命题逻辑习题课参考答案

一. 命题符号化

P:天下雪。Q:我将去镇上。R:我有时间。

(1) 如果天不下雪且我有时间，那么我将去镇上。

$$(\neg P \wedge R) \rightarrow Q$$

(2) 我将去镇上，仅当我有时间。

$$Q \rightarrow R$$

(3)天下雪，那么我不去镇上。

$$P \rightarrow \neg Q$$

(4) 或者你没有给我写信，或者它在途中丢失了。

显然这里的“或者”是“不可兼取的或”。

令 P:你给我写信。Q:信在途中丢失了。

$\neg P \oplus Q$ 或 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

(5) 我们不能既划船又跑步。

令 P:我们划船。Q:我们跑步。

$\neg(P \wedge Q)$

(6)如果你来了，那么他唱不唱歌将看你是否为他伴奏而定。

令 P:你来了。Q:你为他伴奏。 R:他唱歌。

$P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \wedge (\neg Q \rightarrow \neg R))$

或： $P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$

(7) 假如上午不下雨，我去看电影，否则就在家里读书或看报。

令 P:上午下雨。Q:我去看电影。 R:我在家里读书。S:我在家里看报。

$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow(R\vee S))$

(8)我今天进城，除非下雨。

令 P:我今天进城。Q:今天下雨。

表达式为: $\neg Q\rightarrow P$

(9)仅当你走我将留下。

令 P:你走。Q:我留下。

表达式为: $Q\rightarrow P$ 或者 $\neg P\rightarrow\neg Q$

二.重言式的证明方法

方法1：列真值表。

方法2：公式的等价变换，化简成“T”。

方法3：用公式的主析取范式。

(1)证明$(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow(P\wedge Q))$是重言式。

方法1:

P	Q	$P\rightarrow Q$	$P\rightarrow(P\wedge Q)$	$(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow(P\wedge Q))$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

方法2: $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee((\neg P\vee P)\wedge(\neg P\vee Q))$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(T\wedge(\neg P\vee Q))$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow(P\vee(\neg P\vee Q))\wedge(\neg Q\vee(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow((P\vee\neg P)\vee Q))\wedge(\neg Q\vee(Q\vee\neg P)$

$\Leftrightarrow(T\vee Q))\wedge((\neg Q\vee Q)\vee\neg P)$

$\Leftrightarrow T\wedge(T\vee\neg P)$

$\Leftrightarrow T\wedge T$

$\Leftrightarrow T$

方法3 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee\neg P\vee(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q))\vee(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$

可见，该公式的主析取范式含有全部(四个)小项，这表明$(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow(P\wedge Q))$是永真式

三.重言蕴涵式的证明方法

方法1.列真值表。(即列永真式的真值表) (略)

方法2.假设前件为真，推出后件也为真。

方法3.假设后件为假，推出前件也为假。

证明

$(\neg A\rightarrow(B\vee C))\wedge(D\vee E)\wedge((D\vee E)\rightarrow\neg A)\Rightarrow B\vee C$

方法2 证明:

设前件$(\neg A\rightarrow(B\vee C))\wedge(D\vee E)\wedge((D\vee E)\rightarrow\neg A)$ 为真，则

$\neg A\rightarrow(B\vee C)$, $D\vee E$, $(D\vee E)\rightarrow\neg A$ 均为真。

由$D\vee E$, $(D\vee E)\rightarrow\neg A$ 均为真，得

$\neg A$为真,

又由$\neg A\rightarrow(B\vee C)$为真，得

$B\vee C$为真。所以

$(\neg A\rightarrow(B\vee C))\wedge(D\vee E)\wedge((D\vee E)\rightarrow\neg A)\Rightarrow B\vee C$

$(\neg A\rightarrow(B\vee C))\wedge(D\vee E)\wedge((D\vee E)\rightarrow\neg A)\Rightarrow B\vee C$

方法3 证明：设后件$B\vee C$为 F，则 B与C均为 F，

1. 如果$D\vee E$ 为 T，则

1).若A为T，则$\neg A$为F，则$(D\vee E)\rightarrow\neg A$为F，于是前件 $(\neg A\rightarrow(B\vee C))\wedge(D\vee E)\wedge((D\vee E)\rightarrow\neg A)$ 为F。

2). 若A为 F，则 $\neg A$为T，于是$\neg A\rightarrow(B\vee C)$ 为F，故前件$(\neg A\rightarrow(B\vee C))\wedge(D\vee E)\wedge((D\vee E)\rightarrow\neg A)$ 为F。

2.如果$D\vee E$ 为 F，则 前件 $(\neg A\rightarrow(B\vee C))\wedge(D\vee E)\wedge((D\vee E)\rightarrow\neg A)$ 为F。

$\therefore(\neg A\rightarrow(B\vee C))\wedge(D\vee E)\wedge((D\vee E)\rightarrow\neg A)\Rightarrow B\vee C$

四．等价公式的证明方法

方法1：用列真值表。（不再举例）

方法2：用公式的等价变换.(用置换定律)

(1) 证明

$((A\wedge B)\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow(D\vee C))\Leftrightarrow(B\wedge(D\rightarrow A))\rightarrow C$

