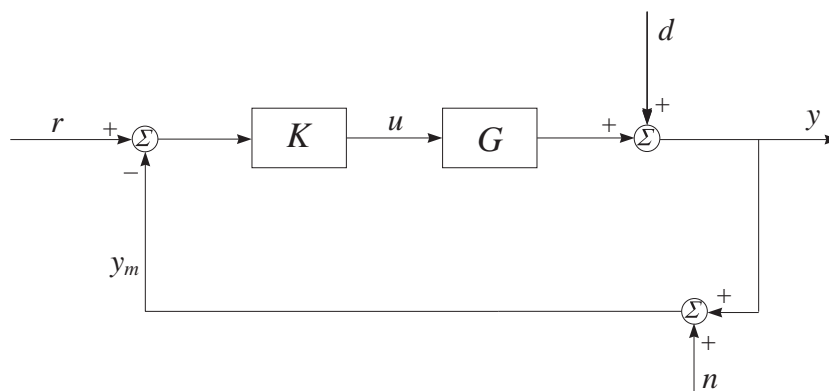


1.2 Едномерни системи с обратна връзка

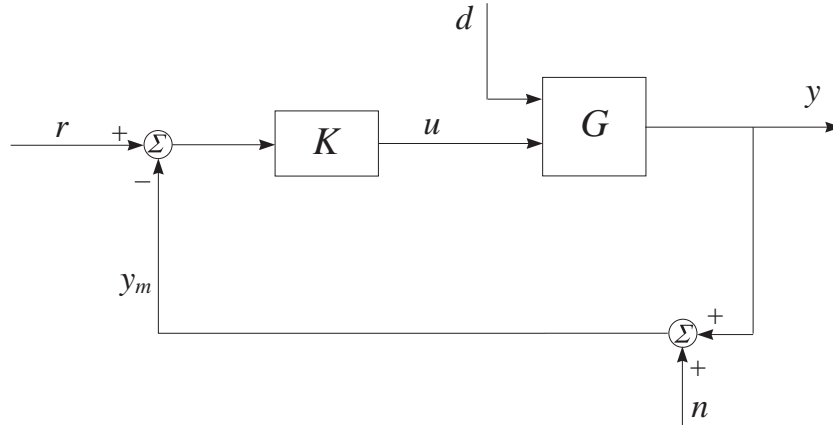
Управляващо устройство с една степен на свобода



Фигура 1.1: Блок-схема на едномерна система с обратна връзка

Типовата блок-схема на система с отрицателна обратна връзка е показана на фиг. 1.1. Тя се състои от обект на управлението G и управляващо устройство с една степен на свобода K . Управляващото устройство има само един вход, което определя неговото наименование. Върху затворената система са приложени задаващото въздействие r , смущаващото въздействие d и измервателният шум n . Входът на управляващото устройство $K(s)$ е $r - y_m$, където $y_m = y + n$ е измерваният изход.

В по-общия случай смущаващото въздействие се прилага на отделен вход на обекта (фиг. 1.2), с което се отразява неговото действие в някаква вътрешна точка



Фигура 1.2: Смущаващо въздействие на входа на обекта

на обекта. Но тъй като обектът е линеен, съгласно принципа на суперпозицията неговият изход може да се представи във вида

$$y = G_u(s)u + G_d(s)d,$$

където G_u и G_d са съответно предавателните функции по управляващо и смущаващо въздействие. По такъв начин системата, показана на фиг. 1.2, може да се преобразува във вида, показан на фиг. 1.3, а това означава, че тази система може отново да се представи с блок-схемата на фиг. 1.1, като смущаващото въздействие се модифицира по подходящ начин. Поради това по-нататък най-често ще разглеждаме блок-схемата, показана на фиг. 1.1.

Управляващото въздействие (входът на обекта) се получава съгласно уравнението

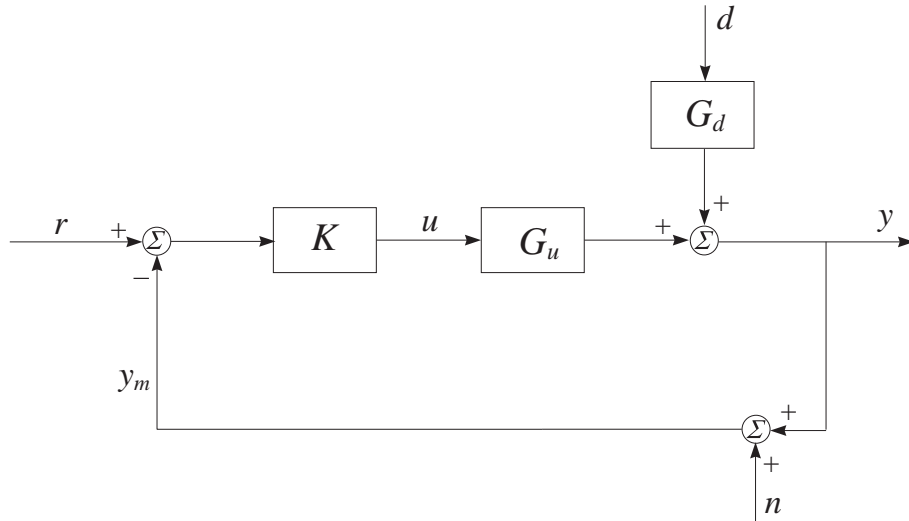
$$u = K(s)(r - y - n). \quad (1.5)$$

Целта на управлението е да се формира такова u (т.е., да се синтезира такова управляващо устройство K), че грешката на системата

$$e \stackrel{\text{def}}{=} y - r$$

да остава малка в присъствието на смущаващото въздействие d и шума n .

