ДЕМОНСТРАЦИОНЕН ПРИМЕР – МОДУЛ 12.

РЕКУРСИВНО И ИТЕРАТИВНО ОЦЕНЯВАНЕ НА ЛИНЕЙНИ ДИСКРЕТНИ ПАРАМЕТРИЧНИ МОДЕЛИ (ЛАБОРАТОРНО УПРАЖНЕНИЕ)

За да се илюстрира представената постановка за рекурсивно оценяване на параметрите на стохастични линейни регресионни модели в този ресурс от модул 12 е показан подробен пример за оценяване на парамтерите на основни типове модели в средата на MATLAB.

Пример1: Оценяване на параметрите на ARX модел по набори данни с различни по тип и мощност смущения при различни стойности на забравящия фактор

Да се оценят параметрите на ARX модел при $\lambda = 1$ и $\lambda = 0.97$ по три набора входно-изходни данни, които се различзават по типа и мощността на изходното смущение. Да се анализира влиянието на смущението върху точността на оценките.

Стъпка 1: Генериране на три набора данни за рекурсивното оценяване.

Зададен е номинален (точен) дискретен модел

$$y(k) = \frac{A(q)}{B(q)} u(k), T_0 = 0.5s$$

$$A(q) = -1.6613q^{-1} + 0.6873q^{-2}, B(q) = -0.0380q^{-1} + 0.0640q^{-2}$$

Зададеният модел се трансформира в ARX модел от вида

$$y(k) = \frac{A(q)}{B(q)} u(k) + \frac{1}{A(q)} e(k).$$

Използва се кода:

```
A=[1 -1.6613 0.6873];B=[0 -0.0380 0.0640];
model=idpoly(A,B);
model.Ts=0.5
```

Моделът е от втори ред и има 1 такт закъснение (една водеща нула в полинома

B(q)). Редът на полинома *A(q)* е 2 и редът на полинома *B(q)* е 2, т.к. нормиращия коефициент 1 в *A(q)* и водещите нули в *B(q)* не подлежат на оценяване.

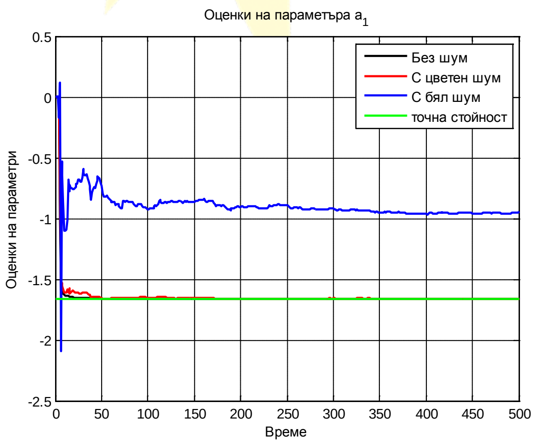
На входа на модела се подава бял шум преобразуван през идеално реле. Формират се три набора данни. Първият набор се формира от входния сигнал и незашумения изходен сигнал на номиналния модел. Изходният сигнал на втория набор данни се формира като към полезния сигнал на номиналния модел се добави цветен шум с мощност равна на 20% от мощността на полезния сигнал. Този шум е получен от бял шум преобразуван през филтър с предавателна функция *1/A(q).* По този начин се осигурява остатъчната грешка в ARX модела да е бял гаусов шум. Изходният сигнал на третия набор данни се формира като към полезния сигнал се добавя бял шум с мощност равна на 20% от неговата мощност. Използва се кода

```
% генериране на входния сигнал
randn('state',12345)
un=randn(500,1);
u=sign(un);
% генериране на шума за формиране на изходните смущения
randn('state',43555)
e=randn(1000,1);
% изчисляване на коефициента за намаляне на мощносдтта на шума
cv=sum(B)/5;
% изчисляване на незашумения изход
y0=idsim(u,model);
% изчисляване на зашумения с цветен шум изход.
% !!!Функцията idsim прекарва сигнала e*cv през филтър с
% предавателна функция 1/(A(q)
y1=idsim([u,e*cv],model)
% изчисляване на зашумения с 20% бял шум изходен сигнал
y2=y0+e*0.2*(std(y0)/std(e));
% формиране на трите набора входно-изходни данни
data0=iddata(y0,u,0.5);
data1=iddata(y1,u,0.5);
data2=iddata(y2,u,0.5)
```

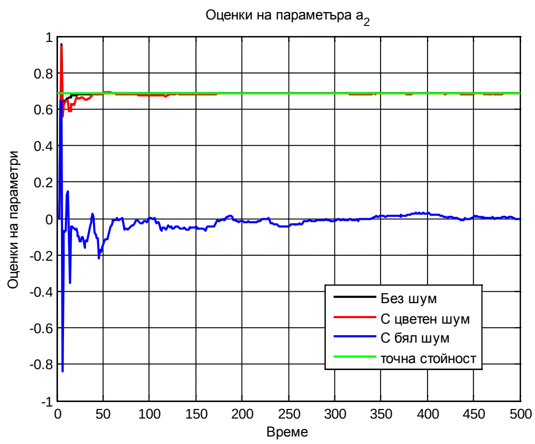
Стъпка 2: Рекурсивно оценяване на параметрите на ARX модел при $\lambda = 1$

