Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 7

Präsenzaufgabe 7.1 (Darstellungsmatrix, Kern und Bild)
Es seien $V := \mathbb{R}^{2\times 2}$, $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ die Standardbasis von V. Ferner sei $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi(X) := X + X^T$. Nach Aufgabe 5.4 (iv) ist φ dann linear.

a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D_B(\varphi)$.

b) Bestimmen Sie je eine Basis für $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

Lösung zu Aufgabe 7.1

a) Es gilt: $\varphi(E_{11}) = 2 \cdot E_{11}$, $\varphi(E_{12}) = E_{12} + E_{21} = \varphi(E_{21})$, $\varphi(E_{22}) = 2 \cdot E_{22}$. Damit ergibt sich:

$$D_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Um den Kern zu bestimmen, lösen wir zunächst das LGS mit Koeffizientenmatrix $D_B(\varphi)$ und rechter Seite 0. Wir erhalten $\mathrm{Kern}(D_B(\varphi)) = \left\langle (0, -1, 1, 0)^T \right\rangle$. Dies ist der Kern in „Koordinatenvektoren" geschrieben. Den Kern in korrekter Darstellung bezüglich V erhalten wir mithilfe der Basis B den Kern von φ und seine Basis:

$$\mathrm{Kern}(\varphi) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ mit Basis } \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aus dem Dimensionssatz $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$ folgt nun $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = 3$. Damit bilden drei linear unabhängige Spalten der Darstellungsmatrix eine Basis des Bildes in Koordinatenschreibweise. Durch „scharfes Hinsehen" erkennen wir, dass die Spalten $1, 2, 4$ von $D_B(\varphi)$ linear unabhängig sind. In Matrixschreibweise ergibt sich damit

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

als eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$, wobei wir den ersten und dritten Vektor noch mit $\frac{1}{2}$ skaliert haben, um eine möglichst einfache Gestalt der Basis zu bekommen.

Präsenzaufgabe 7.2 (Darstellungsmatrix mit zwei Basen)
Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ der Raum der Polynome vom Grad ≤ 2. Nach Aufgabe 5.3 ist $B = \{1, x+1, x^2+x+1\}$ eine Basis von V. Eine weitere Basis ist die Standardbasis $C = \{1, x, x^2\}$. Wir betrachten die Ableitungsabbildung $\varphi : V \to V, \quad f(X) \mapsto f'(X)$, welche gemäß Vorlesung linear ist. Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $D_{B,C}(\varphi)$ und $D_{C,B}(\varphi)$.

Lösung zu Aufgabe 7.2
Wir erhalten die Spalten der Darstellungsmatrizen $D_{B,C}(\varphi)$ als Bilder der Basisvektoren der Ausgangsbasis mit Koeffizienten bezüglich der neuen Basis: $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x+1) = 1$, $\varphi(x^2+x+1) = 2x+1$, also

$$D_{B,C}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bzw. $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x) = 1$, $\varphi(x^2) = 2x = 2(x+1) - 2$, also

$$D_{C,B}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Präsenzaufgabe 7.3 (Doppelter Basiswechsel)
Im $\mathbb{R}^3$ seien drei Basen A, B, C gegeben, sowie die Basiswechselmatrizen

$$S_{A,B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_{A,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $S_{C,B}$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst einen Zusammenhang zwischen $S_{A,B}, S_{B,C}$ und $S_{A,C}$ (informelle Begründung genügt).

Lösung zu Aufgabe 7.3
Zur Wiederholung:

Seien V ein K-Vektorraum mit Basen $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ und $v \in V$. Dann besitzt v Koordinatenvektoren bezüglich der Basen B und C, welche wir mittels der Basiswechselmatrizen $S_{B,C}$ bzw. $S_{C,B} = S_{B,C}^{-1}$ ineinander überführen können. Z.B.: Ist $v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n = y_1 c_1 + y_2 c_2 + \ldots + y_n c_n$ dann sind also $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ die Koordinatenvektoren von v zu den Basen B und C und es gilt $y = S_{C,B} x$ bzw. $x = S_{B,C} y$.

Die Matrix $S_{C,B}$ erhalten wir wie folgt: schreibe b_j als Linearkombination von C, dann bilden die Koeffizienten die j-te Spalte von $S_{C,B}$.

Die Basiswechselmatrix $S_{C,B}$ entspricht damit die Darstellungsmatrix $D_{B,C}(id)$ der Identität $id : V \to V$, $x \mapsto x$, wobei die Koordinaten von x bezüglich der Basis B vor und bezüglich der Basis C nach der Abbildung gegeben sind.

