Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 10

Präsenzaufgabe 10.1 (Ganzzahlige Nullstellen von Polynomen)

a) Es sei
$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
ein normiertes Polynom mit lauter ganzzahligen Koeffizienten a_i.

Zeigen Sie: Ist x_0 eine ganzzahlige Nullstelle von f, so ist x_0 ein Teiler des konstanten Gliedes a_0.

Bemerkung: Beim Suchen von ganzzahligen Nullstellen eines solchen Polynoms genügt es also, die (positiven und negativen) Teiler des konstanten Terms a_0 zu testen.

b) Schreiben Sie als Produkt von Linearfaktoren:
$$f(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 19x^2 - 40x - 20 \in \mathbb{C}[x].$$

Lösung zu Aufgabe 10.1

a) Aus $f(x_0) = 0$ folgt
$$x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1x_0 + a_0 = 0,$$
also
$$a_0 = -x_0 \cdot \underbrace{(x_0^{n-1} + a_{n-1}x_0^{n-2} + \ldots + a_1)}_{\in \mathbb{Z}},$$
und damit ist x_0 ein Teiler von a_0.

b) Wir suchen zunächst ganzzahlige Nullstellen von f. In Frage kommen alle positiven und negativen Teiler von 20, also $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20$. Wir finden die Nullstellen $-1, 2, -2$. Damit können wir f durch das Polynom g mit
$$g(x) = (x+1)(x-2)(x+2) = (x+1)(x^2-4) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$
teilen, und erhalten
$$f(x) = \underbrace{(x^3 + x^2 - 4x - 4)}_{=(x+1)(x-2)(x+2)} \cdot \underbrace{(x^3 + x^2 + 5x + 5)}_{=:h(x)}.$$
Nun suchen wir Nullstellen von h. In Frage kommen wieder alle Teiler des konstanten Glieds, also $\pm1, \pm5$. Da eine Nullstelle von h auch eine von f sein muss, und f nur die ganzzahligen Nullstellen $-1, 2, -2$ hat, kommt letztlich nur noch -1 als Kandidat in Frage, was tatsächlich auch eine Nullstelle von h ist. Wir erhalten
$$h(x) = (x+1) \cdot (x^2+5) = (x+1) \cdot (x + i\sqrt{5}) \cdot (x - i\sqrt{5}),$$
und damit
$$f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x + i\sqrt{5}) \cdot (x - i\sqrt{5})$$
als Zerlegung von f in Linearfaktoren.

Präsenzaufgabe 10.2 (Matrixpotenzen)

a) Es seien $S, D \in K^{n\times n}$ quadratische Matrizen über einem Körper K, sodass S invertierbar ist.

Beweisen Sie:
$$\forall k \in \mathbb{N} \ : \ \left(SDS^{-1}\right)^k = SD^kS^{-1}$$

b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(i) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D, sodass $A = SDS^{-1}$ gilt.

(ii) Geben Sie A^k explizit an.

In welcher Anwendung, die Ihnen am Anfang der Vorlesung vorgestellt wurde, traten Matrixpotenzen auf?

Lösung zu Aufgabe 10.2

a) Beweis durch Induktion:

I.A. $k = 1$ $\left(SDS^{-1}\right)^1 = SDS^{-1} = SD^1S^{-1}$.

I.S. $k \to k+1$ Wir nehmen also an, dass $\left(SDS^{-1}\right)^k = SD^kS^{-1}$ für ein festes $k \geq 1$ gilt. Dann folgt: $\left(SDS^{-1}\right)^{k+1} = \left(SDS^{-1}\right)^k SDS^{-1} = SD^kS^{-1}SDS^{-1} = SD^{k+1}S^{-1}$.

b) Ziel ist es natürlich Teilaufgabe (a) so zu nutzen, dass D eine Diagonalmatrix ist, da dann D^k leicht explizit angegeben werden kann. Um dies zu erreichen versuchen wir A zu diagonalisieren:

$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix} = (x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2)$, d.h. die Eigenwerte sind 2 und 4. Die dazugehörigen Eigenräume lauten

$$E_2 = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \text{ und}$$
$$E_4 = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Also gilt mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, dass $A = S \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} S^{-1}$ und damit nach Teilaufgabe (a), dass $A^k = S \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} S^{-1}$. Um A^k explizit angeben zu können, bestimmen wir nun noch S^{-1}:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Also ist $S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und damit

$$A^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^k + 4^k & 2^k - 4^k \\ 2^k - 4^k & 2^k + 4^k \end{pmatrix}$$

Matrixpotenzen spielen bei Google eine Rolle (vgl. Aufgabe 2.6).

Präsenzaufgabe 10.3 (Diagonale Darstellungsmatrix)
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ und } \varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^3$, sodass $D_B(\varphi_A)$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lauten die Diagonaleinträge?

Lösung zu Aufgabe 10.3

a)

$$\begin{aligned}\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-2 & -2 & 3 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & -2 & x+2 \end{pmatrix} &= (x-1)\det\begin{pmatrix} x-2 & 3 \\ -1 & x+2 \end{pmatrix} \\ &= (x-1)\left((x-2)(x+2)+3\right) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1).\end{aligned}$$

Eigenwerte sind also -1 (mit algebraische Vielfachheit 1) und und 1 (mit algebraische Vielfachheit 2).

b) $E_1 = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$

$E_{-1} = \text{Kern}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$

Die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten stimmen also überein, womit A diagonalisierbar ist. Mit $S = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir $\operatorname{diag}(1, 1, -1) = S^{-1}AS$.

