第二章 命题逻辑等值演算
2.1   等值式

一、等值式的定义

定义：设A、B是两个命题公式，若A、B构成的等价式$A\leftrightarrow B$为永真式，则称A与B是等值的，记作$A\Leftrightarrow B$。

说明：符号$\Leftrightarrow$不是联结词，不要与$\leftrightarrow$、=混为一谈，它仅仅说明公式A与B等值。

判断等值的方法之一：真值表法

例： 判断下面两个公式是否等值。

（1）$\neg(p \vee q)$ 与 $\neg p \vee \neg q$

（2）$\neg(p \vee q)$ 与 $\neg p \wedge \neg q$

问题转化为利用真值表判断如下两个公式

（1）$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

（2）$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

是否为永真式

判断等值的方法之二：等值演算法

利用已知的等值式和等值演算规则

❖24个重要的等值式（其中A、B、C代表任意的公式）

（1） $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ 双重否定律

（2） $A \Leftrightarrow A \vee A$，$A \Leftrightarrow A \wedge A$ 幂等律（析取、合取）

（3） $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$，$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ 交换律（析取、合取）

（4） $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ 结合律（析取、合取）

（5） $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ 分配律（析取对合取）

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ 分配律（合取对析取）

（6） $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ 德摩根律（否定对析取）

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ 德摩根律（否定对合取）

(7) $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$ 吸收律

(8) $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$，$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ 零律（析取、合取）

(9) $A \vee 0 \Leftrightarrow A$，$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$ 同一律（析取、合取）

(10) $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$ 排中律（析取）

(11) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$ 矛盾律（合取）

(12) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ 蕴涵等值式

(13) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 等价等值式

(14) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$ 假言易位

(15) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$ 等价否定等值式

(16) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$ 归谬论

对等值式的几点说明：

（1）由于A、B、C可以代表任意的公式，每个等值式都是**等值式模式**，每个等值式模式都给出了无穷多个同类型的具体的等值式。

如$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

$(\neg p \vee q) \wedge p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q$

都为蕴涵等值式$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$的具体形式，每个具体的等值式称为对应等值式模式的**代入实例**。

（2）使用这些等值式，可以推演出更多的等值式，我们称由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程为**等值演算**。

在等值演算中使用的主要方法就是：**置换规则**

置换规则：

设 $\Phi(A)$ 是含公式A的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式B置换了 $\Phi(A)$ 中所有的A后得到的命题公式。

若 $A \Leftrightarrow B$，则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$。

例如：$(p \to q) \to r$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \to r$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ （分配律）

$\Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge \neg q) \vee ((p \vee r) \wedge r)$ （分配律）

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee (r \wedge r)$ （分配律）

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee r$ （幂等律）

等值演算的用途一

- **验证等值式A $\Leftrightarrow$ B**

a、从A（或B）开始，等值推演出B（或A）

b、分别从A、B开始，等值推演出共同的等值式

例：验证下列等值式

（1） $(p \vee q) \to r \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$

（2） $p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

证明：

（1） $(p \to r) \wedge (q \to r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$ （分配律）

$\Leftrightarrow \neg (p \vee q) \vee r$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow (p \vee q) \to r$ （蕴涵等值式）

（2） $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q)$ （分配律）

$\Leftrightarrow p \wedge 1$ （排中律）

$\Leftrightarrow p$ （同一律）

等值演算的用途二

- **判断公式A的类型**

a、从A出发，等值推演出1或0

b、从A出发，等值推演出类型已知、或易判断类型的公式B

例：判断下列公式的类型。

（1） $\neg(p\rightarrow(p\vee q))\wedge r$

（2） $(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q$

（3） $p\wedge(((p\vee q)\wedge\neg p\rightarrow q)$

解：

（1）$\neg(p\rightarrow(p\vee q))\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg(\underline{\neg p\vee p}\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg(1\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow 0\wedge r$

$\Leftrightarrow 0$

所以（1）是永假式。

(2) $(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge p\rightarrow q$

$\Leftrightarrow ((\underline{\neg p\wedge p})\vee(p\wedge q))\rightarrow q$

$\Leftrightarrow (0\vee(p\wedge q))\rightarrow q$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\rightarrow q$

$\Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee q$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee q$

$\Leftrightarrow \neg p\vee\underline{\neg q\vee q}$

$\Leftrightarrow \neg p\vee 1$

$\Leftrightarrow 1$

所以（2）是永真式。

（3）$p\wedge(((p\vee q)\wedge\neg p)\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow p\wedge(((\underline{p\wedge\neg p})\vee(q\wedge\neg p))\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow p\wedge((0\vee(q\wedge\neg p))\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow p\wedge(\neg(q\wedge\neg p)\vee q)$

