Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 5

Präsenzaufgabe 5.1 (Zeilen- und Spaltenrang)
Entscheiden Sie *ohne* Benutzung des Gauß-Algorithmus (d.h. ohne Zeilenstufenform zu erstellen) für die folgenden Matrizen jeweils ob die Menge der (i) Spalten und (ii) Zeilen linear unabhängig ist. Geben Sie jeweils eine möglichst kurze Begründung an und leiten Sie aus den Ergebnissen ein allgemeines Prinzip ab.

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \\ 1 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 5.1

a) (i) Die Spaltenvektoren sind linear unabhängig, der erste hat einen Nicht-Nulleintrag, wo die beiden anderen Nulleinträge haben, aber auch die beiden anderen Vektoren sind aufgrund ihrer (Nicht-)Nulleinträge voneinander linear unabhängig.

   (ii) Analoge Argumentation zeigt, dass auch die Zeilenvektoren linear unabhängig sind.

b) Analog für Zeilen und Spalten folgt aus der Gestalt der ersten beiden Vektoren jeweils, dass der dritte ebenfalls die Bedingung $x_1 = x_2$ erfüllen müsste, damit eine lineare Abhängigkeit vorliegen könnte. Das ist nicht der Fall, adaher sind sowohl Spalten aus auch Zeilenvektoren linear unabhängig.

c) (i) Der dritte Spaltenvektor ist das (-2)-fache des zweiten. Die Spaltenvektoren sind also linear abhängig.

   (ii) Die lineare Abhängigkeit der Zeielenvektoren ist nicht so leicht erkennbar, aber aufgrund der Abhängigkkeit des zweiten und dritten Spaltenvektors würden die Operationen der Gaußeelimination hier immer parallel wirken, womit klar ist, dass wenn wir eine Null in der zweiten Spalte der dritten Zeile erzeugen, dann gleichzeitig auch in der dritten Spalte dieser Zeile. Wir erhalten also eine Nullzeile.

Das generelle Prinzip lautet: die Spaltenvektoren sind linear abhängig, genau dann wenn die Zeilenvektoren linear abhängig sind und allgemeiner, dass der Spalten- und Zeilenrang einer Matrix übereinstimmen.

Präsenzaufgabe 5.2 (Basistausch)
Es seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ und $v = 3v_2 - 6v_4 + 2v_5 \in V$ gegeben. Bestimmen Sie alle $i \in [5]$, sodass $B_i := (B \setminus \{v_i\}) \cup \{v\}$ eine Basis von V ist und schreiben Sie v_i als Linearkombination dieser Basis.

Lösung zu Aufgabe 5.2
B_i ist genau dann eine Basis, wenn v_i mit Koeffizient verschieden von Null in der Beschreibung von v auftaucht, also für $i \in \{2, 4, 5\}$.

Für $i \notin \{2,4,5\}$ gilt wegen $v \in \langle B \setminus \{v_i\}\rangle$, dass $\langle B_i\rangle = \langle B \setminus \{v_i\}\rangle$, also kann B_i keine Basis sein.

Für $i = 2$ gilt $v_2 = \frac{1}{3}(v + 6v_4 - 2v_5)$, für $i = 4$ gilt $v_4 = \frac{1}{6}(3v_2 + 2v_5 - v)$ und für $i = 5$ ist $v_5 = \frac{1}{2}(v - 3v_2 + 6v_4)$. In allen drei Fällen gilt also $v_i \in \langle B_i\rangle$ und damit $\langle B_i\rangle = \langle B\rangle$, $i \in \{2,4,5\}$. Da $|B_i| = |B|$ folgt dann wegen B Basis, dass auch B_i Basis ist.

Präsenzaufgabe 5.3 (Basen im Polynomvektorraum)
Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ der Polynome vom Grad ≤ 2. Gegeben seien folgende Teilmengen von V:

$$S_1 = \Big\{1, x+1, x^2+x+1\Big\}, \quad S_2 = \Big\{x^2+x, x^2-x\Big\} \quad \text{und} \quad S_3 = \Big\{1+x, x, x^2+1, x+2\Big\}.$$

Untersuchen Sie für jede der Mengen S_1, S_2, S_3 ob sie linear unabhängig bzw. erzeugend bzw. eine Basis ist.

Lösung zu Aufgabe 5.3

- S_1 ist linear unabhängig: seien $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$ mit $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(x+1) + \lambda_3(x^2+x+1) = 0$, dann folgt direkt $\lambda_3 = 0$, daraus $\lambda_2 = 0$ und damit schließlich $\lambda_1 = 0$ (Zeilenstufenform!).

