关系代数

关 系 代 数

所谓关系代数是指专门用于研究集合中元素之间关系的数学方法。

关系代数与集合论、数理逻辑以及图论等等有着密切的联系。

关系代数广泛地应用于计算机科学技术，如计算机程序设计和分析（如程序的输入、输出关系；递归关系）、关系数据库。

第七章 二元关系

7.1 有序对与笛卡儿积

定义7.1（有序对）

由两个元素x和y（允许x=y）按一定顺序排列成的二元组叫做一个有序对或序偶，记作<x，y>，其中x是它的第一元素，y是它的第二元素。

有序对<x，y>的性质：

1、当x≠y时，<x，y>≠<y，x>

2、<x，y>=<u，v>的充分必要条件是

x=u且y=v

例如：平面直角坐标系中点的坐标就是有序对

定义7.2(笛卡儿积)

设A，B是任意两个集合，用A中元素作第一元素，B中元素作第二元素构成的所有有序对的全体组成的集合称为**集合A和B的笛卡儿积**，记作$A \times B$。

易见$A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A, y \in B\}$

例如：集合A={a，b，c}，B={0，1}，

求A×B，B×A，A×A

解：

$$A\times B=\{\langle a,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle,\langle c,1\rangle\}$$

$$B\times A=\{\langle 0,a\rangle,\langle 0,b\rangle,\langle 0,c\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle\}$$

$$A\times A=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

（1）假如A，B均是有限集，$|A|=m$，$|B|=n$，

（2）一般的A×B与B×A不相等，即集合的笛卡尔积运算，不满足交换律。

练习 设A={1，2}，求P（A）×A

解： P（A）= {∅，{1}，{2}，{1，2}}

P（A）×A

= {∅，{1}，{2}，{1，2}}×{1，2}

= { <∅，1>，<∅，2>，

<{1}，1>，<{1}，2>，

<{2}，1>，<{2}，2>，

<{1，2}，1>，<{1，2}，2> }

笛尔儿积运算具有以下性质

性质1：对于任意集合A，$A\times\varnothing=\varnothing$，$\varnothing\times A=\varnothing$。

性质2：笛卡儿积运算不满足交换律，即当$A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge A\neq B$时，$A\times B\neq B\times A$。

性质3：笛卡儿运算不满足结合律，即当A，B，C均非空时，$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$。

性质4：笛卡儿运算对并和交运算满足分配律，即

（1） $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

（2） $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

（3） $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

（4） $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

例：证明$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

集合恒等式的证明方法：等值演算

基本思想是：欲证$P=Q$，即证对任意的x，有$x\in P\Leftrightarrow x\in Q$。

即证对于任意的$\langle x, y\rangle$，

$\langle x, y\rangle\in A\times(B\cup C)\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$

例：证明$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

证明：对于任意的$\langle x,y\rangle$

$\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow\ x\in A\wedge y\in(B\cup C)$

$\Leftrightarrow\ x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow\ (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow\ \langle x,y\rangle\in A\times B\vee\langle x,y\rangle\in A\times C$

$\Leftrightarrow\ \langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

练习 证明$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

证明：对于任意的$\langle x,y\rangle$

$\langle x,y\rangle\in A\times(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in A \wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times B \wedge \langle x,y\rangle\in A\times C$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in (A\times B)\cap(A\times C)$

所以$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

性质5：$A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$

问：性质5的逆命题是否成立？

取$A=\varnothing$，$B=\{1\}$，$C=\{3\}$，$D=\{4\}$

注 意：性质5的逆命题不一定成立。

推 论：对于任意四个非空集合A、B、C、D，

$A \times B \subseteq C \times D$的充分必要条件是$A \subseteq C \wedge B \subseteq D$ 。

练习

设A，B，C，D为任意集合，判断以下命题是否为真，并说明理由。

（1）$A\times B=A\times C\Rightarrow B=C$

（2）A－（$B\times C$）＝（A－B）×（A－C）

（3）$A=B\wedge C=D\Rightarrow A\times C=B\times D$

（4）存在集合A，使得$A\subseteq A\times A$

（3）　$A=B\wedge C=D\Rightarrow A\times C=B\times D$为真。由等量代入原理可证。

命题为真。

当$A=\varnothing$时，$A\subseteq A\times A$成立。

（A－B）×（A－C）$=\varnothing\times\{1\}=\varnothing$

笛卡儿积的推广形式

定义（笛卡儿积）

设A_1，A_2，…，A_n为n个集合，

则集合$A_1 \times \ldots \times A_n=\{<x_1,\ldots x_i,\ldots,x_n> \mid x_i \in A_i\}$

称为由A_1，A_2，…，A_n构成的笛卡儿积。

$A_1 \times \ldots \times A_n$的元素$<x_1,\ldots,x_n>$称为有序$n$元组。

7.2 二元关系

7.2 二元关系

一、二元关系的定义

定义7.3（二元关系） 如果一个集合为空集或者它的元素都是有序对，则称这个集合是一个二元关系（*2-Relation*），可简称为关系，记作R。

特别地，当R=∅时，则R称为空关系。

对于一个二元关系R，如果$\langle x，y\rangle \in R$，则记作xRy；如果$\langle x，y\rangle \notin R$，则记作$x\not{R}y$。

例：$R_1=\{<1, 2>, <a, b>\}$

R_1是一个二元关系，有$1R_12$，aR_1b。

例：$R=\{<x, y> \mid x, y \in N且x>y\}$

这是自然数集合上的一个“大于”关系，

显然有$<3, 2>\in R$，即3R2。

我们把R读作“大于”，则3R2读作“3大于2”。

定义7.6（关系的域）设R是二元关系（P106）

（1）R中所有有序对的第一元素构成的集合称为R的**定义域**，记作***domR***。

形式化表示为：$domR=\{x|\exists y(\langle x,y\rangle\in R)\}$

（2）R中所有有序对的第二元素构成的集合称为R的**值域**，记作***ranR***。

形式化表示为：$ranR=\{y|\exists x(\langle x,y\rangle\in R)\}$

（3）R的定义域和值域的并集称为R的**域**，记作***fldR***。

形式化表示为：$fldR= domR\cup ranR$

根据上述定义，显然有

$x\in domR\Leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle\in R)$

$y\in ranR\Leftrightarrow \exists x(\langle x,y\rangle\in R)$

例：设R={<1，2>，<1，2>，<2，4>，<4，3>}，求$domR$、$ranR$、$fldR$。

解：$domR = \{1, 2, 4\}$

$ranR = \{2, 3, 4\}$

$fldR = \{1, 2, 3, 4\}$

定义7.4（A到B的二元关系）

设A，B为集合，A×B的任何子集所定义的一个二元关系R，称为**A到B的二元关系**。

特别地，

（1）A=B时，称R为**A上的二元关系**

（2）R=A×B时，称R为**A到B的全（域）关系**

例：A={a, b, c}　B={1, 2, 3}

$R_1=\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle a, 3\rangle\}$ 是A到B的一个关系

$R_2=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$ 是B上的一个关系

思考： 若|A|=n，|B|=m，问

(1) A到B共有多少个不同的二元关系？

(2) A上共有多少个不同的二元关系？

说明：若|A|=n，|B|=m，则

(1) A 到 B 共有 2^{mn} 个不同的二元关系；

(2) A 上共有 2^{n^2} 个不同的二元关系。

例如：|A|=3，则A上有 $2^{3^2}=512$ 个不同的二元关系。

7.2 二元关系

一、二元关系的定义

二、常见的二元关系

3种特殊的关系（A上的关系）

空关系$\varnothing$

全域关系E_A：$E_A=A\times A$

恒等关系I_A：$I_A=\{\langle x, x\rangle \mid x\in A\}$

其它常见的关系

（1）设A为实数集R的子集，则A上的小于等于关系

定义为$L_A=\{<x, y> | x, y\in A \wedge x\leq y\}$

（2）设B为正整数集Z^+的子集，则B上的整除关系

定义为$D_B=\{<x, y> | x, y\in B \wedge x$整除$y\}$

（3）设 $\mathcal{A}$ 是集合族，则 $\mathcal{A}$ 上的包含关系

定义为$R_{\subseteq}=\{<x, y> | x, y\in \mathcal{A} \wedge x\subseteq y\}$

类似地可以定义大于等于关系，小于关系，大于关系，真包含关系等等。

例 已知A={1, 2, 3}，B={a, b}，求A上的小于等于关系L_A和整除关系D_A以及P(B)上的包含关系$R_{\subseteq}$。

解：$L_A=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

$D_A=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

又$P(B)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$，

则P(B)上的包含关系

$R_{\subseteq}=\{\langle\varnothing, \varnothing\rangle, \langle\varnothing, \{a\}\rangle, \langle\varnothing, \{b\}\rangle, \langle\varnothing, \{a, b\}\rangle,$

$\langle\{a\}, \{a\}\rangle, \langle\{a\}, \{a, b\}\rangle, \langle\{b\}, \{b\}\rangle,$

$\langle\{b\}, \{a, b\}\rangle, \langle\{a, b\}, \{a, b\}\rangle\}$

例 设A={2, 3, 4, 5, 6}，分别列出下列关系

（1）R={<a, b>|a是b的倍数}

（2）R={<a, b>| $(a-b)^2 \in A$}

（3）R={<a, b>|a/b是素数}

（4）R={<a, b>|a≠b}

解:

（1）R={<2, 2>, <3, 3>, <4, 2>, <4, 4>, <5, 5>, <6, 2>, <6, 3>, <6, 6>}

（2）R={<2, 4>, <3, 5>, <4, 6>, <4, 2>, <5, 3>, <6, 4>}

（3）R={<4, 2>, <6, 3>, <6, 2>}

（4）$R=E_A-I_A$, 共有25-5个有序对。

7.2 二元关系

一、二元关系的定义
二、常见的二元关系
三、二元关系的表示方法

集合A上的关系的表示

（1）集合表达式

集合A上的关系的表示

（2）关系矩阵（A是有穷集时）

假设集合A={x_1, x_2, ..., x_n}， R是A上的关系，

令 $r_{ij}=\begin{cases}1, < x_i, x_j > \in R \\ 0, < x_i, x_j > \notin R\end{cases}$ (i,j = 1,2,…n)

则 $(r_{ij})=\begin{bmatrix} r_{11}\ r_{12}\cdots r_{1n} \\ r_{21}\ r_{22}\cdots r_{2n} \\ \cdots \\ r_{n1}\ r_{n2}\cdots r_{nn}\end{bmatrix}$ 是R的关系矩阵，记作M_R

练习：A={ 1， 2， 3， 4}，

R={<1, 1>, <1, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <4, 2>}

写出R上的关系矩阵。

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（3）关系图（A是有穷集时）

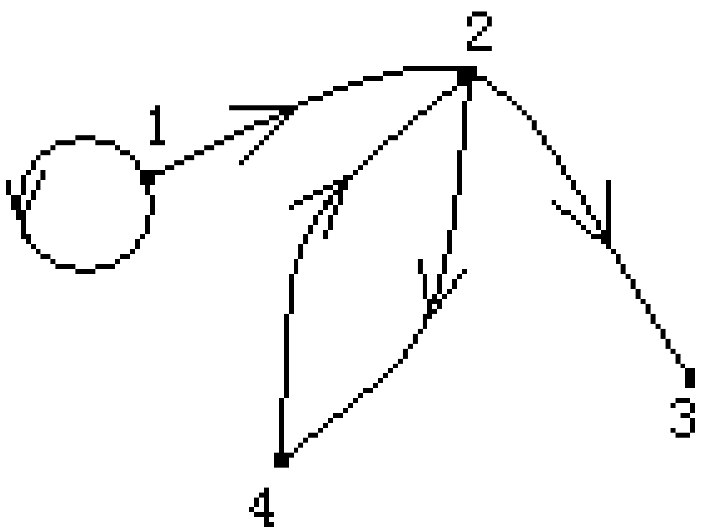
设V是顶点的集合，E是有向边的集合。

令$V=A=\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$，如果$x_i R x_j$，则添加有向边$\langle x_i, x_j\rangle \in E$，那么$G=\langle V, E\rangle$就是R的关系图，记作$G_R$

例：若$A=\{1, 2, 3, 4\}$，

$R=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

画出R的关系图。



关系和关系数据库的关系

学生	课程
Bill	程序设计
Mary	数学
Bill	艺术
Jack	历史
Jack	程序设计
Tom	数学

R={<Bill,程序设计>,<Mary,数学>,<Bill,艺术>,…}

7.3 关系的运算

本节学习与关系有关的运算及其性质：

关系的逆、复合、限制，像，关系的幂

定义7.7（关系的逆）

设R是二元关系，R的逆关系，简称为R的逆，记作R^{-1}，其中$R^{-1}=\{<x,y>|<y,x>\in R\}$

易见$<x,y>\in R^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in R$

定义7.8（关系的复合）

设F，G是二元关系，F和G的复合，记作$F\cdot G$，其中$F\cdot G=\{<x,y>|\exists t(<x,t>\in F \wedge <t,y>\in G)\}$

易见$<x,y>\in F\cdot G \Leftrightarrow \exists t(<x,t>\in F \wedge <t,y>\in G)$

例 设$F=\{\langle 3, 3\rangle, \langle 6, 2\rangle\}$，$G=\{\langle 2, 3\rangle\}$，求$F^{-1}$、$F \cdot G$、$G \cdot F$。

解：

$$F^{-1}=\{\langle 3, 3\rangle, \langle 2, 6\rangle\}$$

$$F \cdot G=\{\langle 6, 3\rangle\}$$

$$G \cdot F=\{\langle 2, 3\rangle\}$$

说明：由上例可见，复合运算是不可交换的。

练习 已知F={<a，b>，<b，a>，<b，c>}，

G={<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>}，

求F·G。

答案：F·G ={<a，a>，<a，c>，<b，b>，<b，d>}

思考 设R、S是定义在集合A上的关系，其中

$R=\{<x, y>|x,y\in A \wedge x$是$y$的父亲$\}$

$S=\{<x, y>|x,y\in A \wedge x$是$y$的母亲$\}$

（1）$R\cdot R$、$S^{-1}\cdot R$、$S\cdot R^{-1}$表示的是什么关系？

（2）分别用关系R、S的运算表示如下关系：

$\{<x, y>|x,y\in A \wedge y$是$x$外祖母$\}$

$\{<x, y>|x,y\in A \wedge y$是$x$祖母$\}$

解： $R\cdot R=\{<x, y>|x,y\in A \wedge x$是$y$的祖父$\}$

$S^{-1}\cdot R=\varnothing$

$S\cdot R^{-1}=\{<x, y>|x,y\in A \wedge x$是$y$的妻子$\}$

$\{<x, y>|x,y\in A \wedge y$是$x$外祖母$\}=(S\cdot S)^{-1}$

$\{<x, y>|x,y\in A \wedge y$是$x$祖母$\}=(S\cdot R)^{-1}$

关系和关系数据库的关系

学生	课程
Bill	程序设计
Mary	数学
Bill	艺术
Jack	历史
Jack	程序设计
Tom	数学

R={<Bill,程序设计>,<Mary,数学>,<Bill,艺术>,…}

定义7.9（限制和象）

设R是二元关系，A是集合

（1）R在A上的限制记作$R\upharpoonright A$，其中

$$R\upharpoonright A=\{\langle x, y\rangle \mid xRy \wedge x\in A\}$$

（2）$\mathrm{ran}(R\upharpoonright A)$称为A在R下的象，记作R[A]，即$R[A]=\mathrm{ran}(R\upharpoonright A)$。

说明：

（1）$R\upharpoonright A$是R的子关系，R[A]是ranR的子集。

（2）$\langle x, y\rangle\in R\upharpoonright A \Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in R\wedge x\in A$

（3）$y\in R[A] \Leftrightarrow \exists x(\langle x, y\rangle\in R\wedge x\in A)$

例 设$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

求$R\upharpoonright\{1\}$，$R\upharpoonright\varnothing$，$R\upharpoonright\{2,3\}$，

$R[\{1\}]$，$R[\varnothing]$，$R[\{3\}]$。

解： $R\upharpoonright\{1\}=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

$R\upharpoonright\varnothing=\varnothing$

$R\upharpoonright\{2,3\}=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

$R[\{1\}]=\{2,3\}$

$R[\varnothing]=\varnothing$

$R[\{3\}]=\{2\}$

说明

关系是集合，所以第六章所定义的集合运算适用于关系

关系运算中的逆运算优先于其它运算

所有的关系运算都优先于集合运算

对于没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序

关系运算的性质：

定理7.1 设F任意的关系，则有

（1）$(F^{-1})^{-1}=F$

（2）$\mathrm{dom}\,F^{-1}=\mathrm{ran}F$，$\mathrm{ran}\,F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证明：

（2）任取x，

$x\in \mathrm{dom}F^{-1}$

$\Leftrightarrow \exists y(\langle x,y\rangle\in F^{-1})$

$\Leftrightarrow \exists y(\langle y,x\rangle\in F)$

$\Leftrightarrow x\in \mathrm{ran}F$

所以$\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$

定理7.2 设F、G、H是任意的关系，则有

（1）**结合律** $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$

（2）**德.摩根律** $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

证明：

（1）式的证明见书P116。

（2）任取<x，y>

$\langle x, y\rangle \in (F \circ G)^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in F \circ G$

$\Leftrightarrow \exists t(\langle y, t\rangle \in F \wedge \langle t, x\rangle \in G)$

$\Leftrightarrow \exists t(\langle x, t\rangle \in G^{-1} \wedge \langle t, y\rangle \in F^{-1})$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in G^{-1} \circ F^{-1}$

所以 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

定理7.3 设R为A上的关系，则$R \circ I_A = I_A \circ R = R$

定理7.4 设F、G、H是任意的关系，则有

（1）$F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$

（2）$(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$

（3）$F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$

（4）$(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$

(1) $F\cdot(G\cup H)=F\cdot G\cup F\cdot H$

证明： 任取$\langle x, y\rangle$

$\langle x, y\rangle\in F\cdot(G\cup H)$

$\Leftrightarrow\exists t(\langle x, t\rangle\in F\wedge\langle t, y\rangle\in G\cup H)$

$\Leftrightarrow\exists t(\langle x, t\rangle\in F\wedge(\langle t, y\rangle\in G\vee\langle t, y\rangle\in H))$

$\Leftrightarrow\exists t((\langle x, t\rangle\in F\wedge\langle t, y\rangle\in G)\vee(\langle x, t\rangle\in F\wedge\langle t, y\rangle\in H))$

