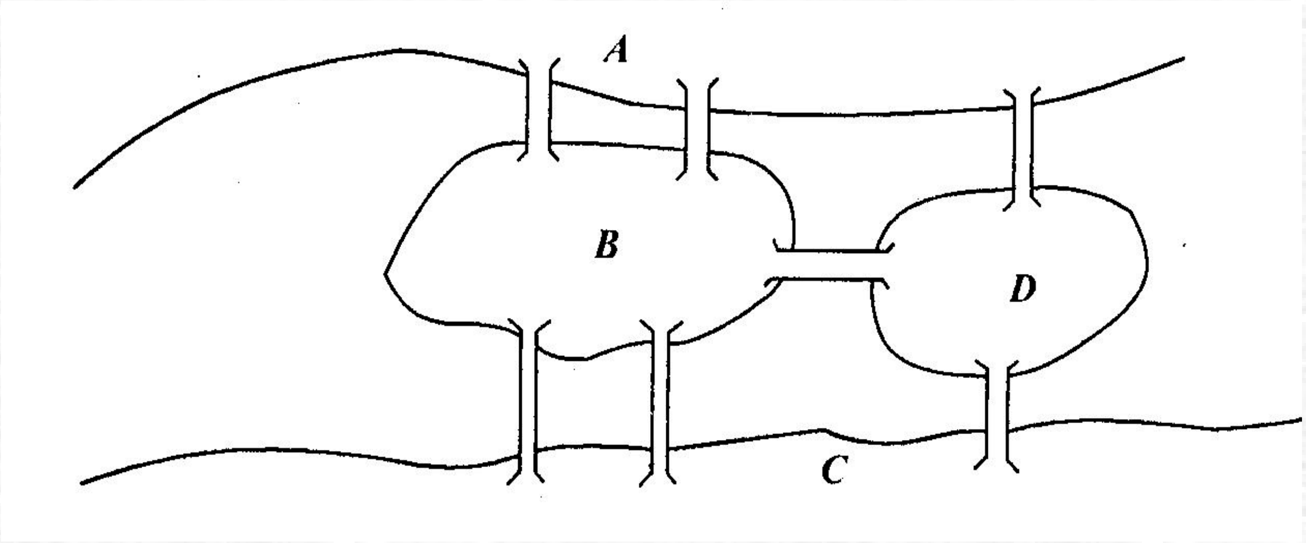
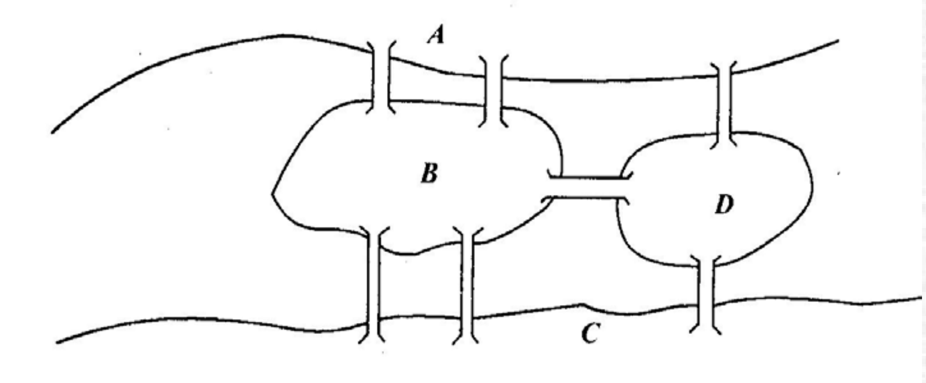
图 论（*Graph Theory*）

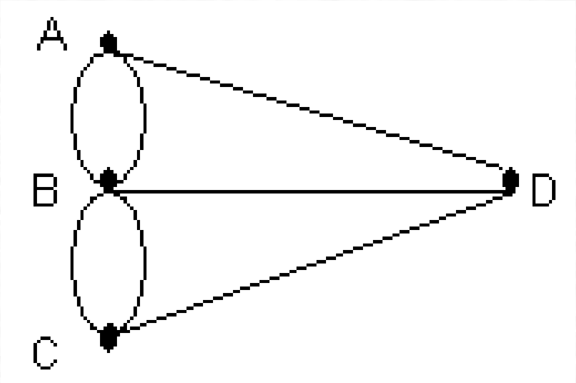
哥尼斯堡七桥问题



每逢假日，城中居民进行环城逛游，这样就产生了一个问题：能不能设计一次‘遍游’，使得从某地出发，对每座跨河桥只走一次，而在遍历了七座桥之后，却又能回到原地。

城的四个陆地部分分别以点A，B，C，D表示，将陆地设想为图的结点，把桥画成相应的连接边。





这样问题就等价于在图中从某一结点出发找一条通路，通过它的每条边一次且仅一次，并回到原结点。

1736年数学家欧拉发表了第一篇图论论文，解决了哥尼斯堡七桥问题。欧拉认证了该问题无解。

从十八世纪中叶到二十世纪中叶，漫长的200年中，图论几乎停留在数学游戏阶段，在此阶段，图论问题大量出现，如著名的四色问题、Hamilton问题以及图的可平面问题等。

在二十世纪中叶以后是图论的快速发展和应用阶段。

由于生产管理、军事、运筹学、交通运输、计算机科学、数字通讯等方面提出的实际问题的需要，特别是许多离散性问题的出现、刺激和推动，以及由于有了大型电子计算机，而使大规模问题的求解成为可能，图论及其应用的研究得到了飞速的发展。

图论的应用非常广泛，主要有运筹学、网络理论、信息论、控制论、博奕论、化学、生物学、社会科学、语言学，以及计算机科学等等。

这些学科都以图作为工具来解决实际问题和理论问题。

图论在计算机科学中的应用：

地图信息系统、电路设计、超文本、计算机网络、程序结构、数据结构、Petri网、形式语言与自动机……

第十四章　图的基本概念

14.1　图

定义（无序对）对于二元集合{a, b}，由于元素之间没有次序，称{a, b}为无序对，记为**（a, b）**。

定义（有序对）由两个元素x和y（允许x=y）按一定顺序排列成的二元组叫做一个**有序对**，记作**<x，y>**，其中x是它的**第一元素**，y是它的**第二元素**。

有序对<x，y>的性质（与无序对不同之处）：

1、当x≠y时，<x，y>≠<y，x>

2、<x，y>=<u，v>的充分必要条件是x=u且y=v

定义（笛卡儿积） 设A，B是任意两个集合，用A中元素作第一元素，B中元素作第二元素，构成的有序对，所有这样有序对的全体组成的集合称集合A和B的**笛卡儿积**，记作**A×B**。

定义（无序积） 设A，B为集合，则称{（**a, b**）| **a**∈**A**∧**b**∈**B**}为A与B的**无序积**，记为**A&B**。

说明：

（1） A、B非空时，**A×B≠B×A**。

（2）无论a，b是否相等，均有(**a, b**)=(**b, a**)，所以**A&B=B&A**。

定义14.1（无向图*undirected graph*）

一个无向图是一个有序的二元组<V，E>，记作G，即G=<V，E>，其中

(1) V={v1，v2，…，vn}是非空集合，称为G的**顶点集**（*vertex set*），V中元素称为**顶点**或**结点**；

(2) E={e1，e2，…，en}是无序积V&V的一个**多重子集**，称为的**边集**（*edge set*），E中的元素称为**无向边**，简称**边**。

由定义知，图G中的边e_k是V的两个元素vi，vj的无序对（vi，vj），称vi，vj是e_k的**端点**（*end vertices*）。

当vi=vj时，称e_k为**环**（*loop*）或**自回路**（*self-circuit*）。

定义14.2（有向图*directed graph*）

一个有向图是一个有序的二元组<V，E>，记作D，即D=<V，E>，其中

(1) V={v1，v2，...，vn}是非空集合，称为D的**顶点集**，V中元素称为**顶点**或**结点**；

(2) E为**边集**，是笛卡儿积V×V的多重子集，其元素称为**有向边**，简称**边**。

由定义，有向图的边e_k是有序对<vi，vj>，称vi，vj是e_k的**端点**，其中vi为e_k的**始点**（*origin*），vj为e_k的**终点**（*terminus*）。

