Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 3

Präsenzaufgabe 3.1 (Gleichungssystem mit Parameter und das Rangkriterium)
Wir betrachten das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & a \cdot y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{rang}(A)$ und $\operatorname{rang}(A|b)$ der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem, keine bzw. genau eine bzw. unendlich viele Lösungen?.

Lösung zu Aufgabe 3.1

a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\left[\begin{array}{ccr|r} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Diese bringen wir auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{r} \\ II - 2I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{crr|r} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1-2a & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ III \\ II \end{array} \left[\begin{array}{crr|r} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-2a & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III + (2a-1)II \end{array} \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2a+1 & 4a-4 \end{array}\right]$$

Nun unterscheiden wir die beiden Fälle $2a+1 \neq 0$ (also $a \neq -\frac{1}{2}$) und $2a+1 = 0$ (also $a = -\frac{1}{2}$):

1.Fall „$2a+1 \neq 0$“: Dann gilt also $\operatorname{rang}(A) = 3$, was bei 3 Zeilen der maximal mögliche Rang ist, und daher auch $\operatorname{rang}(A|b) = 3$.

2.Fall „$2a+1 = 0$“: Dann gilt $\operatorname{rang}(A) = 2$, aber wegen $4a-4 = -6$ ist $\operatorname{rang}(A|b) = 3$.

b) Für $a \neq -\frac{1}{2}$ ist $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$ gleich der Anzahl der Variablen. Also existiert eine eindeutige Lösung des LGS.

Für $a = -\frac{1}{2}$ ist $\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(A|b)$, was bedeutet, dass das LGS keine Lösung besitzt.

Präsenzaufgabe 3.2 (Interpolation)
Zur Modellierung der Form eines Objektes (z.B. Kontur eines Sattels, einer Motorhaube oder einer ergodynamischen Computermaus) beschreibt man die Kontur durch eine von Parametern abhängige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Stellt man an f gewisse Forderungen (z.B. vorgegebene Punkte oder Krümmungseigenschaften) erhält man ein Gleichungssystem für die Parameter, welches oftmals linear ist.

Wir untersuchen hier den Fall, dass die Kontur durch ein Polynom vom Grad ≤ 3 angenähert werden soll:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Dabei sind also $a_0, \dots, a_3$ die (zu bestimmenden) Parameter der Funktion f. Die Bedingungen an f sind

$$f(1) = 1, f(-1) = -3 \text{ und } f(2) = 3.$$

a) Zeigen Sie, dass die Bedingungen an f ein lineares Gleichungssystem für die Paramter $a_0, \dots, a_3$ ergeben, und lösen Sie dieses. Welche Polynome f erfüllen also die gegebenen Bedingungen?

b) Nun wird noch die Zusatzbedingung $f'(0) = 1$ gefordert. Welches Polynom f ergibt sich?

Lösung zu Aufgabe 3.2

a)

$$\begin{aligned} f(1) = 1 &\Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ f(-1) = -3 &\Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -3 \\ f(2) = 3 &\Leftrightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 3 \end{aligned}$$

Wir erhalten also ein LGS mit folgender erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 3 \end{array}\right]$$

Diese bringen wir auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{r} \\ II - I \\ III - I \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ III \\ II + 2III \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} I - III/6 \\ II - 3(III/6) \\ III/6 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} I - II \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Da also $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b) = 3$ gilt, haben wir bei 4 Variablen eine freie Variable – sagen wir $a_3 = a$. Dann folgt $a_0 = -1 + 2a$, $a_1 = 2 - a$ und $a_2 = -2a$. Jede Funktion f der Form $f(x) = (-1 + 2a) + (2 - a)x - 2ax^2 + ax^3$, $a \in \mathbb{R}$ erfüllt also die gestellten Bedingungen.

b) Die zusätzliche Bedingung $f'(0) = 1$ bedeutet, dass $a_1 = 1$ gelten muss. Wegen $a_1 = 2 - a$ folgt daher $a = 1$ und damit eindeutig $f(x) = 1 + x - 2x^2 + x^3$.

