Wiederholung:

Basen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ für K^n

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot c_i \quad \in K^n$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ Koeffizientenvektoren

$$\Leftrightarrow \quad v = Bx = Cy$$

$$\Rightarrow \quad x = \underbrace{(B^{-1}C)}_{S_{B,C}} y$$

$$y = \underbrace{(C^{-1}B)}_{= S_{C,B} = S_{B,C}^{-1}} x$$

$S_{B,C}$ kann man benutzen, um aus einem Koeffizientenvektor in C einen Koeff.vektor in B zu machen

$\Rightarrow$ Basiswechselmatrix von C nach B

$$D_C(\varphi) = S_{B,C}^{-1}\, D_B(\varphi) \cdot S_{B,C}$$ $\Rightarrow$ Basiswechselmatrix von B nach C

$\Rightarrow$ zwei Sprechweisen für das selbe Objekt, besser den Teil „von … nach …“ nicht benutzen

unsere Schreibweise hat einen schönen Vorteil:

$$S_{A,B} \cdot S_{B,C} = S_{A,C}$$

$S_{B,C} \cdot x$ in Formel $\Rightarrow$ x ist in Basis C

in der Literatur gibt es mehrere verschiedene Schreibweisen

Es gilt aber folgende Aussage für algebraisch abgeschlossene Körper:

Satz Sei K algebraisch abgeschlossen und $A \in K^{n\times n}$.
Dann ist A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ mit $S \in GL_n(K)$. Es gilt $\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$

Beweis durch Induktion nach n:

Für $n = 1$ ist $A = (\lambda_1)$, also gilt die Behauptung.

Sei nun $n \geq 2$.

Nach Voraussetzung hat χ_A eine Nullstelle $\lambda_1 \in K$, also ist λ_1 ein Eigenwert. Wir nehmen einen Eigenvektor v_1 zu λ_1 und ergänzen zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von K^n.

Wir bilden die Matrix $S = (v_1, \dots, v_n) \in GL_n(K)$ mit den v_i als Spalten. Da v_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 ist, folgt

$$S^{-1}AS = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$$ mit $B \in K^{(n-1)\times(n-1)}$.

Nach Induktion gibt es $T \in GL_{n-1}(K)$, so dass $T^{-1}BT = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{pmatrix}^{-1} \cdot S^{-1}AS \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & T^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * & \\ 0 & \lambda_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix

$\Rightarrow$ Rest der Aussage folgt, da ähnliche Matrizen identische charakteristische Polynome haben $\square$

Bemerkung: Wir haben eben nur benutzt, dass das charakteristische Polynom zerfällt (was durch die algebraische Abgeschlossenheit garantiert war). Es gilt aber allgemeiner, dass <u>jede</u> quadratische Matrix, deren charakteristisches Polynom zerfällt, ähnlich zu einer oberen/unteren Dreiecksmatrix ist.

In dieser Darstellung ist die Reihenfolge der λ_i beliebig.

Es gilt eine noch stärkere Aussage (ohne Beweis):

Jede quadratische Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, ist ähnlich zu einer sogenannten Jordan-Matrix

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix} \quad \text{mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in K^{k_i \times k_i}, \text{ für } k_i = 1 \text{ ist } J_i = (\lambda_i)$$

Jordan - Normalform

11 Skalarprodukt und Orthogonalität

Definition Für $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ ist

$$\langle v, w \rangle = \underline{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i} = v^T w \quad \in K$$

nicht das Erzeugnis!

das Skalarprodukt von v und w.

Vektoren v, w heißen senkrecht (orthogonal) zueinander, falls $\langle v, w \rangle = 0$.

Für einen Unterraum $U \subseteq K^n$ ist $U^\perp = \{v \in K^n \mid \langle u, v \rangle = 0 \;\; \forall u \in U\}$

orthogonales Komplement

$V = \mathbb{R}^n \Rightarrow$ intuitiv, euklidische Geometrie

$V = \mathbb{C}^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ ist auf sich selbst senkrecht

Eigenschaften des Skalarprodukts

$u, v, w \in K^n, \; a \in K$

a)
$$\left.\begin{array}{l} \bullet \;\; \langle u, v + a \cdot w \rangle = \langle u, v \rangle + a \cdot \langle u, w \rangle \\ \bullet \;\; \langle u + a \cdot v, w \rangle = \langle u, w \rangle + a \cdot \langle v, w \rangle \end{array}\right\} \text{bilinear}$$

folgt aus den Rechenregeln der Matrix-multiplikation

b) $\bullet \;\; \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

c) $\bullet \;\; (K^n)^\perp = \{0\}$ <u>nur</u> der Nullvektor ist zu allem senkrecht ab jetzt $K = \mathbb{R}$

$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \langle v,v \rangle \geq 0$

Definition Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $|v| = \sqrt{\langle v,v \rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Länge von v.

euklidische Länge

Eigenschaften der Länge

$v, w \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$

- $|v+w| \leq |v| + |w|$ Dreiecksungleichung
- $|av| = |a| \cdot |v|$ Betrag der Zahl
- $v \neq 0 \Rightarrow |v| > 0$
- $|\langle v,w \rangle| \leq |v| \cdot |w|$

mit „=" genau dann, wenn v und w positive Vielfache voneinander sind

Orthonormalität

Definition Eine Menge $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt Orthonormalsystem, falls v_i und v_j für $i \neq j$ orthogonal sind und $|v_i| = 1 \ \forall i$.

orthogonal normiert

Formal: $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ mit $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Kronecker-Symbol/Delta

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ die Matrix mit den v_i als Spalten ist, dann hat man

$$S \text{ Orthonormalsystem} \iff \underset{k\times n}{A^T} \underset{n\times k}{A} = I_k.$$

<u>Beispiele</u>

- Die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist Orthonormalsystem.
- Die Vektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ bilden ein Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^3$.

Begründung: • $|v_1| = \sqrt{\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+0+1)} = \sqrt{1} = 1$

$|v_2| = 1$ analog

• $v_1^T v_2 = \langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+0-1) = 0$

Satz Orthonormalsysteme in $\mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig.

Beweis: Sei $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ein Orthonormalsystem und sei

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = 0 \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{R}.$$

Für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ folgt durch Skalarprodukt mit v_j:

$$0 = \langle v_j, 0 \rangle = \langle v_j, \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \langle v_j, v_i \rangle = a_j$$

$\Rightarrow$ Das zeigt die lineare Unabhängigkeit. $\square$