12

Jugend Forscht

Projekt Ball Sound - Die Entstehung und Entwicklung des Gerusches beim Zusammenfhren zweier Metallblle“

Erforscht von Leonard Hackel,
Paul Hagemann und Niklas Schelten

Inhalt

Fragestellung

Original: When two hard steel balls, or similar, are brought gently into contact with each other, an unusual 'chirping' sound may be produced. Investigate and explain the nature of the sound."
bersetzung: Wenn zwei Kugeln aus Stahl oder einem hnlichen Material aneinander gefhrt werden, gibt es ein zwitscherndes Gerusch. Erklre und erforsche dieses Gerusch."
Die Fragestellung ist das vierte Problem des internationalen Physik Wettbewerbs IYPT vergangen Jahres, International Young Physicists Tournament, weshalb sie in Englisch gestellt ist.

Ziele

Ziel unserer Forschung ist es natrlich diese Fragestellung zu beantworten sowie einen Versuchsaufbau zu entwickeln, der es uns ermglicht unsere Ergebnisse mglichst gut zu reproduzieren. Wir konzentrieren uns bis jetzt nur auf das Phnomen bei Metallkugeln mit genau einer Gre, wir wollen das Experiment aber in Zukunft noch auf andere Kugeln (in Bezug auf Gre und auch Material) ausweiten (Ausblick).

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden wir den oben schon angesprochenen Ton untersuchen, indem wir einen mglichst effizienten Versuchsaufbau vorstellen und an Hand der Versuchsergebnisse den Ton in seiner Amplitude und seiner Schwingungsfrequenz mathematisch beschreiben. Danach versuchen wir den Ton mit Hilfe verschiedener physikalischer Modelle zu erklren, die wir dann auf eine allgemeinere Ebene bringen und den Zusammenhang zwischen der Art des Feldes und der Frequenz untersuchen.

Grundstzliche Beschreibung des Tons

Den gesamten Ton nennen wir Chirp". Die einzelnen Tne nennen wir im Folgenden Peaks". Wir gehen davon aus, dass die einzelnen Peaks genau dann entstehen, wenn die Kugeln aufeinandertreffen. Das geschieht dadurch, dass sie zunchst durch die Hnde oder eine andere zurcktreibende Kraft zusammengedrckt werden und dann eine Impulsbertragung (mit Energieverlust) stattfindet. Daraufhin werden die Kugeln wieder ausgelenkt und wieder zusammengedrckt, sodass wieder ein Peak entsteht. Somit haben wir eine groe Anzahl von Peaks, die den Ton ausmachen. Durch den Energieverlust wird die Amplitude kleiner, d.h. der Ton an sich leiser und die Zeitabstnde verringern sich.

Versuchsaufbau

2.1 Versuchsaufbau

Unser Versuchsaufbau basiert auf zwei Federn, die unsere Hand simulieren und die beiden Kugeln gegeneinander drcken. Damit die Kugeln nicht zur Seite herausspringen werden die Kugeln an zwei Leitschienen gefhrt. An beiden Seiten sind Kreuzmuffen, die zum einen die Federn festhalten und zum anderen die Schienen stabil halten. Um den entstehenden Ton besser reproduzieren zu knnen, haben wir uns mit Strichen auf den Schienen markiert wie weit wir die Kugeln auslenken. Unser Mikrofon ist ein normales Standmikrofon, welches wir mit einem Trichter aus Papier versehen haben. Dadurch ist es uns mglich, Umgebungsgerusche herauszufiltern und die Amplitude des eigentlichen Tons zu erhhen.

Versuchsauswertung

Wie beim Versuchsaufbau schon beschrieben haben wir das Mikrofon auf die Kugeln gerichtet und dann die Kugeln bis zu den genannten Strichen ausgelenkt. Den entstehenden Ton haben wir mit dem Programm Audacity aufgenommen und dann analysiert. Um eventuelle Messfehler zu verringern, haben wir mehrere Messungen durchgefhrt und den Durchschnitt dieser genommen.
Dadurch erhalten wir die folgenden beiden Graphen, die wir weiter unten genauer erlutern. Die Messergebnisse legen nahe, dass sich insbesondere zwei Gren whrend eines Chirps verndern: die Amplitude und der zeitliche Abstand zwischen zwei Peaks.
Bei den folgenden Graphen sind die Linien zwischen den Punkten nur zur Veranschaulichung eingetragen, gemessen wurden nur (ganzzahlige) Anzahlen von Peaks.