$\Leftrightarrow p\wedge(\neg q\vee p\vee q)$

$\Leftrightarrow p\wedge 1$

$\Leftrightarrow p$

因此（3）是非永真式的可满足式，

00，01是成假赋值，10，11是成真赋值。

等值演算的用途（补充）

- **用于化简公式，简化复杂的语言表述，使之条理清楚**

例：将下列语句简化

南京热，重庆热，南京和重庆都热，没有不热的南京，也没有不热的重庆。

解：设p: 南京热, q: 重庆热

则该语句符号化为$p \wedge q \wedge (p \wedge q) \wedge \neg(\neg p) \wedge \neg(\neg q)$

而$p \wedge q \wedge (p \wedge q) \wedge \neg(\neg p) \wedge \neg(\neg q) \Leftrightarrow p \wedge q$

所以该语句要表达的意思就是：南京热，重庆热。

等值演算的用途三

- 解决一些实际问题

例：用等值演算法解决如下问题

在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人进行了判断：

甲说王教授不是苏州人，是上海人。

乙说王教授是苏州人，不是上海人。

丙说王教授既不是上海人，也不是杭州人。

听完这3人的判断后，王教授笑着说，他们3人中有一人说的全对，有一人说对了一半，有一人说的全错。分析王教授到底是哪里的人？

解： 设p：王教授是苏州人 q：王教授是上海人

r：王教授是杭州人

甲的判断为$A_1 = \neg p \wedge q$

乙的判断为$A_2 = p \wedge \neg q$

丙的判断为$A_3 = \neg q \wedge \neg r$

甲的判断为$A_1=\neg p\wedge q$

乙的判断为$A_2=p\wedge\neg q$

丙的判断为$A_3=\neg q\wedge\neg r$

那么

甲的判断全对　$B_1=A_1=\neg p\wedge q$

甲的判断对了一半　$B_2=(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$

甲的判断全错　$B_3=p\wedge\neg q$

乙的判断全对　$C_1=A_2=p\wedge\neg q$

乙的判断对了一半　$C_2=(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

乙的判断全错　$C_3=\neg p\wedge q$

丙的判断全对　$D_1=A_3=\neg q\wedge\neg r$

丙的判断对了一半　$D_2=(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)$

丙的判断全错　$D_3=q\wedge r$

那么

甲的判断全对 $B_1=A_1=\neg p\wedge q$

甲的判断对了一半 $B_2=(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$

甲的判断全错 $B_3=p\wedge\neg q$

乙的判断全对 $C_1=A_2=p\wedge\neg q$

乙的判断对了一半 $C_2=(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

乙的判断全错 $C_3=\neg p\wedge q$

丙的判断全对 $D_1=A_3=\neg q\wedge\neg r$

丙的判断对了一半 $D_2=(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)$

丙的判断全错 $D_3=q\wedge r$

由王教授所说

$$
\begin{aligned}
E= & (B_1\wedge C_2\wedge D_3)\vee(B_1\wedge C_3\wedge D_2)\vee \\
& (B_2\wedge C_1\wedge D_3)\vee(B_2\wedge C_3\wedge D_1)\vee \\
& (B_3\wedge C_1\wedge D_2)\vee(B_3\wedge C_2\wedge D_1)
\end{aligned}
$$

$B_1 \wedge C_2 \wedge D_3$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \wedge (q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge$

$(((p \wedge q) \wedge (q \wedge r)) \vee$

$((\neg p \wedge \neg q) \wedge (q \wedge r)))$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge$

$((p \wedge q \wedge r) \vee$

$(\neg p \wedge \underline{\neg q \wedge q} \wedge r))$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow 0$

$B_1 \wedge C_2 \wedge D_3$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \wedge (q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (((\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge q)) \vee$

$((\neg p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)))$

$\wedge (q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (0 \vee 0) \wedge (q \wedge r)$

$\Leftrightarrow 0$

可得

$B_1 \wedge C_2 \wedge D_3 \Leftrightarrow 0$

$B_1 \wedge C_3 \wedge D_2 \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$

$B_2 \wedge C_1 \wedge D_3 \Leftrightarrow 0$

$B_2 \wedge C_3 \wedge D_1 \Leftrightarrow 0$

$B_3 \wedge C_1 \wedge D_2 \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r \Leftrightarrow 0$

