

FOP Projekt Wintersemester 2019/20

Yannik Sebastian Hayn, Julian Imhof,
Erik Prescher, Lennart Schmidt

23. Januar 2020

1 Aufgabe 6.1.5 Theorie

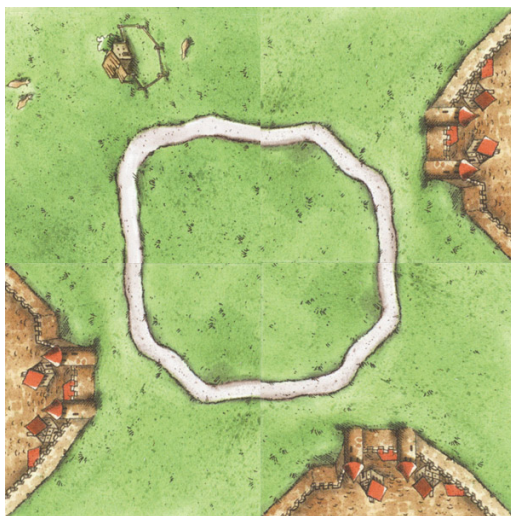
1.1 Azyklischer Graph

Da nur ein gerichteter Graph azyklisch sein kann, der hier gegebene Graph allerdings nicht gerichtet ist, kann er folglich auch nicht azyklisch sein.

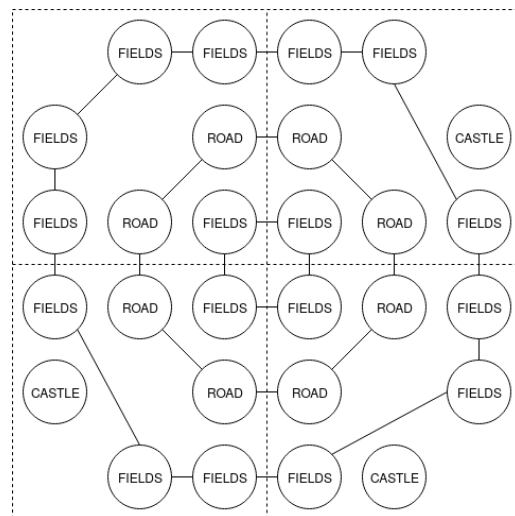
Im Folgenden gehen wir allerdings davon aus, dass auch ein nicht gerichteter Graph azyklisch sein könne. Dabei nehmen wir an, dass ein Zyklus aus mindestens drei Nodes bestehen muss und der Zyklus über $n - 1$ Kanten durchlaufen werden können muss, ohne dabei zwei mal über eine Kante zu gehen, wobei $n = \text{Anzahl der Nodes}$ ist.

Im Folgenden zeigen wir, dass der Graph zyklisch sein kann.

Betrachten wir einmal die einfachste Idee, um einen Zyklus zu erzeugen: Ein Kreisverkehr aus mehreren Straßenkarten.



(a) v.l.n.r. Plättchen: V, J, J, J



(b) zugehöriger Graph

Abbildung 1: Eine einfache Möglichkeit mit wenigen Plättchen viele Zyklen zu erzeugen

Wie man direkt sehen kann, sind nur durch diese 4 Karten bereits 3 Zyklen entstanden. ■

Wenn man diese Idee ein bisschen weiter führt, kommt man relativ schnell zu dem Schluss, dass der Graph in den allermeisten Fällen spätestens bei Spielende zyklisch sein wird.

2 Zusammenhangskomponenten

Für jedes Plättchen p gilt, dass es theoretisch maximal 9 Teilmengen von verschiedenen Zusammenhangskomponenten haben kann.

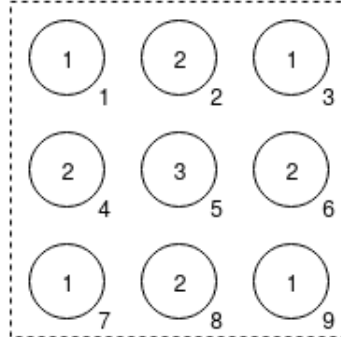


Abbildung 2: zeigt alle maximal möglichen Zusammenhangskomponenten eines einzelnen Plättchens

Für k nicht verbundene Plättchen gilt also:

$$n \leq 9 * k$$

Nur die Knoten eines neu angelegten Plättchens können eine neue Zusammenhangskomponente bilden, wenn sie nicht Teil einer Kante mit einem bereits gelegten Plättchen sind. Da ein neues Plättchen aber nur an mindestens einem alten Plättchen angelegt werden kann, gilt, dass mindestens drei Knoten an einer gemeinsamen Kante liegen, und somit maximal 6 neue Zusammenhangskomponenten existieren können.