当vi=vj时，称e_k为**环**，它是vi到自身的有向边。

每条边都是无向边的图称为无向图（*undirected graph*）。

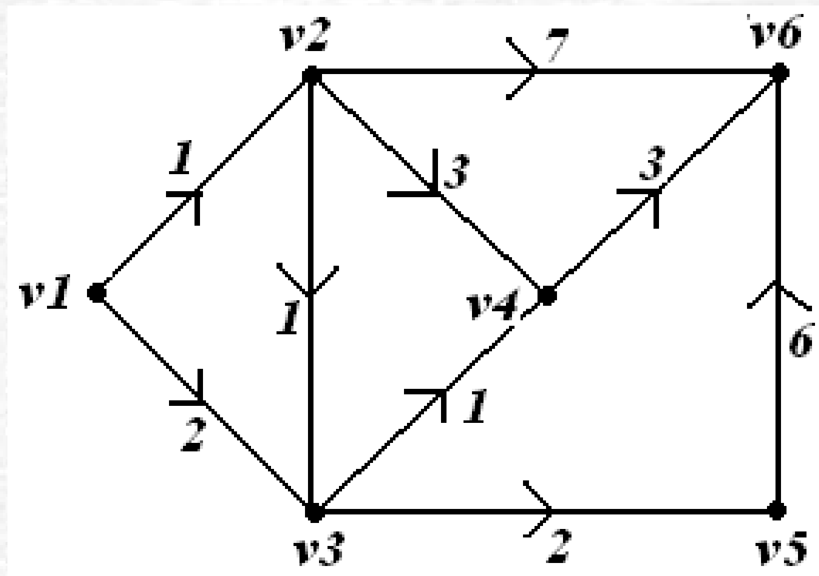
每条边都是有向边的图称为有向图（*directed graph*）。

既有无向边又有有向边的图称为混合图（*mixed graph*）。

将有向图各有向边均改成无向边后得到的无向图称为原来有向图的基图（*underlying graph*）。

在一些具体问题中，图的每条边上标注了具有特定含义的数值，该数值称为该边的**权**（*weight*）。

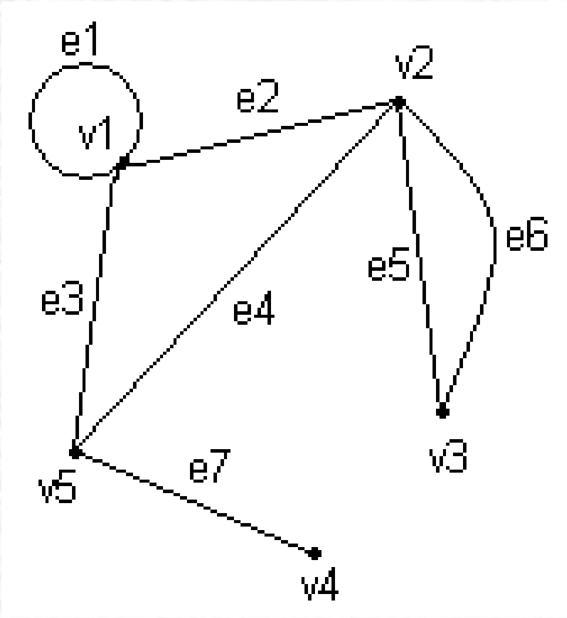
边上带权的图成为**带权图**（*weighted graph*）或**网**（*network*），记为$G=<V, E,W>$。

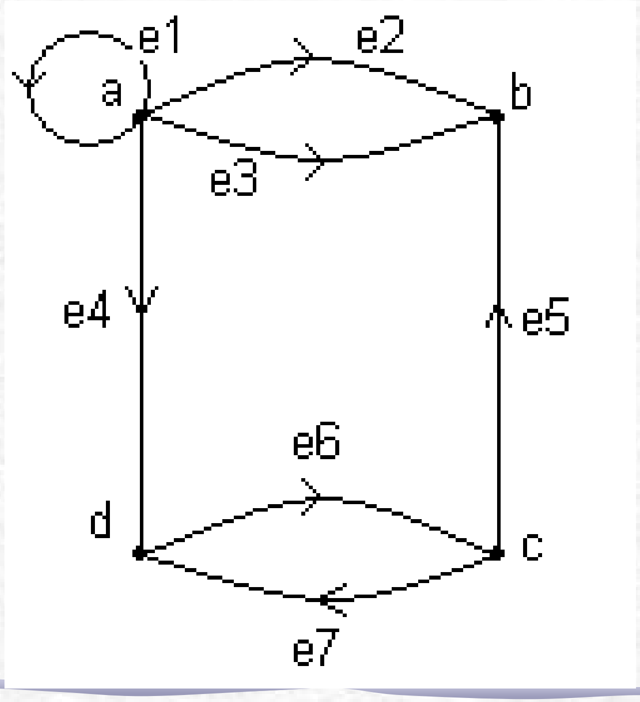


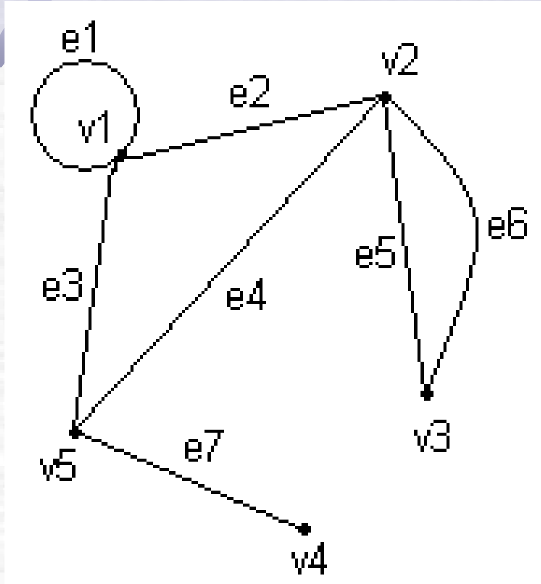
例（1）给定无向图G=<V，E>，其中V={v1, v2, v3, v4, v5}，
E={(v1, v1), (v1, v2), (v2, v3), (v2, v3), (v2, v5), (v1, v5), (v4, v5)}

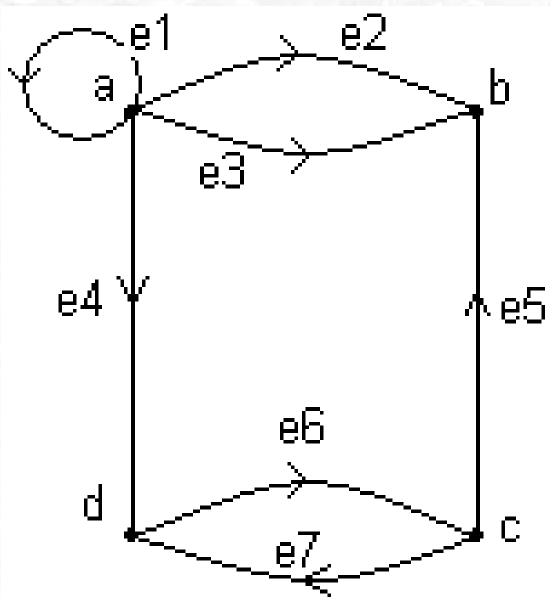
（2）给定有向图D=<V，E>，其中V={a, b, c, d}，
E={<a, a>, <a, b>, <a, b>, <a, d>, <d, c>, <c, d>, <c，b>}

画出G与D的图形。









定义14.3 在无向图中，G的两个顶点之间可能存在若干条不同的边，称这些边为**平行边**或**重边**（*multiple edges*）。

平行边的条数称为**重数**。

在有向图中，两个顶点间方向相同的若干条边称为**平行边**。

两个顶点间方向相反的两条有向边称为**对称边**（*symmetric edges*）。

含平行边的图称为**多重图**（*multigraph*），既不含平行边也不含环的图称为**简单图**（*simple graph*）。

图的有关规定和术语

通常G泛指图，包括无向图和有向图。

V、E分别表示G的顶点集和边集，所以用|V|、|E|分别表示G的顶点数和边数。

如果|V|和|E|是有限的，则称G为**有限图**；否则为无限图。

本课程只涉及有限图。

图的有关规定和术语

图的顶点数|V|称为图的**阶**（*order*）。

若|V|=*n*，则称G为***n*阶图**。

若E=∅，则称G为**零图**（*null graph*）。

含有n个顶点的零图称为**n阶零图**，记作N_n，特别的称N_1为**平凡图**（*trivial graph*）。

规定V=∅的图为**空图**（*empty graph*），并记为∅。

称顶点或边用字母标定的图为**标定图**（*labeled graph*），否则称为**非标定图**。

边很少（如$|E|<|V|\log_2|V|$）的图称为**稀疏图**（*sparse graph*）；边很多的图称为**稠密图**（*dense graph*）

