

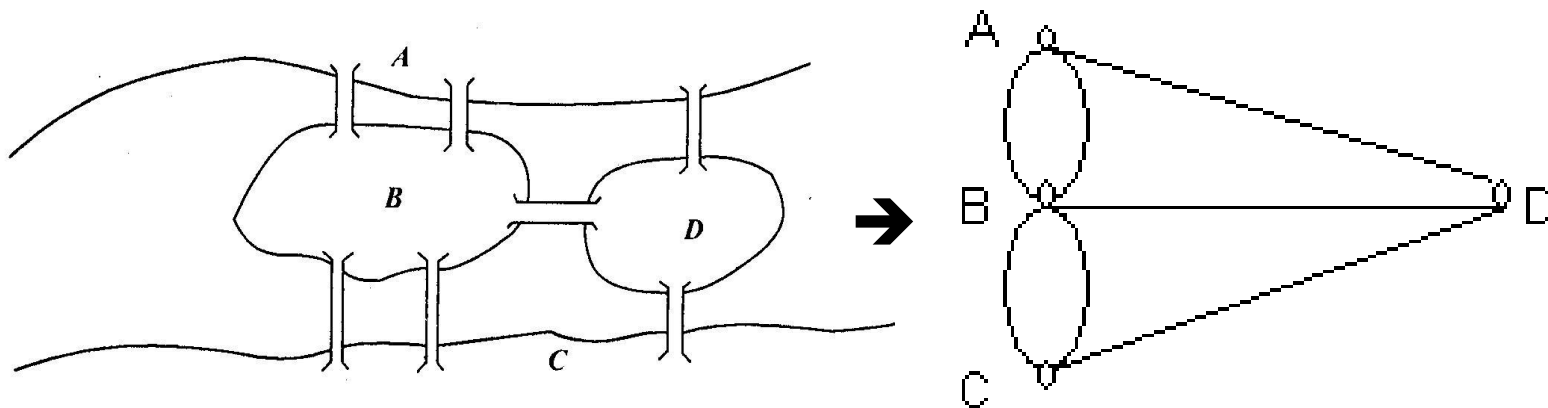


# 第十五章 欧拉图与哈密顿图



## 15.1 欧拉图

1736年数学家欧拉发表了第一篇图论论文，  
解决了哥尼斯堡七桥问题。



## 定义（欧拉通路和欧拉回路）

通过图（无向图或有向图）中所有边一次且仅一次行遍图中所有顶点的通路称为欧拉通路

通过图中所有边一次并且仅一次行遍所有顶点的回路称为欧拉回路

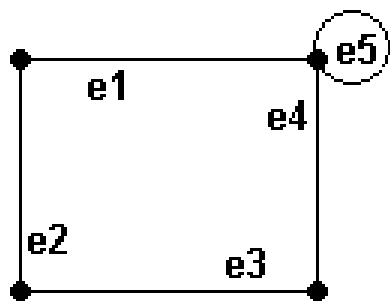
## 定义（欧拉图和半欧拉图）

具有欧拉回路的图称为欧拉图

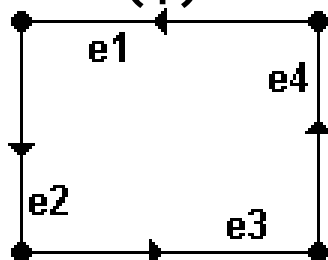
具有欧拉通路无欧拉回路的图称为半欧拉图

规定平凡图是欧拉图

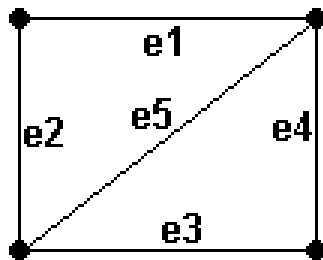
例



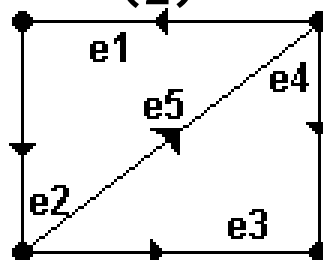
(1)



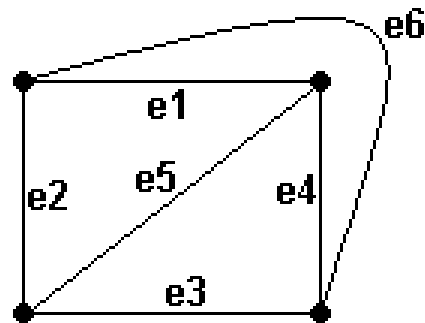
(4)



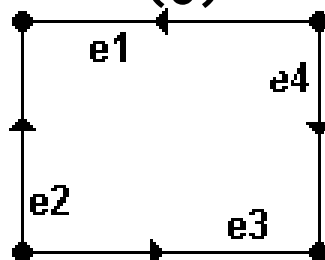
(2)



(5)



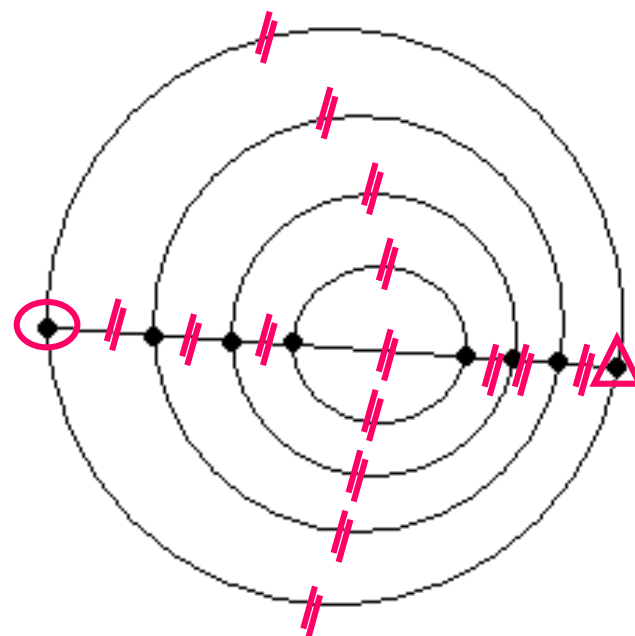
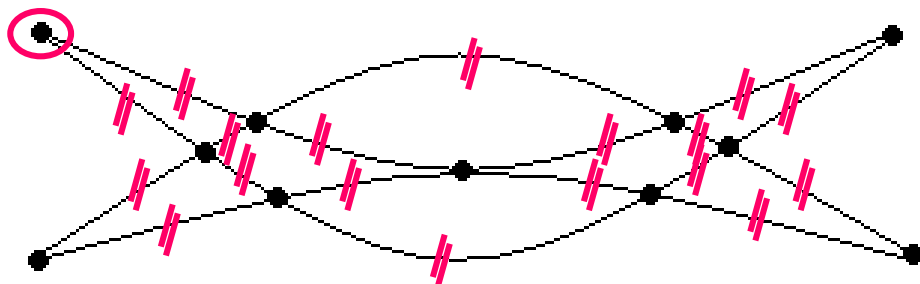
(3)



(6)

- (1) 为欧拉图。
- (2) 为半欧拉图。
- (3) 即不存在欧拉通路，也不存在欧拉回路。
- (4) 为欧拉图。
- (5) 即不存在欧拉通路，也不存在欧拉回路。
- (6) 即不存在欧拉通路，也不存在欧拉回路。

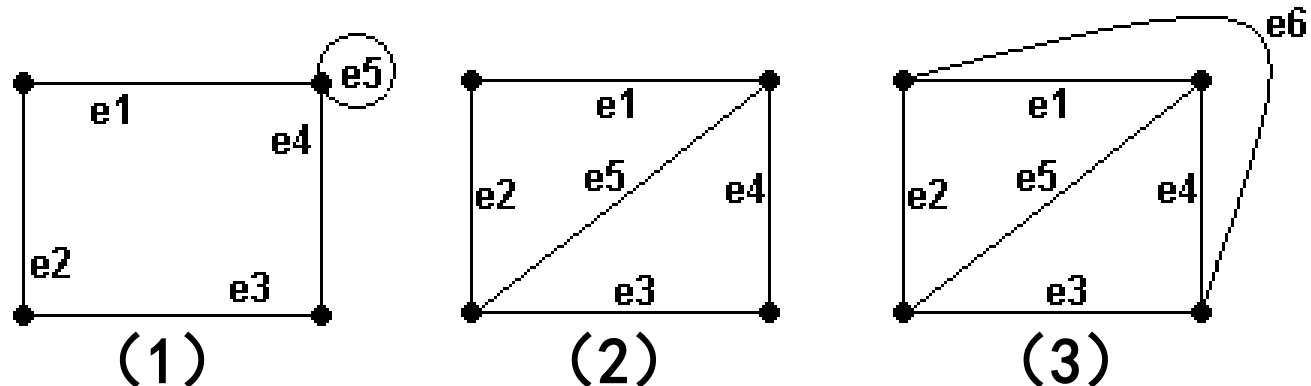
判断所示两图是否为欧拉图、半欧拉图？



## 无向欧拉图与无向半欧拉图的判断方法

**定理15.1（无向欧拉图的判定）** 无向图 $G$ 是欧拉图当且仅当 $G$ 是连通图，且 $G$ 中没有奇度顶点。

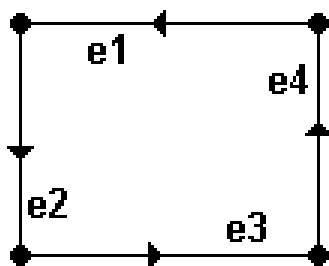
**定理15.2（无向半欧拉图的判定）** 无向图 $G$ 是半欧拉图当且仅当 $G$ 是连通图，且 $G$ 中恰有两个奇度顶点。



