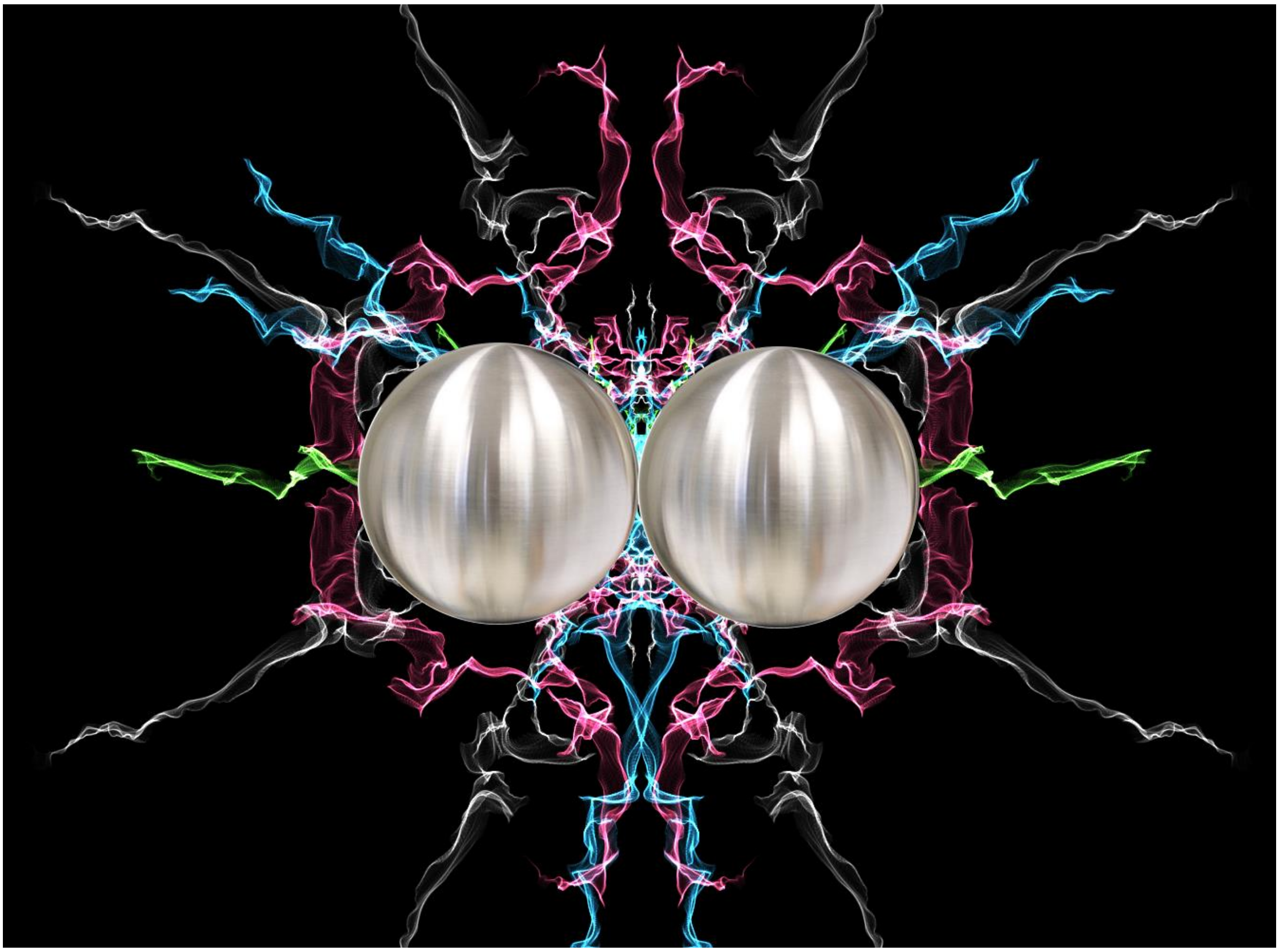
Jugend Forscht
Projekt „Ball Sound – Wie entwickelt sich der Ton, der beim Zusammenstoß zweier Metallbälle entsteht?“

Erforscht von Leonard Hackel,
Paul Hagemann und Niklas Schelten



Inhalt

Fragestellung

Original: „When two hard steel balls, or similar, are brought gently into contact with each other, an unusual 'chirping' sound may be produced. Investigate and explain the nature of the sound."

Übersetzung: „Wenn zwei Kugeln aus Stahl oder einem ähnlichen Material aneinander geführt werden, gibt es ein zwitscherndes Geräusch. Erkläre und erforsche dieses Geräusch."

Die Fragestellung ist das vierte Problem des internationalen Physik Wettbewerbs IYPT vergangen Jahres, International Young Physicists Tournament, weshalb sie in Englisch gestellt ist.

Ziele

Ziel unserer Forschung ist es natürlich diese Fragestellung zu beantworten sowie einen Versuchsaufbau zu entwickeln, der es uns ermöglicht unsere Ergebnisse möglichst gut zu reproduzieren. Wir konzentrieren uns bis jetzt nur auf das Phänomen bei Metallkugeln mit genau einer Größe, wir wollen das Experiment aber in Zukunft noch auf andere Kugeln (in Bezug auf Größe und auch Material) ausweiten (Ausblick).

