Satz Orthonormalsysteme in $\mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig.

Beweis: Sei $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ein Orthonormalsystem und sei

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = 0 \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{R}.$$

Für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ folgt durch Skalarprodukt mit v_j:

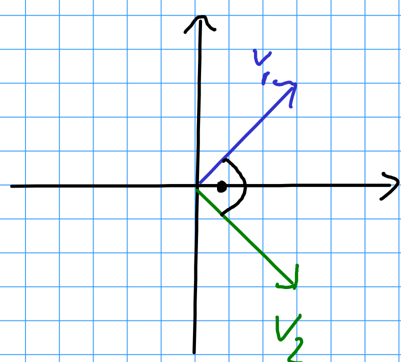
$$0 = \langle v_j, 0 \rangle = \langle v_j, \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \langle v_j, v_i \rangle = a_j$$

$\Rightarrow$ Das zeigt die lineare Unabhängigkeit. $\square$

Korollar Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum, $k = \dim(U)$. Ferner sei $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subset U$ ein Orthonormalsystem. Dann ist S eine Basis von U und wird Orthonormalbasis genannt.

Beispiele

- Die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist eine Orthonormalbasis.
- Die Vektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$.



Gram-Schmidt Algorithmus

Besitzt jeder Unterraum eine Orthonormalbasis?

Ja! Wir führen einen konstruktiven Beweis durch die Korrektheit des folgenden Algorithmus

Algorithmus (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)

Input: Unterraum $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \subset \mathbb{R}^n$ $\leftarrow$ U ist erzeugt von den v_i, eventuell sind das mehr v_i als notwendig

Output: Orthonormalbasis $\{u_1, \dots, u_m\}$ von U

$\dim(U) = m \leq k$

(1) Setze $m = 0$.

(2) Für $i = 1, \dots, k$ führe (3) & (4) aus:

(3) Setze $w_i = v_i - \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, v_i \rangle \cdot u_j$ $\qquad m = 0 \Rightarrow w_i = v_i$

(4) Falls $w_i \neq 0$, setze $m = m + 1$ und $u_m = \frac{w_i}{|w_i|}$

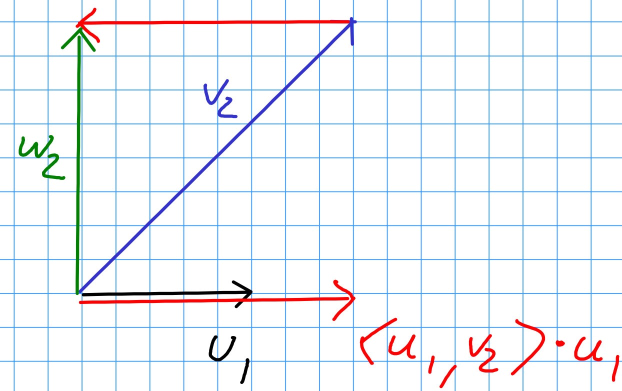
$\Rightarrow |u_m| = 1$

Geometrische Anschauung

$$w_i = v_i - \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, v_i \rangle \cdot u_j$$

z.B. $w_2 = v_2 - \underbrace{\langle u_1, v_2 \rangle}_{} \cdot u_1$

„echte" euklidische Länge, da u_1 normiert ist!



Prinzip: dem neuen Vektor nimmt man „alles" weg, was in Richtung des bisherigen Orthonormalsystems zeigt

Formal

- $\langle u_l, w_i \rangle = \langle u_l, v_i \rangle - \langle u_l, \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, v_i \rangle \cdot u_j \rangle =$

$$= \langle u_l, v_i \rangle - \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, v_i \rangle \underbrace{\langle u_l, u_j \rangle}_{\delta_{j,l}} = \langle u_l, v_i \rangle - \langle u_l, v_i \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ die iterativ in (3.) des Algorithmus konstruierten w_i stehen auf den bisherigen u_l senkrecht.

- $$\langle u_1, \dots, u_m, w_i \rangle = \langle u_1, \dots, u_m, v_i \rangle \overset{\uparrow}{=} \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_i \rangle$$

induktiv für Indizes $< i$

$\Rightarrow$ das Ereignis bleibt gleich

w_i normiert

Falls $w_i \neq 0$, so ist $\{u_1, \dots, u_{m+1}\}$ ein Orthonormalsystem.
Am Ende hat man $\langle u_1, \dots, u_m \rangle = U$, also bilden die u_i eine Orthonormalbasis.

Falls $w_i = 0$ ist, so ist v_i bereits erzeugt von den bisherigen u_j. $v_i \in \langle u_1, \dots, u_m \rangle$.

$\Rightarrow$ es wird kein Vektor dem System hinzugefügt und m wird nicht erhöht.

Man muss aber nach einem $w_i = 0$ weitermachen!

$\Rightarrow$ Satz Jeder Unterraum des $\mathbb{R}^n$ hat eine Orthonormalbasis.

Beispiel
$$U = \left\langle \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

- $w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $u_1 = \frac{w_1}{|w_1|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

$$\bullet\ w_2 = v_2 - \langle u_1, v_2\rangle \cdot u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}\right\rangle \cdot \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{5}\cdot\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}16\\0\\-12\end{pmatrix}$$

und $u_2 = \frac{w_2}{|w_2|} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\0\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

$$\bullet\ w_3 = v_3 - \langle u_1, v_3\rangle \cdot u_1 - \langle u_2, v_3\rangle \cdot u_2 =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{11}{5}\cdot\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\0\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}25-33+8\\0\\50-44-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{u_1, u_2\}$ ist Orthonormalbasis von U

Definition Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **orthogonal**, falls $A^T A = I_n$. Äquivalent: $A^{-1} = A^T$ oder die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$

- $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I_n\}$ orthogonale Gruppe
- $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$ spezielle orthogonale Gruppe

spezielle lineare Gruppe, $\det = 1$

Gruppenstruktur besteht jeweils mit dem Matrixprodukt, denn für $A, B \in O_n(\mathbb{R})$ gilt

$$(AB)^T (AB) = B^T A^T \cdot AB = I_n \quad \text{und} \quad (A^{-1})^T A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$$

$\Rightarrow$ Abgeschlossenheit (das reicht)