zur Erinnerung: $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_{k_1}, \dots, x_{k_{n-r}} \in K \text{ bel.}, \right.$ $\qquad \{1,\dots,n\} = \{k_1,\dots,k_{n-r}\} \,\dot\cup$

$\left. x_{j_i} = a_{i j_i}^{-1} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n-r} a_{i k_j} x_{k_j} \right) \text{ für } i = 1, \dots, r \right\}$ $\qquad \{j_1, \dots, j_r\}$

Die konstruierten v_{k_j} sind ein Erzeugendensystem und sogar eine Basis. Letzteres kann man durch ein allgemeines Prinzip sehen: v_{k_j} ist der einzige Vektor für $\{k_1, \dots, k_{n-r}\}$, der in der Komponente x_{k_j} einen Eintrag $\neq$ Null hat

z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig

kann nicht aus den anderen Vektoren konstruiert werden

haben „eigene" Komponenten

aus dem Beispiel sieht man eine noch stärkere Eigenschaft: ein Vektor darf Obiges sogar verletzen!

· Nullraum $V=\{0\}$ hat leere Menge $S=\emptyset$ als Basis
eher eine Konvention

Charakterisierungen von Basen

Satz Für eine Teilmenge $S \subseteq V$ sind äquivalent

(a) S ist eine Basis von V

(b) S ist eine <u>inklusionsmaximale</u> linear unabhängige Teilmenge von V

d.h. S ist linear unabhängig, aber für jedes $v \in V \setminus S$ wird $S \cup \{v\}$ linear abhängig

(c) S ist ein <u>inklusionsminimales</u> Erzeugendensystem von V

d.h. $V = \langle S \rangle$, aber $\forall v \in S$ ist $S \setminus \{v\}$ gilt $\langle S \setminus \{v\} \rangle \neq V$

Beweis $(a \Rightarrow b)$ Sei S eine Basis von V, also insbesondere linear unabhängig. $\Rightarrow$ Es ist nur die Maximalität zu zeigen.

Sei $v \in V \setminus S$. Da S ein Erzeugendensystem ist, existieren $v_1, \dots, v_n \in S$ und $a_1, \dots, a_n \in K$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \Leftrightarrow \quad (-1) \cdot v + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i = 0$$

$\Rightarrow \underbrace{\{v, v_1, \dots, v_n\}}_{= S \cup \{v\}}$ sind linear abhängig

$(b \Rightarrow c)$ Sei S maximal linear unabhängig. Wir zeigen zuerst, dass S ein Erzeugendensystem ist.

Sei $v \in V$. Falls $v \in S$, so gilt $v \in \langle S \rangle$ und wir sind fertig. Sei nun also $v \notin S$. Nach b) ist $S \cup \{v\}$ linear abhängig.

$\Rightarrow \exists\ v_1, \dots, v_n \in S$ und $a, a_1, \dots, a_n \in K$ nicht alle 0 mit

$$a v + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i = 0 \qquad (a = 0 \text{ kann gelten})$$

Falls $a = 0$, so wären $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig, im Widerspruch zu b)! Es ist also $a \neq 0$.

$$\Rightarrow v = -\sum_{i=1}^{n} (a^{-1} a_i) \cdot v_i \in \langle S \rangle$$, d.h. v ist erzeugt.

Es bleibt also die Minimalität von S als Erzeugendensystem zu zeigen.

Sei $v \in S$. Falls $S \setminus \{v\}$ ein Erzeugendensystem wäre, dann gäbe es $v_1, \dots, v_n \in S \setminus \{v\}$ und $a_1, \dots, a_n \in K$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_i . \quad \Leftrightarrow \quad (-1) v + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

$\Rightarrow$ Wir erhalten einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von S (also zu b)) $\Rightarrow S$ ist minimal als Erzeugendensystem (c ⇒ a) Sei S ein minimales Erzeugendensystem. Die lineare Unabhängigkeit von S ist zu zeigen.

Seien $v_1, \dots, v_n \in S$ (paarweise verschieden) und $a_1, \dots, a_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$. Wir nehmen an nicht alle a_i wären gleich Null. O.B.d.A. sei $a_1 \neq 0$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\Rightarrow \quad v_1 = -\sum_{i=2}^{n} a_1^{-1} \cdot a_i v_i \in \langle S' \rangle \quad \text{mit} \quad \langle S' \rangle = S \setminus \{v_1\}$$

⇒ Alle Elemente von S liegen also in $\langle S' \rangle \Rightarrow V = \langle S' \rangle$, im Widerspruch zur Minimalität von S, also c)!

