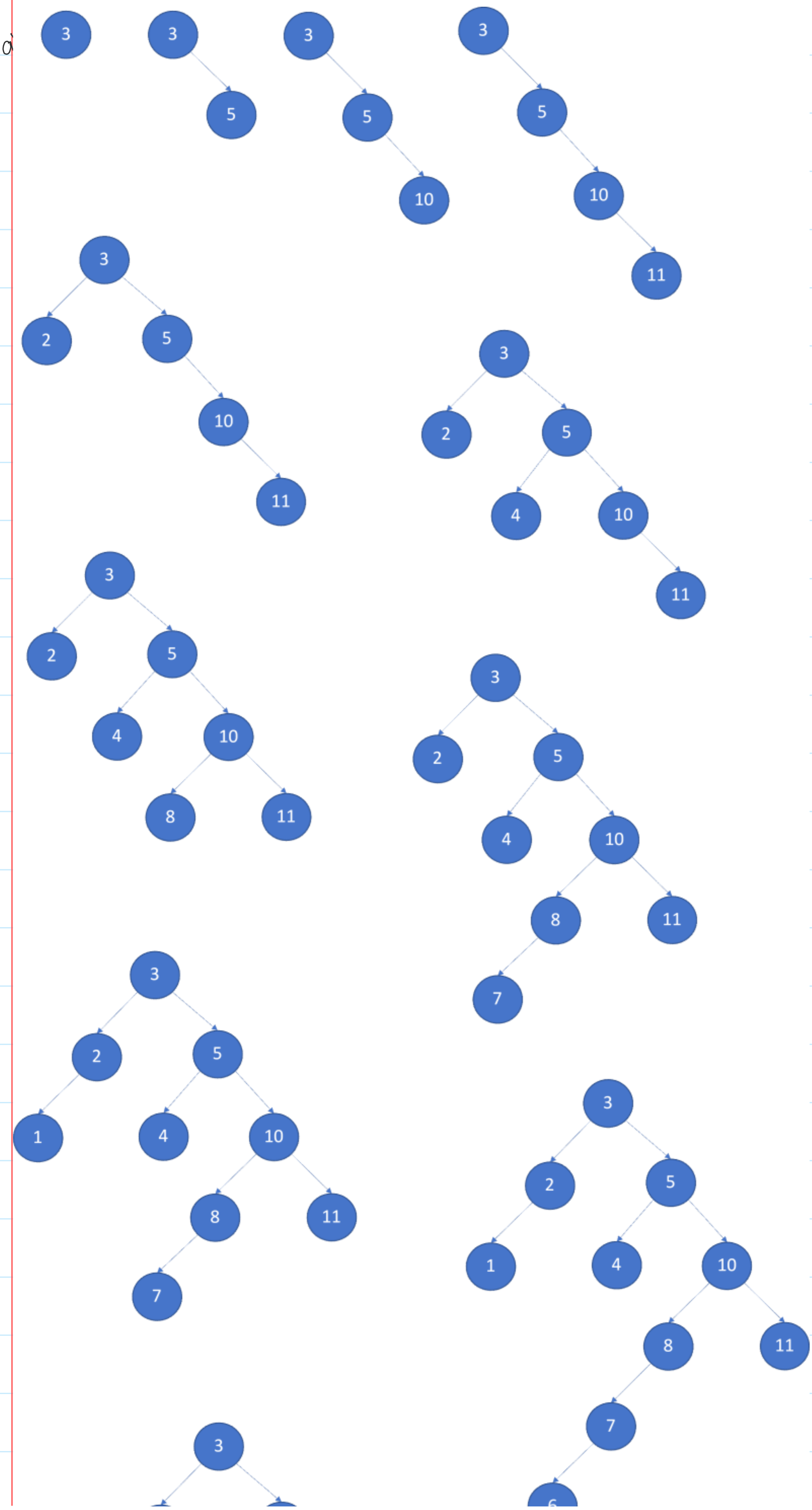
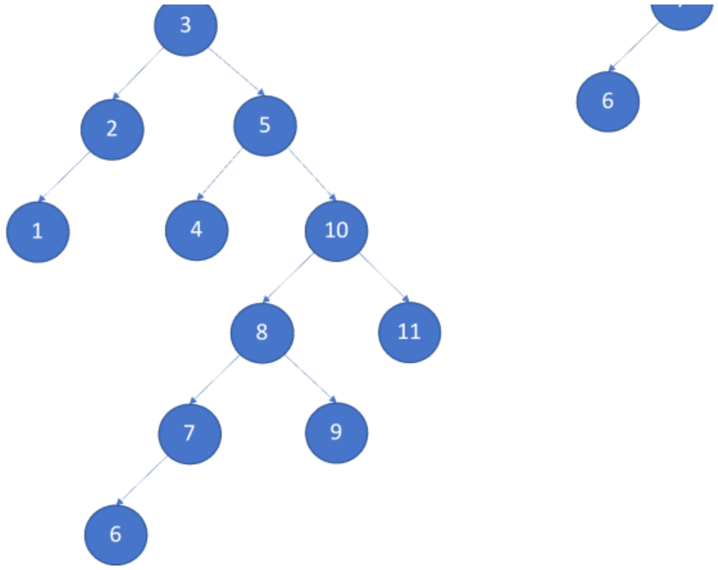
AuD Hausübung 5