左式$\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B)\vee C)\wedge(\neg B\vee(D\vee C))$

$\Leftrightarrow((\neg A\vee\neg B)\vee C)\wedge(\neg B\vee(D\vee C))$

$\Leftrightarrow((\neg B\vee\neg A)\vee C)\wedge((\neg B\vee D)\vee C)$

$\Leftrightarrow((\neg B\vee\neg A)\wedge(\neg B\vee D))\vee C$

$\Leftrightarrow(\neg B\vee(\neg A\wedge D))\vee C$

$\Leftrightarrow\neg(B\wedge(A\vee\neg D))\vee C$

$\Leftrightarrow(B\wedge(D\rightarrow A))\rightarrow C$

(2)化简$(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$

上式$\Leftrightarrow (A \vee \neg A) \wedge (B \wedge C)$

$\Leftrightarrow T \wedge (B \wedge C)$

$\Leftrightarrow B \wedge C$

五. 范式的写法及应用

(1)写出$(P\rightarrow(Q\wedge R))\wedge(\neg P\rightarrow(\neg Q\wedge\neg R))$的主析取范式和主合取范式

方法1，用真值表

令$A(P,Q,R)\Leftrightarrow(P\rightarrow(Q\wedge R))\wedge(\neg P\rightarrow(\neg Q\wedge\neg R))$

$A(P,Q,R)\Leftrightarrow m_0\vee m_7$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\Leftrightarrow\sum(0,7)$

$A(P,Q,R)\Leftrightarrow M_1\wedge M_2\wedge M_3\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$

$\Leftrightarrow(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge$

$(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow\prod(1,2,3,4,5,6)$

	P	Q	R	$P \to (Q \wedge R)$	$\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R)$	A(P, Q, R)
0	F	F	F	T	T	T
1	F	F	T	T	F	F
2	F	T	F	T	F	F
3	F	T	T	T	F	F
4	T	F	F	F	T	F
5	T	F	T	F	T	F
6	T	T	F	F	T	F
7	T	T	T	T	T	T

方法2.等价变换

$(P\to(Q\land R))\land(\neg P\to(\neg Q\land\neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P\lor(Q\land R))\land(P\lor(\neg Q\land\neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P\land P)\lor(P\land Q\land R))\lor(\neg P\land\neg Q\land\neg R))\lor$
$((Q\land R)\land(\neg Q\land\neg R))$

$\Leftrightarrow F\lor(P\land Q\land R))\lor(\neg P\land\neg Q\land\neg R)\lor F$

$\Leftrightarrow(P\land Q\land R))\lor(\neg P\land\neg Q\land\neg R)$

$(P\rightarrow(Q\wedge R))\wedge(\neg P\rightarrow(\neg Q\wedge\neg R))$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee(Q\wedge R))\wedge(P\vee(\neg Q\wedge\neg R))$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R))\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee(R\wedge\neg R))\wedge(\neg P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R))$
$\wedge(P\vee\neg Q\vee(R\wedge\neg R))\wedge(P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R))\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge$
$(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge$
$(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R))\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$
$\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)$

(2) A,B,C,D四个人中要派两个人出差，按下述三个条件有几种派法?

①若A去则C和D中要去一个人。

②B和C不能都去。

③C去则D要留下。

解.设A,B,C,D分别表示A去，B去，C去，D去。

①$A\rightarrow((C\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D))$

$\Leftrightarrow\neg A\vee (C\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D)$

② $\neg(B\wedge C)\Leftrightarrow \neg B\vee\neg C$

③ $C\rightarrow\neg D\Leftrightarrow \neg C\vee\neg D$

总的条件为:

$(\neg A\vee (C\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D))\wedge(\neg B\vee\neg C)\wedge(\neg C\vee\neg D)$ 令此式为真。

将$(\neg A\vee(C\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D))\wedge(\neg B\vee\neg C)\wedge(\neg C\vee\neg D)$化成析取范式。

上式$\Leftrightarrow(\neg A\vee(C\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D))\wedge(\neg C\vee(\neg B\wedge\neg D))$

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg C)\vee(C\wedge\neg D\wedge\neg C)\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg C)\wedge(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg D)\vee(C\wedge\neg D\wedge\neg B\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg B\wedge\neg D)$

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg C)\vee F\vee(\neg C\wedge D)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg D)\vee(C\wedge\neg D\wedge\neg B)\vee F$

可以取$\neg A\wedge\neg C$为T，得B和D去。

取$\neg C\wedge D$为T，得A和D去，或者 B和D去。

取$C\wedge\neg D\wedge\neg B$为T，得A和C去 。

最后得三种派法： A和C去、A和D去、B和D去。

箱＼工具	改锥	扳手	钳子	锤子
A	有	有		
B		有	有	有
C	有		有	
D		有		有

(3) 有工具箱A、B、C、D，各个箱内装的工具如下表所示。试问如何携带数量最少工具箱，而所包含的工具种类齐全。

解：设A、B、C、D分别表示带A、B、C、D箱。

则总的条件为：

$(A\vee C)\wedge(A\vee B\vee D)\wedge(B\vee C)\wedge(B\vee D)$ 为真。

改锥　　扳手　　钳子　　锤子

将$(A\vee C)\wedge(A\vee B\vee D)\wedge(B\vee C)\wedge(B\vee D)$写成析取范式，

上式$\Leftrightarrow((A\vee C)\wedge(B\vee C))\wedge((A\vee(B\vee D))\wedge(B\vee D))$