Hausaufgabe 10.4 (Polynomfaktorisierung)
Sei $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ eine Matrix von der wir nur das charakteristische Polynom kennen:

$$\chi_A(x) = x^5 - 3x^4 - 16x + 48.$$

a) Schreiben Sie χ_A als Produkt von Linearfaktoren.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A, sowie deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung zu Aufgabe ??

a) Aufgrund von Aufgabe 10.1 kommen nur positive und negative Teiler von 48 als ganzzahlige Nullstellen von χ_A in Frage, also $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 24, \pm 48$. Durch ausprobieren erhalten wir die Nullstellen $-2, 2, 3$. Wir wissen daher, dass $x+2$, $x-2$ und $x-3$ zur Darstellung von χ_A in Linearfaktoren gehören und, dass $\chi_A(x)$ daher durch $(x+2)(x-2)(x-3) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ geteilt werden kann: Mittels Polynomdivision erhalten wir $x^5 - 3x^4 - 16x + 48 = (x^3 - 3x^2 - 4x + 12)(x^2 + 4)$ und damit die Linearfaktorzerlegung $\chi_A(x) = (x+2)(x-2)(x-3)(x+2i)(x-2i)$.

   Die Eigenwerte lauten also $-2, 2, 3, -2i$ und $2i$, alle mit algebraischer (und daher auch geometrischer) Vielfachheit 1. Folglich ist A diagonalisierbar.

Hausaufgabe 10.5 (Matrixpotenzen bestimmen)
Für eine reelle Zahl a sei

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Berechnen Sie A^{101}.

Lösung zu Aufgabe ??

Für $a = 0$ gilt offensichtlich $A^{101} = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wir nehmen nun an, dass $a \neq 0$ gilt, womit $\chi_A = (x+a)x(x-a)$ drei verschiedene Nullstellen hat, also A drei verschiedene Eigenwerte $-a, 0, a$. Die zugehörigen Eingenräume lassen sich direkt ablesen: $E_{-a} = \langle (1,0,0)^T \rangle$, $E_0 = \langle (1,1,1)^T \rangle$ und $E_a = \langle (0,0,1)^T \rangle$.

Also gilt mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ die Gleichung $\operatorname{diag}(-a, 0, a) = S^{-1}AS$, also:

$$\begin{aligned} A^{101} &= S \operatorname{diag}(-a,0,a)^{101} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \operatorname{diag}(-a^{101}, 0, a^{101}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a^{101} & a^{101} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^{101} & a^{101} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 10.6 (Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierung - Alte Klausur)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3i \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_A in faktorisierter Form, und geben Sie die Eigenwerte von A an.

b) Bestimmen Sie zu allen Eigenwerten λ von A die zugehörigen Eigenräume E_λ.

c) Begründen Sie, dass A diagonalisierbar ist und geben Sie eine invertierbare Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösung zu Aufgabe ??

a) Aufgrund der Blockdreiecksmatrixstruktur erhalten wir das charakteristische Polynom zu

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \cdot (x-i) = (x^2+1)(x-i) = (x-i)^2(x+i).$$

Die Eigenwerte sind also i und $-i$.

b) Mithilfe des Gauß-Algorithmus bestimmen wir die Eigenräume:

$E_i = \mathrm{Kern}(A - iI_3) = \ldots = \langle (-i,1,0)^T, (3,0,1)^T \rangle$ und $E_{-i} = \mathrm{Kern}(A + iI_3) = \ldots = \langle (i,1,0)^T \rangle$.

c) Die geometrische und algebraische Vielfachheit von i sind jeweils 2, die von $-i$ jeweils 1, d.h. A ist diagonalisierbar und mit

$$S = \begin{pmatrix} -i & 3 & i \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(i, i, -i)$.

Hausaufgabe 10.7 (Eigenwerte: wahr/Falsch)
Seien $A, B \in K^{n \times n}$ invertierbare Matrizen, $v \in K^n$ und $\lambda \in K$.

Welche der nachfolgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? *Geben Sie kurze Begründungen (Beweisskizze / Gegenbeispiel wo angebracht)*

a) Ist λ ein Eigenwert zu A, dann ist $\lambda \neq 0$.

b) Ist λ ein Eigenwert zu A, dann ist λ auch ein Eigenwert zu A^T.

c) Ist v ein Eigenvektor zu A, dann ist v auch ein Eigenvektor zu A^T.

d) Ist λ ein Eigenwert zu A, dann ist $1/\lambda$ ein Eigenwert zu A^{-1}

e) Ist v ein Eigenvektor zu A und B, dann ist v auch Eigenvektor zu AB.

f) Ist v ein Eigenvektor zu A und AB, dann ist v auch Eigenvektor zu B.

Lösung zu Aufgabe ??

a) Ist richtig, da wegen A invertierbar $Av = 0$ nur für $v = 0$ gilt.

b) Ist richtig, da die Determinante einer Matrix und ihrer Transponierten übereinstimmen, also $\chi_A = \chi_{A^T}$ gilt.

c) Ist falsch. Betrachte etwa $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann $(1,0)^T$ ein Eigenvektor von A, aber nicht von A^T.

d) Ist richtig, denn ist v ein Eigenvektor zu λ von A, dann gilt $A^{-1}v = A^{-1}(1/\lambda)Av) = 1/\lambda A^{-1}Av = 1/\lambda v$.

e) Ist richtig. Seien λ der zugehörige Eigenwert von A und μ von B, dann gilt $ABv = A(\mu v) = \mu(Av) = \mu\lambda v$.

f) Ist richtig, da v auch Eigenvektor zu A^{-1} ist (s.o.) folgt die Behauptung mithilfe der vorherigen Teilaufgabe aus $B = A^{-1} \cdot (AB)$.