Mittwoch, 29. Mai 2019

Nicolas Petermann (2918103), Philip Jonas Franz (2447302), Julian Imhof (2689225)

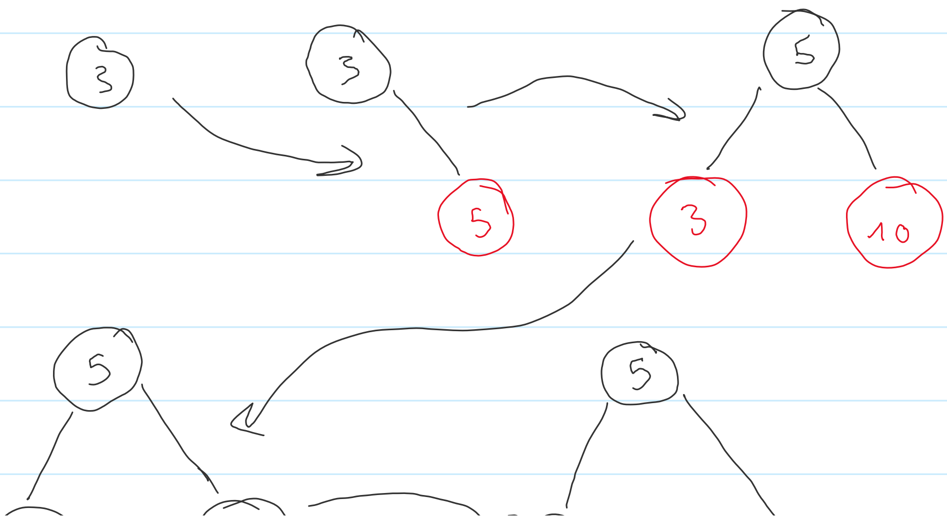
H1 a)

