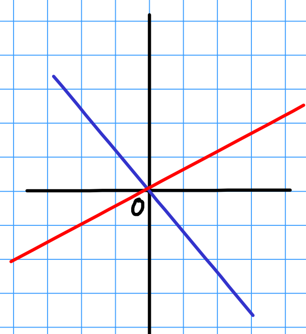
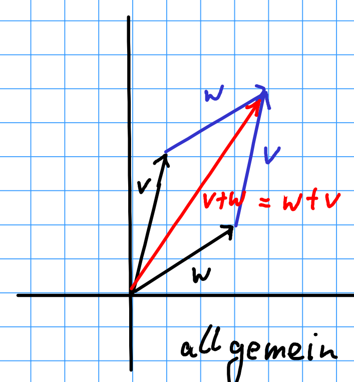
Definition Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ (mit den selben Abbildungen $+$ und $\cdot$) heißt **Untervektorraum**, wenn gilt:

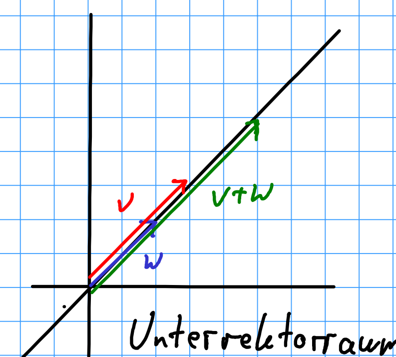
$$\left.\begin{array}{ll} (1) & U \neq \emptyset \\ (2) & \forall v, w \in U : v + w \in U \\ (3) & \forall a \in K, v \in U : a \cdot v \in U \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \in U$$

Untervektorräume sind selbst wieder Vektorräume.

Beispiele (1) $V = \mathbb{R}^2$. Jede Gerade durch Nullpunkt ist ein Untervektorraum.

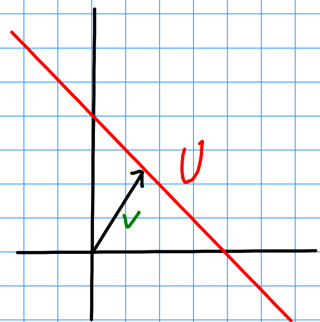






Sei $v \in V \Rightarrow K \cdot v = \{a \cdot v \mid a \in K\} \subseteq V$ ist ein Untervektorraum.

Beschreibung einer Gerade



kein Untervektorraum

„affiner Untervektorraum" Vektor + Untervektorraum

$v + U$

(2) $V = \mathbb{R}^3$. Jede Ebene durch Nullpunkt ist ein Untervektorraum.

Jede Gerade durch Nullpunkt ist ein Untervektorraum.

$\{0\}$ und V sind Untervektorräume.

das sind alle Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$

(3) Sei M Menge, $V = \mathrm{Abb}(M,K)$ und sei $x \in M$ fest.

Dann ist $U = \{f \in V \mid f(x) = 0\} \subseteq V$ ein Untervektorraum.

$f, g \in U \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0 \quad (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x) = k \cdot 0 = 0$

$f(x)=1$ als Eigenschaft würde nicht zu einem Untervektorraum führen! $f,g\in U=\{f\in V \mid f(x)=1\} \Rightarrow (f+g)(x)=1+1=2$

$\Rightarrow f+g\notin U$

(4) Lösungsmenge eines homogenen LGS $Ax=0$ mit $A\in K^{m\times n}$ ist ein Untervektorraum von K^n.

