Zadanie 1

Marko Golovko

17 kwietnia 2020

Standardowy rozkład normalny ma gęstość określoną wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

Dla dystrybuanty otrzymujemy wyrażenie:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

Ponieważ gęstość jest funkcją parzystą zatem zachodzi związek $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$.

Dowód:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \int_{t}^{\infty} f(x)dx$$

Po pierwsze $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, oraz z tego że $f(x) = f(-x)$, wynika

$$\int_{t}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-t} f(x)dx = \Phi(-t)$$

$$\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$$

$\blacksquare$

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

Rozbijemy całkę na dwie części.

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{0}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Dowód:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2}\int_{0}^{\infty} y^{\frac{-1}{2}} e^{-y} dy = \sqrt{2}\Gamma(1/2)$$

Warto zauważyć, że robimy zamianę $y = \frac{x^2}{2}$ zmiennych w tym dowodzie.
$\Gamma(1/2) = \sqrt{(\pi)}$ Wiemy to z ćwiczeń (lista 5 zadanie 4).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

$\blacksquare$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

Niech $G(t) = \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ wtedy

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{\sqrt{2\pi}}{2} + G(t))$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} G(t)$$

Redukujemy zatem zadanie do postaci:

Dla ustalonego t > 0 obliczyć wartość całki

$$G(t) = \int_{0}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Rozwiązanie opiera się na złożonym wzorze trapezów i metodzie Romberga.

```
function romberga(a, b, f, n = 15)
        R = Array{Float64}(undef, Int64(n+1))
        R[1] = (b-a)/2 * (f(a) + f(b))
        for i = 2:n+1
                h = ((b-a)/2^(i-1))
                s = 0
                oR = R[i-1]/2
                for k = 1:2^(i-2)
                s+= f(a + (2*k - 1)*h)
                end
                R[i] = oR + h * s
        end
        c = n+1
        for i = 2:n+1
                for j = 1:n-i+2
                        R1 = R[j]
                        R2 = R[j+1]
                        k = i-1
                        R[j] =  (4^k*R2 - R1)/((4^k)-1)
                end
                R[c] = 0
                c-=1
        end
        return R[1]

end

function G(x)
        Base.MathConstants.e^(-x^2/2)
end

for t = 1:3
        Gt = romberga(0, t, G)
        Ft = 1/2 + (1/sqrt(2*pi))Gt
        println(round(Ft, digits = 4))
end
```

Dla $t = \{1, 2, 3\}$ mamy wartości $\Phi(t) = \{0.8413, 0.9772, 0.9987\}$ odpowiednio.