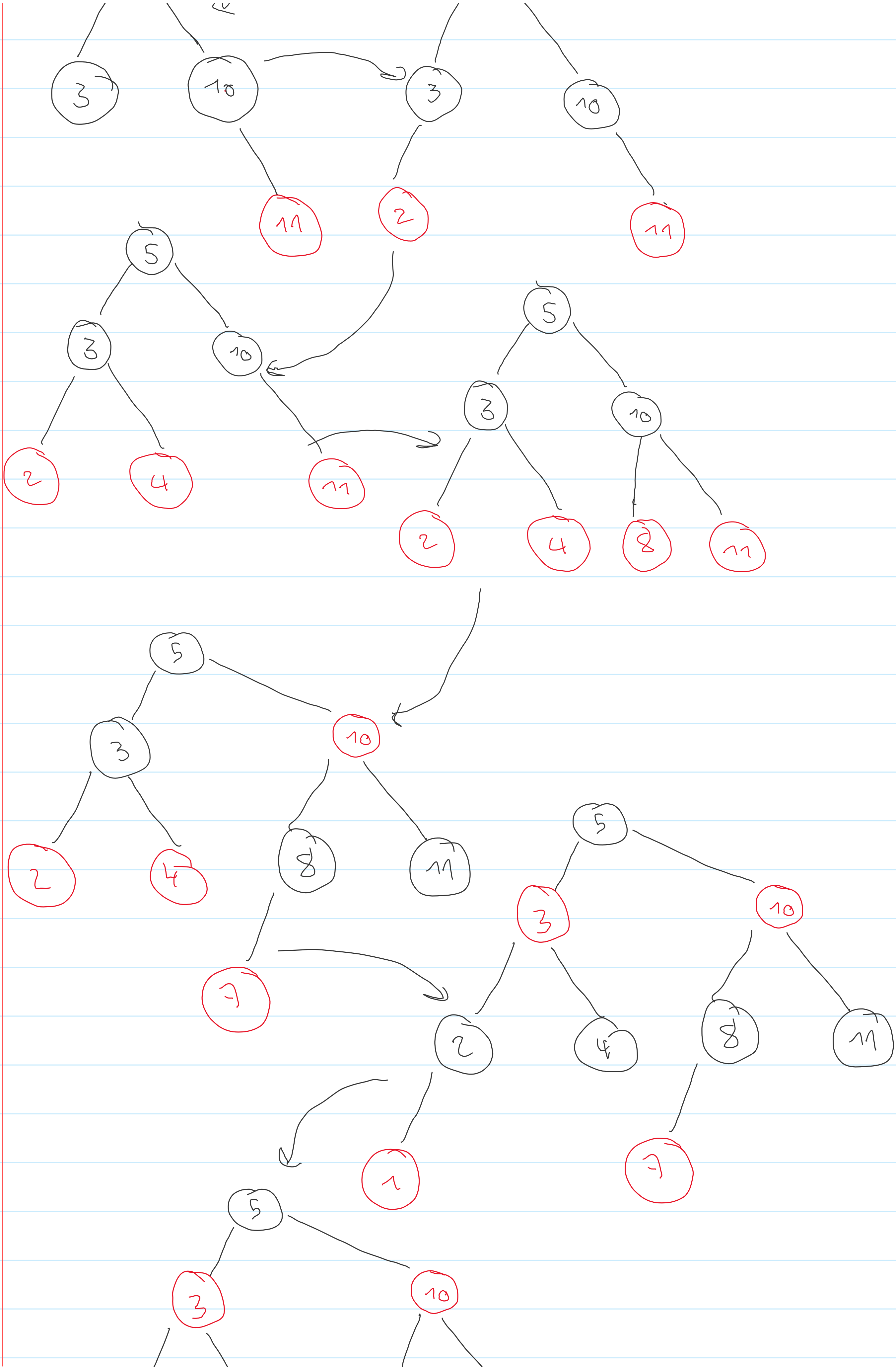


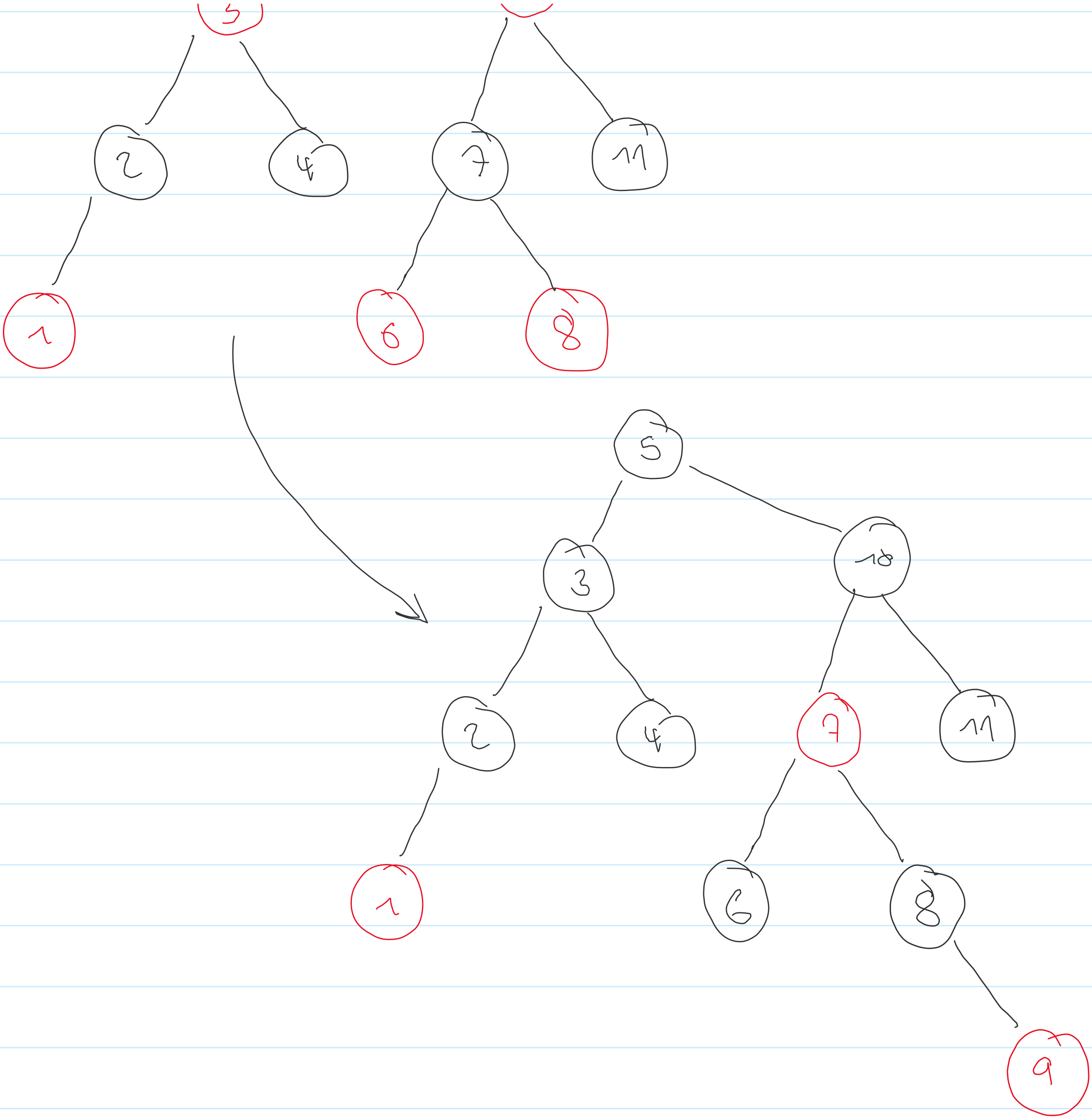


Der Resultierende Baum kann kein Rot-Schwarz-Baum sein da der Zweig 3-2-1 nur halb so lang wie der längste Pfad 3-5-10-8-7-6 ist.
