Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 2

Präsenzaufgabe 2.1 (Transponierte Matrizen und Symmetrie)
Es seien K ein Körper, $m, n, l \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times l}$. Dann ist die Produktmatrix AB und damit auch ihre Transponierte $(AB)^T$ wohldefiniert.

a) Wieviele Zeilen und Spalten haben die Matrizen AB, A^T, B^T und $(AB)^T$?

b) Welchen Zusammenhang vermuten Sie zwischen $(AB)^T$ und den Matrizen A^T, B^T?

c) Verifizieren Sie ihre Vermutung für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

Lösung zu Aufgabe 2.1

a) AB hat m Zeilen und l Spalten, A^T hat n Zeilen und m Spalten, B^T hat l Zeilen und n Spalten und $(AB)^T$ hat l Zeilen und m Spalten.

b) Es gilt $C := (AB)^T = B^T A^T =: D$.

   Beweis: Seien $C = (c_{ij})_{i\in[l],j\in[m]}$ und $D = (d_{ij})_{i\in[l],j\in[m]}$, dann gilt $c_{ij} = \sum_{k\in n} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k\in n} b_{ki}a_{jk} = d_{ij}$.

c) $AB = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, also $(AB)^T = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. $B^T A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Präsenzaufgabe 2.2 (Symbolisch Rechnen mit Matrizen)
Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Multiplizeren Sie $(A + B)^2 = (A + B)(A + B)$ aus, und geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an, wann die „binomische Formel“ $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 2.2
Es gilt

$$(A + B)(A + B) = (A + B)A + (A + B)B = AA + BA + AB + BB = A^2 + B^2 + AB + BA.$$

Dies ist genau dann gleich $A^2 + B^2 + 2AB$, wenn $AB + BA = 2AB$ also genau dann, wenn $AB = BA$ gilt.

Präsenzaufgabe 2.3 (Kommunikationsnetzwerk)
Vier Computer sollen zu einem kleinen Netzwerk verbunden werden. Welcher Rechner mit welchem direkt verbunden ist stellen wir in einer *Kommunikationsmatrix* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ dar, wobei

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls eine direkte Verbindung von Computer } i \text{ zu Computer } j \text{ besteht } (i \neq j), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im vorliegenden Fall lautet die Kommunikationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

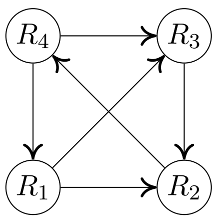
a) Veranschaulichen Sie sich das Netzwerk mithilfe eines gerichteten Graphen.

b) Berechnen Sie A^2 und A^3. Welche Bedeutung haben diese Matrizen für das Netzwerk?

c) Was ist der kleinste Wert von m, sodass die Matrix $A + A^2 + \ldots + A^m$ außerhalb der Hauptdiagonalen nur von Null verschiedene Einträge hat? Welche Bedeutung hat diese Zahl m für das Netzwerk?

Lösung zu Aufgabe 2.3

a)



b) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Jeder Eintrag c_{ij} von A^2 berechnet sich über $c_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik}a_{kj}$, wobei

$$a_{ik}a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{falls eine Verbindung von } i \text{ zu } j \text{ über } k \text{ besteht,} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Demnach zählt c_{ij} also die Anzahl der i, j-Verbindungen der Länge 2.

Jeder Eintrag d_{ij} von A^3 berechnet sich über $d_{ij} = \sum_{k=1}^{4} c_{ik}a_{kj}$, wobei

$$c_{ik}a_{kj} = \begin{cases} c_{ik} & \text{falls eine Verbindung von } k \text{ zu } j \text{ besteht,} \\ 0 & \text{sonst ,} \end{cases}$$

d.h. $c_{ik}a_{kj}$ zählt die Anzahl der Verbindungen von i nach j der Länge 3, mit k ist direkter Vorgänger von j. Somit zählt d_{ij} also die Anzahl der i, j-Verbindungen der Länge 3.

c) Die Matrix $\bar{A} = A + A^2 + \ldots + A^m$ zählt die i, j-Wege der Länge höchstens m. Die Matrix $\bar{A}$ hat also genau dann lauter von Null verschiedene Einträge außerhalb der Hauptdiagonalen, wenn jeder Rechner von jedem anderen Rechner über einen Weg der Länge höchstens m erreichbar ist, also über höchstens $m-1$ Zwischenrechner. Das kleinste solche m ist also die Länge eines längsten Weges (bezüglich der Anzahl der nötigen Verbindungen) zwischen zwei Rechnern.