思考题

证明：在任意6个人的聚会上，至少存在3个人或是认识，或是相互不认识。(Ramsey问题)

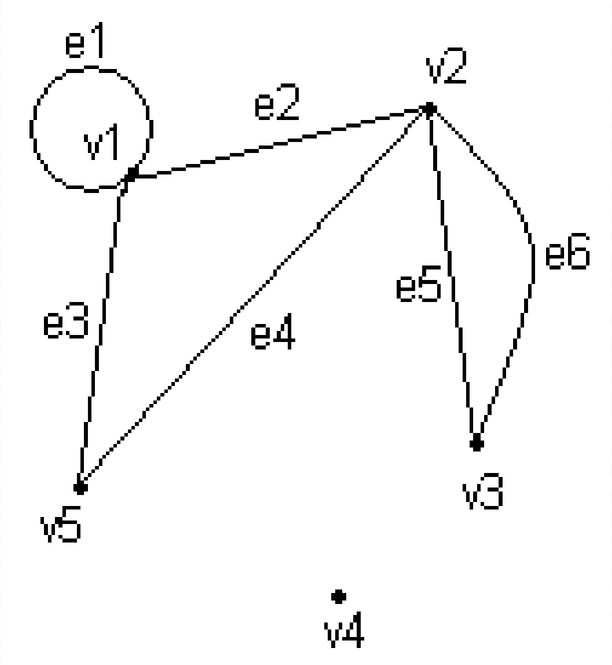
定义（关联）设e_k=（vi, vj）为无向图G中的一条边，顶点vi和vj为e_k的端点，称e_k与vi（或vj）是**彼此关联的**。

若vi≠vj，则称e_k与vi（或vj）的关联次数为1；

若vi=vj，则称e_k与vi的关联次数为2；

若vi不是e_k的端点，则称e_k与vi的关联次数为0。

无边关联的顶点称为**孤立点**（*isolated vertex*）。



定义（相邻） 设无向图G=<V，E>，

若$\exists e_t \in E$且e_t=（vi，vj），则称vi和vj是**相邻的**

若e_k，$e_l \in E$且有公共端点，则称e_k与e_l是**相邻的**。

定义（邻接与相邻） 设有向图D=<V，E>，

若$\exists e_t \in E$且e_t=<vi，vj>，则称vi**邻接到**vj，vj**邻接于**vi。

若e_k，$e_l \in E$且e_k的终点为e_l的始点，则称e_k与e_l是**相邻的**。

定义14.4（度） 设G=<V，E>为一无向图，$\forall v \in V$，称v作为边的端点的次数之和为v的**度数**，简称为**度**（*degree*），记为$d(v)$。

设D=<V,E>为有向图，$\forall v \in V$，

称v作为边的起点的次数之和为v的**出度**(*out-degree*)，记为$d^+(v)$

称v作为边的终点的次数之和为v的**入度**(*in-degree*)，记为$d^-(v)$

称$d^+(v)+d^-(v)$为v的度数，记作$d(v)$。

称度数为1的顶点为**悬挂顶点**，与它关联的边称为**悬挂边**。

度为偶数（奇数）的顶点称为**偶度（奇度）顶点**

在无向图G中，令

$$\Delta(G)=\max\{d(v)\mid v\in V(G)\}$$

$$\delta(G)=\min\{d(v)\mid v\in V(G)\}$$

称$\Delta(G)$，$\delta(G)$分别为G的**最大度**和**最小度**。

在有向图D中，可类似的定义最大度和最小度，此外令

$$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v)\mid v\in V(D)\}$$

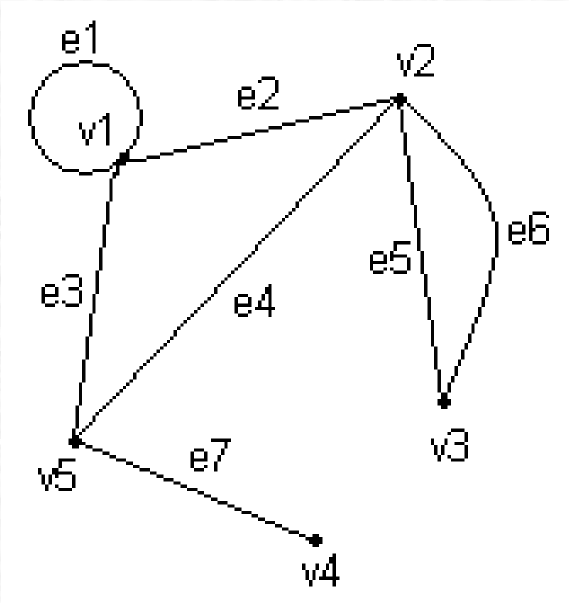
$$\delta^+(D)=\min\{d^+(v)\mid v\in V(D)\}$$

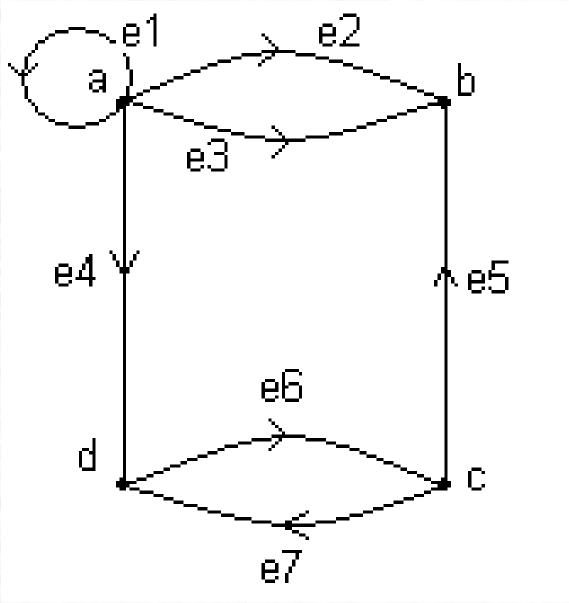
$$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v)\mid v\in V(D)\}$$

$$\delta^-(D)=\min\{d^-(v)\mid v\in V(D)\}$$

分别称为D的**最大出度**, **最小出度**, **最大入度**, **最小入度**

以上记号分别简记为Δ, δ, Δ^+, δ^+, Δ^-, δ^-





图G的△=4（v1, v2），δ=1（v4）

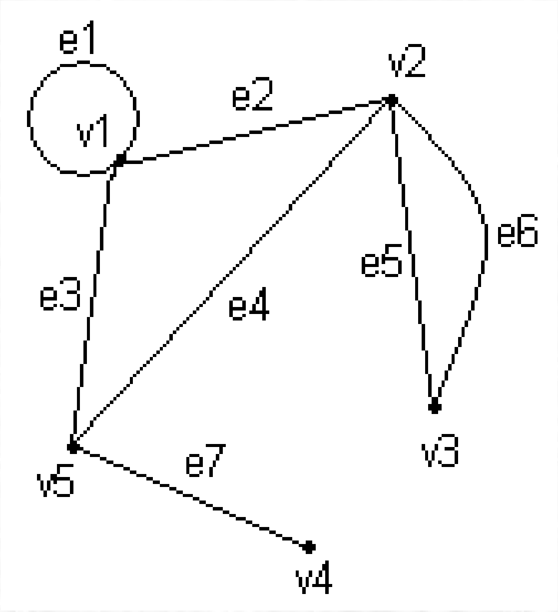
图D的△=5（a），δ=3(b, c, d)

