Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 8

Präsenzaufgabe 8.1 (Darstellungsmatrizen und Komposition)
Es seien $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi((x_1, x_2)^T) := (x_1 - x_2, 0, 2x_1 - x_2)^T$ und $\psi((x_1, x_2, x_3)^T) := x_1 + x_2 + x_3$. Ferner seien $S := \left\{(1,0)^T, (0,1)^T\right\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ sowie $B := \left\{(1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T\right\}$ Basis des $\mathbb{R}^3$ und $C := \{1\}$ Basis des $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $D_{S,B}(\varphi)$, $D_{B,C}(\psi)$ und $D_{S,C}(\psi \circ \varphi)$.

Lösung zu Aufgabe 8.1
Wir betrachten die Bilder der Basisvektoren von S unter φ und erhalten $D_{S,B}(\varphi)$ aus den Koeffizienten der Darstellung bezüglich der Basis B:

$$\varphi((1,0)^T) = (1,0,2)^T = 2 \cdot (1,1,1)^T - 2 \cdot (1,1,0)^T + 1 \cdot (1,0,0)^T$$
$$\varphi((0,1)^T) = (-1,0,-1)^T = (-1) \cdot (1,1,1)^T + 1 \cdot (1,1,0)^T + (-1) \cdot (1,0,0)^T$$

Also ist $D_{S,B}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Nun entsprechend für $D_{B,C}(\psi)$:

$$\psi((1,1,1))^T = 3 = 3 \cdot 1, \quad \psi((1,1,0))^T = 2, \quad \psi((1,0,0))^T = 1.$$

Das ergibt $D_{B,C}(\psi) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir können auch für $D_{S,C}(\psi \circ \varphi)$ genau so vorgehen:

$$\psi(\varphi((1,0)^T)) = \psi((1,0,2)^T) = 3, \quad \psi(\varphi((0,1)^T)) = \psi((-1,0,-1))^T = -2.$$

Also $D_{S,C}(\psi \circ \varphi) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$. Alternativ gilt aber auch

$$D_{S,C}(\psi \circ \varphi) = D_{B,C}(\psi) \cdot D_{S,B}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Präsenzaufgabe 8.2 (Determinantenbestimmung)
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & -2 & -7 \end{pmatrix}$, c) $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 23 & -34 & 1 \\ 11 & 17 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e) $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 8.2
Zur Wiederholung:

- Die Determinante ist ein Funktional $det : K^{n\times n} \to K$ das NUR für quadratische Matrizen definiert ist.
- Vertauschen zweier Zeilen/Spalten verändert (nur) das Vorzeichen die Determinante.
- Das Addieren des Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen verändert die Determinante nicht.
- Die Determinante einer oberen/unteren Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente. Das gilt auch für entsprechende Blockform, also z.B. $det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = det(A) \cdot \det(C)$.
- $det(A) = \det(A^T)$, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.
- Ist $n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann gilt $det(A) = ad - bc$.

Nun zur Aufgabe:

a) $\det(A) = -2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -31$.

b) $\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 14 & 10 \\ 0 & 13 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 13 & 3 \end{pmatrix} = 14 \cdot 3 - 10 \cdot 13 = -88$.

c) $\det(C) = \frac{1}{8} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 23 & -34 & 1 \\ 11 & 17 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 11 & 17 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}(51 - 55) = \frac{1}{2}$.

d) $\det(D) = -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

e) $\det(E) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot 5 = -1 \cdot 1 \cdot 5 = -5$.

Präsenzaufgabe 8.3 (Vandermonde Determinante)
Es seien K ein Körper und $x_1, \dots, x_n \in K$. Dann heißt

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Vandermonde Matrix. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion indem Sie das x_1-fache jeder Spalte von der nächsten abziehen, dass $\det(V(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$.

