Zusammenhang von Basen und Dimension

Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ (paarweise verschieden) und $S = \{v_1, \dots, v_n\}$

a) S ist eine Basis von $V \Leftrightarrow \dim(V) = n$ und S linear unabhängig

$\Leftrightarrow \dim(V) = n$ und $V = \langle S \rangle$

Begründung:

- Falls S eine Basis ist, so ist $\dim(V) = n$ und $V = \langle S \rangle$ und S linear unabhängig (nach Definition der Basis und der Dimension).

$\mathrm{I} \Leftrightarrow \mathrm{II}$

$\Downarrow \ \mathrm{III} \ \Nearrow$

- Ist $\dim(V) = n$ und S linear unabhängig, so ist S maximal linear unabhängig, also auch eine Basis.
- Ist $\dim(V) = n$ und $V = \langle S \rangle$, so ist S ein minimales Erzeugendensystem, also linear unabhängig.

$\square$

b) Falls $n < \dim(V)$, so gilt $V \neq \langle S \rangle$.

Begründung: Falls $n < \dim(V)$, so gibt es eine linear unabhängige Menge $U \subseteq V$ mit $|S| < |U|$ $\Rightarrow$ S kann kein Erzeugendensystem sein $\square$

c) Falls $n > \dim(V)$, so ist S linear abhängig

Begründung: Falls $n > \dim(V)$, so gibt es eine Basis $B \subseteq V$ mit $|B| < |S|$ $\Rightarrow$ S kann nicht linear unabhängig sein $\square$

Basisergänzung

Satz Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $S \subseteq V$ linear unabhängig. Dann existiert eine Basis B von V mit $S \subseteq B$. B heißt Basisergänzung von S.

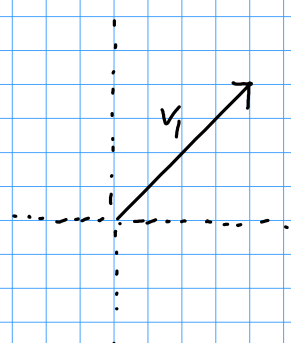
Satz gilt auch für unendliche Dimension

Beweis: Jede linear unabhängige Menge in V hat höchstens $\dim(V)$ Elemente. Aus allen linear unabhängigen Mengen M mit $S \subseteq M$ wählen wir eine aus, die maximal viele Elemente hat. Das ist dann eine maximale linear unabhängige Menge, also eine Basis. $\square$

Ausgehend von einer linear unabhängigen S kann man eine Basisergänzung durchführen, indem man „greedy" immer weitere zu den bisherigen Vektoren in S linear unabhängige Vektoren der Menge hinzufügt.

<u>Beispiele</u>

- $v_1 = \binom{1}{1} \in \mathbb{R}^2$ ist als einzelner Vektor linear unabhängig



v_1 lässt sich durch jeden zweiten Vektor, der nicht kollinear zu v_1 ist, zu einer Basis ergänzen.

- <u>allgemeine Möglichkeit für Basisergänzung</u>

Seien $v_1, \dots, v_s \in K^n$ mit $s < n$ linear unabhängig.

$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} | & & | & \\ v_1 & \dots & v_s & I_n \\ | & & | & \end{pmatrix}$ ist Erzeugendensystem, denn die Spalten von I_n sind ja bereits ein solches für sich genommen

$\Rightarrow$ Wähle Teilmenge von $n-s$ Vektoren von I_n aus. Diese Vektoren müssen linear unabhängig sein zu $v_1, \dots, v_s$

hier ist die Situation einfacher als normalerweise!

algorithmischer Ansatz: Herstellung von Zeilenstufenform in A oder A^T (ohne Vertauschung von Zeilen) hilft weiter

Beobachtung für endliche Dimension:

$U \subseteq V$ Untervektorraum $\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(V)$

$U \neq V \quad \overset{\text{Endlichkeit}}{\Rightarrow} \quad \dim(U) < \dim(V)$

äquivalent: $\dim(U) = \dim(V) < \infty \Rightarrow U = V$

Begründung: Jede linear unabhängige Teilmenge $S \subseteq U$ kann zu Basis B von V ergänzt werden, also $|S| \leq |B| = \dim(V) < \infty$

Es gibt eine maximal linear unabhängige Teilmenge $S \subseteq U$, die also auch eine Basis von U sein muss.

$\Rightarrow$ Für so ein S gilt $|S| \leq \dim(V)$ und für $\dim(U) = \dim(V)$ folgt $S = B$. $\Rightarrow U = \langle S \rangle = \langle B \rangle = V$ $\square$

7 Lineare Abbildungen

V, W Vektorräume, K Körper

Definition Eine Abbildung $\varphi: V \to W$ heißt linear, falls gelten

(1) Für alle $v, v' \in V$: $\varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v')$

(2) Für alle $v \in V$ und $a \in K$: $\varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v)$

Beobachtung aus (2): Eine lineare Abbildung bildet den Nullvektor von V auf den Nullvektor von W ab.

