Zadanie 3

Marko Golovko

7 maja 2020

Definicja

Rozkład Studenta z n stopniami swobody jest rozkładem zmiennej losowej T postaci:

$$T = \frac{U}{\sqrt{Z}}\sqrt{n}$$

gdzie:

- U jest zmienną losową mającą standardowy rozkład normalny $N(0,1)$,
- Z jest zmienną losową o rozkładzie chi kwadrat o n stopniach swobody,
- U i Z są niezależne.

Gęstość rozkładu. Obliczenia

Z założenia znamy wzór na gęstość rozkładu normanlnego i rozkładu chi-kwadrat.
Niech U i Z będą takie jak wyżej. Zmienna $Y = \sqrt{Z}$ ma rozkład chi o n stopniach swobody, a więc Y wyraża się wzorem

$$f_Y(y) = \frac{2^{1-\frac{n}{2}} y^{n-1} e^{-\frac{y^2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Rozważmy zmienną

$$X = \frac{1}{\sqrt{n}} Y$$

Policzymy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X. Korzystamy z własności rozkładów prawdopodobieństwa.
Jeżeli $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ funkcja monotoncznа, wtedy rozkład prawdopodobieństwa jest

$$f_X(x) = f_Y(g^{-1}(x))|\frac{d}{dx}(g^{-1}(x))| = f_Y(g^{-1}(x))|\frac{d}{dx}(y)| = f_Y(y)|\frac{dy}{dx}|.$$

$$|\frac{dy}{dx}| = \sqrt{n}$$

$$f_X(x) = f_Y(\sqrt{n}x)|\frac{dy}{dx}| = \frac{2^{1-\frac{n}{2}}(\sqrt{n}x)^{n-1} e^{-\frac{(\sqrt{n}x)^2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\sqrt{n} = \frac{2^{1-\frac{n}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{n-1} e^{-\frac{n}{2}x^2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Zmienna T ma zatem rozkład $\frac{U}{X}$. Jej gęstość jest więc postaci rozkładu ilorazu. Aby obliczyć iloraz $T = \frac{U}{X}$ dwóch niezależnych zmiennych losowych U i X, zdefiniujemy następującą transformację:

$$T = \frac{U}{X}$$

$$W = X$$

Więc wspólne prawdopodobieństwo $p(t, w)$ może być policzone zamianą zmiennych z U, X do T, W, i T można uzyskać przez rozkład brzegowy W z wspólnego rozkładu prawdopodobieństwa.
Odwrotna transformacja

$$U = TW$$

$$X = W$$

Jacobian $J(U, X \mid T, W)$ naszego przekszstalcenia wyraża się macierzą

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dt} & \frac{du}{dw} \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dx}{dw} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |w|.$$

A zatem

$$p(t, w) = p(u, x) J(u, x \mid t, w) = p(u) p(x) J(u, x \mid t, w) = p_U(tw) p_X(w) |w|.$$

I T można uzyskać przez rozkład brzegowy W

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_U(tw) p_X(w) |w| dw$$

Więc

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_U(tw) f_X(w) |w| dw = \int_{0}^{\infty} w f_U(tw) f_X(w) dw =$$

$$\int_0^\infty w \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(tw)^2}{2}} \frac{2^{1-\frac{n}{2}} n^{\frac{n}{2}} w^{n-1} e^{-\frac{n}{2} w^2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} dw = \frac{2^{1-\frac{n}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty w^n e^{-\frac{1}{2}(n+t^2) w^2} dw$$

Niech $m = x^2$ $(dm = dx(x^2) = 2xdx)$. Wówczas powyższa całka przyjmuje postać

$$\int_0^\infty w^n e^{-\frac{1}{2}(n+t^2)m} \frac{dm}{2x} = \frac{1}{2} \int_0^\infty m^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(n+t^2)m} dm$$

Gęstość $f(m; k; \theta)$ rozkładu Gamma wyraża się wzorem

$$f(m; k; \theta) = \frac{m^{k-1} e^{-\frac{m}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)}$$

Oznacza to, że

$$k - 1 = \frac{n-1}{2} \Rightarrow k^* = \frac{n+1}{2}, \quad \frac{1}{\theta} = \frac{1}{2}(n + t^2) \Rightarrow \theta^* = \frac{2}{(n+t^2)},$$

jeżeli korzystamy z własności mediany Gamma rozkładu

$$\frac{1}{\Gamma(k)\theta^k}\int_0^v x^{k-1}e^{-x/\theta}dx = \frac{1}{2}$$

stąd powyższa całka

$$\int_0^\infty m^{k^*-1}e^{-\frac{m}{\theta^*}} = \frac{1}{2}\Gamma(k^*)(\theta^*)^{k^*} = \frac{1}{2}(\frac{2}{n+t^2})^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2}) =$$

$$2^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{1}{2}(n+1)}$$

Ostatecznie

$$f_T(t) = \frac{2^{1-\frac{n}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}2^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{1}{2}(n+1)} = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{1}{2}(n+1)}$$