$B_3 \wedge C_2 \wedge D_1 \Leftrightarrow 0$

于是 $E \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$

即王教授是上海人，

因此甲的判断全对，丙的判断对了一半，乙的判断全错。

那么

甲的判断全对 $B_1=A_1=\neg p\wedge q$

甲的判断对了一半 $B_2=(\neg p\wedge\neg q)\vee\cancel{(p\wedge q)}$

甲的判断全错 $B_3=p\wedge\neg q$

乙的判断全对 $C_1=A_2=p\wedge\neg q$

乙的判断对了一半 $C_2=\cancel{(p\wedge q)}\vee(\neg p\wedge\neg q)$

乙的判断全错 $C_3=\neg p\wedge q$

丙的判断全对 $D_1=A_3=\neg q\wedge\neg r$

丙的判断对了一半 $D_2=(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)$

丙的判断全错 $\cancel{D_3=q\wedge r}$

由王教授所说

$$E=\cancel{(B_1\wedge C_2\wedge D_3)}\vee(B_1\wedge C_3\wedge D_2)\vee$$
$$\cancel{(B_2\wedge C_1\wedge D_3)}\vee(B_2\wedge C_3\wedge D_1)\vee$$
$$(B_3\wedge C_1\wedge D_2)\vee(B_3\wedge C_2\wedge D_1)$$

练习　有人问甲、乙、丙、丁四人谁的成绩最好，甲说“不是我”，乙说“是丁”，丙说“是乙”，丁说“不是我”。已知四人的回答只有一人符合实际，问谁的成绩最好？（请使用命题逻辑相关方法解决该问题）

解： 设p：甲成绩最好，q：乙成绩最好，

r：丙成绩最好，s：丁成绩最好

则甲所说符合实际：$\neg p \wedge \neg s \wedge \neg q \wedge s \Leftrightarrow 0$

乙所说符合实际：$p \wedge s \wedge \neg q \wedge s \Leftrightarrow p \wedge s \wedge \neg q$

丙所说符合实际：$p \wedge \neg s \wedge q \wedge s \Leftrightarrow 0$

丁所说符合实际：$p \wedge \neg s \wedge \neg q \wedge \neg s \Leftrightarrow p \wedge \neg s \wedge \neg q$

易见只有丁所说符合实际，即甲最好。

课后习题第29题 答案

解： 设p：王小红为班长；q：李强为生活委员；

r：丁金为班长；　　s：王小红为生活委员；

t：李强为班长；　　u：王小红为学习委员；

则甲猜对一半应为$A=(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

乙猜对一半应为$B=(r\wedge\neg s)\vee(\neg r\wedge s)$

丙猜对一半应为$C=(t\wedge\neg u)\vee(\neg t\wedge u)$

甲、乙、丙各猜对一半应为$E= A\wedge B\wedge C$

$$
\begin{aligned}
E \Leftrightarrow\ & (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s \wedge t \wedge \neg u) \\
& \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg t \wedge u) \\
& \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s \wedge t \wedge \neg u) \\
& \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg t \wedge u) \\
& \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s \wedge t \wedge \neg u) \\
& \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg t \wedge u) \\
& \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \wedge t \wedge \neg u) \\
& \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg t \wedge u)
\end{aligned}
$$

$E \Leftrightarrow \cancel{(p\wedge\neg q\wedge r\wedge\neg s\wedge t\wedge\neg u)}$

$\vee \cancel{(p\wedge\neg q\wedge r\wedge\neg s\wedge\neg t\wedge u)}$

$\vee \cancel{(p\wedge\neg q\wedge\neg r\wedge s\wedge t\wedge\neg u)}$

$\vee \cancel{(p\wedge\neg q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg t\wedge u)}$

$\vee \cancel{(\neg p\wedge q\wedge r\wedge\neg s\wedge t\wedge\neg u)}$

$\vee (\neg p\wedge q\wedge r\wedge\neg s\wedge\neg t\wedge u)$

$\vee \cancel{(\neg p\wedge q\wedge\neg r\wedge s\wedge t\wedge\neg u)}$

$\vee \cancel{(\neg p\wedge q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg t\wedge u)}$

设p：王小红为班长；q：李强为生活委员；

r：丁金为班长；　　s：王小红为生活委员；

t：李强为班长；　　u：王小红为学习委员；

所以prt、psu、qs、qt不能同时为真

所以$E \Leftrightarrow \neg p\wedge q\wedge r\wedge\neg s\wedge\neg t\wedge u$

所以丁金为班长，李强为生活委员，王小红为学习委员.