⇒ S ist linear unabhängig. □

Klar ist mit diesen Charakterisierungen, insbesondere c), dass jedes V mit einem <u>endlichen</u> Erzeugendensystem auch eine Basis hat. Dazu wählt man

einfach ein minimales (endliches) Erzeugendensystem.
Für V mit unendlichem Erzeugendensystem gilt dieses Argument nicht, die Aussage gilt aber trotzdem:

Proposition Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Beweis über Zorn'sches Lemma

Beispiel Sei M eine unendliche Menge und $V = \mathrm{Abb}(M, K)$. Das ist ein Vektorraum, also existiert eine Basis von V. Für V ist keine Basis bekannt.

Eigenschaften von Basen

Lemma Sei $E \subseteq V$ ein endliches Erzeugendensystem und $U \subseteq V$ eine linear unabhängige Menge. Dann gilt $|U| \leq |E|$.

Beweis: $E\setminus U$ ist endlich, wir können also die Aussage durch Induktion nach $|E\setminus U|$ zeigen.

Sei $E=\{v_1,\dots,v_n\}$ (v_i paarweise verschieden). insb. $U\nsubseteq E$

Für $U\subseteq E$ ist zu zeigen. Sei also $v\in U\setminus E$. Wegen $V=\langle E\rangle$

$\Rightarrow |U|\le|E|$

existieren $a_1,\dots,a_n\in K$ mit $v=a_1v_1+\dots+a_nv_n$.

Wegen $v\notin E$ gilt $v\neq v_i\ \forall i\le n$. Es gibt ein i, so dass $v_i\notin U$ und $a_i\neq 0$, denn sonst hat man durch $v=\sum_{i=1}^n a_iv_i$ sofort die lineare Abhängigkeit von U. ↯ Widerspruch

Sei o.B.d.A. $v_1\in E\setminus U$ und $a_1\neq 0$. Mit $E'=\{v,v_2,\dots,v_n\}$ ergibt sich

$$v_1=a_1^{-1}v-\sum_{i=2}^n a_1^{-1}a_iv_i\in\langle E'\rangle$$

$\Rightarrow$ E' ist ein Erzeugendensystem. Nach Def. von E' gilt $|E'\setminus U|=|E\setminus U|-1$. Induktion liefert $|U|\le|E'|=|E|$. $\square$

Satz Falls V ein endliches Erzeugendensystem hat, so sind alle Basen von V endlich und haben gleich viele Elemente.

Beweis: Seien B_1, B_2 Basen von V. B_1, B_2 sind insbesondere linear unabhängig und daher nach obigem Lemma endlich.
Zudem liefert das Lemma mit $U = B_1$ und $E = B_2$, dass $|B_1| \leq |B_2|$ und umgekehrt auch $|B_2| \leq |B_1|$. Also $|B_1| = |B_2|$. $\square$

Definition Sei V ein Vektorraum mit endlichem Erzeugendensystem.
Die <u>Dimension</u> $\dim(V)$ von V ist die Elementanzahl jeder Basis von V. Falls der Vektorraum V kein endliches Erzeugendensystem hat, so schreiben wir $\dim(V) = \infty$.
Wir unterscheiden diese Begriffe durch die Sprechweise „endlich-dimensional" bzw. „unendlich-dimensional" für V.

Beispiele

- K^n hat Dimension n (n-dim. Standardraum)
  wähle z.B. Standardbasis
- Lösungsraum eines homogenen LGS $Ax=0$. Die Dimension entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade.
- Für $V=K[x]$ gilt $\dim(V)=\infty$. $\{x^n \mid n\in\mathbb{N}_0\}$ ist unendliche Basis.

Proposition Sei $Ax=0$ ein homogenes LGS mit $A\in K^{m\times n}$.
Dann gilt für die Lösungsmenge L:

$$\dim(L) = n - \operatorname{rang}(A).$$

Bestimmung einer Basis

Input: $\langle U\rangle \subseteq K^n$ mit erzeugenden Vektoren $v_1,\dots,v_m$

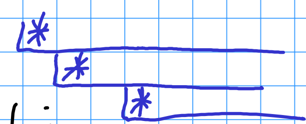
Output: Basis für $\langle U\rangle$

(1) Bilde Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit den v_i als <u>Zeilen</u>

(2) Bringe A auf Zeilenstufenform.

(3) Wähle die Zeilen in der Zeilenstufenform, die nicht komplett 0 sind. Diese sind eine Basis

- U wird von den Zeilen der Zeilenstufenform erzeugt, also insbesondere von den Zeilen $\neq 0$. Diese erkennt man durch die Zeilenstufenform sofort als linear unabhängig.



- $\dim U = \operatorname{rang} A$, d.h. der Rang einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist die Dimension des von den Zeilen aufgespannten Unterraums von $K^{1\times n}$.