Beispiele • Basen B und B' von Vektorraum V

Vektor $v \in V$

$$v = B \cdot a_B \quad , \quad v = B' \cdot a_{B'}$$

Koeffizienten von v bezüglich B bzw. B'

B, B' sind invertierbar

$$\Rightarrow \quad a_{B'} = \left((B')^{-1} \cdot B \right) a_B$$

allgemeine Formel

im früheren Beispiel war $\underline{B = I_n}$

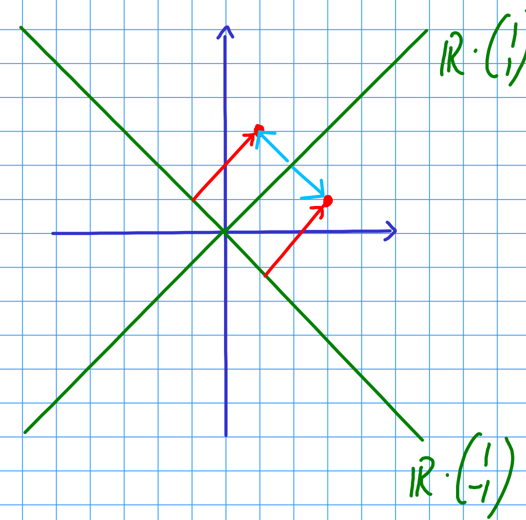
$$\Rightarrow \quad a_B = \left(\underbrace{B^{-1}}_{= I_n} \cdot B' \right) a_{B'} = B' \cdot a_{B'}$$

häufiger Spezialfall

$$a_{B'} = \left((B')^{-1} \cdot \underbrace{B}_{= I_n} \right) a_B = (B')^{-1} \cdot a_B$$

• $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi : V \to V$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$,

Basen $B = \{e_1, e_2\}$, $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$



$\Rightarrow$ $D_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$D_B(\varphi)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$S = S_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $D_{B'}(\varphi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

andere Darstellung von φ durch $D_{B'}(\varphi)$ als vorher:

halte Komponente 1 fest, flippe das Vorzeichen der zweiten

$\Rightarrow$ allgemein: Basiswechsel erlauben schönere = einfachere Darstellungen von Abbildungen. Wichtig in der Datenanalyse und bei der Visualisierung

9 Determinanten

Permutationen

Definition Für $n \in \mathbb{N}$ ist die <u>symmetrische Gruppe</u> definiert als
$S_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \mid \sigma \text{ ist bijektiv}\}$.
Die Elemente von S_n heißen <u>Permutationen</u>.
Die Verknüpfung (für die Gruppe) ist die Komposition.

Für $\sigma \in S_n$ definiert man

- $w(\sigma)$ als die Anzahl der Paare $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ mit $1 \leq i < j \leq n$, aber $\sigma(i) > \sigma(j)$

  sogenannte „Fehlstellen"

- $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{w(\sigma)}$ das Vorzeichen (Signum) von σ,
  Anzahl der Fehlstellen gerade $\Rightarrow$ Signum gerade, und umgekehrt

Beispiele

- Die Identität $\mathrm{id} \in S_n$ hat keine Fehlstellen $\Rightarrow \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = (-1)^0 = 1$
- Sei $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(i) = i$ sonst

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \sigma \downarrow & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

  Dann ist $(1,2)$ die einzige Fehlstelle von σ $\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^1 = -1$

- Seien $1 \leq i < j \leq n$ und $\sigma \in S_n$ vertausche i und j und halte alle anderen Elemente fest, d.h. $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$, $\sigma(l) = l$ sonst.
  Dann heißt σ <u>Transposition</u>. Die Anzahl der Fehlstellen ist
  $w(\sigma) = 2(j-i) - 1$, also
  $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ unabhängig
  von i und j.

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \sigma \downarrow & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 \end{array}$$

Proposition Für $\sigma, \tau \in S_n$ gilt $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$.

Determinante Sei $A=(a_{ij}) \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix.

Die Determinante von A ist

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} .$$

Beispiele

- Für $n=1$ ist $A=(a)$ und $\det(A)=a$, denn $S_1=\{id\}$
- Für $n=2$ ist $S_n=\{id,\sigma\}$ mit $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=1$

$$\Rightarrow \det(A) = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}a_{21}$$

S_n hat $n!$ Elemente

- Für $n=3$ besteht S_n aus

sgn 1 • Identität

sgn −1 • drei Transpositionen

sgn 1 • zwei „zyklische Permutationen"

$1 \to 2 \to 3 \to 1$

$\sigma(1)=2$ $\sigma(2)=3$ $\sigma(3)=1$

laufen durch alle Elemente

$1 \to 3 \to 2 \to 1$

$\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\end{matrix} \Rightarrow \operatorname{sgn} 1$

$\begin{matrix}1&2&3\\3&1&2\end{matrix} \Rightarrow \operatorname{sgn} 1$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \overset{\text{id}}{a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}} + \overset{\text{zykl. I}}{a_{12}a_{23}a_{31}} + \overset{\text{zykl. II}}{a_{13}a_{21}a_{32}}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Transpositionen

Regel von Sarrus (in Dimension 3)

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \quad \begin{array}{cc} + & \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ - & \end{array}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : \quad \begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

speziele Formeln nur für Dimension 2 und 3

Eigenschaften der Determinante

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$

- $\det(A) = \det(A^T)$

Begründung: $\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)} =$

$\tilde{\jmath} = \sigma^{-1}$

$$= \sum_{\tilde{\jmath} \in S_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(\tilde{\jmath}^{-1})}_{=\operatorname{sgn}(\tilde{\jmath})} \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j\tilde{\jmath}(j)} = \det(A)$$

$\operatorname{sgn}(\tilde{\jmath})$, denn $\operatorname{sgn}(\tilde{\jmath}) \cdot \operatorname{sgn}(\tilde{\jmath}^{-1}) = \operatorname{sgn}(\tilde{\jmath} \circ \tilde{\jmath}^{-1}) = \operatorname{sgn}(id) = 1$

- Sei $\sigma \in S_n$. Sei $B = (b_{ij}) \in K^{n \times n}$ mit $b_{ij} = a_{i\sigma(j)}$ und $C = (c_{ij}) \in K^{n \times n}$ mit $c_{ij} = a_{\sigma(i)j}$.

B geht aus A durch Permutation der Spalten hervor.

C geht aus A durch Permutation der Zeilen hervor.

Dann gilt:

$$\det(B) = \det(C) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \det(A)$$