Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 4

Präsenzaufgabe 4.1 (Untervektorräume)
Es seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Teilmengen jeweils Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ sind. Geben Sie gegebenenfalls auch an, welche Forderung an einen Untervektorraum verletzt ist:

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1\}$.

b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$.

c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 - 2x_2 = 0\}$.

d) $M_4 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdot x_2 = 0\}$.

e) $M_5 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : x_2 = 0\}$.

f) $M_6 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_2 = 0\}$.

g) $M_7 = \mathbb{Z}^n$.

Präsenzaufgabe 4.2 (Zugehörigkeit zum Untervektorraum testen)
Es seien $u_1 := (1, 2, 3)^T$ und $u_2 := (-1, 0, 1)^T$ und $U := \langle u_1, u_2 \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Prüfen Sie, ob $v \in U$ ist für

$$\text{(a)} \quad v = (7, 6, 5)^T \qquad \text{(b)} \quad v = (-2, 0, -1)^T$$

und stellen Sie gegebenenfalls v als Linearkombination von u_1 und u_2 dar.

Präsenzaufgabe 4.3 (Linear unabhängige Vektoren)
Gegeben sind die Vektoren $v_1 := (1, 1, 1)^T, v_2 := (0, 1, 1)^T, v_3 := (1, 0, 1)^T$ und $v_4 := (1, 0, 0)^T$ im $\mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie jeweils, ob die Mengen $A := \{v_1, v_2, v_3\}$ bzw. $B := \{v_1, v_2, v_4\}$ linear unabhängig sind. Geben Sie im Falle der linearen Abhängigkeit wenigstens eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors an.

Präsenzaufgabe 4.4 (Erzeugendensysteme und Basen)

a) Wir betrachten die folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$:

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{und} \qquad V := \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Bestimmen Sie die Dimension von $U + V$ und wählen Sie aus der Menge S der fünf Vektoren, die U bzw. V in der Aufgabenstellung aufspannen eine Basis aus.

b) Nun betrachten wir den Untervektorraum $U = \left\{(a + b + c, -b, a, 2a - c)^T \in \mathbb{R}^4 : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ des $\mathbb{R}^4$. Vergewissern Sie sich, dass U ein Untervektorraum ist und bestimmen Sie ein endliches Erzeugendensystem B von U. Ist Ihre Menge B eine Basis von U?

Bitte wenden!

Hausaufgabe 4.5 (Untervektorräume 2)

a) Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$?

   (i) $M_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = x_3\}$,

   (ii) $M_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \cdot x_2 = x_3\}$,

b) Die Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ Abbildung}\}$ ist mit den in der Vorlesung definierten Verknüpfungen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume dieses Vektorraums?

   (i) $M_1 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1) = 0\}$,

   (ii) $M_2 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(0) = 1\}$,

   (iii) $M_3 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ hat höchstens endlich viele Nullstellen}\}$,

   (iv) $M_4 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \text{ für höchstens endlich viele } x \in \mathbb{R} \text{ ist } f(x) \neq 0\}$,

   (v) $M_5 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ ist beschränkt}\}$.

   Dabei heißt eine Abbildung $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ beschränkt, falls ein $\rho > 0$ existiert, sodass $|f(x)| \leq \rho$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 4.6 (Eine Schar von Untervektorräumen)
Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sei der Untervektorraum $U_a \subset \mathbb{R}^4$ gegeben als die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$x_1 + x_2 + ax_4 = 0.$$

Bestimmen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ den Schnitt $U_a \cap U_b$ der zu a und b gehörigen Untervektorräume und zeigen Sie, dass dieser nicht von der Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ (mit $a \neq b$) abhängt.

Hausaufgabe 4.7 (Test auf Zugehörigkeit zu einem Untervektorraum und Lineare Unabhängigkeit)
Es seien

$$u_1 := (1, 1, -1, -2)^T, u_2 := (2, 1, 0, 3)^T, u_3 := (0, -1, 2, 7)^T, u_4 := (-1, 2-1, 1)^T \in \mathbb{Q}^4$$

und $U := \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle \subset \mathbb{Q}^4$ der von u_1, u_2, u_3, u_4 erzeugte Unterraum von $\mathbb{Q}^4$.

a) Prüfen Sie, ob $v \in U$ ist für

$$\text{(i)} \quad v = (6, -4, 2, -2)^T \qquad \text{(ii)} \quad v = (1, 3, -1, 2)^T$$

   und stellen Sie, falls dies möglich ist, v als Linearkombination von u_1, u_2, u_3, u_4 dar.

b) Ist die Menge $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ linear unabhängig?

Hausaufgabe 4.8 (Basen von Untervektorräumen)

a) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension für

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

. . . Fortsetzung auf der nächsten Seite . . .

b) Es sei L die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Berechnen Sie L. und bestimmen Sie eine Basis B von L.

Abgabe: bis Mittwoch, 18.5.2016, 11:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Verwenden Sie bei Abgabe das auf der Homepage hochgeladene Deckblatt und geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.