• Für $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $\chi_A = \det\begin{pmatrix}x-1 & -1\\ 0 & x-1\end{pmatrix} = (x-1)^2$

$\Rightarrow$ $\lambda = 1$ ist einziger Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit $m_a(\lambda) = 2$

$x \cdot I_2 - A$

Für die geometrische Vielfachheit betrachte

$A - \lambda I_2 \longrightarrow A - I_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, was Rang 1 hat

$\Rightarrow m_g(\lambda) = 1$

<u>Satz</u> Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert der Matrix $A \in K^{n\times n}$.
Dann gilt:

$$1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)$$

Beweis: • $1 \le m_g(\lambda)$ gilt, denn $E_\lambda \neq \{0\}$, also insbesondere $\dim(E_\lambda) \geq 1$

- Sei $m = m_g(\lambda)$ und wähle Basis $\{v_1, \dots, v_m\}$ von E_λ. Diese können wir zu einer Basis B von $\{v_1, \dots, v_n\}$ von K^n ergänzen. Für $1 \leq i \leq m$ gilt $\varphi_A(v_i) = A \cdot v_i = \lambda \cdot v_i$, also hat die Darstellungsmatrix von φ_A bezüglich B die Form

$$D_B(\varphi_A) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & C \end{array}\right) =: D$$

$C \in K^{(n-m)\times(n-m)}$

Mit $S = (v_1, \dots, v_n) \in GL_n(K)$ gilt $S^{-1} \cdot A \cdot S = D$,

v_i als Spalten

also $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$.

Es folgt $\chi_A = \det(x \cdot I_n - A) = \det(x \cdot I_n - SDS^{-1}) =$

$$= \det\left(S(\underbrace{xI_n - D})S^{-1}\right) = \det(S)\cdot\det(xI_n - D)\cdot \underbrace{\det(S^{-1})}_{=\frac{1}{\det(S)}} =$$

$$= \det(xI_n - D).$$

$\Rightarrow \chi_A = (x-\lambda)^m \cdot \chi_C$ durch die spezielle Form der ersten m Spalten von $xI_n - D$

$\Rightarrow \chi_A$ wird durch $(x-\lambda)^m$ geteilt $\Rightarrow m_a(\lambda) \geq m = m_g(\lambda)$

$\square$

<u>Definition</u> Eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt <u>diagonalisierbar</u>, falls es eine Basis von K^n bestehend aus Eigenvektoren von A gibt.

In anderen Worten: A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Beispiele

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist diagonalisierbar, denn $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis aus Eigenvektoren

  EW $1 \Rightarrow E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

  $-1 \Rightarrow E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad (\chi_A = x^2 + 1)$

  ist nicht diagonalisierbar, denn es fehlen reelle Eigenwerte

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad \chi_A = (x-1)^2 \Rightarrow$ EW 1, $E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

  ist nicht

  $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  diagonalisierbar, denn es fehlen Eigenvektoren

  $m_a(1) = 2 > 1 = m_g(1)$

Die „Probleme" des zweiten und dritten Beispiels sind das Einzige, was Diagonalisierbarkeit verhindern kann.

<u>Satz</u> $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn beide der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) Das charakteristische Polynom χ_A zerfällt in Linearfaktoren, d.h. $\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (x-\lambda_i)^{e_i}$ mit $e_i = m_a(\lambda_i)$

b) Für alle Eigenwerte λ_i gilt $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$.

das ist eine wichtige Bedingung über $\mathbb{R}$!
über $\mathbb{C}$ zerfallen alle Polynome, aber man darf nicht „blind" auf $\mathbb{C}$ arbeiten, da das $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bedeuten würde (auch wenn in A nur Zahlen aus $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ auftauchen)

Beweis in mehreren Schritten, zunächst:

<u>Lemma</u> Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ paarweise verschiedene Eigenwerte einer Matrix $A \in K^{n \times n}$. Weiter seien $v_i \in E_{\lambda_i}$ $\forall i$ mit $v_1 + \dots + v_r = 0$. Dann sind alle $v_i = 0$.

