Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 6

Präsenzaufgabe 6.1 (Nur eine Bedingung für Lineare Abbildungen)
Beweisen Sie:

$$f : U \to V \text{ linear } \iff \forall\ x, y \in U\ \forall\ \mu \in K : f(x + \mu y) = f(x) + \mu f(y).$$

Lösung zu Aufgabe 6.1

„$\Rightarrow$“ Ist f linear, so können wir die Additivität und die Homogenität von f nutzen um zu zeigen: $f(x + \mu y) = f(x) + f(\mu y) = f(x) + \mu f(y)$.

„$\Leftarrow$“ Gilt andererseits, dass $f(x + \mu y) = f(x) + \mu f(y)$ für alle $x, y \in U$ und alle $\mu \in K$, dann gilt

(i) die Additivität von f mit $\mu = 1$,

(ii) $f(0) = 0$, mit der Wahl, $y = x$ und $\mu = -1$ und

(iii) die Homogenität, denn $f(\mu y) = f(0 + \mu y) = f(0) + \mu f(y) = \mu f(y)$, da $f(0) = 0$.

Präsenzaufgabe 6.2 (Kern und Bild)
Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

sowie die zugehörige lineare Abbildung $\varphi_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$.

a) Bestimmen Sie Basen von $\text{Kern}(\varphi_A)$ und $\text{Bild}(\varphi_A)$, und verifizieren Sie den Dimensionssatz.

b) Ist φ_A injektiv/surjektiv?

c) Berechnen Sie das Urbild $\varphi_A^{-1}(w)$ zum Punkt $w := (0, 4, 4)^T \in \mathbb{R}^3$ und drücken Sie es mit Hilfe von $\text{Kern}(\varphi_A)$ aus.

Lösung zu Aufgabe 6.2

a) Da $\text{Kern}(\varphi_A) := \{x \in \mathbb{R}^4 : \varphi_A(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$ müssen wir die Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ bestimmen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ 1/2II \\ II - 2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - 2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D.h. $\text{Kern}(\varphi_A) = \left\{(2\lambda + 2\mu, -2\lambda - 3\mu, \lambda, \mu)^T \in \mathbb{R}^4 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$. Die nächstliegende Basis dazu ehalten wir durch die Wahl der Parameter $\lambda = 1, \mu = 0$ und vice versa: $\left\{(2, -2, 1, 0)^T, (2, -3, 0, 1)^T\right\}$.

Nun zum Bild, dass dem Erzeugnis der Spalten von A entspricht. Es gilt also $\text{Bild}(\varphi_A) = \langle (1, 0, 2)^T, (0, 2, 2)^T, (-2, 4, 0)^T, (-2, 6, 2)^T \rangle$. Wir sehen sofort, dass die beiden ersten Vektoren l.u. sind. Ferner gilt $(-2, 4, 0)^T = -2 \cdot (1, 0, 2)^T + 2 \cdot (0, 2, 2)^T$ und $(-2, 6, 2)^T = (-2, 4, 0)^T + (0, 2, 2)^T$. Also ist $\left\{(1, 0, 2)^T, (0, 2, 2)^T\right\}$ eine Basis von $\text{Bild}(\varphi_A)$.

Dies verifiziert auch den Dimensionssatz, da wir jetzt sehen, dass $n = 4 = 2+2 = \dim(\text{Kern}(\varphi_A)) + \dim(\text{Bild}(\varphi_A))$.

b) Da $\text{Kern}(\varphi_A) \neq \{0\}$ gilt, ist φ_A nicht injektiv und da $\dim(\text{Bild}(\varphi_A)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ gilt, ist φ_A auch nicht surjektiv.

c) $\varphi_A^{-1}(w) = \{x \in \mathbb{R}^4 : \varphi_A(x) = w\}$. Wir suchen also alle Lösungen des LGS $Ax = w$ und wissen, dass uns dazu eine Lösung $\bar{x}$ genügt, da dann $\varphi_A^{-1}(w) = \{\bar{x}\} + \text{Kern}(\varphi_A)$ gilt. Ergänzen wir w als Rechte-Seite-Vektor in den obigen Umformungen so erhalten wir

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \quad \to \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Wir erhalten also $\varphi_A^{-1}(w) = \left\{(0, 2, 0, 0)^T\right\} + \langle (2, -2, 1, 0)^T, (2, -3, 0, 1)^T \rangle$.