In einem RSB kann höchstens jeder 2. Knoten Rot sein. Dh. 3-5-10-8-7-6 kann höchstens 2 rote Knoten enthalten, da die Wurzel schwarz sein muss. Damit kommen wir auf eine Schwarzhöhe von mind. 4. Diese Höhe kann 3-2-1 nicht erfüllen.

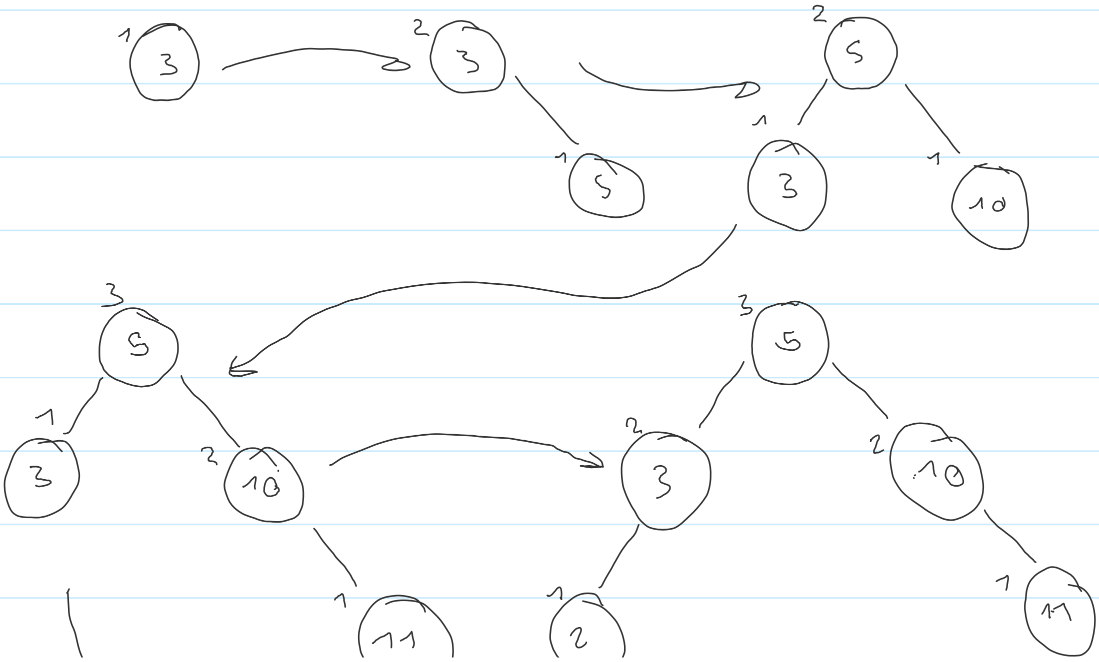
b)