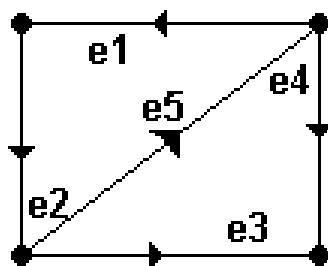
## 有向欧拉图与有向半欧拉图的判断方法

**定理15.3（有向欧拉图的判定）** 有向图D是欧拉图当且仅当D是强连通的且每个顶点的入度都等于出度。

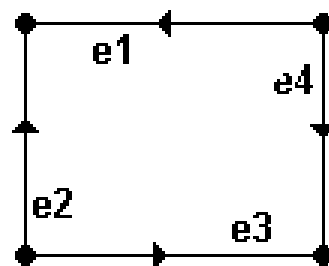
**定理15.4（有向半欧拉图的判定）** 有向图D是半欧拉图当且仅当D是单向连通的，且D中恰有两个奇度顶点，其中一个的入度比出度大1，另一个的出度比入度大1，而其余顶点的入度都等于出度。



(4)



(5)



(6)

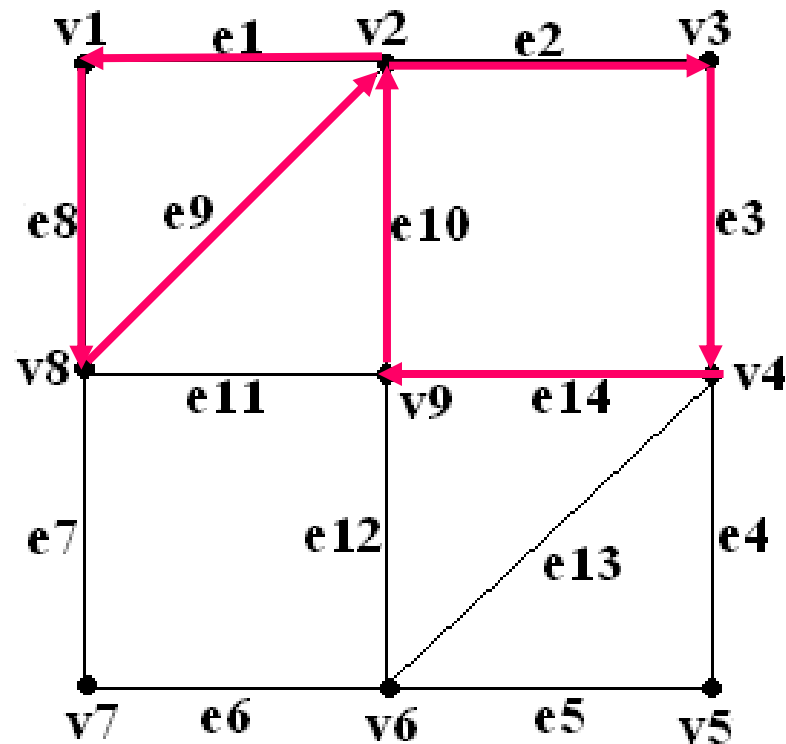
由两判定定理，立即可知

(4) 为欧拉图，

(5)、(6) 即不是欧拉图，也不是半欧拉图。



## 例15.2 (P296)



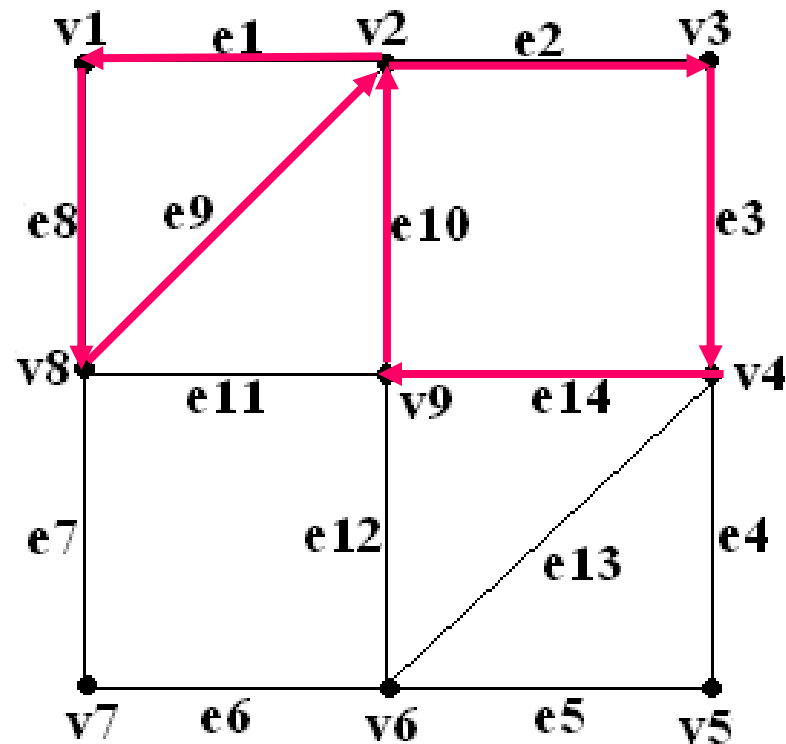
$v_2 e_2 v_3 e_3 v_4 e_{14} v_9 e_{10} v_2 e_1 v_1 e_8 v_8 e_9 v_2$

## ■ Fleury算法

- (1) 任取 $v_0 \in V(G)$ , 令 $P_0 = v_0$ 。
- (2) 设 $P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_i v_i$ 已经行遍, 则按下面方法来从 $E(G) - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 中选取 $e_{i+1}$ :
  - (a)  $e_{i+1}$ 与 $v_i$ 相关联;
  - (b) 除非无别的边可供选择, 否则 $e_{i+1}$ 不应该为  $G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 中的桥。
- (3) 当(2)不能再进行时, 算法停止, 得到的 $P_n = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$ 为 $G$ 中的一条欧拉回路。

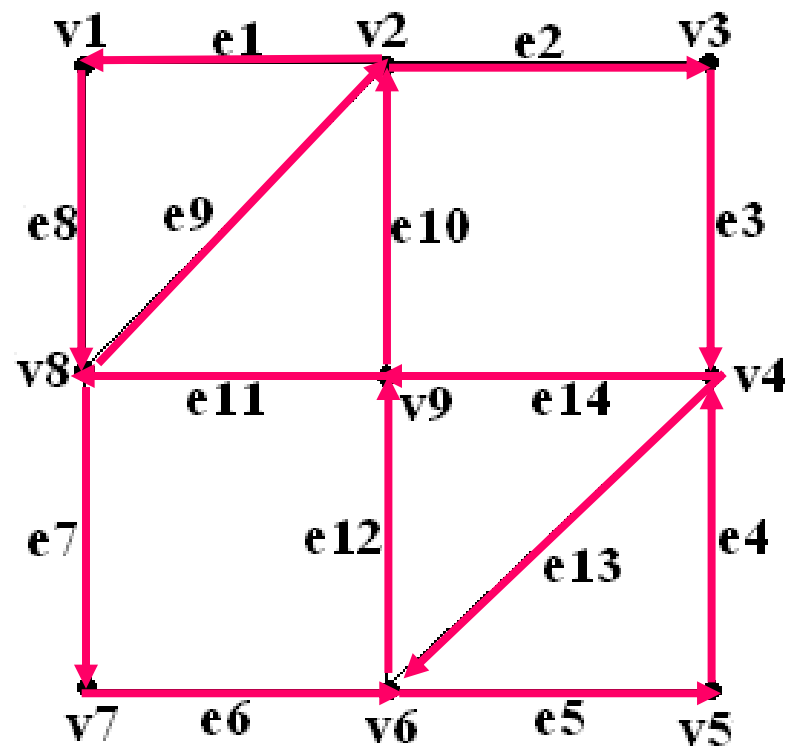
桥: 设 $e \in E(G)$ , 若 $p(G - e) > p(G)$ ,  
则称 $e$ 为 $G$ 中的桥。

