

3 Kompaktheit

Wir haben gesehen, daß stetige Bilder offener Mengen nicht offen, und stetige Bilder abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen zu sein brauchen. In den nächsten zwei Paragraphen werden wir Eigenschaften topologischer Räume untersuchen, welche unter stetigen Abbildungen erhalten bleiben. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse sind von weitreichender Bedeutung und werden uns insbesondere beim Studium reellwertiger Funktionen äußerst nützlich sein.

Die Überdeckungseigenschaft

Im folgenden bezeichnen wir mit $X := (X, d)$ stets einen metrischen Raum.

Ein Mengensystem $\{A_\alpha \subset X; \alpha \in A\}$ heißt **Überdeckung** der Teilmenge $K \subset X$, falls es zu jedem $x \in K$ ein $\alpha \in A$ gibt mit $x \in A_\alpha$, d.h., falls $K \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$. Eine Überdeckung heißt **offen**, wenn jedes A_α offen ist in X . Schließlich heißt eine Teilmenge $K \subset X$ **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von K eine *endliche* Teilüberdeckung besitzt.

3.1 Beispiele (a) Es sei (x_k) eine konvergente Folge in X mit Grenzwert a . Dann ist die Menge $K := \{a\} \cup \{x_k; k \in \mathbb{N}\}$ kompakt.

Beweis Es sei $\{O_\alpha; \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von K . Dann gibt es Indizes α und $\alpha_k \in A$ mit $\alpha \in O_\alpha$ und $x_k \in O_{\alpha,k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Ferner gibt es wegen $\lim x_k = a$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in O_{\alpha,k}$ für $k > N$. Also ist $\{O_{\alpha,k}; 0 \leq k \leq N\} \cup \{O_\alpha\}$ eine endliche Teilüberdeckung der gegebenen Überdeckung von K . ■

(b) Die Aussage von (a) ist i. allg. falsch, wenn der Grenzwert a aus K entfernt wird.

Beweis Es seien $X := \mathbb{R}$ und $A := \{1/k; k \in \mathbb{N}\}$. Ferner setzen wir $O_1 := (1/2, 2)$ und $O_k := (1/(k+1), 1/(k-1))$ für $k \geq 2$. Dann ist $\{O_k; k \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung von A mit der Eigenschaft, daß jedes O_k genau ein Element von A enthält. Somit kann $\{O_k; k \in \mathbb{N}\}$ keine endliche Teilüberdeckung von A besitzen. ■

(c) Die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} ist nicht kompakt in \mathbb{R} .

Beweis Es genügt wieder, eine offene Überdeckung $\{O_k; k \in \mathbb{N}\}$ von \mathbb{N} anzugeben, bei der jedes O_k genau eine natürliche Zahl enthält, z.B. $O_k := (k-1/3, k+1/3)$ für $k \in \mathbb{N}$. ■

3.2 Satz Jede kompakte Menge $K \subset X$ ist abgeschlossen und beschränkt in X .

Beweis Es sei $K \subset X$ kompakt.

(i) Wir beweisen zuerst die Abgeschlossenheit von K in X . Offensichtlich genügt es, den Fall $K \neq X$ zu betrachten, da X abgeschlossen in X ist. Es sei also $x_0 \in K^c$. Wegen der Hausdorffeigenschaft gibt es zu jedem $y \in K$ offene

Umgebungen $U_y \in \mathfrak{U}(y)$ und $V_y \in \mathfrak{U}(x_0)$ mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Da $\{U_y; y \in K\}$ eine offene Überdeckung von K ist, finden wir endlich viele Punkte y_0, \dots, y_m in K mit $K \subset \bigcup_{j=0}^m U_{y_j} =: U$. Dann sind U und $V := \bigcap_{j=0}^m V_{y_j}$ wegen Satz 2.4 offen und disjunkt. Also ist V eine Umgebung von x_0 mit $V \subset K^c$, d.h., x_0 ist innerer Punkt von K^c . Da dies für jedes $x_0 \in K^c$ gilt, ist K^c offen. Also ist K abgeschlossen.