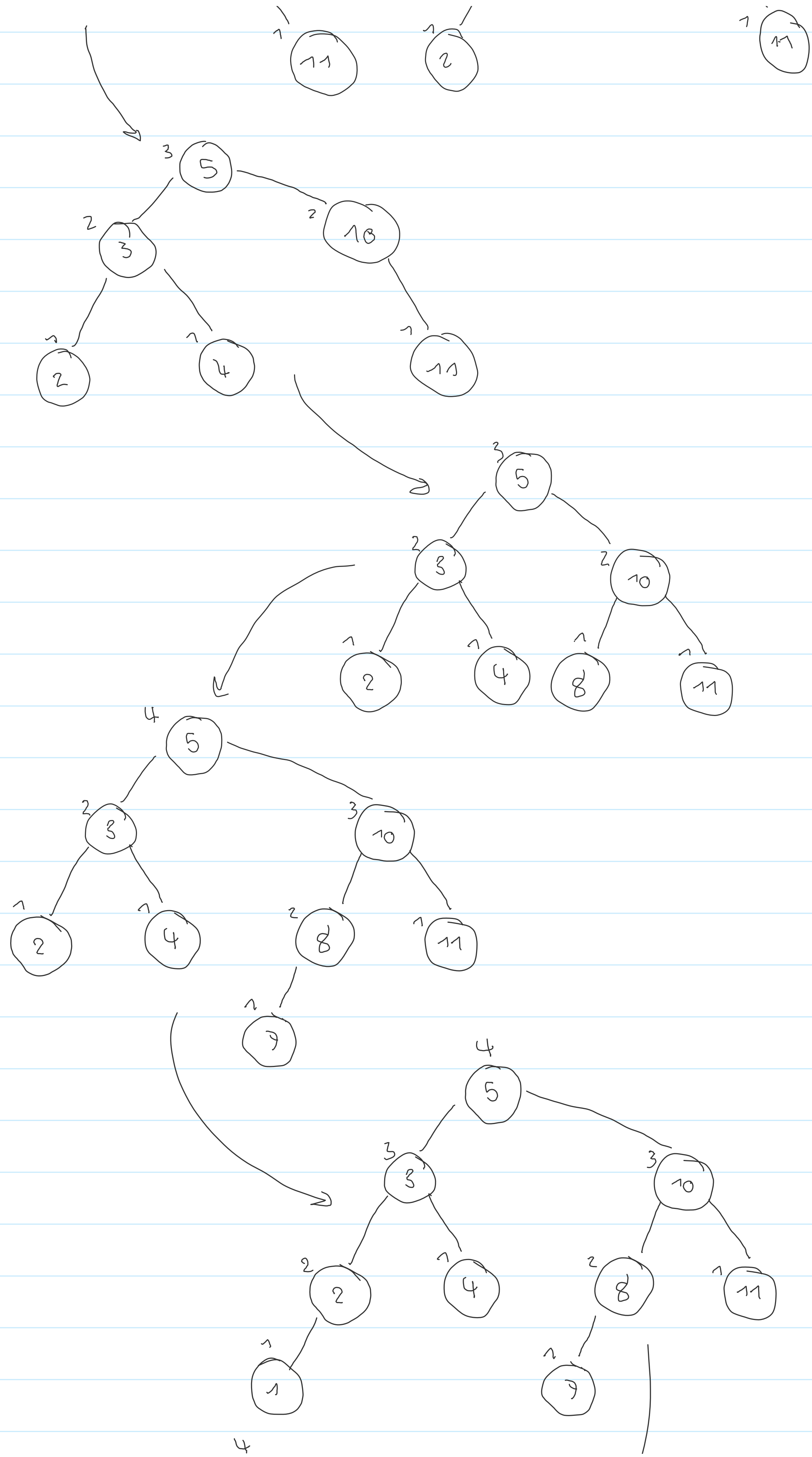


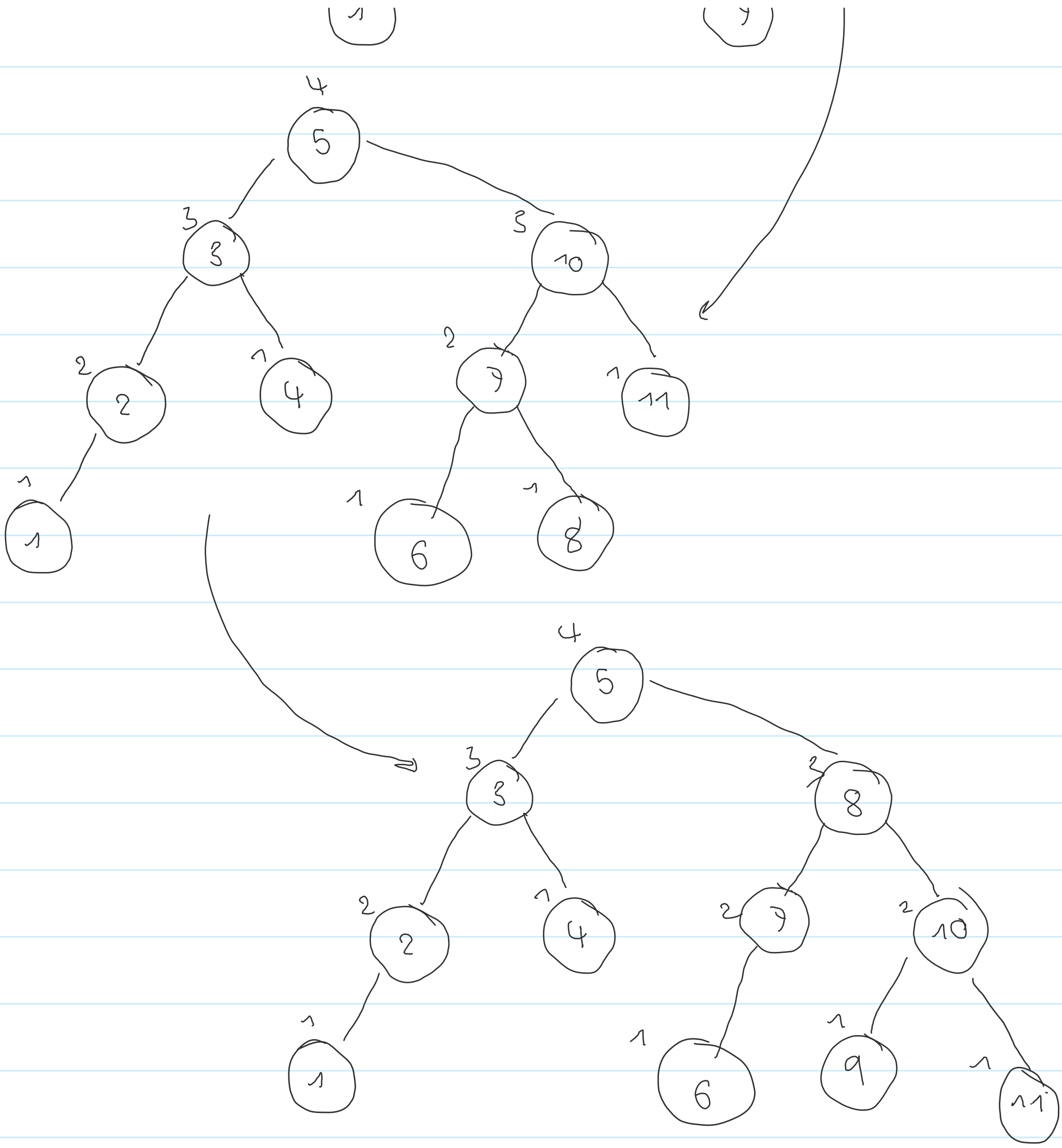




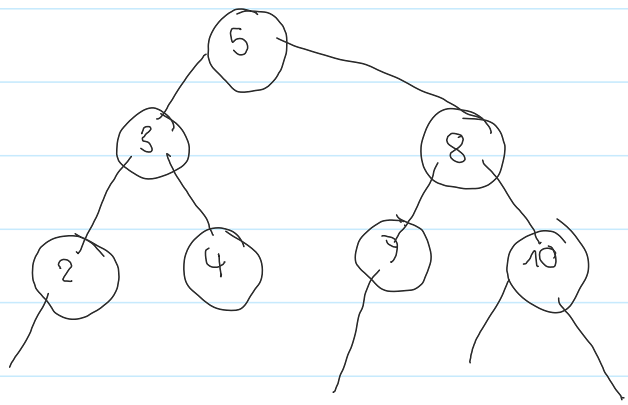
c)