## 例15.2 (P296)

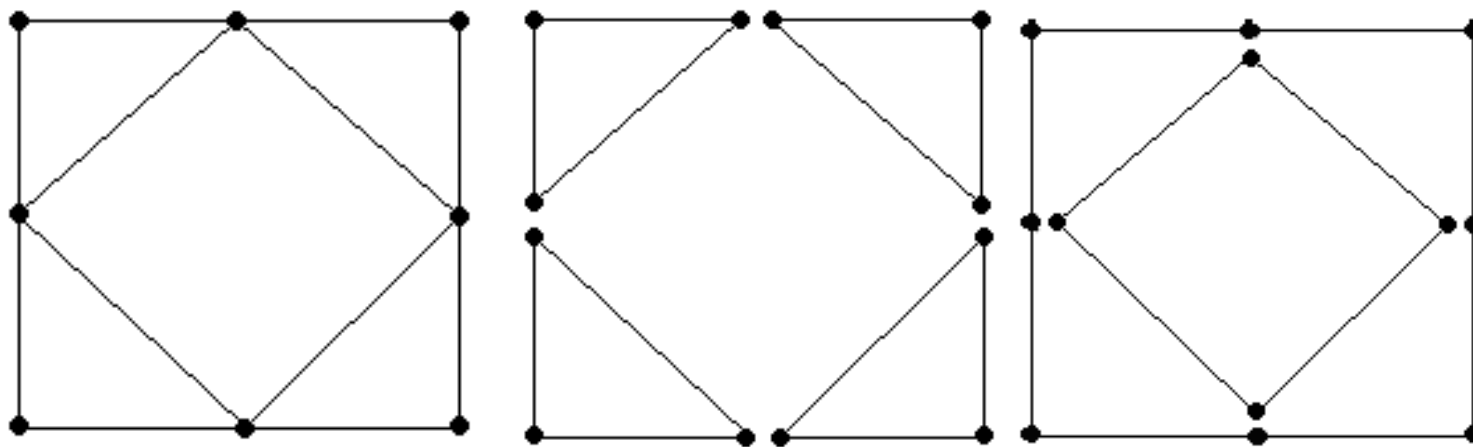


$v_2 e_2 v_3 e_3 v_4 e_{14} v_9 e_{10} v_2 e_1 v_1 e_8 v_8 e_9 v_2$

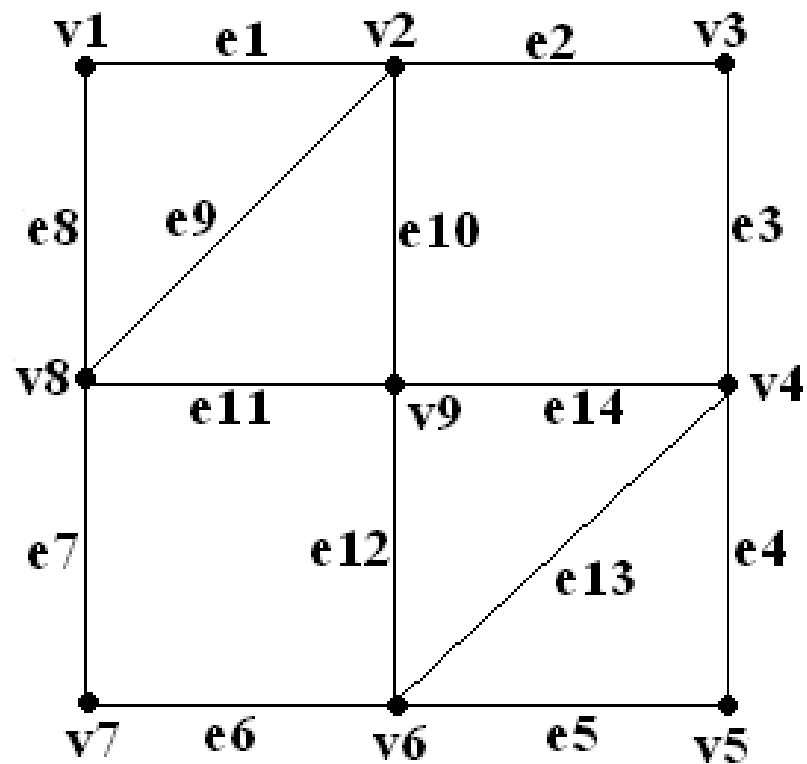
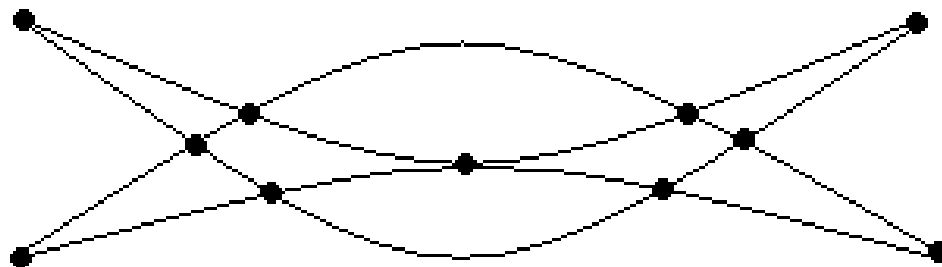
## 例15.2 (P296)



**欧拉图的性质：** 欧拉图可以分解成若干个边不重的圈。



**定理15.5（欧拉图的判定）**  $G$ 是非平凡的欧拉图当且仅当 $G$ 是连通的且为若干个边不重的圈的并。



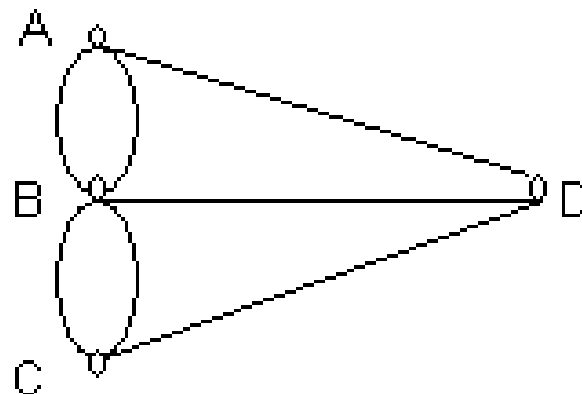
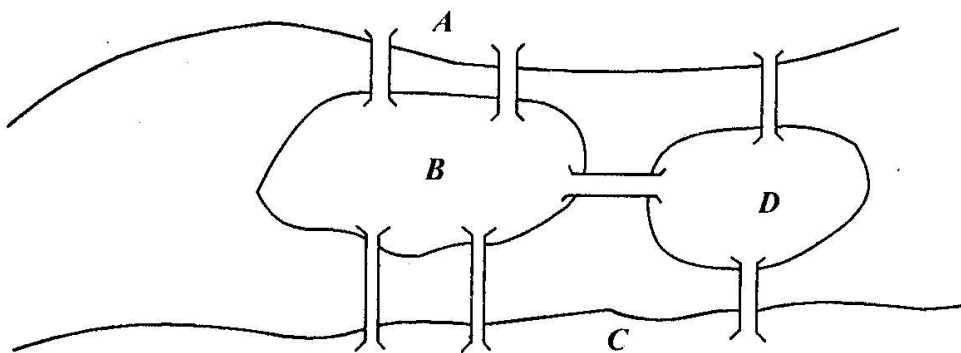