  Da $|S_1| = 3 = \dim(V)$ ist S_1 damit eine Basis.

  Wir zeigen trotzdem, dass S_1 ein Erzeugendensystem für V ist: Dazu genügt es zu zeigen, dass die Elemente der Standardbasis $1, x, x^2$ erzeugt weren können. Es gilt aber $1 \in S_1$, $x = (x+1) - 1$ und $x^2 = (x^2+x+1) - (x+1)$.

- S_2 ist linear unabhängig: seien $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$ mit $\lambda_1(x^2+x) + \lambda_2(x^2-x) = 0$, dann folgt $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ aufgrund der quadratischen Terme und $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ aufgrund der linearen Terme. Zusammen muss dann $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ gelten.

  Da $|S_2| < 3 = \dim(V)$ ist S_2 keine Basis. Die von 0 verschiedenen, konstanten Polynome können nicht erzeugt werden.

- Da $|S_3| > 3 = \dim(V)$ gilt, muss S_3 linear abhängig sein, es gilt z.B. $(x+2) - 2(1+x) + x = 0$.

  S_3 ist aber ein Erzeugendensystem für V: wie oben zeigen wir, dass $1, x, x^2$ erzeugt werden können: $1 = (1+x) - x$, $x \in \mathbb{S}_3$, $x^2 = (x^2+1) - ((1+x) - x)$.

Präsenzaufgabe 5.4 (Lineare Abbildungen)

a) Bestimmen Sie welche der folgenden Abbildungen linear sind:
   (i) $f_1 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $(x,y)^T \mapsto (y-1, -x-2)^T$,
   (ii) $f_2 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$, $(x,y)^T \mapsto (11833y, 1001x, -4711y - 2x)$,
   (iii) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y)^T \mapsto (x, -x^2y, y-x)^T$,
   (iv) $f_4 : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \mapsto A + A^T$.

b) Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$ linear. Zeigen Sie: Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, so ist sein Bild

$$f(U) := \{f(u) : u \in U\} \subset W$$

ebenfalls ein Untervektorraum.

Lösung zu Aufgabe 5.4
Zur Wiederholung: Sind V, W zwei K-Vektorräume dann heißt $f : V \to W$ linear, falls

- $\forall u, v \in V \;:\; f(u+v) = f(u) + f(v)$ (Additivität) und
- $\forall v \in V, \lambda \in K \;:\; f(\lambda v) = \lambda f(v)$ (Homogenität).

Beachte: Aus der Homogenität folgt $f(0) = 0$! Ferner ist $V = K^n, W = K^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, sodass $f(v) = Av$ für alle $v \in V$, dann ist f linear (da $A(u+v) = Au + Av$ und $A(\lambda v) = \lambda Av$.

a) (i) f_1 ist nicht linear, denn $f(0) = (-1, -2)^T$.

(ii) f_2 ist linear, denn mit
$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 11833 \\ 1001 & 0 \\ -2 & -4711 \end{pmatrix}$$
gilt $f_2(v) = A_2 v$ für alle $v \in \mathbb{Q}^3$.

(iii) f_3 ist nicht linear, denn $f((2,2)^T) = (2,-8,0)^T \neq (2,-2,0)^T = 2f((1,1)^T)$.

(iv) f_4 ist linear, denn $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $f(A+B) = (A+B) + (A+B)^T = (A + A^T) + (B + B^T) = f(A) + f(B)$ und $f(\lambda A) = (\lambda A) + (\lambda A)^T = \lambda(A + A^T) = \lambda f(A)$.

b) Wir zeigen, dass $f(U)$ die notwendigen Bedingungen an einen UVR erfüllt:

(i) Da f linear und $0 \in U$ gilt $0 = f(0) \in f(U)$.

(ii) Seien $w_1, w_2 \in f(U)$. Dann existieren $u_1, u_2 \in U$, sodass $f(u_i) = w_i$, $i = 1, 2$. Da U UVR folgt $u_1 + u_2 \in U$ und da f linear damit, dass $w_1 + w_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2) \in f(U)$.

(iii) Seien $w \in f(U)$ und $\lambda \in K$, dann existiert $u \in U$, sodass $f(u) = w$. Da U UVR folgt $\lambda u \in U$ und da f linear damit, dass $\lambda w = \lambda f(u) = f(\lambda u) \in f(U)$.

Hausaufgabe 5.5 (Basisbestimmung)

a) Betrachten Sie den Algorithmus zur Auswahl von Vektoren aus einem Erzeugendensystem, um eine Basis zu erhalten.