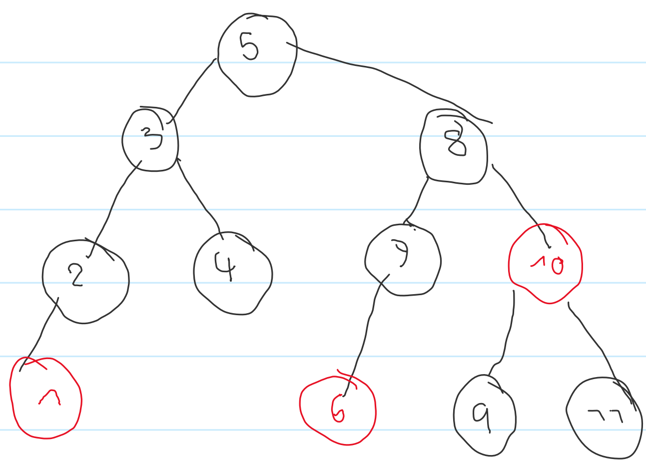


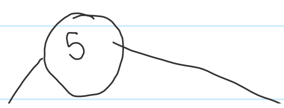


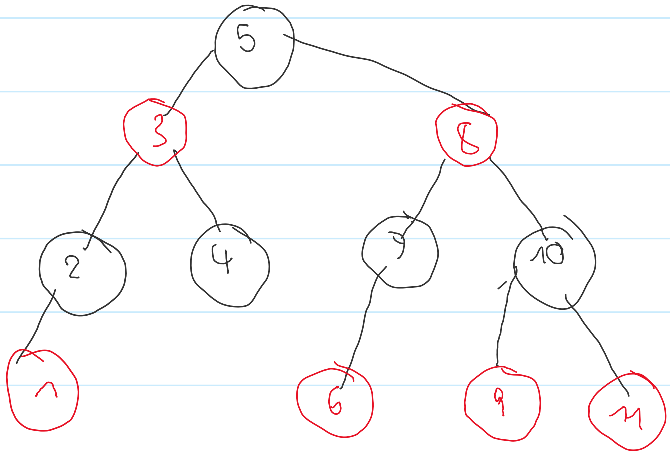


Mögliche Rot-Schwarz Färbungen:

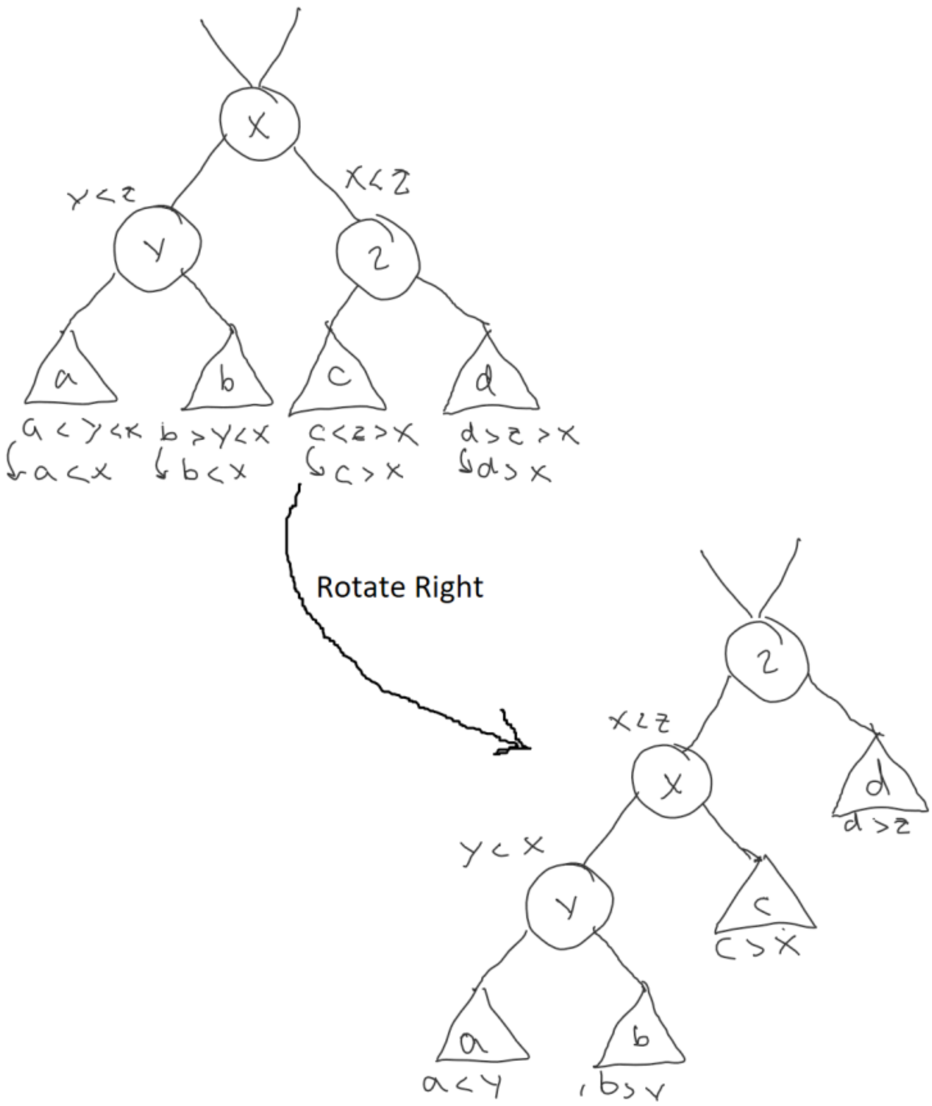








H2 a)



H2

a) Da bei einer Rechtsrotation der linke kleinere Knoten an die Wurzel rotiert wird und die einzelnen Teilbäume genauso angehängt werden als ob man die Knoten an denen die einzelnen Teilbäume hängen wieder in den Suchbaum einfügen würde (also z.B. der links-rechts Teilbaum bei einer Rechtsrotation wird auf die Position rechts-links platziert) bleibt auch die Suchbaumeigenschaft erhalten.
Da nach der Rotation alle Eigenschaften erhalten bleiben, sind rotations-operationen ohne weiteres mit BSTs kompatibel und resultieren immer wieder in einem BST.