Външните въздействия към системата имат различен характер. Задаващото въздействие r и смущаващото въздействие d обикновено имат детерминиран характер и техният спектър е в нискочестотната област. Измервателният шум n е случайно въздействие и неговият спектър по правило е във височестотната



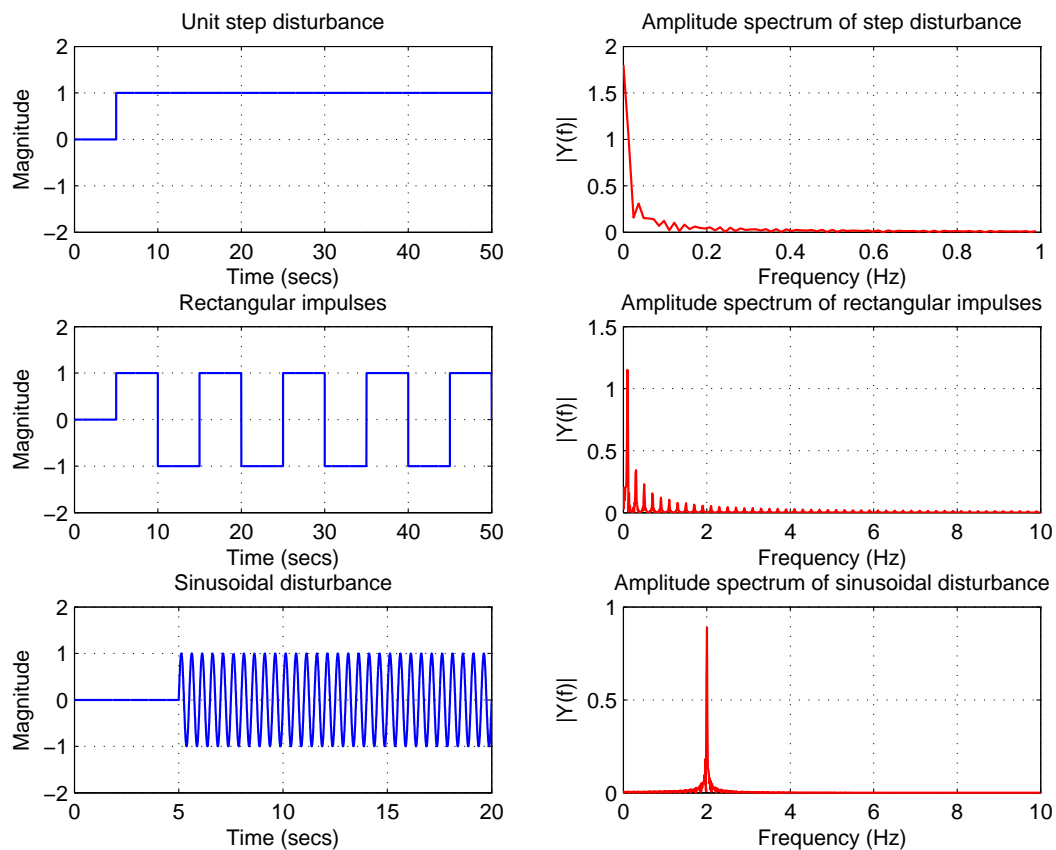
Фигура 1.3: Привеждане на смущаващото въздействие на изхода на обекта

област. Определянето на тези въздействия става въз основа на анализ на функционирането на обекта, като анализът на шума обикновено изисква лабораторни експерименти.

Пример 1.5 На фиг. 1.4 са показани типови смущаващи въздействия (единично стъпаловидно въздействие, правоъгълни импулси с period 10 s и единично синусоидално въздействие с честота 2 Hz), както и техните амплитудни спектри, изчислени с помощта на функцията `fft`. Вижда се, че мощността на тези сигнали над честота 5 Hz е пренебрежима.

При симулирането на затворената система се налага генерирането на измервателни шумове с различна интензивност и спектрално съдържание. На фиг. 1.5 е показано генерирането на високочестотен шум с максимум на спектралната плътност около 500 Hz. Шумът е получен с помощта на подходящ формиращ филтър, на входа на който постъпва бял шум. Белият шум е генериран с функцията `rand`, така че да е равномерно разпределен в интервала $[-10^{-1} \ 10^{-1}]$. Тактовата честота на генерирането е избрана равна на 3000 Hz, вследствие на което шумът може да се разглежда като бял в интервала $[0, 1500]$ Hz. (Спектралната плътност на шума е постоянна в този интервал.) Формиращият филтър има предавателна функция

$$W_s = k \frac{T_1^2 s^2 + 2T_1 \xi_1 s + 1}{T_2^2 s^2 + 2T_2 \xi_2 s + 1}, \quad k = 1, \quad T_1 = T_2 = 2\pi 500, \quad \xi_1 = 1.0, \quad \xi_2 = 0.01,$$