$\Leftrightarrow((A\wedge B)\vee C))\wedge(B\vee D)$

$\Leftrightarrow(A\wedge B\wedge B)\vee(C\wedge B)\vee(A\wedge B\wedge D)\vee(C\wedge D)$

$\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(C\wedge B)\vee(A\wedge B\wedge D)\vee(C\wedge D)$

分别可以取$(A\wedge B)$、$(C\wedge B)$、$(C\wedge D)$为真。

于是可以得到三种携带方法：

带A和B箱，　带B和C箱，带C和D箱。

六. 逻辑推理 熟练掌握三种推理方法。

(1) $(A\vee B)\to(C\wedge D),\ (D\vee E)\to P \Rightarrow A\to P$

1.直接推理

(1)	$(A\vee B)\to(C\wedge D)$	P	
(2)	$\neg(A\vee B)\vee(C\wedge D)$	T (1)	E
(3)	$(\neg A\wedge\neg B)\vee(C\wedge D)$	T (2)	E
(4)	$(\neg A\vee C)\wedge(\neg B\vee C)\wedge(\neg A\vee D)\wedge(\neg B\vee D)$	T (3)	E
(5)	$\neg A\vee D$	T (4)	I
(6)	$A\to D$	T (5)	E
(7)	$(D\vee E)\to P$	P	
(8)	$\neg(D\vee E)\vee P$	T (7)	E
(9)	$(\neg D\wedge\neg E)\vee P$	T (8)	E
(10)	$(\neg D\vee P)\wedge(\neg E\vee P)$	T (9)	E
(11)	$\neg D\vee P$	T (10)	I
(12)	$D\to P$	T (11)	E
(13)	$A\to P$	T (6)(12)	I

2.附加前提

(1)	A	P (附加前提)
(2)	$A \vee B$	T (1) I
(3)	$(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$	P
(4)	$C \wedge D$	T (2)(3) I
(5)	D	T (4) I
(6)	$D \vee E$	T (5) I
(7)	$(D \vee E) \rightarrow P$	P
(8)	P	T (6)(7) I
(9)	$A \rightarrow P$	CP

3.反证法

(1)	$\neg(A\rightarrow P)$	P (假设前提)
(2)	$\neg(\neg A\vee P)$	T (1) E
(3)	$A\wedge\neg P$	T (2) E
(4)	A	T (3) I
(5)	$A\vee B$	T (1) I
(6)	$(A\vee B)\rightarrow(C\wedge D)$	T
(7)	$C\wedge D$	T (2)(3) I
(8)	D	T (4) I
(9)	$D\vee E$	T (5) I
(10)	$(D\vee E)\rightarrow P$	P
(11)	P	T (6)(7) I
(12)	$\neg P$	T (3) I
(13)	$P\wedge\neg P$	T (11) (12) I

(2) 请根据下面事实，找出凶手：

1. 清洁工或者秘书谋害了经理。

2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。

3.如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。

4.如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。

5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。

6.经理有钱且清洁工不富裕。

7.午夜时屋里灯灭了。

令A:清洁工谋害了经理。 B:秘书谋害了经理。

C:谋害发生在午夜前。 D:秘书的证词是正确的.

E:午夜时屋里灯光灭了。H:清洁工富裕.

G:经理有钱.

命题符号为：

$A \vee B, A \rightarrow \neg C, D \rightarrow C, \neg D \rightarrow \neg E, H \rightarrow \neg A, G \wedge \neg H, E \Rightarrow ?$

$A \vee B, A \rightarrow \neg C, B \rightarrow C, D \rightarrow C\ \neg D \rightarrow \neg E, H \rightarrow \neg A, G \wedge \neg H, E \Rightarrow ?$

(1) E P

(2) $\neg D \rightarrow \neg E$ P

(3) $\neg\neg D$ T (1)(2) I

(4) D T (3) E

(5) $D \rightarrow C$ P

(6) C T (4)(5) I

(7) $A \rightarrow \neg C$ P

(8) $\neg A$ T (6)(7) I

(9) $A \vee B$ P

(10) B T(8)(9) I

结果是秘书谋害了经理。

谓词逻辑习题课

1.将下列命题符号化

（1）在湖南高校学习的学生，未必都是湖南籍的学生

$H(x)$：x是在湖南高校学习的学生；$S(x)$：x是湖南籍的学生

$\neg\forall x(H(x)\rightarrow S(x))$

（2）对于每一个实数x，存在一个更大的实数y

$R(x)$：x是实数； $G(x,y)$:x比y大

$\forall x(R(x)\rightarrow\exists y\,(R(y)\wedge G(y,x))$

（3）存在实数x，y和z，使得x与y之和大于x与z之积

$f(x,y)=x+y$; $g(x,y)=x\times y$

$\exists x\exists y\exists z(R(x)\wedge R(y)\wedge R(z)\wedge G(f(x,y), g(x,z)))$

