Satz Die Potenzmenge $P(X)$ hat eine größere Mächtigkeit als X.

Beweis: ...

Angenommen es gäbe eine bijektive Abbildung f von X nach $P(X)$.

Beobachtung: $\forall x \in X$ ist $f(x)$ eine Teilmenge von X. Für manche $x \in X$ gilt $x \in f(x)$, für die anderen $x \notin f(x)$.

Betrachte $U = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Es gilt $U \subset X$, d.h. $U \in P(X)$.

Da f bijektiv, gibt es ein $u \in X$ mit $f(u) = U$. Für u gilt nun $u \in U$ oder $u \notin U$.

Ist $u \in U$, so muss $u \notin f(u) = U$ - ein Widerspruch. Ist $u \notin U$, dann heißt das wegen $U = f(u)$ auch $u \notin f(u)$. $\Rightarrow u \in U$ - ein Widerspruch.

$\Rightarrow$ Die Annahme, dass es eine bijektive Abbildung $f: X \to P(X)$ gibt, ist falsch. $\square$

Eine endliche Menge X mit n Elementen hat genau 2^n Teilmengen, d.h. die Potenzmenge $P(X)$ hat 2^n Elemente.

Begründung: Für jede Teilmenge X' von X gilt $x \in X'$ oder $x \notin X'$ $\forall x$.

$\Rightarrow 2$ Möglichkeiten für jedes $x \in X$

$\Rightarrow \underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\text{-mal}} = 2^n$ Teilmengen

1.5 Körper

Ein Körper ist eine Menge K mit zwei Abbildungen $+$ und $\cdot$, die $(x,y) \in K^2$ ein $x+y \in K$ bzw. $x \cdot y \in K$ zuordnen. Zudem müssen die Abbildungen 3 Arten von Gesetzen für alle $x, y, z \in K$ erfüllen.

Gesetze der Addition

- Assoziativität $(x+y)+z = x+(y+z)$
- Existenz und Eindeutigkeit des neutralen Elements
  $$\exists!\, 0 \in K : 0 + x = x \; (= x + 0)$$
- Existenz und Eindeutigkeit inverser Elemente
  $$\forall x \in K : \exists!\, -x : x + (-x) = 0 = (-x) + x$$
- Kommutativität $x+y = y+x$

„abelsche Gruppe“
hat diese Eigenschaften

Gesetze der Multiplikation

- Assoziativität $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- Existenz und Eindeutigkeit des neutralen Elements
  $$\exists!\, 1 \in K : 1 \cdot x = x \; (= x \cdot 1)$$

- Existenz und Eigenschaften inverser Elemente

$$\forall \underline{x \neq 0} \in K \ \exists! \, x^{-1} : x \cdot x^{-1} = 1 \ (= x^{-1} \cdot x)$$

- Kommutativität $\quad x \cdot y = y \cdot x$ „kommutativer Körper"

<u>Distributivgesetz</u> $\quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ Punkt vor Strich!

Implikationen dieser Gesetze: Eigenschaften der Null

- $\forall x \in K: \quad x \cdot 0 = 0$, denn

$$x \cdot 0 + \underline{0} = x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + \underline{x \cdot 0}$$

- $\forall x, y \in K : \underline{x \neq 0, y \neq 0} \ : \quad x \cdot y \neq 0$, denn

für $x \cdot y = 0$ gilt $\quad y = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = x^{-1}(x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0 = \underline{0}$

Achtung! Beim Test ob eine Menge K mit zwei Abbildungen $+$ und $\cdot$ ein Körper ist, muss man auch zeigen, dass $+$ und $\cdot$ abgeschlossen sind, d.h. $+: K \times K \to K$, $\cdot: K \times K \to K$.

Beispiele für Körper

- reelle Zahlen
- rationale Zahlen

jeweils mit den üblichen $+$ und $\cdot$

- $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ mit n Primzahl

„normal", wie in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$

  - $+_n$ definiert durch $a +_n b = (a+b) \bmod n$
  - $\cdot_n$ definiert durch $a \cdot_n b = (a \cdot b) \bmod n$

ist ein Körper.

ganzzahliger Rest bei Division durch n, z.B. $2 \cdot 3 \bmod 5 = 1$

Division mit Rest

Seien $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}_0$ mit

$$a = \underbrace{q}_{\text{Quotient}} \cdot b + \underbrace{r}_{\text{Rest}} \quad \text{und} \quad 0 \leq r < b.$$

r: Rest der Division von a durch b. formal: $r = a \bmod b$.

2 Matrizen

Matrizen sind der grundlegende „Landwerkliche" Datentyp der Linearen Algebra.

Definitionen: K sei im Folgenden immer ein Körper

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine <u>$m \times n$-Matrix</u> A ist eine Abbildung $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to K$, wobei das Bild von (i, j) mit a_{ij} bezeichnet wird.

Schreibweise:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{i \leq m,\, j \leq n} = (a_{ij})_{ij} = (a_{ij})$$

wenn m und n aus Kontext klar

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen wird mit $K^{m \times n}$ bezeichnet.

Eine $1 \times n$-Matrix $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^{1\times n}$ ist ein Zeilenvektor.

Eine $m \times 1$-Matrix $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in K^{m\times 1}$ ist ein Spaltenvektor.

Das Arbeiten mit Spaltenvektoren ist Standard, daher benutzen wir $K^m = K^{m\times 1}$ für den m-dimensionalen Standardraum und nennen Spaltenvektoren auch einfach nur Vektoren.

Für $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ ist $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in K^{1\times n}$ die i-te Zeile und $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in K^m$ die j-te Spalte.

Eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit $m = n$ heißt quadratisch.

Für $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ ist $A^T = (a_{ji}) \in K^{n\times m}$ die transponierte Matrix.

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ „normale" Indizierung

Eine quadratische Matrix mit $A^T = A$, d.h. $a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j$ heißt <u>symmetrisch</u>.

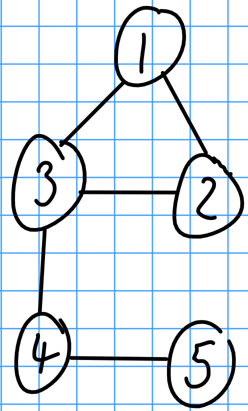
<u>Beispiele</u>

- $\mathbb{R}^2 = \left\{ \binom{x}{y} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$ lässt sich als die Anschauungsebene interpretieren.
- Sind $S_1, \dots, S_n$ Städte und d_{ij} die Entfernung zwischen S_i und S_j, dann ist $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die <u>Distanzmatrix</u>. In den meisten Anwendungen sind Distanzmatrizen symmetrisch.
- Gegeben sei ein $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \dots, n\}$

  Sei $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{i,j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

  Dann ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}_2^{n \times n}$ die <u>Adjazenzmatrix</u> von G.

z.B.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für ungerichtete Graphen sind Adjazenzmatrizen symmetrisch

Matrizen sind ein effizientes Format zum Speichern von Daten