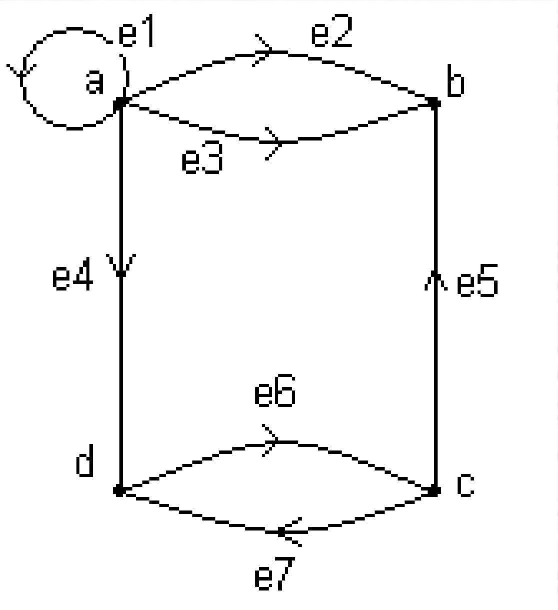
$\triangle^{+}$=4（a），δ^{+}=0（b）

$\triangle^{-}$=3（b），δ^{-}=1（a, c）

定义（度数列）设G=<V，E>是n阶无向图，V={v1，v2，…，vn}，称d(v1),d(v2),…,d(vn)为G的**度数列**。

同样可定义有向图的度数列、出度列和入度列。





图G的度数列为4，4，2，1，3

图D的度数列为5，3，3，3

图D的出度列为4，0，2，1

图D的入度列为1，3，1，2

定义（可图化） 对于给定的非负整数列d=(d1, d2, ..., dn)，若存在以V={v1, v2, ..., vn}为顶点集的n阶无向图G，使得d(vi)=di，则称d是**可图化的**。

特别地，若所得图是简单图，则称d是**可简单图化的**。

练习：P312-9

问题：非负整数列d=(d1，d2，...，dn)在什么条件下是可图化的和可简单图化的？

定理14.1（无向图握手定理）设G=<V，E>为任意的无向图，V={v1, v2, ..., vn}，|E|=m，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

定理14.2 （有向图握手定理）设D=<V，E>为任意的有向图，V={v1, v2, ..., vn}，|E|=m，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m \text{且} \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = m$$

推论 任何图（无向的或有向的）中，奇度顶点的个数是偶数。

定理14.3（可图化的充要条件）设非负整数列d=(d1, d2, ..., dn)，则d是可图化的当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} di = 0(\bmod 2)$$

例：（3，3，2，1）是不可图化的

（3，2，2，1，1）是不可图化的

（3，3，2，2）是可图化的

（3，2，2，2，1）是可图化的

定理14.3（可图化的充要条件）设非负整数列 d=(d1, d2, ..., dn)，则d是可图化的当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} di = 0(\mathrm{mod}\, 2)$$

定理14.4（可简单图化的必要条件）设G是任意n阶无向简单图，则△（G）≤n-1。

例 判断下列非负整数哪些是可图化的？哪些是可简单图化的？

（1）（5，5，4，4，2，1）

（2）（5，4，3，2，2）

（3）（3，3，3，1）

（4）（d1，d2，…，dn），$d_1>d_2>\ldots>d_n\geq 1$ 且 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数

（5）（4，4，3，3，2，2）

解：

（1）不可图化

（2）可图化，但不可简单图化。△（G）=5>（5-1）

（3）可图化，但不可简单图化。

（4）可图化，但不可简单图化。△（G）≥n>（n-1）

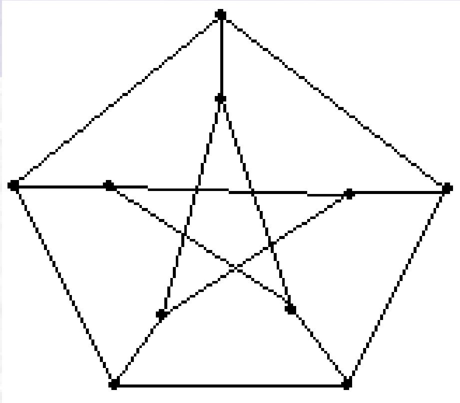
（5）可图化，并且可简单图化。

在画图时，由于顶点位置的不同，边的直、曲不同，同一个图可能画出不同的形状。

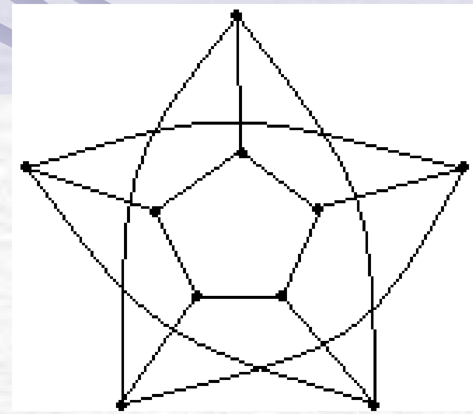
像这种形状不同，但本质上是同一个图的现象称为图同构。

定义14.5（图同构） 设两个无向图G1=<V1，E1>，G2=<V2，E2>，如果存在双射函数f：V1→V2，使得对于任意的e=（vi，vj）∈E1当且仅当e'=（f(vi)，f(vj)）∈E2，并且e与e'的重数相同，则称G1和G2是**同构的**，记作G1≅G2。

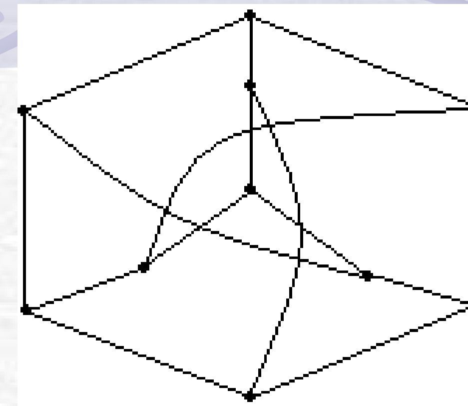
对于有向图可类似定义。



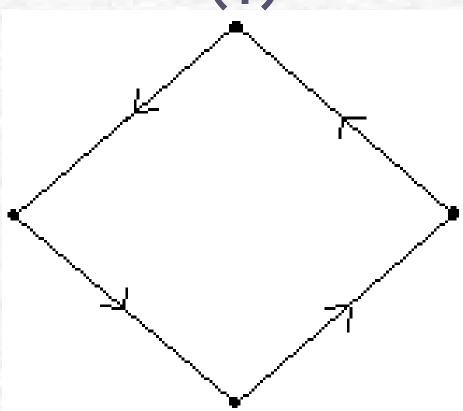
(1)



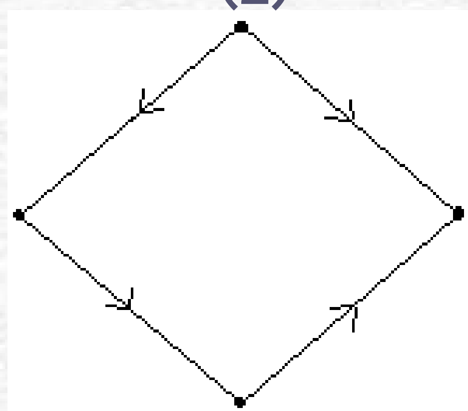
(2)



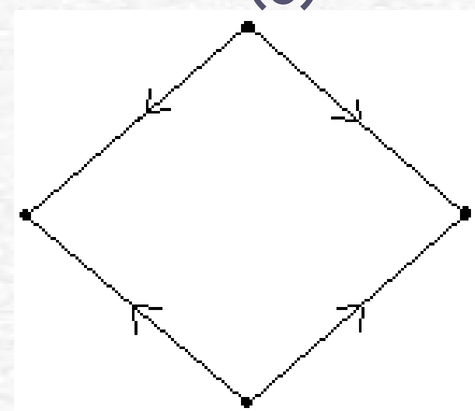
(3)



(4)



(5)



(6)