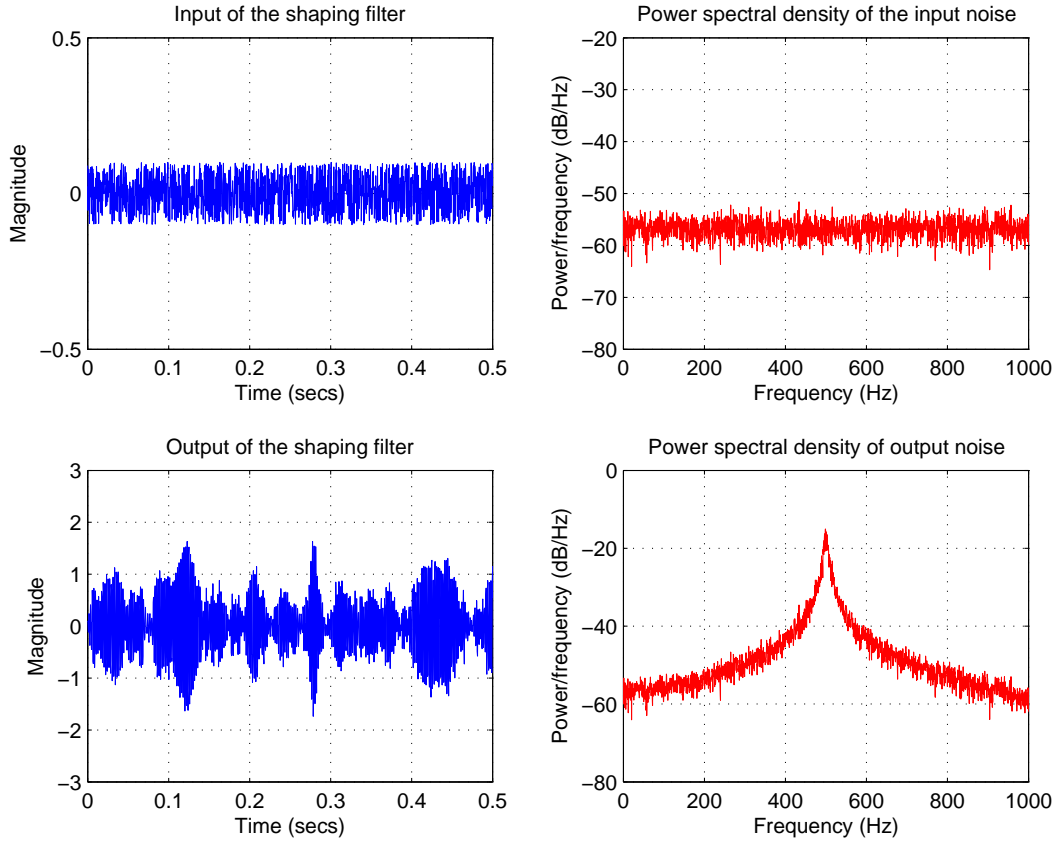


Фигура 1.4: Детерминирани смущаващи въздействия и техните спектрални плътности

за която максимумът на амплитудно-честотната характеристика на филтъра се получава при 500 Hz. Желаната интензивност на шума на изхода на филтъра може да се постигне с подходяща стойност на коефициента k .

Причини за използването на обратна връзка

Тъй като ефектът на смущаващото въздействие може да се елиминира с управление в отворен контур, подходящо е да се зададе въпросът защо въобще е необходимо използването на обратна връзка. Може да се покаже, че чрез елими-



Фигура 1.5: Шум на входа и изхода на формиращ филтър и неговата спектрална плътност

ниране на сигнала на обратната връзка и използване на управляващото устройство

$$K_r(s) = G^{-1}(s)$$

се постига нулиране на изходната реакция по отношение на смущаващото въздействие (засега предполагаме, че е възможно да се получи и реализира физически обратната система $G^{-1}(s)$, което понякога може и да не е вярно). Предполагаме, че и обектът, и управляващото устройство са устойчиви и че смущаващото въздействие може точно да се измери, т.е., че познаваме d . Тогава вземайки $r - d$ като вход, това управляващо устройство би произвело точният изход

$$y = Gu + d = GK_r(r - d) + d = r.$$

За съжаление, G никога не е точен модел и смущаващите въздействия никога не се познават точно. Следователно, причините за използване на управление с обратна връзка се дължат на присъствието на

1. Неопределеност в сигналите - неизвестно смущаващо въздействие и неточни статистически характеристики на шума.
2. Неопределеност в модела.
3. Неустойчивост на обекта.

Третата причина следва от факта, че неустойчив обект може да се стабилизира само с обратна връзка. Възможността на обратната връзка да намалява ефекта на неопределеността в модела има решаващо значение при синтеза на управлението.

Предавателни функции на затворената система

Разглеждаме затворената система, показана на фиг. 1.1.

Моделът на обекта се записва като

$$y = Gu + d. \quad (1.6)$$

Заместването на (1.5) в (1.6) дава

$$y = GK(r - y - n) + d$$

или

$$(I + GK)y = GKr + d - GK n.$$

Следователно, реакцията на затворената система е

$$y = \underbrace{(I + GK)^{-1}GK}_{T} r + \underbrace{(I + GK)^{-1}}_S d - \underbrace{(I + GK)^{-1}GK}_{T} n \quad (1.7)$$

Грешката на системата е

$$e = y - r = -Sr + Sd - Tn, \quad (1.8)$$

където е използван фактът, че $T - I = -S$. Съответният входен сигнал на обекта е

$$u = KS(r - d - n). \quad (1.9)$$

По-нататък се използват следните означения и терминология.

$L = GK$	— предавателна функция на отворената система;
$S = (I + GK)^{-1} = (I + L)^{-1}$	— функция на чувствителността;
$T = (I + GK)^{-1}GK = (I + L)^{-1}L$	— допълнителна функция на чувствителността.

С помощта на тези означения уравнение (1.7) се записва като

$$y = Tr + Sd - Tn. \quad (1.10)$$

Вижда се, че S е предавателната функция на затворената система от смущаващото въздействие към изхода, докато T е предавателната функция на затворената система от заданието към изхода. Терминът допълнителна чувствителност за T идва от тъждеството

$$S + T = 1. \quad (1.11)$$

За да се изведе (1.11), записваме $S + T = (I + L)^{-1} + (I + L)^{-1}L$ и изваждаме пред скоби члена $(I + L)^{-1}$. Терминът функция на чувствителността е подходящ, тъй като S дава понижаването на чувствителността, което може да се постигне с обратна връзка. За да се види това, нека разгледаме отворената система, т.е., системата без обратна връзка. Тогава

$$y = GKr + d + 0.n$$

и сравнението с (1.7) показва, че с изключение на шума, реакцията на системата с обратна връзка се получава, умножавайки дясната страна със S .

