Lineare Algebra für Informatik

PD Dr. Steffen Borgwardt

www-m9.ma.tum.de/SS2016/LinAlgInfo

Mathematik der Datenanalyse

Vektoren, Matrizen und Lineare Abbildungen

Anwendungen in allen Bereichen des Lebens

Inhalt des ersten Kapitels : Grundlagen

- Mengen
- Relationen
- Abbildungen
- Mächtigkeit von Mengen
- Körper

1 Grundlagen

1.1 Mengen

Mengen bestehen aus Elementen

Menge X, Element x: $\quad x \in X \;\widehat{=}\; x$ ist Element von X

$x \notin X \;\widehat{=}\; x$ ist nicht Element von X

Menge Y ist Teilmenge von Menge X, falls jedes Element von Y auch Element von X ist.

formal: $\quad Y \subseteq X$ oder $Y \subset X$

Y ist echte Teilmenge von X, falls $Y \neq X$

formal: $\quad Y \subsetneq X$

Beschreibung von Mengen

Variante 1: Auflistung der Elemente

Beispiele $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ natürliche Zahlen

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ ganze Zahlen

weitere Beispiele für Zahlenmengen

$\mathbb{Q}$ rationale Zahlen

$\mathbb{R}$ reelle Zahlen

leere Menge: $\emptyset$ oder $\{\}$

Variante 2: Definition über <u>Eigenschaften bestehender Mengen</u>

$$Y = \{x \in X \mid E(x)\}$$

E ist Eigenschaft von x

Beispiele $2\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist gerade}\}$

$$\mathbb{Q} = \{ \tfrac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$$

<u>Mengenbildung</u>

$X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$ Differenz von X und Y

$X \cap Y = \{x \in X \mid x \in Y\}$ Durchschnitt von X und Y

$X \cap Y = \emptyset$ „X und Y sind disjunkt"

$X \cup Y = \{z \mid z \in X \vee z \in Y\}$ Vereinigung von X und Y

Kartesisches Produkt der nichtleeren Mengen $X_1, \dots, X_n$:

$$X_1 \times \dots \times X_n = \{ \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\text{„n-Tupel"}} \mid x_i \in X_i \ \forall i \leq n \}$$

Anzahl von Elementen in Menge X: $|X|$

$$|X| < \infty \iff \text{Menge ist endlich}$$

für endliche Mengen:

- $|X \setminus Y| = |X| - |Y|$ für $Y \subseteq X$
- $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$
- $|X_1 \times \dots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \dots \cdot |X_n|$

1.2 Relationen

Eine Relation auf der Menge X ist eine Teilmenge ρ von $X \times X$.

$(x,y) \in \rho$: "x steht in Relation ρ mit y"

$x \rho y$, wenn Kontext klar $x \sim y$

z.B. "$x = y$" mit $=$ für ρ

Beispiele $x \sim y \Leftrightarrow$ x kennt y

x ist verwandt mit y

Eigenschaften von Relationen

reflexiv: $x \sim x \quad \forall x \in X$

symmetrisch: $(x \sim y \Leftrightarrow y \sim x) \quad \forall x, y \in X$

antisymmetrisch: $(x \sim y \wedge y \sim x \Rightarrow x = y) \quad \forall x, y \in X$

transitiv: $(x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z) \quad \forall x, y, z \in X$

Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv

Beispiele
- $x \sim y \Leftrightarrow x$ und y wohnen im selben Ort
- Gleichheitsrelation "="
- Relation $\parallel$ definiert für Geraden durch
  $g \parallel h \Leftrightarrow g$ und h sind parallel

Bedeutung von Äquivalenzrelationen: alternative Beschreibung von Informationen

Für $x \in X$ ist $A(x)$ die <u>Äquivalenzklasse</u> von x, d.h. die Menge aller zu x äquivalenten Elemente.

formal: $$A(x) = \{ y \in X \mid y \sim x \}$$

Es gilt $x \sim y \iff A(x) = A(y)$ wegen Transitivität.

x, y sind dann <u>Repräsentanten</u> der selben Äquivalenzklasse.

Implikationen:

Zwei Äquivalenzklassen sind gleich oder disjunkt.

$$\iff$$

Jedes Element von X liegt in genau einer Äquivalenzklasse.

$$\iff$$

Die Menge der Äquivalenzklassen bildet eine Partition von X.

⌜ Eine Partition einer Menge X ist eine Menge $\pi = \{Y_1, Y_2, \dots\}$ nichtleerer Teilmengen von X mit:

- $Y_i \cap Y_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
- $\bigcup Y_i = X$

Vereinigung der Mengen Y_i ⌟

1.3 Abbildungen

Seien X, Y Mengen. Eine Abbildung von X nach Y ist eine "Vorschrift" f, die jedem $x \in X$ genau ein Element $f(x)$ aus Y zuordnet.

formal $f : X \to Y$

X: Definitionsbereich

Y: Bildbereich

Urbildes : Elemente aus X

Bilder : Elemente $y \in Y$, für die es ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$

$$\text{Bild}(f) = \{ y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y \}$$

<u>formale Definition</u> einer Abbildung f von X nach Y:

Relation $f \subseteq X \times Y$ mit Eigenschaft, dass es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt mit $(x, y) \in f$.

