Ablesen der Lösungsmenge ohne Formel

homogenes LGS

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

diese Spalten müssen die Bedingungen für die strenge Zeilenstufenform erfüllen

- diese Spalten bzw. die zugehörigen Variablen sind „frei", d.h. unrestringiert
- die Anzahl dieser Spalten gibt die Freiheitsgrade der Lösungsmenge

Auflösen

nach den „roten" Variablen

Benutze jeweils die zugehörige Gleichung!

$x_1 = -2x_3 - x_5$
$x_2 = -2x_3 + x_5$
x_3 frei
$x_4 = -2x_5$
x_5 frei

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -2a_3 - a_5 \\ -2a_3 + a_5 \\ a_3 \\ -2a_5 \\ a_5 \end{pmatrix} \middle| \; a_3, a_5 \in K \right\} = \left\{ a_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; a_3, a_5 \in K \right\}$$

inhomogenes LGS

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Schritt 1: Bestimme Lösungsmenge L_0 für homogenes System

Schritt 2: Bestimme <u>einen</u> Vektor x mit $Ax=b$

z.B. hier:

$x_3 = x_5 = 0$ für die freien Variablen

$$x_4 + 2x_5 = 3 \Rightarrow x_4 = 3$$
$$x_2 + 2x_3 - x_5 = 0 \qquad x_2 = 0$$
$$x_1 + 2x_3 + x_5 = 1 \qquad x_1 = 1$$

$\Rightarrow$ Vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfüllt $Ax=b$

Beobachtung: $Ax = b \Leftrightarrow Ax + 0 = b \Leftrightarrow Ax + Ay = b$

der <u>eine</u> Vektor mit $Ax=b$

Lösungen y des homogenen LGS, d.h. $y: Ay = 0$

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + L_0$$

Varianten der (Un-)Lösbarkeit von LGS

(1) Unlösbarkeit: $L = \emptyset \iff j_r = n+1$ im obigen Algorithmus

$0 \dots\dots 0 \mid \xi$

$0 = \xi$

(2) Eindeutige Lösbarkeit: $|L| = 1 \iff r = n$ und $j_r = n$ im obigen Algorithmus

In diesem Fall muss gelten: $j_i = i \;\forall i \leq n$,

d.h. die strenge Zeilenstufenform diese schöne Form haben:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_1 \\
0 & a_{22} & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1\,n-1} & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & & 0 & a_{n,n} & b_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

die eindeutige Lösung ist

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

(3) Uneindeutige Lösbarkeit: $|L| > 1 \iff r < n$ und $j_r \neq n+1$

Lösung hat $n-r$ Freiheitsgrade. $|L| = \infty$, falls K unendlich

<u>Definition</u> Seien $A \in K^{m \times n}$ und $A' \in K^{m \times n}$ durch elementare Zeilenoperationen aus A entstanden und in Zeilenstufenform.
Dann ist der <u>Rang</u> von A die Anzahl $r = rg(A) = rang(A)$ der Zeilen in A', die einen Eintrag $\neq 0$ haben.
Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt <u>regulär</u>, falls $rang(A) = n$. „Sie hat vollen Rang."

Offene Frage: Ist r eindeutig definiert? (Man kann ja viele verschiedene A' herstellen!)

Antwort: Ja! (später)

$\operatorname{rang}(I_n) = n$, $\operatorname{rang}(0) = 0$

$\operatorname{rang}(A) \leq \min\{m,n\}$ für $A \in K^{m \times n}$

Der Rang ist durch die Anzahl der Zeilen und die Anzahl der Spalten nach oben beschränkt!

$\operatorname{rang}(A) \leq m$, $\operatorname{rang}(A) \leq n$

<u>Satz</u> (Lösbarkeit von LGS)

Ein LGS $Ax = b$ ist lösbar genau dann wenn die Koeffizientenmatrix A denselben Rang hat wie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$.