Тъй като разглежданата система е едномерна и предавателните функции са скалярни, можем да запишем че $S + T = 1$, $S = \frac{1}{1 + L}$, $T = \frac{L}{1 + L}$ и т.н.

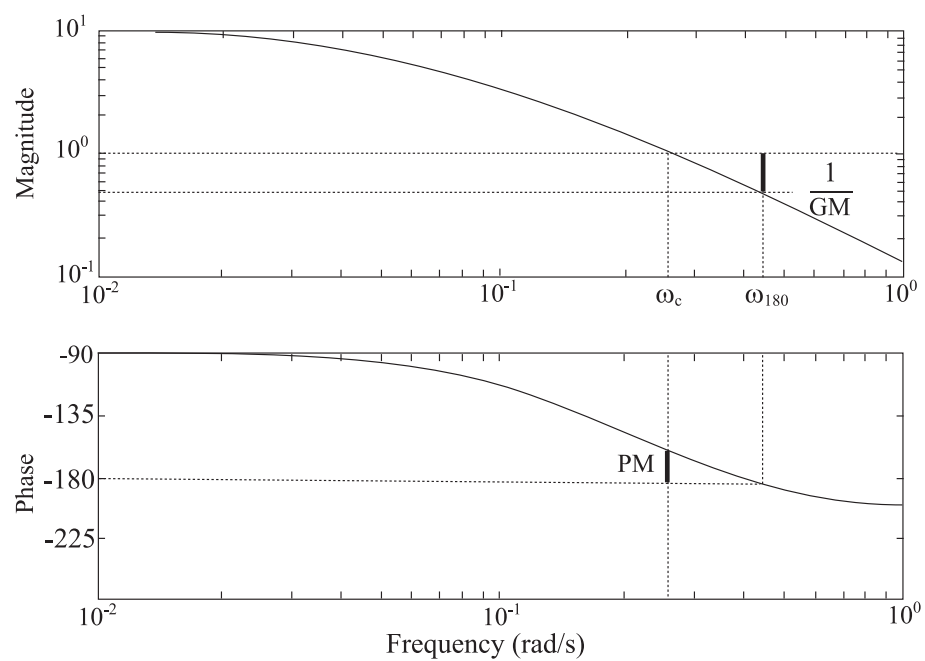
Качество в честотната област

Анализът в честотната област, за разлика от анализа на преходната функция на системата, има това преимущество, че при него се разглежда по-широк клас от сигнали (синусоидални с произволна честота). Това дава възможност по-лесно да се характеризират свойствата на системата с обратна връзка. Важни показатели на качеството в честотната област са запасът по амплитуда и запасът по фаза, максимумите на S и T и различните определения за срязваща честота и честотна лента, използвани за да се характеризира скоростта на преходните процеси.

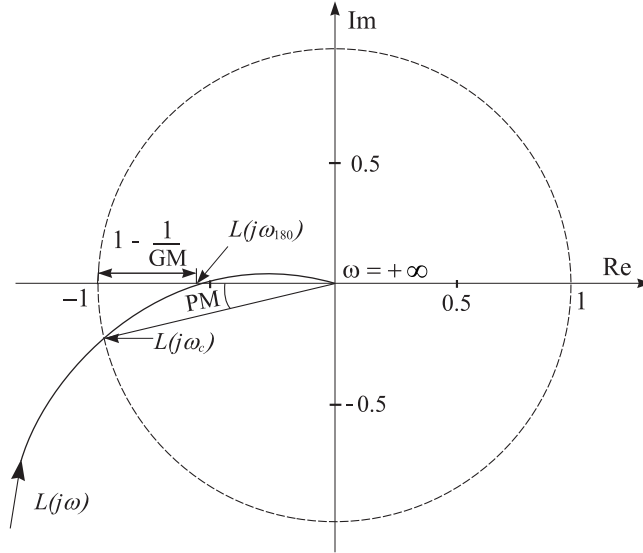
Нека $L(s)$ е предавателната функция на устойчива система с отрицателна обратна връзка. Типичните честотни характеристики на отворената система и ходографът на Найквист, илюстриращи понятията запас по амплитуда (GM) и запас по фаза (PM), са показани съответно на фиг. 1.2 1.7.

Запасът по амплитуда се дефинира като

$$GM = 1/|L(j\omega_{180})| \quad (1.12)$$



Фигура 1.6: Типични честотни характеристики на отворената система с показани PM и GM



Фигура 1.7: Ходограф на Найквист с показани РМ и GM

където *фазовата срязваща честота* ω_{180} е честотата, за която ходографът на Найквист на $L(j\omega)$ пресича отрицателната реална ос между -1 и 0, т.е.,

$$\angle L(j\omega_{180}) = -180^\circ \quad (1.13)$$

Ако има повече пресичания се взема най-голямата стойност на $|L(j\omega_{180})|$. Запасът по амплитуда GM е множителят, с който може да се увеличи усилването на отворения контур $|L(j\omega)|$ преди затворената система да стане неустойчива. По такъв начин GM играе ролята на предпазна мярка срещу неопределеност (грешка) в усилването в установен режим. Обикновено изискваме $GM > 2$.