Zur eigentlichen Aufgabe:

Es gilt natürlich $S_{A,B} S_{B,C} = S_{A,C}$: Ist nämlich $x \in \mathbb{R}^3$ ein Koordinatenvektor bezüglich C, dann ist $y = S_{B,C} x$ der zugehörige Koordinatenvektor bezüglich B. Da nun $S_{A,B} y$ der zu y gehörige Koordinatenvektor bezüglich A ist, gilt $S_{A,C} x = S_{A,B} y = S_{A,B} S_{B,C} x$. Da dies für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt, folgt $S_{A,B} S_{B,C} = S_{A,C}$ bzw. $S_{C,B} = S_{B,C}^{-1} = (S_{A,C})^{-1} S_{A,B}$. Wir erhalten:

$$S_{C,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -12 \\ -5 & 4 & 22 \end{pmatrix}.$$

Präsenzaufgabe 7.4 (Inverse der Inzidenzmtrix)
Sei $G = (V, E)$ ein Baum. Gemäß Aufgabe 6.4 gilt dann $\text{rang}_{GF_2}(S_G) = n - 1$ für den Rang der Inzidenzmatrix $S_G \in GF_2^{n\times(n-1)}$.

Sei nun $\hat{S}_G \in GF_2^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus S_G durch Streichen der n-ten Zeile hervorgeht. Zeigen Sie:

a) $\hat{S}_G$ ist invertierbar.

b) Ist $B = (b_{ji})_{j,i\in[n-1]}$ die zu $\hat{S}_G$ inverse Matrix, dann gilt

$$b_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{falls } e_j \text{ zum (eindeutigen) Weg von } v_i \text{ nach } v_n \text{ gehört,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung zu Aufgabe 7.4

a) Die letzte Zeile von S_G lässt sich aus den ersten $n - 1$ darstellen, ist also von diesen linear abhängig. Da $\text{rang}_{GF_2}(S_G) = n - 1$ müssen die ersten $n - 1$ Zeilen aber linear unabhängig sein. Also ist $\hat{S}_G$ invertierbar.

b) Sei W der (eindeutige) v_i, v_n-Weg in G. Wir definieren den Vektor $x \in GF_2^{n-1}$ durch

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } e_j \text{ auf } W \text{ liegt,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und bezeichnen den i-ten Einheitsvektor in GF_2^{n-1} mit u^i, $i \in [n]$. Dann gilt: $S_G x = u^i + u^n$, da mit jedem Knoten v_k, $k \in [n] \setminus \{i, n\}$ zwei oder keine Kante von W inzident sind und nur mit v_i und v_n genau eine. Durch streichen der letzten Zeile erhalten wir $\hat{S}_G x = u^i$. Also gilt für die Inverse B von $\hat{S}_G$, dass $x = Bu^i$ und damit, dass x die i-te Spalte von B ist.

Hausaufgabe 7.5 (Formel zum invertieren von 2×2-Matrizen)
Bestimmen Sie eine allgemeine Formel um die Invertierbarkei einer 2×2-Matrix zu entscheiden und falls dies möglich ist die Inverse zu bestimmen.

Setzen Sie dazu $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ an und benutzen Sie den in der Vorlesung gegebenen Algorithmus. Unterscheiden Sie die Fälle $a = 0$ und $a \neq 0$ und stellen Sie zum Schluss fest, dass beide Fälle die gleiche Formel ergeben.

Lösung zu Aufgabe 7.5
Wir nehmen zunächst an, dass $a \neq 0$ ist und erhalten mittels des Algorithmus zur Invertierung:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$1/aI \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$II - cI \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & (ad - bc)/a & -c/a & 1 \end{array}\right]$$

(an dieser Stelle stellen wir fest, dass die Matrix im Falle $ad - bc = 0$ nicht invertierbar ist und nehmen daher an, dass dies nicht der Fall ist. Das würde auch für $a = 0$ gelten, da $ad - bc = 0$ dann $b = 0$ oder $c = 0$ implizieren würde, also eine Nullzeile oder -spalte.)

$$\begin{array}{r} \\ a/(ad-bc)II \\ I - b/aII \\ \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & -c/(ad-bc) & a/(ad-bc) \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d/(ad-bc) & -b/(ad-bc) \\ 0 & 1 & -c/(ad-bc) & a/(ad-bc) \end{array}\right] \end{array}$$

Die Inverse im Fall $a \neq 0$ lautet also:

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Sei nun $a = 0$. Dann müssen wie oben erwähnt $b \neq 0$ und $c \neq 0$ gelten und wir erhalten:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} 1/cII \\ 1/bI \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & d/c & 0 & 1/c \\ 0 & 1 & 1/b & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} I - d/cII \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -d/bc & 1/c \\ 0 & 1 & 1/b & 0 \end{array}\right]$$

Die Inverse im Fall $a = 0$ lautet also:

$$M^{-1} = \frac{1}{bc} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix};$$

d.h. beide Fälle führen auf die gleiche Formel.

Hausaufgabe 7.6 (Darstellungsmatrix)

Es sei $\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$, mit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Zeigen Sie, dass $B := \left\{(2,2,3)^T, (1,1,1)^T, (2,1,1)^T\right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D_B(\varphi_A)$.

