Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

**Lineare Algebra für Informatik (MA0901)**

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

# Aufgabenblatt 2

**Präsenzaufgabe 2.1** (Transponierte Matrizen und Symmetrie)
Es seien $K$ ein Körper, $m, n, l \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times l}$. Dann ist die Produktmatrix $AB$ und damit auch ihre Transponierte $(AB)^T$ wohldefiniert.

a) Wieviele Zeilen und Spalten haben die Matrizen $AB$, $A^T$, $B^T$ und $(AB)^T$?

b) Welchen Zusammenhang vermuten Sie zwischen $(AB)^T$ und den Matrizen $A^T$, $B^T$?

c) Verifizieren Sie ihre Vermutung für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

**Präsenzaufgabe 2.2** (Symbolisch Rechnen mit Matrizen)
Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Multiplizeren Sie $(A + B)^2 = (A + B)(A + B)$ aus, und geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an, wann die „binomische Formel“ $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ gilt.

**Präsenzaufgabe 2.3** (Kommunikationsnetzwerk)
Vier Computer sollen zu einem kleinen Netzwerk verbunden werden. Welcher Rechner mit welchem direkt verbunden ist stellen wir in einer *Kommunikationsmatrix* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ dar, wobei

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls eine direkte Verbindung von Computer } i \text{ zu Computer } j \text{ besteht } (i \neq j), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im vorliegenden Fall lautet die Kommunikationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Veranschaulichen Sie sich das Netzwerk mithilfe eines gerichteten Graphen.

b) Berechnen Sie $A^2$ und $A^3$. Welche Bedeutung haben diese Matrizen für das Netzwerk?

c) Was ist der kleinste Wert von $m$, sodass die Matrix $A + A^2 + \ldots + A^m$ außerhalb der Hauptdiagonalen nur von Null verschiedene Einträge hat? Welche Bedeutung hat diese Zahl $m$ für das Netzwerk?

**Präsenzaufgabe 2.4** (Lineare Gleichungssysteme)
Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} x + 4y &= 2 \\ 3x + 5y &= 7 \end{aligned} \qquad \text{(b)}\quad \begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3x + 6y &= 3 \\ 2x + 4y &= 2 \end{aligned} \qquad \text{(c)}\quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 4y + 6z &= 10 \end{aligned}$$

**Bitte wenden!**

**Hausaufgabe 2.5** (Symbolisch Rechnen mit Matrizen)
Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Multiplizieren Sie $(A + B)(A - B)$ aus, und geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an, wann die „binomische Formel“ $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ gilt.

b) Es seien $A$ und $B$ symmetrisch. Zeigen Sie: mithilfe der Formel $(AB)^T = B^T A^T$, dass $AB$ genau dann symmetrisch ist, wenn $AB = BA$ gilt.

**Hausaufgabe 2.6** (Soziale Netzwerke)
Die Informatikstudierenden Peter, Franz, Lisa, Anna, und Sepp sind bei dem sozialen Netzwerk `Freundbuch.de` angemeldet. Bei Freundbuch kann jeder Benutzer jeden anderen in seine `Friendlist` aufnehmen, was aber nicht automatisch wechselseitig geschieht. Man ist natürlich um so beliebter, je mehr andere Benutzer einen auf ihre `Friendlist` setzen. Die Listen der fünf obigen Studierenden lauten wie folgt:

| Benutzer | Friendlist |
|---:|---|
| Peter | Franz, Lisa |
| Franz | Peter |
| Lisa | Franz, Anna, Sepp |
| Anna | Sepp |
| Sepp | Franz, Lisa |

Sie als `Freundbuch.de` CEO und Chief-Programmer wollen ein Ranking unter ihren Benutzern erstellen, das deren Beliebtheit wiederspiegeln soll. Jedem Benutzer soll dazu eine `Friendscore` zwischen 0 und 100 zugeordnet werden, die angibt wie beliebt er ist. (Ganz unverfroren klauen Sie hierzu natürlich die Google-Idee.)

a) Geben Sie eine Matrix $F \in \mathbb{Q}^{5 \times 5}$ mit Einträgen 0 und 1 an, die den Freundschaftsbeziehungen entspricht, und veranschaulichen Sie sich die Beziehungen auch an einem gerichteten Graphen.

b) Man stelle sich nun folgendes vor: Zunächst wird zufällig eine Person ausgewählt, die dann zufällig eine Person ihrer `Friendlist` besucht. Die getroffene Person besucht dann wieder zufällig jemanden aus ihrer `Friendlist`, usw. . Welche Übergangsmatrix $T$ (Wahrscheinlichkeiten!) gehört zu dieser Vorgehensweise?

c) Berechnen Sie $T^{1000}$ näherungsweise mit einem Computer (selbstgeschriebenes Programm, Maple, Matlab, was immer Sie benutzen wollen). Welche `Friendscore` leiten Sie für die fünf Freunde aus $T^{1000}$ ab und wie sieht das entsprechende Beliebtheitsranking aus? (Macht das Sinn?)

**... Fortsetzung auf der nächsten Seite ...**

**Hausaufgabe (R) 2.7** (Lineare Gleichungssysteme 2)

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & 0 \\
2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 0 \\
-x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & - & 3x_5 & - & 2x_6 & = & 0 \\
 & & & & 6x_3 & - & 4x_4 & + & 3x_5 & + & 2x_6 & = & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & - & 6x_4 & + & 2x_5 & + & 3x_6 & = & 0
\end{array} \quad .$$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $GF_2$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_1 & & & + & x_3 & & & + & x_5 & + & x_6 & = & 0 \\
 & & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & & & = & 1 \\
x_1 & & & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 1 \\
 & & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & & & = & 0 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & = & 1
\end{array} \quad .$$

**Hausaufgabe 2.8** (Gamepad)

In dieser Aufgabe untersuchen wir ein (idealisiertes) Gamepad, das u.a. vier Action-Tasten $1, 2, 3, 4$ besitzt, die in den Ecken eines Quadrats angeordnet sind. Jede Taste $i \in [4]$ kann dabei in einer Stärke $x_i \in [0, 10]$ gedrückt werden (um etwa verschieden starkes „Gas geben" zu simulieren). Ein Tastenzustand wird also etwa durch folgende Grafik beschrieben:

| | |
|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ |
| $x_3$ | $x_4$ |

Aus technischen Gründen wird dabei nicht die Intensität jedes Tastendrucks einzeln abgefragt, sondern

- $s_1 = x_1 + x_2$, die Summe der Intensitäten der ersten Zeile,
- $s_2 = x_1 + x_3$, $s_3 = x_2 + x_4$, die Summen der Intensitäten der Spalten und
- $s_4 = x_1 + x_4$, die Summe der Hauptdiagonale.

a) Mit welchen Intensitäten $x_i$ wurden die Tasten $i$, $i \in [4]$ im Fall der Messwerte $s_1 = 3$, $s_2 = 7$, $s_3 = 8$ und $s_4 = 9$ gedrückt?

b) Begründen Sie, dass sich aus der technischen Anordnung aus jeder Messung von $s_1, \ldots, s_4$ eindeutig die Tastenintensitäten $x_i$ rekonstruieren lassen.

**Abgabe: bis Mittwoch, 4.5.2016, 11:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.**

**Verwenden Sie bei Abgabe das auf der Homepage hochgeladene Deckblatt und geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.**