3.1 Amplituden abhngig von den Peaks
Hier sieht man zunchst die Amplitude in Abhngigkeit zu der Anzahl der Peaks. Die Amplitude ist bei elektronischer Auswertung einheitenlos.
Der Fit ergibt die Funktionsgleichung $y = 1,26 \cdot e^{-0,22x} = 1,26 \cdot 0,8^x$. Dabei gehen wir von einer exponentiellen Funktion aus, da wir die Funktion als gedmpfte Schwingung auffassen und da diese ein sehr gutes Bestimmtheitsma von 0,996

hat. Somit verringert sich die Amplitude bei jedem Peak um den Faktor *0,8* und 1,26 ist die berechnete Startamplitude.

Zeitabstnde abhngig von den Chirps

Dies ist der Graph mit den Zeitabstnden als Funktionswert. Auch von dieser nehmen wir an, dass sie exponentiell verluft, da es sich wie oben erwhnt um eine gedmpfte Schwingung handelt. Der Zeitabstand zwischen den Peaks verringert sich bei jedem Peak um ungefhr *0,82ms*, wobei der Startwert ungefhr *43,27ms* betrgt. An Hand der Abnahmefaktoren lsst sich schlussfolgern, dass die Abnahmefaktoren bei den Zeitabstnden und bei der Amplitude ungefhr gleich sind (0,8 und 0,82). Der Unterschied von 0,02 lsst sich zum Groteil auf Messungenauigkeiten zurckfhren.

Um die Messwerte jetzt noch physikalisch zu belegen, haben wir folgende Gleichungen aufgestellt:

$$
\begin{aligned}
&t_n = \Delta_1 + \Delta_2 + ...\\
&t_{\max} = \tfrac{1}{1-b} \cdot \Delta_1\\
&\Rightarrow t_n = t_{\max} \cdot (1 - b^n)\\
&\Leftrightarrow 1 - \tfrac{t_n}{t_{\max}} = b^n\\
&\Leftrightarrow n = \tfrac{\log\left(1-\frac{t_n}{t_{\max}}\right)}{\log b}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&y_n = a \cdot y_{n-1}\\
&\Leftrightarrow y_n = a^n \cdot y_0\\
&\Leftrightarrow \tfrac{y_n}{y_0} = a^n\\
&\Leftrightarrow \tfrac{\log \frac{y_n}{y_0}}{\log a} = n
\end{aligned}
$$

Zunchst berechnen wir die Gesamtzeit aus den einzelnen Zeitabstnden, hier mit Delta benannt. Da wir mit jedem Peak die Zeit mit dem Faktor b multiplizieren ($1 > b > 0$), erhalten wir eine geometrische Reihe, sodass wir die Gesamtzeit in Abhngigkeit von dem Abnahmefaktor b, der jeweiligen Anzahl der Peaks n und dem Startwert des Zeitabstandes Δ_1 darstellen knnen. Durch diese Gesamtzeit $t_{\max}$ und dem Faktor b knnen wir also die Zeit zu einem beliebigen Schritt n berechnen. Wie man schon an den Messwerten erkennt, ist ein Faktor von *0,82* fr b realistisch. Nun formen wir per Logarithmus nach n um, da n die einzige Gemeinsamkeit in den Formeln sowohl fr den Zeitabstand als auch die Amplitude ist. Die Amplitude, hier y_n, stellen wir in der ersten Zeile rekursiv dar, ausgehend von einem Abnahmefaktor a. Damit ergibt sich dann die explizite Formel$y_n = a^n \cdot y_0$ wobei y_0 der Startwert ist.
Auch hier lsen wir dann nach n auf, damit wir die Formeln ber das n, die Anzahl der Peaks, gleichsetzen knnen.

$$
\begin{aligned}
&Gleichsetzung:\\
&\frac{\log\left(\frac{y_n}{y_0}\right)}{\log a}=\frac{\log\left(1-\frac{t_n}{t_{\max}}\right)}{\log b}\\
&\Leftrightarrow \log\left(\frac{y_n}{y_0}\right)=\frac{\log a}{\log b}\cdot\log\left(1-\frac{t_n}{t_{\max}}\right)\\
&\Leftrightarrow \log\left(\frac{y_n}{y_0}\right)=\log\left(\left(1-\frac{t_n}{t_{\max}}\right)^{\frac{\log a}{\log b}}\right)\\
&\Leftrightarrow \frac{y_n}{y_0}=\left(1-\frac{t_n}{t_{\max}}\right)^{\frac{\log a}{\log b}}\\
&\Leftrightarrow y_n=y_0\cdot\left(1-\frac{t_n}{t_{\max}}\right)^{\frac{\log a}{\log b}}
\end{aligned}
$$