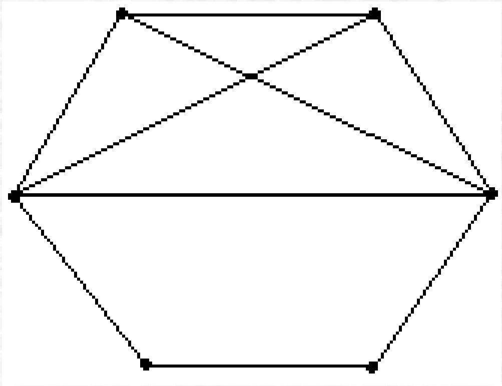
(1) 为彼得松图，(2)、(3) 均与 (1) 同构

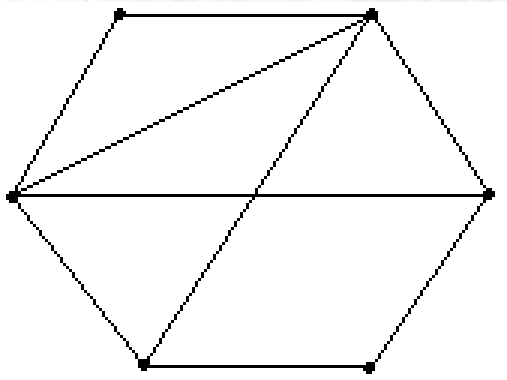
(4)、(5)、(6) 三图彼此不同构

说明：两图同构的必要条件：若两图同构，则它们的阶数相同，边数相同，度列数相同等。

但反之不然。

例如：下面两个图不同构。





练习P312-13

思考

（1）设G是n阶无向简单图，则G中最多有多少条边？

（2）设G是n阶有向简单图，则G中最多有多少条边？

答：

（1）n阶无向简单图最多有$n(n-1)/2$条边

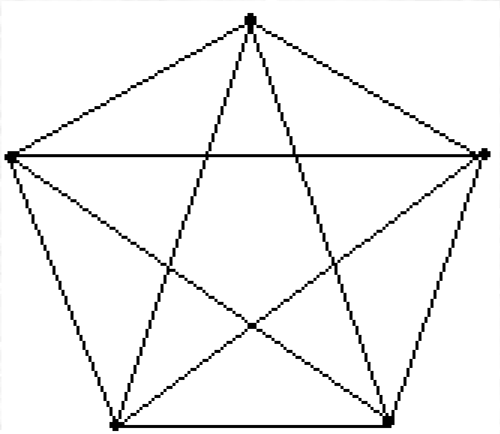
（2）n阶有向简单图的最多有$n(n-1)$条边

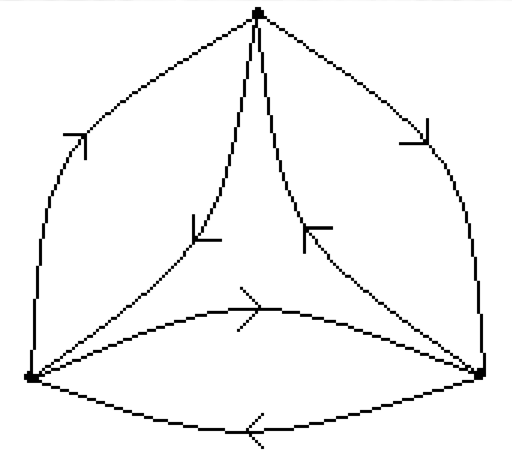
几种特殊的图形

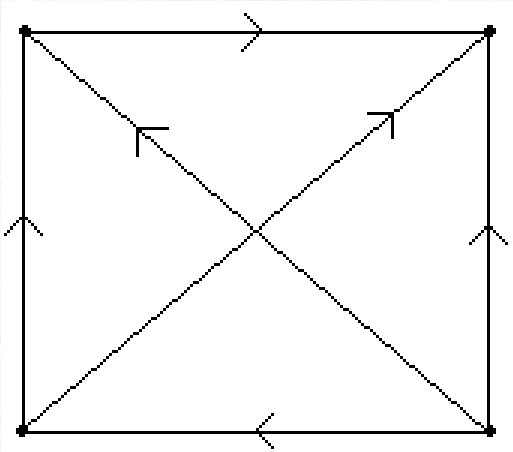
定义14.6 设G是n阶无向简单图，若G中任何顶点都与其余的n-1个顶点相邻，则称G为**n阶无向完全图**（*complete graph*），记作K_n。

设D为n阶有向简单图，若D中任意两个顶点u、v之间既有有向边<u，v>，又有<v，u>，则称D是**n阶有向完全图**（*complete digraph*）。

设D为n阶有向简单图，若D的基图为n阶无向完全图K_n，则称D是**n阶竞赛图**。


（1）


（2）


（3）

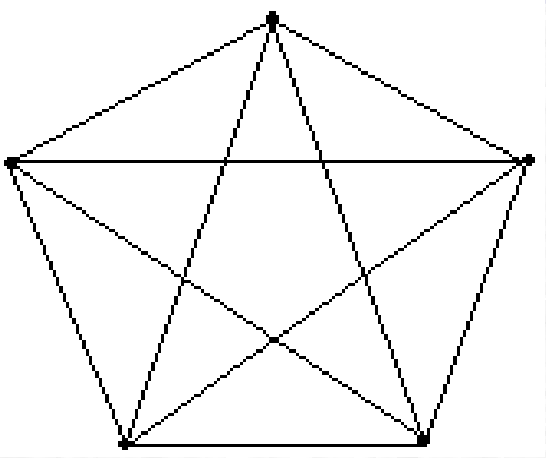
（1）为K_5，（2）为3阶有向完全图，（3）为4阶竞赛图

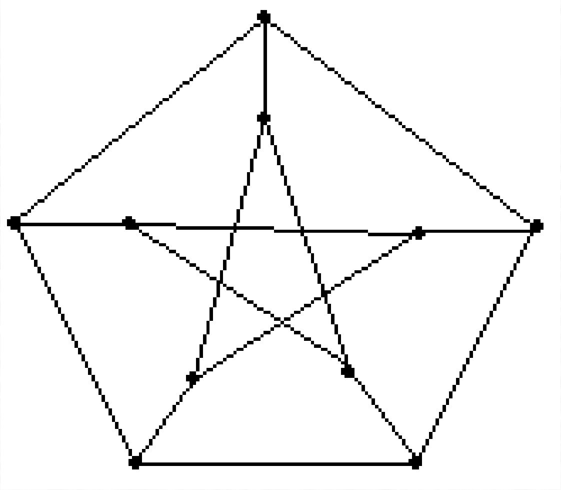
这几种图形的边数：

n阶无向完全图的边数为n(n-1)/2

n阶有向完全图的边数为n(n-1)

n阶竞赛图的边数为n(n-1)/2


K5


彼得松图

定义14.7（正则图） 设G是n阶无向简单图，若对于任意的顶点$v \in V(G)$，均有$d(v)=k$，则称G为**k-正则图**（*k-regular graph*）。

易见

n阶零图是0-正则图

n阶无向完全图是(n-1)-正则图

彼得松图是3-正则图。

对于k-正则图，其边数为kn/2

定义14.8（子图）设G=<V，E>，G'=<V'，E'>是两个图（同为无向图或同为有向图）。

若$V' \subseteq V$且$E' \subseteq E$，则称G'是G的**子图**（*subgraph*），G是G'的**母图**（*supergraph*），记作$G' \subseteq G$。

若$V' \subset V$或$E' \subset E$，则称G'是G的**真子图**（*prope subgraph*）。

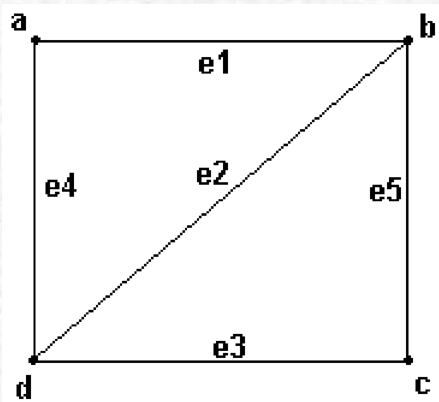
若$G' \subseteq G$且$V'=V$，则称G'是G的生成子图或支撑子图（*spanning subgraph*）。

定义14.8（导出子图）设G =<V,E>为无向图或有向图

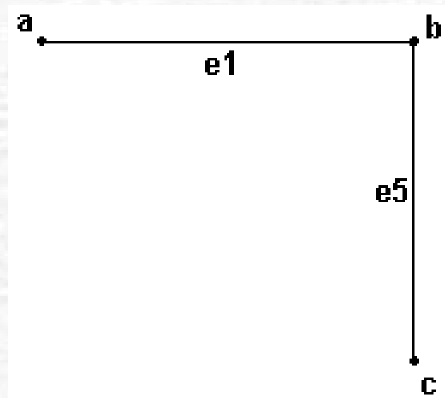
设V'⊂V且V'≠∅，以V'为顶点集，以V'中的顶点为端点的所有的边为边集的图显然为G的子图，该子图称为以V'导出的**导出子图**（*induced subgraph*），记作**G[V']**。

设E'⊂E且E'≠∅，以E'为边集，以E'中的边所关联的所有的顶点为顶点集的G的子图，称为以E'导出的**导出子图**，记作**G[E']**。

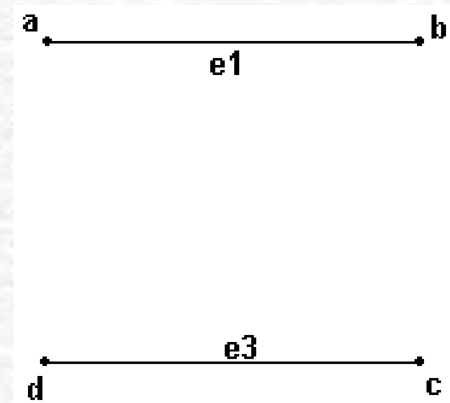
例 设G如下图所示，取V1={a, b, c}，E1={e1, e3}，画出G[V1]和G[E1]。



