第3章 电路分析的几个定理

- 3.1 叠加定理
- 3.2 替代定理(简介)
- 3.3 戴维宁定理和诺顿定理
- 3.4 最大功率传输定理

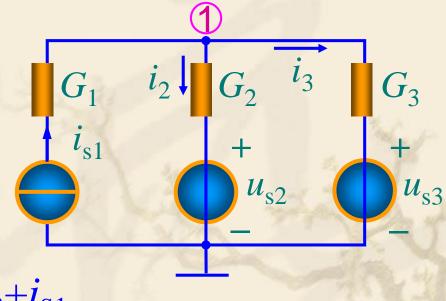


熟练掌握各定理的内容、适用范围及如何应用。

3.1 叠加定理

- 1. 叠加定理在线性电路中,若同时受到多个独立电源的作用,则任一支路的电流(或电压)可以看成是电路中每个独立电源单独作用时,在该支路产生的电流(或电压)的代数和。
- 2. 定理的证明

应用结点法:



$$(G_2+G_3)u_{n1}=G_2u_{s2}+G_3u_{s3}+i_{s1}$$

$$u_{n1} = \frac{G_2 u_{S2}}{G_2 + G_3} + \frac{G_3 u_{S3}}{G_2 + G_3} + \frac{i_{S1}}{G_2 + G_3}$$

或表示为:

$$u_{n1} = a_1 i_{S1} + a_2 u_{S2} + a_3 u_{S3}$$
$$= u_{n1}^{(1)} + u_{n1}^{(2)} + u_{n1}^{(3)}$$

支路电流为:

$$i_{2} = (u_{n1} - u_{s2})G_{2} = (\frac{-G_{3}G_{2}}{G_{2} + G_{3}})u_{s2} + \frac{G_{3}G_{2}u_{s3}}{G_{2} + G_{3}} + \frac{G_{2}i_{s1}}{G_{2} + G_{3}}$$

$$= b_{1}i_{s1} + b_{2}u_{s2} + b_{3}u_{s3} = i_{2}^{(1)} + i_{2}^{(2)} + i_{2}^{(3)}$$

$$i_{3} = (u_{n1} - u_{s3})G_{3} = (\frac{G_{3}G_{2}}{G_{2} + G_{3}})u_{s2} + (\frac{-G_{2}G_{3}}{G_{2} + G_{3}})u_{s3} + \frac{G_{3}i_{s1}}{G_{2} + G_{3}}$$

$$= i_{3}^{(1)} + i_{3}^{(2)} + i_{3}^{(3)}$$



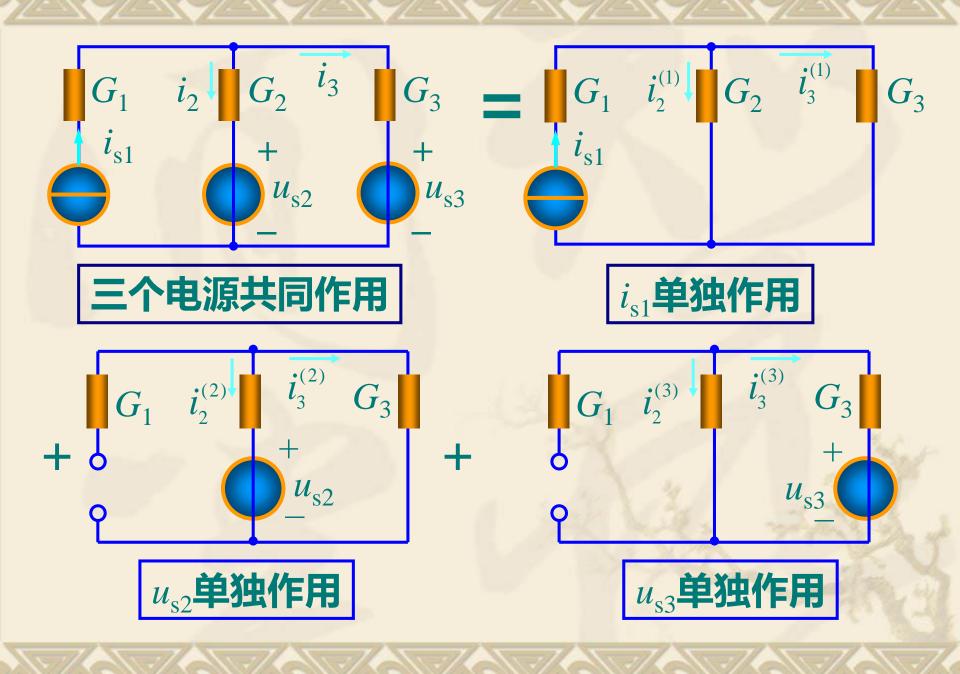
结点电压和支路电流均为各电源的一次函数,均可看成各独立电源单独作用时,产生的响应之叠加。

3. 几点说明

- ①叠加定理只适用于线性电路,不适用非线性电路。
- ②某个独立电源单独作用时,其余电源为零

电压源为零 一 短路。

电流源为零 一 开路。



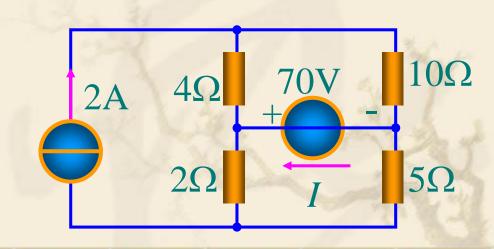
- ③功率不能叠加(功率为电压和电流的乘积,为电源的二次函数)。
- ④ u, i叠加时要注意各分量的参考方向, 一致时取"+", 反之, 取"-"。
- ⑤ 受控源不能单独作用,但当独立源作用时受控源应始 终保留。

