Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 8

Präsenzaufgabe 8.1 (Darstellungsmatrizen und Komposition)
Es seien $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi((x_1, x_2)^T) := (x_1 - x_2, 0, 2x_1 - x_2)^T$ und $\psi((x_1, x_2, x_3)^T) := x_1 + x_2 + x_3$. Ferner seien $S := \left\{(1,0)^T, (0,1)^T\right\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ sowie $B := \left\{(1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T\right\}$ Basis des $\mathbb{R}^3$ und $C := \{1\}$ Basis des $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $D_{S,B}(\varphi)$, $D_{B,C}(\psi)$ und $D_{S,C}(\psi \circ \varphi)$.

Präsenzaufgabe 8.2 (Determinantenbestimmung)
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & -2 & -7 \end{pmatrix}$, c) $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 23 & -34 & 1 \\ 11 & 17 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e) $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Präsenzaufgabe 8.3 (Vandermonde Determinante)
Es seien K ein Körper und $x_1, \ldots, x_n \in K$. Dann heißt

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Vandermonde Matrix. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion indem Sie das x_1-fache jeder Spalte von der nächsten abziehen, dass $\det(V(x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$.

Bitte wenden!

Hausaufgabe 8.4 (Basiswechselmatrizen)
Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ der Raum der Polynome vom Grad ≤ 2 und $u_1 = 1$, $u_2 = x$, $u_3 = x^2$ und $b_1 = 1$, $b_2 = x + 1$, $b_3 = x^2 + x + 1$. Dann sind $E = \{u_1, u_2, u_3\}$ und $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ Basen von V (vgl. Aufgabe 5.3). Weiter sei $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ eine nicht explizit bekannte Basis, bekannt ist nur die Basiswechselmatrix

$$S_{C,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $S_{E,B}$ und $S_{B,E}$.

b) Sei $y := (1, 2, -1)^T \in \mathbb{R}^3$ der Koordinatenvektor eines Elements $v \in V$ bezüglich der Basis B. Wie lautet der Koordinatenvektor von v bezüglich der Basis E? Bestimmen Sie v auch explizit.

c) Welche Koordinaten hat das Element $w := 2 - 3x + x^2 \in V$ bezüglich der Basis C? Schreiben Sie w als Linearkombination von C.

d) Bestimmen Sie die Basis C explizit.

Hausaufgabe 8.5 (Darstellungsmatrizen und Basiswechsel)
Es seien $B = \left\{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\right\}$ und $B' = \left\{(0,1,1)^T, (1.0,2)^T, (1,-1,0)^T\right\}$ Basen von $V = \mathbb{Q}^3$, sowie $C = \left\{(1,0)^T, (0,1)^T\right\}$ und $C' = \left\{(1,3)^T, (2,5)^T\right\}$ Basen von $W = \mathbb{Q}^2$. Ferner sei $\varphi : V \to W$ eine durch $\varphi((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1 + x_3, x_2 - x_3)^T$ definierte lineare Abbildung.

a) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $D_{B,C}(\varphi)$.

b) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $S_{B,B'}$, $S_{B',B}$, $S_{C,C'}$ und $S_{C',C}$.

c) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $D_{B',C'}(\varphi)$ mithilfe von (a), (b) und den zugehörigen Aussagen aus der Vorlesung. Prüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie φ auf die Basisvektoren aus B' anwenden und die Bilder als Linearkombinationen der Basis C' schreiben.

Hausaufgabe 8.6 (Determinanten 2)
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, e) $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.

Abgabe: bis Mittwoch, 15.6.2016, 11:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Verwenden Sie bei Abgabe das auf der Homepage hochgeladene Deckblatt und geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.