$\Leftrightarrow\exists t(\langle x, t\rangle\in F\wedge\langle t, y\rangle\in G)\vee\exists t(\langle x, t\rangle\in F\wedge\langle t, y\rangle\in H)$

$\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in F\cdot G\vee\langle x, y\rangle\in F\cdot H$

$\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in F\cdot G\cup F\cdot H$

所以$F\cdot(G\cup H)=F\cdot G\cup F\cdot H$

(3) $F\cdot(G\cap H)\subseteq F\cdot G\cap F\cdot H$

证明：任取$\langle x, y\rangle$

$\langle x, y\rangle\in F\cdot(G\cap H)$

$\Leftrightarrow\exists t(\langle x, t\rangle\in F\wedge\langle t, y\rangle\in G\cap H)$

$\Leftrightarrow\exists t(\langle x, t\rangle\in F\wedge\langle t, y\rangle\in G\wedge\langle t, y\rangle\in H)$

$\Leftrightarrow\exists t((\langle x, t\rangle\in F\wedge\langle t, y\rangle\in G)\wedge(\langle x, t\rangle\in F\wedge\langle t, y\rangle\in H))$

$\Rightarrow\exists t(\langle x, t\rangle\in F\wedge\langle t, y\rangle\in G)\wedge\exists t(\langle x, t\rangle\in F\wedge\langle t, y\rangle\in H)$

$\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in F\cdot G\wedge\langle x, y\rangle\in F\cdot H$

$\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in F\cdot G\cap F\cdot H$

所以$F\cdot(G\cap H)\subseteq F\cdot G\cap F\cdot H$

推广：

$R\cdot(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n)=R\cdot R_1\cup R\cdot R_2\cup\ldots\cup R\cdot R_n$

$(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n)\cdot R=R_1\cdot R\cup R_2\cdot R\cup\ldots\cup R_n\cdot R$

$R\cdot(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\subseteq R\cdot R_1\cap R\cdot R_2\cap\ldots\cap R\cdot R_n$

$(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\cdot R\subseteq R_1\cdot R\cap R_2\cdot R\cap\ldots\cap R_n\cdot R$

定理7.5 设F为关系，A，B为集合，则

(1) $F\upharpoonright(A\cup B) = F\upharpoonright A \cup F\upharpoonright B$

(2) $F[A\cup B] = F[A] \cup F[B]$

(3) $F\upharpoonright(A\cap B) = F\upharpoonright A \cap F\upharpoonright B$

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$

(1) $F\upharpoonright(A\cup B) = F\upharpoonright A \cup F\upharpoonright B$

证明：任取$\langle x, y\rangle$

$$\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle \in F\upharpoonright(A\cup B)\\
\Leftrightarrow\ &\langle x, y\rangle \in F \wedge x\in A\cup B\\
\Leftrightarrow\ &\langle x, y\rangle \in F \wedge (x\in A \vee x\in B)\\
\Leftrightarrow\ &(\langle x, y\rangle \in F \wedge x\in A) \vee (\langle x, y\rangle \in F \wedge x\in B)\\
\Leftrightarrow\ &\langle x, y\rangle \in F\upharpoonright A \vee \langle x, y\rangle \in F\upharpoonright B\\
\Leftrightarrow\ &\langle x, y\rangle \in F\upharpoonright A \cup F\upharpoonright B
\end{aligned}$$

所以$F\upharpoonright(A\cup B) = F\upharpoonright A \cup F\upharpoonright B$

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$

证明：任取y

$y\in F[A\cap B]$

$\Leftrightarrow y\in ran(F\upharpoonright(A\cap B))$

$\Leftrightarrow \exists x\,(\langle x, y\rangle\in F\upharpoonright(A\cap B))$

$\Leftrightarrow \exists x\,(\langle x, y\rangle\in F\land x\in A\cap B)$

$\Leftrightarrow \exists x\,(\langle x, y\rangle\in F\land x\in A\land x\in B)$

$\Leftrightarrow \exists x\,((\langle x, y\rangle\in F\land x\in A)\land(\langle x, y\rangle\in F\land x\in B))$

$\Rightarrow \exists x\,(\langle x, y\rangle\in F\land x\in A)\land\exists x\,(\langle x, y\rangle\in F\land x\in B)$

$\Leftrightarrow \exists x\,(\langle x, y\rangle\in F\upharpoonright A)\land\exists x\,(\langle x, y\rangle\in F\upharpoonright B)$

$\Leftrightarrow y\in ran(F\upharpoonright A)\land y\in ran(F\upharpoonright B)$

$\Leftrightarrow y\in F[A]\land y\in F[B]$

$\Leftrightarrow y\in F[A]\cap F[B]$

所以$F[A\cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$

定义7.10（幂运算）

设R为A上的非空关系，n为自然数，则R的n次幂定义为：

（1）$R^0=\{<x, x>|x\in A\}=I_A$

（2）$R^{n+1}=R^n\cdot R$ （$n\geq 1$）

说明：

（1）A上的任意非空关系的0次幂都相等，

都等于A上的恒等关系I_A

（2）A上的任何关系R都有$R^1=R$（$R^1=R^0\cdot R=I_A\cdot R=R$）

关系幂的求解方法

1. 集合运算：按定义逐步求解

例：设A={a，b，c，d}，

$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$，求R的各次幂。

解：

$R^0=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$

$R^1=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$

$R^2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle\}$

$R^3=\{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$

$R^4=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle\}$

$R^5=\{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$

可以得到$R^2=R^4=R^6=\ldots$；$R^3=R^5=R^7=\ldots$

关系幂的求解方法

1. 集合运算

2. 关系矩阵

首先求解关系R的矩阵M；然后计算M^n，

矩阵计算中的“+”是逻辑加

逻辑加：0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=1

例 设A={a，b，c，d}，

R={<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>}，求R的各次幂。

解:

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M^2=MM=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

R^2={<a,a>, <a,c>, <b,b>, <b,d>}
R^3={<a,b>, <a,d>, <b,a>, <b,c>}

$$M^2 = MM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = M^2M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^4 = M^3M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以得到

$$M^2 = M^4 = M^6 = \ldots$$

$$M^3 = M^5 = M^7 = \ldots$$

因此

$$R^2 = R^4 = R^6 = \ldots$$

$$R^3 = R^5 = R^7 = \ldots$$

例：设A={a，b，c，d}，

R={〈a，b〉，〈b，a〉，〈b，c〉，〈c，d〉}，

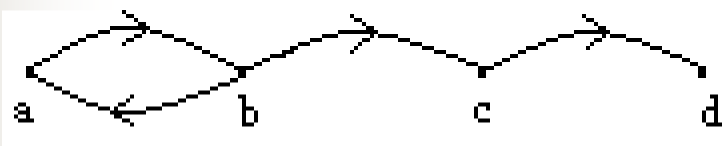
画出R，R^2，R^3的关系图。

解：

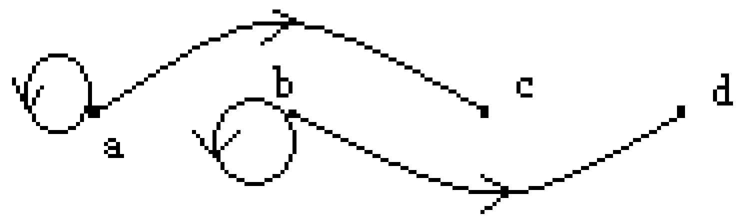
R^2={〈a，a〉，〈a，c〉，〈b，b〉，〈b，d〉}

R^3={〈a，b〉，〈a，d〉，〈b，a〉，〈b，c〉}

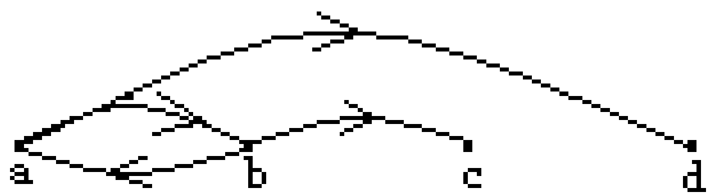
R



R^2



R^3



关系幂的求解方法

1. 集合运算

2. 关系矩阵

3. 关系图

用R的关系图G直接求R^n的关系图G’。

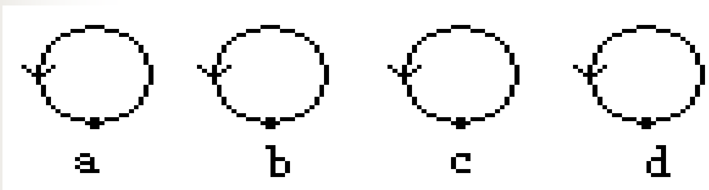
基本思想：考察R的关系图G中的每个顶点x_i，如果在G中从x_i出发经过n条边的路径到达顶点x_j，则在G’中加一条从x_i到x_j的边。

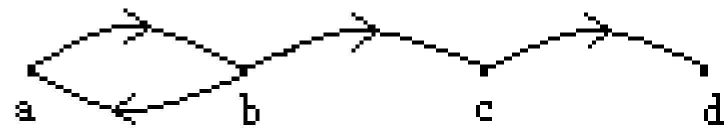
反复上述过程，最终就得到R^n的关系图G’。

例7.8 设A={a，b，c，d}，

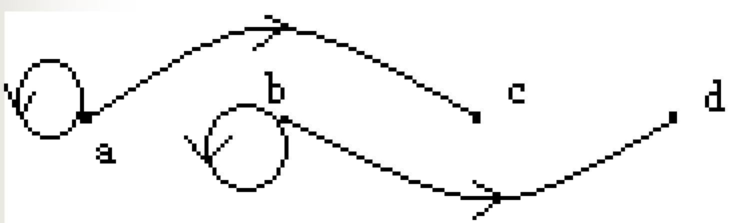
R={<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>}，求R的各次幂。