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden wir den oben schon angesprochenen Ton untersuchen, indem wir einen möglichst effizienten Versuchsaufbau vorstellen und an Hand der Versuchsergebnisse den Ton in seiner Amplitude und seiner Schwingungsfrequenz mathematisch beschreiben. Danach versuchen wir den Ton mit Hilfe verschiedener physikalischer Modelle zu erklären, die wir dann auf eine allgemeinere Ebene bringen und den Zusammenhang zwischen der Art des Feldes und der Frequenz untersuchen.

Grundsätzliche Beschreibung des Tons

Den gesamten Ton nennen wir „Chirp". Die einzelnen Töne nennen wir im Folgenden „Peaks". Wir gehen davon aus, dass die einzelnen Peaks genau dann entstehen, wenn die Kugeln aufeinandertreffen. Das geschieht dadurch, dass sie zunächst durch die Hände oder eine andere zurücktreibende Kraft zusammengedrückt werden und dann eine Impulsübertragung (mit Energieverlust) stattfindet. Daraufhin werden die Kugeln wieder ausgelenkt und wieder zusammengedrückt, sodass wieder ein Peak entsteht. Somit haben wir eine große Anzahl von Peaks, die den Ton ausmachen. Durch den Energieverlust wird die Amplitude kleiner, d.h. der Ton an sich leiser und die Zeitabstände verringern sich.

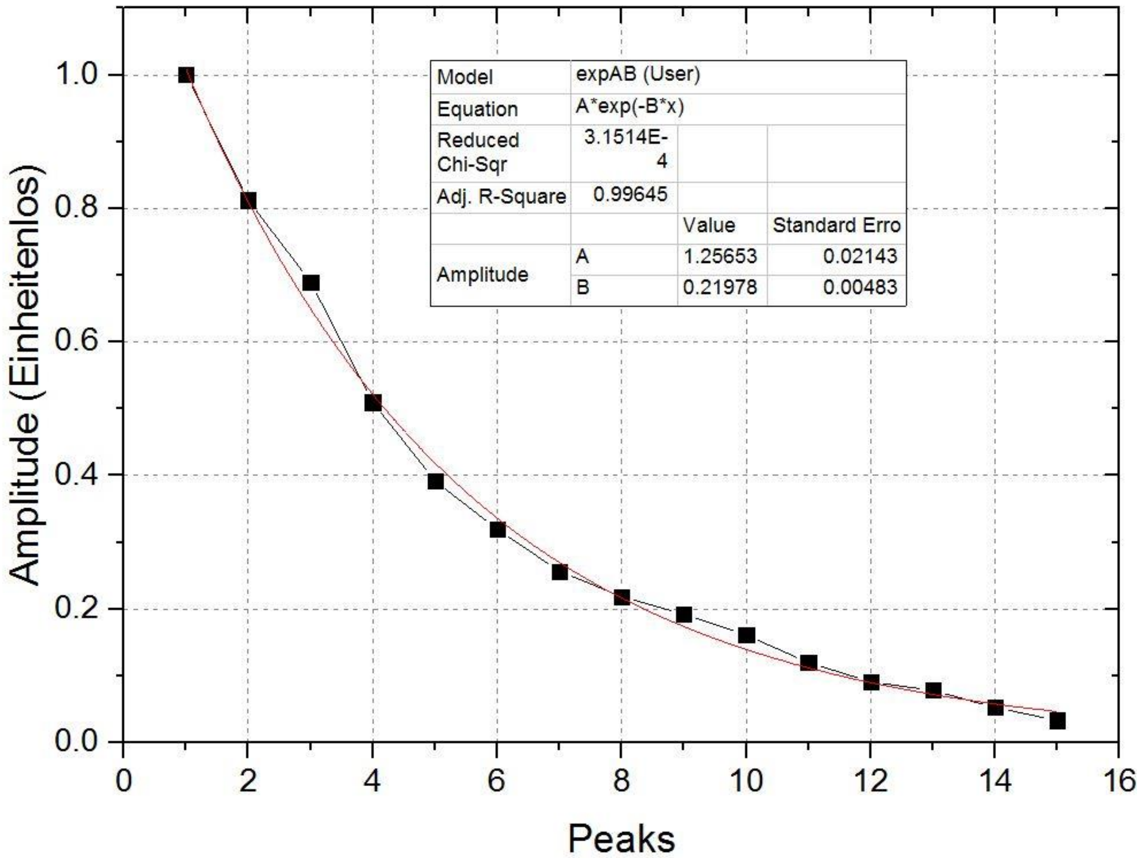
Versuchsaufbau

2.1 Versuchsaufbau

Unser Versuchsaufbau basiert auf zwei Federn, die unsere Hand simulieren und die beiden Kugeln gegeneinander drücken. Damit die Kugeln nicht zur Seite herausspringen werden die Kugeln an zwei Leitschienen geführt. An beiden Seiten sind Kreuzmuffen, die zum einen die Federn festhalten und zum anderen die Schienen stabil halten. Um den entstehenden Ton besser reproduzieren zu können, haben wir uns mit Strichen auf den Schienen markiert wie weit wir die Kugeln auslenken. Unser Mikrofon ist ein normales Standmikrofon, welches wir mit einem Trichter aus Papier versehen haben. Dadurch ist es uns möglich, Umgebungsgeräusche herauszufiltern und die Amplitude des eigentlichen Tons zu erhöhen.