Запасът по фаза се дефинира като

$$PM = \angle L(j\omega_c) + 180^\circ \quad (1.14)$$

където *амплитудната срязваща честота* ω_c е честотата, за която $|L(j\omega)|$ за пръв път пресича 1 отгоре, т.е.,

$$|L(j\omega_c)| = 1$$

Запасът по фаза показва каква отрицателна фаза (фазово закъснение) може да се добави към $L(s)$ за честота ω_c преди фазата за тази честота да стане -180° , което отговаря на неустойчивост на затворената система (вж. фиг. 1.7). Обикновено изискваме РМ да е по-голям от 30° . РМ играе ролята на директна гаранция

срещу неопределеността в чистото закъснение; системата става неустойчива, ако добавим чисто закъснение равно на

$$\tau_{\max} = \text{PM}/\omega_c$$

Честотната лента на затворената система характеризира бързодействието на системата. По-широка честотна лента съответства на по-голяма скорост на нарастване на сигналите, тъй като високочестотните компоненти преминават по-лесно към изхода. Широката честотна лента също така е показател за чувствителност към шумовете и към изменения на параметрите. Казано най-общо, *честотната лента на пропускане* $[0, \omega_B]$ се дефинира като честотния диапазон, в който управлението е ефективно. За добро качество на следенето грешката $e = y - r = -Sr$ трябва да е малка и обратната връзка е ефективна (в смисъл на подобряване на качеството) доколкото относителната грешка $e/r = -S$ е достъчно малка, което обикновено се дефинира като по-малко от 0.707 по амплитуда. По такъв начин се стига до следното определение.

Честотната лента на затворената система ω_B е честотата за която $|S(j\omega)|$ пресича $1/\sqrt{2} = 0.707$ (≈ -3 dB) отдолу.

Алтернативната дефиниция, която се използва традиционно при дефиниране на честотната лента е: *Честотната лента по отношение на T , ω_{BT} , е най-високата честота за която $|T(j\omega)|$ пресича $1/\sqrt{2} = 0.707$ (≈ -3 dB) отгоре.* В някои случаи, обаче, ω_{BT} не е подходящ показател на качеството. Причината е, че за добро качество ние искаме $T \approx 1$ но затова не е достатъчно $|T| \approx 1$; необходимо е също така да се разглежда и фазата. От друга страна, за добро качество ние искаме S да е близо до 0, а това е изпълнено, ако $|S| \approx 0$, независимо от фазата на S .

Възможно е да се покаже, че за системи с $\text{PM} < 90^\circ$ е изпълнено

$$\omega_B < \omega_c < \omega_{BT} \quad (1.15)$$

Пример 1.6 Следният пример илюстрира влиянието на ширината на честотната лента върху свойствата на затворената система.

Разглеждаме системата, показана на фиг. 1.1 с обект от втори ред

$$G = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}.$$

Като управляващи устройства се използват три пропорционално-интегрални регулатори с различни коефициенти на усилване:

$$K_1 = 0.5 \times \left(1 + \frac{1}{T_c s}\right), K_2 = 1 \times \left(1 + \frac{1}{T_c s}\right), K_3 = 2 \times \left(1 + \frac{1}{T_c s}\right)$$

където $T_c = 1$.

Въвеждането на обекта и управляващите устройства се извършва с командните редове

```
s = zpk('s');
Ko = 2;
G = Ko/(s^2 + 3*s + 2);
Tc = 1;
K1 = 0.5*(1 + 1/(Tc*s));
K2 = 1.0*(1 + 1/(Tc*s));
K3 = 2.0*(1 + 1/(Tc*s));
```

Получаването на предавателните функции на затворената система (допълнителните функции на чувствителността) за трите управляващи устройства и изчисляването на съответните амплитудно-честотни характеристики на затворената система става с операторите

```
T1 = feedback(G*K1,1);
T2 = feedback(G*K2,1);
T3 = feedback(G*K3,1);
omega = logspace(-1,1,100);
bode(T1,'b-',T2,'m--',T3,'r-.',omega)
```