Die erste Zeile ist diese Gleichsetzung. In der nchsten Zeile multiplizieren wir mit $\log a$. Nach den Logarithmus-gesetzen knnen wir diesen Faktor auch als Potenz schreiben. Dadurch kann man in der vierten Zeile dann den Logarithmus herauskrzen“, indem wir eine beliebige Basis nehmen. Nun lsen wir nach y_n auf. Wir erhalten die Auslenkungen in Abhngigkeit von der Gesamt-amplitude, der Momentanzeit t_n, der Gesamtzeit $t_{\max}$ und den beiden Abnahmefaktoren a und b.
Hier sehen wir dann unsere Messung der Amplitude in Abhngigkeit der Zeit.Der Graph der Amplitude ber die Zeit deutet auf eine lineare Abnahme hin (siehe unten). Damit wre $y(n)=y(0)\cdot\left(1-\frac{t(n)}{t(\max)}\right)^1$ die zugehrige Gleichung.

6.1 Amplitude abhngig von der Zeit
Eine alternative Darstellung der Formel wre $y_n = y_0 \cdot (b^n)^{\frac{\log a}{\log b}}$ aufgrund folgender Umformung: $t_n = t_{\max} \cdot (1 - b^n) \Leftrightarrow \frac{t_n}{t_{\max}} = 1 - b^n$.
Physikalische Betrachtung
Das Basketballmodell

$$
\begin{aligned}
&h_0(t) = -\tfrac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + 0 = t\left(v_0 - \tfrac{g}{2} \cdot t\right)\\
&t_{0,1} = 0\\
&t_{0,2} = \tfrac{2 \cdot v_0}{g}\\
&v_1 = \alpha \cdot v_0\\
&\Rightarrow t_{1,2} = \tfrac{2 \cdot v_1}{g}\\
&m \cdot g \cdot h = \tfrac{m}{2} \cdot v^2 (Amplitude)\\
&h = \tfrac{v^2}{2 \cdot g} = \tfrac{(\alpha \cdot v_{n-1})^2}{2 \cdot g}\\
&h_{n+1} = \alpha^2 \cdot h_n
\end{aligned}
$$

Das Herunterfallen eines Basketballs lsst sich mit der Gleichung in der ersten Zeile beschreiben, die wir gleich 0 setzen, da wir den Abnahmefaktor fr den Zeitabstand zwischen den einzelnen Peaks“ herausfinden wollen. Damit erhalten wir zum einen 0, was uns aber nicht weiter interessiert, und auch $\frac{2 \cdot v_0}{g}$. Da wir

jetzt davon ausgehen, dass t mit einem Faktor α abnimmt, muss folglich auch v mit einem Faktor α abnehmen, da 2 und g konstant sind.
Die Energiebetrachung liefert dann den Abnahmefaktor fr die Auslenkung (hier h). Wir formen nach h um und erkennen, dass die Auslenkung lediglich von v und g abhngt. Da g konstant ist und wir herausgefunden haben, dass v mit α abnimmt, muss h mit α^2 abnehmen. Wie wirkt sich das im logarithmischen Term aus?
Wenn die Periode mit α abnimmt, muss die Auslenkung mit α^2 abnehmen. Wir knnen davon ausgehen, dass die Periode mit einem gewissen Faktor abnimmt, da uns nur das logarithmische Verhltnis interessiert. Daraus folgt: $\frac{\log \alpha^2}{\log \alpha} = 2$
Damit htten wir beim Basketballmodell eine quadratische Abnahme der Amplitude ber die Zeit.

Verallgemeinerung

Neben dem Basketballmodell gibt es noch viele andere Modelle, z.B. das Federmodell bei dem die rcktreibende Kraft die Federkraft ist. Bei diesem berhmten ellipsoiden Magneten wre es die Magnetkraft. Daraus schlieen wir, dass sich smtliche Modelle erst einmal nur in ihrer rcktreibenden Kraft unterscheiden, genauer gesagt in der Proportionalitt zu einer bestimmten Potenz des Weges: Beim Basketballmodell ist die rcktreibende Kraft immer konstant, sodass die Kraft selbst zu s^0 proportional ist. Bei der Federkraft ist sie jeweils proportional zur Auslenkung (Hooke'sche Feder), also zu s^1, bei der Magnetkraft (in einem homogenen Magnetfeld) nimmt sie mit r^2 ab, das heit mit s^{-2} .
Aus diesen berlegungen gelangen wir zu der Annahme, dass sich die rcktreibende Kraft allgemein darstellen lsst als $F = c \cdot s^a$, wobei a die Potenz des Weges, s der Weg und c die jeweiligen Konstanten davor sind. Durch das allgemeine Gesetz, dass die Energie das Integral aus Kraft und Weg ist, erhalten wir fr die Energie:

$$E = \frac{c}{a+1} \cdot s^{a+1}$$

Generell haben wir dann eine Schwingung zwischen dieser Energieform und der kinetischen Energie bei unseren Modellen.
Damit gilt:

$$\frac{m}{2}v^2 + \frac{c}{a+1}s^{a+1} = konst$$

Durch Ableiten erhalten wir:

$$m \cdot 2v \cdot \dot{v} \cdot \frac{1}{2} + c \cdot s^a \cdot \dot{s} = 0$$

Durch v teilen ergibt:

$$m \cdot \ddot{s} + c \cdot s^a = 0$$

Diese nicht-lineare Differentialgleichung ist das Ergebnis der Energiebetrachtung. Grundstzlich stimmt diese, wie wir im Folgenden sehen werden, mit unserem Basketballmodell berein.
Diese Differentialgleichung haben wir mit Hilfe einer numerischen Simulation ausgewertet. Die Energieabnahme simulieren wir mit Hilfe von v als variabler

Gre, da die Energie kurz vor dem Aufprall beider Kugeln nur in $\frac{m}{2}v^2$ vorliegt, sodass wir mit einer geringeren Geschwindigkeit auch gleichzeitig eine geringere Energie haben.
Da wir uns den Graphen plotten lassen, knnen wir anhand der Nullstellen die Schwingungsperiode und damit die Frequenz ablesen. Dabei erhalten wir folgende Ergebnisse fr die Funktion des Weges bei unterschiedlichen Exponenten:

9.1 Zeitpunkte der Zusammenste (Peaks) abhngig von der Geschwindigkeit (wegen der nummerischen Simulation einheitenlos)
Diese Graphen stimmen bei a=0, also dem Basketballmodell, berein, da wir eine umgedrehte Parabel als Funktion fr die Strecke erhalten, sodass wir tatschlich eine quadratische Abnahme erhalten.
Bei a=1, also unserem Federmodell, erhalten wir eine Sinusfunktion, sodass die Nullstellen unabhngig von der Gre der Energiezufuhr / -entnahme konstant bleiben.
Das luft analog zu einem Federpendel ($T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$), bei dem die Periode auch in der Theorie immer konstant ist. Bei dem Pendel lsst sich die in der Wirklichkeit nicht konstante Periode durch Luftverwirbelungen und andere Strungen erklren. Bei unserem Versuch sind Strungen z.B. die Reibung an den Schienen und die Tatsache, dass unsere Feder nur bei kleinen Auslenkungen eine Hooke'sche Feder ist.

a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
v	1	3	5	7	10	12	15	20	50	1	3	5	7	10	12	15
Periode	21	61	101	133	201	250	301	400	999	33	33	33	33	33	33	33

9.2 Messwerttabelle

Allgemein lsst sich aus den Versuchswerten“ folgende allgemeine Regel schlieen: T ist proportional zu v^{1-a} , damit wre es bei a=1: v^0 , also nicht abhngig von v, bei a=0 einfach v, wie man auch in unserer Herleitung des Basketballmodells sieht.
Wenden wir diese Regel auf negative Potenzen an, so wre bei a=-2, also einem Magnetfeld T proportional zu v^3, die Periode wrde also bei abnehmender Energie wesentlich strker abnehmen als beim Basketballmodell.
Man mag sich jetzt fragen, wieso wir keine konstante Schwingungsperiode bei unseren Versuchsdaten haben, obwohl wir eine Hooke'sche Feder benutzen. Die Schwingungsperiode msste an sich konstant bleiben, sie nimmt hingegen exponentiell ab. Dies liegt daran, dass die Federauslenkung nach dem ersten Aufprall so gering ausgelenkt ist, dass die rcktreibende Kraft als annhernd konstant angenommen werden kann, da sich die Auslenkungen kaum unterscheiden.
Damit entspricht unser Versuchsaufbau eher dem Basketballmodell.

