Literatur: • Beutelspacher, Lineare Algebra (2014)
• Vorlesungsskript Lineare Algebra (Prof. Kemper)

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\quad + 2x_3 + x_4 &= -3 \\
2x_1 \qquad\quad + 4x_3 - 2x_4 &= 2 \\
x_2 \qquad\quad - x_4 &= 2 \\
x_1 \qquad\quad + 2x_3 + 2x_4 &= -5
\end{aligned}
$$

Schreibweise

$$
(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -5 \end{array}\right)
$$

Für die Lösung eines LGS werden wir die erweiterte Koeffizientenmatrix in eine „schönere" Form bringen, aus der man die Lösungsmenge ablesen kann. Dabei müssen wir aufpassen, dass die Lösungsmenge nicht verändert wird. Die erlaubten Manipulationen heißen <u>elementare Zeilenoperationen</u>. Von diesen gibt es drei Arten:

I Vertauschen zweier Zeilen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

II Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 6 & 3 & -9 \end{array}\right)$$

$$x_1 + 2x_3 + x_4 + 3 = 0$$

$$3(x_1 + 2x_3 + x_4 + 3) = 0$$

III Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \text{2. Zeile} + 2\cdot\text{1. Zeile} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

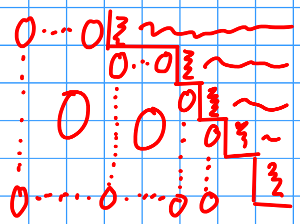
$$\begin{aligned} x_1 \quad &+ 2x_3 + x_4 + 3 = 0 \\ x_2 \quad &- x_4 - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad &+ 2x_3 + x_4 + 3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 &+ 4x_3 + x_4 + 4 = 0 \end{aligned}$$

das, was hier aufaddiert ist $= 0$
(denn das ist ein Vielfaches der ersten Zeile)

Definition (Zeilenstufenform)

Eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist in <u>Zeilenstufenform</u>, falls die folgenden Eigenschaften gelten:



(a) Wenn eine Zeile mit k Nullen beginnt, so stehen unter diesen Nullen nur weitere Nullen.

(b) Unter dem ersten Eintrag $\neq 0$ jeder Zeile stehen lauter Nullen. (falls die Zeile nicht nur aus Nullen besteht!)

A ist in <u>strenger Zeilenstufenform</u>, wenn (a), (b) gelten und

(c) Über dem ersten Eintrag $\neq 0$ jeder Zeile stehen lauter Nullen.

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ist verletzt

nicht in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) ist verletzt

nicht in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) ist verletzt

ist in Zeilenstufenform, aber nicht strenger Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist in strenger Zeilenstufenform

Die „schöne" Form einer (erweiterten) Koeffizientenmatrix ist die strenge Zeilenstufenform.

Umformung einer erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \\ (IV) \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(II)-2\cdot(I) \\ (IV)-(I)}]{\text{Typ III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[(II)\leftrightarrow(III)]{\text{Typ I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \cdot -\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow[(III)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)]{\text{Typ II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[(IV)-(III)]{\text{Typ III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(I)-(III) \\ (II)+(III)}]{\text{Typ III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform

strenge Zeilenstufenform

Ablesen der Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rl} x_1 + 2x_3 &= -1 \\ x_2 &= 0 \\ x_4 &= -2 \\ 0 &= 0 \end{array} \Rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} -2a-1 \\ 0 \\ a \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in K \right\}$$

$x_1 = -2x_3 - 1$

„ein Freiheitsgrad"

Gauss-Algorithmus / Gauss-Elimination

Input: Matrix $A \in K^{m \times n}$

Output: Matrix $B \in K^{m \times n}$ in (strenger) Zeilenstufenform, die aus A durch elementare Zeilenoperationen hervorgeht

(1) Setze $B = A$.

(2) B sei bis zur r-ten Zeile in Zeilenstufenform ($r = 0$ möglich!)

(3) Falls $r = m$, so ist B in Zeilenstufenform. Für strenge Zeilenstufenform, gehe zu (8).

(4) Wähle einen am weitesten links stehenden Eintrag $\neq 0$ von B unterhalb der r-ten Zeile

(5) Bringe diesen Eintrag in die $(r+1)$-te Zeile (Typ I)

(6) Erzeuge unterhalb dieses Eintrags lauter Nullen (Typ III) evtl. Typ II

(7) gehe zu (2)

(8) Bringe B auf strenge Zeilenstufenform beginnend mit der letzten Zeile. (Typ II)

Algorithmus hat viel mehr Anwendungen als „nur" zur Lösung von LGS. Er benötigt $O(n^3)$ Körperoperationen.

Algorithmus zur Lösung eines LGS

Input: LGS $Ax = b$ mit $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^n$

Output: Lösungsmenge L des LGS

(1) Bringe $(A|b) \in K^{m \times (n+1)}$ in strenge Zeilenstufenform

(2) Sei r die Anzahl der Zeilen, die einen Eintrag $\neq 0$ haben.

Für $i=1,\dots,r$ sei $j_i \in \{1,\dots,n+1\}$ die Spalte, in der der erste Eintrag $\neq 0$ der i-ten Zeile steht.

(3) Falls $j_r = n+1$, so ist das LGS unlösbar, d.h. $L = \emptyset$.

$0 \cdots\cdots 0 \mid a \Leftrightarrow 0 = a$

$\lightning\ a \neq 0$

(4) Andernfalls seien $k_1,\dots,k_{n-r}$ die Zahlen $\leq n$, die nicht eines der j_i sind. Also $\{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_r\} = \{k_1,\dots,k_{n-r}\}$.

(5) Die Lösungsmenge L ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \underbrace{x_{k_1},\dots,x_{k_{n-r}}}_{n-r \text{ Freiheitsgrade}} \in K \text{ beliebig},\ x_{j_i} = a_{ij_i}^{-1} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{n-r} a_{ik_j} \cdot x_{k_j} \right) \text{ für } i \leq r \right\}$$

Unterschied zwischen homogenen und inhomogenen LGS ist, dass die homogenen immer lösbar sind. (3) tritt nicht ein.

Man kann also bei homogenen Systemen mit der Koeffizientenmatrix statt der erweiterten Koeffizientenmatrix arbeiten.