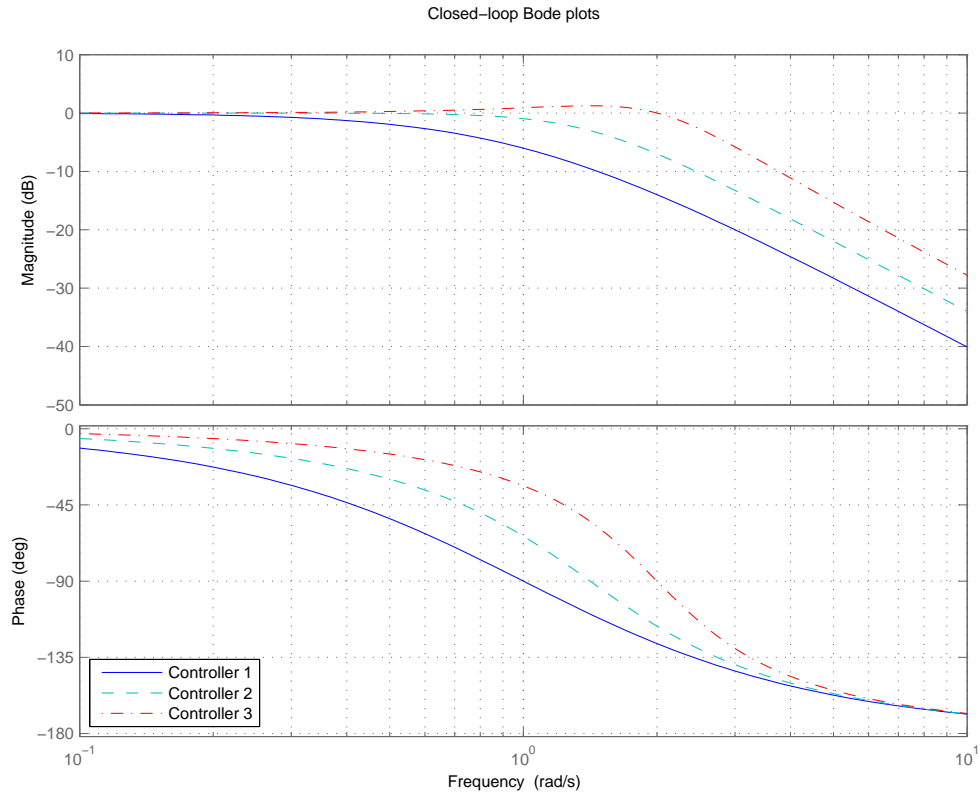
Намерените предавателни функции са

$$T_1 = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}, \quad T_2 = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}, \quad T_3 = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Амплитудно-честотните характеристики на затворената система са показани на фиг. 1.8. Вижда се, че използването на управляващото устройство с най-висок коефициент на усиление води до най-широка честотна лента на пропускане на затворената система.

Нека сега намерим функциите на чувствителността за трите управляващи устройства и съответните им амплитудно-честотни характеристики. Това става с операторите

```
S1 = feedback(1,G*K1);
S2 = feedback(1,G*K2);
S3 = feedback(1,G*K3);
omega = logspace(-2,1,100);
bodemag(S1,'b-',S2,'m--',S3,'r-.',omega)
```



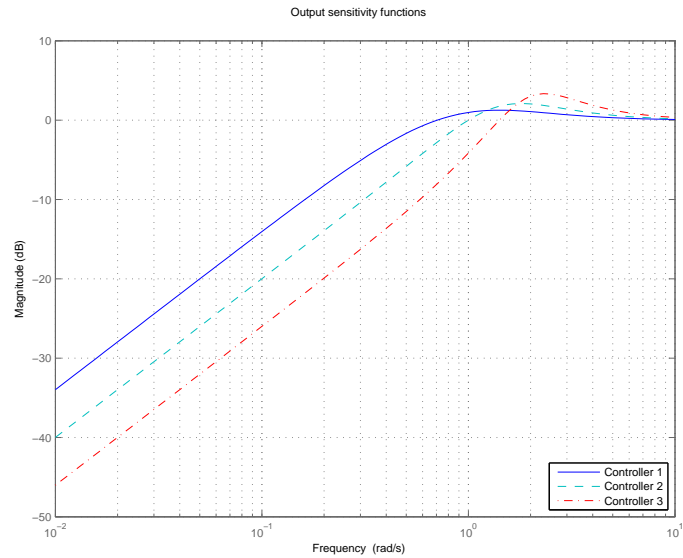
Фигура 1.8: Амплитудно-честотни характеристики на затворената система

Получените функции на чувствителността са

$$S_1 = \frac{s(s+2)}{(s+1)^2}, \quad S_2 = \frac{s(s+2)}{s^2+2s+2}, \quad S_3 = \frac{s(s+2)}{s^2+2s+4}.$$

Амплитудно-честотните характеристики, съответстващи на функциите на чувствителността, са показани на фиг. 1.9. Вижда се, че при най-високия коефициент на усилване (третото управляващо устройство) функцията на чувствителността има най-малка стойност в нискочестотната област, т.е., смущаващите въздействия със спектрално съдържание в тази област ще се потискат най-силно при използването на това управляващо устройство.

Получаването на преходните процеси на затворената система при стъпаловидно задание с големина 1 във 2-та секунда и стъпаловидно смущаващо въздействие

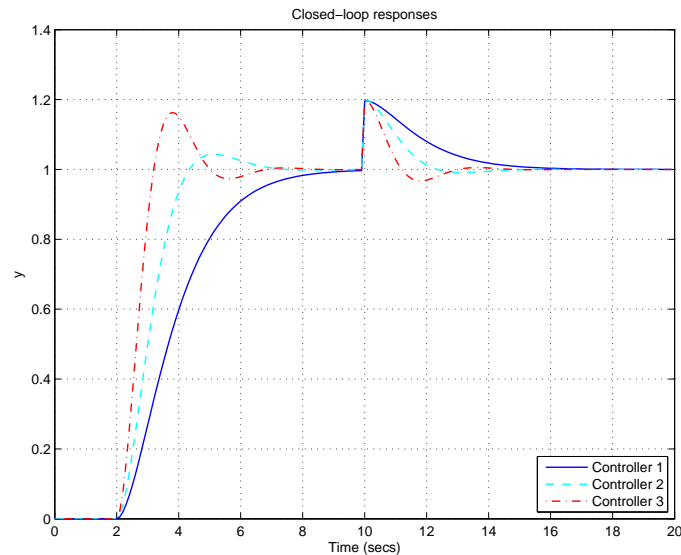


Фигура 1.9: Функции на чувствителността

с големина 0.2 в десетата секунда за трите управляващи устройства се извършва със Simulink[®]– схемата `siso_disturbance`, като се въведат командните редове

```
tfin = 20;
nf = 200;
K = K1;
sim('siso_disturbance')
t1 = y.time(1:nf);
u1 = u.signals.values(1:nf);
y1 = y.signals.values(1:nf);
K = K2;
sim('siso_disturbance')
t2 = y.time(1:nf);
u2 = u.signals.values(1:nf);
y2 = y.signals.values(1:nf);
K = K3;
sim('siso_disturbance')
t3 = y.time(1:nf);
u3 = u.signals.values(1:nf);
y3 = y.signals.values(1:nf);
```

```
plot(t1,y1,'b-',t2,y2,'c--',t3,y3,'r-.','LineWidth',1), grid
```



Фигура 1.10: Преходни процеси по задание и смущение

Преходните процеси по задание и смущение са показани на фиг. 1.10. Най-бързият преходен процес отговаря на най-високия коефициент на усилване, който съответства на най-широка честотна лента на пропускане на затворената система. Също така в този случай преходният процес, дължащ се на смущаващото въздействие, затихва най-бърже.