По трите набора данни се оценяват 3 ARX модела с функцията ***rarx***. Визуализират се оценките и точните стойности на параметрите. Точната стойност се показва като права, чиито точки се генерират с функцията ***ones.*** Трябва да се има впредвид, че параметърът a_1 е втория елемент на полинома $A(q)$ (първият елемент е нормиращата единица, която не се оценява) и параметърът b_1 е втория елемент на $B(q)$ (първият елемент е водещата нула, която определя чистото закъснение). На фиг.1-8 са показани получените резултати. Използва се кода:

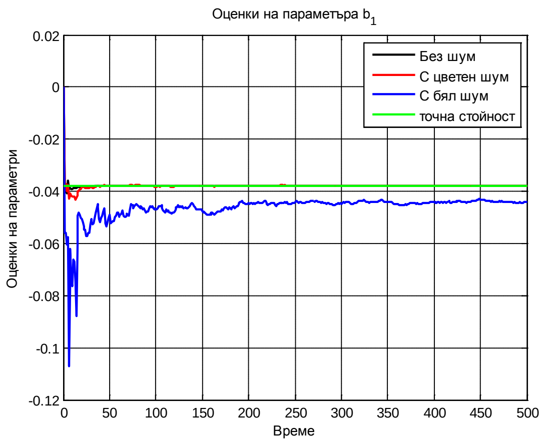
```
thita0=rarx(data0,[2 2 1],'ff',1);
thita1=rarx(data1,[2 2 1],'ff',1);
thita2=rarx(data2,[2 2 1],'ff',1);
figure(1)
plot(1:500,thita0(:,1),'k',1:500,thita1(:,1),'r',1:500,thita2(:,1)
,'b',1:500,ones(500,1)*model.a(2),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра a_1'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('Без шум','С цветен шум','С бял шум','точна
стойност')
figure(2)
plot(1:500,thita0(:,2),'k',1:500,thita1(:,2),'r',1:500,thita2(:,2)
,'b',1:500,ones(500,1)*model.a(3),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра a_2'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('Без шум','С цветен шум','С бял шум','точна
стойност')
figure(3)
plot(1:500,thita0(:,3),'k',1:500,thita1(:,3),'r',1:500,thita2(:,3)
,'b',1:500,ones(500,1)*model.b(2),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра b_1'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('Без шум','С цветен шум','С бял шум','точна
стойност')
figure(4)
plot(1:500,thita0(:,4),'k',1:500,thita1(:,4),'r',1:500,thita2(:,4)
,'b',1:500,ones(500,1)*model.b(3),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра b_2'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('Без шум','С цветен шум','С бял шум','точна
стойност')
```



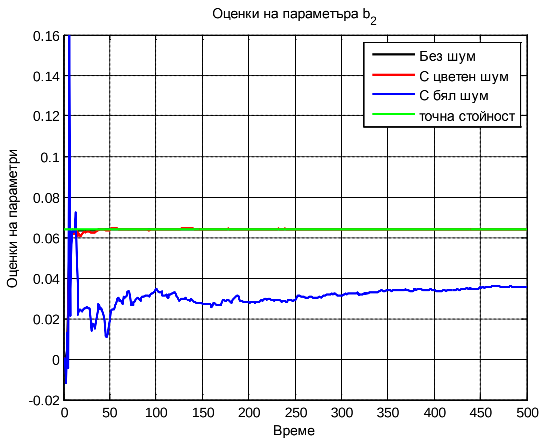
Фиг.1оценки на параметъра a_1 *при* $\lambda = 1$