Präsenzaufgabe 3.3 („Fast" ein Vektorraum)
Wir betrachten die Menge $V = \mathbb{R}^2$ mit der üblichen Addition $+$ als additiver Verknüpfung, aber der „Skalarmultiplikation" $* : \mathbb{R} \times V \to V$ gegeben durch

$$a * (x, y)^T := (ax, |a|y)^T \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}, \text{ und } (x, y)^T \in V.$$

Zeigen Sie: V zusammen mit $+$ und $*$ erfüllt bis auf eine Ausnahme (welche?) alle Forderungen, die an einen Vektorraum gestellt werden.

Lösung zu Aufgabe 3.3
Wir erörtern die einzelnen Vektorraumgesetze:

- $(V, +)$ ist natürlich eine abelsche Gruppe, da es sich ja um die übliche Addition handelt.
- Das Distributivgesetz bezüglich der Multiplikation mit einem Skalar gilt auch:

$$\begin{aligned} a * \Big((x_1, y_1)^T + (x_2, y_2)^T\Big) &= a * (x_1 + x_2, y_1 + y_2)^T = (a(x_1 + x_2), |a|(y_1 + y_2)^T \\ &= (ax_1 + ax_2, |a|y_1 + |a|y_2)^T = (ax_1, |a|y_1)^T + (ax_2, |a|y_2)^T \\ &= a * (x_1, y_1)^T + a * (x_2, y_2)^T. \end{aligned}$$

- Das Assoziativgesetz bezüglich der Multiplikation mit mehreren Skalaren gilt ebenfalls: $(ab) * (x, y)^T = ((ab)x, |ab|y)^T = (a(bx), |a|(|b|y))^T = a * (bx, |b|y)^T = a * \Big(b * (x, y)^T\Big)$.
- Die Multiplikation mit dem Skalar 1 ist neutral: $1 * (x, y)^T = (1x, |1|y)^T = (x, y)^T$.
- Das Distributivgesetz bezüglich der Multiplikation mit einer Summe von zwei Skalaren ist allerdings verletzt: $(a + b) * (x, y)^T = ((a + b)x, |a + b|y)^T$ und $a * (x, y)^T + b * (x, y)^T = \Big((ax, |a|y)^T + (bx, |b|y)^T\Big) = ((a + b)x, (|a| + |b|)y)^T$. Die notwendige Gleichheit der beiden Terme gilt nur, wenn $|a + b| = |a| + |b|$ gilt, was wiederum nur erfüllt ist, wenn a und b das selbe Vorzeichen besitzen. Z.B.ist aber $|-3 + 4| = 1 \neq 7 = |-3| + |4|$.

Präsenzaufgabe 3.4 (Linearkombination)
Schreiben Sie den Vektor $(1, 2, 3)^T$ als Linearkombination der Vektoren $(1, 1, 0)^T$, $(0, 1, 1)^T$, $(1, 0, 1)^T$.

Lösung zu Aufgabe 3.4
Wir setzen allgemein mit a, b, c als Koeffizienten für die Linearkombination an:

$$\begin{aligned} & a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow a + c = 1 \quad \wedge \quad a + b = 2 \quad \wedge \quad b + c = 3 \\ & \Rightarrow a = 0 \quad \wedge \quad b = 2 \quad \wedge \quad c = 1 \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hausaufgabe 3.5 (Zwei Gleichungen, zwei Variablen, ganz allgemein)

a) Es seien $a, b, c, d, r, s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & r \\ cx & + & dy & = & s \end{array}$$

im Fall $D := ad - bc \neq 0$ eindeutig lösbar ist. Geben Sie die eindeutig bestimmte Lösung an.

Hinweis: Aus $D \neq 0$ folgt $a \neq 0$ oder $c \neq 0$. Unterscheiden Sie nach diesen beiden Fällen und wenden Sie jeweils elementare Zeilenumformungen an.

b) Es sei $m \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von m die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccc} -2x & + & 3y & = & 2m \\ x & - & 5y & = & -11 \end{array} \quad .$$

Lösung zu Aufgabe 3.5

a) Das Gleichungssystem aus der Aufgabenstellung hat als erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & r \\ c & d & s \end{array}\right] \tag{1}$$

Da nach Voraussetzung $D = ad - bc \neq 0$ gilt, ist $a \neq 0$ oder $c \neq 0$.