## 中国的“一笔画”的问题

从图某一点出发，线可以相交但不能重合  
将图画完的问题。

可以看出在“一笔画”的问题中，**终点与始点重合**的图对应着欧拉图，**不重合**的对应半欧拉图。

利用欧拉图可以解决哥尼斯堡七桥问题：  
从某地出发，对每座跨河桥只走一次，而在遍历了七座桥之后，却又能回到原地。

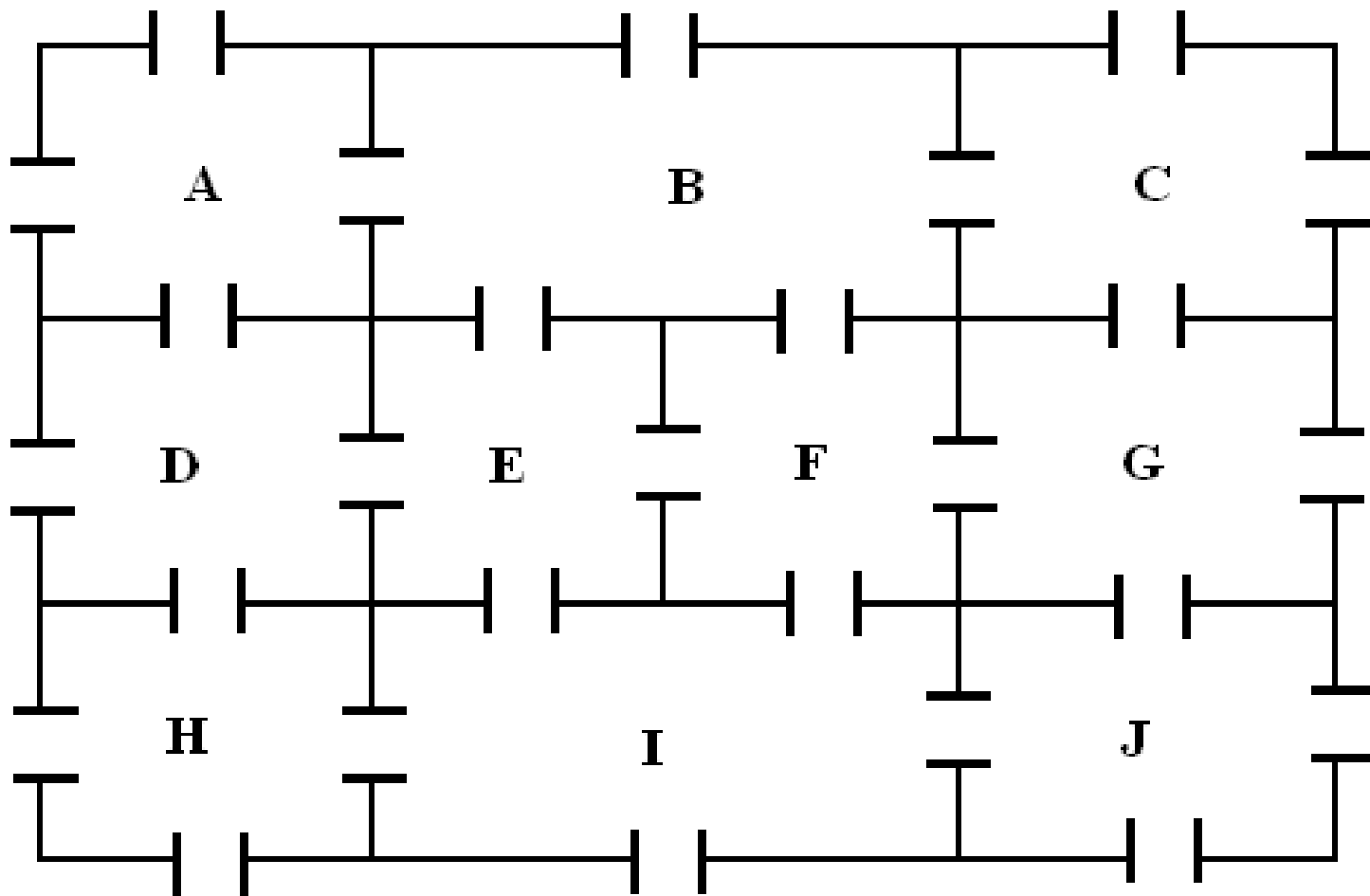


由定理15.1（无向欧拉图的判定定理）可知该问题无解。



## 思考

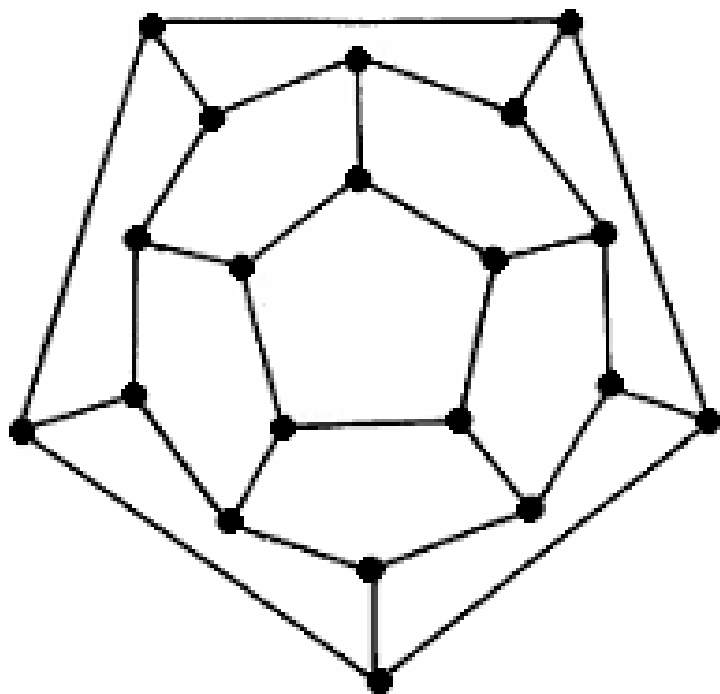
如下图所示，从一房间出发，问能否不重复地穿过每一道门，通过所有房间？





## 15.2 哈密顿图

1859年，爱尔兰数学家威廉·哈密尔顿发明了一个旅游世界的游戏。将一个正十二面体的20个顶点分别标上世界上大城市的名字，要求玩游戏的人从某城市出发沿12面体的棱，通过每个城市恰一次，最后回到出发的那个城市。



哈密尔顿游戏是在左图中如何找出一个包含全部顶点的圈。



## 定义（哈密顿通路和哈密顿回路）

经过图（有向图或无向图）每个顶点一次且仅一次的通路称为**哈密顿通路**。

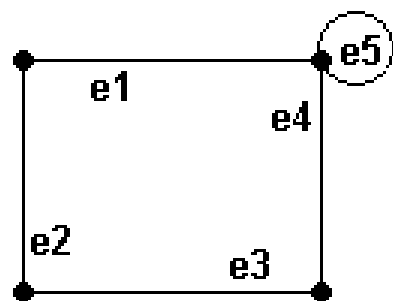
经过图每个结点一次且仅一次的回路（初级回路）称为**哈密顿回路**。

## 定义（哈密顿图和半哈密顿图）

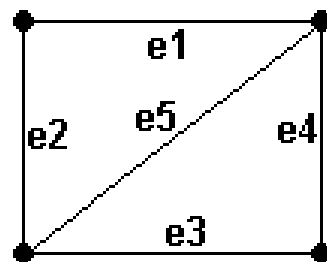
存在哈密顿回路的图称为**哈密顿图**。

存在哈密顿通路但不存在哈密顿回路的图称为**半哈密顿图**。

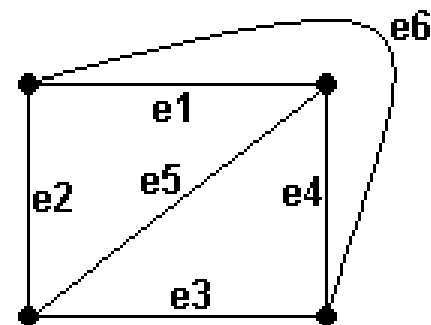
平凡图是哈密顿图。



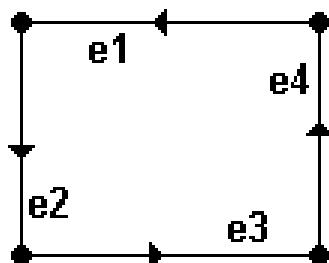
(1)



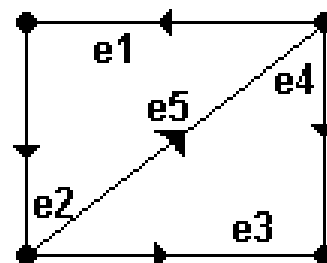
(2)



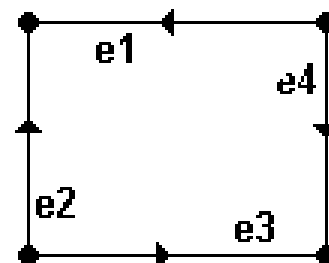
(3)



(4)



(5)



(6)

(1) (2) (3) (4) 为哈密顿图

(5) 为半哈密顿图

(6) 既不是哈密顿图，又不是半哈密顿图。

到目前为止，还没有找到判断哈密顿图简单的充分必要条件。

下面介绍哈密顿图和半哈密顿图的必要条件

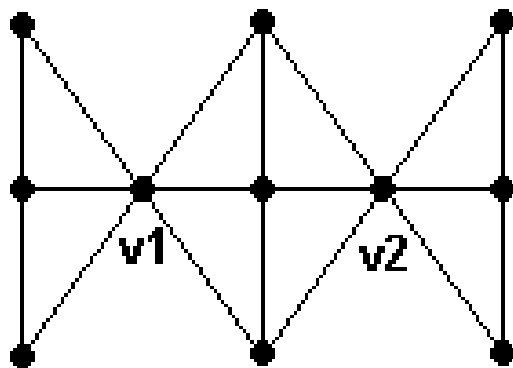
**定理15.6** 设无向图 $G=\langle V, E \rangle$ 是哈密顿图， $V_1$ 是 $V$ 的任意非空子集，则有 $p(G-V_1) \leq |V_1|$ ，其中 $p(G-V_1)$ 为 $G-V_1$ 的连通分支数。