Die Simulation

Um sich dieses Phnomen besser vorstellen zu knnen, haben wir auf Basis unserer Messergebnisse und vor allem auf Basis unsere physikalischen Herleitungen eine Simulation eines Chirps programmiert. Die Simulation ist in Delphi geschrieben und implementiert unser Basketballmodell und unser Federmodell als Beispiele. Damit wir uns dabei nicht auf eine Kraft, die die Kugeln zusammendrckt, festlegen mssen, ist der prozentuale Energieerhalt nach einem Chirp whlbar.

10.1 Selbst programmierte Simulation
Die Simulation basiert auf der Annahme, dass sich die Kugeln mit wachsender Geschwindigkeit aufeinander zu bewegen. Sobald sie sich berhren oder berschneiden, werden die Geschwindigkeiten mit -1 multipliziert, sodass sie sich dann an diesem konkreten Zeitpunkt mit derselben Geschwindigkeit auseinander bewegen wie kurz davor aufeinander zu bewegen. Allerdings werden sie nun mit derselben Kraft gebremst wie sie vorher beschleunigt wurden, sodass sie immer weniger Ausschlag bekommen. Diese Kraft lsst sich fr verschiedene Szenarien verschieden einstellen.
Ausblick
Da wir bis jetzt nichts ber die Entstehung der einzelnen Peaks wissen, wollen wir herausfinden, wie der Ton erzeugt wird. Dafr wollen wir den Versuch in anderen Medien testen, zum Beispiel in Helium oder etwas hnlichem. Weiterhin wollen wir wissen inwiefern sich die Beschaffenheit der Kugel, z.B. Gre oder Material, auf den Ton auswirkt.
Da wir davon ausgehen, dass die Formel $T \sim v^{1-a}$ eineindeutig ist, kann man aus der gemessenen Frequenz auf die Rckstellkraft schlieen. Im weiteren Verlauf des Versuchs wollen wir diese These noch genauer untersuchen und besttigen.

Mgliche Fehlerquellen
Wir sind uns darber im Klaren, dass eine solche Erforschung mit allerlei Fehlern verbunden sein kann. Einen Hauptgrund sehen wir darin, dass wir nicht im Labor, sondern in der Schule experimentiert haben. So hatten wir in der Schule keinen konstanten Luftdruck und damit eventuell unterschiedlich starke Spannung auf der Feder. Weiterhin konnten wir Strgerusche aus den Aufnahmen nicht vollstndig entfernen wodurch die Messungen verflscht sein knnen. Z.B. knnen wir das Gerusch, das die Kugeln auf den Schienen verursachen, nicht herausfiltern. Weiterhin konnten wir nicht bercksichtigen, dass sich die Kugeln bei verschiedenen Temperaturen ausdehnen bzw. zusammenziehen.
Ergebnis

Nach unseren Versuchen und der darauf aufbauenden Theorie ist der entstehende Chirp ein Ton, der aus vielen verschiedenen Peaks entsteht, die in einem bestimmten Verhltnis zu einander stehen. Wenn man sich auf die ursprngliche Fragestellung bezieht, knnte man unsere Finger als Feder interpretieren, die die Kugeln immer wieder zusammen stoen lsst. Insgesamt kann man einen Chirp also als eine, durch den Energieverlust beim Zusammenstoen, gedmpfte Schwingung beschreiben.

Danksagung

Wir bedanken uns recht herzlich bei unseren Mitschlern, bei Prof. Dr. Jakob Schelten, bei Dr. Alexander Gottberg und vor allem bei unserem Betreuer Herrn Dr. Ebert fr ihre Untersttzung und Motivation bei diesem Projekt.
Quellenverzeichnis
Smtliche Graphen und Formeln in diesem Dokument wurden ausschlielich von unserer Gruppe erstellt.

1. Deckblattgrafik: 27.01.14 17:37 als Kombination von
   (a) http://kleinteileversand.de/Produkte_Reinartz/Kugeln/Kugeln-Neu.jpg (27.01.14 17:33)
   (b) http://weavesilk.com/ (selbstgemacht 27.01.14 17:31)
2. Fr Tonmessungen haben wir das PC-Programm Audacity verwendet. (**??**)
3. Metzler Physik, J. Grehn, J. Krause, 4. Auflage, S.116 (gedmpfte Schwingung)
4. http://www.ld-lidactic.de/software/524221de/Content/ExperimentExamples/Physics/Mechanics/Ve (30.01.14 21:29)
5. http://www.christian-doppler.com/CD_FONDS/WELLEN.HTM (30.01.14 21:30)