Фиг.2 оценки на параметъра a_2 *при* $\lambda = 1$

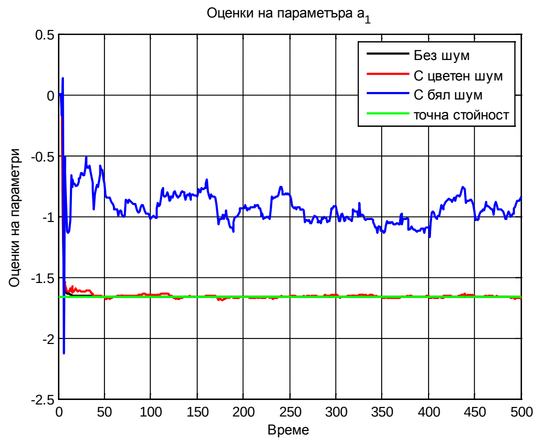


Фиг.3оценки на параметъра b_1 *при* $\lambda = 1$

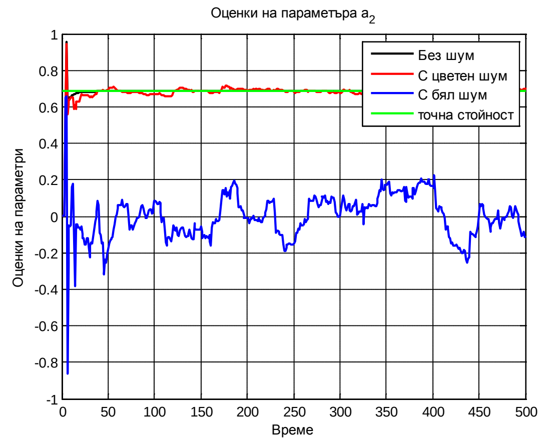


Фиг.4 оценки на параметъра b_2 *при* $\lambda = 1$

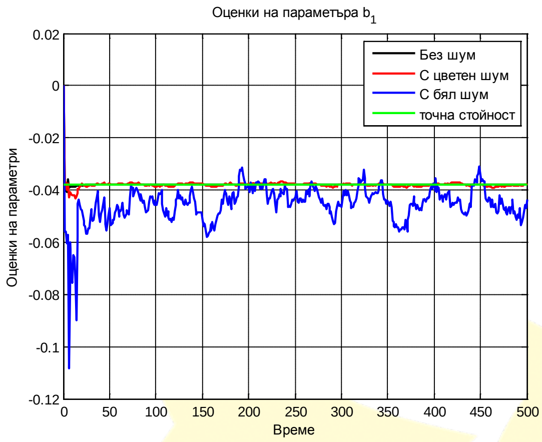
```
thita0=rarx(data0,[2 2 1],'ff',0.97);
thita1=rarx(data1,[2 2 1],'ff',0.97);
thita2=rarx(data2,[2 2 1],'ff',0.97);
figure(5)
plot(1:500,thita0(:,1),'k',1:500,thita1(:,1),'r',1:500,thita2(:,1)
,'b',1:500,ones(500,1)*model.a(2),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра a_1'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('Без шум','С цветен шум','С бял шум','точна
стойност')
figure(6)
plot(1:500,thita0(:,2),'k',1:500,thita1(:,2),'r',1:500,thita2(:,2)
,'b',1:500,ones(500,1)*model.a(3),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра a_2'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('Без шум','С цветен шум','С бял шум','точна
стойност')
figure(7)
plot(1:500,thita0(:,3),'k',1:500,thita1(:,3),'r',1:500,thita2(:,3)
,'b',1:500,ones(500,1)*model.b(2),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра b_1'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('Без шум','С цветен шум','С бял шум','точна
стойност')
figure(8)
plot(1:500,thita0(:,4),'k',1:500,thita1(:,4),'r',1:500,thita2(:,4)
,'b',1:500,ones(500,1)*model.b(3),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра b_2'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('Без шум','С цветен шум','С бял шум','точна
стойност')
```



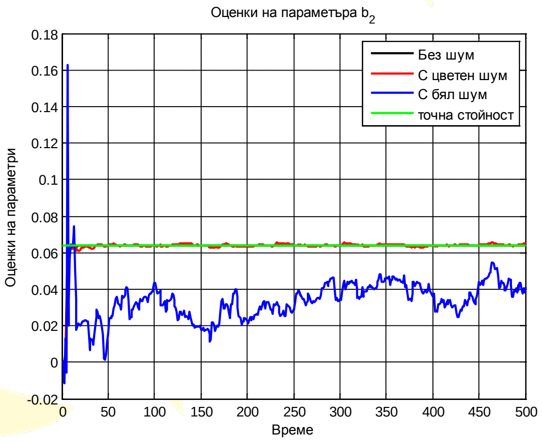
Фиг.5оценки на параметъра a_1 *при* $\lambda = 0.97$



Фиг.6 оценки на параметъра a_2 *при* $\lambda = 0.97$



Фиг.7 оценки на параметъра b_1 *при* $\lambda = 0.97$



Фиг.8 оценки на параметъра b_2 *при* $\lambda = 0.97$

ИЗВОД: Оценките на параметрите на *ARX* модела, получени по незашумените данни са неизместени и съвпадат с точните стойности на параметрите. Оценките получени по втория набор данни със специално формирания цветен шум с течение на времето клонят към точните стойности, т.к. остатъчната грешка в *ARX* модела е бял шум в този случай. Оценките получени по третия набор данни са изместени, въпреки че съотношението на мощността на шума към мощността на полезния е същото като това във втория набор данни, но в този случай остатъчната грешка в *ARX* модела е цветен шум. Оценките схождат към установената си стойност по-бързо при $\lambda = 0.97$, спрямо тези при $\lambda = 1$, за сметка на по-голяма дисперсия след установяване (оценките се колебаят около установената си стойност).

Европейски съюз

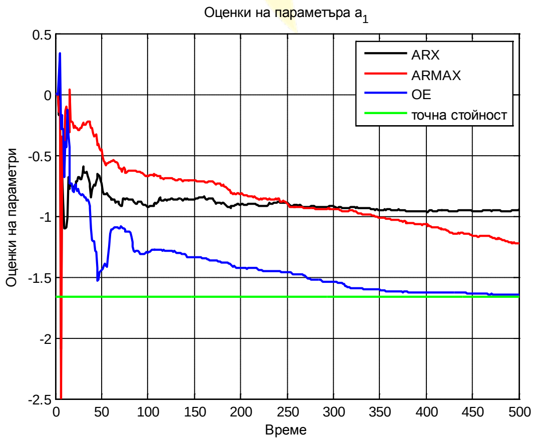
ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042
„Организационна и технологична инфраструктура за учене пр целия живот и развитие на компетенции”
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз
Инвестира във вашето бъдеще!

