$\Rightarrow$ Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von f.
Dann ist $f = (x-\lambda_1)^{e_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_r)^{e_r} \cdot g$ mit $g \in K[x]$ einem Polynom ohne Nullstellen in K, mit $r \leq n$ und $e_i \in \mathbb{N}$. Die Zahl e_i heißt Vielfachheit der Nullstelle λ_i.

Für g ein konstantes Polynom sagt man, dass f in Linearfaktoren zerfällt. Dann ist g automatisch der höchste Koeffizient von f.

Beispiel $\quad f = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \quad \in \mathbb{R}[x]$

durch Ausprobieren: $\lambda_1 = -1 \quad \Rightarrow f(\lambda_1) = 1 - 2 + 2 - 2 + 1 = 0$
Test

Division mit Rest gibt
$$f = (x+1) \cdot (x^3 + x^2 + x + 1), \text{ denn}$$

$$
\begin{array}{l}
x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \;:\; (x+1) = x^3 + x^2 + x + 1 \\
-(x^4 + x^3) \\
\hline
\quad x^3 + 2x^2 \\
\quad -(x^3 + x^2) \\
\hline
\qquad x^2 + 2x \\
\qquad -(x^2 + x) \\
\hline
\qquad\quad x + 1 \\
\qquad\quad -(x + 1) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Auch $x^3 + x^2 + x + 1$ hat Nullstelle $\lambda_1 = -1$

Division mit Rest gibt

$$f = (x+1)^2 \cdot (x^2+1)$$

x^2+1 hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ -1 ist die einzige Nullstelle von f in $\mathbb{R}$ und ihre Vielfachheit ist 2

Als Polynom über $\mathbb{C}$ zerfällt f in Linearfaktoren

$$f = (x+1)^2 \cdot \underbrace{(x+i)\cdot(x-i)}_{= x^2 - ix + ix - i^2 = x^2+1}$$

$\Rightarrow$ Über $\mathbb{R}$ zerfallen nicht alle Polynome, aber:

<u>Proposition</u> (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes nicht-konstante Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Damit zerfällt f in Linearfaktoren.

Körper, die wie $\mathbb{C}$ diese Eigenschaft haben, d.h. für die Polynome zerfallen, heißen algebraisch abgeschlossen

//

Exkurs: <u>Komplexe Zahlen</u>

Definition über Matrizen

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \cdot I_2 + b \cdot i \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Körpereigenschaften</u>

$\mathbb{C}$ ist Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ ist abelsche Gruppe für $(\mathbb{C}, +)$

$z_1 = a_1 I_2 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 I_2 + b_2 i$

$\Rightarrow \ z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 I_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i + b_1 b_2 i^2 =$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) I_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, d.h. die so definierte Multiplikation ist kommutativ

- Assoziativität und Distributivität übertragen sich von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ auf $\mathbb{C}$

$\Rightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist kommutativer Ring

$$\bullet\ z = a I_2 + b\cdot i \neq 0 \Rightarrow \det(z) = a^2 + b^2 > 0$$

$$\det(z) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \frac{a}{a^2+b^2} I_2 - \frac{b}{a^2+b^2}\cdot i \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow \mathbb{C}$ ist Körper

Rolle von $\mathbb{R}$ bezüglich des Körpers $\mathbb{C}$

$\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \mapsto a\cdot I_2$ ist injektiv und erfüllt

$\varepsilon(a+b) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b)$, $\varepsilon(a\cdot b) = \varepsilon(a)\cdot\varepsilon(b)$,

$\varepsilon(1) = I_2$

$\Rightarrow$ Identifikation von $\varepsilon(a) \in \mathbb{C}$ mit $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathbb{R}$ ist Unterkörper von $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ mit $i^2 = -1$,

so dass $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

und $(a + bi)^{-1} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$ (für $a + bi \neq 0$)

Für $z = a + bi$ sagt man

z	komplexe Zahl
a	Realteil
b	Imaginärteil

Für $z = a + bi$ ist $\overline{z} = a - bi$ die <u>komplex Konjugierte</u>.

$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

In Matrixschreibweise würde das dem Transponierten der 2×2-Matrix z entsprechen.

Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$.

Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine (intuitive) Ordnung (wie das für $\mathbb{R}$ mit $\leq$ der Fall wäre).

<u>Betrag</u> $\quad z = a + bi \Rightarrow z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

dann definiere $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

vergleiche mit der Länge eines Vektors in der euklidischen Ebene

Bezüglich dieses Betrags kann man also eine Ordnung definieren.

zudem: $\quad z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

<u>Eigenschaften des Betrags</u>

- $|z| = 0 \iff z = 0 \qquad$ sonst $a^2 + b^2 > 0$

• $|z_1 z_2| = \underline{|z_1| \cdot |z_2|}$ folgt aus der „Multiplikativität der komplexen Konjugation"

• $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ „Dreiecksungleichung"

Begründung: $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) =$

$= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 + z_2 \overline{z_2} =$

$= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq$

Realteil

$\leq |z_1|^2 + 2 \underbrace{|z_1 \overline{z_2}|}_{= |z_1||\overline{z_2}| = |z_1||z_2|} + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$

Gleichheit für z_1, z_2 genau dann, wenn z_1, z_2 in $\mathbb{R}^2$ interpretiert in die gleiche Richtung zeigen //.

Vielfachheit von Eigenwerten

Korollar aus dem Fundamentalsatz:

$A \in K^{n \times n}$ hat höchstens n Eigenwerte. da χ_A höchstens n verschiedene Nullstellen hat

Falls K algebraisch abgeschlossen ist (z.B. $K = \mathbb{C}$), so hat A (überhaupt) Eigenwerte.

Definition Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert der Matrix $A \in K^{n \times n}$.

Die <u>algebraische Vielfachheit</u> $m_a(\lambda)$ von λ ist die Vielfachheit der Nullstelle λ im charakteristischen Polynom χ_A.

$$f = (x - \lambda_1)^{e_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{e_r} \cdot g$$

Die <u>geometrische Vielfachheit</u> $m_g(\lambda)$ von λ ist $m_g(\lambda) = \dim(E_\lambda)$.

Beispiele · $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hat Eigenwerte 1 und -1, für beide sind die algebraische und geometrische Vielfachheit 1. (siehe früheres Beispiel)