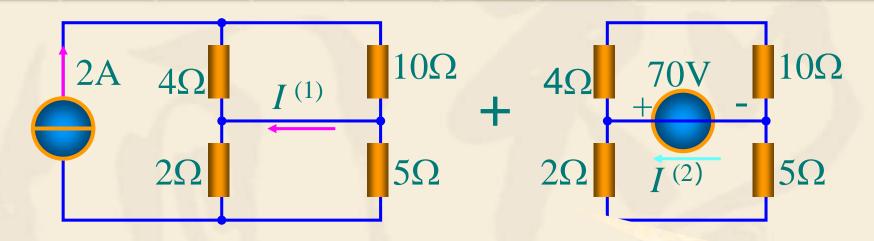
4. 叠加定理的应用

例1 求电压源的电流及功率

解

画出分电路图





2A电流源作用, 电桥平衡:

两个简单电路

$$I^{(1)} = 0$$

70V电压源作用:
$$I^{(2)} = 70/14 + 70/7 = 15A$$

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} = 15A$$
 $P = 70 \times 15 = 1050W$

应用叠加定理可使计算简化

例2 计算电压u

解画出分电路图

3A电流源作用:

$$u^{(1)} = (6//3+1) \times 3 = 9V$$

其余电源作用:

$$i^{(2)} = (6+12)/(6+3) = 2A$$

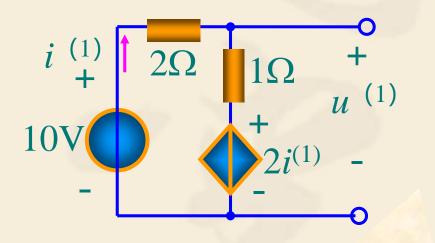
 3Ω

 6Ω

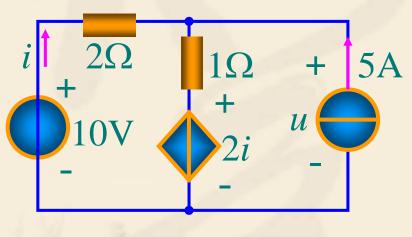
注意 叠加方式是任意的,可以一次一个独立源单独作用,也可以一次几个独立源同时作用,取决于使分析计算简便。

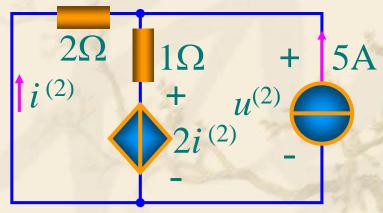
例3 计算电压u、电流i。

解 画出分电路图



受控源始终保留





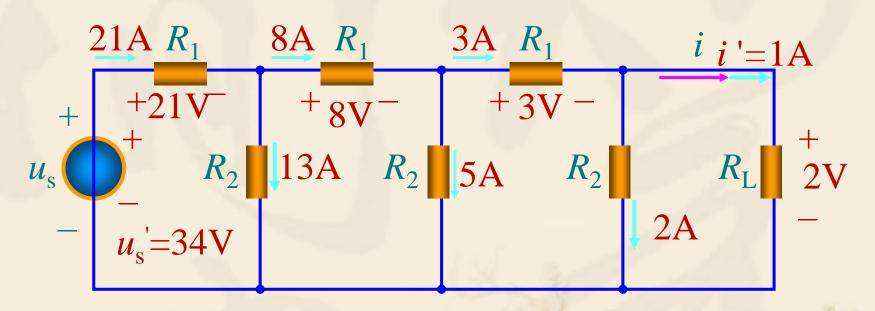
5.齐性原理

线性电路中,所有激励(独立源)都增大(或减小)同样的倍数,则电路中响应(电压或电流)也增大(或减小)同样的倍数。



- ①当激励只有一个时,则响应与激励成正比。
- 2具有可加性。

例 $R_L=2\Omega$ $R_1=1$ Ω $R_2=1$ Ω $u_s=51$ V,**求电流** i



解 **采用倒推法**: 设 i'=1A

$$\frac{i}{i'} = \frac{u_{s}}{u_{s}'} \quad \mathbb{RP} \quad i = \frac{u_{s}}{u_{s}'} i' = \frac{51}{34} \times 1 = 1.5 \text{A}$$

当激励只有一个时,则响应与激励成正比。

3.2 替代定理

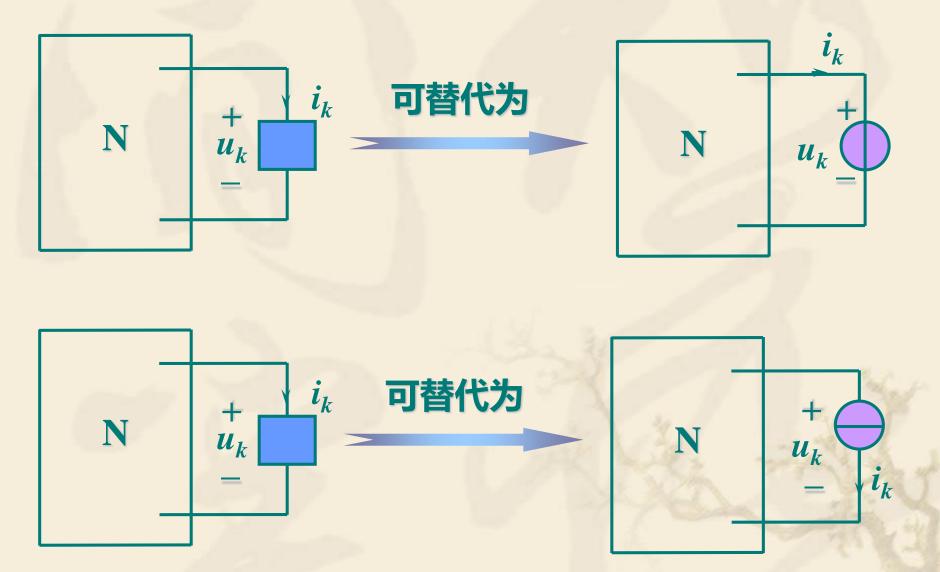
1.替代定理

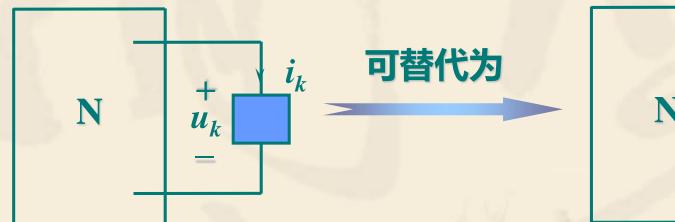
在任意的线性或非线性网络中,若已知第k条支路的电压和电流为 u_k 和 i_k ,则不论该支路是何元件组成的,总可以用下列的任何一个元件去替代:

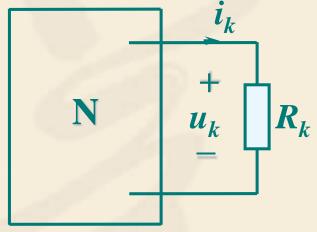
- 即: a) 电压值为 u_k 的理想电压源
 - b) 电流值为 i_k 的理想电流源
 - c) 电阻值为 $\frac{u_k}{i_k}$ 的理想电阻元件 R_k

替代后电路中全部电压和电流都将保持原值不变

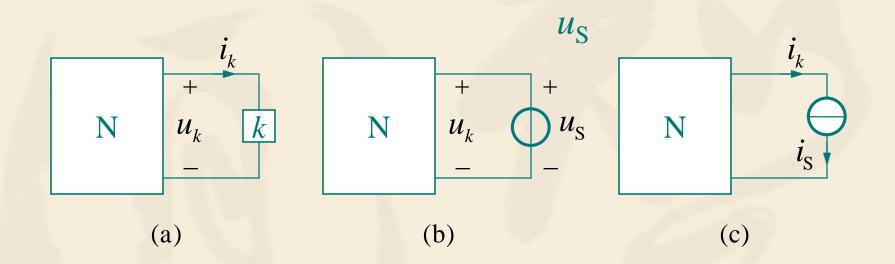
▲ 替代定理如图所示电路说明





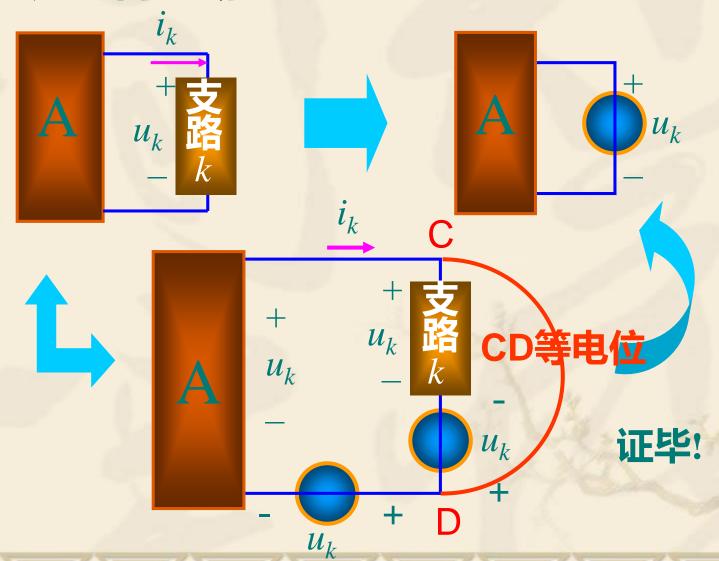


$$R_k = \frac{u_k}{i_k}$$



替代前后KCL,KVL关系相同,其余支路的u、i关系不变。用 u_k 替代后,其余支路电压不变(KVL),其余支路电流也不变,故第k条支路 i_k 也不变(KCL)。用 i_k 替代后,其余支路电流不变(KCL),其余支路电压不变,故第k条支路 u_k 也不变(KVL)。

2. 定理的证明



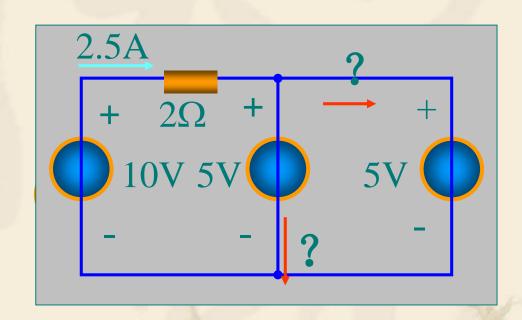


①替代定理既适用于线性电路, 也适用于非线性电路。

②替代后电路必须有 唯一解。

无电压源回路;