（4）某些汽车比所有的火车都慢，但至少有一列火车比每辆汽车快

$C(x)$：x是汽车；$H(x)$：x是火车；$S(x,y)$: x比y慢

$\exists x(C(x)\wedge\forall y(H(y)\rightarrow S(x,y)))\wedge\exists z(H(z)\wedge\forall y(C(y)\rightarrow S(y,z)))$

（5）对任何整数x和y，$x \le y$且$y \le x$是$x=y$的充要条件

$I(x)$：x是整数；$E(x,y)$：$x=y$；$G(x,y)$：$x>y$

$\forall x \forall y(I(x) \wedge I(y) \rightarrow (\neg G(x,y) \wedge \neg G(y,x) \leftrightarrow E(x,y)))$

（6）若m是奇数，则 $2m$ 不是奇数

$O(x)$：x是奇数；　$f(x,y)= x \times y$　　$O(m) \rightarrow \neg O(f(2,m))$

（7）那位戴眼镜的用功的大学生在看这本大而厚的巨著

$A(x)$:x是戴眼镜的,$B(x)$:x是用功的,$C(x)$:x是大学生,$D(x)$:x是大的,$E(x)$:x是厚的，$F(x)$:x是巨著, $G(x,y)$:x在看y,a:那位，b:这本

$A(a) \wedge B(a) \wedge C(a) \wedge D(b) \wedge E(b) \wedge F(b) \wedge G(a,b)$

（8）每个自然数都有唯一的后继数

$N(x)$：x是自然数；　$L(x,y)$：x是y的后继数

$\forall x(N(x) \rightarrow (\exists y (N(y) \wedge L(y,x) \wedge \forall z (N(z) \wedge L(z,x) \rightarrow E(y,z)))))$

（9）没有一个自然数使数1是它的后继数

$\neg\exists x\,(N(x)\wedge L(1,x))$

（10）每个不等于1的自然数都有唯一的一个数是它的直接先行者

$S(x,y)$： x是y的先行者

$\forall x(N(x)\wedge\neg E(x,1)\rightarrow\exists!y\,(N(y)\wedge S(y,x)\wedge\neg\exists z\,(N(z)\wedge S(y,z)\wedge S(z,x))))$

2.变元的约束

（1）对下列谓词公式中的约束变元换名

$\forall x(P(x)\rightarrow(R(x)\vee Q(x)))\wedge\exists xR(x)\rightarrow\exists zS(x,z)$

$\forall y(P(y)\rightarrow(R(y)\vee Q(y)))\wedge\exists tR(t)\rightarrow\exists uS(x,u)$

（2）对下列谓词公式中的自由变元代入

$(\exists yA(x,y)\rightarrow\forall xB(x,z))\wedge\exists x\forall zC(x,y,z)$

$(\exists yA(u,y)\rightarrow\forall xB(x,v))\wedge\exists x\forall zC(x,w,z)$

3.讨论在给定解释下谓词公式的真值

（1）$\forall x(P\to Q(x))\vee R(a)$

$D=\{-2,3,6\}$, P:2>1, $Q(x)$: $x\leq 3$, $R(x)$: $x>5$, a:5

$\forall x(P\to Q(x))\vee R(a)\Leftrightarrow(P\to\forall xQ(x))\vee R(a)$

$\Leftrightarrow(P\to(Q(-2)\wedge Q(3)\wedge Q(6)))\vee R(5)$

$\Leftrightarrow(T\to(T\wedge T\wedge F))\vee F\Leftrightarrow(T\to F)\vee F\Leftrightarrow F\vee F\Leftrightarrow F$

（2）$\forall x\exists y(P(x)\wedge Q(x,y))$

$D=\{1,2\}$,

P(1)	P(2)	Q(1,1)	Q(1,2)	Q(2,1)	Q(2,2)
F	T	T	T	F	F

真值为F

4.判断下列公式是不是永真式，并加以说明

（1）$(\exists xP(x) \to \forall xQ(x)) \leftrightarrow \forall x(P(x) \to Q(x))$

解：不是永真式，取解释如下

$D=\{1,2\}$

$P(1)$	$P(2)$	$Q(1)$	$Q(2)$
F	T	F	T

在该解释下$\exists xP(x)$为T，$\forall xQ(x)$为F，所以$\exists xP(x) \to \forall xQ(x)$为$F$；而$(P(1) \to Q(1))$为$T$，$(P(2) \to Q(2))$为$T$，所以$\forall x(P(x) \to Q(x))$为$T$；综上该公式不是永真式

（2）$\forall x \forall y(P(x) \to Q(y)) \to (\exists xP(x) \to \forall y\, Q(y))$

解：是永真式。

证明：法1，形式证明

法2，量词作用域的收缩与扩张公式

5.用形式推理证明：

（1） $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$

(1) $\neg\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$	P(假设)
(2) $\exists x\neg(P(x) \vee Q(x))$	T(1)E
(3) $\neg(P(c) \vee Q(c))$	ES(2)
(4) $\neg P(c) \wedge \neg Q(c)$	T(3)E
(5) $\neg P(c)$	T(4)I
(6) $\exists x\neg P(x)$	EG(5)
(7) $\neg\forall x\,P(x)$	T(6)E
(8) $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$	P
(9) $\forall xQ(x)$	T(7)(8)I
(10) $Q(c)$	US(9)
(11) $\neg Q(c)$	T(4)I
(12) $Q(c) \wedge \neg Q(c)$	T(10)(11)I