Европейски социален фонд

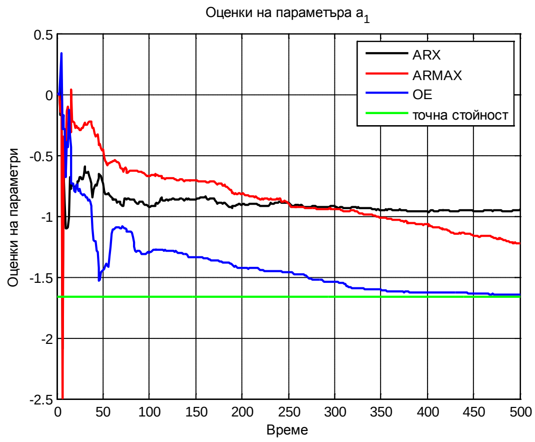
Пример2: Оценяване на параметрите на ARMAX и OE модели по третия набор данни при различни стойности на забравящия фактор

Да се оценят параметрите на *ARMAX* и *OE* модели при $\lambda=1, \lambda=0.99, \lambda=0.97$ по данните, чиито изход е зашумен с бял шум. Да се извърши сравнение с оценките на *ARX* модела, получени за същия набор данни. На фиг.9-20 са показани получените резултати. Използва се кода:

```
thita2=rarx(data2,[2 2 1],'ff',1);
thita3=rarmax(data2,[2 2 2 1],'ff',1);
thita4=roe(data2,[2 2 1],'ff',1);
figure(9)plot(1:500,thita2(:,1),'k',1:500,thita3(:,1),'r',1:500,th
ita4(:,3),'b',1:500,ones(500,1)*model.a(2),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра a_1'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('ARX','ARMAX','OE','точна стойност')
figure(10)
plot(1:500,thita2(:,2),'k',1:500,thita3(:,2),'r',1:500,thita4(:,4)
,'b',1:500,ones(500,1)*model.a(3),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра a_2'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('ARX','ARMAX','OE','точна стойност')
figure(11)
plot(1:500,thita2(:,3),'k',1:500,thita3(:,3),'r',1:500,thita4(:,1)
,'b',1:500,ones(500,1)*model.b(2),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра b_1'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('ARX','ARMAX','OE','точна стойност')
figure(12)
plot(1:500,thita2(:,4),'k',1:500,thita3(:,4),'r',1:500,thita4(:,2)
,'b',1:500,ones(500,1)*model.b(3),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра b_2'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('ARX','ARMAX','OE','точна стойност')
```



Фиг.9оценки на параметъра a_1 при $\lambda=1$



Фиг.10 оценки на параметъра a_2 при $\lambda=1$

Европейски съюз

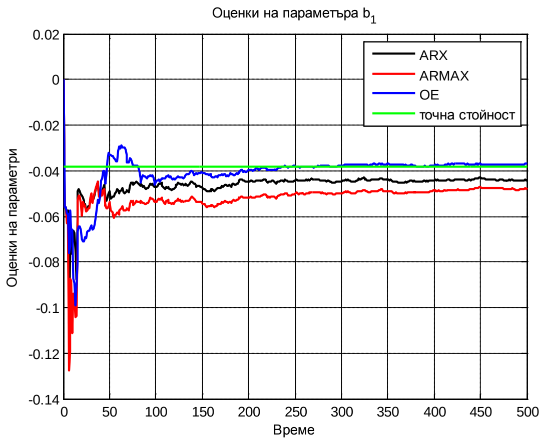
ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене пр целия живот и развитие на компетенции"

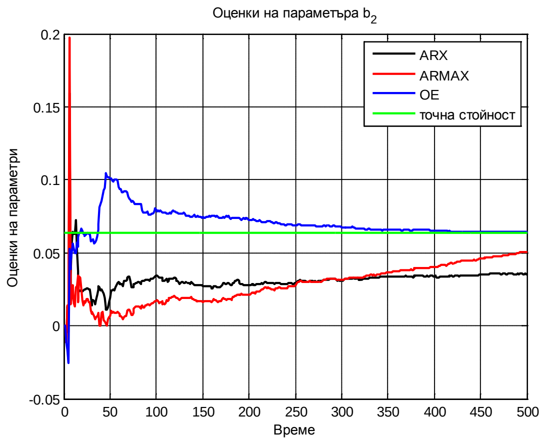
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси", съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз

Инвестира във вашето бъдеще!

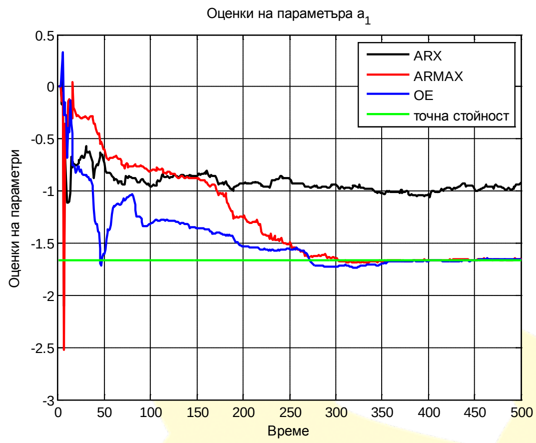
ЕСФ България
Европейски социален фонд



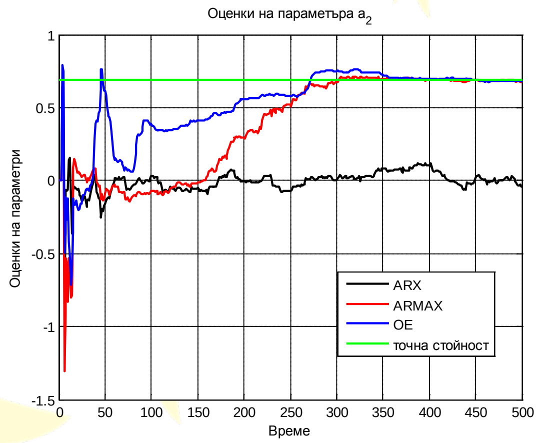
Фиг.11 оценки на параметъра b_1 *при* $\lambda = 1$



