Aufgabenblatt 7

Präsenzaufgabe 7.1 (Darstellungsmatrix, Kern und Bild)
Es seien $V := \mathbb{R}^{2\times 2}$, $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ die Standardbasis von V. Ferner sei $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi(X) := X + X^T$. Nach Aufgabe 5.4 (iv) ist φ dann linear.

a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D_B(\varphi)$.

b) Bestimmen Sie je eine Basis für $\text{Kern}(\varphi)$ und $\text{Bild}(\varphi)$.

Präsenzaufgabe 7.2 (Darstellungsmatrix mit zwei Basen)
Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ der Raum der Polynome vom Grad ≤ 2. Nach Aufgabe 5.3 ist $B = \{1, x+1, x^2+x+1\}$ eine Basis von V. Eine weitere Basis ist die Standardbasis $C = \{1, x, x^2\}$. Wir betrachten die Ableitungsabbildung $\varphi : V \to V, \quad f(X) \mapsto f'(X)$, welche gemäß Vorlesung linear ist. Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $D_{B,C}(\varphi)$ und $D_{C,B}(\varphi)$.

Präsenzaufgabe 7.3 (Doppelter Basiswechsel)
Im $\mathbb{R}^3$ seien drei Basen A, B, C gegeben, sowie die Basiswechselmatrizen

$$S_{A,B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_{A,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $S_{C,B}$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst einen Zusammenhang zwischen $S_{A,B}, S_{B,C}$ und $S_{A,C}$ (informelle Begründung genügt).

Präsenzaufgabe 7.4 (Inverse der Inzidenzmtrix)
Sei $G = (V, E)$ ein Baum. Gemäß Aufgabe 6.4 gilt dann $\text{rang}_{GF_2}(S_G) = n - 1$ für den Rang der Inzidenzmatrix $S_G \in GF_2^{n\times(n-1)}$.

Sei nun $\hat{S}_G \in GF_2^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus S_G durch Streichen der n-ten Zeile hervorgeht. Zeigen Sie:

a) $\hat{S}_G$ ist invertierbar.

b) Ist $B = (b_{ji})_{j,i\in[n-1]}$ die zu $\hat{S}_G$ inverse Matrix, dann gilt

$$b_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{falls } e_j \text{ zum (eindeutigen) Weg von } v_i \text{ nach } v_n \text{ gehört,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bitte wenden!

Hausaufgabe 7.5 (Formel zum invertieren von 2×2-Matrizen)
Bestimmen Sie eine allgemeine Formel um die Invertierbarkei einer 2×2-Matrix zu entscheiden und falls dies möglich ist die Inverse zu bestimmen.

Setzen Sie dazu $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ an und benutzen Sie den in der Vorlesung gegebenen Algorithmus. Unterscheiden Sie die Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$ und stellen Sie zum Schluss fest, dass beide Fälle die gleiche Formel ergeben.

Hausaufgabe 7.6 (Darstellungsmatrix)

Es sei $\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$, mit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Zeigen Sie, dass $B := \left\{(2,2,3)^T, (1,1,1)^T, (2,1,1)^T\right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D_B(\varphi_A)$.

Hausaufgabe 7.7 (Darstellungsmatrix zu Matrizenabbildung)
Es sei $V := \mathbb{R}^{2\times 2}$ (ein $\mathbb{R}$-Vektorraum!), $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in V$ und

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

die „kanonische Basis“ von V. Ferner sei $\varphi : V \to V$ definiert durch $X \mapsto AX - XA$.

a) Zeigen Sie, dass φ linear ist.

b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D_E(\varphi)$.

c) Bestimmen Sie Basen für Kern(φ) und Bild(φ). Wie lautet der Dimensionssatz?

d) Ist φ injektiv/surjektiv?

Hausaufgabe 7.8 (Bestimmung der Basis aus der Basiswechselmatrix)
Seien $B = \{b_1, b_2, b_3\} \subset V := \mathbb{Q}^3$ mit $b_1 = (1,1,1)^T$, $b_2 = (2,0,-1)^T$, $b_3 = (2,3,1)^T$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

a) Zeigen Sie, dass B eine Basis von V ist.

b) Zeigen Sie, dass $\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$ ein Vektorraumisomorphismus ist.

c) Bestimmen Sie eine Basis C von V, sodass $D_{B,C}(\varphi) = I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

Abgabe: bis Mittwoch, 8.6.2016, 11:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Verwenden Sie bei Abgabe das auf der Homepage hochgeladene Deckblatt und geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.