（2）$\exists xF(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow H(y)),\ \exists xM(x)\rightarrow\exists yG(y)$
$\Rightarrow\exists x(F(x)\wedge M(x))\rightarrow\exists yH(y)$

(1) $\exists x(F(x)\wedge M(x))$	P(附加)
(2) $\exists xF(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow H(y))$	P
(3) $\exists xM(x)\rightarrow\exists yG(y)$	P
(4) $\exists xF(x)\wedge\exists xM(x)$	T(1)I
(5) $\exists xF(x)$	T(4)I
(6) $\forall y(G(y)\rightarrow H(y))$	T(2)(5)I
(7) $\exists xM(x)$	T(4)I
(8) $\exists yG(y)$	T(3)(7)I
(9) $G(c)$	ES(8)
(10) $G(c)\rightarrow H(c)$	US(6)
(11) $H(c)$	T(9)(10)I
(12) $\exists yH(y)$	EG(11)
(13) $\exists x(F(x)\wedge M(x))\rightarrow\exists yH(y)$	CP

（3）任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车；每个人或者喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车。有的人不爱骑自行车，因此有的人不爱步行

设 A(x):x是人，　　　　B(x):x是喜欢步行，

C(x):x喜欢乘汽车，D(x):x喜欢骑自行车

$\forall x(A(x)\rightarrow(B(x)\rightarrow\neg C(x)))$,

$\forall x(A(x)\rightarrow(C(x)\vee D(x)))$, $\exists x(A(x)\wedge\neg D(x))$

$\Rightarrow \exists x(A(x)\wedge\neg B(x))$

(1)	$\exists x(A(x) \land \neg D(x))$	P
(2)	$A(a) \land \neg D(a))$	ES (1)
(3)	$A(a)$	T (2) I
(4)	$\neg D(a))$	T (2) I
(5)	$\forall x(A(x) \to (B(x) \to \neg C(x)))$	P
(6)	$A(a) \to (B(a) \to \neg C(a))$	US (5)
(7)	$B(a) \to \neg C(a))$	T (3)(6) I
(8)	$\forall x(A(x) \to (C(x) \lor D(x)))$	P
(9)	$A(a) \to (C(a) \lor D(a)))$	US(8)
(10)	$C(a) \lor D(a)$	T (3)(9) I
(11)	$C(a)$	T (4)(10) I
(12)	$\neg B(a)$	T (7)(11) I
(13)	$A(a) \land \neg B(a))$	T (3)(12) I
(14)	$\exists x(A(x) \land \neg B(x))$	EG (13)

（4）每个大学生不是文科生就是理工科生，有的大学生是优等生，小张不是理工科生，但他是优等生，因此如果小张是大学生，他就是文科生

设 $A(x)$:x是大学生，　$B(x)$:x是文科生，

$C(x)$:x是理工科生，$D(x)$:x是优等生，

a:小张

$$\forall x(A(x)\to(\neg B(x)\to C(x))),$$

$$\exists x(A(x)\wedge D(x))$$

$$\neg C(a)\wedge D(a) \Rightarrow A(a)\to B(a)$$

$\forall x(A(x)\rightarrow(\neg B(x)\rightarrow C(x))), \exists x(A(x)\wedge D(x))$

$\neg C(a)\wedge D(a) \Rightarrow A(a)\rightarrow B(A)$

(1)	$A(a)$	P(附加前提)
(2)	$\forall x(A(x)\rightarrow(\neg B(x)\rightarrow C(x)))$	P
(3)	$A(a)\rightarrow(\neg B(a)\rightarrow C(a))$	US (2)
(4)	$\neg B(a)\rightarrow C(a))$	T (1)(3)I
(5)	$\neg C(a)\wedge D(a)$	P
(6)	$\neg C(a)$	T (5)I
(7)	$\neg\neg B(a)$	T (4)(6) I
(8)	$B(a)$	T (7) E
(9)	$A(a)\rightarrow B(a)$	CP

集合论习题课

1. 判断下面命题的真值(真的话证明，假的话举反例)

a)如果$A \in B$，$B \subseteq C$，则 $A \in C$ T

b)如果$A \in B$，$B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$ F

举反例$A=\{1\}$ $B=\{\{1\}\}$ $C=\{\{1\},2\}$

c)如果$A \subseteq B$，$B \in C$，则 $A \in C$ F

举反例$A=\{1\}$ $B=\{1,2\}$ $C=\{\{1,2\}\}$

d)如果$A \subseteq B$，$B \in C$，则 $A \subseteq C$ F

举反例$A=\{1\}$ $B=\{1,2\}$ $C=\{\{1,2\}\}$

2.集合计算

a) $\Phi \cap \{\Phi\} = \Phi$

b) $\{\Phi\} \cap \{\Phi\} = \{\Phi\}$

c) $\{\Phi,\{\Phi\}\} - \Phi = \{\Phi,\{\Phi\}\}$

d) $\{\Phi,\{\Phi\}\} - \{\Phi\} = \{\{\Phi\}\}$

e) $\{\Phi,\{\Phi\}\} - \{\{\Phi\}\} = \{\Phi\}$

3.在什么条件下，下面命题为真？

a) $(A-B)\cup(A-C)=A$

$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C)=A\cap(\sim B\cup\sim C)$

