(2) Sei $V = \mathbb{R}[x]$ und $\varphi: V \to V$, $f \mapsto f'$ die Ableitung.

Kern(φ) ist die Menge aller konstanten Polynome.

Bild(φ) ist V selbst. (Stammfunktion).

Koordinaten

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$ und sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann kann man eine lineare Abbildung

$$\varphi: K^n \to V, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$ definieren.

Die lineare Unabhängigkeit von B ergibt Kern $(\varphi) = \{0\}$ $\Rightarrow$ φ ist injektiv

B ist Erzeugendensystem $\Rightarrow$ φ ist surjektiv

$\Rightarrow$ injektiv + surjektiv $\Rightarrow$ φ ist bijektiv, ein sogenannter <u>Isomorphismus</u>

Definition Eine lineare Abbildung $\varphi: V \to W$ heißt **Isomorphismus**, falls φ bijektiv ist. Dann ist auch die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}: W \to V$ ein Isomorphismus. V und W heißen **isomorph**, falls es einen Isomorphismus $V \to W$ gibt. (Schreibweise „$V \cong W$")

Die Umkehrabbildung zu obigem φ assoziiert zu jedem $v \in V$ seinen **Koordinatenvektor** bezüglich Basis B, d.h. den eindeutigen Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n \quad \text{mit} \quad v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i .$$

$\Rightarrow$ **Satz** Sei $n = \dim(V) < \infty$. Dann gilt $V \cong K^n$.

Beispiel $V = \{ f \in K[x] \mid \deg(f) \leq 2 \} \cong K^3$. Ein Isomorphismus ist gegeben durch $\varphi: K^3 \to V$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_1 + a_2 x + a_3 x^2$

Pointe Beim Arbeiten mit endlich-dimensionalen Vektorräumen kann man immer „in K^n" denken.

$\dim(V) = n < \infty$

Dimensionssatz für lineare Abbildungen

Satz Sei $\varphi: V \to W$ linear. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)).$$

Beweis (für den endlichen Fall, Aussage gilt auch allgemein)

Sei $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ und $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$. O.B.d.A. können wir $v_1', \dots, v_n' \in V$ wählen mit $\varphi(v_i') = w_i$.

Wir zeigen, dass $B = \{v_1, \dots, v_m, v_1', \dots, v_n'\}$ eine Basis von V ist.

Lineare Unabhängigkeit Sei $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m + b_1 v_1' + \ldots + b_n v_n' = 0 \quad (*)$

mit $a_i, b_i \in K$ $\underset{\text{Anwendung von } \varphi}{\Rightarrow}$ $0 = \varphi(0) = \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi(v_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i \underbrace{\varphi(v_i')}_{w_i} =$

$= \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi(v_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i w_i$

die w_i sind linear unabhängig $\Rightarrow b_i = 0 \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

$\Rightarrow (*)$ wird also auf $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0$ reduziert

$\Rightarrow a_1 = \ldots = a_m = 0$

$\Rightarrow$ es existiert nur die triviale Darstellung der Null für B

$\Rightarrow B$ ist linear unabhängig

Erzeugendensystem Sei $v \in V$ beliebig. Da $\varphi(v) \in \mathrm{Bild}(\varphi)$, kann man

$\varphi(v)$ schreiben als $\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} b_i w_i$ mit $b_i \in K$.

Mit $\tilde{v} = v - \sum_{i=1}^{n} b_i v_i'$ folgt

$$\varphi(\tilde{v}) = \varphi(v) - \sum_{i=1}^{n} b_i \varphi(v_i') = \varphi(v) - \sum_{i=1}^{n} b_i w_i = 0$$

und daher $\tilde{v} \in \mathrm{Kern}(\varphi)$.

$\Rightarrow$ Es gibt $a_1, \dots, a_m \in K$, so dass $\tilde{v} = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$.

$\Rightarrow$ $v = \tilde{v} + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i' = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i'$, also insbesondere $v \in \langle B \rangle$.

$\Rightarrow$ B ist Erzeugendensystem

$\Rightarrow$ B ist Basis von V $\Rightarrow$ $\dim(V) = |B| = m + n =$

$= \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$.

$\square$

Sei $A \in K^{m \times n}$ und $\varphi_A : K^n \to K^m$, $v \mapsto A \cdot v$

$\mathrm{Kern}(\varphi_A)$ hat die Dimension $n - \mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{Kern}(\varphi_A))$

altes Ergebnis, neue Notation:

Jetzt: $n = \dim(\mathrm{Kern}(\varphi_A)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi_A))$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Bild}(\varphi_A)) = \mathrm{rang}(A)$

$\mathrm{Bild}(\varphi_A)$ ist die Menge aller Linearkombinationen der Spalten von A:

$$A \cdot x = b \quad \hat{=} \quad \begin{pmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{pmatrix} \cdot x_1 + \ldots + \begin{pmatrix} | \\ a_n \\ | \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} | \\ b \\ | \end{pmatrix}$$

$a_1, \ldots, a_n$ Spalten von A, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, b Spaltenvektor

$\Rightarrow$ <u>Satz</u> Der Rang einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist die Dimension des von den Spalten aufgespannten Untervektorraums von K^m.

Interpretation: Zeilenrang = Spaltenrang
(altes Ergebnis) (jetzt)

Anzahl der linear unabhängigen Zeilen entspricht der Anzahl der linear unabhängigen Spalten

<u>Korollar</u> Sei $\dim(V) = \dim(W) < \infty$ und $\varphi: V \to W$ lineare Abbildung. Dann gilt

φ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow$ φ injektiv $\Leftrightarrow$ φ surjektiv

Begründung: Wir zeigen, dass unter unseren Voraussetzungen hier gilt

injektiv $\Leftrightarrow$ surjektiv

φ injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$ $\Rightarrow$ $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = 0$

$\Leftarrow$ $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) \underset{\dim(V)=\dim(W)}{=} \dim(W) - \dim(\mathrm{Kern}(\varphi))$

$\Leftarrow$ $\Rightarrow$ φ ist genau dann injektiv wenn $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(W)$

$\Leftarrow$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Bild}(\varphi) = W$ $\Rightarrow$ φ surjektiv $\square$

analog

Für $A \in K^{n \times n}$ und φ_A gilt also

φ_A ist Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(A) = n$.

Inverse einer Matrix

Algorithmus für das Invertieren einer Matrix

Input $A \in K^{n \times n}$ oder $B \cdot A = I_n$, denn dann

Output $B \in K^{n \times n}$ mit $A \cdot B = I_n$ $\quad (B \cdot A) x = I_n x = x$

Schreibweise $B = A^{-1}$ „identische Abbildung"

(1) Bilde Matrix $(A | I_n) \in K^{n \times (2n)}$

Anhängen einer Einheitsmatrix

(2) Führe $(A | I_n)$ in strenge Zeilenstufenform (im Teil von A) über, so dass in jeder Zeile $\neq 0$ der erste Eintrag eine 1 ist

(3) Falls die Zeilenstufenform die Form $(I_n | B)$ mit $B \in K^{n \times n}$ hat, gib B zurück.

Sonst ist $\text{rang}(A) < n$, daher gibt es kein $B \in K^{n \times n}$ mit $A \cdot B = I_n$.