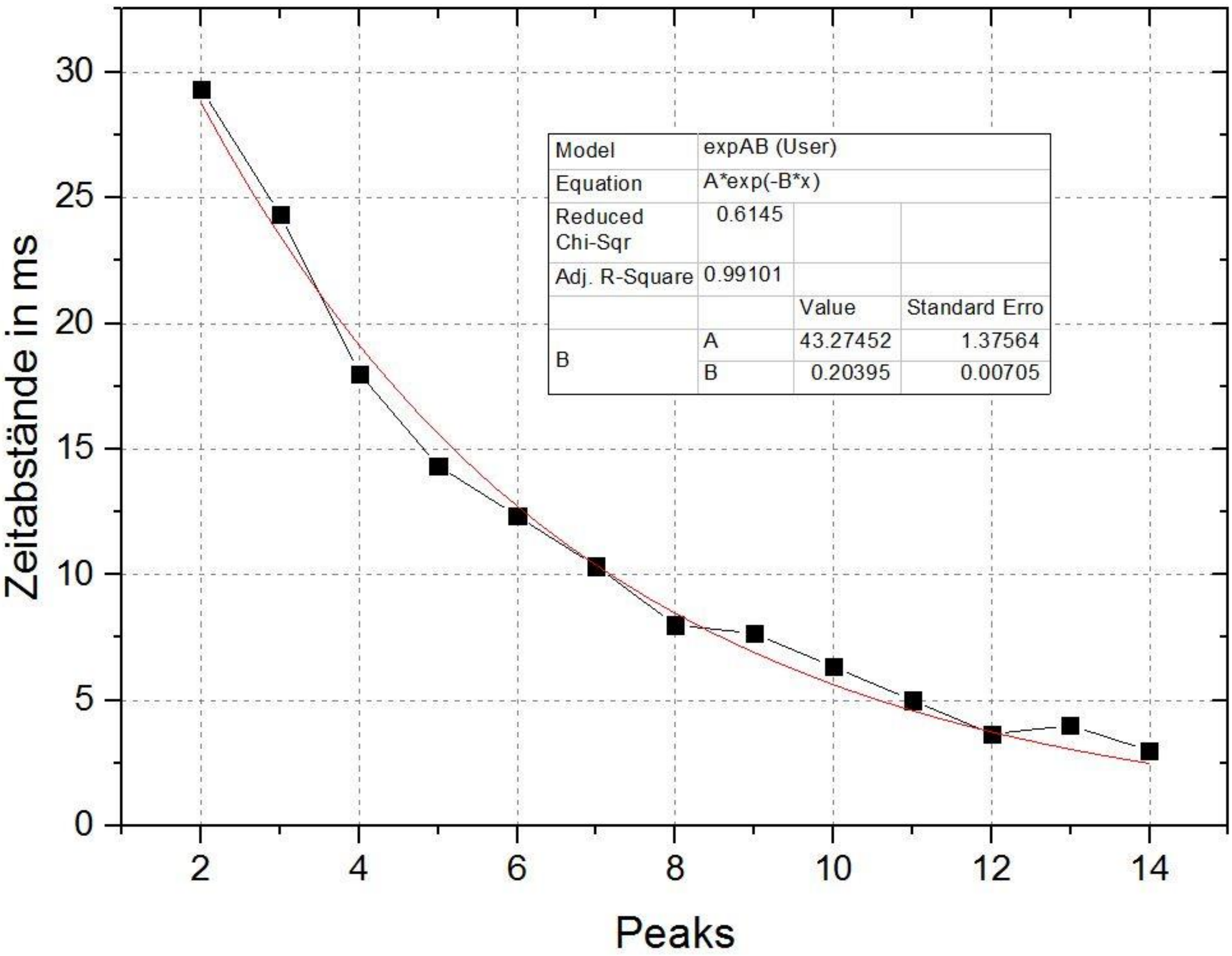
Versuchsauswertung

Wie beim Versuchsaufbau schon beschrieben haben wir das Mikrofon auf die Kugeln gerichtet und dann die Kugeln bis zu den genannten Strichen ausgelenkt. Den entstehenden Ton haben wir mit dem Programm Audacity aufgenommen und dann analysiert. Um eventuelle Messfehler zu verringern, haben wir mehrere Messungen durchgeführt und den Durchschnitt dieser genommen.
Dadurch erhalten wir die folgenden beiden Graphen, die wir weiter unten genauer erläutern. Die Messergebnisse legen nahe, dass sich insbesondere zwei Größen während eines Chirps verändern: die Amplitude und der zeitliche Abstand zwischen zwei Peaks.
Bei den folgenden Graphen sind die Linien zwischen den Punkten nur zur Veranschaulichung eingetragen, gemessen wurden nur (ganzzahlige) Anzahlen von Peaks.



