Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 1

Präsenzaufgabe 1.1 (Cantorsches Diagonalverfahren)
Das *kartesische Produkt* zweier Mengen A, B ist definiert als $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Für das kartesische Produkt $A \times A$ einer Menge A mit sich selbst schreiben wir auch kurz A^2.

a) Erklären Sie anhand der folgenden Tabelle, wieso es möglich ist alle Paare von Zahlen (p, q) mit $p, q \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ „abzuzählen“, dass heißt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zu bestimmen.

	1	2	3	4	$\dots$
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$\cdots$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$\cdots$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$\cdots$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

b) Erklären Sie mithilfe von Teil (a), dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gleichmächtig sind.

Präsenzaufgabe 1.2 (Eigenschaften von Relationen)
Untersuchen Sie die folgenden Relationen bezüglich Reflexivität, (Anti-)Symmetrie und Transitivität und geben Sie im Falle einer Äquivalenzrelation eine möglichst einfache Beschreibung der Äquivalenzklassen an. Wir schreiben dabei stets abkürzend $x \sim y$ für $(x, y) \in R$.

a) $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \sim y :\Leftrightarrow x - y = 5$,

b) $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \sim y :\Leftrightarrow 4x + y$ ist durch 5 teilbar,

Präsenzaufgabe 1.3 (Injektivität und Surjektivität)
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen bezüglich Injektivität und Surjektivität:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 + x$.

b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ 1 \mapsto 2,\ x \mapsto x - 1$ für $x > 1$.

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y$.

Präsenzaufgabe 1.4 (Abelsche Gruppe)
Zeigen Sie, dass $(2\mathbb{Z}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

Hausaufgabe 1.5 (Relationen - falscher Beweis zur Reflexivität)
Untersuchen Sie die folgenden Relationen bezüglich Reflexivität, (Anti-)Symmetrie und Transitivität und geben Sie im Falle einer Äquivalenzrelation eine möglichst einfache Beschreibung der Äquivalenzklassen an.

a) $R \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$.

Bitte wenden!

b) $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}, x \sim y :\Leftrightarrow x \mid y :\Leftrightarrow \ \exists c \in \mathbb{N} : cx = y$.

Diese Relation heißt Teilbarkeitsrelation, wobei $x \sim y$ hier als „x teilt y“ zu lesen ist.

Hausaufgabe 1.6 (Injektivität und Surjektivität)

a) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen bezüglich Injektivität und Surjektivität:

(i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x - 1$.

(ii) $f : (-\infty, 0) \to (1, \infty),\ x \mapsto f(x) = 1 + x^2$.

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$.

(iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y)$.

b) Geben Sie jeweils 2 Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ an, die

(i) injektiv, aber nicht surjektiv,

(ii) surjektiv, aber nicht injektiv, bzw.

(iii) injektiv und surjektiv sind.

Hausaufgabe 1.7 (Endliche Körper)
Wir definieren: $[p] := \{1, 2, 3, \dots, p\}$ und $[p]_0 := [p] \cup \{0\}$.

a) Sei $\tilde{+}, \tilde{\cdot}$ Verknüpfungen auf $[p-1]_0$, definiert durch:

- $a \tilde{+} b := (a + b) \mod p$ und
- $a \tilde{\cdot} b := (a \cdot b) \mod p$,

wobei „$+$“ und „$\cdot$“ die übliche Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen bezeichne.

Zeigen Sie, dass für jede Primzahl p durch $GF_p := ([p-1]_0, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ ein Körper gegeben ist.

b) Was geht schief, wenn p nicht prim ist?

Hinweis: Zeigen Sie (u.a.) die Hilfsaussage: $[p-1] = M_a := \{1 \tilde{\cdot} a, 2 \tilde{\cdot} a, \dots, (p-1) \tilde{\cdot} a\}$. (Wozu?)

Hausaufgabe (R) 1.8 (Matrizenrechnen 2)
Über dem Körper $\mathbb{R}$ seien folgende Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}, \quad F = (3) \in \mathbb{R}^{1\times 1}.$$

Berechnen sie alle möglichen Produkte von je zwei der gegebenen Matrizen.

Abgabe: bis Mittwoch, 27.4.2016, 11:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Verwenden Sie bei Abgabe das auf der Homepage hochgeladene Deckblatt und geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.