### 例：在自然推理系统P中构造下面推理的证明

如果小张和小王去看电影，则小李也去看电影。小赵不去看电影或小张去看电影。小王去看电影。所以，当小赵去看电影时，小李也去。

解：将简单命题符号化

令  $p$ : 小张去看电影;     $q$ : 小王去看电影;  
     $r$ : 小李去看电影;     $s$ : 小赵去看电影

前提:  $(p \wedge q) \rightarrow r, \quad \neg s \vee p, \quad q$

结论:  $s \rightarrow r$

前提:  $(p \wedge q) \rightarrow r, \quad \neg s \vee p, \quad q, \quad s$

结论:  $r$



## 证明方法一：附加前提法

前提：  $(p \wedge q) \rightarrow r, \neg s \vee p, q$

结论：  $s \rightarrow r$

前提：  $(p \wedge q) \rightarrow r, \neg s \vee p, q, s$

结论：  $r$

证明：

①  $s$

附加前提引入

②  $\neg s \vee p$

前提引入

③  $p$

①②析取三段论  $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

④  $q$

前提引入

⑤  $p \wedge q$

③④合取引入

⑥  $(p \wedge q) \rightarrow r$

前提引入

⑦  $r$

⑤⑥假言推理  $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$



## 证明方法二：直接证明

前提：  $(p \wedge q) \rightarrow r$ ,  $\neg s \vee p$ ,  $q$

结论：  $s \rightarrow r$

证明：

①  $\neg s \vee p$

②  $s \rightarrow p$

③  $(p \wedge q) \rightarrow r$

④  $p \rightarrow r$

⑤  $s \rightarrow r$

前提引入

①置换

前提引入

③化简

②④假言三段论

## 证明方法二：直接证明

前提：  $(p \wedge q) \rightarrow r$ ,  $\neg s \vee p$ ,  $q$

结论：  $s \rightarrow r$

证明：

- |                                |         |
|--------------------------------|---------|
| ① $\neg s \vee p$              | 前提引入    |
| ② $s \rightarrow p$            | ①置换     |
| ③ $(p \wedge q) \rightarrow r$ | 前提引入    |
| ④ $\neg p \vee \neg q \vee r$  | ③置换     |
| ⑤ $q$                          | 前提引入    |
| ⑥ $\neg p \vee r$              | ④⑤析取三段论 |
| ⑦ $p \rightarrow r$            | ⑥置换     |
| ⑧ $s \rightarrow r$            | ②⑦假言三段论 |

## (2) 归谬法

在构造形式结构为  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$  的推理证明中，若将  $\neg B$  作为前提能推出形如  $(A \wedge \neg A)$  的矛盾来，则说明推理正确，这种方法称为**归谬法**。

例：在自然推理系统P中构造下面推理的证明

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将取胜。或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。A队没有成为联赛的第一名。小张守第一垒。因此，小李没向B队投球。

解：将简单命题符号化：

令  $p$ ：小张守第一垒；  $q$ ：小李向B队投球；

$r$ ：A队取胜；  $s$ ：A队成为联赛第一名

前提：  $(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee s, \neg s, p$

结论：  $\neg q$

前提：  $(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee s, \neg s, p, q$

结论：  $0$

前提:  $(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee s, \neg s, p$

结论:  $\neg q$

前提:  $(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee s, \neg s, p, q$

结论: 0

证明:

①  $q$

结论的否定引入

②  $p$

前提引入

③  $p \wedge q$

①②合取

④  $(p \wedge q) \rightarrow r$

前提引入

⑤  $r$

③④假言推理

⑥  $\neg r \vee s$

前提引入

⑦  $\neg s$

前提引入

⑧  $\neg r$

⑥⑦析取三段论

⑨  $r \wedge \neg r$

⑤⑧合取



前提:  $(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee s, \neg s, p$

结论:  $\neg q$

证明:

- |                                |         |
|--------------------------------|---------|
| ① $\neg r \vee s$              | 前提引入    |
| ② $\neg s$                     | 前提引入    |
| ③ $\neg r$                     | ①②析取三段论 |
| ④ $(p \wedge q) \rightarrow r$ | 前提引入    |
| ⑤ $\neg p \vee \neg q$         | ③④拒取式   |
| ⑥ $p$                          | 前提引入    |
| ⑦ $\neg q$                     | ⑤⑥析取三段论 |

## 思考题

尝试在自然推理系统P中利用构造证明法证明著名的“**苏格拉底三段论**”的正确性。

苏格拉底三段论：“凡人要死。苏格拉底是人。所以苏格拉底要死。”

显然在命题逻辑中就根本无法判断“苏格拉底三段论”的正确性。

苏格拉底三段论：“凡人要死。苏格拉底是人。所以苏格拉底要死。”

p: 凡人要死

q: 苏格拉底是人

r: 苏格拉底要死

则此三段论表示为  $(p \wedge q) \rightarrow r$

苏格拉底三段论是正确的，但  $(p \wedge q) \rightarrow r$  却不是重言式。

**命题逻辑是有缺陷的。**

例如：王大和王二是兄弟。王二和王三是兄弟。所以王大和王三也是兄弟。

很显然，在命题逻辑中也无法证明这个推理的正确性。而这个推理是正确的。

**命题逻辑是有缺陷的。**

## 命题逻辑的特点和局限性：

- ◆ 命题是命题演算的基本单位，不再对简单命题进行分解。
- ◆ 这样的方法太粗略，无法研究命题的内部结构及命题之间内在的联系。
- ◆ 因而命题逻辑在推理方面存在局限性。



- ◆ 要反映这种内在联系，就要对简单命题做进一步的分析
- ◆ 分析出其中的个体词、谓词、量词等，研究它们的形式结构和逻辑关系，总结出正确的推理形式和规则，
- ◆ 这就是一阶逻辑（谓词逻辑）的研究内容。