Präsenzaufgabe 2.4 (Lineare Gleichungssysteme)
Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{rrl} x & +4y & = 2 \\ 3x & +5y & = 7 \end{array} \qquad \text{(b)}\quad \begin{array}{rrl} x & +2y & = 1 \\ 3x & +6y & = 3 \\ 2x & +4y & = 2 \end{array} \qquad \text{(c)}\quad \begin{array}{rrrl} x & +2y & +3z & = 4 \\ 2x & +4y & +6z & = 10 \end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 2.4

a) Zunächst „zu Fuß“: Gleichungssystem: $x + 4y = 2$ und $3x + 5y = 7$. Wir subtrahieren das dreifache der ersten Gleichung von der zweiten um dort x zu eliminieren: $x + 4y = 2$ und $-7y = 1$. Teilt man nun die zweite durch -7 so erhält man $y = -\frac{1}{7}$ und wenn wir das 4mal von der ersten Gleichung subtrahieren, folgt $x = \frac{18}{7}$. Die Lösungsmenge ist also $L = \left\{(\frac{18}{7}, -\frac{1}{7})^T\right\}$.

Mithilfe der erweiterten Koeffizientenmatrix stellt sich das ganze wie folgt dar:

$$\begin{array}{r l} & \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{array}\right] \\ II - 3I & \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & 1 \end{array}\right] \\ -\frac{1}{7}II & \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{array}\right] \\ I - 4II & \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & \frac{18}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{array}\right], \end{array}$$

woraus sich die Lösungsmenge wie oben ablesen lässt.

b) Wir lösen diesmal direkt mit der erweiterten Koeffizientenmatrix und der sogenannten Gauß-Elimination, wobei wir erst aufhören, wenn strenge Zeilenstufenform erreicht wurde:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ -2 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ II - 3I \\ III + 2I \end{array} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Die Lösung ist nicht eindeutig, setze $x_2 = a$ als Parameter, dann folgt $x_1 = 1 - 2a$ und damit $L = \left\{(1 - 2a, a)^T : a \in \mathbb{R}\right\}$.

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \end{array}\right]$$

$$II-2I\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Aufgrund der letzten Zeile, die sich als Gleichung $0 = 2$ liest, ist das LGS nicht lösbar, d.h. $L = \emptyset$.

Hausaufgabe 2.5 (Symbolisch Rechnen mit Matrizen)
Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Multiplizieren Sie $(A + B)(A - B)$ aus, und geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an, wann die „binomische Formel“ $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ gilt.

b) Es seien A und B symmetrisch. Zeigen Sie: mithilfe der Formel $(AB)^T = B^T A^T$, dass AB genau dann symmetrisch ist, wenn $AB = BA$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 2.5

a) Es ist

$$(A+B)(A-B) = (A+B)A - (A+B)B = AA + BA - AB - BB = A^2 - B^2 + BA - AB.$$

Dies ist genau dann gleich $A^2 - B^2$, wenn $BA - AB = 0$ also wieder genau dann, wenn $AB = BA$ gilt.

b) Nach Voraussetzung gilt $A = A^T$ und $B = B^T$. Mit dem Hinweis erhalten wir $(AB)^T = B^T A^T = BA$. Also gilt $(AB)^T = AB$ (d.h. AB ist symmetrisch) genau dann, wenn $AB = BA$ gilt.