解：





R^0　　　　　　　R



$R^2 = R^4 = \ldots$　　　　　　　$R^3 = R^5 = \ldots$

幂运算的性质

定理7.6 设A为n元集，R是A上的关系，则存在自然数s和t，使得$R^s=R^t$。

幂运算的性质

定理7.6 设A为n元集，R是A上的关系，则存在自然数s和t，使得$R^s=R^t$

证明： R为A上的关系，对任何自然数 k，R^k都是A×A的子集，又知$|A\times A|=n^2$，$|P(A\times A)| = 2^{n^2}$，即A×A的不同的子集仅2^{n^2}个。当列出R的各次幂R^0，R^1，R^2，…，$R^{2^{n^2}}$，…时，必存在自然数s和t，使得$R^s= R^t$。

说明： 通过以上性质可以看出，有穷集A上的关系R的幂序列R^0，R^1，R^2，…是一个周期性变化的序列，利用这个特点可以将R的高次幂集化简为R的低次幂。

定理7.7 设R为A的关系，m,n是自然数，则下面的等式成立

（1）$R^m \cdot R^n = R^{m+n}$,

（2）$(R^m)^n = R^{mn}$

7.4 关系的性质

本节学习关系常见性质及其在关系矩阵和关系图中的特征。

关系的性质主要有如下五种：自反性，反自反性，对称性，反对称性和传递性。

定义7.11（自反性和反自反性）

设R是A上的关系，

若∀x∈A，均有<x，x>∈R，则称R在A上是**自反的（*reflexive*）**（或称R在A上具有自反性质、是自反关系）。

若∀x∈A，均有<x，x>∉R，则称R在A上是**反自反的(*irreflexive*)**。

例 设A={1, 2, 3}，R1，R2，R3是A上的关系

R1={<1, 1>，<2, 2>}

R2={<1, 1>，<2, 2>，<3, 3>, <1, 2>}

R3={<1, 3>}

解：R1既不是自反的，又不是反自反的；

R2是自反的；

R3是反自反的。

说明：如果R不是自反的，则R未必一定是反自反的。一个关系可能既不是自反的，也不是反自反的。

例：判断下列关系是否是自反的或反自反的。

集合A上的

- 全域关系 $\Leftarrow$自反的
- 恒等关系 $\Leftarrow$自反的
- 小于等于关系 $\Leftarrow$自反的
- 整除关系 $\Leftarrow$自反的
- 小于关系 $\Leftarrow$反自反的

集合族 $\mathcal{A}$=P(A)上的

- 包含关系 $\Leftarrow$自反的
- 真包含关系 $\Leftarrow$反自反的

自反和反自反关系在关系矩阵和关系图中的特征

关系矩阵的特征

自反关系的关系矩阵的主对角元素均为1;
反自反关系的关系矩阵的主对角元素均为**0**。

关系图的特征

自反关系的关系图，每个顶点均有环;
反自反关系的关系图的每个顶点均没有环。

定义7.12（对称性和反对称性）

设R是A上的关系，

若$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$，

则称R为A上的对称关系(*symmetric*)。

若$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \rightarrow x=y)$，

则称R是A上的反对称关系(*antisymmetric*)。

> 若$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge x \neq y \rightarrow \langle y, x\rangle \notin R)$，
> 则称R是A上的反对称关系。

例 设A={1, 2, 3}，R1，R2，R3，R4是A上的关系

其中 $R_1=\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle\}$

$R_4=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle\}$

则R1既是对称关系也是反对称关系，

R2是对称关系但不是反对称关系，

R3是反对称关系但不是对称关系，

R4既不是对称关系也不是反对称关系。

例 判断下列A上的关系是否为对称、反对称关系

全域关系 $\Leftarrow$对称关系

恒等关系 $\Leftarrow$对称关系、反对称关系

空关系 $\Leftarrow$对称关系、反对称关系

对称和反对称关系在关系矩阵和关系图中的特征

关系矩阵

对称关系：关系矩阵是对称矩阵，即$r_{ij}=r_{ji}$。

反对称关系：如果在矩阵非对角线上$r_{ij}=1$，则在其对称位置上$r_{ji}=0$，即r_{ij}和r_{ji} $(i\neq j)$这两个数至多一个是1，但允许两个均为0。

关系图

对称关系：任何两个不同的顶点之间只要有边，则一定是一对方向相反的边（无单向边）。

反对称关系：任何两个不同的顶点之间只要有边，则一定仅有一条有向边（无双向边）。

定义7.13（传递性） 设R是A上的关系，

若∀x，y，z∈A，如果$\langle x, y\rangle \in R$，$\langle y, z\rangle \in R$，有$\langle x, z\rangle \in R$，则称R为A上的**传递(*transitive*)关系**。

例 设A={1, 2, 3}，R1，R2，R3是A上的关系

$R1=\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$R2=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

$R3=\{\langle 1,3\rangle\}$

则 R1是A上的传递关系

R2不是A上的传递关系

R3是A上的传递关系

传递性在关系矩阵和关系图中的特征

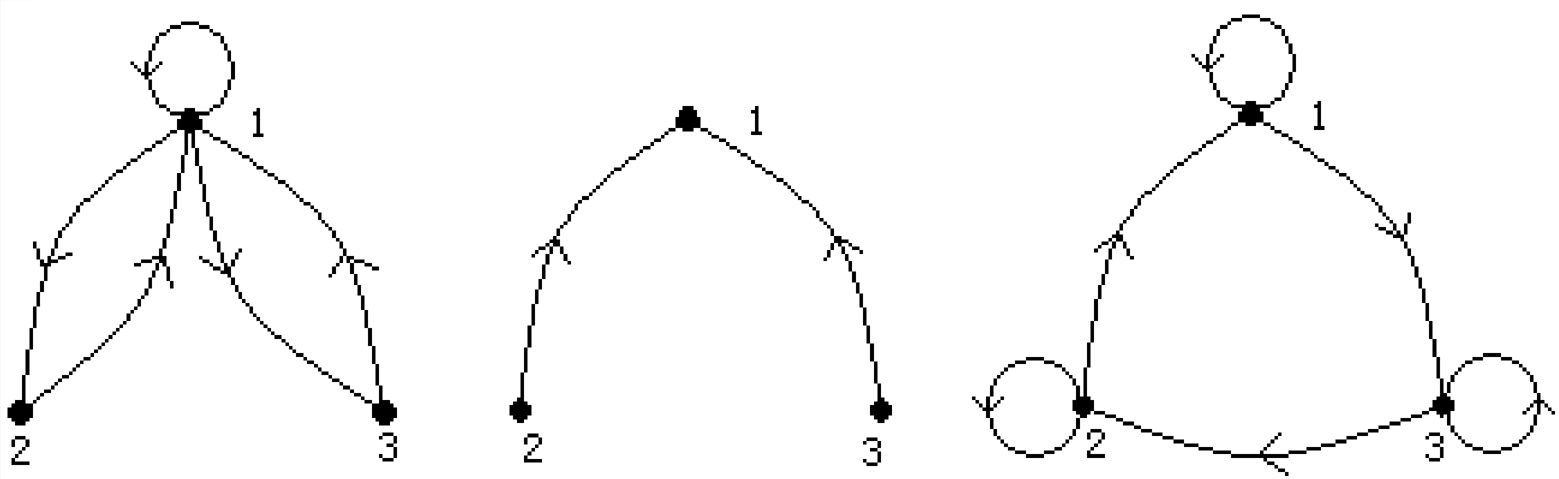
关系矩阵

如果$r_{ij}=1$，且$r_{jk}=1$，则$r_{ik}=1$。

关系图

如果结点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边，则从x_i到x_k也有边。

例 判断图中关系的性质。



(1) (2) (3)

解： （1）是对称的。

（2）是反自反的、反对称的、传递的。

（3）自反的、反对称的

五条性质成立的充分必要条件

定理7.9 设R是A上的关系，则：

（1）R是自反关系当且仅当$I_A \subseteq R$

（2）R是反自反关系当且仅当$R \cap I_A = \varnothing$

（3）R是对称关系当且仅当$R = R^{-1}$

（4）R是反对称关系当且仅当$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

（5）R是传递关系当且仅当$R \cdot R \subseteq R$

（4）R是反对称关系当且仅当$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

证明：

必要性⇒：

任取$<x, y>$，有$<x, y>\in R\cap R^{-1}$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R \wedge <x, y>\in R^{-1}$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R \wedge <y, x>\in R$

$\Rightarrow x = y$

从而$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$。

充分性⇐：

对于任意$x, y\in A$，若$<x, y>\in R \wedge <y, x>\in R$，

$\Leftrightarrow <x, y>\in R \wedge <x, y>\in R^{-1}$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R\cap R^{-1}$

