Alternative Charakterisierung der linearen Abhängigkeit

$$v_1, \dots, v_n \text{ linear abhängig} \Rightarrow \exists\, i \le n : v_i = \sum_{j \ne i} h_j v_j$$

Begründung: $k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0$ und $k_i \ne 0$

$$\Rightarrow k_i v_i = -k_1 v_1 - k_2 v_2 - \dots - k_n v_n$$

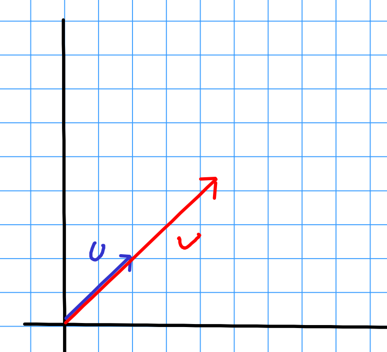
$$\overset{k_i \ne 0}{\Rightarrow} v_i = h_1 v_1 + h_2 v_2 + \dots + h_n v_n \quad \text{mit } h_j = -\frac{k_j}{k_i}$$

$\square$

Beispiele

- einzelner Vektor v ist linear unabhängig genau dann, wenn er nicht der Nullvektor ist
- zwei Vektoren u, v sind linear abhängig genau dann, wenn sie skalare Vielfache voneinander sind
- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear abhängig, denn

  z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



aber: $\binom{1}{2} \neq k_1 \binom{1}{1} + k_2 \binom{7}{7}$ egal für welche $k_1, k_2 \in K$

d.h. „Existenz"-Teil der Charakterisierung ist notwendig

Satz (Koeffizientenvergleich)

Seien $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängige Vektoren. Dann gilt:

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = h_1 v_1 + \dots + h_n v_n$$

$$\Longrightarrow$$

$$k_i = h_i \quad \forall i \leq n$$

Beweis: $\sum_{i=1}^{n} k_i v_i = \sum_{i=1}^{n} h_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (k_i - h_i) v_i = 0$

Da $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, müssen alle $k_i - h_i = 0$ sein.

$\Rightarrow k_i = h_i \ \forall i \leq n$ $\square$

Satz Sei $S \subseteq V$. Dann ist $\langle S \rangle$ die Menge aller Linearkombinationen von S, d.h. $\langle S \rangle = \{ v \in V \mid v \text{ ist Linearkomb. von } S \}$.
Für $v_1, \dots, v_n \in V$ bzw. $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ hat man

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \;\middle|\; a_1, \dots, a_n \in K \right\}.$$

$=$: $\subseteq$ und $\supseteq$

Beweis: Sei $W \subseteq V$ die Menge aller Linearkombinationen von S. Es gilt $0 \in W$ und zudem sind die Summe und das skalare Vielfache von Linearkombinationen wieder Linearkombinationen.
$\Rightarrow$ W ist Unterraum von V $\Rightarrow$ $\langle S \rangle \subseteq W$

Umgekehrt sei $U \subseteq V$ ein Unterraum mit $S \subseteq U$. Für $v_1, \dots, v_n \in S$ und $a_1, \dots, a_n \in K$ sind dann alle v_i in U und daher auch $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$.
$\Rightarrow$ U enthält alle Linearkombinationen von S, d.h. $W \subseteq U$.
$\Rightarrow$ $W \subseteq \langle S \rangle$ und insgesamt $W = \langle S \rangle$ $\square$

Beispiele $V = \mathbb{R}^3$

- $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ a_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ diese Mengen von Vektoren erzeugen also den gleichen Unterraum

$$\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ a_1 \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}2a_1 + a_2\\a_2\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \underset{\substack{2a_1 + a_2\\=\\b_1}}{=} \left\{ \begin{pmatrix}b_1\\a_2\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; b_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ sind linear abhängig

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}a_1 - 2a_2\\a_1 - 2a_2\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} \underset{\substack{a_1 - 2a_2\\=\\b_1}}{=} \left\{ \begin{pmatrix}b_1\\b_1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; b_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

- homogenes LGS $Ax=0$ mit $A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&0&4&-2\\0&1&0&-1\\1&0&2&2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L=\left\{\begin{pmatrix}-2a\\0\\a\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; a\in\mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

- $K^3=\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$, funktioniert auch für K^n (und in der Tat für alle Vektorräume)

das ist eine besonders schöne Darstellung des gesamten Vektorraums.