2.2 范 式

命题公式的标准型：（主）析取范式与（主）合取范式

- 以下讨论标准型相关的概念：

  文字➔简单析取式、简单合取式

  ➔析取范式、合取范式（+极小项、极大项）

  ➔主析取范式、主合取范式

定义2.1（文字）

命题变项及其否定统称为**文字**。

定义2.2（简单析取式、简单合取式）

仅由有限个文字构成的析取式（或单个文字）称作**简单析取式**。

仅由有限个文字构成的合取式（或单个文字）称作**简单合取式**。

注意： 单个文字既是简单析取式，又是简单合取式

例： p，q，$\neg p$，$\neg q$，$p \lor \neg q$，$p \lor \neg q \lor r$为简单析取式

p，q，$\neg p$，$\neg q$，$p \land \neg q$，$p \land \neg q \land r$为简单合取式

析取范式、合取范式

定义2.3

（1）由有限个简单合取式的析取构成的析取式称为析取范式。

（2）由有限个简单析取式的合取构成的合取式称为合取范式。

（3）析取范式和合取范式统称为范式。

由定义可知：

- 若A_1，A_2，...，A_n为简单合取式，则$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$为析取范式

  例如：$p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$为析取范式

- 若A_1，A_2，...，A_n为简单析取式，则$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$为合取范式

  例如：$p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$为合取范式

析取范式、合取范式

定义2.3

（1）由有限个简单合取式的析取构成的析取式称为析取范式。

（2）由有限个简单析取式的合取构成的合取式称为合取范式。

（3）析取范式和合取范式统称为范式。

问1： $p\vee\neg q\vee r$是什么范式？

问2： $p\wedge\neg q\wedge r$是什么范式？

注意：简单合取式和简单析取式既是析取范式，也是合取范式。

设A1，A2，...，An为简单合取式，则A=A1∨A2∨...∨An为析取范式。
设A1，A2，...，An为简单析取式，则A=A1∧A2∧...∧An为合取范式。

析取范式和合取范式的性质：（定理2.2）

（1）一个析取范式是矛盾式

当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式。

（2）一个合取范式是永真式

当且仅当它的每个简单析取式都是永真式。

定理2.3（范式存在定理）

任意一个命题公式均存在一个与之等值的析取范式和合取范式。

范式的求解步骤：

第一步：　消去公式中出现的→ ，↔。

$A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$

$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$

$\Leftrightarrow (\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$

第二步：用双重否定律$\neg\neg A \Leftrightarrow A$消去双重否定联结词，用德莫根律将$\neg$内移，一直移到命题变项之前

$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$

$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

第三步：用分配律、结合律化去二重以上的刮号，成为析取范式或合取范式

利用∧对∨的分配律求析取范式；

利用∨对∧的分配律求合取范式；

例：求（p→q）↔r的析取范式和合取范式。

解：

（1）合取范式

$(p\to q)\leftrightarrow r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow r$ （消去→）

$\Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\to r)\wedge(r\to(\neg p\vee q))$（消去↔）

$\Leftrightarrow (\neg(\neg p\vee q)\vee r)\wedge(\neg r\vee(\neg p\vee q))$

（消去→）

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$

（德莫根律将¬内移）

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$

（∨对∧的分配律）

（2）析取范式

$(p \to q) \leftrightarrow r$

$\Leftrightarrow ((p \land \neg q) \lor r) \land (\neg p \lor q \lor \neg r)$

（∧对∨的分配律）

$\Leftrightarrow (((p \land \neg q) \lor r) \land \neg p) \lor$

$(((p \land \neg q) \lor r) \land q) \lor$

$(((p \land \neg q) \lor r) \land \neg r)$ （∧对∨的分配律）

$\Leftrightarrow (p \land \neg q \land \neg p) \lor (r \land \neg p) \lor$

$(p \land \neg q \land q) \lor (r \land q) \lor$

$(p \land \neg q \land \neg r) \lor (r \land \neg r)$ （析取范式）

$\Leftrightarrow (p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land r) \lor (q \land r)$

（析取范式）

- 命题公式的析取范式和合取范式不是唯一的。

练习

求下列公式的析取范式和合取范式。

（1） $(p \to q) \to r$

（2） $(p \to q) \land (q \to r)$

解：

（1） $(p \to q) \to r \Leftrightarrow (p \land \neg q) \lor r$（析取范式）

$(p \to q) \to r \Leftrightarrow (p \lor r) \land (\neg q \lor r)$ （合取范式）

（2） $(p \to q) \land (q \to r) \Leftrightarrow (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r)$

（合取范式）

$(p \to q) \land (q \to r) \Leftrightarrow (\neg p \land \neg q) \lor (\neg p \land r) \lor (q \land r)$