3.1 Amplituden abhängig von den Peaks

Hier sieht man zunächst die Amplitude in Abhängigkeit zu der Anzahl der Peaks.
Die Amplitude ist bei elektronischer Auswertung einheitenlos.
Der Fit ergibt die Funktionsgleichung $y = 1,26 \cdot e^{-0,22x} = 1,26 \cdot 0,8^x$. Dabei gehen wir von einer exponentiellen Funktion aus, da wir die Funktion als gedämpfte Schwingung auffassen und da diese ein sehr gutes Bestimmtheitsmaß von 0,996 hat. Somit verringert sich die Amplitude bei jedem Peak um den Faktor *0,8* und 1,26 ist die berechnete Startamplitude.



4.1 Zeitabstände abhängig von den Peaks

Dies ist der Graph mit den Zeitabständen als Funktionswert. Auch von dieser nehmen wir an, dass sie exponentiell verläuft, da es sich wie oben erwähnt um eine gedämpfte Schwingung handelt. Der Zeitabstand zwischen den Peaks verringert sich bei jedem Peak um ungefähr *0,82ms*, wobei der Startwert ungefähr *43,27ms* beträgt. An Hand der Abnahmefaktoren lässt sich schlussfolgern, dass die Abnahmefaktoren bei den Zeitabständen und bei der Amplitude ungefähr gleich sind (*0,8* und *0,82*). Der Unterschied von *0,02* lässt sich zum Großteil auf Messungenauigkeiten zurückführen.

Um die Messwerte jetzt noch physikalisch zu belegen, haben wir folgende Gleichungen aufgestellt:

$$t_n = \delta_1 + \delta_2 + \cdots$$

$$t_{max} = \frac{1}{1-b} \cdot \delta_1$$

$$\Rightarrow t_n = t_{max} \cdot (1 - b^n)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{t_n}{t_{max}} = b^n$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\log(1 - \frac{t_n}{t_{max}})}{logb}$$

$$y_n = a \cdot y_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow y_n = a^n \cdot y_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_n}{y_0} = a^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log \frac{y_n}{y_0}}{\log a}$$

Zunächst berechnen wir die Gesamtzeit aus den einzelnen Zeitabständen, hier mit Delta benannt. Da wir mit jedem Peak die Zeit mit dem Faktor *b* multiplizieren ($1 > b > 0$), erhalten wir eine geometrische Reihe, sodass wir die Gesamtzeit in Abhängigkeit von dem Abnahmefaktor b, der jeweiligen Anzahl der Peaks n und dem Startwert des Zeitabstandes δ_1 darstellen können. Durch diese Gesamtzeit $t_{\max}$ und dem Faktor b können wir also die Zeit zu einem beliebigen Schritt *n* berechnen. Wie man schon an den Messwerten erkennt, ist ein Faktor von *0,82* für *b* realistisch. Nun formen wir per Logarithmus nach n um, da n die einzige Gemeinsamkeit in den Formeln sowohl für den Zeitabstand als auch die Amplitude ist. Die Amplitude, hier y_n, stellen wir in der ersten Zeile rekursiv dar, ausgehend von einem Abnahmefaktor a. Damit ergibt sich dann die explizite Forel $y_n = a^n \cdot y_0$ wobei y_0 der Startwert ist.

Auch hier lösen wir dann nach *n* auf, damit wir die Formeln über das *n*, die Anzahl der Peaks, gleichsetzen können.

$$Gleichsetzung:$$

$$\frac{\log \frac{y_n}{y_0}}{\log a} = \frac{\log(1 - \frac{t_n}{t_{max}})}{\log b}$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{y_n}{y_0} = \frac{\log a}{\log b} \cdot \log(1 - \frac{t_n}{t_{max}})$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{y_n}{y_0} = \log((1 - \frac{t_n}{t_{max}})^{\frac{\log a}{\log b}})$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_n}{y_0} = (1 - \frac{t_n}{t_{max}})^{\frac{\log a}{\log b}}$$