G



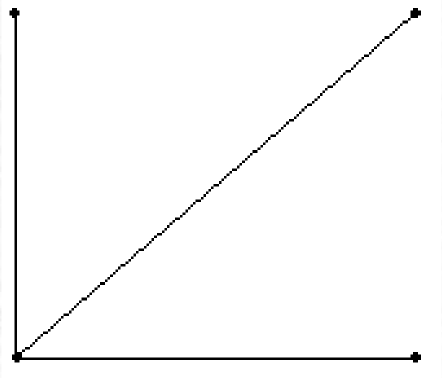
G[V1]



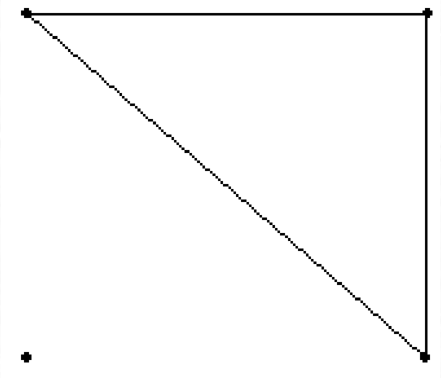
G[E1]

定义14.9 （补图）设G是n阶无向简单图，以V为顶点集，以所有能使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为**G相对于完全图K_n的补图**，简称为G的**补图**，记作$\overline{G}$。

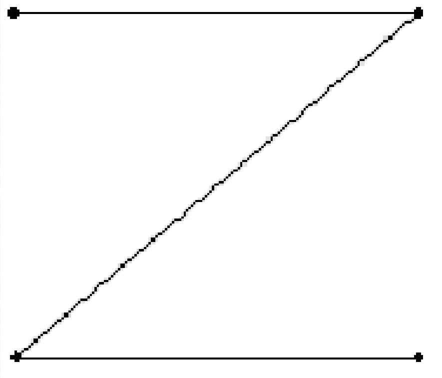
若图$G \cong \overline{G}$，则称G是**自补图**。



（1）



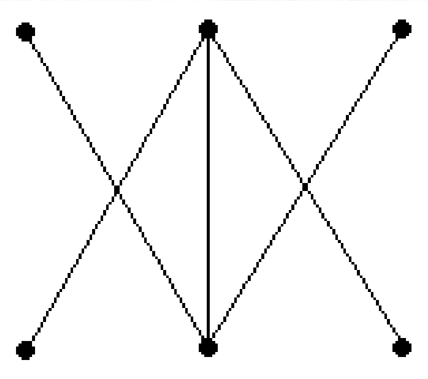
（2）

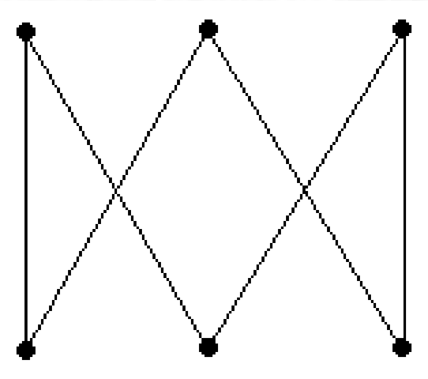


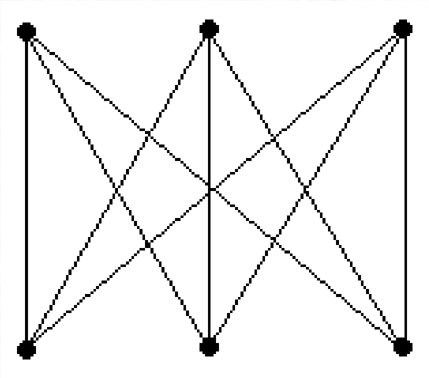
（3）

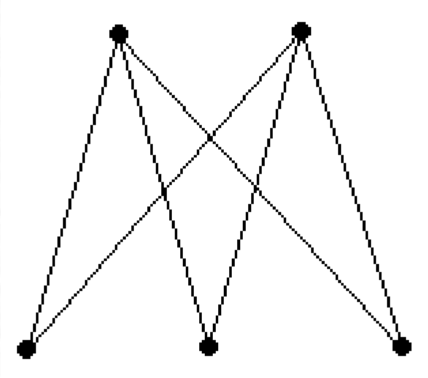
（1）和（2）互为补图，（3）是自补图。

二部图





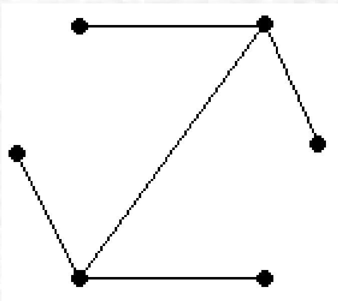


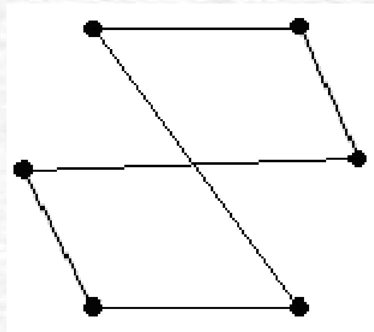


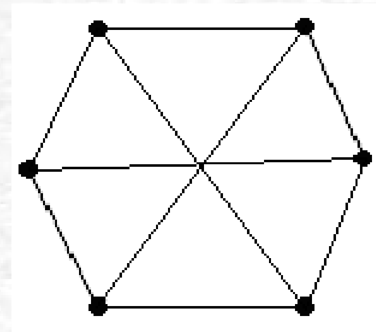
定义14.22（二部图） 设G是一个无向图，如果能将V分成V1和V2（V1∪V2=V，V1∩V2=∅），使得G中的每条边的两个端点都是一个属于V1，另一个属于V2，则称G为**二部图（二分图、偶图，*bipartite graph*）**，称V1和V2为**互补顶点子集**，常将二部图G记为**<V1, V2, E>**。

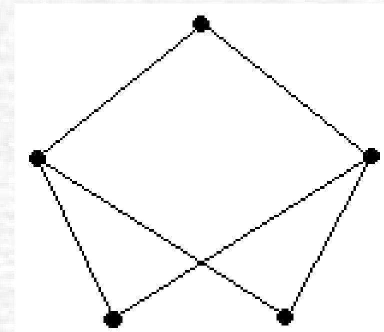
又若G是简单二部图，V1中每个顶点均与V2中所有顶点相邻，则称G为**完全二部图**，记为$K_{r,s}$，其中r=|V1|，s=|V2|。

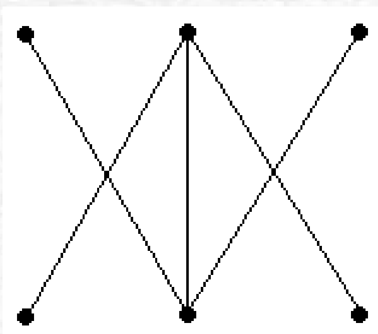
例:

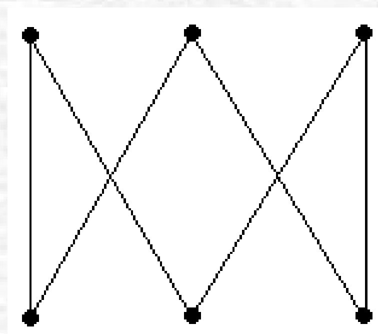


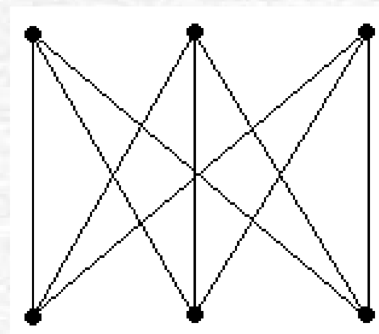




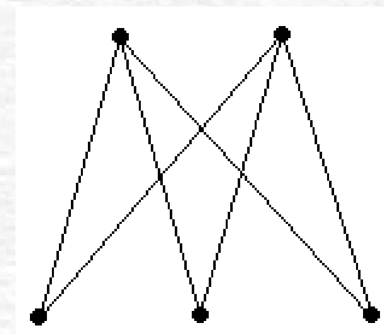








$K_{3,3}$



$K_{2,3}$

在应用中有一个非常实际的问题，给n个工作人员安排m项任务，n个人用$X=\{x1, x2, \ldots, xn\}$表示，而m项任务用$Y=\{y1, y2, \ldots, ym\}$表示；并不是所有的工作人员都能从事任何工作，比如$x1$能做工作$y1$，$y2$，而$x2$能做工作$y2$，$y3$，等等，于是便提出这样的问题：应该如何安排工作才能作到最大限度地完成任务，使得任务有人做，更多的人有工作做。