**推论** 设无向图 $G=\langle V, E \rangle$ 是半哈密顿图， $V_1$ 是 $V$ 的任意非空子集，则有 $p(G-V_1) \leq |V_1| + 1$ 。

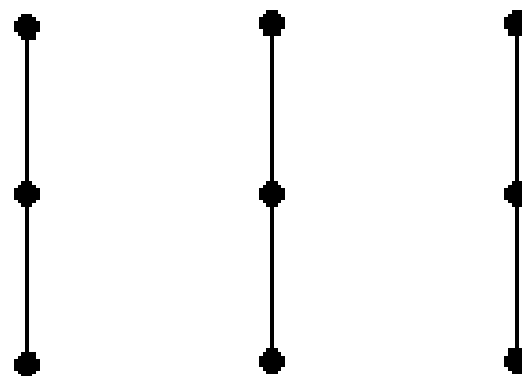
**注意：**

- (1) 定理15.6和推论是必要条件。
- (2) 两定理可以证明一个图不是哈密顿图或半哈密顿图。

例如



$G$



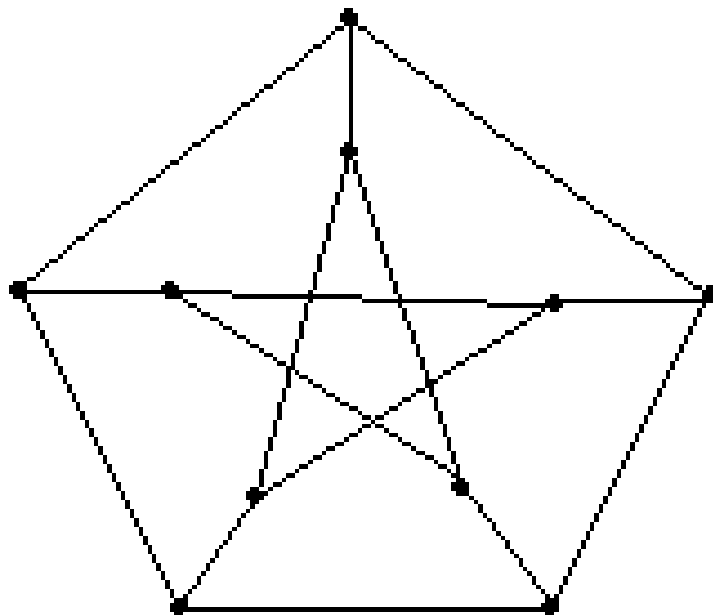
$G - \{v1, v2\}$

易见  $p(G - \{v1, v2\}) = 3$ ,  $|\{v1, v2\}| = 2$

$p(G - \{v1, v2\}) \geq |\{v1, v2\}|$

不满足定理15.6, 所以图 $G$ 不是哈密顿图。

例如

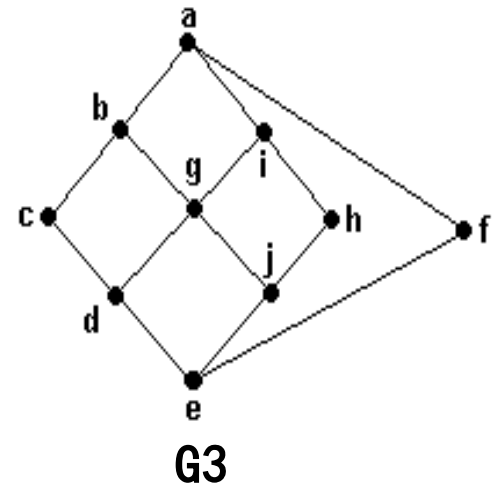
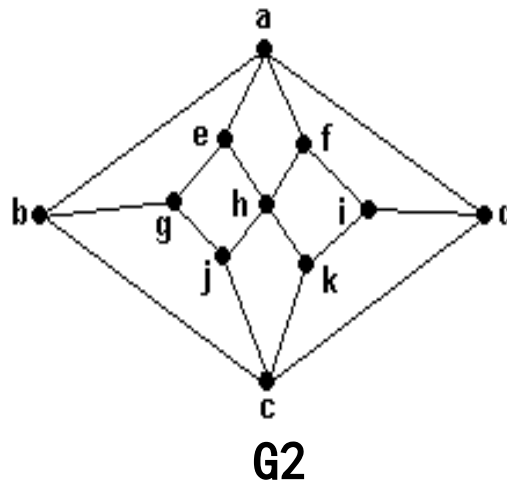
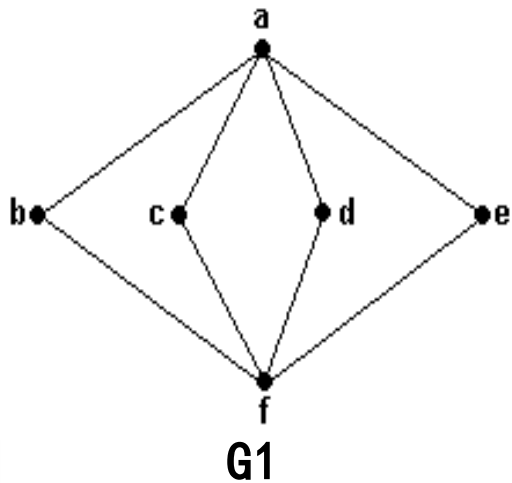


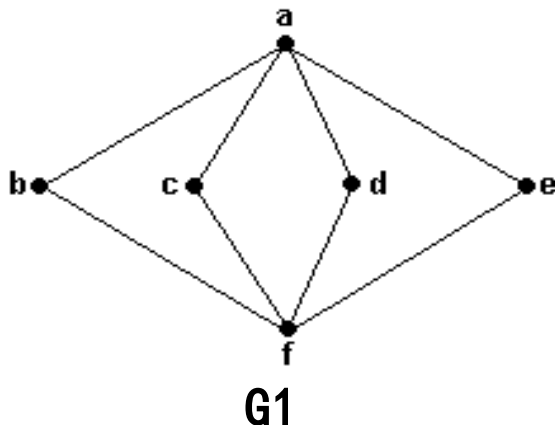
彼得松图

彼得松图满足定理15.6，但不是哈密顿图。



**例15.3** 下图中三个图都是二部图，判断它们哪些是哈密顿图，哪些是半哈密顿图？





## 二部图与哈密顿图的关系

设二部图 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$ ,  
 $|V_2| \geq |V_1|$ 。若 $|V_2| \geq |V_1| + 2$ , 则  
 $G$ 即不是哈密顿图, 又不是半哈  
 密顿图

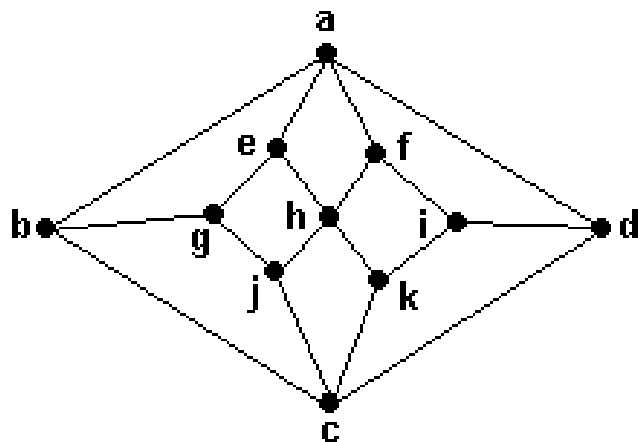
(1)  $G_1 = \langle V_1, V_2, E \rangle$ ,

互补顶点子集为 $V_1 = \{a, f\}$ ,  $V_2 = \{b, c, d, e\}$ 。

则 $p(G_1 - V_1) = |V_2| = 4$ ,  $|V_1| = 2$ ,

$p(G_1 - V_1) > |V_1|$  且  $p(G_1 - V_1) > |V_1| + 1$ 。

所以 $G_1$ 即不是哈密顿图, 又不是半哈密顿图。



G2

## 二部图与哈密顿图的关系

设二部图 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$ ,  
 $|V_2| \geq |V_1|$ 。若 $G$ 是半哈密顿图, 则  
 $|V_2| = |V_1| + 1$ 。

(2)  $G_2 = \langle V_1, V_2, E \rangle$ ,

互补顶点子集为

$$V_1 = \{a, g, h, i, c\}, \quad V_2 = \{b, e, f, j, k, d\}。$$

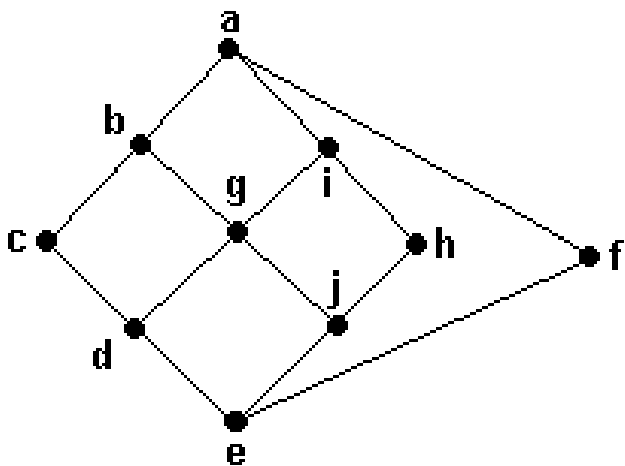
则 $p(G_2 - V_1) = |V_2| = 6$ ,  $|V_1| = 5$ ,

$p(G_2 - V_1) > |V_1|$  但  $p(G_2 - V_1) = |V_1| + 1$

所以 $G_2$ 不是哈密顿图。

存在哈密顿通路  $baegjhfikcd$

所以 $G_2$ 是半哈密顿图。



G3

## 二部图与哈密顿图的关系

设二部图 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$ ,  
若 $G$ 是哈密顿图, 则 $|V_1|=|V_2|$ 。