Was passiert, wenn Sie für jede Nicht-Nullzeile in der Zeilenstufenform, statt dieser die zugehörige ursprüngliche Zeile wählen? (Beachten Sie dabei evtl. durchgeführte Zeilenvertauschungen.)

b) Eine Basisergänzung zu einer gegebenen linear unabhängigen Menge von k Vektoren S in einem n-dimesionalen Vektorraum V ist nach Vorlesung immer mit hinreichend vielen Vektoren aus der Standardbasis möglich.

Sei A die Matrix, die aus den Vektoren von S als Spalten gefolgt von Spalten in der Form der Einheitsmatrix besteht. Betrachten Sie eine Matrix A' in Zeilenstufenform, die durch elementare Zeilenoperationen aus A entstanden ist. Können Sie mit Hilfe von A' eine Basisergänzung für S ablesen? Wenn ja, wie?

Lösung zu Aufgabe 5.5

a) Außer Zeilenumformungen finden nur folgende Umformungen statt:

(i) Multiplikation einer Zeile: Der Zeilenvektor a_i ist linear unabhängig von den anderen Zeilenvektoren, genau dann wenn der Zeilenvektor λa_i, $\lambda \neq 0$ linear unabhängig von den anderen Zeilenvektoren ist .

(ii) Das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Addieren: Der Zeilenvektor a_i ist linear unabhängig von den anderen Zeilenvektoren a_j, $j \in [n] \setminus i$, genau dann wenn der Zeilenvektor $a_i + \lambda a_k$, $\lambda \neq 0$, für ein $k \neq i$, linear unabhängig von den anderen Zeilenvektoren a_j, $j \in [n] \setminus i$ ist.

Folglich bilden die Zeilen der ursprünglichen Matrix, die zu den Nicht-Nullzeilen in der Zeilenstufenform am Ende des Algorithmus korrespondieren, eine Basis.

b) Wir schreiben zunächst alle Vektoren a_i, $i = 1, \ldots, k$ aus S als Sapltenvektoren a_i^T in die Matrix und fügen dann rechts eine Einheitsmatrix I_n der Größe n hinzu:

$$\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_k & I_n \end{pmatrix}.$$

Nun bringen wir diese Matrix mithilfe des Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform. S und die jeweils ersten Spalten mit einem neuen Nicht-Nulleintrag in der Zeilenstufenform von I_n bilden dann eine Basis.

Wieso ist das so: Die Elementaren Zeilenumformungen haben keinen Einfluss auf die lineare Abhängigkeit der Spaltenvektoren! Nehmen wir etwa an die Spaltenvektoren $b_1, \ldots, b_l$ einer Matrix sind linear abhängig, d.h. es existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{R}$ nicht alle 0, sodass

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_l b_l = 0$$

Bezeichnen wir die i-te Komponente von b_j, $j \in [l]$ mit b_{ij}, dann gilt also

$$\lambda_1 b_{i1} + \ldots + \lambda_l b_{il} = 0$$

. Das multiplizieren einer Zeile verändert diese Tatsache offensichtlich nicht und auch das vertauschen von Zeilen hat keinen Einfluss auf die lineare Abhängigkeit der b_j. Addiert man nun das μ-fache der i_2-ten Zeile zur i_1-ten Zeile, so erhält man in der i_1-ten Zeile die neuen Komponenten $b_{i_1 j} + \mu b_{i_2 j}$. Es folgt

$$\lambda_1(b_{i_1 1} + \mu b_{i_2 1}) + \ldots + \lambda_l(b_{i_1 l} + \mu b_{i_2 l}) = (\lambda_1 b_{i_1 1} + \ldots + \lambda_l b_{i_1 l}) + \mu(\lambda_1 b_{i_2 1} + \ldots + \lambda_l b_{i_2 l}) = 0.$$

Also bleiben auch jetzt die Vektoren linear unabhängig.

Hausaufgabe 5.6 (Basisaustausch 2)
Im $\mathbb{R}^4$ seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$v_1 = (1,0,1,0)^T, v_2 = (0,1,0,1)^T, v_3 = (1,-1,2,1)^T, v_4 = (-1,0,2,0)^T \quad \text{und} \quad v = (3,1,0,1)^T.$$

a) Zeigen Sie, dass $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist und schreiben Sie v als Linearkombination bezüglich dieser Basis.

b) Bestimmen Sie alle $i \in [4]$, sodass $B_i := (B \setminus \{v_i\}) \cup \{v\}$ eine Basis von V ist und schreiben Sie jeweils v_i als Linearkombination bezüglich dieser Basis.

