• Sei $\sigma \in S_n$. Sei $B = (b_{ij}) \in K^{n\times n}$ mit $b_{ij} = a_{i\sigma(j)}$ und $C = (c_{ij}) \in K^{n\times n}$ mit $c_{ij} = a_{\sigma(i)j}$.

B geht aus A durch Permutation der Spalten hervor.

C geht aus A durch Permutation der Zeilen hervor.

Dann gilt:

$$\det(B) = \det(C) = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\det(A)$$

Begründung: $\det(B) = \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau)\prod_{i=1}^n b_{i\tau(i)} = \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau)\cdot\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma\circ\tau(i)} =$

Definition von b_{ij}

$= \sum_{\rho\in S_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}\rho)}_{=\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\cdot\operatorname{sgn}(\rho)}\cdot\prod_{i=1}^n a_{i\rho(i)} =$

$\rho = \sigma\circ\tau$

Proposition von vorher

$= \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\cdot\sum_{\rho\in S_n}\operatorname{sgn}(\rho)\cdot\prod_{i=1}^n a_{i\rho(i)} = \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)}_{=\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})}\cdot\det(A)$ $\square$

- Falls in A zwei Zeilen oder Spalten übereinstimmen, folgt $\det(A)=0$.

Begründung: Es genügt $\det(A)=0$ für den Fall gleicher Spalten zu zeigen, da ja $\det(A^T)=\det(A)$.

Angenommen es gibt $1\leq j<k\leq n$, so dass $a_{ij}=a_{ik}$ $\forall i\in\{1,\dots,n\}$.

Sei $\tau\in S_n$ definiert durch $\tau(j)=k$, $\tau(k)=j$, $\tau(s)=s$ sonst.

Für alle $i,l\in\{1,..,n\}$ gilt dann $a_{il}=a_{i\tau(l)}$. (*)

Definiere $A_n=\{\sigma\in S_n \mid \operatorname{sgn}(\sigma)=1\}$. „alternierende Gruppe"

Da $\operatorname{sgn}(\tau)=-1$ folgt, dass $S_n=A_n\,\dot\cup\,\tau\cdot A_n$ mit $\tau A_n=\{\tau\circ\sigma \mid \sigma\in A_n\}$.

$$\Rightarrow \det(A)=\sum_{\sigma\in A_n}\left(\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} + \operatorname{sgn}(\tau\sigma)\cdot\prod_{i=1}^n a_{i,\tau\sigma(i)}\right)=$$

$$=\sum_{\sigma\in A_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\underbrace{\left(\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}-\prod_{i=1}^n a_{i,\tau\sigma(i)}\right)}_{=0\ \forall\sigma\ \leftarrow\ (*)}=0. \qquad \square$$

Satz (Determinantenmultiplikation)

Für $A, B \in K^{n\times n}$ gilt $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.

Beweis: Sei $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ $\Rightarrow$ der (i,j)-te Eintrag von $A\cdot B$ ist $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$

$$\Rightarrow \det(A\cdot B) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k,\sigma(j)}\right) =$$

längere Umformung des ersten Zeile

$$= \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{n} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ik_i} \cdot \prod_{j=1}^{n} b_{k_j\sigma(j)}$$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_n=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} a_{ik_i} \cdot \det\left((b_{k_j,l})_{j,l=1,\dots,n}\right)$$

$\det(b_{k_j,l})_{j,l=1,\dots,n}$ kann nur dann $\neq 0$ sein, wenn die k_j paarweise verschieden sind (⇒ sonst identische Zeilen!) $\Rightarrow$ die Abbildung $j \to k_j$ von $\{1,\dots,n\}$ nach $\{1,\dots,n\}$ muss eine Permutation sein

$\Rightarrow$ summiere über die Permutationen $\tilde{\sigma} \in S_n$:

$$\det(A \cdot B) = \sum_{\tilde{\sigma} \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\tilde{\sigma}(i)} \cdot \det\left(\left(b_{\tilde{\sigma}(j)l}\right)_{j,l=1,\dots,n}\right) =$$

$$= \sum_{\tilde{\sigma} \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\tilde{\sigma}(i)} \cdot \operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}) \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B) \qquad \square$$

Die Determinante ist multiplikativ! $\rightarrow$ A invertierbar $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Die Determinante ist nicht additiv!

Die vielen Äquivalenzen der Linearen Algebra

Satz Für $A \in K^{n \times n}$ gilt die Äquivalenz

$$A \text{ ist regulär} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Beweis: „$\Rightarrow$" Sei A regulär, dann gibt es eine Inverse A^{-1}. Es gilt $\det(A^{-1}) \cdot \det(A) =$

$$= \det(A^{-1} \cdot A) = \det(I_n) = 1$$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

„$\Leftarrow$" Sei nun A nicht regulär $\Rightarrow$ es gibt ein $v \in K^n \setminus \{0\}$ mit $A \cdot v = 0$.
Wir ergänzen v zu einer Basis $\{v = v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ von K^n und bilden die Matrix $B = (v_1, \ldots, v_n) \in K^{n \times n}$ mit den v_i als Spalten.
Da die Spalten von B linear unabhängig sind, folgt dass B regulär ist $\Rightarrow \det(B) \neq 0$ (wie oben)

$(A \cdot B)e_1 = Av_1 = Av = 0 \Rightarrow$ die erste Spalte von $A \cdot B$ besteht nur aus Nullen

erster Standardvektor

$\Rightarrow \det(A \cdot B) = 0$, aber wir wissen ja $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ und $\det(B) \neq 0 \Rightarrow \det(A) = 0$ $\square$

Für eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ sind äquivalent:

- A ist regulär
- A ist invertierbar $(A \in GL_n(K))$
- die Zeilen von A sind linear unabhängig
- die Spalten von A sind linear unabhängig
- Abbildung φ_A ist injektiv
- Abbildung φ_A ist surjektiv
- LGS $Ax = 0$ ist eindeutig lösbar
- $\ker(A) = \{0\}$
- $\forall b \in K^n$ ist das LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar
- $\det(A) \neq 0$

Korollar Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ seien ähnlich

zum Determinanten-multiplikationssatz

$$\Rightarrow \quad \det(A) = \det(B)$$

Beweis: Wir haben $B = S^{-1}AS$. Daher

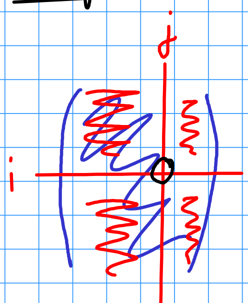
$$\det(B) = \underbrace{\det(S^{-1})}_{=\frac{1}{\det(S)}} \cdot \det(A) \cdot \det(S) = \det(A). \qquad \square$$

Interpretation: Sei $\varphi: V \to V$ linear, $\dim(V) = n < \infty$, so kann man $\det(\varphi) = \det(D_B(\varphi))$ definieren nach beliebiger Wahl einer Basis B. Für eine andere Basis geht $D_B(\varphi)$ in eine ähnliche Matrix über.

Berechnung einer Determinante

Problem bisher: „exponentieller Aufwand" bei der Evaluation unserer ursprünglichen Formel für die Determinante, da $|S_n| = n!$

Proposition Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ mit $n \geq 2$. Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.



Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$. $(*)$

Für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$. $(**)$

Das ist ein rekursives Schema für die Berechnung einer Determinante!

(*) heißt Entwicklung nach der i-ten Zeile.

(**) heißt Entwicklung nach der j-ten Spalte.

Die Formeln liefern einen Schema F-Ansatz, aber eine geschickte Wahl der Zeile oder Spalte für die Entwicklung kann viel Arbeit sparen.