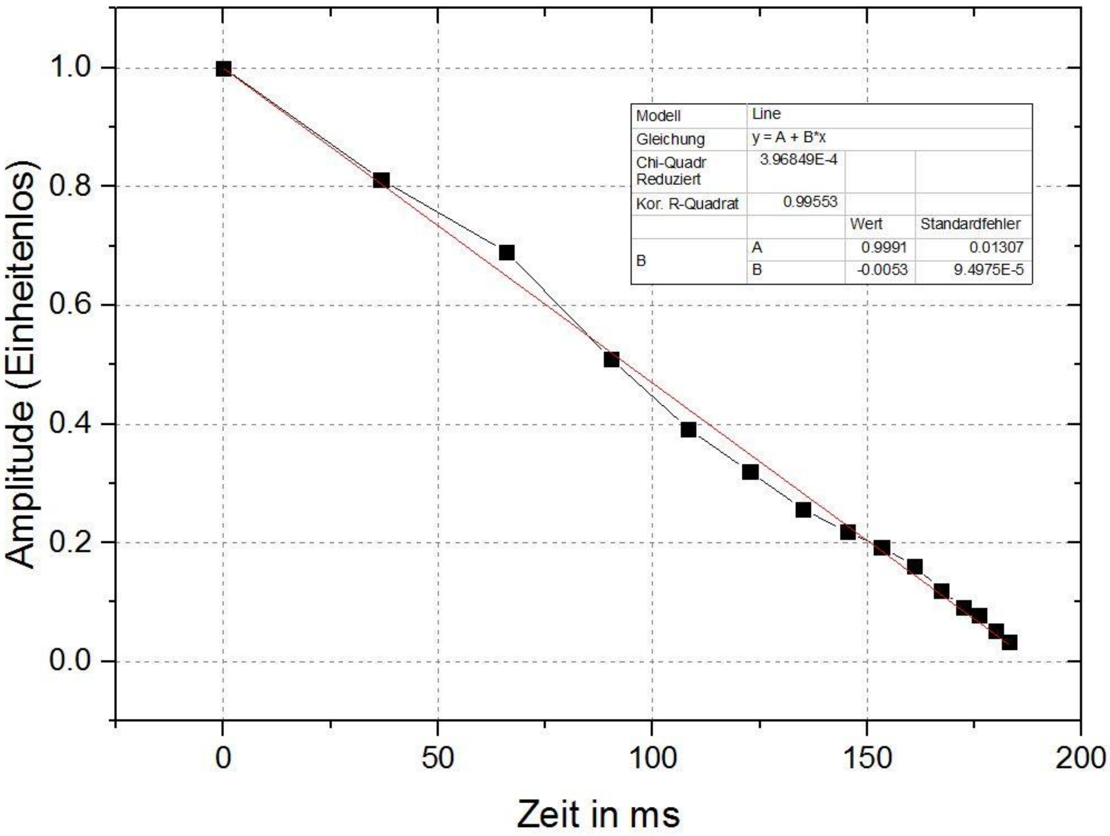
$$\Leftrightarrow y_n = y_0 \cdot \left(1 - \frac{t_n}{t_{max}}\right)^{\frac{\log a}{\log b}}$$

Die erste Zeile ist diese Gleichsetzung. In der nächsten Zeile multiplizieren wir mit $\log a$. Nach den Logarithmusgesetzen können wir diesen Faktor auch als Potenz schreiben. Dadurch kann man in der vierten Zeile dann den Logarithmus „herauskürzen“, indem wir eine beliebige Basis nehmen. Nun lösen wir nach y_n auf.

Wir erhalten die Auslenkungen in Abhängigkeit von der Gesamtamplitude, der Momentanzeit t_n, der Gesamtzeit $t_{\max}$ und den beiden Abnahmefaktoren *a* und *b*.

Hier sehen wir dann unsere Messung der Amplitude in Abhängigkeit der Zeit.

Der Graph der Amplitude über die Zeit deutet auf eine lineare Abnahme hin (siehe unten). Damit wäre $y_n = y_0 \cdot (1 - \frac{t_n}{t_{max}})^1$ die zugehörige Gleichung.



6.1 Amplitude abhängig von der Zeit

Eine alternative Darstellung der Formel wäre $y_n = y_0 \cdot (b^n)^{\frac{\log a}{\log b}}$ aufgrund folgender Umformung: $t_n = t_{max} \cdot (1 - b^n) \Leftrightarrow \frac{t_n}{t_{max}} = 1 - b^n$.

Physikalische Betrachtung

Das Basketballmodell

$$h_0(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + 0$$
$$= t(v_0 - \frac{g}{2} \cdot t)$$

$$t_{0,1} = 0$$
$$t_{0,2} = \frac{2v_0}{g}$$
$$v_1 = \alpha \cdot v_0$$
$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \cdot v_1}{g}$$
$$m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v^2 (Amplitude)$$
$$h = \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{(\alpha \cdot v_{n-1})^2}{2 \cdot g}$$
$$h_{n+1} = \alpha^2 \cdot h_n$$

Das Herunterfallen eines Basketballs lässt sich mit der Gleichung in der ersten Zeile beschreiben, die wir gleich 0 setzen, da wir den Abnahmefaktor für den Zeitabstand zwischen den einzelnen „Peaks“ herausfinden wollen. Damit erhalten wir zum einen 0, was uns aber nicht weiter interessiert, und auch $\frac{2 \cdot v_0}{g}$. Da wir jetzt davon ausgehen, dass t mit einem Faktor α abnimmt, muss folglich auch *v* mit einem Faktor α abnehmen, da 2 und *g* konstant sind.

Die Energiebetrachung liefert dann den Abnahmefaktor für die Auslenkung (hier *h*). Wir formen nach h um und erkennen, dass die Auslenkung lediglich von *v* und *g* abhängt. Da *g* konstant ist und wir herausgefunden haben, dass *v* mit α abnimmt, muss h mit α^2 abnehmen. Wie wirkt sich das im logarithmischen Term aus?
Wenn die Periode mit α abnimmt, muss die Auslenkung mit α^2 abnehmen. Wir können davon ausgehen, dass die Periode mit einem gewissen Faktor abnimmt, da uns nur das logarithmische Verhältnis interessiert. Daraus folgt: $\frac{\log \alpha^2}{\log \alpha} = 2$
Damit hätten wir beim Basketballmodell eine quadratische Abnahme der Amplitude über die Zeit.