（析取范式）

教材内容组织结构：

文字➔简单析取式、简单合取式➔析取范式、合取范式 ＋ 极小项、极大项➔主析取范式、主合取范式

课堂教学内容组织结构：

文字➔简单析取式、简单合取式➔析取范式、合取范式

析取范式+极小项➔主析取范式

合取范式+极大项➔主合取范式

主析取范式➔主合取范式

或

主合取范式➔主析取范式

熟练掌握
主范式间的直接转换

教材内容组织结构：

文字➔简单析取式、简单合取式➔析取范式、合取范式 + 极小项、极大项➔主析取范式、主合取范式

课堂教学内容组织结构：

文字➔简单析取式、简单合取式➔析取范式、合取范式

析取范式+极小项➔主析取范式

合取范式+极大项➔主合取范式

主析取范式➔主合取范式

或

主合取范式➔主析取范式

定义（极小项）： 在共含有n个命题变项p_1，p_2，…，p_n的**简单合取式**中，每个命题变项p_i或其否定式$\neg p_i$，均出现且两者仅出现一个，并且按命题变项的下标排列（或字母按字典序列），这样的简单合取式称为**极小项**。

例如： 对于含三个命题变项p、q、r的公式

$p \wedge \neg q \wedge r$，$\neg p \wedge q \wedge \neg r$，$p \wedge \neg q$，$p \wedge \neg p \wedge \neg r$

$p \wedge \neg q \wedge r$，$\neg p \wedge q \wedge \neg r$是极小项

$p \wedge \neg q$不是极小项，其中没出现r

$p \wedge \neg p \wedge \neg r$不是极小项，p，$\neg p$同时出现

关于极小项的两点说明

(1) 极小项和其成真赋值一一对应

每一个极小项只有一个赋值使其为真，其余2^n-1个赋值使其为假。

例如对于含有三个不同命题变项p，q，r的极小项$\neg p \wedge q \wedge \neg r$。

赋值010使其为真，其余$2^3-1=7$个赋值使其为假。这样极小项与成真赋值建立了一一对应关系。

关于极小项的两点说明

(2) 极小项的简记法

每一个极小项对应着一个二进制数（成真赋值），也对应一个十进制数（成真赋值的十进制表示）。

如果极小项对应的成真赋值为$a_1a_2a_3$，把其看作二进制数，化为十进制数为$0 \le k \le 2^n-1$，则该极小项记作m_k。

n个命题变项的共产生2^n个极小项，分别记为m_0，m_1，m_2，…，m_{2^n-1}。

例如上例中的极小项$\neg p \wedge q \wedge \neg r$应记作$m_2$。

例： 3个命题变项p，q，r可形成的极小项。

极小项	成真赋值	对应的十进制数	标识
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	000	0	m_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	001	1	m_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	010	2	m_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	011	3	m_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	100	4	m_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	101	5	m_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	110	6	m_6
$p \wedge q \wedge r$	111	7	m_7

定义（主析取范式） 如果析取范式中所有的简单合取式都是极小项，则称该析取范式为**主析取范式**。

例如：对于含三个命题变项p、q、r的公式

（1） $p \vee (\neg p \wedge q)$

（2） $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

（3） $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

显然公式（1）和（2）不是主析取范式，而公式（3）是主析取范式。

定理（主析取范式唯一存在性）

任何一个命题公式均存在唯一与之等值的主析取范式。

求给定命题公式A的主析取范式的步骤

（1）将公式A化为析取范式A’

（2）若A’的某简单合取式B不是极小项，即B中缺命题变项p_i，也不含它的否定，

则对B做如下等值变换：

$$B \Leftrightarrow B \wedge (p_i \vee \neg p_i) \Leftrightarrow (B \wedge p_i) \vee (B \wedge \neg p_i)$$

（3）用幂等律将重复的极小项消去，即

$$m_i \vee m_i \Leftrightarrow m_i,$$

然后将各极小项按顺序排列，从而得到主析取范式

例：求（p→q）↔r的主析取范式。

解：

$(p \to q) \leftrightarrow r$（求析取范式）

$\Leftrightarrow (p \land \lnot q \land \lnot r) \lor (\lnot p \land r) \lor (q \land r)$

$\Leftrightarrow m_4 \lor (\lnot p \land r) \lor (q \land r)$

$\lnot p \land r$

$\Leftrightarrow \underline{(\lnot p \land r)} \land (q \lor \lnot q)$

$\Leftrightarrow (\lnot p \land q \land r) \lor (\lnot p \land \lnot q \land r)$

$\Leftrightarrow m_1 \lor m_3$

$q \land r$

$\Leftrightarrow (p \lor \lnot p) \land \underline{(q \land r)}$

$\Leftrightarrow (p \land q \land r) \lor (\lnot p \land q \land r)$

$\Leftrightarrow m_3 \lor m_7$

所以 $(p \to q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow m_1 \lor m_3 \lor m_4 \lor m_7$

练习

求下列公式的主析取范式。

（1）（$p\to q$）$\to r$

（2）（$p\to q$）$\wedge$（$q\to r$）

解：

（1）（$p\to q$）$\to r \Leftrightarrow$（$p\wedge\neg q$）$\vee r$（析取范式）

（2）（$p\to q$）$\wedge$（$q\to r$）$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)$