$=A\cap\sim(B\cap C)=A-(B\cap C)=A$

所以满足此式的充要条件是：$A\cap B\cap C=\Phi$

b) $(A-B)\cup(A-C)=\Phi$

$(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)=\Phi$

所以满足此式的充要条件是：$A\subseteq B\cap C$

c) $(A-B)\cap(A-C)=\Phi$

$(A-B)\cap(A-C)=(A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)=A\cap(\sim B\cap\sim C)$

$=A\cap\sim(B\cup C)=A-(B\cup C)=\Phi$

所以满足此式的充要条件是: $A\subseteq B\cup C$

d) $(A-B)\oplus(A-C)=\Phi$

因为 当且仅当$A=B$， 才有$A\oplus B=\Phi$

所以满足此式的充要条件是: $A-B=A-C$

4.集合的基数

A,B是有限集合,已知$|A|=3,|\rho(B)|=64,|\rho(A\cup B)|=256$, 则 $|B|=(\ \ )$,

$|A\cap B|=(\ \ ),|A-B|=(\ \ \ ),|A\oplus B|=(\ \ \ )$

解:

由$|\rho(B)|=64=2^6$，得 $|B|=6$

由$|\rho(A\cup B)|=256＝2^8$，得$|A\cup B|=8$

由容斥原理得

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

$$|A\cap B| = |A|+|B|-|A\cup B|=3+6-8=1,$$

所以 $|A\cap B|＝1$

$|A-B|=|A|－|A\cap B|=3-1=2$

$|A\oplus B|=|A\cup B|－|A\cap B|=8-1=7$

5.集合的证明

$a)$证明 $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ *iff* $C\subseteq A$

证明：充分性 已知$C\subseteq A$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

$=A\cap(B\cup C)$ $(\because C\subseteq A \therefore A\cup C=A)$

必要性 已知$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$

$\forall x\in C$， $x\in C \Rightarrow x\in(A\cap B)\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\cap(B\cup C) \Rightarrow x\in A$

所以 $C\subseteq A$

b)证明 $(A-B)-C=(A-C)-B$

$\forall x$:

$x \in (A-B)-C$

$\Leftrightarrow x \in (A-B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in (A-C) \wedge x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in (A-C)-B$

所以$(A-B)-C=(A-C)-B$

c)证明以下各式彼此等价：

$A\cup B=U,\ \sim A\subseteq B,\ \ \sim B\subseteq A$

$A\cup B=U \Leftrightarrow \forall x(x\in A\cup B \leftrightarrow x\in U)$

$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\cup B)\qquad (x\in U\text{为}T)$

$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\vee x\in B)$

$\Leftrightarrow \forall x(x\notin A\rightarrow x\in B)\Leftrightarrow \forall x(x\in\sim A\rightarrow x\in B)\Leftrightarrow \sim A\subseteq B$

同理$A\cup B=U\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow \forall x(x\in A\vee x\in B)$

$\Leftrightarrow \forall x(x\notin B\rightarrow x\in A)\Leftrightarrow \forall x(x\in\sim B\rightarrow x\in A)\Leftrightarrow \sim B\subseteq A$

所以$A\cup B=U\Leftrightarrow \sim A\subseteq B\Leftrightarrow \sim B\subseteq A$.

6.幂集

设A,B是集合，证明以下命题成立

a) $\rho(A\cap B)=\rho(A)\cap\rho(B)$

$\forall S$:

$$
\begin{aligned}
S\in\rho(A\cap B) &\Leftrightarrow S\subseteq A\cap B \\
&\Leftrightarrow S\subseteq A \wedge S\subseteq B \\
&\Leftrightarrow S\in\rho(A) \wedge S\in\rho(B) \\
&\Leftrightarrow S\in\rho(A)\cap\rho(B)
\end{aligned}
$$

b) $\rho(A)\cup\rho(B)\subseteq\rho(A\cup B)$

$\forall S$:

$$
\begin{aligned}
S\in \rho(A)\cup\rho(B) &\Leftrightarrow S\in\rho(A) \vee S\in\rho(B) \\
&\Leftrightarrow S\subseteq A \vee S\subseteq B \\
&\Rightarrow S\subseteq A\cup B \\
&\Leftrightarrow S\in\rho(A\cup B)
\end{aligned}
$$