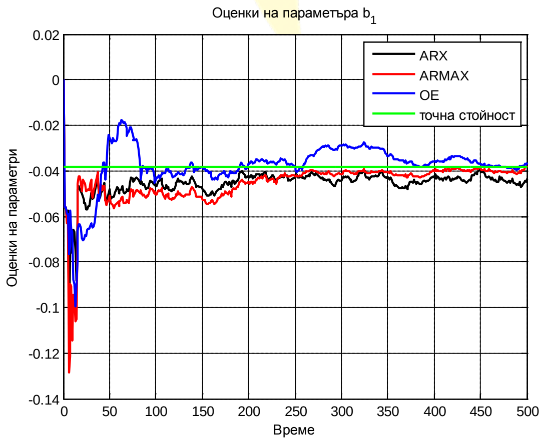
Фиг.12 оценки на параметъра b_2 *при* $\lambda = 1$



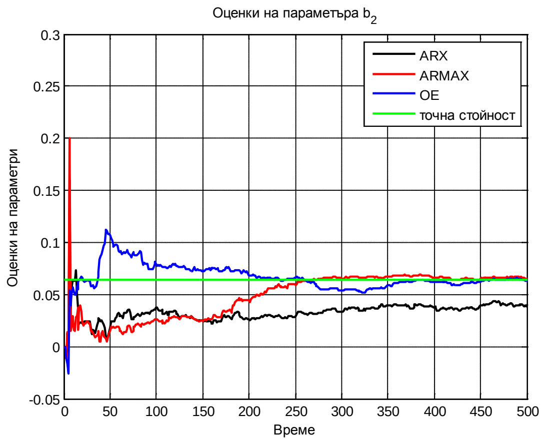
Фиг.13 оценки на параметъра a_1 *при* $\lambda = 0.99$



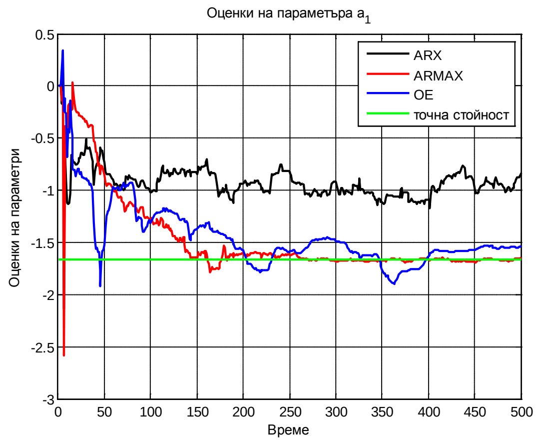
Фиг.14 оценки на параметъра a_2 *при* $\lambda = 0.99$



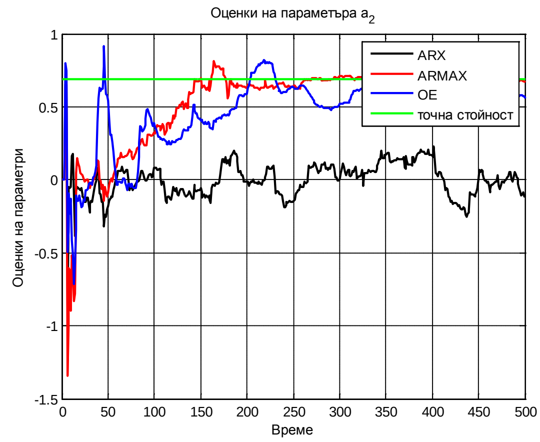
Фиг.15 оценки на параметъра b_1 *при* $\lambda = 0.99$



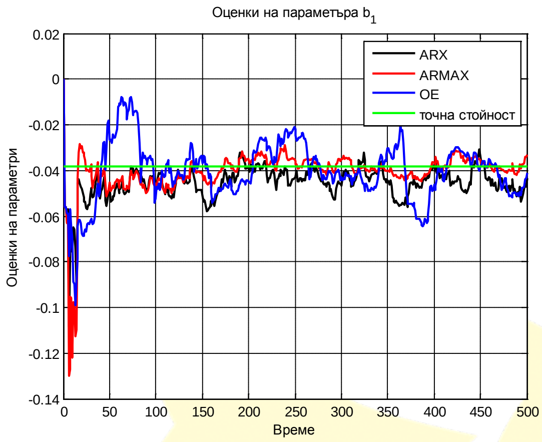
Фиг.16 оценки на параметъра b_2 *при* $\lambda = 0.99$