Beispiele

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(z) = z^2$
- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(r, s) \mapsto r \cdot s$
- $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 2$
- $f : X \to X$, $f(x) = x$ heißt die <u>Identität</u>

  $f = \text{id} = \text{id}_X$ auf X

Eigenschaften von Abbildungen

injektiv : $x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

surjektiv : $\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$

bijektiv : injektiv und surjektiv

Beispiele

- $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(z) = z^2$

  nicht injektiv, da $f(-z) = f(z) = z^2$

  nicht surjektiv, da z. B. 3 kein Urbild in $\mathbb{Z}$ hat

- $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$

  injektiv und surjektiv (explizite Kontrolle), also bijektiv

Komposition von Abbildungen

$$g : X \to Y \quad , \quad f : Y \to Z$$

$$f \circ g : X \to Z \quad , \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Zuerst Anwendung von g auf $x \in X$, dann Anwendung von f auf $g(x)$

Invertierbarkeit bijektiver Abbildungen

Satz: Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung.
Dann gibt es <u>genau eine</u> Abbildung $f^{-1} : Y \to X$, so dass

$$f \circ f^{-1} = id_Y \quad \text{und} \quad f^{-1} \circ f = id_X .$$

Die Aussage bedeutet, dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \text{und} \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x .$$

In anderen Worten: Jede bijektive Abbildung ist <u>umkehrbar</u>.

Beweis des Satzes: Wir müssen Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Abbildung f^{-1} zeigen

<u>Existenz</u>: f ist bijektiv, also insbesondere surjektiv

$\Rightarrow \forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$

$\Rightarrow$ definiere f^{-1} durch $f^{-1}(y) = x \quad \forall y \in Y$

zu zeigen ist jetzt, dass dieses f^{-1} eine Abbildung ist, d.h. dass zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ zugeordnet ist.

f ist injektiv $\Leftrightarrow (x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

$$\Rightarrow \left| \{ x \in X \mid f^{-1}(y) = x \} \right| = 1$$

nun gilt: $f \circ f^{-1}(y) = f(x) = y$ und $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y) = x$ und f^{-1} ist Abbildung

<u>Eindeutigkeit</u> Wir zeigen: Seien f^{-1} und g^{-1} zwei Abbildungen mit den gewünschten Eigenschaften. Dann gilt $f^{-1} = g^{-1}$.

Seien also f^{-1}, g^{-1} Abbildungen mit

- $f \circ f^{-1}(y) = y$ und $f \circ g^{-1}(y) = y \quad \forall y \in Y$
- $f^{-1} \circ f(x) = x$ und $g^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in X$.

Für die Gleichheit von f^{-1} und g^{-1} müssen wir zeigen, dass $f^{-1}(y) = g^{-1}(y) \ \forall y \in Y$. Das Argument für $x \in X$ folgt analog.

$$f \text{ bijektiv} \Rightarrow \forall y \in Y \ \exists! \, x \in X : f(x) = y$$

„es existiert genau ein"

$\Rightarrow$ <u>Jede</u> zu f inverse Abbildung muss y auf x abbilden.

$\Rightarrow f^{-1}(y) = x$ und $g^{-1}(y) = x \Rightarrow f^{-1}(y) = g^{-1}(y) \ \forall y \in Y$. $\square$

(1.4) Mächtigkeit von Mengen

Zwei Mengen heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung von X nach Y gibt.

Proposition Seien X und Y endliche Mengen. Dann gilt:
X und Y sind gleichmächtig genau dann, wenn sie gleich viele Elemente besitzen.

Beweisidee: Explizite Angabe der bijektiven Abbildung ist für endliche Mengen immer möglich.

Satz Die Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$ sind gleichmächtig.

Beweis: Angabe der bijektiven Abbildung

$$f(0)=0, \quad f(1)=-1, \quad f(2)=1, \quad f(3)=-2, \quad f(4)=2, \quad \ldots$$

allgemein: $f(2n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ und
$f(2n-1) = -n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

f ist surjektiv, da jede Zahl als Bild vorkommt.
f ist injektiv, da jede ganze Zahl nur ein Urbild hat:
für $n \in \mathbb{N}_0$ ist das $2n$,
für negative ganze Zahlen $-n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist das $2n-1$ $\square$

<u>Proposition</u> Jede unendliche Menge hat eine Teilmenge der selben Mächtigkeit.

„Korollar" (ähnlicher Beweis, kein Korollar aus der Aussage):
Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $q \cdot \mathbb{Z}$ sind gleichmächtig $\forall q \in \mathbb{N}$.
Die Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ sind gleichmächtig.

Vorsicht: Nicht jede unendliche Teilmenge einer unendlichen Menge ist gleichmächtig zur Menge!

Potenzmenge $P(X)$: Menge aller Teilmengen von X

$P(X)$ beinhaltet immer auch X und $\emptyset$ als Elemente

Satz Die Potenzmenge $P(X)$ hat eine größere Mächtigkeit als X.

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $P(X)$ und X nicht gleichmächtig sind, da alle einelementigen Teilmengen $\{x\} \subset X$ Elemente von $P(X)$ sind und damit $P(X)$ dann nur mehr Elemente haben kann.

Beweis durch Widerspruch: Angenommen es gäbe eine bijektive Abbildung f von X nach $P(X)$.

Beobachtung: $\forall x \in X$ ist $f(x)$ eine Teilmenge von X.
Für manche $x \in X$ gilt $x \in f(x)$, für die anderen $x \notin f(x)$

Betrachte $U = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Es gilt $U \subset X$, d.h. $U \in P(X)$.
Da f bijektiv ist, gibt es ein $u \in X$ mit $f(u) = U$.
Für u gilt nun $u \in U$ oder $u \notin U$. Ist $u \in U$, so muss $u \notin f(u) = U$ gelten – ein Widerspruch. Ist $u \notin U$, dann heißt das wegen $U = f(u)$ auch $u \notin f(u)$. Dann erfüllt aber u die U definierende Eigenschaft. $\Rightarrow u \in U$, ein Widerspruch.

$\Rightarrow$ Die Annahme, dass es eine bijektive Abb. $f: X \to P(X)$ gibt, ist falsch. $\square$