（1）是否能够使得每个工人都能分配到工作，每个任务都有人做？

（2）如果不能保证（1）中的情况，那么怎样才能最大限度地使得最多的工人有工作做，任务有人做

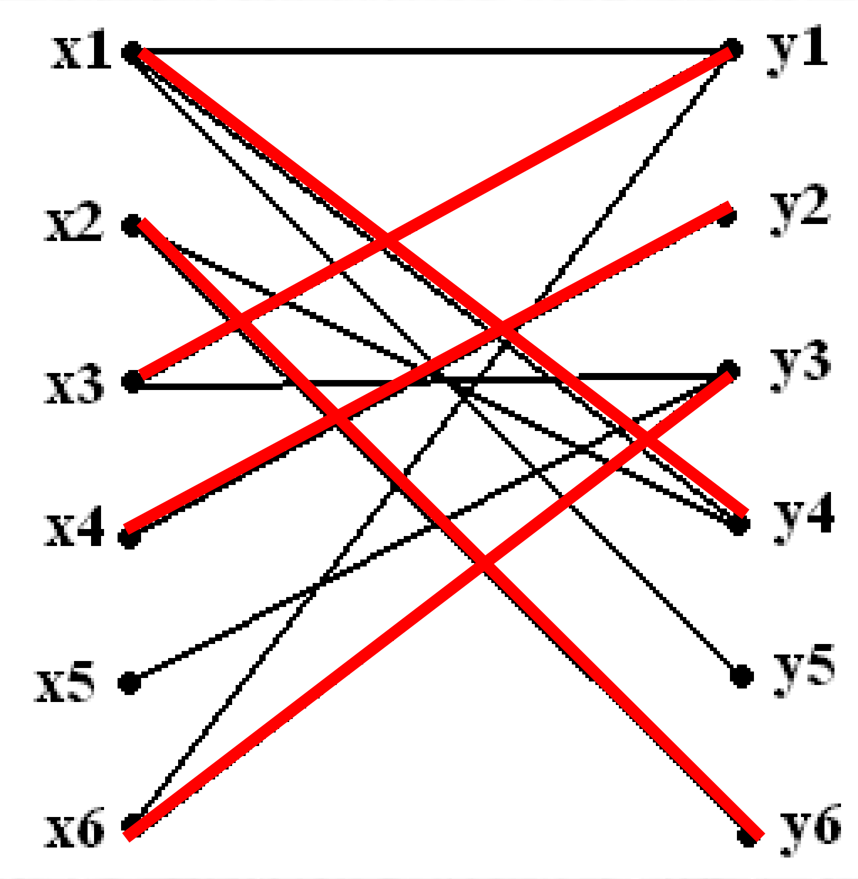
——工作分配问题

例如有五个工人$X=\{x1,x2,x3,x4,x5,x6\}$ 和五项工作$Y=\{y1,y2,y3,y4,y5,y6\}$，已知$x1$能做$y1$、$y4$、$y5$；$x2$能做$y4$、$y6$；$x3$能做$y1$、$y3$；$x4$能做$y2$；$x5$能做$y3$；$x6$能做$y1$、$y3$。

转化为图论问题：作二部图$G=< X, Y, E >$，顶点集$V=X\cup Y$，边集$E=\{e_{ij}|$工人x_i能做工作$y_j\}$。

从图G中找到一个边不交(无公共端点)的最小子图，使得子图中的

边关联所有顶点或者关联尽可能多的顶点

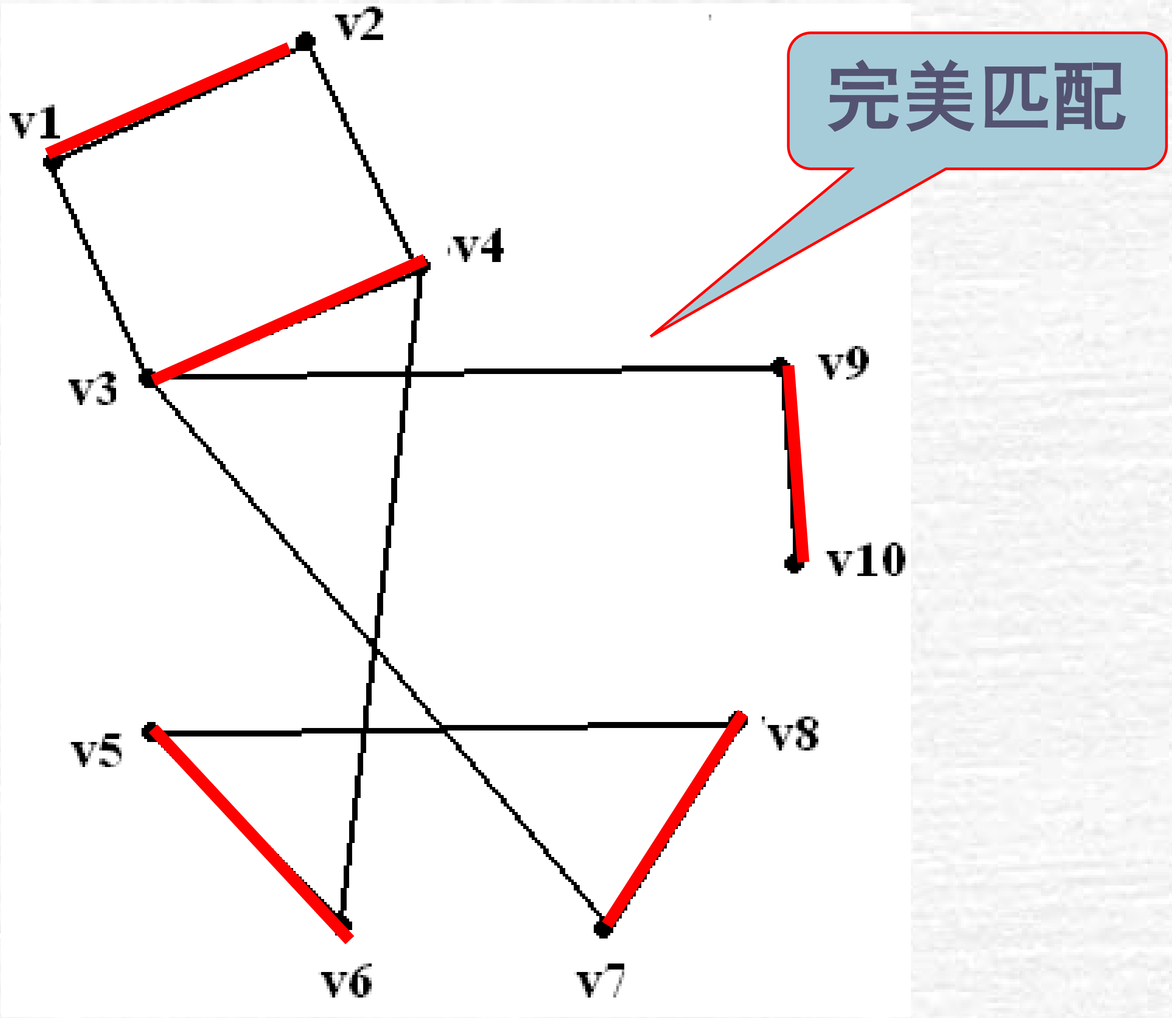


匹配问题是运筹学的重要问题之一，也是图论的重要内容，它在所谓的“人员分配问题”和“最优分配问题”中有着重要的应用。

匹配问题的目标就是去找到一个完美匹配（关联二部图中所有顶点的边不交的最小子图）或最大匹配（关联二部图中最多顶点的边不交的最小子图）。

例（飞行员搭配问题）二战时期，英国某飞行队有10个来自不同国家的飞行员，都会驾驶某种飞机，每架飞机需要两名驾驶员。由于种种原因，有些人可以一起飞行，有些人则不能。