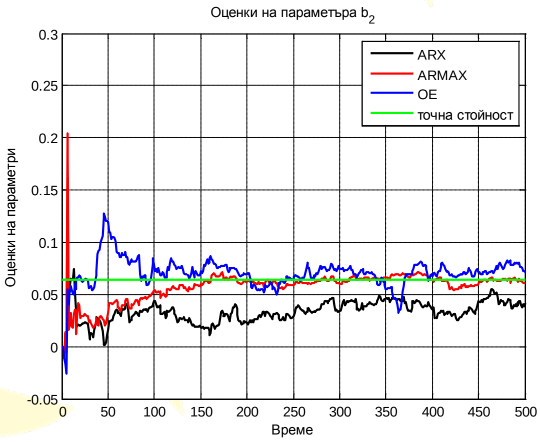
Фиг.17 оценки на параметъра a_1 *при* $\lambda = 0.97$



Фиг.18 оценки на параметъра a_2 *при* $\lambda = 0.97$



Фиг.19 оценки на параметъра b_1 *при* $\lambda = 0.97$



Фиг.20 оценки на параметъра b_2 *при* $\lambda = 0.97$

ИЗВОД: Вижда се, че оценките на параметрите получени по рекурсивния метод на предсказаната грешка за OE и ARMAX моделите са неизместени, за разлика от тези за ARX модела. Оценкте за OE модела схождат по-бързо към установените си стойности от тези за ARMAX модела. За този набор данни OE модела е най-подходящ, т.к при него изходното смущение съвпада с остатъчната грешка, при което се получава, че остатъчната грешка има характер на бял шум. Очевидно е влиянието на стойността на забравящия фактор върху скоростта на сходимост на оценките. При $\lambda = 1$ за 500 итерации единствено оценките на *OE* модела схождат към установената си стойност. При $\lambda = 0.99$ оценките на *OE* и *ARMAX* моделите схождат за около 300-350 *s*, докато при $\lambda = 0.97$ те схождат за 150-200 *s*

Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042
„Организационна и технологична инфраструктура за учене пр целия живот и развитие на компетенции”
Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси”, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз
Инвестира във вашето бъдеще!

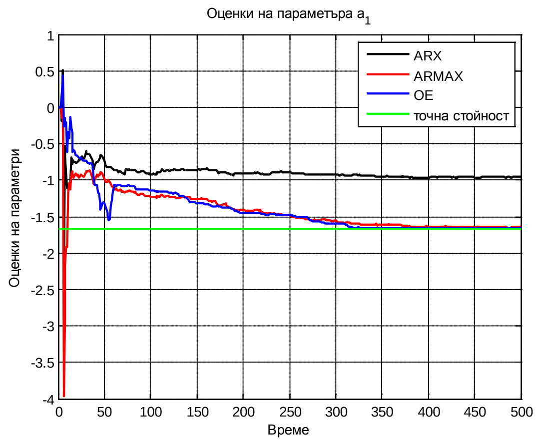
Европейски социален фонд

Пример 3: Нестандартно реализране на рекурсивно оценяване на параметрите на ARMAX и OE модели по третия набор данни.

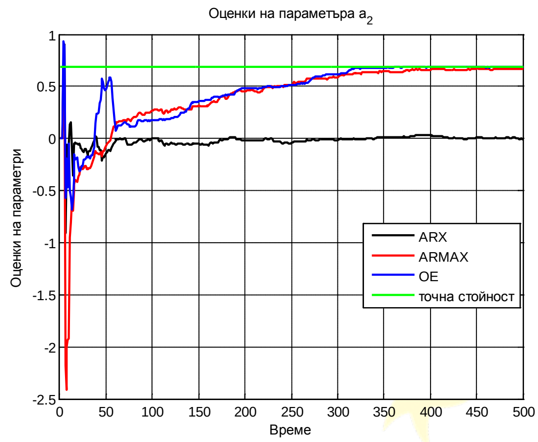
За третия набор днни да се оценят чрез външен цикъл параметрите на *ARX*, *ARMAX* и *OE* модели при $\lambda = 1$и начална стойност на ковариационната матрица $P(0) = 10^{10} I$. Да се извърши сравнение с оценките получени за същата стойност на λ от Пример 2. На фиг. 21-24 са показани получените резултати. Използва се кода:

```
the=zeros(4,1);phi=zeros(4,1);psi=zeros(4,1);P=10^10*eye(4);
NN=[2 2 1];lambda=1;thm=[];Pm=[];
for k = 1 : length (data.y)
[the,yh,P,phi] = rarx([data.y(k) data.u(k)], NN, 'ff', lambda,
the', P, phi);
 thm = [thm ; the]; Pm = [Pm , trace(P)] ;
end
thitaARX=thm;PmARX=Pm;
the=zeros(6,1);phi=zeros(6,1);psi=zeros(6,1);P=10^10*eye(6);
NN=[2 2 2 1];lambda=1;thm=[];Pm=[];
 for k = 1 : length (data3.y)
 [the,yh,P,phi,psi] = rarmax([data3.y(k) data3.u(k)], NN, 'ff',
lambda, the', P, phi,psi);
 thm = [thm ; the] ;  Pm = [Pm , trace(P)] ;
end
thitaARMAX=thm;PmARMAX=Pm;
the=zeros(4,1);phi=zeros(4,1);psi=zeros(4,1);P=10^10*eye(4);
NN=[2 2 1];lambda=1;
thm=[];Pm=[];
for k = 1 : length (data3.y)
 [the,yh,P,phi,psi] = roe([data3.y(k) data3.u(k)], NN, 'ff',
lambda, the', P, phi,psi);
 thm = [thm ; the]; Pm = [Pm , trace(P)] ;
end
thitaOE=thm;PmOE=Pm;
figure(21)
plot(1:500,thitaARX(:,1),'k',1:500,thitaARMAX(:,1),'r',1:500,thita
OE(:,3),'b',1:500,ones(500,1)*model.a(2),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра a_1'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('ARX','ARMAX','OE','точна стойност')
figure(22)
plot(1:500,thitaARX(:,2),'k',1:500,thitaARMAX(:,2),'r',1:500,thita
OE(:,4),'b',1:500,ones(500,1)*model.a(3),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра a_2'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('ARX','ARMAX','OE','точна стойност')
figure(23)
plot(1:500,thitaARX(:,3),'k',1:500,thitaARMAX(:,3),'r',1:500,thita
OE(:,1),'b',1:500,ones(500,1)*model.b(2),'g','LineWidth',2),grid
```

