河海大学

Ch7 参数估计

● 点估计

1. 参数估计的概念

定义 设X_1，…，X_n是总体X的一个样本，其概率函数为$f(x;\theta)$, $\theta\in\Theta$. 其中θ为未知参数, Θ为参数空间, $f(x;\theta)$可表示分布律或密度函数. 若统计量$g(X_1$，…，$X_n)$可作为θ的一个估计, 则称其为θ的一个估计量, 记为$\hat{\theta}$。 即$\hat{\theta}=g(X_1,\cdots,X_n)$.

$\hat{\theta}=g(x_1,\cdots,x_n)$称为θ的估计值.

若x_1，…，x_n是样本的一个观测值。

由于$g(x_1，…，x_n)$ 是实数域上的一个点，现用它来估计θ，故称这种估计为**点估计**。

点估计的经典方法是**矩估计法**与**极大似然估计法**。

2. 矩估计法（简称“矩法”）

定义 用样本矩作为总体同阶矩的估计，从而解出未知参数的方法称为**矩估计法**或**矩法**。

θ的矩估计可记为 $\hat{\theta}_M$

$\hat{\theta}_M$应满足方程：$E(X^k) = A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$.

k的取值取决于$f(x;\theta)$中未知参数θ的维数。

若维数为1，即仅有一个参数，则k取1；

若维数为2，则可让k取1和2，解联立方程即可得

余类推

例 设总体X的分布律为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	2θ

其中$\theta(0<\theta<1)$未知，求θ的矩估计量。

若总体X有样本值3、1、3、0、3、1、2、3，求θ的矩估计值。

例 设总体 $X \sim P(\lambda)$，$\lambda > 0$未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体的样本， $x_1, x_2, \cdots, x_n$为样本值，求λ的矩估计量和矩估计值。

例 设总体 $X \sim U(a, b)$，a, b均未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体的样本， $x_1, x_2, \cdots, x_n$为样本值，求a、b的矩估计量和矩估计值。

例 设$X_1, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2), -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$，试求$\widehat{\mu}_M$和$\widehat{\sigma^2_M}$.

• 极大似然估计法

设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} f(x;\theta_1,\cdots,\theta_m),\theta_j\in\Theta$,则称

$$L(\theta_1,\cdots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_m)$$为X的**似然函数**.

定义 若有$\hat{\theta}_j\in\Theta$, 使得

$$L(\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_m)=\max_{\theta_j\in\Theta} L(\theta_1,\cdots,\theta_m),$$

或 $$L(\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_m)=\sup_{\theta_j\in\Theta} L(\theta_1,\cdots,\theta_m),$$

则称为θ_j的极大似然估计,记为 $\hat{\theta}_{j\,MLE}$或$\hat{\theta}_{j\,L}$.

极大似然估计的求法:

(1) 解似然方程法

$$\frac{\partial[L(\theta_1,\cdots,\theta_m)]}{\partial\theta_j}=0,\quad \frac{\partial[\ln L(\theta_1,\cdots,\theta_m)]}{\partial\theta_j}=0$$

称为未知参数θ_j的似然方程。若该方程有解,

则其解就是 $\hat{\theta}_{jL}=\hat{\theta}_{jL}(X_1,\cdots,X_n)$

(2) 直接法

由似然方程解不出θ_j的似然估计时，可由定义通过分析直接推求。

事实上$\hat{\theta}_{j_L}$满足

$$L(\hat{\theta}_{1_L},\cdots,\hat{\theta}_{m_L})=\max_{\theta_j\in\Theta}L(\theta_1,\cdots,\theta_m).$$

或 $$L(\hat{\theta}_{1_L},\cdots,\hat{\theta}_{m_L})=\sup_{\theta_j\in\Theta}L(\theta_1,\cdots,\theta_m).$$

例 设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} P(\lambda), \lambda>0$,试求$\hat{\lambda}_L$

例 设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\sigma^2), -\infty<\mu<\infty, \sigma>0$,
试求$\widehat{\mu}_L$和$\widehat{\sigma^2_L}$.

例 设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} U(a,b)$, 试求$\hat{a}_L$和$\hat{b}_L$.

• 点估计量的评选标准

1. 无偏性

设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为$\theta$的估计量，若$E(\hat{\theta})=\theta$

则称$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量.

例 设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\sigma^2), -\infty<\mu<\infty, \sigma>0$,
试讨论$\widehat{\mu_L}$和$\widehat{\sigma_L^2}$的无偏性.

例 设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$,试确定常数$C$,
使$C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计.

2. 有效性

设$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$分别是参数θ的两个无偏估计，若$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效.