Verallgemeinerung

Neben dem Basketballmodell gibt es noch viele andere Modelle, z.B. das Federmodell bei dem die rücktreibende Kraft die Federkraft ist. Bei diesem berühmten ellipsoiden Magneten wäre es die Magnetkraft. Daraus schließen wir, dass sich sämtliche Modelle erst einmal nur in ihrer rücktreibenden Kraft unterscheiden, genauer gesagt in der Proportionalität zu einer bestimmten Potenz des Weges: Beim Basketballmodell ist die rücktreibende Kraft immer konstant, sodass die Kraft selbst zu s^0 proportional ist. Bei der Federkraft ist sie jeweils proportional zur Auslenkung

(Hooke'sche Feder), also zu s^1, bei der Magnetkraft (in einem homogenen Magnetfeld) nimmt sie mit r^2 ab, das heißt mit s^{-2} .

Aus diesen Überlegungen gelangen wir zu der Annahme, dass sich die rücktreibende Kraft allgemein darstellen lässt als $F = c \cdot s^a$, wobei a die Potenz des Weges, s der Weg und c die jeweiligen Konstanten davor sind. Durch das allgemeine Gesetz, dass die Energie das Integral aus Kraft und Weg ist, erhalten wir für die Energie:

$$E = \frac{c}{a+1} \cdot s^{a+1}$$

Generell haben wir dann eine Schwingung zwischen dieser Energieform und der kinetischen Energie bei unseren Modellen.

Damit gilt:

$$\frac{m}{2} \cdot v^2 + \frac{c}{a+1} \cdot s^{a+1} = konst.$$

Durch Ableiten erhalten wir:

$$\frac{m \cdot 2v \cdot \dot{v}}{2} + c \cdot s^a \cdot \dot{s} = 0$$

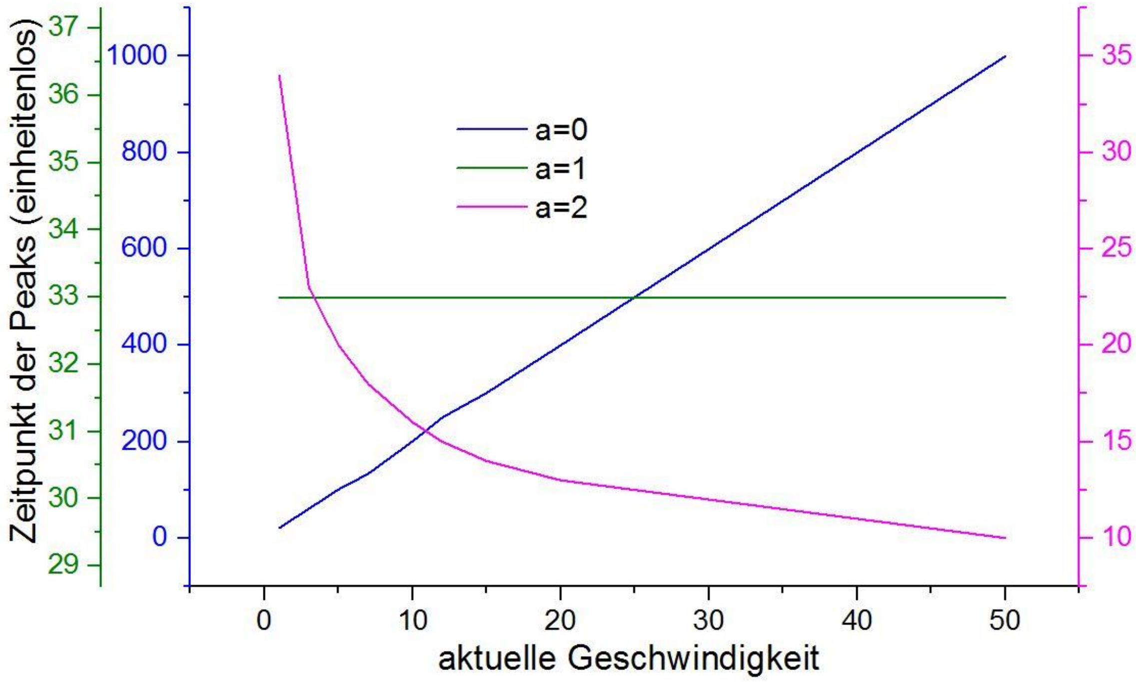
Durch v teilen ergibt:

$$m \cdot \ddot{s} + c \cdot s^a = 0$$

Diese nicht-lineare Differentialgleichung ist das Ergebnis der Energiebetrachtung. Grundsätzlich stimmt diese, wie wir im Folgenden sehen werden, mit unserem Basketballmodell überein.

Diese Differentialgleichung haben wir mit Hilfe einer numerischen Simulation ausgewertet. Die Energieabnahme simulieren wir mit Hilfe von v als variabler Größe, da die Energie kurz vor dem Aufprall beider Kugeln nur in $\frac{m}{2}v^2$ vorliegt, sodass wir mit einer geringeren Geschwindigkeit auch gleichzeitig eine geringere Energie haben.