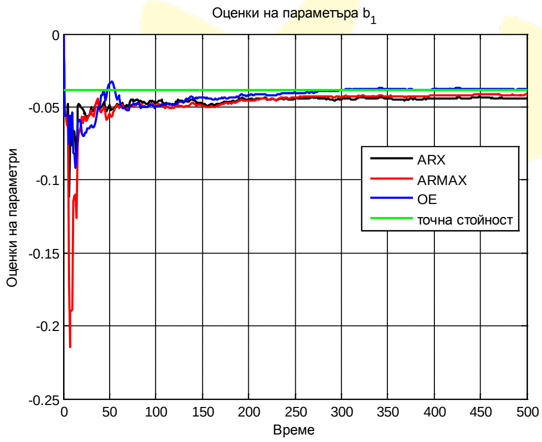
```
title('Оценки на параметъра b_1'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки на параметри'),legend('ARX','ARMAX','OE','точна стойност')
figure(24)
plot(1:500,thitaARX(:,4),'k',1:500,thitaARMAX(:,4),'r',1:500,thitaOE(:,2),'b',1:500,ones(500,1)*model.b(3),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра b_2'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки на параметри'),legend('ARX','ARMAX','OE','точна стойност')
```



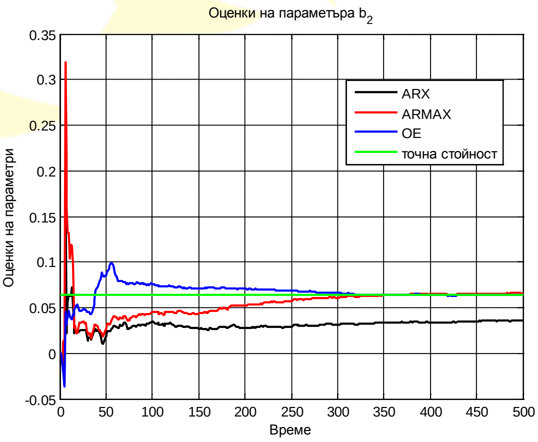
Фиг.21 оценки на параметъра a_1 при $\lambda = 1$



Фиг.22 оценки на параметъра a_2 при $\lambda = 1$



Фиг.23 оценки на параметъра b_1 при $\lambda = 1$



Фиг.24 оценки на параметъра b_2 при $\lambda = 1$

ИЗВОД: Вижда се, че оценките на параметрите получени по рекурсивния метод на предсказаната грешка за OE и ARMAX моделите са неизместени, за разлика от тези за ARX модела. Очевидно е влиянието на началната стойност на ковариационната матрица върху скоростта на сходимост на оценките. При същата стойност на λ в **Пример 2** за 500 итерации единствено оценките на *OE* модела схождат към установената си стойност, докато тук около 350 такт всички оценки схождат към установената си стойност.

Пример 4: Рекурсивно оценяване на параметрите на ARX ARMAX и OE модели по третия набор данни при ненулеви начални стойности на параметрите.