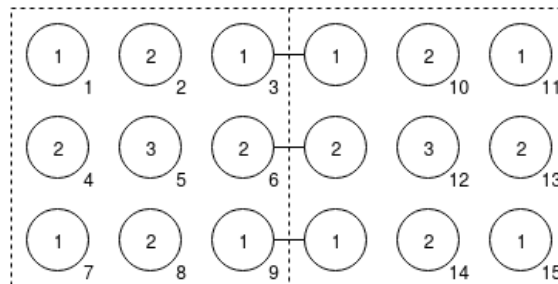


Abbildung 3: zeigt, dass nur maximal 6 neue Zusammenhangskomponenten geben kann

Somit gilt, wenn man ein neues Plättchen an nur einem alten anlegt:

$$n \leq 9 + 6 * (k - 1)$$

Legt man ein neues Plättchen hingegen an 2 oder mehr Plättchen an, so ergeben sich immer weniger als 6 potentielle neue Zusammenhangskomponenten, wie man Abbildung 4 entnehmen kann.

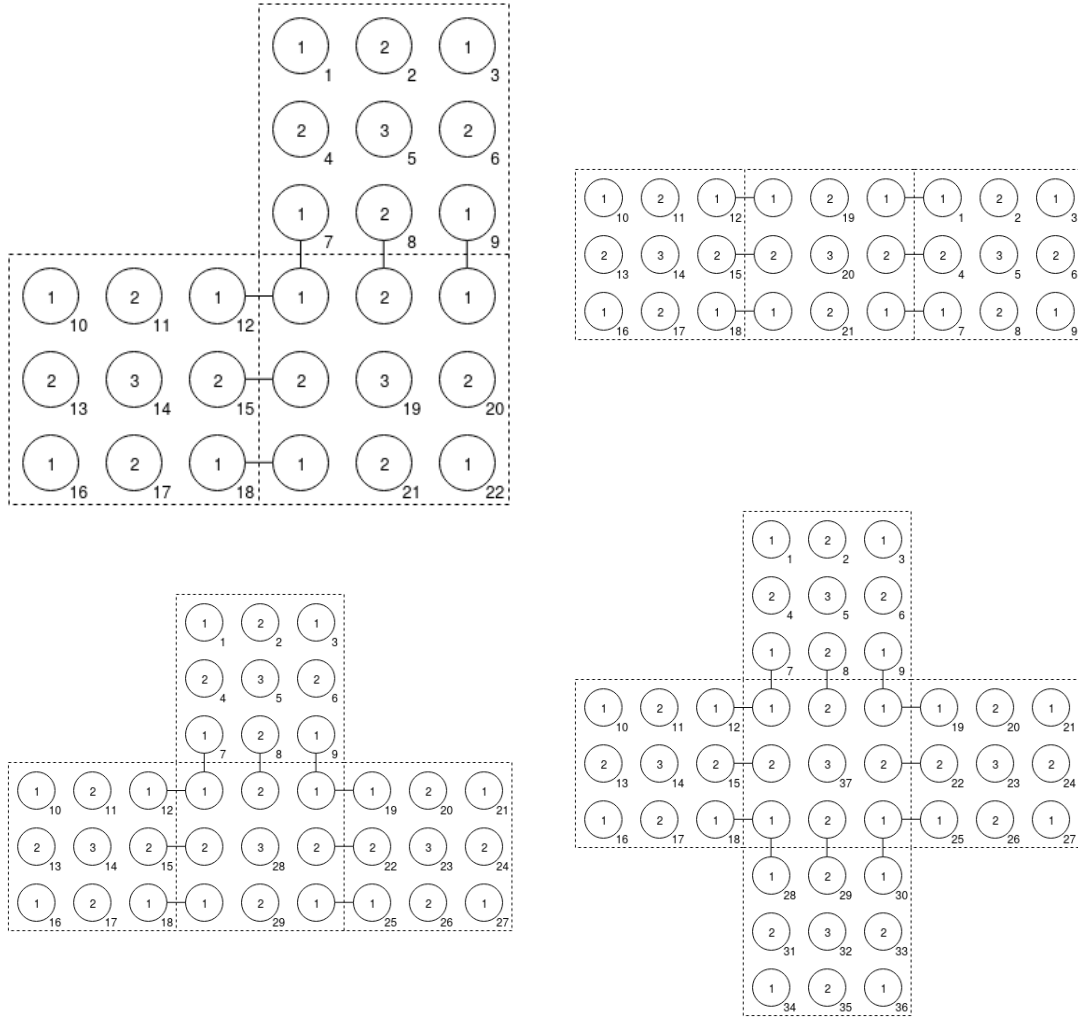


Abbildung 4: Alle Möglichkeiten ein neues Plättchen an mehr als 2 bereits gelegte Plättchen anzulegen

Somit gilt die oben ermittelte Ungleichung also für alle an das Startplättchen angelegte Plättchen.

$$\begin{aligned}
 n &\leq 9 + 6 * (k - 1) \\
 \Leftrightarrow n &\leq 9 + 9 * (k - 1) \\
 \Leftrightarrow n &\leq 9 * (k - 1 + 1) \\
 \Leftrightarrow n &\leq 9k
 \end{aligned}$$

Somit zeigt sich, dass die gegenene Ungleichung nicht die Präziseste, allerdings korrekt ist. ■