im Prinzip leißt das, dass Eigenvektoren aus verschiedenen Eigenräume linear unabhängig sind

Beweis durch Induktion über die Anzahl der Eigenwerte r:

Induktionsanfang: $r = 1 \Rightarrow v_1 = 0$ sofort

Induktionsschritt von $r-1 \to r$, $r \geq 2$:

Es gilt $$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{r} A \cdot v_i = A\left(\sum_{i=1}^{r} v_i\right) \underset{\text{nach Voraussetzung}}{=} A \cdot 0 = 0$$

Andererseits gilt $\sum_{i=1}^{r} \underset{\text{Eins}}{\lambda_1} v_i = \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{r} v_i\right) = 0$

$\Rightarrow$ Es gibt also zwei Wahlmöglichkeiten für Koeffizienten, so dass sich die v_i (mal diesen Koeffizienten) auf Null aufaddieren.

$\Rightarrow \sum_{i=2}^{r} (\lambda_i - \lambda_1) v_i = 0$

Da $(\lambda_i - \lambda_1) v_i \in E_{\lambda_i}$, folgt nach Induktionsvoraussetzung $(\lambda_i - \lambda_1) v_i = 0$ für $i \in \{2, \dots, r\}$.

ein Index weniger als vorher

Wegen $\lambda_i \neq \lambda_1$ folgt $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$ und daher $v_i = 0$ für $i \in \{2, \dots, r\}$. Nun folgt auch $v_1 = -\underbrace{(v_2 + \dots + v_r)}_{=0} = 0$

$\square$

Beweis des Satzes zur Diagonalisierbarkeit:
Wir zeigen zunächst, dass aus der Diagonalisierbarkeit von A die Eigenschaften A und B folgen:

A diagonalisierbar $\Rightarrow$ A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$. Ähnliche Matrizen haben dieselben charakteristischen Polynome $\Rightarrow \chi_A = \chi_D = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$

hier müssen die a_i nicht unterschiedlich sein $\Rightarrow$ a) gilt

Zudem folgt, dass jedes a_j mit einem Eigenwert λ_i übereinstimmt. Für $i \in \{1, \dots, r\}$ sei e_i die Anzahl der Indizes j mit $a_j = \lambda_i$. Dann folgt $e_i = m_a(\lambda_i)$. Der Eigenraum zum Eigenwert λ_i von D hat Dimension e_i, da ja D eine Diagonalmatrix ist. Wegen Ähnlichkeit von A und D hat auch der Eigenraum zum Eigenwert λ_i von A die Dimension e_i.

$\Rightarrow e_i = m_g(\lambda_i)$ und es folgt b)

Umgekehrt gelten jetzt a) und b). Für $i \in \{1,\dots,r\}$ sei B_i eine Basis des Eigenraums E_{λ_i}. Wir setzen $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$. Es ist klar, dass B aus Eigenvektoren besteht und mit obigem Lemma wissen wir, dass B linear unabhängig ist.

Zudem:

$$|B| = \sum_{i=1}^{r} |B_i| = \sum_{i=1}^{r} m_g(\lambda_i) \overset{b)}{=} \sum_{i=1}^{r} m_a(\lambda_i) \overset{a)}{=} \underset{\text{Grad}}{\deg}(\chi_A) = n$$

$\Rightarrow B$ ist linear unabhängig und hat n Elemente $\Leftrightarrow B$ ist Basis des K^n

$\Rightarrow$ Diagonalisierbarkeit von A. $\square$

Anmerkung: Auch über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sind nicht alle quadratischen Matrizen diagonalisierbar, beispielsweise verletzt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ Eigenschaft b).

und eigentlich ist egal, welchen Körper wir hier wählen

///

bitte per Mail (borgwardt@ma.tum.de) Fragen zur Besprechung in der Klausurvorbereitung, Betreff: [Klausur]

Ausblick:
- Eigenwerte fertig
- Skalarprodukt und Orthogonalität
- Hauptachsentransformation
  - → Anwendung: Hauptkomponentenanalyse
- Anwendung: spektrale Graphentheorie