$\Rightarrow <x, y>\in I_A$

$\Rightarrow x = y$

所以R在A上是反对称的。

（5）R是传递关系当且仅当$R\cdot R\subseteq R$

证明：

必要性$\Rightarrow$：

任取$\langle x, y\rangle$，有$\langle x, y\rangle\in R\cdot R$

$\Leftrightarrow \exists t(\langle x, t\rangle\in R\wedge\langle t, y\rangle\in R)$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in R$

从而$R\cdot R\subseteq R$。

充分性$\Leftarrow$：

任取$\langle x, y\rangle$，$\langle y, z\rangle\in R$，有$\langle x, y\rangle\in R\wedge\langle y, z\rangle\in R$

$\Leftrightarrow \langle x, z\rangle\in R\cdot R$

$\Rightarrow \langle x, z\rangle\in R$

所以R在A上是传递的。

五条性质成立的充分必要条件

定理7.9 设R是A上的关系，则：

（1）R是自反关系当且仅当$I_A \subseteq R$

（2）R是反自反关系当且仅当$R \cap I_A = \varnothing$

（3）R是对称关系当且仅当$R = R^{-1}$

（4）R是反对称关系当且仅当$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

（5）R是传递关系当且仅当$R \cdot R \subseteq R$

说明： 由（5）R是传递关系当且仅当$R \cdot R \subseteq R$，可以得到传递关系矩阵的另一特点，即$R \cdot R$的关系矩阵M^2中1所在的位置，R的关系矩阵M中相应的位置也为1。

关系的运算对关系性质的影响

关系的自反性，反自反性，对称性，反对称性传递性对于并、交、相对补、求逆和复合运算，是否能保持？

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
R1∩R2	√	√	√	√	√
R1∪R2	√	√	√	×	×
R1－R2	×	√	√	√	×
R1∘R2	√	×	×	×	×

例 设A是集合，R1和R2是A上的关系，证明

（1）若R1和R2是自反的，则$R1 \cup R2$也是自反的。

（2）若R1和R2是传递的，则$R1 \cap R2$也是传递的。

证明:

（1）由于R1和R2是A上自反关系，

所以根据定理7.9可知$I_A \subseteq R1$，$I_A \subseteq R2$。

从而$I_A \subseteq R1 \cup R2$。

根据定理7.9可知$R1 \cup R2$是A上自反关系。

（2）若R1和R2是传递的，则$R1 \cap R2$也是传递

证明：由于R1和R2是A上传递关系，

所以根据定理7.9可知

$R1 \cdot R1 \subseteq R1$， $R2 \cdot R2 \subseteq R2$,

$(R1 \cap R2) \cdot (R1 \cap R2)$

$\subseteq R1 \cdot R1 \cap R1 \cdot R2 \cap R2 \cdot R1 \cap R2 \cdot R2$（定理7.4）

$\subseteq R1 \cap R1 \cdot R2 \cap R2 \cdot R1 \cap R2$

$= (R1 \cap R2) \cap R1 \cdot R2 \cap R2 \cdot R1$

$\subseteq R1 \cap R2$

所以$R1 \cap R2$也是A上传递关系

例 若R1和R2是传递的，则R1∪R2不一定是传递的

反例：R1={<1，3>}，R2={<3，1>}，

则R1和R2是传递的。

但R1∪R2={<1，3>，<3，1>}不是传递的，

因为<1，1>∉ R1∪R2

思考题

问一个3元集合上同时具有反自反和反对称性质的关系共有多少个?

7.5 关系的闭包

设R是非空集合A上的关系，有时候我们希望R具有一些有用的性质，如自反性、对称性和传递性。

为此，需要在R中添加一些有序对而构成新的关系R’，使得R’具有所需要的性质。

但又希望添加的有序对尽可能的少。

满足这些要求的R’就是R的自反闭包、对称闭包和传递闭包。

定义7.14（闭包） 设R是非空集合A上的关系，若A上另外有一个关系R′满足如下条件：

(1) R′是自反的(对称的，传递的)

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称，传递)关系R″，均有$R' \subseteq R''$

则称关系R′为R的**自反（对称,传递）闭包**。

一般将R的自反闭包记作**r(R)**，对称闭包记作**s(R)**，传递闭包记作**t(R)**。

定理7.10（构造闭包的方法）

设R是A上的关系，则有

（1）$r(R)=R\cup R^0$

（2）$s(R)=R\cup R^{-1}$

（3）$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

推论： 设R是A上的关系，则存在正整数r使得 $t(R)=R\cup R^2\cup\ldots\cup R^r$

利用R的关系矩阵M和关系图G求闭包

（1）r（R）：M+E；

在每个顶点加环。

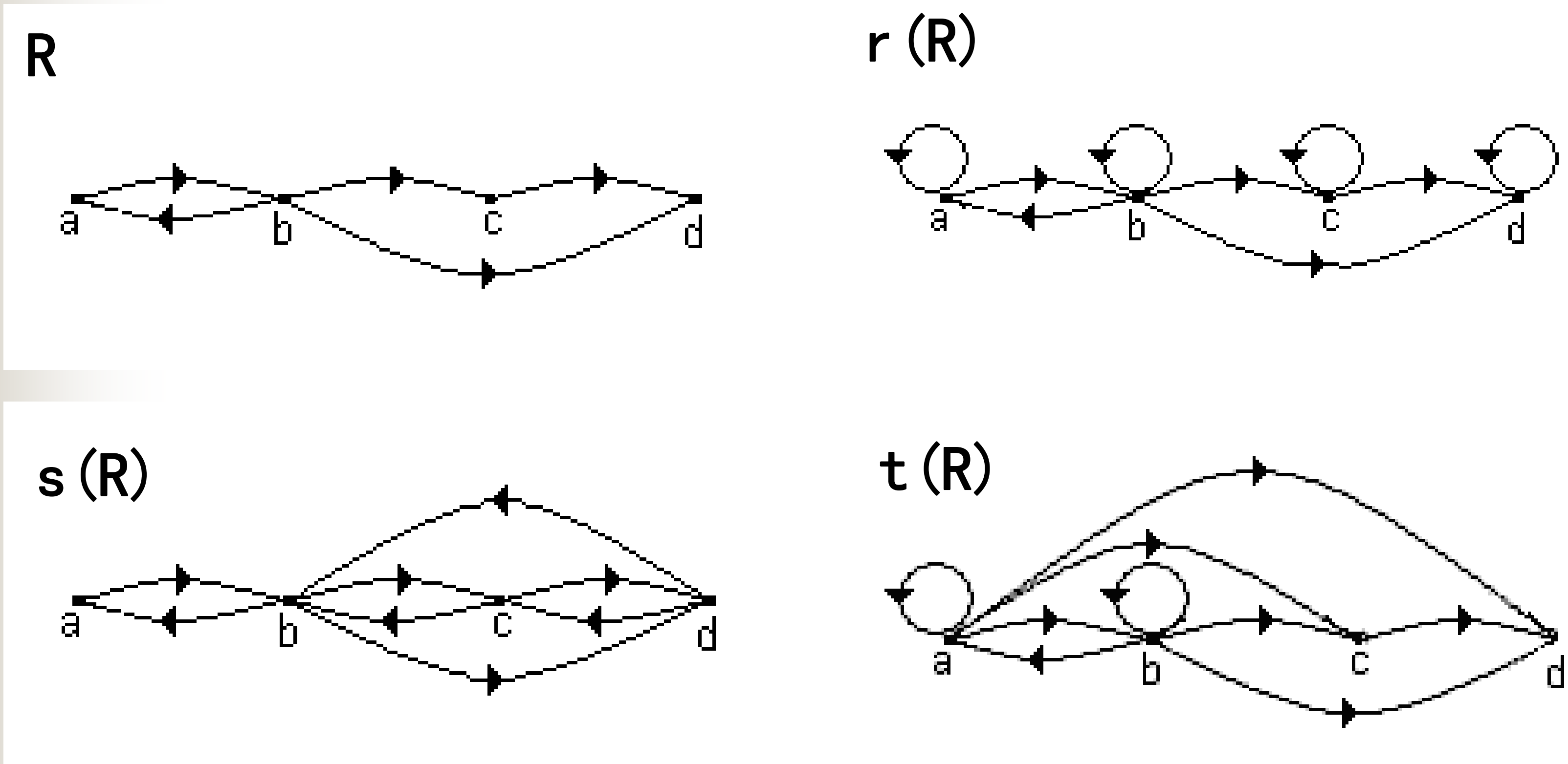
（2）s（R）：M+M′；

对于G的每个边<x,y>，添加边<y,x>。

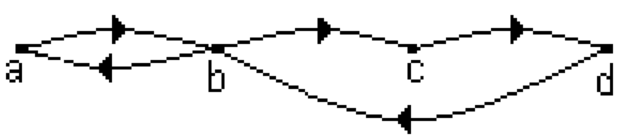
（3）t（R）：$M+M^2+M^3+\ldots$；

若从顶点*x*出发能够沿有向边到达*y* (*x*可以是*y*自身)，则在关系图中添加一条从*x*到*y*的有向边。对关系图中所有的顶点，反复上述过程，最终所得关系图即为t(R)的关系图。

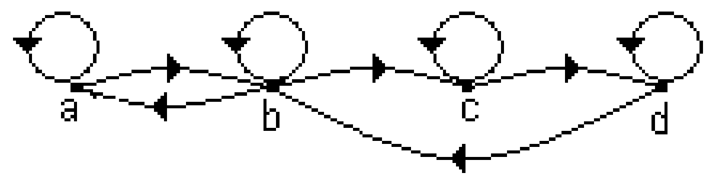
例 设A={a，b，c，d}，R={<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>，<b，d>}，画出R与r(R)，s(R)，t(R)的关系图。