Satz Sei $B\in K^{m\times n}$ aus $A\in K^{m\times n}$ durch elementare Zeilenoperationen hervorgegangen. Dann erzeugen die Zeilen von A denselben Unterraum von $K^{1\times n}$ wie die Zeilen von B. Zeilenraum

Beweis: Es ist zu zeigen, dass die elementaren Zeilenoperationen den von den Zeilen $v_1,\dots,v_m$ von A erzeugten Raum nicht ändern.

$$A=\begin{pmatrix}- & v_1 & -\\ - & v_2 & -\\ & \vdots & \\ - & v_m & -\end{pmatrix}$$

Für das Skalieren oder Vertauschen von Zeilen ist das klar.

Nach Umnummerieren der Zeilen kann man die Summe von Zeilen (als elementare Zeilenoperation) betrachten über die Ersetzung von v_1 durch $v_1 + s v_2$.

$$\Rightarrow \langle v_1 + s v_2, v_2, \dots, v_n \rangle = \left\{ a_1 (v_1 + s v_2) + \sum_{i=2}^{n} a_i v_i \;\middle|\; a_i \in K \right\} =$$

$$= \left\{ a_1 v_1 + \underbrace{(s a_1 + a_2)}_{b_2 = s a_1 + a_2} v_2 + \sum_{i=3}^{n} a_i v_i \;\middle|\; a_i \in K \right\} = \left\{ \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} a_i v_i \Big) + b_2 v_2 \;\middle|\; b_2, a_1, a_3, a_4, \dots, a_n \in K \right\}$$

$\square$

Das war der Grund, warum bei den Zeilenoperationen die Lösungsmenge nicht verändert wurde.

Für Vektoren $v_1, \dots, v_n \in K^m$ gibt es einen Test nach Schema F auf lineare Unabhängigkeit:

- Bilde die Matrix $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$ mit den v_i als Spalten.
- Dann: $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $\text{rang}(A) = n$

Test hierauf durch Transformation in Zeilenstufenform

Begründung: Die v_i sind genau dann linear unabhängig, wenn das homogene LGS $Ax = 0$ als einzige Lösung den Nullvektor hat. Das ist genau dann der Fall, wenn $\text{rang}\, A = n$.

Beobachtung: $\text{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$ ← $\text{rang}(A) \leq m$, $\text{rang}(A) \leq n$ nach Definition

$\Rightarrow$ im K^m können höchstens m Vektoren linear unabhängig sein. Eine größere Menge von Vektoren ist immer linear abhängig.

6) Erzeugendensysteme und Basen

Definition Sei $S \subset V$. S heißt <u>Erzeugendensystem</u> von V, falls $\langle S \rangle = V$.
S heißt <u>Basis</u> von V, falls S ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

Beispiele

- $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sind eine Basis von K^3

  $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ sind eine Basis von K^3

  $\Rightarrow$ mehr als eine Basis

- $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ mit $e_i = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \in K^n$ ist die <u>Standardbasis</u> des K^n

  i-te Position

- $V = K[x]$, dann ist $S = \{x^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ eine Basis (mit unendlich vielen Elementen)

  Menge aller Polynome in x

  Polynomring

  Polynom: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$

- Lösungsraum $L = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ des homogenen LGS $Ax=0$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ hat Basis $S = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

allgemein: Sei $Ax=0$ ein beliebiges homogenes LGS. Seien $k_1, \dots, k_{n-r}$ die im Algorithmus zur Lösung benutzten Indizes. Für $j = 1, \dots, n-r$ sei v_j der Lösungsvektor mit $x_{k_j} = 1$ und $x_{k_i} = 0$ für $i \neq j$. Dann ist $\{v_1, \dots, v_{n-r}\}$ eine Basis des Lösungsraums S. Die Tatsache, dass man ein Erzeugendensystem hat, folgt direkt aus der Formel. Zudem zeigt sie, dass die k_j-te Koordinate von $\sum_{i=1}^{n-r} a_i v_i$ genau a_j ist, woraus direkt die lineare Unabhängigkeit folgt. $\Rightarrow$ Erz. system + lin. Unabh. $\hat{=}$ Basis