Преходните процеси при случаен измервателен шум се получават със Simulink[®]–функцията `siso_noise`, като се въведат командните редове (заданието и смущаващото въздействие се приемат равни на нула)

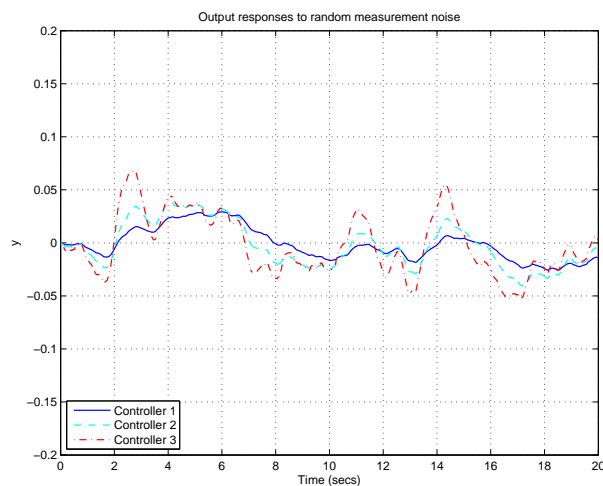
```
tfin = 20;
nf = 2000;
K = K1;
sim('siso_noise')
t1 = y.time(1:nf);
u1 = u.signals.values(1:nf);
y1 = y.signals.values(1:nf);
K = K2;
sim('siso_noise')
t2 = y.time(1:nf);
```

```

u2 = u.signals.values(1:nf);
y2 = y.signals.values(1:nf);
K = K3;
sim('siso_noise')
t3 = y.time(1:nf);
u3 = u.signals.values(1:nf);
y3 = y.signals.values(1:nf);
plot(t1(1:nf),y1(1:nf),'b-',t2(1:nf),y2(1:nf),'c--', ...
      t3(1:nf),y3(1:nf),'r-.','LineWidth',1), grid

```

Шумът е генериран като бял шум с ограничена честотна лента и мощност 0.0017 и е почти равномерно разпределен в интервала $[-1 \ 1]$.



Фигура 1.11: Преходни процеси, дължащи се на измервателния шум

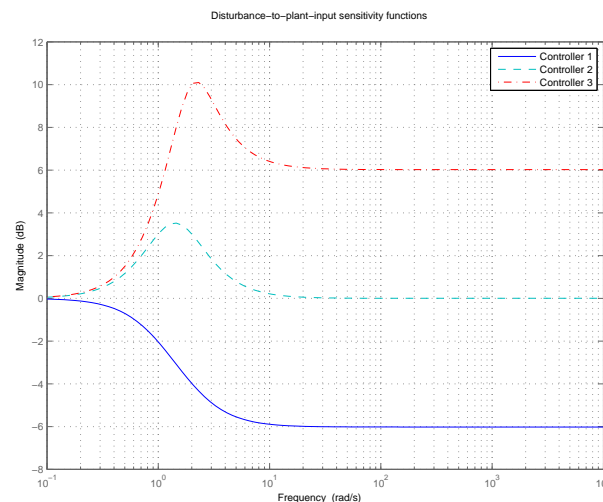
От преходните процеси, показани на фиг. 1.11 се вижда, че при третото управляващо устройство шумовете се усилват най-много. Това следва от вида на амплитудно-честотните характеристики на функцията на допълнителната чувствителност (фиг. 1.8), която с точност до знака е равна на предавателната функция по шума.

Измервателният шум може да доведе и до голям шум на входа на обекта, който да предизвика насищане на управляващото устройство. За разглеждания пример предавателните функции на затворения контур “измервателен шум - вход

на обекта” се дават от

$$W_1 = -K_1 S_1, \quad W_2 = -K_2 S_2, \quad W_3 = -K_3 S_3.$$

Амплитудно-честотните характеристики на този контур за трите управляващи



Фигура 1.12: Честотни характеристики на контура “измервателен шум - вход на обекта”

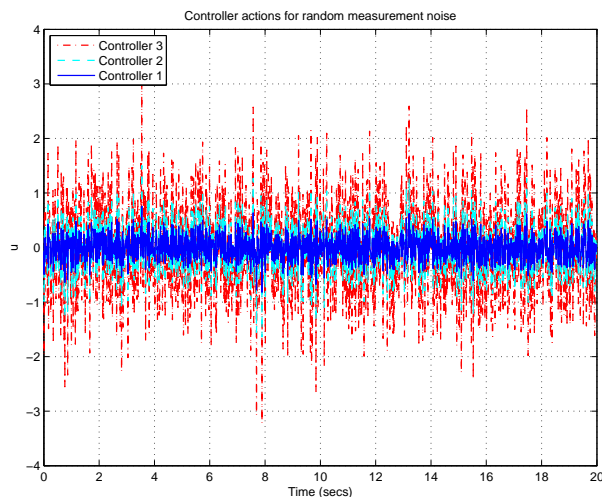
устройства са показани на фиг. 1.12. Вижда се, че с увеличаване на коефициента на усилване високочестотните шумове на входа на обекта се усилват.

