Klausur

- Hilfsmittel: beidseitig handbeschriebenes A4 Blatt
- Aufteilung nach Nachnamen vorher auf Homepage
- Klausur nicht am 18.7.
- Klausurvorbereitung im Vorlesungsslot

# Inverse einer Matrix

## Algorithmus für das Invertieren einer Matrix

Input $A \in K^{n\times n}$

oder $B \cdot A = I_n$, denn dann

Output $B \in K^{n\times n}$ mit $A \cdot B = I_n$

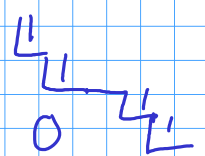
$(B \cdot A)x = I_n x = x$

„identische Abbildung"

Schreibweise $B = A^{-1}$

(1) Bilde Matrix $(A|I_n) \in K^{n\times(2n)}$

Anhängen einer Einheitsmatrix



(2) Führe $(A|I_n)$ in strenge Zeilenstufenform (im Teil von $A$) über, so dass in jeder Zeile $\neq 0$ der erste Eintrag eine 1 ist

(3) Falls die Zeilenstufenform die Form $(I_n|B)$ mit $B \in K^{n\times n}$ hat, gib $B$ zurück.
Sonst ist $\operatorname{rang}(A) < n$, daher gibt es kein $B \in K^{n\times n}$ mit $A \cdot B = I_n$.

**Bemerkung** · Matrixprodukt ist im Allgemeinen nicht kommutativ

aber: $A \cdot B = I \iff B \cdot A = I$, denn

$$B(AB)A = B \cdot I \cdot A \iff (BA)\underbrace{(BA)}_{=I} = BA$$

Begründung für Korrektheit des Algorithmus:

Die angegebene Umformung löst gleichzeitig alle LGSe $A x = e_i$. (i-te Standardbasisvektor)

Im Fall $(I_n | B)$ hat man die eindeutige Lösbarkeit, die Spalten von $B$ sind jeweils die Lösungsvektoren und es folgt $A \cdot B = I_n$. $\square$

Bemerkung: $A \in K^{n \times n}$ invertierbar $\iff$ $A$ regulär

bei Invertierbarkeit ist immer quadratisch notwendig

## Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{der ersten Zeile}]{\text{Addition}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{von } (-2)\text{mal dritter Zeile}]{\text{Addition}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{von 2-mal zweiter Zeile}]{\text{Addition}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## Lineare Fortsetzung

**Satz** Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von $V$.

a) Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ ist durch die Bilder der Basisvektoren $v_i$ eindeutig bestimmt. D.h. ist $\psi : V \to W$ eine weitere Abbildung mit $\varphi(v_i) = \psi(v_i)$ $\forall i$, so ist $\varphi = \psi$.

b) Seien $w_1, \dots, w_n \in W$ beliebig. Dann gibt es eine Abbildung $\varphi: V \to W$ mit $\varphi(v_i) = w_i \; \forall i$.

<u>Interpretation</u> Man kann eine lineare Abbildung eindeutig definieren durch Angabe der Bilder der Basisvektoren. Daraus ergibt sich die Information worauf alle Elemente des Definitionsbereichs abbilden. Das nennt man das Prinzip der linearen Fortsetzung.

Beweis a) Es sei $\varphi(v_i) = \psi(v_i) \; \forall i$ und es sei $v \in V$.

$\Rightarrow \exists\, a_1, \dots, a_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

$\Rightarrow \varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \psi(v_i) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \psi(v)$

$\Rightarrow \varphi(v) = \psi(v) \; \forall v \in V \Leftrightarrow \varphi = \psi$

b) Definiere $\varphi: V \to W$ wie folgt: Für $v \in V$ sei $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ mit $a_i \in K$.
Dann setzen wir $\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$.
Wohldefiniertheit als Abbildung folgt aus der eindeutigen Darstellungseigenschaft über die Basis B. Die Linearität kann man explizit kontrollieren. $\varphi(v_i) = w_i$ gilt für alle $i$ nach Konstruktion. $\square$

## 8 Darstellungsmatrizen

K Körper, V, W endlich-dimensionale Vektorräume
$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V
$C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ Basis von W
In diesem Kapitel ist die Reihenfolge der Basisvektoren wichtig!
Beispielsweise könnte man sich B und C als Tupel vorstellen

und erhält eine <u>geordnete Basis</u>.

Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Für $j \in \{1, \dots, n\}$ kann man schreiben $\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ mit $a_{ij} \in K$.

Daraus kann man eine Matrix bilden:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

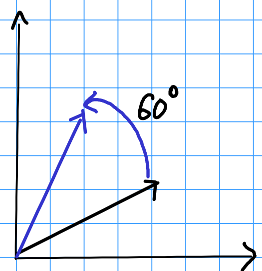
Spalten von $A$ $\hat{=}$ Koordinatenvektoren der $\varphi(v_i)$, also der Bilder der Basisvektoren von $V$.

<u>Definition</u> Die oben definierte Matrix heißt Darstellungsmatrix $A = D_{B,C}(\varphi)$ von $\varphi$ bezüglich der Basen $B$ und $C$.
Für $V = W$ verwendet man eine Basis $B = C$ und schreibt $D_B(\varphi) \in K^{n \times n}$.

**Bemerkung** $\varphi$ ist durch seine Darstellungsmatrix eindeutig bestimmt. Jede Matrix taucht als Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung auf.

**Beispiele**

- $V = W = \mathbb{R}^2$, Standardbasis $B = \{e_1, e_2\}$,
  $\varphi: V \to V$ Drehung gegen den Uhrzeigersinn um $60°$

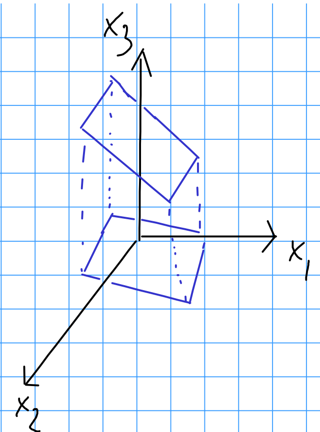



$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_2 \qquad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2$$

$$\Rightarrow D_B(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, Standardbasen $B = \{\overbrace{e_1, e_2, e_3}^{\in \mathbb{R}^3}\}$, $C = \{\overbrace{e_1, e_2}^{\in \mathbb{R}^2}\}$ überladene Schreibweise

  Projektion auf $x_1, x_2$ - Ebene




$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \quad D_{B,C}(\varphi) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

entspricht der Standardbasis des $K^3$

- $V = \{ f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \leq 2 \}$ mit Basis $B = \{1, x, x^2\}$

  $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \cdot 1$

  Für $\varphi: V \to V$, $f \mapsto f'$ (Ableitung) gilt

  $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x) = 1$, $\varphi(x^2) = 2x \quad \Rightarrow \quad D_B(\varphi) = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

## Zusammenhang von Linearen Abbildung und Matrizen

**Satz** Sei $V = K^n$, $W = K^m$ mit Standardbasen $B$ und $C$ und sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Mit $A = D_{B,C}(\varphi)$ gilt dann $\varphi = \varphi_A$.

D.h. alle Linearen Abbildungen $V \to W$ sind von der Form $\varphi_A$ mit

$A \in K^{m \times n}$ und $A$ ist die Darstellungsmatrix von $\varphi_A$ bezüglich der Standardbasis.

**Beweis** Durch Nachrechnen. Sei $A = (a_{ij})$. Für $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ ist

$$\varphi(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \left( x_j \left( \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot e_i \right) \right) = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) e_i = Av,$$

also $\varphi = \varphi_A$. $\square$