1. Fall: $a \neq 0$. Wir formen (1) mithilfe von elementaren Zeilenumformungen um: Dazu addieren wir das $-\frac{c}{a}$–fache der ersten zur zweiten Zeile, multiplizieren dann die zweite Zeile mit $\frac{a}{D}$, addieren dann das $-b$–fache der zweiten Zeile zur ersten, multiplizieren dann die erste Zeile mit $\frac{1}{a}$ und erhalten:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{rd-bs}{D} \\ 0 & 1 & \frac{as-rc}{D} \end{array}\right]$$

Also besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung, nämlich $\left(\frac{rd-bs}{D}, \frac{as-rc}{D}\right)^T$.

2. Fall: $c \neq 0$. Eine zum 1. Fall analoge Rechnung zeigt, dass das Gleichungssystem auch in diesem Fall genau eine Lösung besitzt, nämlich $\left(\frac{rd-bs}{D}, \frac{as-rc}{D}\right)^T$.

Insgesamt ist damit bewiesen: Das Gleichungssystem aus der Aufgabenstellung besitzt für $ad - bc \neq 0$ genau eine Lösung:

$$\left(\frac{rd - bs}{D}, \frac{as - rc}{D}\right).$$

b) Nach (a) ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und Einsetzen in die Formel aus (a) liefert die Lösung: $(\frac{-10m+33}{7}, \frac{22-2m}{7})$.

Hausaufgabe 3.6 (Produktionsplanung)
Von einem Motorenwerk werden u.a. Bolzen, Gelenke, Kurbelwellen und Lager hergestellt, die als Ersatzteile verkauft werden. In einem Monat sollen 5000 Bolzen, 2000 Gelenke, 1000 Kurbelwellen und 2500 Lager geliefert werden. Bei der Herstellung eines Gelenks verbraucht man zwei Bolzen und bei der Herstellung einer Kurbelwelle zwei Gelenke, drei (zusätzliche) Bolzen und vier Lager.

Wieviel Stück Bolzen, Gelenke, Kurbelwellen und Lager müssen monatlich insgesamt produziert werden, um den internen und externen Bedarf zu decken?

Lösung zu Aufgabe 3.6
Es sei B die Anzahl der Bolzen, G die Anzahl der Gelenke, K die Anzahl der Kurbelwellen und L die Anzahl der Lager, die monatlich produziert werden müssen, um den internen und externen Bedarf zu decken. Wir listen den internen und externen Bedarf in einer Tabelle auf:

	interner Bedarf	externer Bedarf
Bolzen	$2 \cdot G + 3 \cdot K$	5000
Gelenke	$2 \cdot K$	2000
Kurbelwellen	0	1000
Lager	$4 \cdot K$	2500

Das ergibt das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} B &= 5000 + 2 \cdot G + 3 \cdot K \\ G &= 2000 + 2 \cdot K \\ K &= 1000 \\ L &= 2500 + 4 \cdot K \end{aligned}$$

Äquivalent hierzu:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} B & - & 2G & - & 3K & & & = & 5000 \\ & & G & - & 2K & & & = & 2000 \\ & & & & K & & & = & 1000 \\ & & & - & 4K & + & L & = & 2500 \end{array}$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -3 & 0 & 5000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2500 \end{array}\right]$$

Der Gauß-Algorithmus liefert:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 16000 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4000 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6500 \end{array}\right]$$

Es müssen also monatlich 16000 Bolzen, 4000 Gelenke, 1000 Kurbelwellen und 6500 Lager produziert werden, um den monatlichen internen und externen Bedarf zu decken.

Hausaufgabe 3.7 (Symmetrische Matrizen als Vektorraum)
Wir betrachten die Menge

$$\mathrm{Sym}(n, K) := \{A \in K^{n\times n} : A^T = A\}$$

der symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen über einem Körper K. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}(n, K)$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum bildet.