$c)$ $A\subseteq B$ *iff* $\rho(A)\subseteq\rho(B)$

证明：

必要性：若$A\subseteq B$证明$\rho(A)\subseteq\rho(B)$

$\forall S$： $S\in\rho(A)$ 即 $S\subseteq A$

$\because$ $A\subseteq B$ $\therefore$ $S\subseteq B$ 即 $S\in\rho(B)$

$\therefore$ $\rho(A)\subseteq\rho(B)$

充分性：若$\rho(A)\subseteq\rho(B)$证明$A\subseteq B$

$\forall x$： $x\in A$

必$\exists S$，$S\subseteq A$，使得$x\in S$

$\because$ $\rho(A)\subseteq\rho(B)$ $\therefore$ 由$S\subseteq A$即$S\in\rho(A)$可得到$S\in\rho(B)$

也就是说$S\subseteq B$ $\therefore$ $x\in B$

$\therefore$ $A\subseteq B$

综上所述： $A\subseteq B$ *iff* $\rho(A)\subseteq\rho(B)$

7.笛卡尔积

$A=\{0,1\}$ $B=\{1,2\}$ 求$A^2\times B$

$A^2\times B=\{<0,0>,<0,1>,<1,0>,<1,1>\}\times B$

$=\{<<0,0>,1>,<<0,0>,2>,<<0,1>,1>,<<0,1>,2>,$

$<<1,0>,1>,<<1,0>,2>,<<1,1>,1>,<<1,1>,2>\}$

注意： $A^2\times B=(A\times A)\times B\neq A\times A\times B$

二元关系习题课

一. 判断题

(F) 1. 设A、B、C和D是四个非空集合, 且A×C⊂B×D，则A⊂B且C⊂D。

(F) 2. 设A、B、C和D是四个集合，则A×C=B×D，iff A=B且C=D。

(F) 3. 传递关系的对称闭包仍是传递的。

(F) 4. 非空集合上的关系不是对称的，则必是反对称的。

(T) 5. 非空集合上的自反关系必不是反自反的。

(F) 6. 若R和S是二个有完全相同的二元组的集合，则称它们是相等的二元关系。

(F) 7. 设A是一个非空集合，则A上的等价关系都不是偏序关系。

(T) 8. 有限集上的全序关系必是良序关系。

(F) 9. 有限集上的偏序关系必是全序关系。

(F) 10. <A;R>是偏序集，则A的任何非空子集必有极小元。

(F) 11. <A;R>是偏序集，则A的非空子集B的上确界必是B的最大元。

(F) 12. <A;R>是全序集，则A的任何非空子集必有唯一极小元。

(F) 13. <A;R>是全序集，则A的非空子集B的下确界必是B的最小元。

二、多项选择题

(1,2　) 1. 下列说法中正确的有：

① 任何集合都不是它自身的元素　② 任何集合的幂集都不是空集

③ 若 $A \times B = \Phi$，则 $A = B = \Phi$　④ 任意两集合的迪卡尔积都不是空集

(4,5　) 2. {1,2,3,4,5}上的关系R={<1,1>,<1,3>,<2,3>}是

① 自反的 ② 反自反的 ③ 对称的 ④ 反对称的 ⑤ 传递的

(1,2,3) 3. 设R={<1,2>}是 A＝{1,2,3}上的关系，则

① rst(R)是等价关系 ② $R^{10} = \Phi$　③ r(R)是偏序 ④ tr(R)是良序

(5　) 4. 设R和S分别是A到B和B到C的关系，且 $R \cdot S = \Phi$，那么

① R是空关系　② S是空关系　③ R和S都是空关系

④ R和S中至少有一个是空关系　⑤ 以上答案都不对

(2) 5. 若R和S是集合A上的等价关系，则下列关系中一定是等价关系的有

① $R \cup S$ ② $R \cap S$ ③ $R - S$ ④ $R \oplus S$

(1,2,4) 6. 若R是集合A上的等价关系，则

① $R^2 = R$ ② $t(R) = R$ ③ $I_A \subset R$ ④ $R^{-1} = R$

(1,2,3,4,5) 7. 空集上的空关系是___关系。

① 线序 ② 等价 ③ 偏序 ④ 拟序 ⑤ 良序

(2,4) 8. {1,2,3,4,5}上的全序关系一定是___关系。

①等价 ②偏序 ③拟序 ④良序

(1,4,5)9. {1,2,3,4,5}上的良序关系一定是

① 自反的 ② 反自反的 ③ 对称的 ④ 反对称的 ⑤ 传递的

(1,2,3,4)10. 设R和S都是A到B的关系，下列关系式中正确的有：

① $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$ ② $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

③ $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$ ④ $(R \oplus S)^{-1} = R^{-1} \oplus S^{-1}$