Lösung zu Aufgabe 8.3
Wir führen einen INduktionsbeweis über n: für $n = 1$ gilt $\det(V(x_1)) = 1$ was aich das Ergebnis des „leeren Produkts“ ist. Für $n = 2$ gilt $\det(V(x_1, x_2)) = 1 \cdot x_2 - x_1 \cdot 1 = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2}(x_j - x_i)$. Nun nehmen wir an, dass die Formel für alle $n \in [n_0 - 1]$, $n_0 \geq 2$ bewiesen ist und zeigen, dass sie dann auch für $n = n_0$ gilt. Wie in der Aufgabenstellung vorgegeben subtrahieren wir das x_1-fache jeder Spalte von der nächsten und erhalten damit

$$\begin{aligned}
\det(V(x_1, \dots, x_{n_0})) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_2 - x_1)x_2^{n_0-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n_0} - x_1 & (x_{n_0} - x_1)x_{n_0} & \cdots & (x_{n_0} - x_1)x_{n_0}^{n_0-2} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_2 - x_1)x_2^{n_0-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_0} - x_1 & (x_{n_0} - x_1)x_{n_0} & \cdots & (x_{n_0} - x_1)x_{n_0}^{n_0-2} \end{pmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_{n_0} - x_1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n_0-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n_0} & \cdots & x_{n_0}^{n_0-2} \end{pmatrix} \\
&= \prod_{j=2}^{n_0}(x_j - x_1) \cdot \det(V(x_2, \dots, x_{n_0}))
\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt nun aber $\det(V(x_2, \dots, x_{n_0})) = \prod_{2 \leq i < j \leq n_0}(x_j - x_i)$, also insgesamt $\det(V(x_1, \dots, x_{n_0})) = \prod_{j=2}^{n_0}(x_j - x_1) \cdot \det(V(x_2, \dots, x_{n_0})) = \prod_{1 \leq i < j \leq n_0}(x_j - x_i)$.

Hausaufgabe 8.4 (Basiswechselmatrizen)
Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ der Raum der Polynome vom Grad ≤ 2 und $u_1 = 1$, $u_2 = x$, $u_3 = x^2$ und $b_1 = 1$, $b_2 = x + 1$, $b_3 = x^2 + x + 1$. Dann sind $E = \{u_1, u_2, u_3\}$ und $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ Basen von V (vgl. Aufgabe 5.3). Weiter sei $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ eine nicht explizit bekannte Basis, bekannt ist nur die Basiswechselmatrix

$$S_{C,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $S_{E,B}$ und $S_{B,E}$.

b) Sei $y := (1, 2, -1)^T \in \mathbb{R}^3$ der Koordinatenvektor eines Elements $v \in V$ bezüglich der Basis B. Wie lautet der Koordinatenvektor von v bezüglich der Basis E? Bestimmen Sie v auch explizit.

c) Welche Koordinaten hat das Element $w := 2 - 3x + x^2 \in V$ bezüglich der Basis C? Schreiben Sie w als Linearkombination von C.

d) Bestimmen Sie die Basis C explizit.

Lösung zu Aufgabe 8.4

a) $b_1 = u_1$, $b_2 = u_1 + u_2$, $b_3 = u_1 + u_2 + u_3$. Also ist

$$S_{E,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $S_{B,E} = S_{E,B}^{-1}$ und wir könnten damit $S_{B,E}$ durch invertieren von $S_{E,B}$ erhalten. Alternativ stellen wir einfach wieder die Basisvektoren als Linearkombination dar: $u_1 = b_1$, $u_2 = -b_1 + b_2$, $u_3 = -b_2 + b_3$ und damit

$$S_{B,E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $y = (1, 2, -1)^T$ sind die Koordinaten von v bezüglich B. Dann erhalten wir v in Koordinaten bezüglich E durch $S_{E,B}y = (2, 1, -1)^T$.

Explizit: $v = b_1 + 2b_2 - b_3 = 1 + 2(x + 1) - (x^2 + x + 1) = 2 + x - x^2 = 2u_1 + u_2 - u_3$.

c) $w = 2 - 3x + x^2 = 2u_1 - 3u_2 + u_3$, also hat w bezüglich E die Koordinaten $(2, -3, 1)^T$. Die Koordinaten bezüglich C erhalten wir also mittel $S_{C,E}(2, -3, 1)^T = (1, -3, 2)^T$, also $w = c_1 - 3c_2 + 2c_3$.

d) Da $S_{E,C} = S_{C,E}^{-1}$ bestimmen wir zunächst $S_{E,C}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} I - II - 2III \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Also gilt $S_{E,C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Spalten von $S_{E,C}$ geben uns nun C: $c_1 = 3u_1 - u_3 = 3 - x^2$, $c_2 = -u_1 + u_2 = x - 1$, $c_3 = -2u_1 + u_3 = x^2 - 2$.