Lösung zu Aufgabe 5.6

a) Wir zeigen gleichzeitig, dass B eine Basis ist und finden die Darstellung von v als Linearkombination bezüglich B, indem wir das folgende lineare Gleichungssytem mit erweiterter Koeffizientenmatrix lösen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Der Gauß-Algorithmus liefert die eindeutige Lösung $(2,1,0,-1)^T$. Damit wissen wir:

(i) die Koeffizientemratix $[v_1|v_2|v_3|v_4] \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ besitzt vollen Rang 4, was zeigt dass B eine Basis ist und

(ii) mittels der Lösung des LGS, dass $v = 2v_1 + v_2 - v_4$.

b) Wir können genau diejenigen der Vektoren v_i, die in der Linearkombination von v bezüglich der Basis B mit Koeffizient ungleich Null auftauchen durch v ersetzen, sodass B_i weiterhin eine Basis ist (vgl. entsprechende Präsenzaufgabe). Dies geht also für $i = 1, 2, 4$. Wir erhalten jeweils als Linearkombinationen $v_1 = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_4$, $v_2 = v - 2v_1 + v_4$ und $v_4 = -v + 2v_1 + v_2$.

Hausaufgabe 5.7 (Basen von Polynomräumen)
Es sei K ein Körper. Dann ist die Menge $S = \{x^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Basis des Vektorraums $K[x]$ – die Standardbasis. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $g_n := \sum_{i=0}^{n} x^i$ und $T = \{g_n : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Zeigen Sie:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x^n \in \langle T\rangle$.

b) Die Menge T ist eine Basis von $K[x]$.

Lösung zu Aufgabe 5.7

a) Für $n = 0$ ist $x^0 = 1 = g_0 \in T \subset \langle T\rangle$, und für alle $n > 0$ gilt $x^n = g_n - g_{n-1} \in \langle T\rangle$.

b) Nach (a) ist $S \subset \langle T\rangle$ und damit gilt auch, dass $K[x] = \langle S\rangle \subset \langle T\rangle$. Also ist T ein Erzeugendensystem für $K[x]$.

   Seien nun $a_0, \ldots, a_n \in K$, sodass $a_0g_0 + \ldots + a_ng_n = 0$. Dann gilt: a_n ist der Koeffizient von x^n in $a_0g_0 + \ldots + a_ng_n$ und da die Summe Null ergeben soll folgt $a_n = 0$. Es folgt: $a_0g_0 + \ldots + a_{n-1}g_{n-1} = 0$ und wir folgern wie zuvor, dass $a_{n-1} = 0$ gelten muss. Sukzessive erhält man somit $a_{n-2} = a_{n-3} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$. Damit ist T linear unabhängig, also eine Basis von $K[X]$.

Hausaufgabe 5.8 (Lineare Abbildungen 2)

a) Bestimmen Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen um lineare Abbildungen handelt:

   (i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, x+1)^T$.

   (ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y)^T \mapsto (x - y, 0, 2x - y)^T$.

   (iii) $f_3 : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \varphi \mapsto \psi$, wobei $\psi(x) = \varphi(x + 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$ linear. Weiter sei $U \subset W$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie: $f^{-1}(U) := \{v \in V : f(v) \in U\} \subset V$ ist ebenfalls ein Untervektorraum.

Lösung zu Aufgabe 5.8

a) (i) f_1 ist nicht linear, da $f_1((0, 0)^T) = (0, 1)^T \neq (0, 0)^T$.

   (ii) f_2 ist linear, denn mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}^{3\times 2}$ gilt $f((x, y)^T) = A(x, y)^T$ für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$.

   (iii) f_3 ist linear, denn

- Mit $\psi_i(x) := \varphi_i(x+1)$, $i = 1, 2$ gilt $(\psi_1+\psi_2)(x) = \psi_1(x)+\psi_2(x) = \varphi_1(x+1)+\varphi_2(x+1) = (\varphi_1 + \varphi_2)(x + 1)$ und damit $f_3(\varphi_1) + f_3(\varphi_2) = \psi_1 + \psi_2 = f_3(\varphi_1 + \varphi_2)$.
- Da $(\lambda\psi)(x) = \lambda\psi(x) = \lambda\varphi(x + 1) = (\lambda\varphi)(x + 1)$ ist $f_3(\lambda\varphi) = \lambda\psi = \lambda f_3(\varphi)$.