U

$x,y\in U \Rightarrow A(x+y)=Ax+Ay=0+0=0 \Rightarrow x+y\in U$

$x\in U \Rightarrow A(K\cdot x)=K\cdot Ax=K\cdot 0=0 \Rightarrow K\cdot x\in U$

$0\in U$

(5) Vereinigung zweier Geraden $U_1,U_2\subseteq\mathbb{R}^2$ durch Null ist kein Untervektorraum

Begründung siehe z.B. die Skizze zur allgemeinen Vektoraddition in (1) mit $U_1=K\cdot v$, $U_2=K\cdot w$ und $v+w\notin U_1\cup U_2$

Eigenschaften von Untervektorräumen

V K-Vektorraum, $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume

a) $U_1 \cap U_2 \subseteq V$ ist Untervektorräume

Begründung folgt aus c)

Standardbeispiel: homogene LGS

b) $U_1 + U_2 = \{ v + w \mid v \in U_1, w \in U_2 \} \subseteq V$

ist Untervektorraum

insbesondere $U_1 \cup U_2 \subseteq U_1 + U_2$

„Summenraum"

Begründung: Es gilt $0+0 = 0 \in U_1 + U_2 \Rightarrow U_1 + U_2 \neq \emptyset$

Seien $v+w, v'+w' \in U_1 + U_2$ mit $v, v' \in U_1$, $w, w' \in U_2$.

Dann $(v+w) + (v'+w') = \underbrace{(v+v')}_{\in U_1} + \underbrace{(w+w')}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$

und für $a \in K$ folgt

$$a(v+w) = \underbrace{av}_{\in U_1} + \underbrace{aw}_{\in U_2} \in U_1 + U_2.$$

c) Ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge, deren Elemente Untervektorräume von V sind, so ist Schnitt $\bigcap\limits_{U\in\mathcal{M}} U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

Begründung: Sei $W = \bigcap\limits_{U\in\mathcal{M}} U$. $\forall U \in \mathcal{M}$ gilt $0 \in U$, also $0 \in W$.

Zudem gilt: $\forall v, w \in W$: $v, w \in U \;\forall U \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow v + w \in U \;\forall U \in \mathcal{M} \Rightarrow v + w \in W$

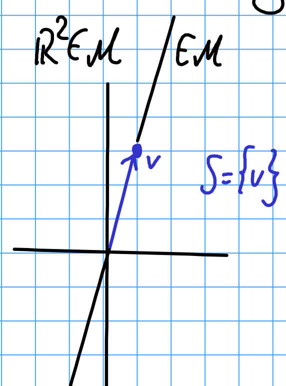
$a \cdot v \in W \;\forall a \in K, v \in W$ folgt analog.

$\square$

<u>Definition</u> Sei V K-Vektorraum, $S \subseteq V$ (muss nicht Untervektorraum ist!).

Sei $\mathcal{M} = \{U \subseteq V \mid U \text{ ist Untervektorraum von } V \text{ mit } S \subseteq U\}$.

Dann heißt $\langle S \rangle$ definiert als $\langle S \rangle = \bigcap\limits_{U\in\mathcal{M}} U$ der von <u>S aufgespannte oder erzeugte Untervektorraum</u>. Für $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ endlich schreiben wir $\langle S \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

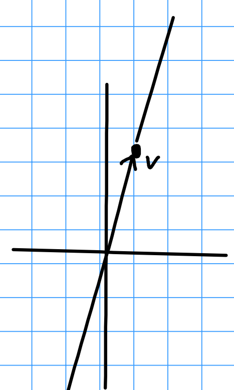


inklusionsminimal

Beobachtung: $\langle S\rangle$ ist der kleinste Untervektorraum von V, der S als Teilmenge enthält. Jeder Untervektorraum von V, der S enthält, enthält auch $\langle S\rangle$.

Begründung: Abgeschlossenheit von Untervektorräumen bezüglich Durchschnittsbildung (Eigenschaft c))

Beispiel



Sei $v\in V$. Dann ist $\langle v\rangle = K\cdot v = \{a\cdot v \mid a\in K\}$

Begründung: $K\cdot v$ ist Untervektorraum, der v enthält, und $K\cdot v$ ist auch in jedem Untervektorraum, der v enthält, wegen der Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation notwendigerweise ganz enthalten.

