Bemerkung: Für $A \in O_n(\mathbb{R})$ und $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle Av, Aw \rangle = (Av)^T Aw = v^T \underbrace{A^T A}_{I_n} w = v^T w = \langle v, w \rangle$$

also insbesondere $\langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle$

$\Rightarrow$ die lineare Abbildung φ_A „erhält" das Skalarprodukt und Längen $|Av| = |v|$. Solche Abbildungen heißen <u>Isometrien</u>.

(12) Hauptachsentransformation

Jede symmetrische reelle Matrix ist diagonalisierbar.

In diesem Kapitel immer: $A^T = A$ für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

tauchen in ganz vielen Anwendungen auf:

- Kovarianzmatrix (Statistik)
- Adjazenzmatrix (ungerichteter Graph, Graphentheorie)

Ziel des Kapitels ist der Beweis der Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$.

Hilfsaussagen

(z.B. als Matrix in $\mathbb{C}^{n\times n}$)

Lemma Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis: Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ und $\overline{v} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$.

konjugierten Vektor

A hat reelle Einträge

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$\Rightarrow A \cdot \overline{v} = \overline{A \cdot v} = \overline{\lambda \cdot v} = \overline{\lambda}\,\overline{v}$$

keine Wechselwirkung zwischen den Real- und Imaginärteilen der komplexen Zahlen $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$

A hat in Wirklichkeit reelle Einträge, aber wir behandeln sie so, als ob sie über den komplexen Zahlen definiert wäre und nur einen Sonderfall darstellt.

$$\Rightarrow \bar\lambda \underbrace{\bar v^T v}_{\neq 0} = (A\cdot\bar v)^T v = \bar v^T A^T v = \bar v^T A v = \bar v^T \lambda v = \lambda \bar v^T v$$

$$\Rightarrow \bar\lambda = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

$\Rightarrow$ „Alle Eigenwerte einer symmetrischen Matrix über $\mathbb{R}$ sind reell."

Lemma Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum mit $U \neq \{0\}$, so dass für alle $u \in U$ gilt $Au \in U$. Dann enthält U einen Eigenvektor von A.

„Abgeschlossenheit unter A"

Beweis: Nach Voraussetzung haben wir eine lineare Abbildung

$f: U \to \underline{U}, \; u \mapsto Au.$

Bezüglich Basis $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ von U sei

$C=(c_{ij}) = D_B(\varphi) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ die Darstellungsmatrix.

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_C, also ein Eigenwert von C (interpretiert als Sonderfall einer Matrix in $\mathbb{C}^{k\times k}$).

Mit einem zugehörigen Eigenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ gilt also

$C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$. Der Vektor $v = \sum_{i=1}^{k} x_i b_i \in \mathbb{C}^n$ ist nicht Null, da nicht alle x_i Null sind und die b_i als Vektoren (auch in $\mathbb{C}^n$) linear unabhängig sind.

$$\Rightarrow \quad Av = \sum_{i=1}^{k} x_i A b_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \varphi(b_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i \left(\sum_{j=1}^{k} c_{ji} \cdot b_j \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} c_{ji} \cdot x_i \right) b_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda x_j \cdot b_j = \lambda v$$

$\Rightarrow$ λ ist ein Eigenwert von A mit Eigenvektor v

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$, denn von A wissen wir, dass A symmetrisch ist

im Gegensatz zu $\mathbb{C}$! (wo wir das nicht trivialerweise wissen)

Als Eigenwert von C hat λ also auch einen reellen Eigenvektor. denn $Au \in U \subseteq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ man darf $x_i \in \mathbb{R}$ annehmen

$\Rightarrow v \in U$ ist der gesuchte Eigenvektor von A mit $Av \in U$ $\square$

<u>Lemma</u> Seien λ, μ zwei verschiedene Eigenwerte von A. Dann gilt für alle $v \in E_\lambda$ und $w \in E_\mu$, dass $\langle v, w \rangle = 0$.

Beweis: $\underbrace{(\lambda - \mu) v^T w}_{= \lambda v^T w - \mu v^T w} = (\lambda v)^T w - v^T(\mu w) = (Av)^T w - v^T(Aw) =$

$= v^T A^T w - v^T A w \overset{A^T = A}{=} 0$

Da $\lambda - \mu \neq 0$ folgt $\langle v, w \rangle = v^T w = 0$. $\square$

$\Rightarrow$ „Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht zueinander."

Satz (Hauptachsentransformation)

Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren besteht.

Alternativ: Es gibt $S \in O_n(\mathbb{R})$, so dass $S^{-1} A S (= S^T A S)$ eine Diagonalmatrix ist. Also ist A diagonalisierbar.

Beweis: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ die verschiedenen Eigenwerte von A. Für jedes λ_i existiert eine Orthonormalbasis B_i von E_{λ_i}. Wir setzen $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$.

Unterräume

B ist ein Orthonormalsystem, da ja $\langle v, w \rangle = 0$ für $v \in E_{\lambda_i}$ und $w \in E_{\lambda_j}$ für $i \neq j$. $\Rightarrow$ B ist Orthonormalbasis von $\underline{U = \langle B \rangle}$.

Nach Konstruktion besteht B aus Eigenvektoren.

Sei $w \in U^\perp$. Wir zeigen: $Aw \in U^\perp$. Es genügt zu zeigen, dass $A \cdot w$ auf allen $v \in B$ senkrecht steht. Sei also $v \in B_i$ mit $i \in \{1, \dots, r\}$. Dann $\langle v, Aw \rangle = v^T A w = v^T A^T w = (Av)^T w =$

$$= (\lambda_i v)^T w = \lambda_i v^T w = \lambda_i \langle v, w \rangle = 0$$

für $w \in U^\perp$

Falls $U^\perp \neq \{0\}$, dann würde es einen Eigenvektor $v \in U^\perp$ von A geben, denn $A \cdot u \in U^\perp$ für $u \in U^\perp$ und $U^\perp$ Unterraum.
Als Eigenvektor von A liegt v in U nach Konstruktion, also $\langle v, v \rangle = 0$, im Widerspruch zu $v \neq 0$.
$\Rightarrow U^\perp = \{0\}$

Mit $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ und $C = \begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_k^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ist $U^\perp$

die b_i als Zeilen

der Lösungsraum des homogenen LGS $Cx = 0$.

Aus $U^\perp = \{0\}$ folgt, dass das LGS $\geq n$ Gleichungen enthalten muss. $\Rightarrow$ B ist eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit $\geq n$ (also $= n$) Vektoren, also eine Basis des $\mathbb{R}^n$

(wir wissen bereits dass B ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren von A ist)

$\square$