Преходни процеси на входа на обекта, дължащи се на измервателния шум, са показани на фиг. 1.13. За третото управляващо устройство интензивността на шума на входа на обекта е няколко пъти по-висока от тази на измервателния шум и е значително по-висока от интензивността на шума на изхода на системата.

Получените резултати дават основание за следните изводи:

1. По-високото усилване на управляващото устройство води до по-широка честотна лента на затворената система и до по-бързи преходни процеси. Грешката в установен режим в този случай е по-малка.
2. По-високото усилване води до по-добро потискане на ниско-честотните смущаващи въздействия.
3. По-високото усилване води до засилване ефекта на високо-честотните измервателни шумове.

Трябва да се подчертае, че тези изводи са в сила и за обекти от по-висок ред. При такива обекти, обаче, с повишаването на усилването се влошават преходните



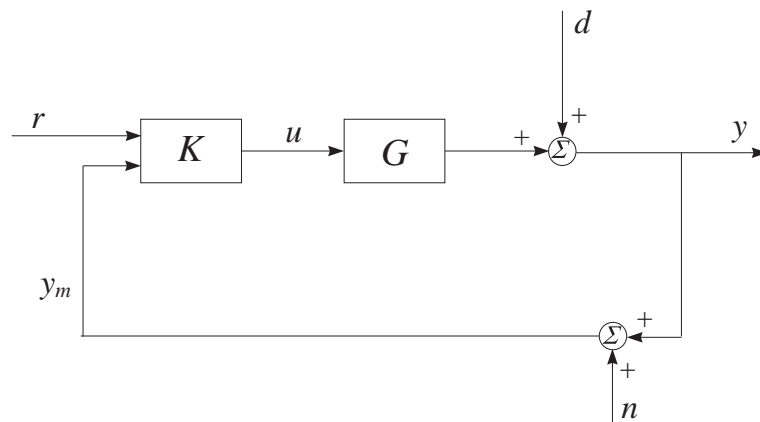
Фигура 1.13: Преходни процеси на входа на обекта, дължащи се на измервателния шум

процеси и при някакво критично усилване затворената система може да стане и неустойчива. Освен това голямото усилване може да доведе до силна чувствителност към изменения в параметрите на системата, т.е., до лоша робастност. Ето защо синтезът на системите е компромис между постигането на добро качество (добро потискане на смущаващите въздействия и шумовете) и добра робастност (ниска чувствителност към неопределеност в модела на обекта).

Управляващо устройство с две степени на свобода

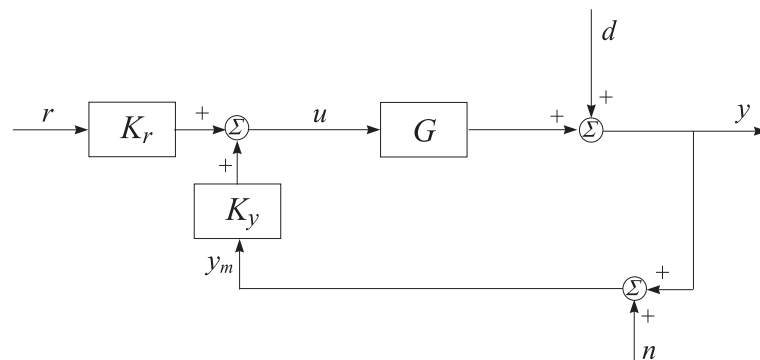
Добро потискане на смущаващите въздействия и висока точност на следене на заданието е трудно да се осъществят с единствено управляващо устройство. В общия случай е необходимо да се използва управляващо устройство с две степени на свобода, при което задаващият сигнал r и измерваният изход y_m се обработват поотделно от управляващото устройство, вместо да се използва тяхната разлика $r - y_m$. Съществуват различни варианти на управляващи устройства с две степени на свобода, като най-общият случай е показан на фиг. 1.14. При него управляващото устройство има два входа r и y_m и един изход u . Често, обаче, управляващото устройство се разделя на два блока

$$K = [K_r \ K_y],$$



Фигура 1.14: Конфигурация на управляващо устройство с две степени на свобода

където K_y е частта, която осъществява обратната връзка, а K_r е пред-филтър (права връзка по задаващото въздействие). Структурата на затворената система



Фигура 1.15: Управляващо устройство с две степени на свобода с пред-филтър и обратна връзка

в този случай е показана на фиг. 1.15. Обратната връзка се използва за намаляване на ефекта на неопределеността (смущенията и грешките в модела), а пред-филтърът осигурява необходимото качество на следене. Обикновено на практика най-напред се синтезира K_y , така че да се потискат смущенията, след което се синтезира K_r за да се подобри точността на следене.

Нека $T = L(I + L)^{-1}$ (с $L = GK_y$) е функцията на допълнителната чувст-

вителност на затворената система. Тогава за управляващото устройство с една степен на свобода $y = Tr$, докато за управляващото устройство с две степени на свобода $y = TK_r r$. Ако желаната предавателна функция за следене на заданието е T_{ref} , то съответният идеален пред-филтър K_r удовлетворява $TK_r = T_{\text{ref}}$, или

$$K_r(s) = T^{-1}(s)T_{\text{ref}}(s).$$

По такъв начин теоретически може да се синтезира $K_r(s)$, което осигурява произволна желана предавателна функция $T_{\text{ref}}(s)$. На практика, обаче, това не е толкова просто, тъй като получената K_r може да е неустойчива (ако $G(s)$ има неустойчиви нули) или нереализуема, а също така $TK_r \neq T_{\text{ref}}$, ако $T(s)$ не е точно известна.