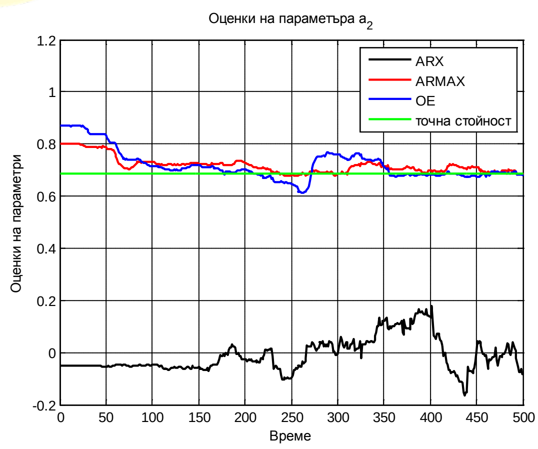
Да се реализира рекурсивно оценяване на параметрите на *ARX*, *ARMAX* и *OE* модели при ненулеви начални условия за оценките на параметрите. За получаване на началните оценки предварително се реализира блочно оценяване с функциитета **arx,armax и oe,** като се използват само m на брой входно-изходни данни от обекта ($m \geq \dim\theta$). За всяка от трите извадки се изчисляват начални условия за θ и P и се реализира рекурсивно оценяване с външен цикъл при $\lambda = 1$. Примерни резултати за оценките на параметрите и за следата на *P(k)* са показани на фиг. 12.24-12.28. Използва се кода:

```
data7=iddata(data2.y(1:20),data2.u(1:20),0.5)
NN=[2 2 1];
modelarx=arx(data7,NN);
the=[modelarx.a(2:3) modelarx.b(2:3)]';phi=zeros(4,1);
P=modelarx.CovarianceMatrix;lambda=0.98;
thm=[];Pm=[];
for k = 1 : length (data3.y)
 [the,yh,P,phi] = rarx([data3.y(k) data3.u(k)], NN, 'ff', lambda,
the', P, phi);
 thm = [thm ; the] ; Pm = [Pm , trace(P)] ;
end
thitaARX=thm;PmARX=Pm;
NN=[2 2 2 1];
modelarmax=armax(data7,NN);
the=[modelarmax.a(2:3) modelarmax.b(2:3) modelarmax.c(2:3)]';
phi=zeros(6,1);psi=zeros(6,1)
P=modelarmax.CovarianceMatrix;
lambda=0.98;thm=[];Pm=[];
for k = 1:length (data3.y)
 [the,yh,P,phi,psi] = rarmax([data3.y(k) data3.u(k)], NN, 'ff',
lambda, the', P, phi,psi);
 thm = [thm ; the] ; Pm = [Pm , trace(P)] ;
end
thitaARMAX=thm;PmARMAX=Pm;
 NN=[2 2 1];
modeloe=oe(data7,NN);
the=[modeloe.b(2:3) modeloe.f(2:3)]';
phi=zeros(4,1);psi=zeros(4,1)
P=modeloe.CovarianceMatrix;
phi=zeros(4,1);psi=zeros(4,1)
NN=[2 2 1];lambda=0.98;thm=[];Pm=[];
```

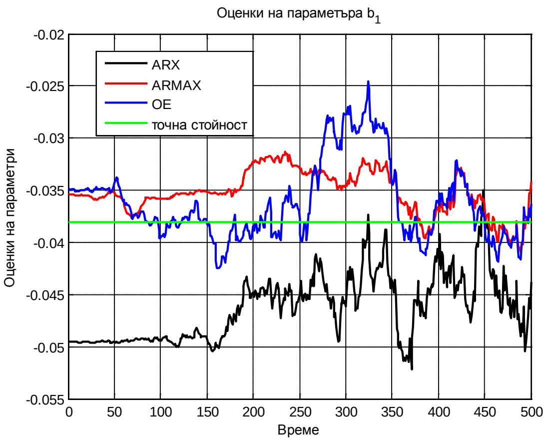
```
for k = 1:length (data3.y)
  [the,yh,P,phi,psi] = roe([data3.y(k) data3.u(k)], NN, 'ff',
lambda, the', P, phi,psi);
   thm = [thm ; the] ; Pm = [Pm , trace(P)] ;
```

```
end
thitaOE=thm;
PmOE=Pm;
figure(24)
plot(1:500,thitaARX(:,1),'k',1:500,thitaARMAX(:,1),'r',1:500,thita
OE(:,3),'b',1:500,ones(500,1)*model.a(2),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра a_1'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('ARX','ARMAX','OE','точна стойност')
figure(25)
plot(1:500,thitaARX(:,2),'k',1:500,thitaARMAX(:,2),'r',1:500,thita
OE(:,4),'b',1:500,ones(500,1)*model.a(3),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра a_2'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('ARX','ARMAX','OE','точна стойност')
figure(26)
plot(1:500,thitaARX(:,3),'k',1:500,thitaARMAX(:,3),'r',1:500,thita
OE(:,1),'b',1:500,ones(500,1)*model.b(2),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра b_1'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('ARX','ARMAX','OE','точна стойност')
figure(27)
plot(1:500,thitaARX(:,4),'k',1:500,thitaARMAX(:,4),'r',1:500,thita
OE(:,2),'b',1:500,ones(500,1)*model.b(3),'g','LineWidth',2),grid
title('Оценки на параметъра b_2'),xlabel('Време'),ylabel('Оценки
на параметри'),legend('ARX','ARMAX','OE','точна стойност')
figure(28)
plot(1:500,PmARX,'k',1:500,PmARMAX,'r',1:500,PmOE,'b','LineWidth',
2),gridtitle('Следа на ковариационната матрица'),
xlabel('Време'),ylabel('Следа на P(k)'),legend('ARX','ARMAX','OE')
```

Фиг.24 оценки на параметъра a_1 при $\lambda = 0.98$



Фиг.25 оценки на параметъра a_2 при $\lambda = 0.98$



Фиг.26 оценки на параметъра b_1 *при* $\lambda = 0.98$

Фиг.27 оценки на параметъра b_2 *при* $\lambda = 0.98$

Фиг.28 Следа на ковариационната матрицапри $\lambda = 0.98$

ИЗВОД: Оценките на параметрите при ненулеви начални условия схождат към установените си стойности без големи колебания. Рекурсивното оценяване на параметри при ненулеви начални условия е особено подходящо при адаптивното управление с непряка адаптация, където на базата на получения текущ модел в реално време се настройва регулатор за управление на обекта.

Европейски съюз

ПРОЕКТ BG051PO001--4.3.04-0042

„Организационна и технологична инфраструктура за учене пр целия живот и развитие на компетенции"

Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси", съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз

Инвестира във вашето бъдеще!

Европейски социален фонд