Hausaufgabe 2.6 (Soziale Netzwerke)
Die Informatikstudierenden Peter, Franz, Lisa, Anna, und Sepp sind bei dem sozialen Netzwerk `Freundbuch.de` angemeldet. Bei Freundbuch kann jeder Benutzer jeden anderen in seine `Friendlist` aufnehmen, was aber nicht automatisch wechselseitig geschieht. Man ist natürlich um so beliebter, je mehr andere Benutzer einen auf ihre `Friendlist` setzen. Die Listen der fünf obigen Studierenden lauten wie folgt:

Benutzer	Friendlist
Peter	Franz, Lisa
Franz	Peter
Lisa	Franz, Anna, Sepp
Anna	Sepp
Sepp	Franz, Lisa

Sie als `Freundbuch.de` CEO und Chief-Programmer wollen ein Ranking unter ihren Benutzern erstellen, das deren Beliebtheit wiederspiegeln soll. Jedem Benutzer soll dazu eine `Friendscore` zwischen 0 und 100 zugeordnet werden, die angibt wie beliebt er ist. (Ganz unverfroren klauen Sie hierzu natürlich die Google-Idee.)

a) Geben Sie eine Matrix $F \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ mit Einträgen 0 und 1 an, die den Freundschaftsbeziehungen entspricht, und veranschaulichen Sie sich die Beziehungen auch an einem gerichteten Graphen.

b) Man stelle sich nun folgendes vor: Zunächst wird zufällig eine Person ausgewählt, die dann zufällig eine Person ihrer `Friendlist` besucht. Die getroffene Person besucht dann wieder zufällig jemanden aus ihrer `Friendlist`, usw. . Welche Übergangsmatrix T (Wahrscheinlichkeiten!) gehört zu dieser Vorgehensweise?

c) Berechnen Sie T^{1000} näherungsweise mit einem Computer (selbstgeschriebenes Programm, Maple, Matlab, was immer Sie benutzen wollen). Welche `Friendscore` leiten Sie für die fünf Freunde aus T^{1000} ab und wie sieht das entsprechende Beliebtheitsranking aus? (Macht das Sinn?)

Lösung zu Aufgabe 2.6

a) Die Matrix F hat eine 1 in Zeile i/Spalte j, wenn der Benutzer i den Benutzer j auf seiner Friendlist hat. Numerieren wir Peter, Franz, Lisa, Anna, und Sepp mit 1 bis 5 durch, so erhalten wir als Freundschaftsmatrix

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Wir erhalten die Übergangsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Es ergibt sich

$$T^{1000} = \begin{pmatrix} 0.285714 & 0.285714 & 0.214286 & 0.071429 & 0.142857 \\ 0.285714 & 0.285714 & 0.214286 & 0.071429 & 0.142857 \\ 0.285714 & 0.285714 & 0.214286 & 0.071429 & 0.142857 \\ 0.285714 & 0.285714 & 0.214286 & 0.071429 & 0.142857 \\ 0.285714 & 0.285714 & 0.214286 & 0.071429 & 0.142857 \end{pmatrix}$$

Damit sind Peter und Franz gleich beliebt mit einem `Friendscore` von 28.57. Die nächst beliebteste ist Lisa mit 21.42 Punkten, gefolgt von Sepp mit 14.28 Punkte und Anna mit 7.14 Punkten.

Obwohl Peter nur auf der Liste von Franz steht hat Peter einen hohen Score, was daran liegt, dass der beliebte Franz ihn (als einzigen!) auf seiner Liste hat.

Hausaufgabe (R) 2.7 (Lineare Gleichungssysteme 2)

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & - & 3x_5 & - & 2x_6 & = & 0 \\ & & & & 6x_3 & - & 4x_4 & + & 3x_5 & + & 2x_6 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & - & 6x_4 & + & 2x_5 & + & 3x_6 & = & 0 \end{array} \quad .$$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper GF_2:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & & & + & x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & & & = & 1 \\ x_1 & & & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & = & 1 \end{array} \quad .$$

Lösung zu Aufgabe 2.7

a) Die zu diesem linearen Gleichungssystem gehörige erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & -6 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Wir bringen diese Matrix mit Hilfe des Gauß-Algorithmus' auf (strenge) Zeilenstufenform:

Hierzu addieren wir zunächst das -2-fache der ersten zur zweiten, das 1-fache der ersten zur dritten und das -3-fache der ersten zur fünften Zeile. Man erhält:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Jetzt addieren wir das -3-fache der letzten zur ersten, das 5-fache der letzten zur zweiten, das -5-fache der letzten zur dritten und das -6-fache der letzten zur vorletzten Zeile. Anschließend addieren wir die zweite zur vierten Zeile und erhalten nach ein paar Zeilenvertauschungen:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 0 & -2 & 4 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Nun räumen wir mithilfe der dritten Zeile die vierte Spalte auf:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 & 10 & -44 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -21 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Wir teilen die vierte Zeile durch -21 und räumen mit ihr die fünfte Spalte frei:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Damit haben wir (strenge) Zeilenstufenform erreicht und können die Lösungsmenge L ablesen:

$$L = \{(-2s + 4t, s, t, 5t, 4t, t) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

b) Die erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems lautet:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Nach Anwendung des Gauß-Algorithmus' geht diese in

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

über. Die Lösungsmenge L kann man direkt ablesen:

$$\begin{aligned} L &= \{(1 + s + t + u, 1 + s + t, 1 + s, s, t, u) : s, t, u \in GF_2\} \\ &= \{(1, 1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 1), \\ &\quad (0, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 2.8 (Gamepad)

In dieser Aufgabe untersuchen wir ein (idealisiertes) Gamepad, das u.a. vier Action-Tasten $1, 2, 3, 4$ besitzt, die in den Ecken eines Quadrats angeordnet sind. Jede Taste $i \in [4]$ kann dabei in einer Stärke $x_i \in [0, 10]$ gedrückt werden (um etwa verschieden starkes „Gas geben" zu simulieren). Ein Tastenzustand wird also etwa durch folgende Grafik beschrieben:

x_1	x_2
x_3	x_4

Aus technischen Gründen wird dabei nicht die Intensität jedes Tastendrucks einzeln abgefragt, sondern

- $s_1 = x_1 + x_2$, die Summe der Intensitäten der ersten Zeile,
- $s_2 = x_1 + x_3$, $\;s_3 = x_2 + x_4$, die Summen der Intensitäten der Spalten und
- $s_4 = x_1 + x_4$, die Summe der Hauptdiagonale.

a) Mit welchen Intensitäten x_i wurden die Tasten i, $i \in [4]$ im Fall der Messwerte $s_1 = 3$, $s_2 = 7$, $s_3 = 8$ und $s_4 = 9$ gedrückt?

b) Begründen Sie, dass sich aus der technischen Anordnung aus jeder Messung von $s_1, \ldots, s_4$ eindeutig die Tastenintensitäten x_i rekonstruieren lassen.

Lösung zu Aufgabe 2.8

a) Aus der Beschreibung der Intensitätenmessungen über die s_i und die gemessenen Werte der s_i ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= s_1 = 3 \\ x_1 + x_3 &= s_2 = 7 \\ x_2 + x_4 &= s_3 = 8 \\ x_1 + x_4 &= s_4 = 9 \end{aligned}$$

und daraus die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

Wir führen den Gauß-Algorithmus durch um strenge Steilenstufenform zu erhalten:

$$\begin{array}{r} \\ II - I \\ \\ IV - I \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} \\ -II \\ III + II \\ IV - II \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ IV + III \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 14 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} \\ \\ III - \frac{1}{2}IV \\ \frac{1}{2}IV \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ II + III \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} I - II \\ \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

D.h. $L = \{(2, 1, 5, 7)^T\}$.

b) Die Umformungen in (a) ändern sich nicht, wenn man die rechte Seite, also die s_i-Werte verändert. Es ergibt sich also auf jeden Fall am Ende eine Matrix der Form

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right],$$

wobei „*“ für beliebige reelle Werte steht. Man kann die eindeutige(!) Lösung dann direkt ablesen.