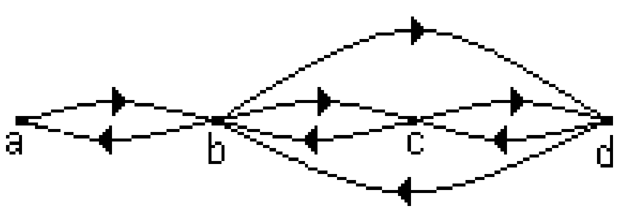
例 设A={a，b，c，d}，R={<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>，<d，b>}，使用上述方法画出R与r(R)，s(R)，t(R)的关系图。



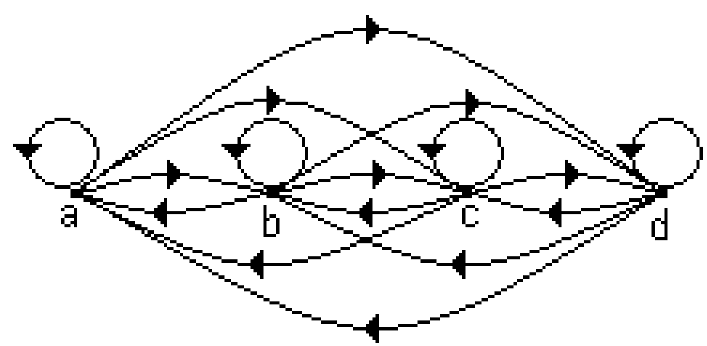
R



r(R)



s(R)



t(R)

闭包的性质

定理7.11 设R是非空集合A上的关系，则

（1）R是自反的当且仅当$r(R)=R$

（2）R是对称的当且仅当$s(R)=R$

（3）R是传递的当且仅当$t(R)=R$

定理7.12 设R1、R2是非空集合A上的关系，且$R1 \subseteq R2$，则

（1）$r(R1) \subseteq r(R2)$

（2）$s(R1) \subseteq s(R2)$

（3）$t(R1) \subseteq t(R2)$

定理7.13 设R是非空集合A上的关系

（1）若R是自反的，则s(R)与t(R)也是自反的

（2）若R是对称的，则r(R)与t(R)也是对称的

（3）若R是传递的，则r(R)也是传递的

说明：

如果关系是自反的和对称的，那么关系的闭包仍然是自反的和对称的。

但是对于传递的关系则不然，它的自反闭包仍旧保持传递性，而对称闭包就有可能失去传递性。

例 A={1，2，3}，R={<1，3>}是A上传递关系

R的对称闭包s(R)={ <1，3>，<3，1>}

显然s(R)不是A上的传递关系

说明： 对关系R分别求其自反、对称、传递闭包，记为t(s(r(R))，简记为tsr(R)。

例如： A={1，2，3}，A上的关系R={<1，3>}，求tsr(R)。

解： $tsr(R)=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$

7.6 等价关系与划分

等价关系是一类重要的关系。

定义7.15（等价关系） 设R非空集合上的关系，如果R是自反的、对称的和传递的，则称R为A上的**等价关系**。

设R是一个等价关系，若<x，y>∈R，称x等价于y，记作$x \sim y$。

例 设A={1, 2, 3}，R1，R2，R3是A上的关系

R1={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>}

R2={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>，<2, 3>}

R3={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 3>, <3, 1>}

例 设A为某班学生的集合，讨论下列关系是否为等价关系。

$R1=\{<x, y>|x, y \in A \wedge x$与$y$同年生$\}$

$R2=\{<x, y>|x, y \in A \wedge x$与$y$同姓$\}$

$R3=\{<x, y>|x, y \in A \wedge x$的年龄比$y$小$\}$

解：R1是等价关系；

R2是等价关系；

R3不是等价关系；

例 设$A \subseteq N$，$R=\{<x, y> | x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod 3\}$ 为A上的关系，其中$x \equiv y \pmod 3$叫做x与y模3相等，其含义为x除以3的余数与y除以3的余数相等。证明R为A上的等价关系。

证明:

$\forall x \in A$，有$x \equiv x \pmod 3$，即$<x, x> \in R$，所以R是自反的。

$\forall x,y \in A$，若$<x, y> \in R$，即$x \equiv y \pmod 3$，则有$y \equiv x \pmod 3$，即$<y, x> \in R$。所以R是对称的。

$\forall x,y,z \in A$，若$<x, y> \in R$且$<y, z> \in R$，即$x \equiv y \pmod 3$且$y \equiv z \pmod 3$，则有$x \equiv z \pmod 3$，即$<x, z> \in R$。所以R是传递的。

综上R为A上的等价关系。

例： 已知$A=P(X)$, $C\subseteq X$, $\forall x, y\in A$, $<x,y>\in R \Leftrightarrow x\oplus y\subseteq C$。

证明R为A上的等价关系.

证明:

（1）$\forall x\in A$， 由于$x\oplus x=\varnothing\subseteq C \Leftrightarrow <x,x>\in R$,

所以R是自反的。

（2）$\forall x,y\in A$， $<x,y>\in R\Leftrightarrow x\oplus y\subseteq C\Leftrightarrow y\oplus x\subseteq C\Leftrightarrow <y,x>\in R$,

所以R是对称的。

（3）$\forall x,y,z\in A$， 若$<x, y>\in R$， $<y, z>\in R$，

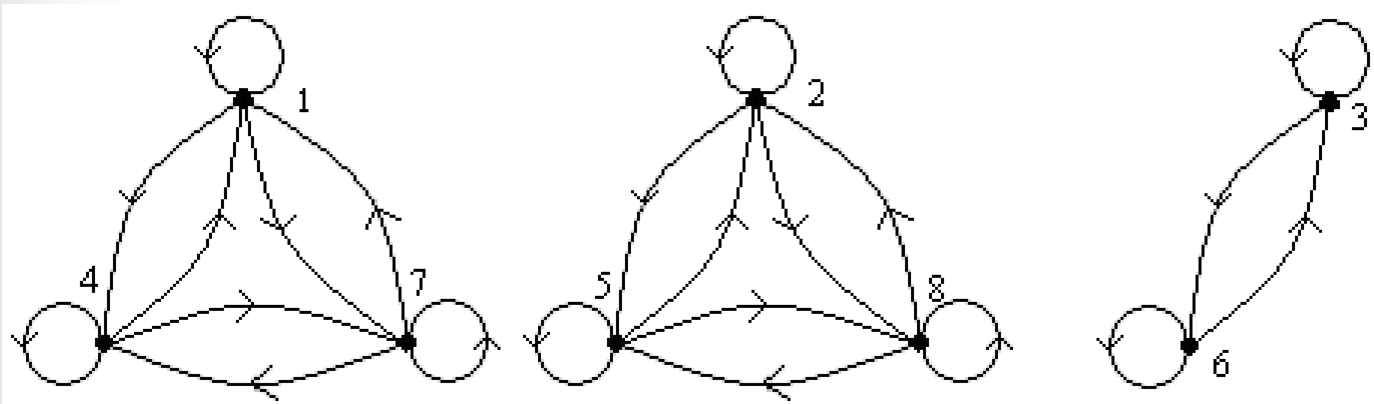
则有$x\oplus y\subseteq C$， $y\oplus z\subseteq C$。

$x\oplus z=(x\oplus y)\oplus(y\oplus z)\subseteq C \Leftrightarrow <x,z>\in R$.

所以R是传递的。

综上所证，R是A上的等价关系。

画出等价关系$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\land x\equiv y \pmod 3\}$的关系图，其中$A=\{1,2,\ldots,8\}$。



不难看出，上述关系图被分为三个分离（互不连通）的部分。每部分中的数两两都有关系(模3相等)，位于不同部分中的数之间则没有关系。

称每一部分中的顶点构成了一个**等价类**。

定义7.16（等价类） 设R为非空集合上的等价关系，$\forall x \in A$，令$[x]_R=\{y \mid y \in A \wedge xRy\}$，称$[x]_R$为x关于R的等价类，简称为x的等价类，简记为$[x]$。

说明：

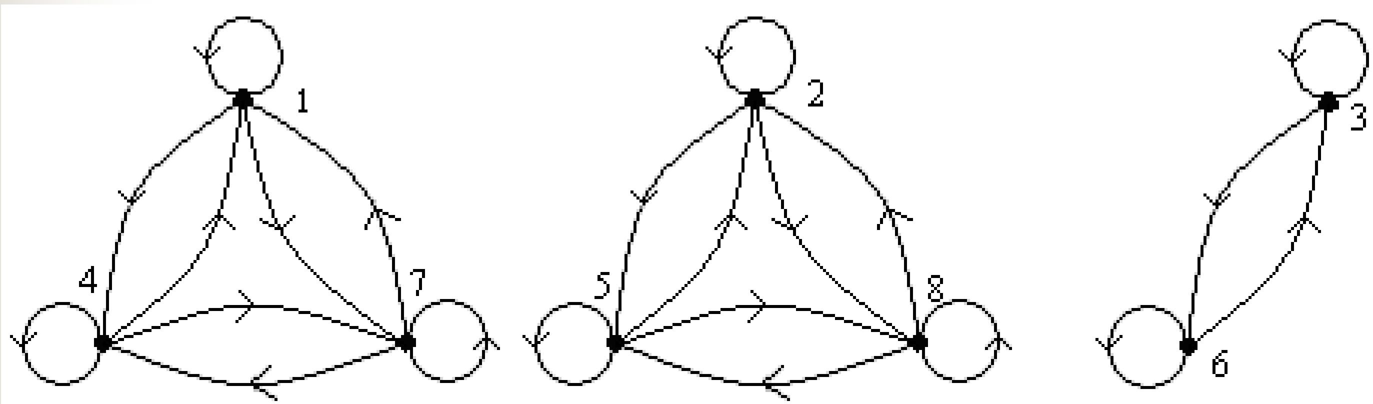
(1) 等价类是相互等价的元素构成的集合。

(2) x的等价类是A中所有与x等价的元素构成的集合。

定义7.17（商集） 设R为非空集合A上的等价关系，以R的所有等价类为元素的集合叫做A在R下的商集，记作A/R，即$A/R=\{[x]_R \mid x \in A\}$