Präsenzaufgabe 6.3 (Inverse Matrix)
Berechnen Sie die inverse Matrix zu

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in GF_5^{2\times 2}, \qquad \text{c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

Lösung zu Aufgabe 6.3
Der Algorithmus zur Invertierung einer Matrix nimmt einfach die gesamte Einheitsmatrix als Rechte-Seite zum Gauß-Algorithmus hinzu und führt diesen bis zur strengen Zeilenstufenform.

a)

$$\begin{array}{r} \\ \\ II + 2I \\ \\ I - 2II \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Also $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} II \\ I+3II \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ 2II \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} I+II \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Also $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ II-I \\ III-I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} I-III \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Also $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Präsenzaufgabe 6.4 (Rang einer Inzidenzmatrix)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $n \geq 2$ und $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ mit $m \geq 1$, $e_j \subset V$, $|e_j| = 2$. Die Inzidenzmatrix $S_G = (s_{ij})_{ij} \in \{0,1\}^{n \times m}$ von G ist definiert durch

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i \in e_j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Ist G ein Baum (also kreisfrei und zusammenhängend), dann besitzt G Blätter.

b) Ist v_n ein Blatt, dann ist $G - v_n := (V \setminus \{v_n\}, E')$, mit $E' = \{e \in E : v_n \notin e\}$, wieder ein Baum.

c) Ist G ein Baum, dann sind die Spalten von S_G linear unabhängig.

d) Betrachtet man S_G als Matrix über GF_2, dann gilt $\operatorname{rang}(S_G) = n - 1$.

e) Betrachtet man S_G als Matrix über $\mathbb{R}$ dann gilt $\operatorname{rang}(S_G) = n - 1$, falls G keine Kreise ungerader Länge enthält.

Lösung zu Aufgabe 6.4

a) Zunächst: Für jeden Baum gilt $m = n - 1$. Nun zählen wir die Knotengrade: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 2(n-1) < 2n$. Gäbe es keine Blätter müsste die Summer der Knotengrade aber mindestens $2n$ sein.

b) Da G kreisfrei ist, muss $G - v_n$ natürlich auch kreisfrei sein. Und da v_n ein Blatt ist, kann es keinen Weg in G mit v_n als Zwischenknoten geben, also ist wegen G zusammenhängend auch $G - v_n$ zusammenhängend.

c) Wir können mithilfe von (a) induktiv argumentieren: wir nehmen an, dass jeder Baum mit $n-1$ Knoten eine Inzidenzmatrix mit linear unabhängigen Spalten besitzt. Nun betrachte G. Die Spalte der Kante zu einem Blatt v besitzt eine 1 in der Zeile des Blattes, in der daher keine weitere 1 vorkommt, ist also l.u. von allen anderen Spalten. Wir können die Spalte und die Zeile des Blattes also löschen und erhalten $G - v$, nach (b) ein Baum mit $n-1$ Knoten. Nach Induktionsvoraussetzung sind die restlichen Spalten also linear unabhängig.

d) Da G zusammenhängend ist, enthält G einen Spannbaum dessen Spalten l.u. sind. Es gilt also $\text{rang}(S_G) \geq n-1$. Addieren wir nun alle Zeilen, so ergibt sich in GF_2 eine nichttriviale Linearkombination der 0. Daher gilt auch $\text{rang}(S_G) \leq n-1$ in GF_2.

e) Da G zusammenhängend ist, enthält G einen Baum mit $n-1$ nach c l.u. Spalten. Es folgt $\text{rang}(S_G) \geq n-1$. Enthält G andererseits einen Kreis, dann nach Voraussetzung einen Kreis gerader Länge. Betrachte nur die Spalten der Kanten dieses Kreises. Nun sortiere die Zeilen in Reihenfolge eines Pfades durch diesen Kreis. Dann multipliziere die erste, dritte, (fünfte), ... Zeile mit -1 und addiere dann alle Zeilen. Wieder entsteht eine Linearkombination der 0. Die Zeilen sind also linear abhängig, es gilt daher, dass $\text{rang}(S_G) \leq n-1$.