Beispiele (1) $A \in K^{m \times n}$. Dann ist $\varphi_A : K^n \to K^m$, $v \mapsto A \cdot v$ eine lineare Abbildung.

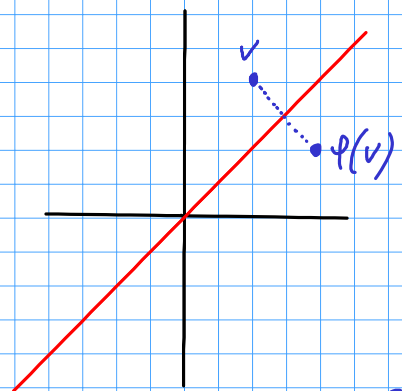
$A(v+v') = Av + Av'$

$A(av) = a(Av)$

(2) Nullabbildung $V \to W$, $v \mapsto 0$ ist linear.

(3) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dann sind lineare Abbildungen z.B.

- Drehung um den Nullpunkt
- Streckung mit Nullpunkt als Zentrum
- Spiegelung an einer Null gehenden <u>Geraden</u>



Gegenbeispiele:

- Drehungen um Punkte $\neq 0$
- Verschiebungen (Translationen)

z.B. $\varphi(v) = v + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Polynomring in x über $\mathbb{R}$

(4) $V = \mathbb{R}[x]$. Dann ist $\varphi: V \to V$, $f \mapsto f'$ (Ableitung) ist linear

$(a \cdot f)' = a \cdot f'$, $(f+g)' = f' + g'$

(5) $V = K^n$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\pi_i: V \to K$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i$ ist linear

Bezeichnung: <u>i-tes Koordinatenfunktional</u>

(6) M Menge, $x_1,\dots,x_n \in M$ fest

Dann ist $\varphi: V = \mathrm{Abb}(M,K) \to K^n$, $f \mapsto \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$ linear

(7) Sind $\varphi, \psi : V \to W$ linear, so auch $\varphi + \psi : V \to W$, $v \mapsto \varphi(v) + \psi(v)$

und für ein $a \in K$ auch $a \cdot \varphi : V \to W$, $v \mapsto a \cdot \varphi(v)$

(8) Sind $\varphi: V \to W$ und $\psi: W \to U$ linear, so ist auch die Komposition

$\psi \circ \varphi : V \to U$, $(\psi \circ \varphi)(v) = \psi(\varphi(v))$ linear

<u>Definition</u> Sei $\varphi: V \to W$ linear.

Der <u>Kern</u> von φ ist $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{ v \in V \mid \varphi(v) = 0 \} \subseteq V$

Das <u>Bild</u> von φ ist $\mathrm{Bild}(\varphi) = \varphi(V) = \{ \varphi(v) \mid v \in V \} \subseteq W$.

Kern, Bild und Unterräume

Satz Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

a) $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ist ein Unterraum von V

b) $\mathrm{Bild}(\varphi)$ ist ein Unterraum von W

c) φ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$.

Beweis a) V Vektorraum ✓

Der Nullvektor ist in $\mathrm{Kern}(\varphi)$ enthalten $\Rightarrow \mathrm{Kern}(\varphi) \neq \emptyset$

vgl. unsere erste Beobachtung nach der Definition der linearen Abbildung

Für $v, v' \in \mathrm{Kern}(\varphi)$ gilt $\varphi(v+v') = \varphi(v) + \varphi(v') = 0 + 0 = 0$, also $v + v' \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. Für $v \in \mathrm{Kern}(\varphi)$ und $a \in K$ gilt $\varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v) = a \cdot 0 = 0$, also $a \cdot v \in \mathrm{Kern}(\varphi)$.

b) wieder explizite Kontrolle der Unterraumeigenschaften

c) „φ injektiv $\Rightarrow \operatorname{Kern}\varphi = \{0\}$". Für $v \in \operatorname{Kern}(\varphi)$ gilt $\varphi(v) = 0 = \varphi(0)$, also $v = 0$. Da umgekehrt $0 \in \operatorname{Kern}(\varphi)$ folgt $\operatorname{Kern}(\varphi) = \{0\}$.

„$\operatorname{Kern}\varphi = \{0\} \Rightarrow \varphi$ injektiv" Seien $v, v' \in V$ mit $\varphi(v) = \varphi(v')$.

$\Rightarrow \varphi(v) - \varphi(v') = \varphi(v - v') = 0$, also ist $v - v' \in \operatorname{Kern}(\varphi)$

$\underset{\operatorname{Kern}\varphi = \{0\}}{\Rightarrow} \quad v - v' = 0 \Leftrightarrow v = v' \Rightarrow \varphi$ ist injektiv.

$\square$

<u>Beispiele</u> (1) Sei $A \in K^{m \times n}$. φ_A ist ja eine lineare Abbildung. Dann ist $\operatorname{Kern}(\varphi_A)$ die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Insbesondere gilt: φ_A ist injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{rang} A = n$.