（析取范式）

解：

（1）（$p\to q$）$\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

（2）（$p\to q$）$\wedge$（$q\to r$）$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_7$

主析取范式的用途：

1、公式的成真与成假赋值

若公式A中含有n个命题变项，A的主析取范式含s（$0\leqslant s\leqslant 2^n$）个极小项，则A有s个成真赋值，它们是所含极小项的成真赋值，其余2^n-s个赋值是成假赋值。

例： $(p\to q)\leftrightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_7$

则$(p\to q)\leftrightarrow r$的

成真赋值为001，011，100，111

成假赋值为000，010，101，110

问$\neg((p\to q)\leftrightarrow r)$的主析取范式是什么？

事实上$\neg((p\to q)\leftrightarrow r) \Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_5\vee m_6$

2、判断公式的类型

设公式A中含n个命题变项，则

（1）A为重言式

当且仅当A的主析取范式含全部2^n个极小项

（2）A为矛盾式

当且仅当A的主析取范式不含任何极小项，

此时，记A的主析取范式为0

（3）A为可满足式

当且仅当A的主析取范式中至少含一个极小项

3、判断两个公式是否等值

两命题公式A和B等值，当且仅当A和B具有相同的主析取范式。

4、分析和解决实际问题

例 从ABC三人中挑选出1-2人出国进修，选派时满足下列要求：

（1）若A去，则C同去。

（2）若B去，则C不去。

（3）若C不去，则A或B可以去。

问如何选派他们？

解：设p：派A去； q：派B去； r：派C去

则由题意可得：

$$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge(\neg r\rightarrow(p\vee q))$$

求公式主析取范式：

$$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge(\neg r\rightarrow(p\vee q))$$

$$\Leftrightarrow m_1\vee m_2\vee m_5$$

由于

$m_1 \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge r$；

$m_2 \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$；

$m_5 \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r$

所以选派方案有3种：

（a）C去，A，B都不去。

（b）B去，A，C都不去。

（c）A，C同去，B不去。

教材内容组织结构：

文字→简单析取式、简单合取式→析取范式、合取范式 ＋ 极小项、极大项→主析取范式、主合取范式

课堂教学内容组织结构：

文字→简单析取式、简单合取式→析取范式、合取范式

析取范式+极小项→主析取范式

合取范式+极大项→主合取范式

主析取范式→主合取范式

或

主合取范式→主析取范式

极大项

定义： 在共含有n个命题变项p_1，p_2，…，p_n的简单析取式中，每个命题变项p_i或其否定式$\neg p_i$，均出现且两者仅出现一个，并且按命题变项的下标排列（或字母按字典序列），这样的简单析取式称为极大项。

例如： 对于含三个命题变项p、q、r的公式

$p\vee\neg q\vee r, \neg p\vee q\vee\neg r, p\vee\neg q, p\vee\neg p\vee\neg r$

$p\vee\neg q\vee r$，$\neg p\vee q\vee\neg r$是极大项

$p\vee\neg q$不是极大项，其中没出现r

$p\vee\neg p\vee\neg r$不是极大项，p，$\neg p$同时出现

对极大项的说明

（1）极大项和其成假赋值一一对应：每一个极大项只有一个赋值使其为假，其余2^n-1个赋值使其为真。

例如：对于含有三个不同命题变项p，q，r的极大项$\neg p \vee q \vee \neg r$，赋值101使其为假，其余$2^3-1=7$个赋值使其为真。这样极大项与成假赋值建立了一一对应关系。

（2）极大项的记法：每一个极大项对应着一个二进制数（成假赋值），也对应一个十进制数（成假赋值的十进制表示）。如极大项对应的成假赋值$a_1a_2a_3$，把其看作二进制数，化为十进制数为$0 \le k \le 2^n-1$，则该极大项记作M_k。n个命题变项的共产生2^n个极大项，分别记为M_0，M_1，M_2，…，M_{2^n-1}。

如极大项$\neg p \vee q \vee \neg r$记作$M_5$

例： 3个命题变项p，q，r可形成的极小项和极大项。

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	000	m_0	$p\vee q\vee r$	000	M_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	001	m_1	$p\vee q\vee\neg r$	001	M_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	010	m_2	$p\vee\neg q\vee r$	010	M_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	011	m_3	$p\vee\neg q\wedge\neg r$	011	M_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	100	m_4	$\neg p\vee q\vee r$	100	M_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	101	m_5	$\neg p\vee q\vee\neg r$	101	M_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	110	m_6	$\neg p\vee\neg q\vee r$	110	M_6
$p\wedge q\wedge r$	111	m_7	$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	111	M_7