(3)  $G_3=\langle V_1, V_2, E \rangle$ ,

互补顶点子集为

$$V_1=\{a, c, g, h, e\}, \quad V_2=\{b, d, i, j, f\}。$$

则 $p(G_3-V_1)=|V_2|=|V_1|=5$ ,

哈密顿回路为 $abcdgihjefa$

所以 $G_3$ 是哈密顿图。

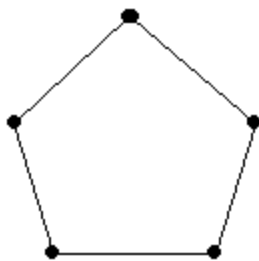
下面给出哈密顿图和半哈密顿图的充分条件

**定理15.7** 设 $G=\langle V, E \rangle$ 为 $n$ 阶无向简单图，如 $G$ 中任意两个不相邻的顶点 $v_i, v_j$ ，均有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n-1$ ，则 $G$ 中存在哈密顿通路，即 $G$ 为半哈密顿图。

**推论** 设 $G=\langle V, E \rangle$ 为 $n$  ( $n \geq 3$ ) 阶无向简单图，如 $G$ 中任意两个不相邻的顶点 $v_i, v_j$ ，均有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$ ，则 $G$ 是哈密顿图。

**说明：**该推论是充分条件但不是必要的。

**例如：**



该五边形是哈密顿图，但任意两个不相邻的顶点度数之和为4，图形阶数为5。

# 座位问题

**例** 在某次国际会议的预备会中，共有8人参加，他们来自不同的国家。如果他们中任两个无共同语言的人与其余有共同语言的人数之和大于或等于8，问能否将这8个人排在圆桌旁，使其任何人都能与两边的人交谈。

**解：**将这8个人看为平面上的8个点，设为  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$ 。

如果  $v_i$  和  $v_j$  有共同语言，就在  $v_i$  和  $v_j$  之间连无向边  $(v_i, v_j)$ 。

这样得到一个8阶无向简单图  $G$ 。

$\forall v_i \in V$ ， $d(v_i)$  为与  $v_i$  有共同语言的人数。

由已知条件可知， $\forall v_i, v_j \in V$  且  $i \neq j$ ，均有  $d(v_i) + d(v_j) \geq 8$ 。

由定理15.7的推论可知， $G$  中存在哈密顿回路，

设  $C = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_7} v_{i_8}$  为  $G$  中一条哈密顿回路，按这条回路的顺序安排座次即可。



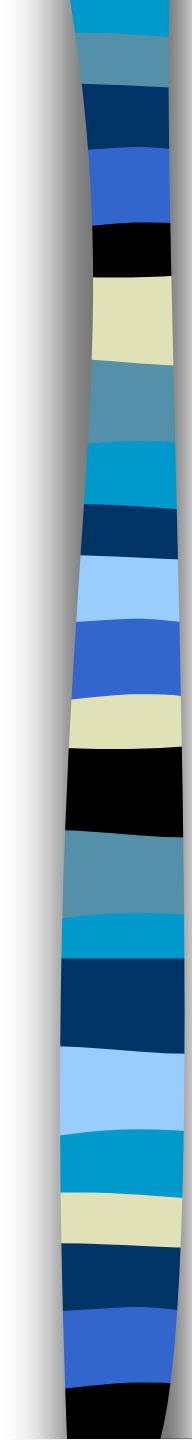
## 亚瑟王和他的骑士们

■ 亚瑟王一次召见他的 $p$ 个骑士，已知每一个骑士在骑士中的仇人不超过 $p/2-1$ 个。证明：能让这些骑士围坐在圆桌旁，使每个人都不与他的仇人相邻。

## 其它重要的定理

- **定理1** 如果 $G$ 是一个 $n$  ( $n \geq 3$ ) 阶简单图, 且 $\delta \geq n/2$ , 则 $G$ 是哈密顿图。
- **定理2** 如果 $G$ 是一个 $n$  ( $n \geq 3$ ) 阶完全图, 且 $n$ 为奇数, 则 $G$ 是哈密顿图且图中有 $(n-1)/2$ 个边不相交的哈密顿回路。

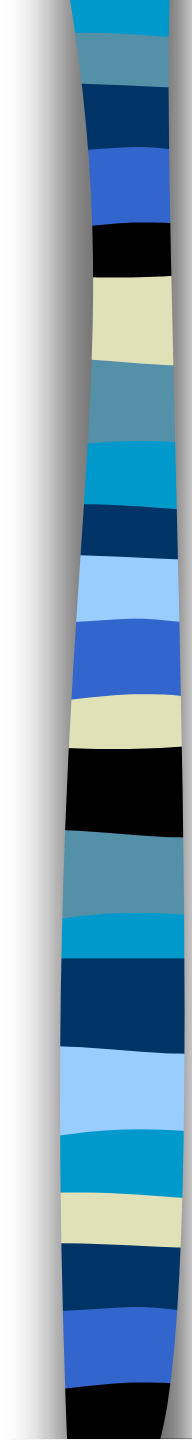




**例** 有11个学生打算几天都在一个圆桌上共进晚餐，并且希望每次晚餐时，每个学生两边邻座的人都不相同。

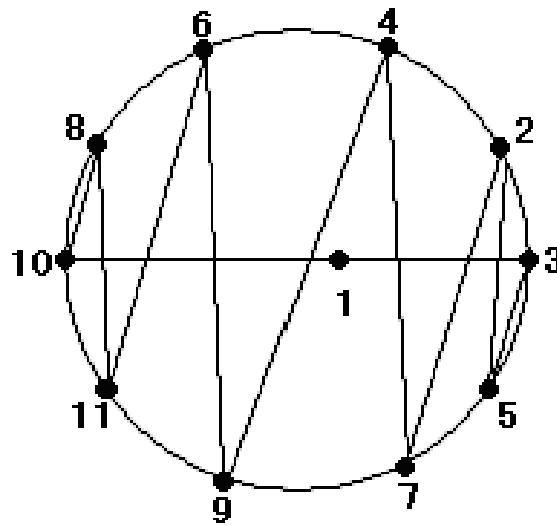
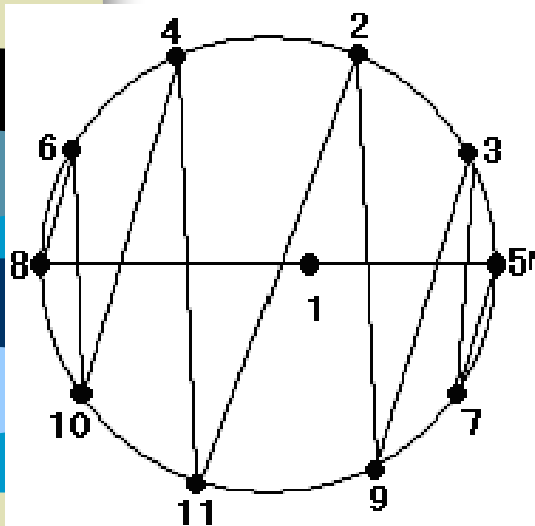
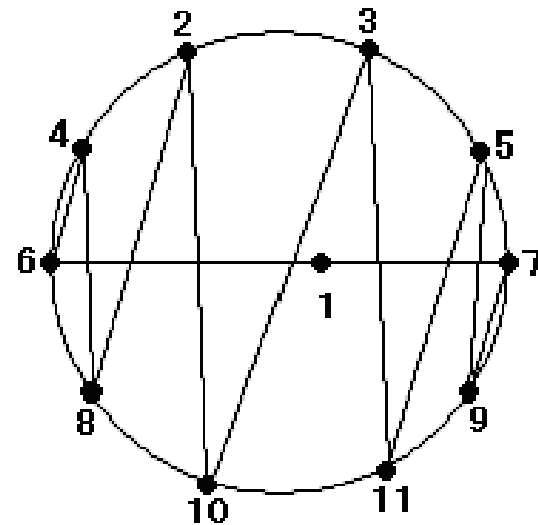
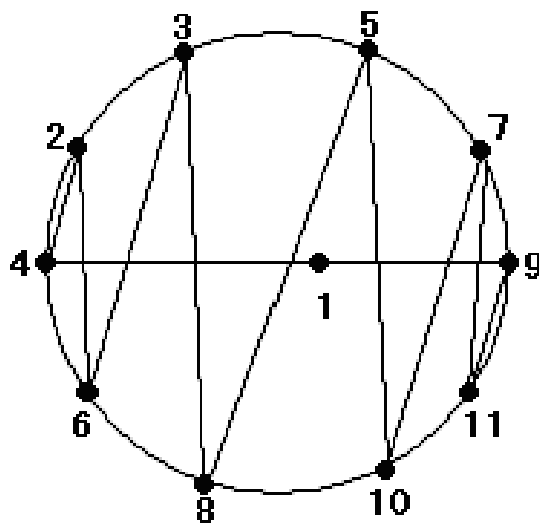
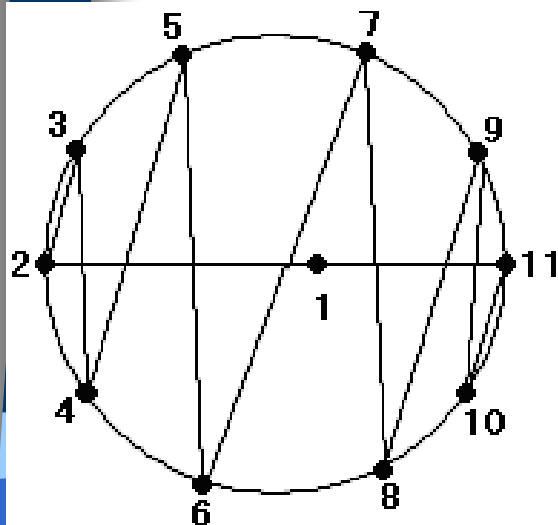
(1) 按照这样的要求，问他们可以在一起共进晚餐最多几天？