Hausaufgabe 8.5 (Darstellungsmatrizen und Basiswechsel)
Es seien $B = \left\{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\right\}$ und $B' = \left\{(0,1,1)^T, (1.0,2)^T, (1,-1,0)^T\right\}$ Basen von $V = \mathbb{Q}^3$, sowie $C = \left\{(1,0)^T, (0,1)^T\right\}$ und $C' = \left\{(1,3)^T, (2,5)^T\right\}$ Basen von $W = \mathbb{Q}^2$. Ferner sei $\varphi : V \to W$ eine durch $\varphi((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1 + x_3, x_2 - x_3)^T$ definierte lineare Abbildung.

a) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $D_{B,C}(\varphi)$.

b) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $S_{B,B'}$, $S_{B',B}$, $S_{C,C'}$ und $S_{C',C}$.

c) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $D_{B',C'}(\varphi)$ mithilfe von (a), (b) und den zugehörigen Aussagen aus der Vorlesung. Prüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie φ auf die Basisvektoren aus B' anwenden und die Bilder als Linearkombinationen der Basis C' schreiben.

Lösung zu Aufgabe 8.5

a) Die Darstellungsmatrix $D_{B,C}(\varphi)$ bezüglich der Standardbasen B und C lässt sich direkt aus der Abbildungsvorschrift ablesen:

$$D_{B,C}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt

$$S_{B,B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad S_{B',B} = S_{B,B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

sowie

$$S_{C,C'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad S_{C',C} = S_{C,C'}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Wir erhalten

$$D_{B',C'}(\varphi) = S_{C',C} D_{B,C}(\varphi) S_{B,B'} = \begin{pmatrix} -5 & -19 & -7 \\ 3 & 11 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir das Bild jedes Vektors aus B' und prüfen, ob die entsprechenden Spalten von $D_{B',C'}(\varphi)$ die korrekte Linearkombination durch die Basis C' liefern:

$$\varphi((0,1,1)^T) = (1,0)^T = -5 \cdot (1,3)^T + 3 \cdot (2,5)^T,$$
$$\varphi((1,0,2)^T) = (3,-2)^T = -19 \cdot (1,3)^T + 11 \cdot (2,5)^T,$$
$$\varphi((1,-1,0)^T) = (1,-1)^T = -7 \cdot (1,3)^T + 4 \cdot (2,5)^T.$$

Hausaufgabe 8.6 (Determinanten 2)
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, e) $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

Lösung zu Aufgabe 8.6

a) $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 15 + 8 = 23.$

b) Wir addieren die erste Spalte (-2)-fach zur zweiten und (-3)-fach zur dritten damit bei der Entwicklung nach der ersten Zeile alle Unterdeterminanten bis auf eine den Vorfaktor 0 erhalten:

$$\begin{aligned}\det(B) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -10 & -9 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -10 & -9 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} = 70 + 9 = 79.\end{aligned}$$

c) Diesmal wird die dritte Spalte (-2)-fach zur ersten addiert:

$$\begin{aligned}\det(C) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 10 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 30 - 6 = 24.\end{aligned}$$

d) In der ersten Umformung wird nun die zweite Spalte 3-fach zur dritten und 2-fach zur vierten addiert und dann nach der ersten Zeile entwickelt. Anschließend wird die zweite Spalte (-2)-fach zur ersten addiert und dann nach der zweiten Zeile entwickelt.

$$\begin{aligned}\det(D) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 14 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 13 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 7 & 14 & 10 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -21 & 14 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -26 & 13 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -\det\begin{pmatrix} -21 & 10 \\ -26 & 3 \end{pmatrix} = -(-63 + 260) = -197.\end{aligned}$$

e) Hier nutzen wir aus, dass sich die Determinante einer Blockdreiecksmatrix aus dem Produkt der Determinanten der einzelnen Blöcke ergibt.

$$\begin{aligned}\det(E) = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & -1 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 10 & 11 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right)^2 \cdot (-1) = -(15 + 8)^2 = -529.\end{aligned}$$