(ii) Um die Beschränktheit von K zu verifizieren, fixieren wir ein x_0 in X . Wegen $K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{B}(x_0, k) = X$, da $\mathbb{B}(x_0, k)$ gemäß Beispiel 2.2 offen ist, und wegen der Kompaktheit von K finden wir $k_0, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{j=0}^m \mathbb{B}(x_0, k_j)$. Somit gilt $K \subset \mathbb{B}(x_0, N)$, wobei wir $N := \max\{k_0, \dots, k_m\}$ gesetzt haben. Also ist K beschränkt. ■

Eine Charakterisierung kompakter Mengen

Die Umkehrung von Satz 3.2 ist in allgemeinen metrischen Räumen falsch.¹ Kompakte Mengen können i. allg. *nicht* als abgeschlossene und beschränkte Mengen charakterisiert werden. Hingegen gelingt in metrischen Räumen folgende Kennzeichnung kompakter Mengen, in deren Beweis wir die nachstehende Definition verwenden: Eine Teilmenge K von X heißt **totalbeschränkt**, wenn es zu jedem $r > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ und $x_0, \dots, x_m \in K$ gibt mit $K \subset \bigcup_{k=0}^m \mathbb{B}(x_k, r)$. Offensichtlich ist jede totalbeschränkte Menge beschränkt.

3.3 Theorem *Eine Teilmenge $K \subset X$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in K einen Häufungspunkt in K besitzt.*

Beweis (i) Zuerst nehmen wir an, daß K kompakt sei, und daß es in K eine Folge gebe ohne Häufungspunkt in K . Zu jedem $x \in K$ finden wir dann eine offene Umgebung U_x von x mit der Eigenschaft, daß U_x höchstens endlich viele Folgenglieder enthält. Weil $\{U_x; x \in K\}$ natürlich eine offene Überdeckung von K ist, gibt es $x_0, \dots, x_m \in K$, so daß K von $\{U_{x_k}; k = 0, \dots, m\}$ überdeckt wird. Somit kann K nur endlich viele Folgenglieder enthalten, und folglich keinen Häufungspunkt besitzen. Dieser Widerspruch zeigt, daß jede Folge in K einen Häufungspunkt in K hat.

(ii) Den Beweis der umgekehrten Implikation führen wir in zwei Teilschritten.

(a) Es sei K eine Teilmenge von X mit der Eigenschaft, daß jede Folge in K einen Häufungspunkt in K besitzt. Wir behaupten: K ist totalbeschränkt.

Wir führen wieder einen Widerspruchsbeweis. Nehmen wir also an, daß K nicht totalbeschränkt sei. Dann gibt es ein $r > 0$ und ein $x_0 \in K$, so daß K nicht in $\mathbb{B}(x_0, r)$ enthalten ist. Insbesondere finden wir ein $x_1 \in K \setminus \mathbb{B}(x_0, r)$. Aus demselben Grund gibt es auch ein $x_2 \in K \setminus [\mathbb{B}(x_0, r) \cup \mathbb{B}(x_1, r)]$. Nach diesem Verfahren fortschreitend finden wir induktiv eine Folge (x_k) in K mit der Eigenschaft, daß x_{n+1} nicht zu $\bigcup_{k=0}^n \mathbb{B}(x_k, r)$ gehört. Denn andernfalls gäbe es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

¹Vgl. Aufgabe 15.

K in $\bigcup_{k=0}^n \mathbb{B}(x_k, r)$ enthalten wäre, was die Totalbeschränktheit von K bedeuten würde. Gemäß unserer Voraussetzung besitzt die Folge (x_k) einen Häufungspunkt x in K . Somit gibt es $m, N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_N, x) < r/2$ und $d(x_{N+m}, x) < r/2$. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann $d(x_N, x_{N+m}) < r$, d.h., x_{N+m} gehört zu $\mathbb{B}(x_N, r)$, was nach Konstruktion der Folge (x_k) nicht möglich ist. Dies beweist, daß K totalbeschränkt ist.