无电流源结点

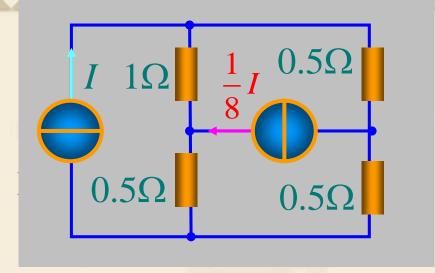


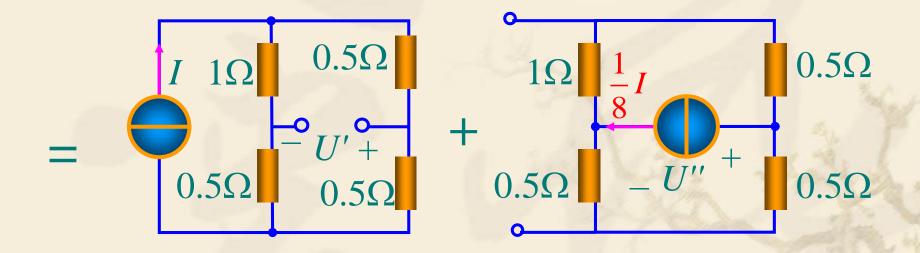
③替代后其余支路及参数不能改变。

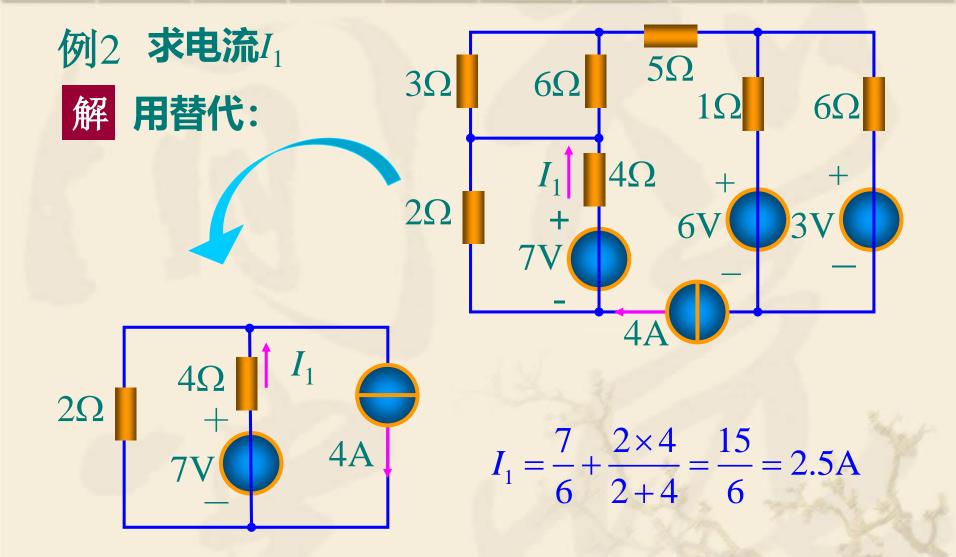
3. 替代定理的应用

例1 若使 $I_x = \frac{1}{8}I$, 试求 R_x

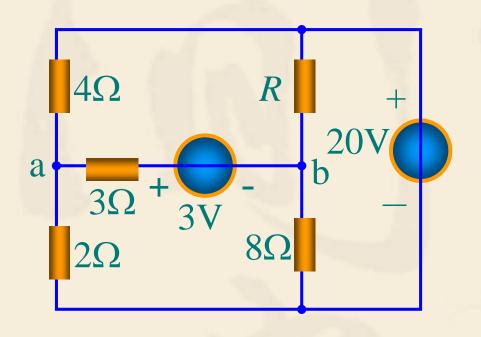
解 用替代:

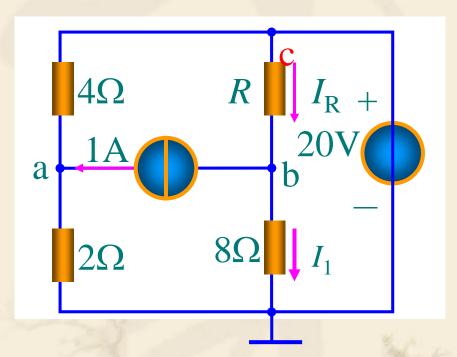




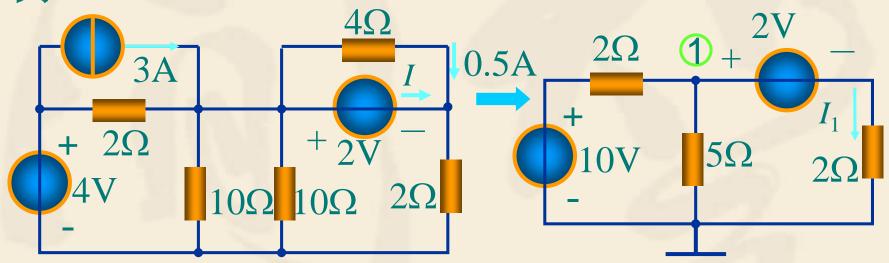


例3 **己知:** u_{ab} =0, 求电阻R





例4 用多大电阻替代2V电压源而不影响电路的工作



解 应求电流1, 先化简电路。

$$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5})u_1 = \frac{10}{2} + \frac{2}{2} = 6$$

$$I_1 = (5-2)/2 = 1.5A$$

$$R = 2/1 = 2\Omega$$

应用结点法得:

$$u_1 = 6/1.2 = 5V$$

$$I = 1.5 - 0.5 = 1A$$

例5 已知: $u_{ab}=0$, 求电阻R



$$u_{ab} = 0$$

$$u_{ab} = 0$$

$$\Rightarrow i_{ab} = i_{cd} = 0$$

用开路替代,得:

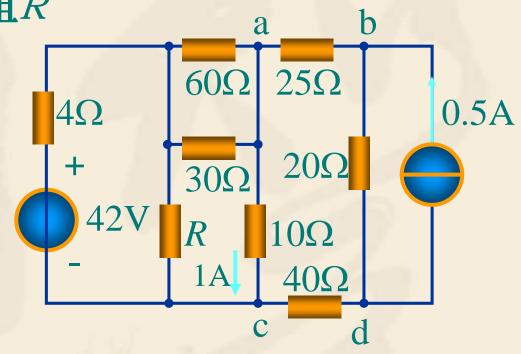
$$u_{\rm bd} = 20 \times 0.5 = 10 \text{V}$$