b) Wenn die Zahl L(B) die Anzahl der Knoten im Linken Teilbaum beschreibt kann man einfach sehen, dass sich die Zahl jedes Mal um mindestens 1 verkleinert, da bei einer Rechtsrotation mindestens die Wurzel des Linken Teilbaums sich um ein Level erhöht und der Linke Teilbaum sich somit um mindestens diesen Knoten verringert, da die anderen Knoten, falls sie links waren links oder rechts angehängt werden und falls sie rechts waren rechts angehängt werden. Man kann maximal n^2 Rechtsrotation auf einen Baum anwenden, da ein Baum der ein "linker Ast" ist bekommt man nach n Rechtsrotationen einen Baum der erst einen Knoten rechts hat und dann wieder einen degenerierten linken Teilbaum für die man dann jeweils wieder $n-1$ Rechtsrotationen machen muss um einen komplett degenerierten "rechten Ast" zu bekommen.

c) Sei des Ausgangsbaum A und der Zielbaum B: Es ist für jede Binären Suchbaum möglich ihn in einen anderen suchbaum durch Rechtsrotationen, da eine Linksrotation immer die Höhe des rechten teilbaums um 1 verringert und die Rechtsrotation die Höhe des linken Teilbaums um 1 verringert und damit die Höhe für jeden Teilbaum des rotierten Baums A' genauso sein kann wie die von B. Insbesondere ist durch die Suchbaumeigenschaft gegeben, dass es für eine bestimmte höhen von allen Teilbäumen auch nur genau eine möglichkeit gibt die Knoten in einem Suchbaum anzuordnen. Also kann jeder Suchbaum A in einen andern B Rotiert werden.
$(2n-2)$ Schritte braucht man höchstens, da jeder Knoten höchstens zwei Rotationen braucht da man für jeden Teilbaum höchstens 2n schritte braucht um die Höhe anzupassen, da die Höhe der Wurzel nicht angepasst werden muss kann man zwei abziehen.

d) Nein, da z.B. ein rechter Ast nicht einmal nach rechts Rotiert werden kann also gibt es auch keine möglichkeit ihn in einen andern Suchbaum zu rotieren.

H3 a) Für jeden Binären Suchbaum mit n knoten gibt es genau für jeden Wurzelknoten gibt es genau $n-i$ knoten im linken Teilbaum da für einen bestimmten Knoten die Anzahl der Knoten in den Teilbäumen gleich sein muss. Dadurch kann es nurnoch $i-1$ Knoten für den Rechten Teilbaum geben, da ein Knoten ja die Wurzel ist. Da jeder Teilbaum unabhängig voneinander ist kann man die beiden einfach multiplizieren. Indem man dann die Summer aller Bäume nimmt, sodass jeweils jeder Knoten einmal an der Wurzel war erhält man dann die gegebene Formel.

b)

c)

$$\begin{aligned}
f^{(1)} &= \frac{-2*1+3}{2}(1-4x)^{\frac{-2*1+1}{2}}(-4)^1 \\
&= (1/2)(1-4x)^{\frac{1}{2}}(-4) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-4x}}(-4) = f'(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2} \dots (\frac{-2n+3}{2})(1-4x)^{\frac{-2n+1}{2}}(-4)^n \\
f^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{2} \dots (\frac{-2(n+1)+3}{2})(1-4x)^{\frac{-2(n+1)+1}{2}}(-4)^{n+1} \\
&= \frac{1}{2} \dots (\frac{-2n+1}{2})(1-4x)^{\frac{-2n-1}{2}}(-4)^{n+1} \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'^{(n)}(x) &= (\frac{1}{2} \dots (\frac{-2n+3}{2})(1-4x)^{\frac{-2n+1}{2}}(-4)^n)' \\
&= ((1-4x)^{\frac{-2n+1}{2}})' \qquad \frac{1}{2} \dots (\frac{-2n+3}{2})(-4)^n) \\
&= (-4)(\frac{-2n+1}{2})(1-4x)^{\frac{-2n+1}{2}-1} \qquad \frac{1}{2} \dots (\frac{-2n+3}{2})(-4)^n) \\
&= \frac{1}{2} \dots (\frac{-2n+1}{2})(1-4x)^{\frac{-2n-1}{2}}(-4)^{n+1}
\end{aligned}$$

Da $f'^{(n)} = f^{(n+1)}$ stimmt die Ableitung