//

$f: V \to W \qquad f(v) = w \qquad v \in V,\ w \in W$

für $S \subset V$: $f(S) = \{ w \in W \mid \exists v \in S : f(v) = w \} =$

$= \{ f(v) \mid v \in S \}$

für $T \subset W$

invertierbare

Abbildung

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } T \subset W \\ \text{invertierbare} \\ \text{Abbildung}\end{array}\right\} \quad f^{-1}(T) = \{ v \in V \mid \exists w \in T : f(v) = w \} =$$

$= \{ f^{-1}(w) \mid w \in T \}$

//

Beispiele

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Entwicklung nach der zweiten Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j} \cdot 0 \cdot \det(A_{ij})$$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Entwicklung nach der ersten Spalte

$$\det(A) = 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + 6 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

das Vorzeichen wechselt immer zum nächsten Term der Summe!

$$= 0 - 3 \cdot (-6) + 6 \cdot (-3) = 0$$

- Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

- obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

gilt natürlich auch für untere Dreiecksmatrizen $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_n \end{pmatrix}$

- <u>Matrix in Block-Dreiecksgestalt</u>

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix} \qquad B \in K^{l \times l},\ D \in K^{(n-l)\times(n-l)},\ C \in K^{(n-l)\times l}$$
$$O \in K^{l \times (n-l)} \text{ Nullmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(B) \cdot \det(D)$$

Begründung: explizites Ausrechnen zeigt, dass sobald man in einer der Formeln einen Eintrag aus C nimmt, man dann auch mit einer 0 aus der Nullmatrix multipliziert. Das sieht man besonders schön mit der ursprünglichen Formel. In den restlichen Teilen wird jede Kombination

„Permutations-denkweise" → aus D mit jeder aus B multipliziert.

$\Downarrow$ $\det(D)$ $\qquad$ $\Downarrow$ $\det(B)$

Adjunkte einer Matrix

Achtung! Indizes andersrum

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n} \Rightarrow C = (c_{ij}) \in K^{n\times n}$ mit $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{\underline{ji}})$

ist die <u>adjunkte Matrix oder Adjunkte</u>

Es gilt $A \cdot C = C \cdot A = \det(A) \cdot I_n$ (ohne Beweis)

explizites Nachrechnen

Für $A \in GL_n(K)$ gilt dann $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C$.

invertierbar

Verallgemeinerung des Inversen

Das ist kein effizienter algorithmischer Ansatz zur Berechnung der Inversen!

Für 2×2 Matrizen hat man

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{\underline{ji}})$$

Insbesondere kann man durch Blick auf $ad-bc$, das ist ja die Determinante, entscheiden, ob die Inverse existiert.

Gauss-Algorithmus für Determinante

Zeilenoperationen können die Determinante verändern

Typ I (Vertauschen zweier Zeilen):

Die Determinante ändert das Vorzeichen! altes Ergebnis

Typ II (Multiplikation einer Zeile mit Skalar s):

Die Determinante wird mit s multipliziert.

Begründung: Entwicklung nach eben dieser Zeile

Typ III (Addition des s-fachen einer Zeile zu einer anderen):

Die Determinante ändert sich nicht.

In Matrixform: Sei $E_{ij} \in K^{n \times n}$ überall 0, außer im Eintrag (i,j), wo eine 1 steht.

Addition des s-fachen einer Zeile zu einer anderen:

$A \longrightarrow (I_n + s \cdot E_{ij})\, A$

$$I_n + s \cdot E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & s \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$\uparrow j$

obere/untere Dreiecksmatrix!

$$\Rightarrow \det(I_n + s \cdot E_{ij}) = 1$$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(I_n + s \cdot E_{ij}) \cdot \det(A)$$

Algorithmisches Prinzip: Anwendung des Gauss-Algorithmus, um die Matrix in eine einfachere Form zu bringen, wobei die Veränderung der Determinante mitverfolgt wird

Da $\det(A) = \det(A^T)$ könnte man auch elementare Spaltenoperationen anwenden.

<u>Beispiel</u>

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

Vereinfachen der ersten Spalte durch

- Addition des (-1)fachen der ersten zur zweiten Zeile und des (-1)fachen der ersten zur vierten Zeile

$$= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -4 & -3 \end{pmatrix} =$$

- Entwicklung nach der ersten Spalte

Dieser Schritt war besonders geschickt gewählt! Nicht nur die Anzahl der Nullen, sondern auch die Größe der verbleibenden Zahlen ist wichtig!

$$= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -8 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \cdot$$

Vereinfachen der zweiten Spalte durch <u>Addition</u> des 2fachen der zweiten auf die erste Zeile und des 4fachen der zweiten auf die vierte Zeile

$$= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \cdot$$

Entwicklung nach der zweiten Spalte

$$= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \cdot$$

direkte Formel

$$= 5 \cdot 9 - 0 = 45$$