Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 5

Präsenzaufgabe 5.1 (Zeilen- und Spaltenrang)
Entscheiden Sie *ohne* Benutzung des Gauß-Algorithmus (d.h. ohne Zeilenstufenform zu erstellen) für die folgenden Matrizen jeweils ob die Menge der (i) Spalten und (ii) Zeilen linear unabhängig ist. Geben Sie jeweils eine möglichst kurze Begründung an und leiten Sie aus den Ergebnissen ein allgemeines Prinzip ab.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \\ 1 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Präsenzaufgabe 5.2 (Basistausch)
Es seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ und $v = 3v_2 - 6v_4 + 2v_5 \in V$ gegeben. Bestimmen Sie alle $i \in [5]$, sodass $B_i := (B \setminus \{v_i\}) \cup \{v\}$ eine Basis von V ist und schreiben Sie v_i als Linearkombination dieser Basis.

Präsenzaufgabe 5.3 (Basen im Polynomvektorraum)
Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ der Polynome vom Grad ≤ 2. Gegeben seien folgende Teilmengen von V:

$$S_1 = \left\{1, x+1, x^2+x+1\right\}, \quad S_2 = \left\{x^2+x, x^2-x\right\} \quad \text{und} \quad S_3 = \left\{1+x, x, x^2+1, x+2\right\}.$$

Untersuchen Sie für jede der Mengen S_1, S_2, S_3 ob sie linear unabhängig bzw. erzeugend bzw. eine Basis ist.

Präsenzaufgabe 5.4 (Lineare Abbildungen)

a) Bestimmen Sie welche der folgenden Abbildungen linear sind:
   (i) $f_1 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $(x, y)^T \mapsto (y - 1, -x - 2)^T$,
   (ii) $f_2 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$, $(x, y)^T \mapsto (11833y, 1001x, -4711y - 2x)$,
   (iii) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y)^T \mapsto (x, -x^2y, y - x)^T$,
   (iv) $f_4 : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \mapsto A + A^T$.

b) Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$ linear. Zeigen Sie: Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, so ist sein Bild

$$f(U) := \{f(u) : u \in U\} \subset W$$

ebenfalls ein Untervektorraum.

Hausaufgabe 5.5 (Basisbestimmung)

a) Betrachten Sie den Algorithmus zur Auswahl von Vektoren aus einem Erzeugendensystem, um eine Basis zu erhalten.

   Was passiert, wenn Sie für jede Nicht-Nullzeile in der Zeilenstufenform, statt dieser die zugehörige ursprüngliche Zeile wählen? (Beachten Sie dabei evtl. durchgeführte Zeilenvertauschungen.)

b) Eine Basisergänzung zu einer gegebenen linear unabhängigen Menge von k Vektoren S in einem n-dimesionalen Vektorraum V ist nach Vorlesung immer mit hinreichend vielen Vektoren aus der Standardbasis möglich.

   Sei A die Matrix, die aus den Vektoren von S als Spalten gefolgt von Spalten in der Form der Einheitsmatrix besteht. Betrachten Sie eine Matrix A' in Zeilenstufenform, die durch elementare Zeilenoperationen aus A entstanden ist. Können Sie mit Hilfe von A' eine Basisergänzung für S ablesen? Wenn ja, wie?

Hausaufgabe 5.6 (Basisaustausch 2)
Im $\mathbb{R}^4$ seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$v_1 = (1,0,1,0)^T, v_2 = (0,1,0,1)^T, v_3 = (1,-1,2,1)^T, v_4 = (-1,0,2,0)^T \quad \text{und} \quad v = (3,1,0,1)^T.$$

a) Zeigen Sie, dass $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist und schreiben Sie v als Linearkombination bezüglich dieser Basis.

b) Bestimmen Sie alle $i \in [4]$, sodass $B_i := (B \setminus \{v_i\}) \cup \{v\}$ eine Basis von V ist und schreiben Sie jeweils v_i als Linearkombination bezüglich dieser Basis.

Hausaufgabe 5.7 (Basen von Polynomräumen)
Es sei K ein Körper. Dann ist die Menge $S = \{x^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Basis des Vektorraums $K[x]$ – die Standardbasis. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $g_n := \sum_{i=0}^{n} x^i$ und $T = \{g_n : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Zeigen Sie:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x^n \in \langle T \rangle$.

b) Die Menge T ist eine Basis von $K[x]$.

Hausaufgabe 5.8 (Lineare Abbildungen 2)

a) Bestimmen Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen um lineare Abbildungen handelt:

   (i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, x+1)^T$.

   (ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y)^T \mapsto (x-y, 0, 2x-y)^T$.

   (iii) $f_3 : \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \varphi \mapsto \psi$, wobei $\psi(x) = \varphi(x+1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$ linear. Weiter sei $U \subset W$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie: $f^{-1}(U) := \{v \in V : f(v) \in U\} \subset V$ ist ebenfalls ein Untervektorraum.

Abgabe: bis Mittwoch, 25.5.2016, 11:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Verwenden Sie bei Abgabe das auf der Homepage hochgeladene Deckblatt und geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.