不难发现$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$，$m_i \Leftrightarrow \neg M_i$

主合取范式

定义 如果合取范式中所有的简单析取式都是极大项，则称该合取范式为主合取范式。

例如： 对于含三个命题变项p、q、r的公式

(1) $p\wedge(\neg p\vee q)$

(2) $(p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)$

(3) $(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

显然只有（3）是主合取范式

（1）和（2）是合取范式，但不是主合取范式

定理（主合取范式唯一存在性）

任何一个命题公式均存在一个与之等值的主合取范式，而且是唯一的。

求给定命题公式A的主合取范式的步骤：

（1）将公式A化为合取范式A'

（2）若A'的某简单析取式B不是极大项，即B中缺命题变项p_i，也不含它的否定，则对B做如下等值变换：

$$B \Leftrightarrow B \vee (p_i \wedge \neg p_i) \Leftrightarrow (B \vee p_i) \wedge (B \vee \neg p_i)$$

（3）用幂等律将重复的极大项消去，即$M_i \wedge M_i \Leftrightarrow M_i$，然后将各极大项按顺序排列。

例：求（p→q）↔r的主合取范式。

解：（p→q）↔r（求合取范式）

<=>（p∨r）∧（¬q∨r）∧（¬p∨q∨¬r）

<=>（p∨r）∧（¬q∨r）∧ M_5

（p∨r）

<=>（p∨r）∨（q∧¬q）

<=>（p∨q∨r）∧（p∨¬q∨r）

<=> $M_0 \wedge M_2$

（¬q∨r）

<=>（p∧¬p）∨（¬q∨r）

<=>（p∨¬q∨r）∧（¬p∨¬q∨r）

<=> $M_2 \wedge M_6$

所以（p→q）↔r<=> $M_0 \wedge M_2 \wedge M_5 \wedge M_6$

练习

求下列公式的主合取范式。

（1）$(p\rightarrow q)\rightarrow r$

（2）$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)$

解:

（1）$(p\rightarrow q)\rightarrow r \Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)$

（2）$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)$

$(p\rightarrow q)\rightarrow r \Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_6$

$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r) \Leftrightarrow M_2\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$

$(p\rightarrow q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r) \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_7$

主析取范式和主合取范式的关系

定理： 设m_i和M_i是由n个命题变项p_1，p_2，…，p_n形成的极小项和极大项，那么$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$，$m_i \Leftrightarrow \neg M_i$

由公式的主析取范式求主合取范式：

设公式A含n个命题变项，A的主析取范式含s个极小项，

设$A \Leftrightarrow m_{i1} \vee m_{i2} \vee \ldots \vee m_{is}$， $0 \leqslant i_j \leqslant 2^n-1$

A的主析取范式中，没出现的极小项是m_{j1}，m_{j2}，…，m_{j2^n-s}

易见$m_{j1} \vee m_{j2} \vee \ldots \vee m_{j2^n-s}$为$\neg A$的主析取范式

即$\neg A \Leftrightarrow m_{j1} \vee m_{j2} \vee \ldots \vee m_{j2^n-s}$

$\neg\neg A \Leftrightarrow \neg(m_{j1} \vee m_{j2} \vee \ldots \vee m_{j2^n-s})$

$A \Leftrightarrow \neg m_{j1} \wedge \neg m_{j2} \wedge \ldots \wedge \neg m_{j2^n-s}$

$\Leftrightarrow M_{j1} \wedge M_{j2} \wedge \ldots \wedge M_{j2^n-s}$

例：由公式的主析取范式求主合取范式。

（1）A<=> $m_1 \vee m_2$（A中含2个命题变项）

（2）B<=> $m_1 \vee m_2 \vee m_3$（B中含3个命题变项）

解：

（1）由题意可知，A的主析取范式中的极小项是m_1，m_2，没出现的极小项是m_0，m_3，所以A的主合取范式中的极大项是M_0，M_3。

A <=> $M_0 \wedge M_3$

（2）由题意可知，B的主析取范式中的极小项是m_1，m_2，m_3，没出现的极小项是m_0，m_4，m_5，m_6，m_7，所以A的主合取范式中的极大项是M_0，M_4，M_5，M_6，M_7。

B <=> $M_0 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$

利用主合取范式判断公式的类型

设公式A中含n个命题变项，则

（1）A为重言式

当且仅当A的主合取范式不含任何极大项，

此时，记A的主合取范式为1。

（2）A为矛盾式

当且仅当A的主合取范式含全部2^n个极大项

（3）A为可满足式

当且仅当A的主合取范式中的极大项个数一定小于2^n

思考题：求公式$(\neg p\wedge q)\rightarrow\neg r$的主析取范式和主合取范式。（注：不允许使用等值演算法）

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p\wedge q$	$(\neg p\wedge q)\rightarrow\neg r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

