Jak poprawnie rozwiązać zadanie 1 - wskazówki

Krzysztof Piecuch

4 listopada 2013

Udowodnimy, że funkcja

$$f(n) = 2n^3 + 113n^2 - 5n + 14 \tag{1}$$

jest $O(3n^5)$. Zacznijmy od przypomnienia sobie definicji. Mówimy, że $f(n)$ jest $O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\exists_{c \geqslant 0} \exists_{N \geqslant 0} \forall_{n \geqslant N} f(n) \leqslant c \times g(n) \tag{2}$$

Musimy znaleźć zatem takie c oraz N, że dla dowolnego $n \geqslant N$ zachodzi nierówność $2n^3 + 113n^2 - 5n + 14 \leqslant c \times 3n^5$. Weźmy $c = 229$ oraz $N = 1$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2n^3 + 113n^2 - 5n + 14 &< \\ 2n^3 + 113n^2 + 14 &\leqslant \\ 2n^5 + 113n^5 + 14n^5 &= \\ 229n^5 &< \\ 229 \times 3n^5 &= c \times 3n^5 \end{aligned} \tag{3}$$

Co kończy dowód.

Spróbujmy teraz trudniejszy przykład. Pokażemy, że $n + \log_2 n$ jest $O(n)$. Do rozwiązania tego zadania przyda nam się następujący lemat: Dla każdego $n > 0$ zachodzi: $\log_2 n < n$. Krok bazowy ($n = 1$):

$$\begin{aligned} &L = \log_2 1 = 0 \\ &P = 1 \\ &L < P \end{aligned} \tag{4}$$

Krok indukcyjny

$$\begin{aligned} &\log_2(n+1) \leqslant \\ &\log_2(2 \times n) = \\ &(\log_2 n) + 1 < n + 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Z lematem w ręku możemy spróbować udowodnić naszą zależność. Obierzmy $c = 2$ i $N = 1$. Wtedy dla każdego $n > N$ zachodzi:

$$\begin{aligned} n + \log_2 n &< \\ n + n &= \\ 2 \times n &= c \times n \end{aligned} \tag{6}$$

Trudności może przysporzyć dowodzenie, że jakaś funkcja $f(n)$ *nie jest* $O(g(n))$. Zróbmy zatem i taki przykład. Udowodnimy, że funkcja $f(n) = 2^n$ nie jest $O(n^3)$. Co to znaczy, że jakaś funkcja $f(n)$ nie jest $O(g(n))$? Musimy zanegować zdanie (2):

$$\forall_{c \geqslant 0} \forall_{N \geqslant 0} \exists_{n \geqslant N} f(n) \geqslant c \times g(n) \tag{7}$$

Znów z pomocą przyjdzie nam lemat. Udowodnimy, że $n^4 \leqslant 2^n$ dla każdego $n \geqslant 20$. Krok bazowy:

$$\begin{aligned} &L = 20^4 = 160000 \\ &P = 2^{20} = 1048576 \\ &L \leqslant P \end{aligned} \tag{8}$$

Krok indukcyjny

$$\begin{aligned} (n+1)^4 &\leqslant \\ (21n/20)^4 &= \\ 1.21550625n^4 &< \\ 2 \times n^4 &\leqslant \\ 2 \times 2^n &= 2^{n+1} \end{aligned} \tag{9}$$

Przejdźmy do naszej tożsamości. Weźmy dowolne c oraz dowolne N. Niech $n = max\{c, N, 20\}$. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} c \times n^3 &\leqslant \\ n^4 &\leqslant 2^n \end{aligned} \tag{10}$$

Co kończy dowód.

Upewnijcie się czy dobrze rozumiecie każdy krok w tym dokumencie oraz czy potraficie tak samo ładnie zrobić zadanie 1 z listy 3.