Lösung zu Aufgabe 3.7
Je nachdem was man bereits an „Vorwissen“ hineinnstecken will, gibt es hierzu eine kurze und ein lange Lösung:

1. Die kurze Lösung: Wir stecken bereits an Wissen rein, dass $K^{n\times n}$ mit der üblichen Skalarmultiplikation ein Vektorraum ist Dann ist nur noch zu zeigen, dass die Teilmenge $\mathrm{Sym}(n, K) \subset K^{n\times n}$ ein Untervektorraum ist, wofür nur die drei „Unterraum“-Bedingungen zu prüfen sind:

- $\mathrm{Sym}(n, K) \neq \emptyset$, denn es ist zum Beispiel $0 \in \mathrm{Sym}(n, K)$, da $0^T = 0$ gilt.
- Sind $A, B \in \mathrm{Sym}(n, K)$, so ist auch $A + B \in \mathrm{Sym}(n, K)$, denn

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B.$$

- Ist $A \in \mathrm{Sym}(n, K)$ und $a \in K$, so ist auch $aA \in \mathrm{Sym}(n, K)$, da

$$(aA)^T = a \cdot A^T = aA.$$

Damit ist $\mathrm{Sym}(n, K)$ als Untervektorraum selbt ein Vektorraum.

2. Die lange Lösung: Zunächst sind dieselben drei Eigenschaften wie in der ersten Lösung zu prüfen. Dies stellt sicher, dass die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ nicht aus der Menge $\mathrm{Sym}(n, K)$ hinausführen (sogenannte „Wohldefiniertheit“). Danach sind aber noch die Rechenregeln(=Axiome) für Vektorräume zu prüfen. Seien dazu jeweils $a, b \in K$ und $A, B \in \mathrm{Sym}(n, K)$).

- $\mathrm{Sym}(n, K)$ ist mit $+$ eine abelsche Gruppe,
- es gelten die beiden „Distributivgesetze“,

$$a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B \quad \text{und} \quad (a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A.$$

- es gilt das „Assoziativgesetz“ für die Skalarmultiplikation

$$(a \cdot b) \cdot A = a \cdot (b \cdot A)$$

  und

- die Multiplikation mit 1 ist „neutral“
$$1 \cdot A = A.$$

Alle diese Regeln gelten aber aufgrund der Rechenregeln für Matrizen.

Hausaufgabe 3.8 (Linearkombination von Polynomen)
Stellen Sie (falls möglich) jeweils das Polynom p_0 als Linearkombination der Polynome $p_1, \ldots p_4$ dar:

a $p_0(x) = x^3$, $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 + x$, $p_3(x) = 1 - x + x^2$, $p_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

b $p_0(z) = z^3 + 2z^2 + z + 1$, $p_1(z) = z^2 + z$, $p_2(z) = 1 - z$, $p_3(z) = z^3 - 2z$, $p_4(z) = 1 + z + z^3$.

Lösung zu Aufgabe 3.8

a) Wir setzen allgemein an: $p_0 = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in [4]$. Dann erhalten wir ein Gleichungssystem über die verschiedenen Exponenten:
$$\begin{aligned} x^3 &: 1 = a_4 \\ x^2 &: 0 = a_3 + a_4 \\ x^1 &: 0 = a_2 - a_3 + a_4 \\ x^0 &: 0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{aligned}$$
Durch Rückwärtseinsetzen erkennen wir sofort, dass $a_4 = 1$, $a_3 = -1$, $a_2 = -2$ und $a_1 = 2$ und damit, dass $p_0(x) = x^3 = 2-2(1+x)-(1-x+x^2)+(1+x+x^2+x^3) = 2p_1(x)-2p_2(x)-p_3(x)+p_4(x)$

b) wir setzen wieder allgemein an: $p_0(z)z^3 + 2z^2 + z + 1 = a_1(z^2 + z) + a_2(1 - z) + a_3(z^3 - 2z) + a_4(1 + z + z^3) = (a_3 + a_4)z^3 + a_1z^2 + (a_1 - a_2 - 2a_3 + a_4)z + (a_2 + a_4)$

Durch Koeffizientenvergleich folgt dann: $a_3 + a_4 = 1$, $a_1 = 2$, $a_1 - a_2 - 2a_3 + a_4 = 1$ und $a_2 + a_4 = 1$. Es gilt also $a_1 = 2$ und $a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{2}$.