短路替代

$$u_{\rm ac} = 10 \text{V}$$

$$u_{\rm p} = 20 \times 1 + 10 = 30 \text{V}$$

$$R = \frac{u_{\rm R}}{i_{\rm R}} = \frac{30}{2} = 15\Omega$$



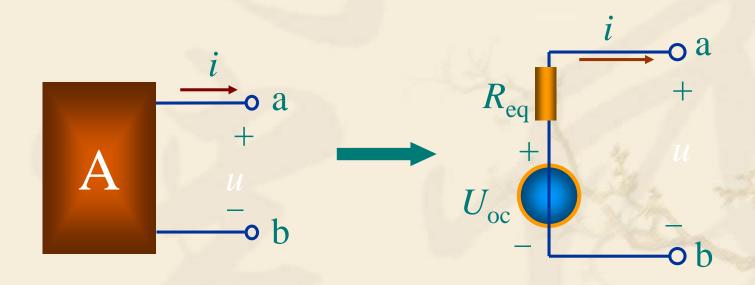
$$i_{\rm R} = (42 - 30)/4 - 1 = 2A$$

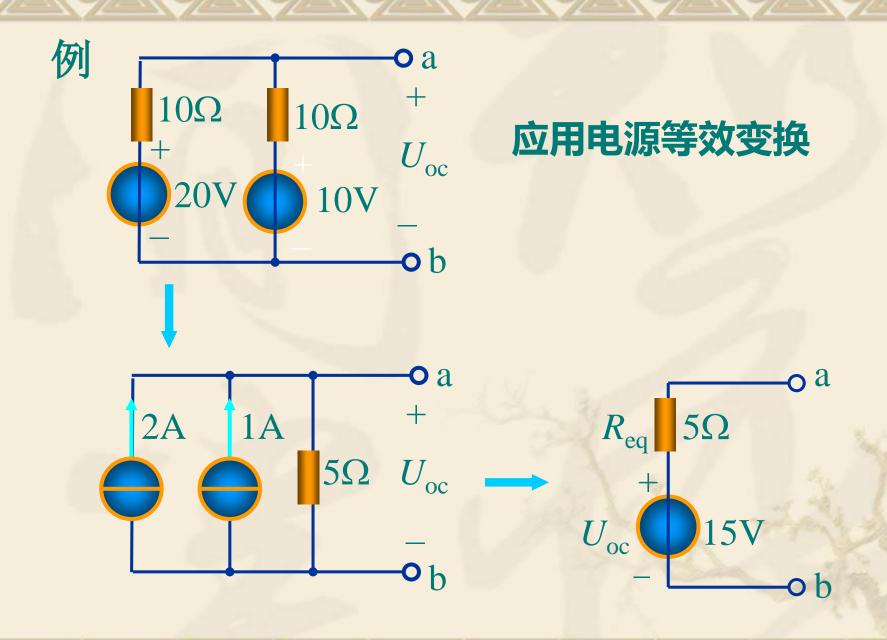
3.3 戴维宁定理和诺顿定理

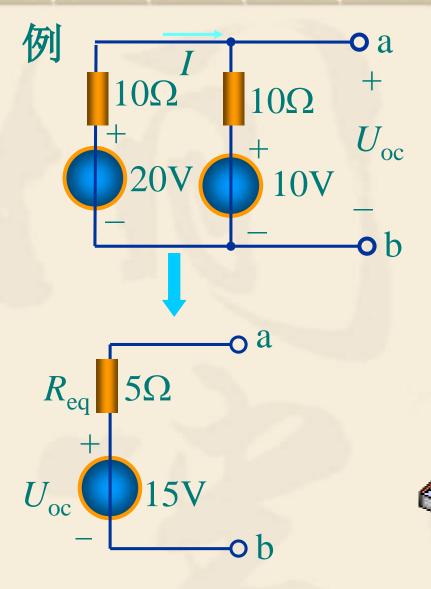
工程实际中,常常碰到只需研究某一支路的电压、电流或功率的问题。对所研究的支路来说,电路的其余部分就成为一个有源二端网络,可等效变换为较简单的含源支路(电压源与电阻串联或电流源与电阻并联支路),使分析和计算简化。戴维宁定理和诺顿定理正是给出了等效含源支路及其计算方法。

1. 戴维宁定理

任何一个线性含源一端口网络,对外电路来说,总可以用一个电压源和电阻的串联组合来等效置换;此电压源的电压等于外电路断开时端口处的开路电压 u_{oc} ,而电阻等于一端口的输入电阻(或等效电阻 R_{eq})。