假定下图表示飞行员的搭配图，图中v1-v10表示这10个飞行员，边(vi,vj)表示飞行员vi和vj可以搭配。问如何安排才能使起飞的飞机最多？


v1
v2
v4
v3
v9
v10
v5
v8
v6
v7
完美匹配

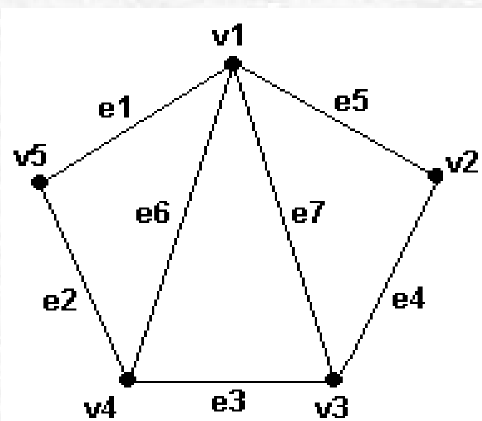
最后，讨论几种图的基本操作：

边的删除、顶点的删除、边的收缩、加新边

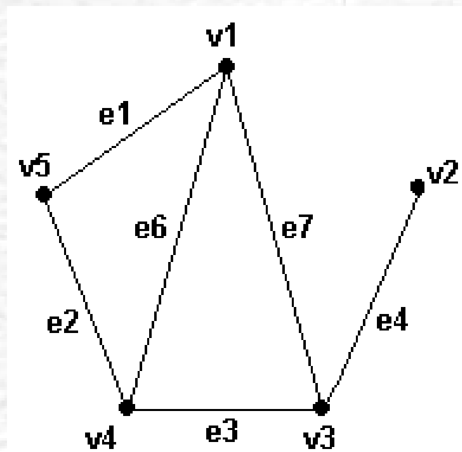
定义（边的删除） 设G=<V，E>是无向图。

设e∈E，用G-e表示从G中去掉边e，称为**删除边e**。

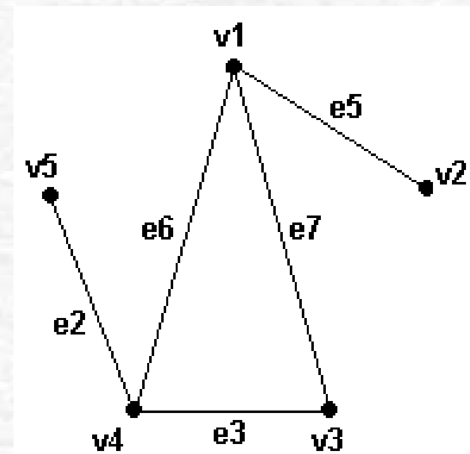
又设E'⊂E，用G- E'表示从G中删除E'中所有边，称为**删除E'**。



G



G-e5

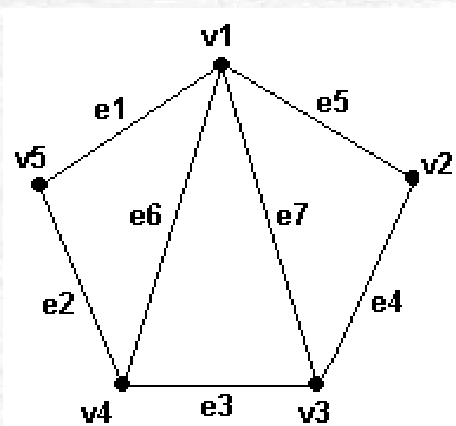


G-{e1, e4}

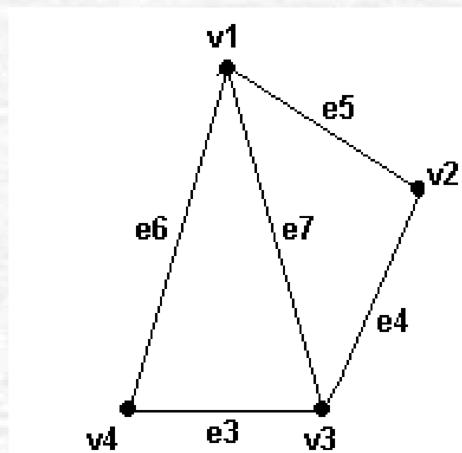
定义（顶点的删除） 设G=<V，E>是无向图。

设v∈V，用G-v表示从G中去掉边v及所关联的一切边，称为**删除顶点v**。

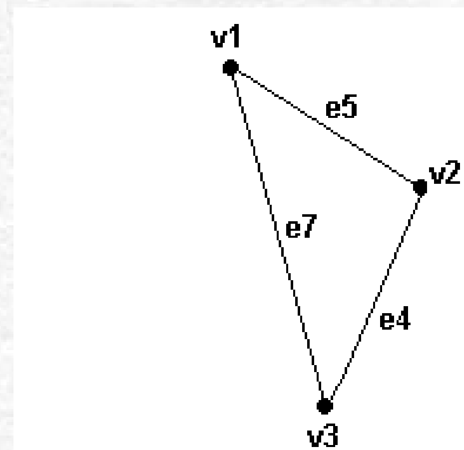
又设V'⊂V，用G-V'表示从G中删除V'中所有顶点，称为**删除V'**。



G



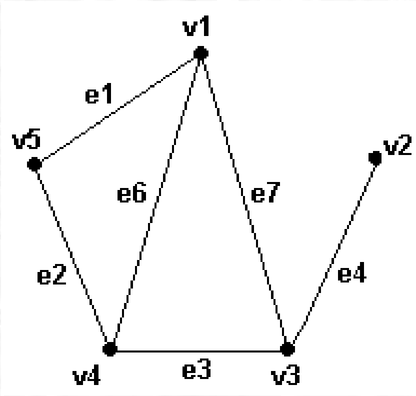
G-v5



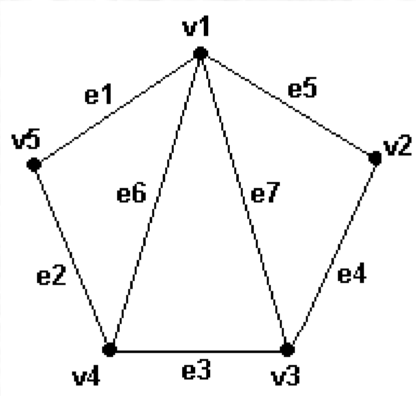
G-{v4, v5}

定义（加新边）设G=<V，E>是无向图。

设u、v∈V（u、v可能相邻，也可能不相邻），用G∪（u，v）（或G+（u，v））表示在u、v之间加一条边（u，v），称为**加新边**。



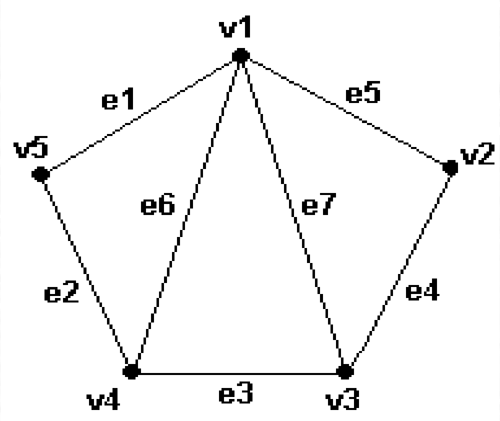
G



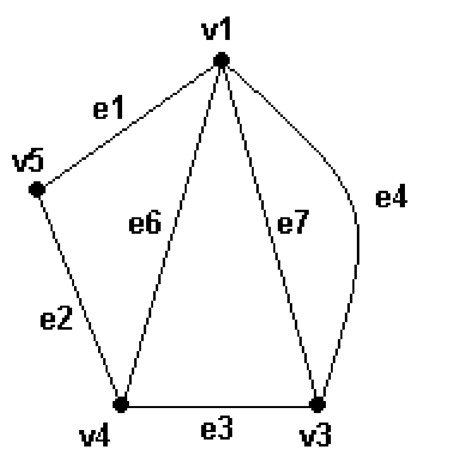
G+e5

定义（边的收缩）设G=<V，E>是无向图。

设边e=(u, v)∈E，用**G\e**表示从G中删除e后，将e的两个端点u，v用新的顶点w（或用u、v中的一个充当w）代替，使w关联e以外的u、v所关联的所有边，称为**边e的收缩**。



G



G\e5