Da wir uns den Graphen plotten lassen, können wir anhand der Nullstellen die Schwingungsperiode und damit die Frequenz ablesen. Dabei erhalten wir folgende Ergebnisse für die Funktion des Weges bei unterschiedlichen Exponenten:



9.1 Zeitpunkte der Zusammenstöße (Peaks) abhängig von der Geschwindigkeit (wegen der nummerischen Simulation einheitenlos)

Diese Graphen stimmen bei a=0, also dem Basketballmodell, überein, da wir eine umgedrehte Parabel als Funktion für die Strecke erhalten, sodass wir tatsächlich eine quadratische Abnahme erhalten.

Bei a=1, also unserem Federmodell, erhalten wir eine Sinusfunktion, sodass die Nullstellen unabhängig von der Größe der Energiezufuhr / -entnahme konstant bleiben.

Das läuft analog zu einem Federpendel ($T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$), bei dem die Periode auch in der Theorie immer konstant ist. Bei dem Pendel lässt sich die in der Wirklichkeit nicht konstante Periode durch Luftverwirbelungen und andere Störungen erklären. Bei unserem Versuch sind Störungen z.B. die Reibung an den Schienen und die Tatsache, dass unsere Feder nur bei kleinen Auslenkungen eine Hooke'sche Feder ist.

a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
v	1	3	5	7	10	12	15	20	50	1	3	5	7	10	12	15	20	50
Periode	21	61	101	133	201	250	301	400	999	33	33	33	33	33	33	33	33	33

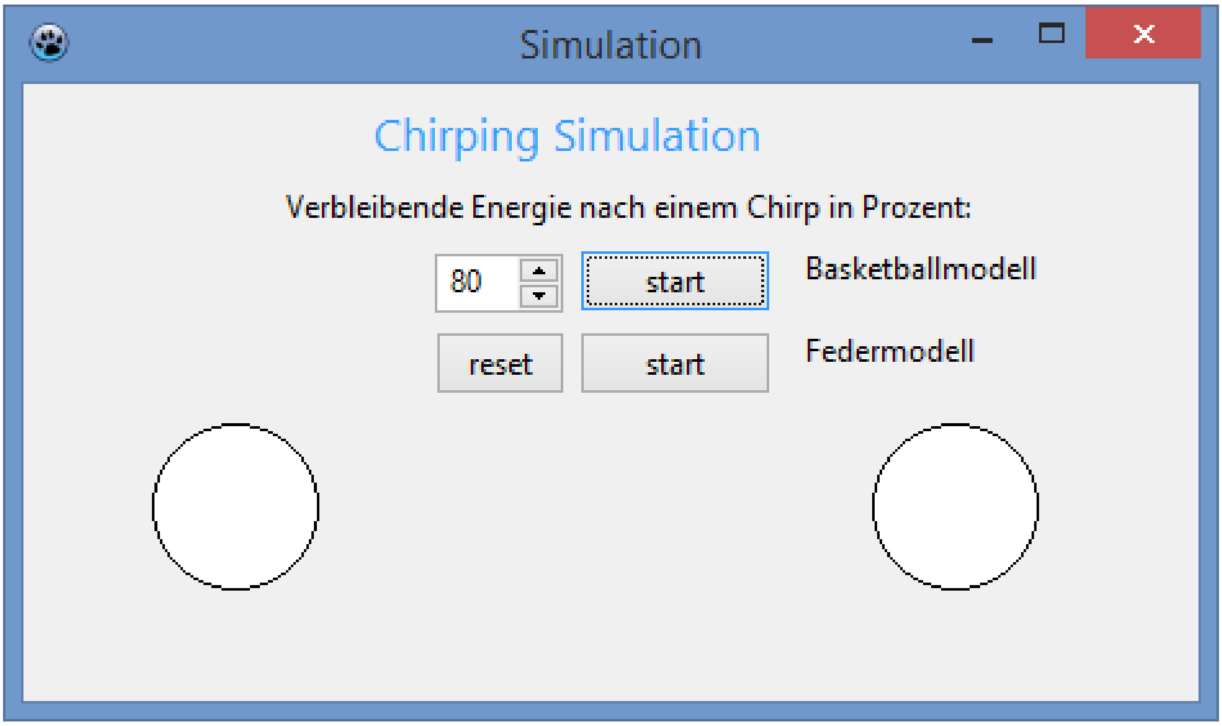
9.2 Messwerttabelle

Allgemein lässt sich aus den „Versuchswerten" folgende allgemeine Regel schließen:
T ist proportional zu v^{1-a} , damit wäre es bei a=1: v^0 , also nicht abhängig von v, bei a=0 einfach v, wie man auch in unserer Herleitung des Basketballmodells sieht.
Wenden wir diese Regel auf negative Potenzen an, so wäre bei a=-2, also einem Magnetfeld T proportional zu v^3, die Periode würde also bei abnehmender Energie wesentlich stärker abnehmen als beim Basketballmodell.