所以$(\neg p\wedge q)\rightarrow\neg r \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

$\Leftrightarrow M_3$

2.3 联结词的完备集

五个基本的联结词：┐、∧、∨、→、↔。

在实际应用中（如数字逻辑电路），可由五个基本的联结词{┐，∧，∨，→，↔}产生更多的联结词：

（1）异或

（2）条件否定

（3）与非

（4）或非

定义 异或联结词

设p，q为二命题，复合命题“p，q之中恰有一个成立”称为p与q的异或式或排斥或式，记作$p\nabla q$，∇称作异或联结词。

易见：1、$p\nabla q \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\Leftrightarrow \neg(p\leftrightarrow q)$

2、$p\nabla q$为真当且仅当p，q中恰有一个为真

异或联结词∇的性质：

（1）$p\nabla q\Leftrightarrow q\nabla p$

（2）$(p\nabla q)\nabla r\Leftrightarrow p\nabla(q\nabla r)$

（3）$p\wedge(q\nabla r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\nabla(p\wedge r)$

（4）$p\nabla p\Leftrightarrow 0$

（5）$p\nabla 0\Leftrightarrow p$

（6）$p\nabla 1\Leftrightarrow\neg p$

思考题

设p、q、r为三命题，若$p\nabla q\Leftrightarrow r$，则$p\nabla r\Leftrightarrow q$，$q\nabla r\Leftrightarrow p$且$p\nabla q\nabla r\Leftrightarrow 0$。

定义 蕴涵否定联结词

设p，q为二命题，复合命题“$p \to q$的否定”称为命题p和q的蕴涵（条件）否定式，记作 $p \overset{c}{\to} q$，$\overset{c}{\to}$ 称为蕴涵（条件）否定联结词。

由定义知：1、$p \overset{c}{\to} q \Leftrightarrow \neg(p \to q)$

2、$p \overset{c}{\to} q$为真当且仅当p为真q为假

定义　与非联结词

设p、q为二命题，复合命题“p与q的否定”称为p与q的**与非式**，记作$p\uparrow q$，$\uparrow$称作**与非联结词**。

易见：1、$p\uparrow q \Leftrightarrow \neg\ (p\wedge q)$

2、$p\uparrow q$为真当且仅当p与q不同时为真。

与非联结词$\uparrow$的性质：

（1）$p\uparrow p \Leftrightarrow \neg\ (p\wedge p) \Leftrightarrow \neg\ p$

（2）$(p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q) \Leftrightarrow \neg\ (p\uparrow q) \Leftrightarrow p\wedge q$

（3）$(p\uparrow p)\uparrow(q\uparrow q) \Leftrightarrow \neg\ p\uparrow\neg\ q$

$\Leftrightarrow \neg\ (\neg\ p\wedge\neg\ q) \Leftrightarrow p\vee q$

定义 或非联结词

设p、q为二命题，复合命题“p或q的否定”称为p与q的或非式，记作$p \downarrow q$，$\downarrow$称作或非联结词。

易见：1、$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg (p \vee q)$

2、$p \downarrow q$为真当且仅当p与q同时为假。

或非联结词↓的性质：

（1）$p \downarrow p \Leftrightarrow \neg (p \vee p) \Leftrightarrow \neg p$

（2）$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \Leftrightarrow \neg (p \downarrow q) \Leftrightarrow p \vee q$

（3）$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q$

$\Leftrightarrow \neg (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow p \wedge q$

联结词完备集

定义：一个联结词集合，若对于任何一个公式均可以用该集合中的联结词来表示或等值表示，就称为联结词完备集。

如果该集合任意去掉一个联结词，就不再具备这种特性，就称为最小完备集。

定理：$\{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集。

推论：$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$，$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \nabla\}$，$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \uparrow, \downarrow\}$等都是联结词完备集。

推论：{$\neg$、$\wedge$}、{$\neg$、$\vee$}、{$\neg$、$\rightarrow$}是联结词完备集，并且是最小联结词完备集。

因为$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

$p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$

$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$

推论：$\{\neg, \stackrel{c}{\rightarrow}\}$是联结词完备集，并且是最小联结词完备集。

定理：{$\uparrow$}、{$\downarrow$}是联结词完备集，并且是最小联结词完备集。（P39）

思考题

定义如表所示的二元逻辑联结词“·”，

（1）证明{·}是联结词完备集。

（2）请利用该联结词·表示下述公式：（$p\rightarrow q$）$\wedge r$

p	q	p·q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1