(2) 如果用数字1~11表示这11个学生，给出这几天的座位排列情况。



11个学生在圆桌上共进晚餐，可以看成在一个圆周上排列11个结点；两人相邻而坐，就可看作两点之间有边相连。因此任意一人与其他人相邻而坐的所有情况就是11个结点的无向完全图 $K_{11}$ ，在 $K_{11}$ 中任意一个哈密顿回路就表示一次晚餐的就做的方式。因此原问题就转化成在 $K_{11}$ 中有多少条无公共边的长度为11的哈密顿回路。

因为 $K_{11}$ 中共有无公共边的长度为11的哈密顿回路共有5条，所以这11个学生可以在一起共进晚餐5天。



五天中排列情况如下：

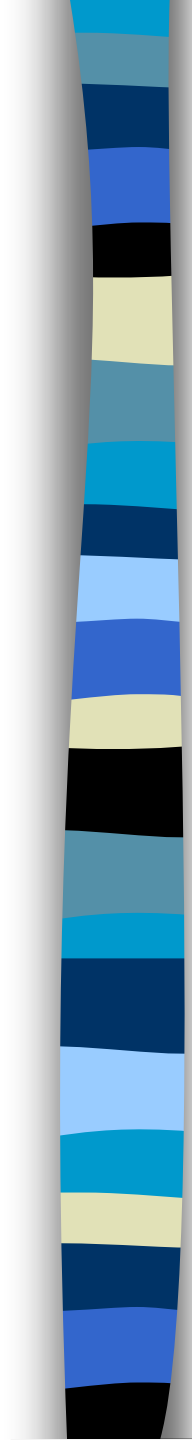
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1
1	4	2	6	3	8	5	10	7	11	9	1
1	6	4	8	2	10	3	11	5	9	7	1
1	8	6	10	4	11	2	9	3	7	5	1
1	10	8	11	6	9	4	7	2	5	3	1



## 15.3 带权图及其应用

**定义15.3（带权图）** 给定 $G=\langle V, E \rangle$ （ $G$ 为有向图或无向图），对 $G$ 中任意的边 $e=(v_i, v_j)$ （或 $\langle v_i, v_j \rangle$ ），有一实数 $w_{ij}$ 与之相对应，称该实数 $w_{ij}$ 为边 $e$ 上的**权**，并将 $w_{ij}$ 标注在边 $e$ 上，称 $G$ 为**带权图**，此时将带权图 $G$ 记为 $\langle V, E, W \rangle$ 。

带权图应用的领域很广，典型应用有**最短路径（无向图）**和**关键路径（有向图）**。



最短路径最具有代表性的问题有：

中国邮递员问题——欧拉图

货郎担问题（旅行商问题）——哈密顿图

## 中国邮递员问题

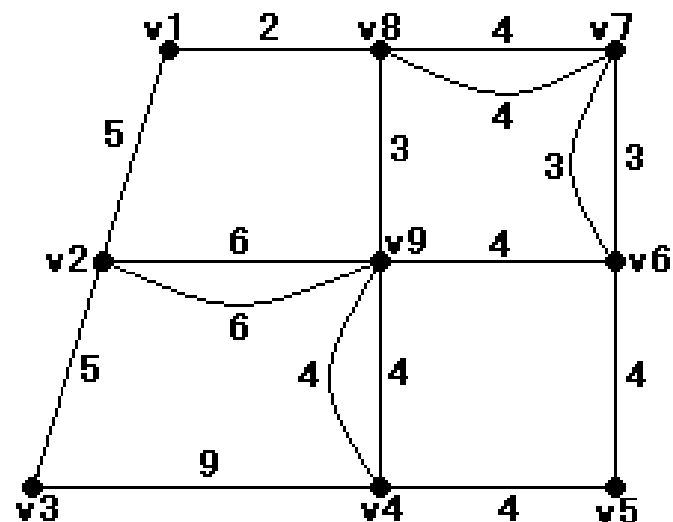
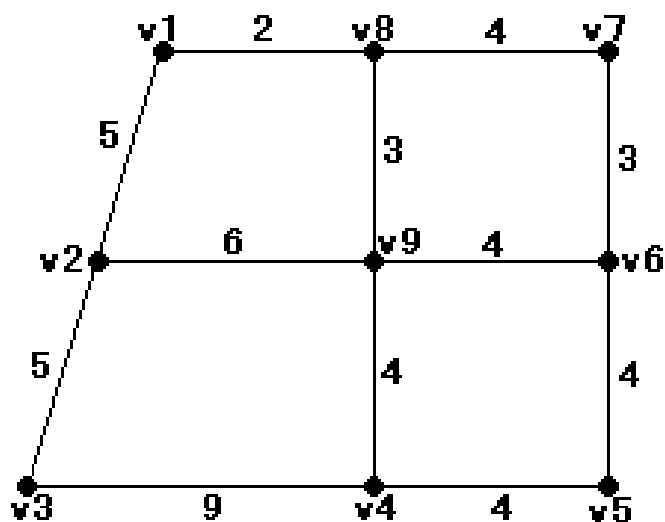
**问题描述：**一个邮递员送信，要走完他负责投递的全部街道，完成任务后回到邮局，应该按照怎样的路线走，所走的路程最短。

**转化为图论问题：**给定一个带权无向连通图，要求找一个回路（未必是简单的），过每边至少一次，并使回路的总权最小。

**问题的解决：**

**欧拉图法：**如果该邮递员负责的范围内，街道图为欧拉图，那么他就可以从邮局出发，走过每条街道一次，最后回到邮局，这样他所走过的路程也就是最短路程。

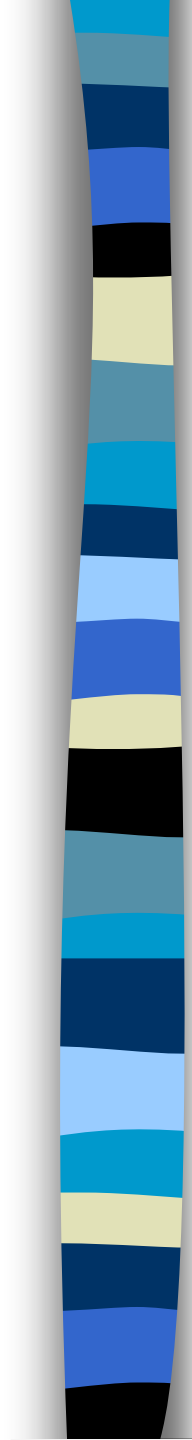
**奇偶点图上作业法：**如果该邮递员负责的范围内，街道图有奇度点，则必须在某些街道上重复走一次或多次。



如果在某条路线中边  $(v_i, v_j)$  上重复走了几次，我们在图中  $v_i, v_j$  之间增加几条边，令所增加边的权与原来的权相等，并把新增加的边，称为**重复边**。

于是这条路线就是相应新图中的欧拉回路。



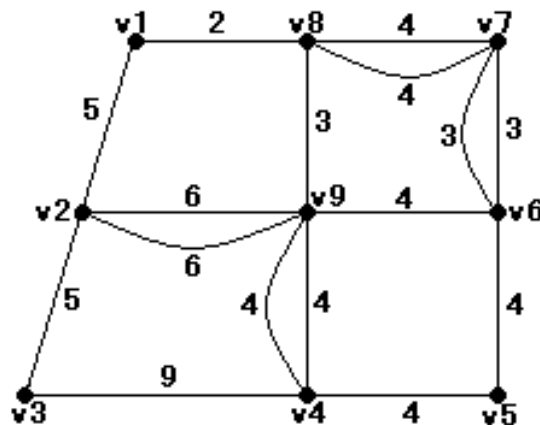
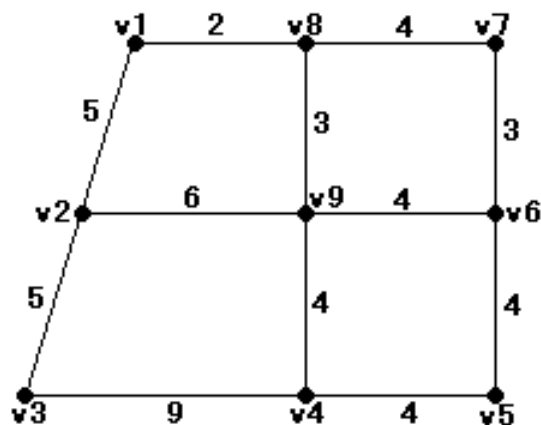