集合A={1,2,…,8}上的等价关系

$R=\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod 3\}$



等价类是：

[1]=[4]=[7]={1，4，7}

[2]=[5]=[8]={2，5，8}

[3]=[6]={3，6}

集合A={1,2,…,8}上的等价关系R={<x, y>|x, y∈A∧x≡y（mod 3）}

产生的等价类：{1, 4, 7}、{2, 5, 8}、{3, 6}

A在R下的商集：{{1, 4, 7}, {2, 5, 8}, {3, 6}}

定理7.14（等价类的性质） 设R为非空集合A上的等价关系，则

（1）$[x]$是A的非空子集

（2）$\forall x, y\in A$，如果xRy，则$[x]=[y]$

（3）$\forall x, y\in A$，如果$x\not R y$，则$[x]$与$[y]$不交

（4）$\cup\{[x] \mid x\in A\}=A$

定理的含义：

（1）：任何等价类都是集合A的非空子集

（2）和（3）：在A中任何两个元素，它们的等价类相等或不相交，不能部分相交。

（4）：所有等价类的并集就是A

（3）和（4）：等价关系将A划分成若干个互不相交的子集

集 合 $A=\{1,2,\ldots,8\}$ 上 的 等 价 关 系 $R=\{\langle x, y\rangle \mid x, y\in A \wedge x\equiv y \pmod 3\}$

产生的等价类：$\{1, 4, 7\}$、$\{2, 5, 8\}$、$\{3, 6\}$

A在R下的商集：$\{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$

定义7.18（划分）设A为非空集合，若A的子集族π（π⊆P(A)，是A的子集构成的集合）满足以下的条件：

（1）$\varnothing \notin \pi$

（2）$\forall x \forall y$（$x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing$）

即π中任意两个集合不相交

（3）$\cup \pi = A$，即π中所有集合的并集等于A

则称π是A的一个**划分**，称π中的元素为A的**划分块**

例 设 $A=\{a,b,c,d\}$，给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ 如下，判别它们是否为A的划分。

$\pi_1=\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$

$\pi_2=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$\pi_3=\{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$

$\pi_4=\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\pi_5=\{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}\}$

$\pi_6=\{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$

其中 π_1，π_2 是A的划分，π_3，π_4，π_5，π_6 不是A的划分

集合A的等价关系与集合A的划分一一对应

（1）每个A上的等价关系所产生的商集是一个划分

（2）每个A的划分π决定一个A上等价关系R

通过A的一个划分来确定等价关系R的方法是：对任意的x, y∈A，<x, y>∈R当且仅当x和y在π的同一划分块中。

例 A={a, b, c, d}的一个划分为π={{a, b}, {c}, {d}}

则π对应的等价关系为：

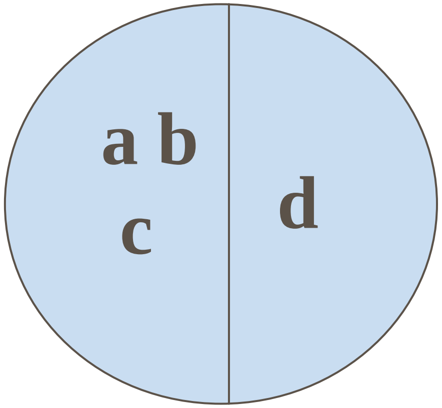
$$R=\{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\} \cup I_A$$

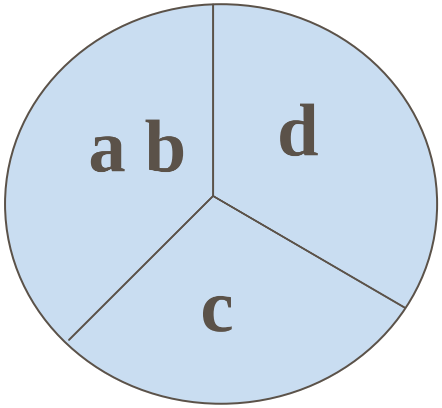
划分的图形表示

一般用“圆”来表示一个划分，将圆划分成若干份来表示划分块。

例如: π 1={ { a， b， c }， { d } }

π 2={ { a， b }， { c }， { d } }





例7.18 给出A={1，2，3}上所有的等价关系

解：

利用图形对A进行划分。

这些划分与A上的等价关系之间是一一对应的：

π_1: R1对应于全域关系E_A

π_2: $R2=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}\cup I_A$

π_3; $R3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\cup I_A$

π_4: $R4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}\cup I_A$

π_5: R5对应于恒等关系I_A

思考题

求出四元集上可定义多少个不同的等价关系?

7.7 偏序关系

偏序关系是另一种重要的关系

定义7.19（偏序关系） 设R为非空集合A上的关系，如果R是自反的，反对称的和传递的，则称R为A上的偏序(partial order)关系，简称偏序，记作≼。

说明：

设≼为A上的偏序关系，如果有序对<x, y>属于偏序≼，可记作x≼y，读作“x小于等于y”。

这里的小于等于不是指数的大小，而是指它们在偏序关系中位置的先后。

小于等于也许小于等于指的是大于等于。

集合A上的恒等关系I_A	√
集合A上的空关系∅	×
集合A上的全域关系E_A	×
P（A）上的包含关系	√
实数集上小于等于关系	√
正整数集上的整除关系	√

集合元素的可比与不可比

定义7.20 设R为非空集合A上的偏序关系，定义

（1）$\forall x, y \in A$，$x \preccurlyeq y \lor y \preccurlyeq x \Leftrightarrow x$与$y$可比

（2）$\forall x, y \in A$，若$x \preccurlyeq y$与$y \preccurlyeq x$都不成立，则x与y不可比

（3）$\forall x, y \in A$，$x \preccurlyeq y \land x \neq y \Leftrightarrow x \prec y$

说明：

（1）$x \prec y$读作"x小于y"，这里所说的小于是指在偏序关系的有序对中x排在y的前面。

（2）在具体的偏序关系$\preccurlyeq$的集合A中任意两个元素x和y，可能有下述几种情况发生：

$x \prec y$、 $y \prec x$、$x=y$、x与y不可比

例如： A={1，2，3}，≼是A上的整除关系，

可比：1<2，1<3，1=1，2=2，3=3

不可比：2和3

定义7.21（全序关系）

设R为非空集合A上的偏序关系，如果∀x, y∈A, x与y都是可比的，则称R为A上的全序(total order)关系（或线序(linear order)关系）。

例如：数集上的小于等于关系是全序关系，

因为任何两个数总是可以比大小的。

数集上的整除关系一般说来不是全序关系，

如集合{1, 2, 3}上的整除关系不是全序关系

因为2和3不可比。

定义7.22（偏序集）

集合A和A上的偏序关系≼统称为偏序集(poset)，记作$\langle A, \preccurlyeq \rangle$。

例如：

整数集合Z和数的小于等于关系≤构成偏序集$\langle Z, \le \rangle$，

幂集P(A)和包含关系⊆构成偏序集$\langle P(A), \subseteq \rangle$

偏序集的四元(element)四界(bound)

四元： 最小(least)元，最大(greatest)元，
极小(minimal)元，极大(maximal)元

四界： 上(upper)界，下(lower)界，
最小上(least upper)界，最大下(greatest lower)界

定义7.24 （最小元，最大元，极小元，极大元）

设<A，≤>为偏序集，$y \in A$

（1）若$\forall x(x \in A \rightarrow y \leq x)$成立，则称y为A的**最小元**

（2）若$\forall x(x \in A \rightarrow x \leq y)$成立，则称y为A的**最大元**

（3）若$\forall x(x \in A \wedge x \leq y \rightarrow x=y)$成立，则称y为A的**极小元**

（4）若$\forall x(x \in A \wedge y \leq x \rightarrow x=y)$成立，则称y为A的**极大元**

最小元“小于等于”集合A中其它所有元素

最大元“大于等于”集合A中其它所有元素

如果A中没有比y更小的元素存在，则y就是A的极小元

如果A中没有比y更大的元素存在，则y就是A的极大元

例 已知偏序集<A，$R_{整除}$>，其中A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}求A的最小元，最大元，极小元，极大元。

解:

最小元：1

最大元：无

极小元：1

极大元：5，6，7，8，9

例 已知偏序集$\langle A, R\rangle$，其中$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$，

$$R=\{\langle b, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle b, f\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle c, f\rangle, \langle d, f\rangle, \langle e, f\rangle, \langle g, h\rangle\} \cup I_A$$