Satz Sei V ein K-Vektorraum, U_1, U_2 Untervektorräume und $S = U_1 \cup U_2$.
Dann gilt: $$\langle S\rangle = U_1 + U_2.$$

$\langle S\rangle \subseteq U_1+U_2$ und $\langle S\rangle \supseteq U_1+U_2$

Beweis: $U_1 + U_2$ ist Untervektorraum. Zudem liegt jedes $v \in U_1$ (wegen $v + 0 = v$) und jedes $w \in U_2$ (wegen $0 + w = 0$) in $U_1 + U_2$, da $0 \in U_1 \cap U_2$.
$\Rightarrow U_1 + U_2$ ist also eine der Räume, die in der Darstellung $\langle S \rangle = \bigcap_{U \in M} U$ zum Schnitt kommen. $\Rightarrow \langle S \rangle \subseteq U_1 + U_2$

Umgekehrt sei $U \subseteq V$ Untervektorraum mit $S \subseteq U$. Für $v \in U_1$, $w \in U_2$ folgt $v + w \in U$, also $U_1 + U_2 \subseteq U$. $\Rightarrow U_1 + U_2 \subseteq \langle S \rangle$

$\square$

Beispiel Seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ zwei Geraden durch den Nullpunkt. Dann ist $U_1 + U_2$ eine Ebene durch den Nullpunkt.

5 Linearkombinationen

Definition Eine Linearkombination von Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ ist

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$$

mit $k_i \in K$.

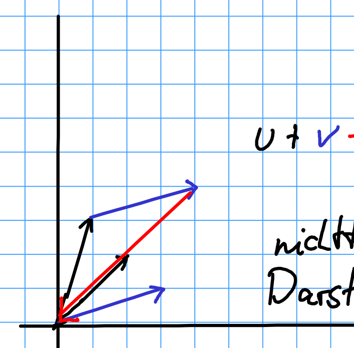
unendliche Linearkombination:
Schreibweise $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots$
im Folgenden wird Endlichkeit angenommen, sonst ist das explizit angegeben

Beispiele

$$\left.\begin{array}{l} 5u + 3v - 7w \\ \frac{7}{2}u - v + 17w \end{array}\right\}$$ sind Linearkombinationen der Vektoren u, v, w

$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0$ für $k_1 = \dots = k_n = 0$

„triviale Darstellung der Null"



$u + v - 2w = 0$

nichttriviale Darstellung der Null

Definition Vektoren $v_1, \dots, v_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn

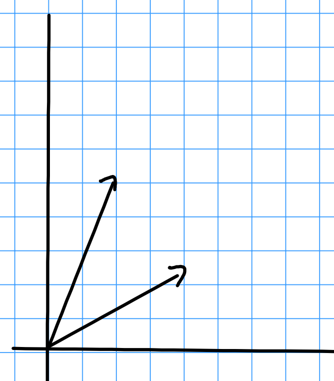
$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0 \implies k_1 = \dots = k_n = 0,$$

d.h. wenn es nur die triviale Darstellung der Null gibt.

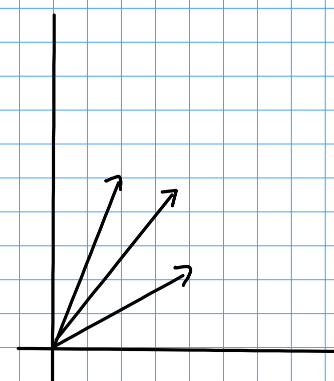
Andernfalls heißen $v_1, \dots, v_n$ **linear abhängig**, d.h. es gibt $(k_1, \dots, k_n) \neq (0, \dots, 0)$ mit $\sum_{i=1}^{n} k_i v_i = 0$.

nicht alle sind 0

Beispiele



linear unabhängig



linear abhängig (siehe Beispiel oben)