Man mag sich jetzt fragen, wieso wir keine konstante Schwingungsperiode bei unseren Versuchsdaten haben, obwohl wir eine Hooke'sche Feder benutzen. Die Schwingungsperiode müsste an sich konstant bleiben, sie nimmt hingegen exponentiell ab. Dies liegt daran, dass die Federauslenkung nach dem ersten Aufprall so gering ausgelenkt ist, dass die rücktreibende Kraft als annähernd konstant angenommen werden kann, da sich die Auslenkungen kaum unterscheiden.
Damit entspricht unser Versuchsaufbau eher dem Basketballmodell.

Die Simulation

Um sich dieses Phänomen besser vorstellen zu können, haben wir auf Basis unserer Messergebnisse und vor allem auf Basis unsere physikalischen Herleitungen eine Simulation eines Chirps programmiert. Die Simulation ist in Delphi geschrieben und implementiert unser Basketballmodell und unser Federmodell als Beispiele. Damit wir uns dabei nicht auf eine Kraft, die die Kugeln zusammendrückt, festlegen müssen, ist der prozentuale Energieerhalt nach einem Peak wählbar.



10.1 Selbst programmierte Simulation

Die Simulation basiert auf der Annahme, dass sich die Kugeln mit wachsender Geschwindigkeit aufeinander zu bewegen. Sobald sie sich berühren oder überschneiden, werden die Geschwindigkeiten mit -1 multipliziert, sodass sie sich dann an diesem konkreten Zeitpunkt mit derselben Geschwindigkeit auseinander bewegen wie kurz davor aufeinander zu bewegen. Allerdings werden sie nun mit derselben Kraft gebremst wie sie vorher beschleunigt wurden, sodass sie immer weniger Ausschlag bekommen. Diese Kraft lässt sich für verschiedene Szenarien verschieden einstellen.

Ausblick

Da wir bis jetzt nichts über die Entstehung der einzelnen Peaks wissen, wollen wir herausfinden, wie der Ton erzeugt wird. Dafür wollen wir den Versuch in anderen Medien testen, zum Beispiel in Helium oder etwas Ähnlichem. Weiterhin wollen wir wissen inwiefern sich die Beschaffenheit der Kugel, z.B. Größe oder Material, auf den Ton auswirkt.

Da wir davon ausgehen, dass die Formel $T \sim v^{1-a}$ eineindeutig ist, kann man aus der gemessenen Frequenz auf die Rückstellkraft schließen. Im weiteren Verlauf des Versuchs wollen wir diese These noch genauer untersuchen und bestätigen.

Mögliche Fehlerquellen

Wir sind uns darüber im Klaren, dass eine solche Erforschung mit allerlei Fehlern verbunden sein kann. Einen Hauptgrund sehen wir darin, dass wir nicht im Labor, sondern in der Schule experimentiert haben. So hatten wir in der Schule keinen konstanten Luftdruck und damit eventuell unterschiedlich starke Spannung auf der Feder. Weiterhin konnten wir Störgeräusche aus den Aufnahmen nicht vollständig entfernen wodurch die Messungen verfälscht sein können. Z.B. können wir das Geräusch, das die Kugeln auf den Schienen verursachen, nicht herausfiltern. Weiterhin konnten wir nicht berücksichtigen, dass sich die Kugeln bei verschiedenen Temperaturen ausdehnen bzw. zusammenziehen.

Ergebnis

Nach unseren Versuchen und der darauf aufbauenden Theorie ist der entstehende Chirp ein Ton, der aus vielen verschiedenen Peaks entsteht, die in einem bestimmten Verhältnis zu einander stehen. Wenn man sich auf die ursprüngliche Fragestellung bezieht, könnte man unsere Finger als Feder interpretieren, die die Kugeln immer wieder zusammen stoßen lässt. Insgesamt kann man einen Chirp also als eine, durch den Energieverlust beim Zusammenstoßen, gedämpfte Schwingung beschreiben.

Danksagung

Wir bedanken uns recht herzlich bei unseren Mitschülern, bei Prof. Dr. Jakob Schelten, bei Dr. Alexander Gottberg und vor allem bei unserem Betreuer Herrn Dr. Ebert für ihre Unterstützung und Motivation bei diesem Projekt.

Quellenverzeichnis

Sämtliche Graphen und Formeln in diesem Dokument wurden ausschließlich von unserer Gruppe erstellt.

- Deckblattgrafik: 27.01.14 17:37 als Kombination von
    - http://kleinteileversand.de/Produkte_Reinartz/Kugeln/Kugeln-Neu.jpg (27.01.14 17:33)
    - http://weavesilk.com/ (selbstgemacht 27.01.14 17:31)
- Für Tonmessungen haben wir das PC-Programm Audacity verwendet. (30.01.14)
- Metzler Physik, J. Grehn, J. Krause, 4. Auflage, S.116 (gedämpfte Schwingung)
- http://www.ld-lidactic.de/software/524221de/Content/ExperimentExamples/Physics/Mechanics/VelocitySoundSolids.htm (30.01.14 21:29)
- http://www.christian-doppler.com/CD_FONDS/WELLEN.HTM (30.01.14 21:30)