Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 6

Präsenzaufgabe 6.1 (Nur eine Bedingung für Lineare Abbildungen)
Beweisen Sie:

$$f : U \to V \text{ linear } \iff \forall\, x, y \in U\ \forall\, \mu \in K : f(x + \mu y) = f(x) + \mu f(y).$$

Präsenzaufgabe 6.2 (Kern und Bild)
Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

sowie die zugehörige lineare Abbildung $\varphi_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$.

a) Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Kern}(\varphi_A)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi_A)$, und verifizieren Sie den Dimensionssatz.

b) Ist φ_A injektiv/surjektiv?

c) Berechnen Sie das Urbild $\varphi_A^{-1}(w)$ zum Punkt $w := (0, 4, 4)^T \in \mathbb{R}^3$ und drücken Sie es mit Hilfe von $\mathrm{Kern}(\varphi_A)$ aus.

Präsenzaufgabe 6.3 (Inverse Matrix)
Berechnen Sie die inverse Matrix zu

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in GF_5^{2\times 2}, \qquad \text{c)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

Präsenzaufgabe 6.4 (Rang einer Inzidenzmatrix)
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $n \geq 2$ und $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ mit $m \geq 1$, $e_j \subset V$, $|e_j| = 2$. Die Inzidenzmatrix $S_G = (s_{ij})_{ij} \in \{0,1\}^{n\times m}$ von G ist definiert durch

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i \in e_j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Ist G ein Baum (also kreisfrei und zusammenhängend), dann besitzt G Blätter.

b) Ist v_n ein Blatt, dann ist $G - v_n := (V \setminus \{v_n\}, E')$, mit $E' = \{e \in E : v_n \notin e\}$, wieder ein Baum.

c) Ist G ein Baum, dann sind die Spalten von S_G linear unabhängig.

d) Betrachtet man S_G als Matrix über GF_2, dann gilt $\mathrm{rang}(S_G) = n - 1$.

e) Betrachtet man S_G als Matrix über $\mathbb{R}$ dann gilt $\mathrm{rang}(S_G) = n-1$, falls G keine Kreise ungerader Länge enthält.

Bitte wenden!

Hausaufgabe 6.5 (Kern, Bild, Urbild)
Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in GF_3^{4\times 5}$$

sowie die zugehörige lineare Abbildung $\varphi_A : GF_3^5 \to GF_3^4$, $x \mapsto Ax$. Gegeben seien weiter die Vektoren $b_1 := (0,0,1,0)^T$ und $b_2 := (1,0,1,1)^T \in GF_3^4$.

a) Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Kern}(\varphi_A)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi_A)$, und verifizieren Sie den Dimensionssatz. Bestimmen Sie auch die Mächtigkeiten $|\,\mathrm{Kern}(\varphi_A)|$ und $|\,\mathrm{Bild}(\varphi_A)|$.

b) Bestimmen Sie die Urbilder $\varphi_A^{-1}(\{b_1\})$; $\varphi_A^{-1}(\{b_2\})$ und ihre jeweiligen Mächtigkeiten $|\varphi_A^{-1}(\{b_1\})|$, $|\varphi_A^{-1}(\{b_2\})|$.

Hausaufgabe 6.6 (Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$)
Sei $L(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ linear}\}$ und $F : L(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(1)$.

a) Zeigen Sie, dass F linear ist.

b) Zeigen Sie, dass F bijektiv ist.

c) Geben Sie die Umkehrabbildung $F^{-1} = G : \mathbb{R} \to L(\mathbb{R},\mathbb{R})$ an.

Hausaufgabe 6.7 (Lineare Abbildungen in Matrizenräume)
Betrachten Sie die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b-c & c-d \\ 2a+c & a-b+d \end{pmatrix}$$

a) Ist φ bijektiv?

b) Bestimmen Sie $(a,b,c,d)^T$, sodass gilt: $\varphi((a,b,c,d)^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder entscheiden Sie, dass dies nicht möglich ist.

Hausaufgabe 6.8 (Inverse Matrix 2)
Berechnen Sie zu jeder der folgenden Matrizen die inverse Matrix:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Abgabe: bis Mittwoch, 1.6.2016, 11:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Verwenden Sie bei Abgabe das auf der Homepage hochgeladene Deckblatt und geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.