应用电戴维宁定理

(1) 求开路电压 U_{oc}

$$I = \frac{20 - 10}{20} = 0.5A$$

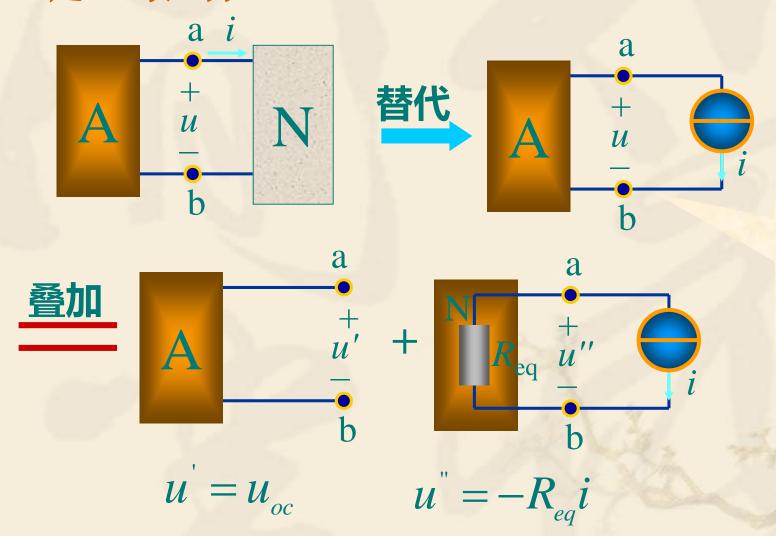
$$U_{oc} = 0.5 \times 10 + 10 = 15V$$

(2) 求输入电阻R_{eq}

$$R_{\rm eq} = 10//10 = 5\Omega$$

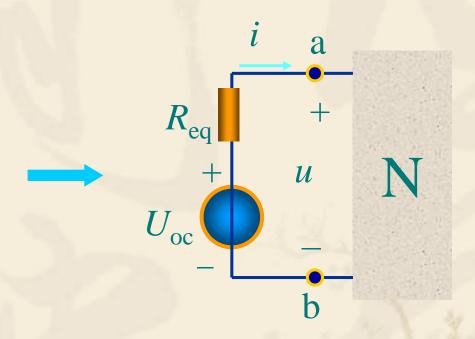


2. 定理的证明



A 独立源置零

$$u = u' + u'' = u_{oc} - R_{eq}i$$



3.定理的应用

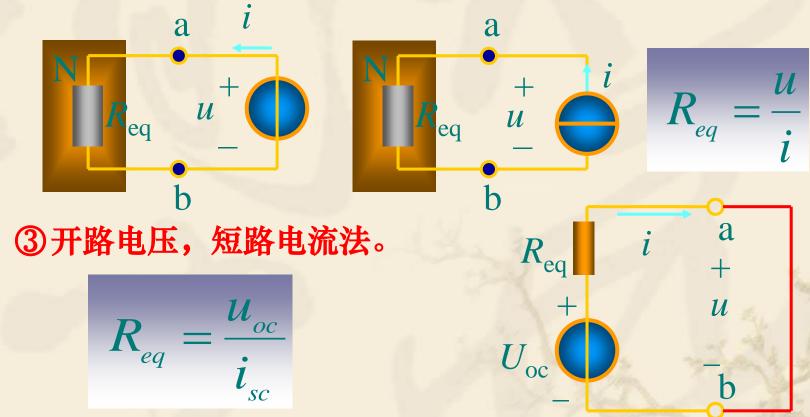
(1) 开路电压 U_{oc} 的计算

戴维宁等效电路中电压源电压等于将外电路断开时的 开路电压 U_{oc} ,电压源方向与所求开路电压方向有关。计算 U_{oc} 的方法视电路形式选择前面学过的任意方法,使易于计 算。

(2) 等效电阻的计算

等效电阻为将一端口网络内部独立电源全部置零(电压源短路,电流源开路)后,所得无源一端口网络的输入电阻。常用下列方法计算:

- ①当网络内部不含有受控源时可采用电阻串并联和△-Y 互换的方法计算等效电阻;
- ②外加电源法(加电压求电流或加电流求电压);



方法②③更具一般性

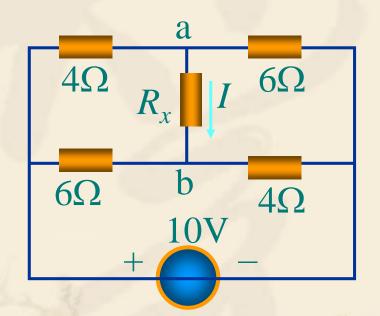


- ① 外电路可以是任意的线性或非线性电路,外电路发生改变时,含源一端口网络的等效电路不变(伏-安特性等效)。
- ② 当一端口内部含有受控源时,控制电路与受控源必须包含在被化简的同一部分电路中。

例1 计算 R_x 分别为 1.2Ω 、 5.2Ω 时的电流I

分析:

断开R_x支路,将剩余一端口网络化为戴维宁等效电路:



例2 求电压 U_0

解: ①求开路电压 U_{oc}

$$\begin{cases} U_{\text{oc}} = 6I + 3I \\ I = 9/9 = 1A \end{cases}$$

$$U_{\rm oc}=9{
m V}$$

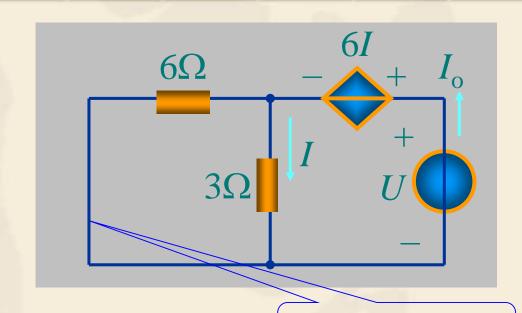


$$U = 6I + 3I = 9I$$

$$U = 9 \times (2/3)I_0 = 6I_0$$

$$I = I_0 \times 6/(6+3) = (2/3)I_0$$

$$R_{eq} = U/I_0 = 6\Omega$$



独立源置零

方法2: 开路电压、短路电流

$$(U_{oc}=9V)$$

$$6I_1 + 3I = 9$$

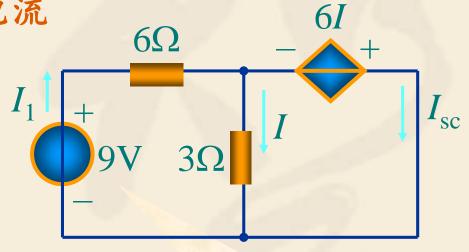


$$I_{\rm sc} = I_1 = 9/6 = 1.5$$
A

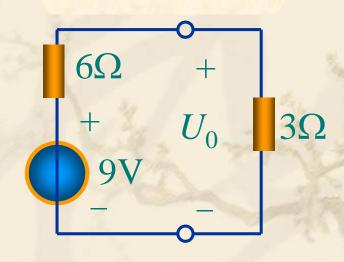
$$R_{\rm eq} = U_{\rm oc} / I_{\rm sc} = 9/1.5 = 6 \Omega$$