三、计算与作图

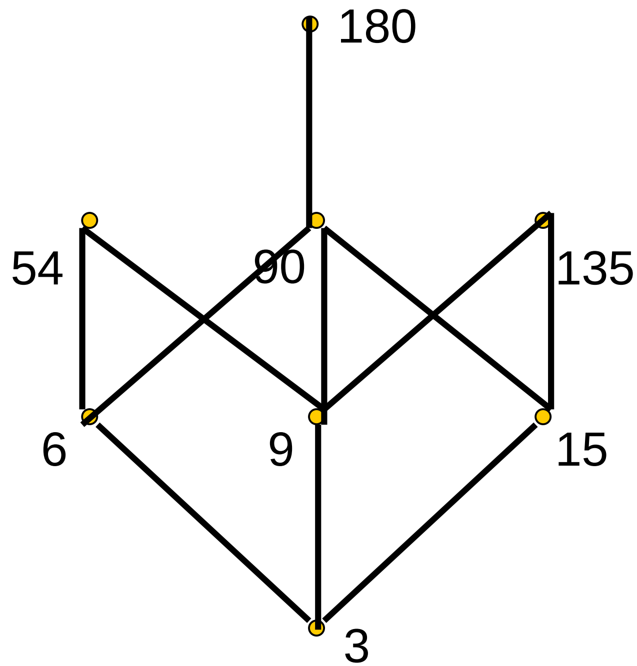
1.若集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$上的等价关系 $R=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<1,2>,<2,1>,<3,4>,<4,3>\}$，求商集 A/R

解： $A/R=\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$

2. R 为集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$上的等价关系，已知商集 $A/R=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$，求R

解： $R=I_A \cup \{<1,2>,<2,1>,<5,4>,<4,5>\}$

3.设A={3,6,9,15,54,90,135,180}，|为自然数的整除关系。画出<A;|>的Hasse图，并求{6,15,90}的上、下确界。



{6,15,90}的上确界：90

下确界：3

四、证明题

1. 设R是集合A上的关系。证明：R是偏序关系，iff $R^{-1} \cap R = I_A$ 且 $R = rt(R)$。

2. 设R是集合A上的关系。证明：R是拟序关系，iff $R^{-1} \cap R = \Phi$ 且 $R = t(R)$。

函数习题课

一、多项选择

(1,2,3)1. 函数f： R × R→R × R， f(<x,y>)=<x+y,x-y>是

① 入射　② 满射　③ 双射　④ 以上答案都不对

(2)2. 函数f： R × R→R， f(<x,y>)=(x+y)/2是

① 入射　② 满射　③ 双射　④ 以上答案都不对

(1)3. 设Σ={a,b}为字母表， 则f：Σ*→Σ*， f(x)=axb是

① 入射　② 满射　③ 双射　④ 以上答案都不对

(1)4. 函数f：[0,1]→ [0,1] ， f(x)=x/2+1/4是

① 入射　② 满射　③ 双射　④ 以上答案都不对

(1)5. 从{0,1}^{2}到{a,b,c,d}的二元关系R：

{<<0,0>,a>,<<0,1>,b>,<<1,0>,c>,<<1,1>,b>}是

① 函数　② 入射　③ 满射　④ 双射　⑤ 以上答案都不对

(4,5)6. 若f、g是A上的函数且g·f是双射，则

① f和g都是双射　② f为满射　③ g为入射　④ f有左逆　⑤ g有右逆

二、填空

1. 若A={a,b}，B={1,2}，则B^A= {{<a,1>,<b,1>}, {<a,1>,<b,2>}, {<a,2>,<b,1>}, {<a,2>,<b,2>}} 。
2. 用ε表示字母表Σ={a,b}上的空串，定义f：$\Sigma^*\rightarrow\Sigma^*$如下：
   x∈Σ^*　　f(x)=axb　则f({ε,a,b})= {ab,aab,abb} 。
3. 用ε表示字母表Σ={a,b}上的空串，定义f：$\Sigma^*\rightarrow\Sigma^*$如下：
   x∈Σ^*　　f(x)=axb　则f({ε,a,b})={aab,abb,ab}。

设A＝{1,2,4}是全集U＝{1,2,3,4,5}的子集，则A的特征函数ψ_A＝ {<1,1>,<2,1>,<3,0>,<4,1>,<5,0>} 。

三、计算

1. 设 A ＝{a,b}, B ＝{1,2,3,4}，

$f=\{<a,1>,<b,2>\}$是 A 到 B 的函数，试找出f的所有左逆和右逆(如果存在的话)。

解：f是单射，有4个左逆，无右逆

$g_1=\{<1,a>,<2,b>,<3,a>,<4,a>\}$

$g_2=\{<1,a>,<2,b>,<3,a>,<4,b>\}$

$g_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,b>,<4,a>\}$

$g_4=\{<1,a>,<2,b>,<3,b>,<4,b>\}$

2. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{a,b\}$，

$f=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>,<4,a>,<5,b>\}$是 A 到 B 的函数，试找出f的所有左逆和右逆(如果存在的话)。

解：f是满射，有6个右逆，无左逆

$h_1=\{<a,1>,<b,3>\}$
$h_2=\{<a,2>,<b,3>\}$
$h_3=\{<a,4>,<b,3>\}$
$h_4=\{<a,1>,<b,5>\}$
$h_5=\{<a,2>,<b,5>\}$
$h_6=\{<a,4>,<b,5>\}$

四、证明

若f是A到B的函数，其中A和B都是非空有限集，且$|A|=|B|$，那么：f是一个入射 *iff* f是一个满射

证明：必要性

若f是一个入射，则$|A|=|f(A)|= |B|$,

又$f(A)\subseteq B$,且B是有限集，所以$f(A)= B$,即f是满射

充分性

若f是一个满射，则$f(A)= B$,于是$|A|=|B|=| f(A)|$,

因为A是有限集，所以f是入射