(b) Es sei nun $\{O_\alpha; \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von K . Da K totalbeschränkt ist, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ endlich viele offene Bälle mit Radien $1/k$ und Mittelpunkten in K , welche K überdecken. Nehmen wir an, es gäbe keine endliche Teilüberdeckung von $\{O_\alpha; \alpha \in A\}$ für K . Dann finden wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ einen dieser endlich vielen offenen Bälle mit Radius $1/k$, er heiße B_k , so daß $K \cap B_k$ nicht durch endlich viele der O_α überdeckt wird. Bezeichnen wir mit x_k den Mittelpunkt von B_k für $k \in \mathbb{N}$, so ist (x_k) eine Folge in K , die gemäß Voraussetzung einen Häufungspunkt \bar{x} in K besitzt. Es sei nun $\bar{\alpha} \in A$ ein Index mit $\bar{x} \in O_{\bar{\alpha}}$. Da $O_{\bar{\alpha}}$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathbb{B}(\bar{x}, \varepsilon) \subset O_{\bar{\alpha}}$. Andererseits finden wir ein $M > 2/\varepsilon$ mit $d(x_M, \bar{x}) < \varepsilon/2$, da \bar{x} ein Häufungspunkt von der Folge (x_k) ist. Folglich gilt für jedes $x \in B_M$ die Abschätzung

$$d(x, \bar{x}) \leq d(x, x_M) + d(x_M, \bar{x}) < \frac{1}{M} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d.h., es gelten die Inklusionen $B_M \subset \mathbb{B}(\bar{x}, \varepsilon) \subset O_{\bar{\alpha}}$. Dies ist aber nach Konstruktion von B_M nicht möglich. Also besitzt $\{O_\alpha; \alpha \in A\}$ eine endliche Teilüberdeckung. ■

Folgenkompaktheit

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge in A eine in A konvergente Teilfolge besitzt. Die Charakterisierung von Häufungspunkten einer Folge durch konvergente Teilfolgen aus Satz II.1.17 und das eben bewiesene Theorem ergeben unmittelbar:

3.4 Theorem *Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist.*

Als weitere wichtige Anwendung von Theorem 3.3 können wir kompakte Teilmengen der Räume \mathbb{K}^n kennzeichnen.

3.5 Theorem (Heine-Borel) *Eine Teilmenge von \mathbb{K}^n ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Insbesondere ist ein Intervall in \mathbb{R} genau dann kompakt, wenn es abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis Gemäß Satz 3.2 ist jede kompakte Menge abgeschlossen und beschränkt. Die umgekehrte Aussage ergibt sich aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß (vgl. Theorem II.5.8), Satz 2.11 und Theorem 3.4. ■

Stetige Abbildungen auf kompakten Räumen

Das folgende Theorem zeigt, daß die Kompaktheit unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt.

3.6 Theorem *Es seien X, Y metrische Räume, und $f : X \rightarrow Y$ sei stetig. Ist X kompakt, so ist auch $f(X)$ kompakt, d.h., stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt.*

Beweis Es sei $\{O_\alpha; \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$ in Y . Aufgrund von Theorem 2.20 ist dann $f^{-1}(O_\alpha)$ für jedes $\alpha \in A$ eine offene Teilmenge von X . Somit ist $\{f^{-1}(O_\alpha); \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung des kompakten Raumes X . Deshalb finden wir endlich viele Indizes $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in A$ mit $X = \bigcup_{k=0}^m f^{-1}(O_{\alpha_k})$. Folglich gilt $f(X) \subset \bigcup_{k=0}^m O_{\alpha_k}$, d.h., $\{O_{\alpha_0}, \dots, O_{\alpha_m}\}$ ist eine endliche Teilüberdeckung von $\{O_\alpha; \alpha \in A\}$ für $f(X)$. Also ist $f(X)$ kompakt. ■

3.7 Korollar *Es seien X, Y metrische Räume, und $f : X \rightarrow Y$ sei stetig. Ist X kompakt, so ist $f(X)$ beschränkt.*

Beweis Dies folgt sofort aus Theorem 3.6 und Satz 3.2. ■

Der Satz vom Minimum und Maximum

Für reellwertige Funktionen ergibt sich aus Theorem 3.6 der überaus wichtige Satz, daß jede reellwertige stetige Funktion auf kompakten Mengen ihr Minimum und ihr Maximum annimmt.