   Beachte: Es gilt sogar genau dann wenn, ein zusammenhängender Graph der einen Kreis ungerader Länge enthält aht Rang n!

Hausaufgabe 6.5 (Kern, Bild, Urbild)
Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in GF_3^{4\times 5}$$

sowie die zugehörige lineare Abbildung $\varphi_A : GF_3^5 \to GF_3^4$, $x \mapsto Ax$. Gegeben seien weiter die Vektoren $b_1 := (0,0,1,0)^T$ und $b_2 := (1,0,1,1)^T \in GF_3^4$.

a) Bestimmen Sie Basen von $\text{Kern}(\varphi_A)$ und $\text{Bild}(\varphi_A)$, und verifizieren Sie den Dimensionssatz. Bestimmen Sie auch die Mächtigkeiten $|\text{Kern}(\varphi_A)|$ und $|\text{Bild}(\varphi_A)|$.

b) Bestimmen Sie die Urbilder $\varphi_A^{-1}(\{b_1\})$; $\varphi_A^{-1}(\{b_2\})$ und ihre jeweiligen Mächtigkeiten $|\varphi_A^{-1}(\{b_1\})|$, $|\varphi_A^{-1}(\{b_2\})|$.

Lösung zu Aufgabe 6.5
Wir bestimmen zunächst den Kern und die gesuchten Urbilder. Es ist $\text{Kern}(\varphi_A)$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems über GF_3 mit Koeffizientenmatrix A, und $\varphi_A^{-1}(\{b_1\})$, $\varphi_A^{-1}(\{b_2\})$ sind die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme über GF_3 mit Koeffizientenmatrix A und rechter Seite b_1 bzw. b_2. Wir fassen diese drei linearen Gleichungssysteme in einer Matrix zusammen (wobei wir für die rechte Seite des homogenen Systems keine eigene Spalte benötigen):

$$\left[\begin{array}{rrrrr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Mittels des Gauß-Algorithmus erzielen wir folgende Zeilenstufenform:

$$\left[\begin{array}{lrrrr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Also ist

$$\begin{aligned} &\operatorname{Kern}(\varphi_A) = \left\{(r-s-t, r, s, -r-s+t, t)^T : r, s, t \in GF_3\right\}, \\ &\varphi_A^{-1}(\{b_1\}) = \emptyset, \\ &\varphi_A^{-1}(\{b_2\}) = (1,0,0,1,0)^T + \operatorname{Kern}(\varphi_A) \end{aligned}$$

und somit $|\operatorname{Kern}(\varphi_A)| = |\varphi_A^{-1}(\{b_2\})| = 27$ und $|\varphi_A^{-1}(\{b_1\})| = 0$.

Eine Basis des Kerns erhalten wir, indem wir jeweils einen freien Parameter gleich 1 und die verbleibenden gleich 0 setzen. Damit ergibt sich $\left\{(1,1,0,-1,0)^T, (-1,0,1,-1,0)^T, (-1,0,0,1,1)^T\right\}$ als eine Basis des Kerns und $\dim(\operatorname{Kern}(\varphi_A)) = 3$.

Eine Basis des Bildes erhalten wir etwa indem wir die Spalten der Matrix als Zeilen in eine neue Matrix schreiben (d.h.: die alte Matrix transponieren) und hierauf dann den Gauß-Algorithmus anwenden. Die verbleibenden Nicht-Nullzeilen (wieder als Spalten geschrieben) geben dann eine Basis des Bildes. Wir erhalten hier z.B. die Basis $\left\{(1,-1,0,-1)^T, (0,1,1,-1)^T\right\}$ Also ist $\dim(\operatorname{Bild}(\varphi_A)) = 2$, und $|\operatorname{Bild}(\varphi_A)| = 3^2 = 9$.

Zum Dimensionssatz: es gilt

$$\dim(GF_3^5) = 5 = 2 + 3 = \dim(\operatorname{Bild}(\varphi_A)) + \dim(\operatorname{Kern}(\varphi_A))$$

wie der Satz voraussagt.