③等效电路

$$U_0 = \frac{9}{6+3} \times 3 = 3V$$



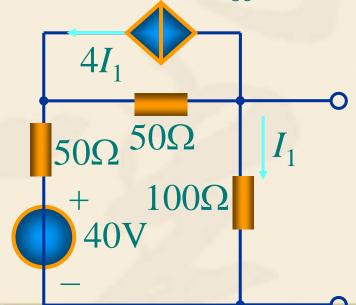
独立源保留

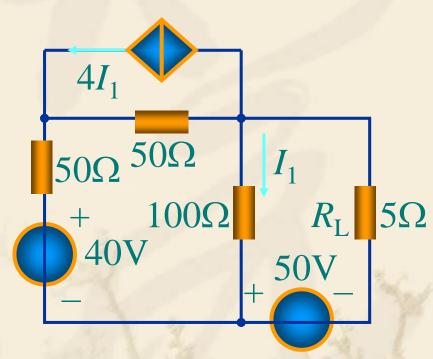


→ 沒意算含受控源电路的等效电阻是用外加电源 法还是开路、短路法,要具体问题具体分析,以 计算简便为好。

例3 求负载尽消耗的功率

解: ①求开路电压 U_{oc}





$$100I_1 + 200I_1 + 100I_1 = 40$$

$$I_1 = 0.1A$$

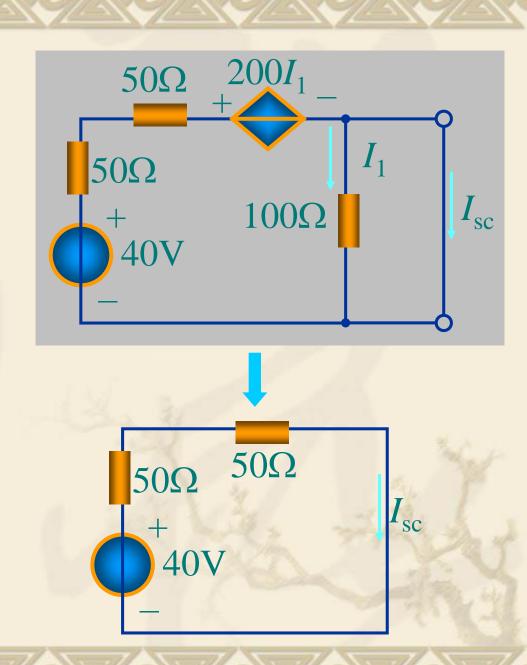
$$U_{\rm oc} = 100I_1 = 10V$$

②求等效电阻 R_{eq}

用开路电压、短路电流法

$$I_{\rm sc} = 40/100 = 0.4$$
A

$$R_{\rm eq} = \frac{U_{\rm oc}}{I_{\rm sc}} = 10/0.4 = 25\Omega$$



$$R_{\text{eq}}$$
 25 Ω I_{L} 5 Ω $I_{\text{L}} = \frac{U_{oc} + 50}{25 + 5} = \frac{60}{30} = 2A$
 U_{oc} 10V $P_{\text{L}} = 5I_{\text{L}}^2 = 5 \times 4 = 20W$

例4 已知开关S

$$\rightarrow$$
 1 $A = 2A$

$$\rightarrow$$
 2 $\sqrt{V} = 4V$



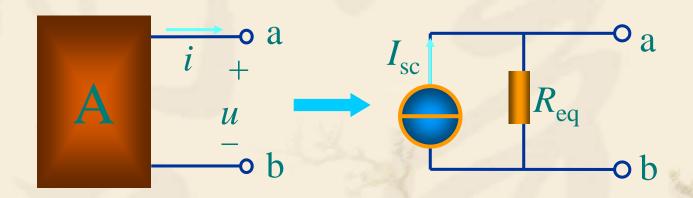
求开关S打向3,电压U等于多少。

解:
$$i_{Sc} = 2A$$
 $U_{oc} = 4V$ \longrightarrow $R_{eq} = 2\Omega$

$$U = (2+5) \times 1 + 4 = 11V$$

4. 诺顿定理

任何一个含源线性一端口电路,对外电路来说,可以用一个电流源和电阻的并联组合来等效置换;电流源的电流等于该一端口的短路电流,电阻等于该一端口的输入电阻。



●注意

一般情况, 诺顿等效电路可由戴维宁等效电路经电源等效变换得到。诺顿等效电路可采用与戴维宁定理类似的方法证明。

例1 求电流 I

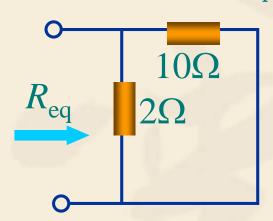
解: ①求短路电流Isc

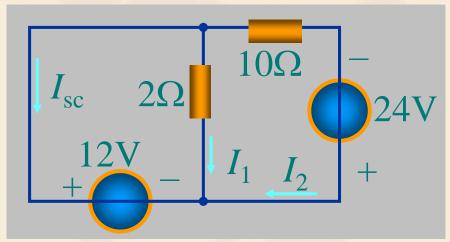
$$I_1 = 12/2 = 6A$$

 $I_2 = (24+12)/10 = 3.6A$

$$I_{\rm sc}$$
=- I_1 - I_2 =- 3.6-6=-9.6A

②求等效电阻 R_{eq}



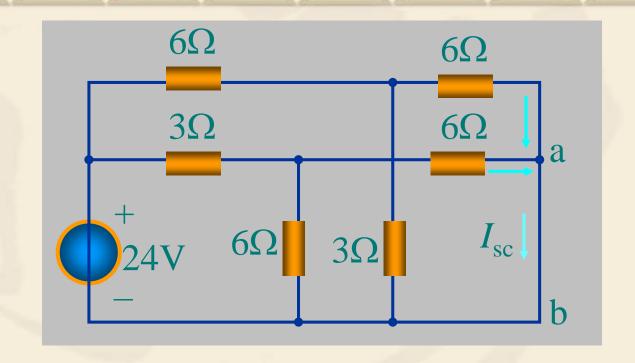


$$R_{\rm eq} = 10//2 = 1.67 \,\Omega$$

③诺顿等效电路:



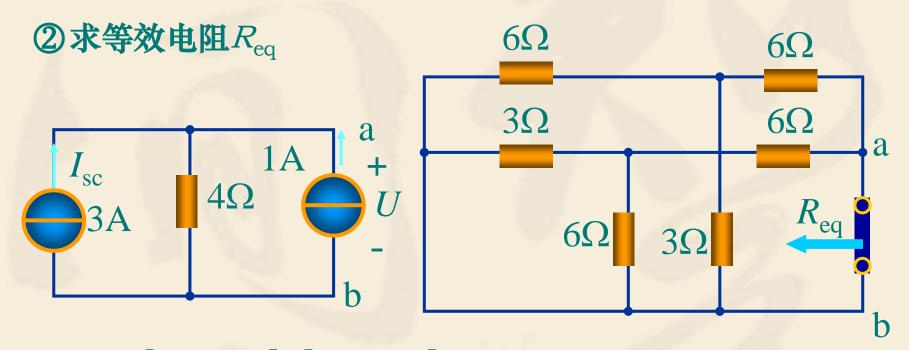
例2 求电压U



解:本题用诺顿定理求比较方便。因a、b处的短路电流比开路电压容易求。

①求短路电流 $I_{\rm sc}$

$$I_{sc} = \frac{24}{6/(6+3)} \times \frac{1}{2} + \frac{24}{3/(6+6)} \times \frac{3}{3+6} = 3A$$



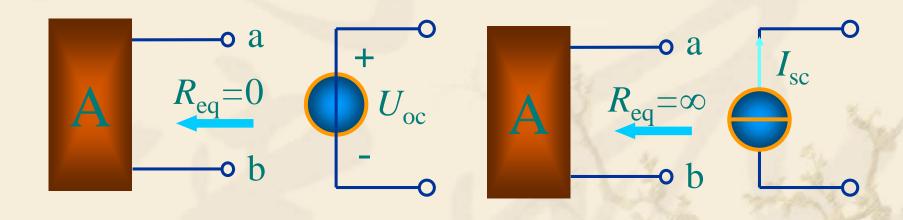
$$R_{eq} = [6//3 + 6]//[3//6 + 6] = 4\Omega$$

③诺顿等效电路:

$$U = (3+1) \times 4 = 16V$$

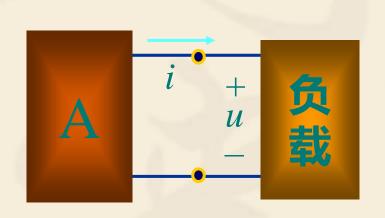


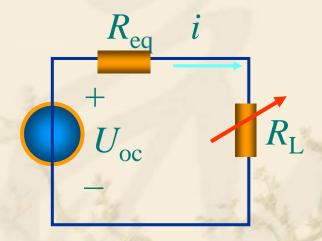
- ①若一端口网络的等效电阻 $R_{eq}=0$,该一端口网络只有戴维宁等效电路,无诺顿等效电路。
- ②若一端口网络的等效电阻 $R_{eq}=\infty$,该一端口网络只有诺顿等效电路,无戴维宁等效电路。



3.4 最大功率传输定理

一个含源线性一端口电路,当所接负载不同时,一端 口电路传输给负载的功率就不同,讨论负载为何值时能从 电路获取最大功率,及最大功率的值是多少的问题是有工 程意义的。





应用戴维宁定理

$$P = R_L \left(\frac{u_{oc}}{R_{eq} + R_L}\right)^2$$

$\begin{array}{c|c} P & P_{max} \\ \hline 0 & R \end{array}$

对P求导:

$$P' = u_{oc}^{2} \frac{(R_{eq} + R_{L})^{2} - 2R_{L}(R_{eq} + R_{L})}{(R_{eq} + R_{L})^{4}} = 0$$

最大功率匹配条件

例 R_L为何值时能获得最大功率,并求最大功率

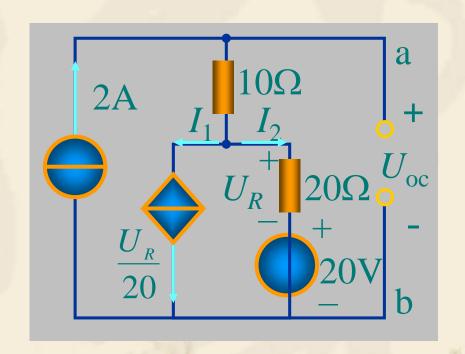
M ①求开路电压 U_{oc}

$$I_1 = I_2 = U_R/20$$

$$I_1 + I_2 = 2A$$

$$I_1 = I_2 = 1A$$

$$U_{oc} = 2 \times 10 + 20I_2 + 20 = 60V$$

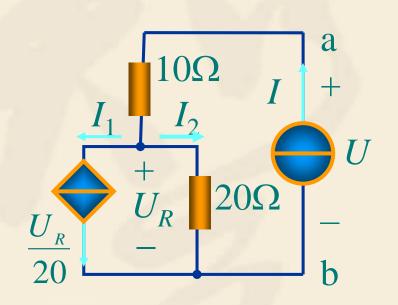


②求等效电阻R_{eq}

$$I_1 = I_2 = I/2$$

$$U = 10I + 20 \times I/2 = 20I$$

$$R_{eq} = \frac{U}{I} = 20\Omega$$



③由最大功率传输定理得:

$$R_L = R_{eq} = 20\Omega$$
 时其上可获得最大功率

$$P_{\text{max}} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{60^2}{4 \times 20} = 45\text{W}$$



- ①最大功率传输定理用于一端口电路给定,负载电阻可调的情况;
- ②一端口等效电阻消耗的功率一般并不等于端口内部 消耗的功率,因此当负载获取最大功率时,电路的传 输效率并不一定是50%;
- ③计算最大功率问题结合应用戴维宁定理或诺顿定理最方便.