由于在任何一个图中，奇度点个数为偶数，所以如果图中有奇度点，就可以把它们配成对。又因为图是连通的，故每一对奇度点之间必有通路，把权和最小的通路上的所有边作为重复边加到图中去，可见新图中无奇度点。

我们把增加重复边而使新图不含奇度点的方案称为可行方案，称使重复边的权和最小的可行方案为最优方案。

这样一来，原来的问题就可以转化为在一个有奇度点的图中，要求增加一些重复边，使新图不含奇度点，即为一个欧拉图，并且所加重复边的权和最小。

现在的问题是在确定一个可行方案之后，怎么判断这个方案是否为最优方案？



图中有四个奇度点， $v_2, v_4, v_6, v_8$ ，将它们分成两对，比如说 $v_2$ 与 $v_4$ 为一对， $v_6$ 与 $v_8$ 为一对。

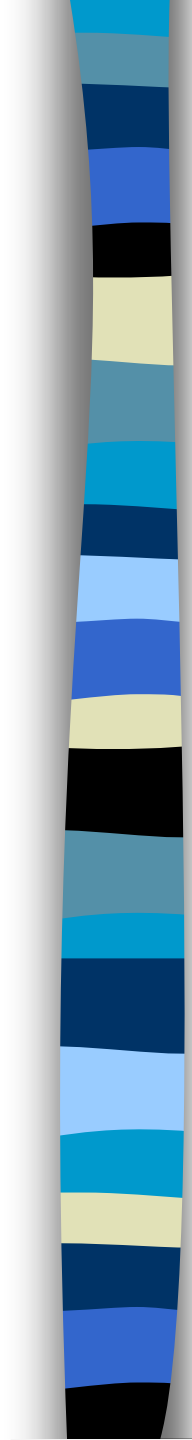
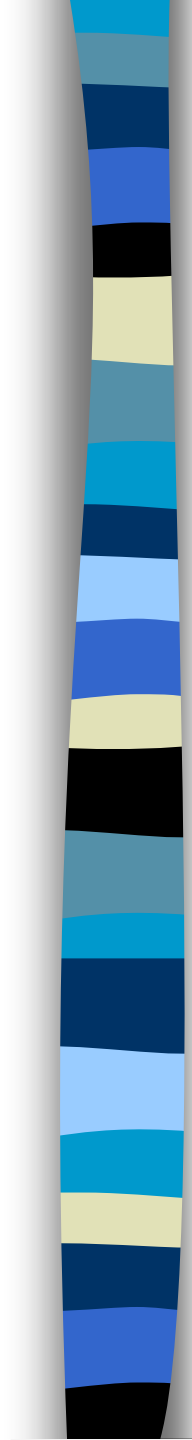
连接的 $v_2$ 与 $v_4$ 、 $v_6$ 与 $v_8$ 的通路有好几条，但要取权和最小的一条。

这个图中没有奇度点，故它是欧拉图。对于这个可行方案，重复边的权和为17。

Category	Count
Category 1 (Dark Blue)	100
Category 2 (Light Blue)	100
Category 3 (Yellow)	100
Category 4 (Black)	100
Category 5 (Grey)	100
Category 6 (Dark Blue)	100
Category 7 (Light Blue)	100
Category 8 (Yellow)	100
Category 9 (Black)	100
Category 10 (Grey)	100

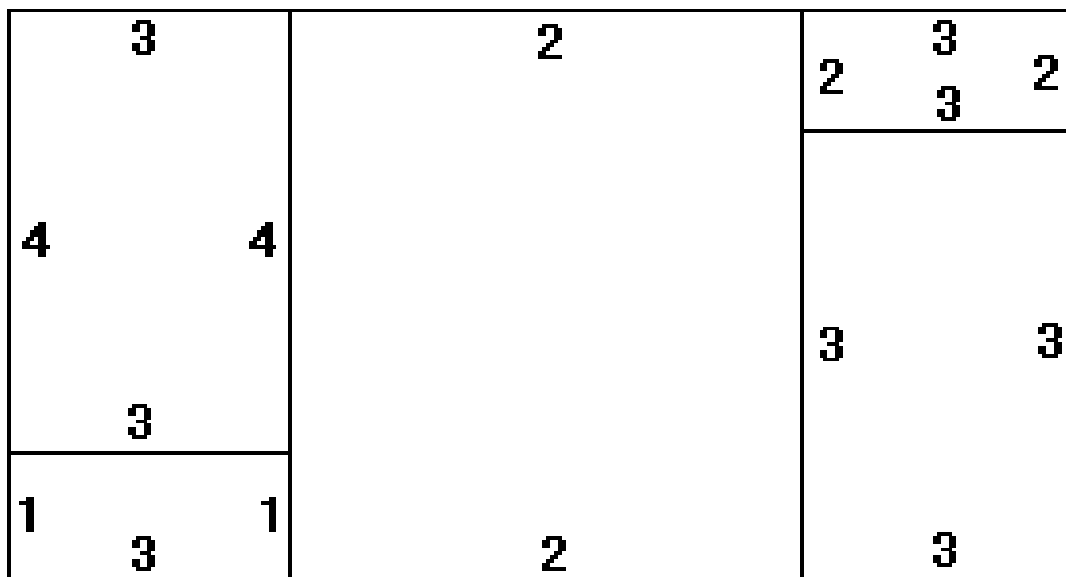
Category	Count
Category 1 (Dark Blue)	100
Category 2 (Light Blue)	100
Category 3 (Yellow)	100
Category 4 (Black)	100
Category 5 (Grey)	100
Category 6 (Dark Blue)	100
Category 7 (Light Blue)	100
Category 8 (Yellow)	100
Category 9 (Black)	100
Category 10 (Grey)	100

Age Group	Don't know	No	Yes	Probably yes	Probably no
18-24	10%	10%	35%	25%	20%
25-34	10%	10%	35%	25%	20%
35-44	10%	10%	35%	25%	20%
45-54	10%	10%	45%	25%	10%
55-64	10%	10%	35%	25%	20%
65-74	10%	10%	35%	25%	20%
75+	10%	10%	35%	25%	20%



Age Group	Don't know	No	Yes	Probably yes	Probably no
18-24	10%	10%	35%	25%	20%
25-34	10%	10%	35%	25%	20%
35-44	10%	10%	35%	25%	20%
45-54	10%	10%	45%	25%	10%
55-64	10%	10%	35%	25%	20%
65-74	10%	10%	35%	25%	20%
75+	10%	10%	35%	25%	20%

课后练习：求下图所示的中国邮递员问题。

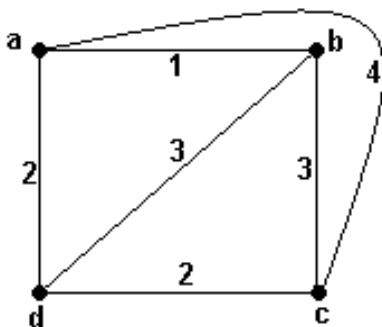


## 货郎担问题（旅行商问题）

**问题描述如下：**设有 $n$ 个城市，城市之间均有道路，道路的长度均大于等于0，可能为 $\infty$ （对应关联的城市之间无交通线）。今有一个旅行商从某个城市出发，要经过其它 $n-1$ 个城市恰一次，最后回到出发城市，问如何走使得经过的总路程最短？

**转化为图论问题：**以城市为结点，两城市之间的路为边，路程长度为边上的权，则问题转化为在带权无向图 $G=\langle V, E, W \rangle$ 中找一个**权和最小的哈密尔顿回路**。

**例15.7** 下图为4阶完全带权图，求出它的不同的哈密顿回路，并指出最短的哈密顿回路。



**解：**求哈密顿回路可以从任何顶点出发。下面从a点出发，并考虑顺时针与逆时针顺序不同的哈密顿回路。

C1=abcda 权和为8

C2=abdca 权和为10

C3=acbda 权和为12

C4=acdba 权和为10

C5=adbca 权和为12

C6=adcba 权和为8

不考虑顺时针与逆时针顺序，则C1=C6，并为最短的哈密顿回路。

**最邻近法：**此法不是一个最有效的方法，是一种近似算法。

设 $G=\langle V, E, W \rangle$ 是带权无向图，共有 $n$ 个结点，

(1) 任取一点记为 $v_1$ ，在其余 $n-1$ 个点中，找出最邻近 $v_1$ 的点，记为 $v_2$ 形成初级通路 $v_1v_2$ 。

(2) 在其余 $n-2$ 个点中，找出最邻近 $v_2$ 的点，记作 $v_3$ ，形成初级通路 $v_1v_2v_3$ ，如此一直下去直到找到一条哈密尔顿回路为止。

**说明：**此算法与初始点的选取有关。