3.8 Korollar (Satz vom Minimum und Maximum) *Es sei X ein kompakter metrischer Raum, und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann nimmt die Funktion f in X ihr Minimum und ihr Maximum an, d.h., es gibt $x_0, x_1 \in X$ mit*

$$f(x_0) = \min_{x \in X} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_1) = \max_{x \in X} f(x).$$

Beweis Aus Theorem 3.6 und Satz 3.2 wissen wir, daß $f(X)$ abgeschlossen und beschränkt ist in \mathbb{R} . Deshalb existieren $m := \inf(f(X))$ und $M := \sup(f(X))$ in \mathbb{R} . Wegen Satz I.10.5 gibt es Folgen (y_n) und (z_n) in $f(X)$, die in \mathbb{R} gegen m bzw. M konvergieren. Da $f(X)$ abgeschlossen ist, folgt aus Satz 2.11, daß m und M zu $f(X)$ gehören. Somit gibt es $x_0, x_1 \in X$ mit $f(x_0) = m$ und $f(x_1) = M$. ■

Die Bedeutung des Satzes vom Minimum und Maximum wollen wir durch die nachstehenden wichtigen Anwendungen beleuchten.

3.9 Beispiele (a) Auf \mathbb{K}^n sind alle Normen äquivalent.

Beweis (i) Es bezeichnen $|\cdot|$ die euklidische und $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf \mathbb{K}^n . Dann genügt es, die Äquivalenz dieser zwei Normen, d.h. die Existenz einer positiven Konstanten C mit

$$C^{-1}|x| \leq \|x\| \leq C|x|, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad (3.1)$$

nachzuweisen.

(ii) Wir setzen $S := \{x \in \mathbb{K}^n ; |x| = 1\}$. Aus Beispiel 1.3(j) wissen wir, daß die Funktion $|\cdot| : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Somit folgt aus Beispiel 2.22(a), daß S in \mathbb{K}^n abgeschlossen ist. Natürlich ist S auch beschränkt in \mathbb{K}^n . Wir können also den Satz von Heine-Borel anwenden und erkennen S als kompakte Teilmenge von \mathbb{K}^n .

(iii) Nun zeigen wir, daß $f : S \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ stetig ist.² Dazu sei $e_k, 1 \leq k \leq n$, die Standardbasis in \mathbb{K}^n . Für jedes $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt dann $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ (vgl. Beispiel I.12.4(a) und Bemerkung I.12.5). Somit folgt aus der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|$ die Abschätzung

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|e_k\| \leq C_0 |x|, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad (3.2)$$

wobei wir $C_0 := \sum_{k=1}^n \|e_k\|$ gesetzt und die Ungleichungen $|x_k| \leq |x|$ verwendet haben. Dies beweist bereits das zweite Ungleichheitszeichen von (3.1). Ferner folgt aus (3.2) und der umgekehrten Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|$ die Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq C_0 |x - y|, \quad x, y \in S,$$

was die Lipschitz-Stetigkeit von f zeigt.

(iv) Für jedes $x \in S$ gilt $f(x) > 0$. Deshalb folgt aus dem Satz vom Minimum, daß $m := \min f(S)$ positiv ist, d.h., wir erhalten die Abschätzung

$$0 < m = \min f(S) \leq f(x) = \|x\|, \quad x \in S. \quad (3.3)$$

Schließlich sei $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Dann gehört $x/|x|$ zu S , und aus (3.3) folgt somit $m \leq \|x/|x|\|$. Also gilt

$$m|x| \leq \|x\|, \quad x \in \mathbb{K}^n. \quad (3.4)$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus (3.2) und (3.4) mit $C := \max\{C_0, 1/m\}$. ■

(b) Fundamentalsatz der Algebra³ Jedes nichtkonstante Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ besitzt eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis (i) Es sei p ein solches Polynom. Wir schreiben p in der Form

$$p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

²Der Leser mache sich klar, daß die Aussage von Beispiel 1.3(j) hier nicht anwendbar ist!

³Der Fundamentalsatz der Algebra gilt nicht über dem Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} , wie das Beispiel $p = 1 + X^2$ zeigt.