求A的最小元，最大元，极小元，极大元。

解：

最小元：无

最大元：无

极小元：a, b, c, g

极大元：a, f, h

偏序集的哈斯图

首先定义偏序集中的覆盖关系。

定义7.23（覆盖关系）设<A，≼>为偏序集，∀x, y∈A，如果x≺y且不存在z∈A使的x≺z≺y，则称y覆盖x。

例如：{1，2，4，6}集合上的整除关系，

2覆盖1，4和6都覆盖2，

但4不覆盖1，因为有1≺2≺4

6不覆盖4，因为6和4不可比

注意：x和y不可比，则一定不会有x覆盖y或y覆盖x

如何画偏序集<A，≤>哈斯图

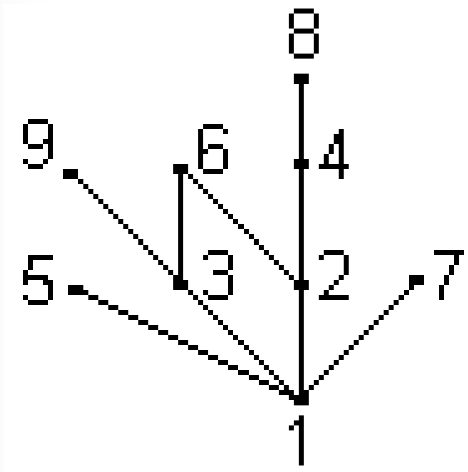
（1）首先画出偏序集中最小或一个极小的顶点

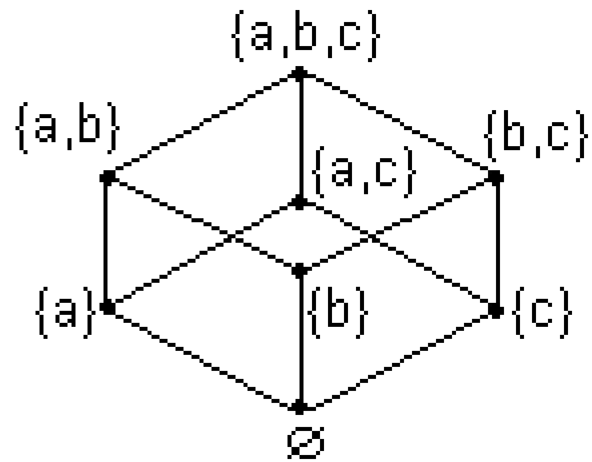
（2）然后依次考察其它的顶点，如果y覆盖x，则将y画在x的上方，并用一条线段连接x和y。

例7.19 画出偏序集的哈斯图：

$<\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{整除}>$，$<P(\{a,b,c\}), R_{\subseteq}>$

解：哈斯图如下：





极小元：1
极大元：5，6，7，8，9
最小元：1
最大元：无

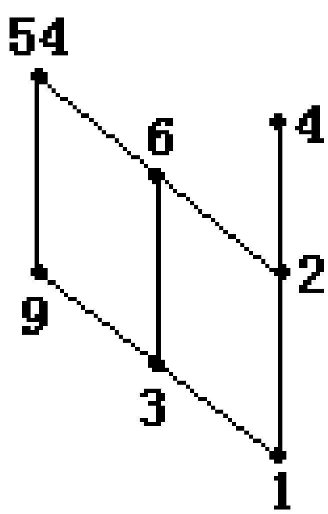
极小元：∅
极大元：{a, b, c}
最小元：∅
最大元：{a, b, c}

练习：

设集合A={1，2，3，4，6，9，54}，R是A上的整除关系，即R＝{<x, y>|x, y∈A∧x整除y}。

（1）画出<A，R>的哈斯图。

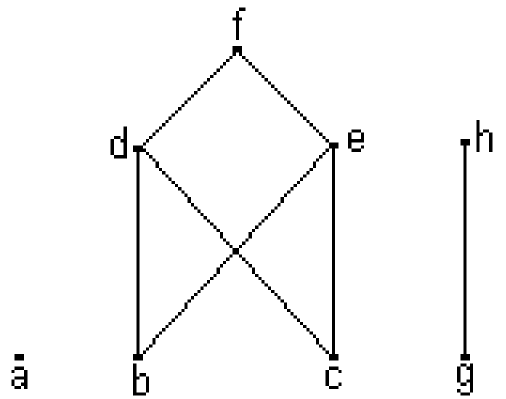
（2）求<A，R>的极小元、最小元、极大元和最大元。



极小元：1
极大元：4、54
最小元：1
最大元：无

由哈斯图求偏序集

例7.20 已知偏序集<A，R>的哈斯图如下，试求出集合A和关系R的表达式， A的最小元，最大元，极小元，极大元。



解： $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$R=\{\langle b, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle b, f\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle c, f\rangle, \langle d, f\rangle, \langle e, f\rangle, \langle g, h\rangle\} \cup I_A$

极小元：a, b, c, g

极大元：a, f, h

没有最小元和最大元

最小元，最大元，极小元，极大元的性质

1. 最小元或最大元可能存在，也可能不存在
2. 如果最小元或最大元存在，则是唯一的
3. 对于非空有穷偏序集来说，一定存在极小元、极大元
4. 极小元、极大元可以是多个
5. 对于非空有穷偏序集，当极小元唯一时，它也是最小元；当极大元唯一时，它也是最大元

定义7.25 （上界，下界，上确界，下确界）

设<A，≤>为偏序集，$B \subseteq A$，$y \in A$

（1）若$\forall x$（$x \in B \to x \leq y$）成立，则称y为B的上界

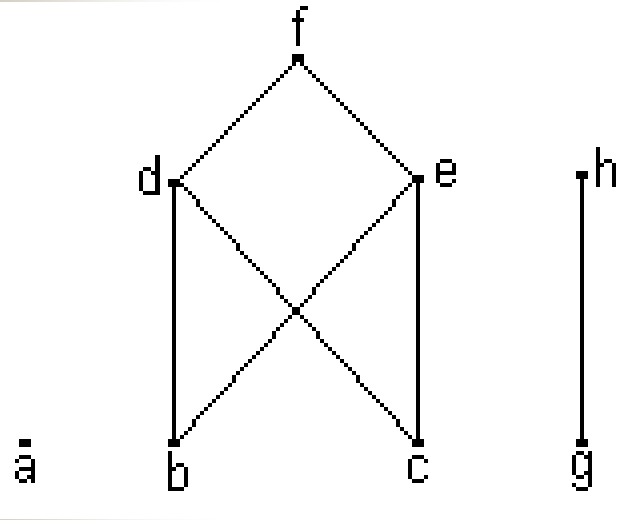
（2）若$\forall x$（$x \in B \to y \leq x$）成立，则称y为B的下界

（3）称$\min\{y \mid y$为B的上界$\}$为B的最小上界或上确界

（4）称$\max\{y \mid y$为B的下界$\}$为B的最大下界或下确界

例： 已知偏序集<A，R>的哈斯图如下

令(1)B={b, c, d}；（2） B={d, e} 。



(1)B的下界和最大下界都不存在

上界有d和f，最小上界为d

(2)B的下界为b, c

最大下界不存在

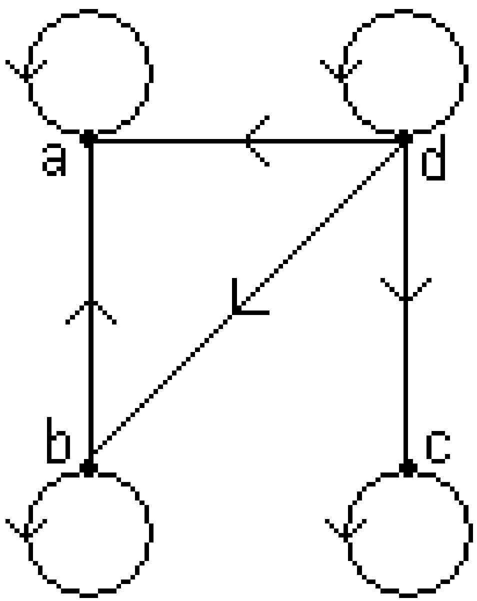
上界和最小上界都为f

练习

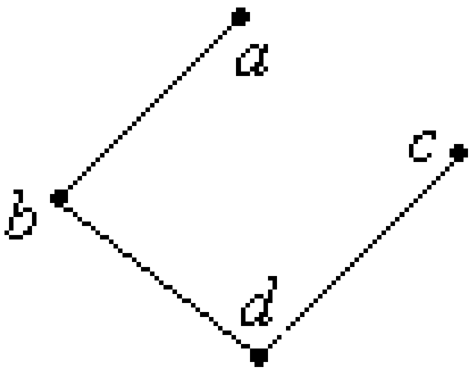
设$A=\{a, b, c, d\}$，R为定义在A上的二元关系，其关系图如下图所示。

（1）画出偏序集$<A, R>$的哈斯图

（2）设$B=\{b, c\}$，求B的上界、上确界，下界和下确界



偏序集<A, R>的哈斯图如下：



集合B无上界，无上确界，
下界有d，下确界为d。

定义（严格序关系）

设集合A上二元关系R，若R满足反自反，反对称和传递性质，则称R为A上的严格序关系。