例 设$X_1,\cdots,X_n$为总体X的一个样本.试证明:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{5}X_1 + \frac{3}{10}X_2 + \frac{1}{2}X_3$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{5}{12}X_3$$

都是$E(X)$的无偏估计.并比较哪个更有效？

• 区间估计

设 $X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} f(x;\theta)$，$\theta\in\Theta$，$\underline{\theta}$，$\overline{\theta}$ 为两个统计量，任给α：0<α<1，有

$$P\{\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$$

则称$(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 为θ 的置信度为1–α的置信区间，

$\underline{\theta}$ 为置信下限，$\overline{\theta}$ 为置信上限。

$(\underline{\theta},\overline{\theta})$也称为θ的区间估计。

- **正态总体参数的区间估计**

1. 单正态总体均值的置信区间

设$X_1,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu，\sigma^2)$,给定$\alpha$，由观测值$x_1,\cdots,x_n$求出$\mu$的置信区间.

(1) σ^2已知 令 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

即得μ的置信区间为1- α的置信区间为

$$\overline{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \left(\overline{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)。$$

例　某车间生产滚珠，其直径 X 是随机变量，总体 $X\sim N(\mu, 0.06)$。从某一天的产品中随机地抽取六件样品，测得直径为(单位：mm)

$$14.60,\ 15.10,\ 14.90,\ 14.80,\ 15.20,\ 15.10$$

求总体均值 μ 的置信度为$1-\alpha=0.95$的置信区间。

例　已知幼儿的身高在正常情况下服从正态分布。现从某一幼儿园5岁至6岁的幼儿中随机地抽查了9人，其身高分别为(单位: *cm*)

115, 120, 131, 115, 109, 115, 115, 105, 110。

假设5岁至6岁幼儿身高总体的标准差为 $\sigma=7cm$。在置信度为99%的条件下，试求总体均值 μ 的置信区间。

(2) σ^2未知

令 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

即得 μ的置信区间为1–α的置信区间为

$$\overline{x}\pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$=(\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\quad \overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})。$$

例　一个科学家记录了球的直径的5个测量值为：6.33, 6.37, 6.36, 6.32和6.37cm，假设球的直径近似地服从正态分布。求总体均值 μ 的0.95的置信区间。

2. 单正态总体方差的置信区间

设$X_1,\cdots,x_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\ \sigma^2)$，给定$x_1,\cdots,x_n$，求出$\sigma^2$（或$\sigma$）的置信区间。

μ未知

令 $$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

即得σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

同时，也可得到σ的置信度为1- α的置信区间

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\quad \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

例 从一台自动机床加工的同类零件中抽取10件，测得零件长度为(单位: 毫米): 12.15, 12.12, 12.01, 12.28, 12.09, 12.03, 12.01, 12.11, 12.06和12.04。设零件长度服从正态分布，求总体方差σ^2和标准差σ的置信区间(α=0.05)。

3. 双正态总体均值差的置信区间

$$设X_1,\cdots X_{n_1} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, \ \sigma_1^2),$$

$$Y_1,\cdots, \ Y_{n_2} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2),$$

两样本独立。给定置信度$1-\alpha$，
由观测值$x_1,\cdots,x_{n_1}; y_1,\cdots,y_{n_2}$，
求出$\mu_1-\mu_2$的置信区间。

(1) σ_1^2，σ_2^2 已知

令 $$U=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

可得$\mu_1-\mu_2$的置信区间

$$\left(\overline{x}-\overline{y}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \overline{x}-\overline{y}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

(2) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$未知

令 $$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

可解得 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间

$$\overline{x} - \overline{y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

例 随机地从两包装的食糖中分别取了4箱和5箱测得重量分别为(单位: kg)

甲: 143, 142, 143, 137;

乙: 140, 142, 136, 138, 140;

设两重量数据分别来自$N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且两样本相互独立。

(1)若$\sigma_1^2 = 8$, $\sigma_2^2 = 5$;

(2)若$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$未知。

分别求出$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.99的置信区间。

4. 双正态总体方差比的置信区间

设$X_1,\cdots,X_{n_1} \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y_1,\cdots,Y_{n_2} \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$，两样本独立。给定置信度$1-\alpha$，由观测值$x_1,\cdots,x_{n_1}$；$y_1,\cdots,y_{n_2}$，求出$\sigma_1^2 / \sigma_2^2$的置信区间。

(1) μ_1，μ_2未知

令 $F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

其中$S_1^2=\dfrac{1}{n_1-1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\dfrac{1}{n_2-1}\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$

可得 σ_1^2/σ_2^2的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$