Hausaufgabe 6.6 (Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$)
Sei $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ linear}\}$ und $F : L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(1)$.

a) Zeigen Sie, dass F linear ist.

b) Zeigen Sie, dass F bijektiv ist.

c) Geben Sie die Umkehrabbildung $F^{-1} = G : \mathbb{R} \to L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ an.

Lösung zu Aufgabe 6.6

a) (i) Additivität: $F(f+g) = (f+g)(1) = f(1) + g(1) = F(f) + F(g)$.

(ii) Homogenität: $F(\lambda f) = (\lambda f)(1) = \lambda f(1) = \lambda F(f)$.

b) (i) Injektiv: Seien $f, g \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $F(f) = F(g)$, also $f(1) = g(1)$. Da f, g linear, folgt $f(x) = x\dot{f}(1) = x\dot{g}(1) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $f = g$.

(ii) Surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Definiere $f \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ durch $f(x) = y\dot{x}$. Dann gilt $F(f) = f(1) = y$.

c) Sei $G : \mathbb{R} \to L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $y \mapsto f$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y \cdot x$. Dann gilt $F(G(y)) = F(f) = f(1) = y$ und für $f \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f(1) = y$ gilt $G(F(f)) = G(f(1)) = G(y) = f$.

Hausaufgabe 6.7 (Lineare Abbildungen in Matrizenräume)
Betrachten Sie die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b-c & c-d \\ 2a+c & a-b+d \end{pmatrix}$$

a) Ist φ bijektiv?

b) Bestimmen Sie $(a, b, c, d)^T$, sodass gilt: $\varphi((a, b, c, d)^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder entscheiden Sie, dass dies nicht möglich ist.

Lösung zu Aufgabe 6.7
Zunächst besinnen wir uns der Isomorphie aller 4-dimensionalen Vektorräume über $\mathbb{R}$ und betrachten anstelle von φ die Abbildung $\bar{\varphi} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $(a, b, c, d)^T \mapsto (a+b-c, c-d, 2a+c, a-b+d)^T$. Alle Aussage zu $\bar{\varphi}$ lassen sich dann leicht auf φ übertragen. Nun gilt aber $\bar{\varphi}((a, b, c, d)^T) = A(a, b, c, d)^T$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Da $\bar{\varphi}$ linear von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}^4$ abbildet ist $\bar{\varphi}$ bijektiv, falls injektiv, also falls $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$. Wir müssen also nur noch untersuchen, ob A vollen Rang hat:

$$\begin{array}{c} \\ III-2I \\ II \\ IV-2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ -1/2II \\ \\ IV-II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ IV+2III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Also ist $\bar{\varphi}$ und damit φ bijektiv.

b) Wir ergänzen $(1,0,0,1)^T$ als Rechte-Seite in obiger Rechnung und erhalten

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Es folgt $d=-2$, $c=d=-2$, $b=1+3/2c=-2$ und $a=1-b+c=1$.

Probe: $a+b+-c=1$, $c-d=0$, $2a+c=0$ und $a-b+d=1$.

Hausaufgabe 6.8 (Inverse Matrix 2)
Berechnen Sie zu jeder der folgenden Matrizen die inverse Matrix:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 6.8
Wir schreiben die Matrizen jeweils als die linke Seite und die Einheitsmatrix in der entsprechenden Dimension als die rechte Seite einer neuen Matrix. Dann erzeugen wir auf der linken Seite durch elementare Zeilenumformungen die Einheitsmatrix und erhalten auf der rechten Seite die Matrix, mit welcher die ursprüngliche multipliziert werden muss, um die Einheitsmatrix zu erhalten. Somit steht also am Ende auf der rechten Seite die inverse Matrix.

a)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ 2I-II \end{array}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} I-2II \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Damit ist $A^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ II-2I \\ III+I \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} I-2II \\ \\ III-3II \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} I+2III \\ II+III \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 19 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Also ist $B^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & -8 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

c)

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 7 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} I+2III \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ II+5I \\ III+3I \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III-II \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} I+III \\ II+3III \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

D.h. $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.