Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 10

Präsenzaufgabe 10.1 (Ganzzahlige Nullstellen von Polynomen)

a) Es sei
$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
ein normiertes Polynom mit lauter ganzzahligen Koeffizienten a_i.

Zeigen Sie: Ist x_0 eine ganzzahlige Nullstelle von f, so ist x_0 ein Teiler des konstanten Gliedes a_0.

Bemerkung: Beim Suchen von ganzzahligen Nullstellen eines solchen Polynoms genügt es also, die (positiven und negativen) Teiler des konstanten Terms a_0 zu testen.

b) Schreiben Sie als Produkt von Linearfaktoren:
$$f(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 19x^2 - 40x - 20 \in \mathbb{C}[x].$$

Präsenzaufgabe 10.2 (Matrixpotenzen)

a) Es seien $S, D \in K^{n\times n}$ quadratische Matrizen über einem Körper K, sodass S invertierbar ist.

Beweisen Sie:
$$\forall k \in \mathbb{N} \; : \; \left(SDS^{-1}\right)^k = SD^kS^{-1}$$

b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(i) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D, sodass $A = SDS^{-1}$ gilt.

(ii) Geben Sie A^k explizit an.

In welcher Anwendung, die Ihnen am Anfang der Vorlesung vorgestellt wurde, traten Matrixpotenzen auf?

Präsenzaufgabe 10.3 (Diagonale Darstellungsmatrix)
Es seien
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ und } \varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^3$, sodass $D_B(\varphi_A)$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lauten die Diagonaleinträge?

Bitte wenden!

Hausaufgabe 10.4 (Polynomfaktorisierung)
Sei $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ eine Matrix von der wir nur das charakteristische Polynom kennen:

$$\chi_A(x) = x^5 - 3x^4 - 16x + 48.$$

a) Schreiben Sie χ_A als Produkt von Linearfaktoren.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A, sowie deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Hausaufgabe 10.5 (Matrixpotenzen bestimmen)
Für eine reelle Zahl a sei

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Berechnen Sie A^{101}.

Hausaufgabe 10.6 (Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierung - Alte Klausur)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3i \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_A in faktorisierter Form, und geben Sie die Eigenwerte von A an.

b) Bestimmen Sie zu allen Eigenwerten λ von A die zugehörigen Eigenräume E_λ.

c) Begründen Sie, dass A diagonalisierbar ist und geben Sie eine invertierbare Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Hausaufgabe 10.7 (Eigenwerte: wahr/Falsch)
Seien $A, B \in K^{n\times n}$ invertierbare Matrizen, $v \in K^n$ und $\lambda \in K$.

Welche der nachfolgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? *Geben Sie kurze Begründungen (Beweisskizze / Gegenbeispiel wo angebracht)*

a) Ist λ ein Eigenwert zu A, dann ist $\lambda \neq 0$.

b) Ist λ ein Eigenwert zu A, dann ist λ auch ein Eigenwert zu A^T.

c) Ist v ein Eigenvektor zu A, dann ist v auch ein Eigenvektor zu A^T.

d) Ist λ ein Eigenwert zu A, dann ist $1/\lambda$ ein Eigenwert zu A^{-1}

e) Ist v ein Eigenvektor zu A und B, dann ist v auch Eigenvektor zu AB.

f) Ist v ein Eigenvektor zu A und AB, dann ist v auch Eigenvektor zu B.

Abgabe: bis Mittwoch, 29.6.2016, 11:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Verwenden Sie bei Abgabe das auf der Homepage hochgeladene Deckblatt und geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.