Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 3

Präsenzaufgabe 3.1 (Gleichungssystem mit Parameter und das Rangkriterium)
Wir betrachten das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & a \cdot y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{rang}(A)$ und $\operatorname{rang}(A|b)$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem, keine bzw. genau eine bzw. unendlich viele Lösungen?.

Präsenzaufgabe 3.2 (Interpolation)
Zur Modellierung der Form eines Objektes (z.B. Kontur eines Sattels, einer Motorhaube oder einer ergodynamischen Computermaus) beschreibt man die Kontur durch eine von Parametern abhängige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Stellt man an f gewisse Forderungen (z.B. vorgegebene Punkte oder Krümmungseigenschaften) erhält man ein Gleichungssystem für die Parameter, welches oftmals linear ist.

Wir untersuchen hier den Fall, dass die Kontur durch ein Polynom vom Grad ≤ 3 angenähert werden soll:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Dabei sind also $a_0, \ldots, a_3$ die (zu bestimmenden) Parameter der Funktion f. Die Bedingungen an f sind

$$f(1) = 1, f(-1) = -3 \text{ und } f(2) = 3.$$

a) Zeigen Sie, dass die Bedingungen an f ein lineares Gleichungssystem für die Paramter $a_0, \ldots, a_3$ ergeben, und lösen Sie dieses. Welche Polynome f erfüllen also die gegebenen Bedingungen?

b) Nun wird noch die Zusatzbedingung $f'(0) = 1$ gefordert. Welches Polynom f ergibt sich?

Präsenzaufgabe 3.3 („Fast“ ein Vektorraum)
Wir betrachten die Menge $V = \mathbb{R}^2$ mit der üblichen Addition $+$ als additiver Verknüpfung, aber der „Skalarmultiplikation“ $* : \mathbb{R} \times V \to V$ gegeben durch

$$a * (x, y)^T := (ax, |a|y)^T \qquad \text{für } a \in \mathbb{R},\ \text{und } (x, y)^T \in V.$$

Zeigen Sie: V zusammen mit $+$ und $*$ erfüllt bis auf eine Ausnahme (welche?) alle Forderungen, die an einen Vektorraum gestellt werden.

Präsenzaufgabe 3.4 (Linearkombination)
Schreiben Sie den Vektor $(1, 2, 3)^T$ als Linearkombination der Vektoren $(1, 1, 0)^T$, $(0, 1, 1)^T$, $(1, 0, 1)^T$.

Bitte wenden!

Hausaufgabe 3.5 (Zwei Gleichungen, zwei Variablen, ganz allgemein)

a) Es seien $a, b, c, d, r, s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & r \\ cx & + & dy & = & s \end{array}$$

im Fall $D := ad - bc \neq 0$ eindeutig lösbar ist. Geben Sie die eindeutig bestimmte Lösung an.

Hinweis: Aus $D \neq 0$ folgt $a \neq 0$ oder $c \neq 0$. Unterscheiden Sie nach diesen beiden Fällen und wenden Sie jeweils elementare Zeilenumformungen an.

b) Es sei $m \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von m die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccc} -2x & + & 3y & = & 2m \\ x & - & 5y & = & -11 \end{array} \quad .$$

Hausaufgabe 3.6 (Produktionsplanung)
Von einem Motorenwerk werden u.a. Bolzen, Gelenke, Kurbelwellen und Lager hergestellt, die als Ersatzteile verkauft werden. In einem Monat sollen 5000 Bolzen, 2000 Gelenke, 1000 Kurbelwellen und 2500 Lager geliefert werden. Bei der Herstellung eines Gelenks verbraucht man zwei Bolzen und bei der Herstellung einer Kurbelwelle zwei Gelenke, drei (zusätzliche) Bolzen und vier Lager.

Wieviel Stück Bolzen, Gelenke, Kurbelwellen und Lager müssen monatlich insgesamt produziert werden, um den internen und externen Bedarf zu decken?

Hausaufgabe 3.7 (Symmetrische Matrizen als Vektorraum)
Wir betrachten die Menge

$$\mathrm{Sym}(n, K) := \{A \in K^{n \times n} : A^T = A\}$$

der symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen über einem Körper K. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}(n, K)$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum bildet.

Hausaufgabe 3.8 (Linearkombination von Polynomen)
Stellen Sie (falls möglich) jeweils das Polynom p_0 als Linearkombination der Polynome $p_1, \dots p_4$ dar:

a $p_0(x) = x^3$, $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 + x$, $p_3(x) = 1 - x + x^2$, $p_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

b $p_0(z) = z^3 + 2z^2 + z + 1$, $p_1(z) = z^2 + z$, $p_2(z) = 1 - z$, $p_3(z) = z^3 - 2z$, $p_4(z) = 1 + z + z^3$.

Abgabe: bis Mittwoch, 11.5.2016, 11:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Verwenden Sie bei Abgabe das auf der Homepage hochgeladene Deckblatt und geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.