Lösung zu Aufgabe 7.6

a) Da wir die Matrix mit Spaltenvektoren aus B mit dem Gauß-Algorithmus wie folgt auf ZSF bringen können

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist $B = \left\{(2,2,3)^T, (1,1,1)^T, (2,1,1)^T\right\}$ linear unabhängig, also eine Basis.

b) Wir definieren $b_1 := (2,2,3)^T, b_2 = (1,1,1)^T, b_3 = (2,1,1)^T$ und berechnen die Bilder der b_i, $i = 1,2,3$:

$$\begin{aligned} Ab_1 &= 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3, \\ Ab_2 &= 0 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3, \\ Ab_3 &= 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 3 \cdot b_3. \end{aligned}$$

Es folgt

$$D_B(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 7.7 (Darstellungsmatrix zu Matrizenabbildung)

Es sei $V := \mathbb{R}^{2\times 2}$ (ein $\mathbb{R}$-Vektorraum!), $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in V$ und

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

die „kanonische Basis“ von V. Ferner sei $\varphi : V \to V$ definiert durch $X \mapsto AX - XA$.

a) Zeigen Sie, dass φ linear ist.

b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D_E(\varphi)$.

c) Bestimmen Sie Basen für Kern(φ) und Bild(φ). Wie lautet der Dimensionssatz?

d) Ist φ injektiv/surjektiv?

Lösung zu Aufgabe 7.7

a) φ ist linear, denn es gilt für alle $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$, dass $\varphi(X + \lambda Y) = A(X + \lambda Y) - (X + \lambda Y)A = AX - XA + \lambda(AY - YA) = \varphi(X) + \lambda\varphi(Y)$.

b) Zur Wiederholung: Die Darstellungsmatrix $D_E(\varphi)$ beschreibt die lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ bezüglich der Basis B. Ihre Spaltenvektoren ergeben sich durch Anwendung von φ auf die geordnete Basis.

$$\begin{aligned} \varphi(E_1) = AE_1 - E_1A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -2E_2 + 3E_3, \\ \varphi(E_2) = AE_2 - E_2A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -3E_1 - 3E_2 + 3E_4, \\ \varphi(E_3) = AE_3 - E_3A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 2E_1 + 3E_3 - 2E_4, \end{aligned}$$

$$\varphi(E_4) = AE_4 - E_4A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 2E_2 - 3E_3.$$

Also ist
$$D_E(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Wir bringen die Darstellungsmatrix auf Zeilenstufenform:
$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
und erhalten durch Wahl der freien Parameter $x_3 = 0, x_4 = 1$ bzw. $x_3 = 3, x_4 = 0$:
$$\text{Kern}(\varphi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } \text{Bild}(\varphi) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$
Der Dimensionssatz sagt uns nun, dass $\dim(\text{Bild}(\varphi) = \dim(V) - \dim(\text{Kern}(\varphi)) = 4 - 2 = 2$. Eine mögliche Basis für $\text{Bild}(\varphi)$ ist damit $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$.

d) φ ist weder injektiv ($\text{Kern}(\varphi) \neq \{0\}$) noch surjektiv ($\dim(\text{Bild}(\varphi)) < \dim(V)$).

Hausaufgabe 7.8 (Bestimmung der Basis aus der Basiswechselmatrix)
Seien $B = \{b_1, b_2, b_3\} \subset V := \mathbb{Q}^3$ mit $b_1 = (1, 1, 1)^T$, $b_2 = (2, 0, -1)^T$, $b_3 = (2, 3, 1)^T$ und
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

a) Zeigen Sie, dass B eine Basis von V ist.

b) Zeigen Sie, dass $\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$ ein Vektorraumisomorphismus ist.

c) Bestimmen Sie eine Basis C von V, sodass $D_{B,C}(\varphi) = I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 7.8

a) Wir schreiben die Vektoren als Spalten in eine Matrix und formen mit dem Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform um:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Die Matrix hat also Rang 3, d.h. die drei Vektoren b_1, b_2, b_3 sind linear unabhänging und da $\dim(V) = 3$ also eine Basis.

b) Auch hier ist nur zu zeigen, dass der Rang der quadratischen Matrix A gleich 3 ist. Wir bemühen erneut den Gauß-Algorithmus:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Es gilt also $\operatorname{rang}(A) = 3$.

c) Es sei $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ eine Basis, sodass

$$D_{B,C}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Im Detail ergeben sich daraus die folgenden notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} \varphi(b_1) &= 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3, \\ \varphi(b_2) &= 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3, \\ \varphi(b_3) &= 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3, \end{aligned}$$

Kurz: $\varphi(b_i) = c_i$, $i = 1, 2, 3$. Da φ als Isomorphismus von Vektorräumen Basen auf Basen abbildet, ist die so entstehende Menge C dann auch tatsächlich eine Basis. Wir erhalten $c_1 = (4, 3, 2)^T$,$c_2 = (3, 2, 1)^T$ und $c_3 = (6, 3, 3)^T$.