④ Vektorräume

Definition Ein Vektorraum (über K) ist eine Menge V mit zwei Abbildungen $+ : V \times V \to V$, $(v,w) \mapsto v+w$, und $\cdot\, K \times V \to V$, $(a,v) \mapsto a \cdot v$, wobei gilt:

(1) V ist mit $+$ eine abelsche Gruppe

(2) $\forall a \in K,\ v,w \in V: \quad a \cdot (v+w) = a \cdot v + a \cdot w$

(3) $\forall a,b \in K,\ v \in V: \quad (a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$ (aus Körper)

(4) $\forall a,b \in K,\ v \in V: \quad (a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$

(5) $\forall v \in V: \quad 1 \cdot v = v$

Die Elemente $v \in V$ sind die Vektoren.

Beispiele

(1) $K^{m \times n}$ ist K-Vektorraum

vergleiche die Rechenregeln zu K und zu Matrizen an!

(2) der n-dimensionale K^n ist K-Vektorraum

Spezialfall von (1)!

(3) K ist ein K-Vektorraum (Spezialfall $n=1$)

(4) $V = \{0\}$ mit $0+0=0$ und $a \cdot 0 = 0 \; \forall a \in K$ ist K-Vektorraum, der sogenannte <u>Nullraum</u>

(5) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum

(6) $K[x] = \{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in K \}$ ist ein K-Vektorraum (mit Polynomaddition und Produkt einer Konstanten mit Polynom)

(7) M Menge und $V = \mathrm{Abb}(M, K) = \{ f : M \to K \mid f \text{ Abbildung} \}$

$f, g \in V, a \in K$: $f+g : M \to K, \; x \mapsto f(x) + g(x)$

$a \cdot f : M \to K, \; x \mapsto a \cdot f(x)$

$\hat{=}$ Punktweise Definition der Operationen

V ist K-Vektorraum. Der Nullvektor ist Nullfunktion f_0 mit $f_0(x) = 0 \;\; \forall x \in M$.

Beweise für (1) bis (7) durch explizite Kontrolle aller Vektorraumeigenschaften

<u>Gegenbeispiel</u> V abelsche Gruppe mit neutralem Element, aber $V \neq \{0\}$.

$a \cdot v = 0 \;\; \forall a \in K, v \in V \Rightarrow$ Eigenschaften (1)-(4) erfüllt, aber nicht (5), da es ja ein $v \neq 0$ gibt

$\Rightarrow V$ ist kein K-Vektorraum

Rechenregeln für Vektoren / Vektorräume

V K-Vektorraum, $a \in K$, $v \in V$

(a) $a \cdot 0 = 0$ und $0 \cdot v = 0$

Vektor

Körper

Begründung: $a \cdot 0 \underset{(1)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 - (a \cdot 0) \underset{(2)}{=} a \cdot (0+0) - (a \cdot 0) \underset{(1)}{=} a \cdot 0 - (a \cdot 0) \underset{(1)}{=} 0$

und $0 \cdot v \underset{(1)}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v - (0 \cdot v) \underset{(3)}{=} (0+0) \cdot v - (0 \cdot v) \underset{K}{=} 0 \cdot v - (0 \cdot v) \underset{(1)}{=} 0$ $\square$

(b) $(-a) \cdot v = a \cdot (-v) = -(a \cdot v)$

Begründung: $(-a) \cdot v \underset{(1)}{=} (-a) v + a \cdot v - (a \cdot v) \underset{(3)}{=} (-a+a) v - (a \cdot v) \underset{K}{=} 0 \cdot v - (a \cdot v)$

und $a \cdot (-v) \underset{(1)}{=} a(-v) + a \cdot v - (a \cdot v) \underset{(2)}{=} a(-v+v) - (av) = a \cdot 0 - (av) \underset{(a)}{=} -(av)$ $\square$

(c) $av = 0 \Rightarrow a = 0 \vee v = 0$

Begründung: Sei $av = 0$ und $a \neq 0$

$$\Rightarrow v \underset{(5)}{=} 1 \cdot v \underset{K}{=} (a^{-1} \cdot a) \cdot v \underset{(4)}{=} a^{-1} \cdot (av) = a^{-1} \cdot 0 \underset{(a)}{=} 0$$

$\square$