Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Operationen auf Matrizen

Summe von Matrizen

$A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in K^{m \times n}$

Die Summe $A + B \in K^{m \times n}$ ist definiert durch $A + B = (c_{ij})$

mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

komponentenweise

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

Achtung: Die Summe ist nur für Matrizen definiert, für die m und n jeweils miteinander übereinstimmen.

Für $A, B, C \in K^{m \times n}$ gelten wegen der komponentenweisen Definition

$$(A+B)+C = A+(B+C) \quad \text{und} \quad A+B = B+A.$$

Für die <u>Nullmatrix</u> $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$ Eigenschaften übertragen von Körper

gilt $A + 0 = A$ und für $-A = (-a_{ij})$ gilt $-A + A = 0$.

Produkt von Matrizen

$$A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}, \quad B = (b_{ij}) \in K^{n \times l}$$

Das Produkt $A \cdot B \in K^{m \times l}$ ist definiert durch $A \cdot B = (c_{ij})$ mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

nicht komponentenweise

Beispiele

- $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{K^{2\times 3}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{K^{3\times 2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1+0+0 & 1+0+1 \\ 0+1+0 & 0+2+2 \end{pmatrix}}_{K^{2\times 2}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

• $x_1, x_2 \in K$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Permutationsmatrizen

Achtung: Das Produkt ist nur definiert, wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt.

wichtiger Spezialfall: Produkt von Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ mit Vektor $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in K^m \quad \text{mit} \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j .$$

Matrizen typischerweise groß geschrieben

Vektoren typischerweise klein geschrieben

Produkt einer Matrix mit Skalar ← Element aus Körper

$$A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}, \quad s \in K$$

Das Produkt $s \cdot A \in K^{m \times n}$ ist definiert durch $(c_{ij}) \in K^{m \times n}$

mit $c_{ij} = s \cdot a_{ij}$.

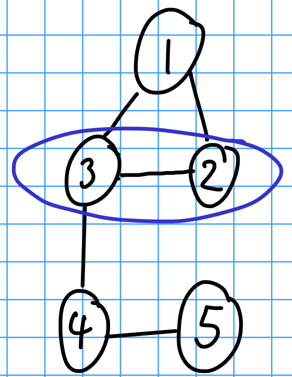
komponentenweise

Fortgeschrittene Beispiele

- $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n, \quad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n.$ $\quad v^T \in K^{1 \times n}, \quad K^n = K^{n \times 1}$

$$v^T w = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Skalarprodukt der Vektoren v und w



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Einträge a_{ij}' der Matrix $A^2 = (a_{ij}')$ sind die Anzahl der Pfade der Länge exakt 2 von Knoten i zu Knoten j

Satz a) $(K^{m\times n}, +)$ ist eine abelsche Gruppe

b) Für $A, B \in K^{m\times n}$ und $s, s' \in K$ gelten:

- $s \cdot (A+B) = s\cdot A + s \cdot B$
- $(s+s')\cdot A = s\cdot A + s'\cdot A$
- $s\cdot(s'\cdot A) = (s\cdot s')\cdot A$
- $1\cdot A = A$

c) Seien A, B, C Matrizen passender Zeilen- und Spaltenzahl. Dann:

- $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$
- $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

Beweis durch Nachrechnen

- $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$
- Für die Einheitsmatrizen $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ gilt
$$I_n \cdot A = A \quad \text{und} \quad B\cdot I_n = B.$$

Beweis durch direktes Nachrechnen. Viele der obigen Eigenschaften übertragen sich wegen der komponentenweise definierten Summe von Matrizen und Multiplikation mit einem Skalar vom Körper K.

Achtung: Das Produkt von Matrizen ist nicht kommutativ!

Im Allgemeinen ist $A\cdot B \neq B\cdot A$. Für wohldefiniertes $A\cdot B$ muss $B\cdot A$ nicht definiert sein. Aber auch für quadratische Matrizen hat man hier keine Gleichheit.

die Zeilen- und Spaltenzahl der Matrizen passen zusammen

Beispiel $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, aber $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Beobachtung Sowohl $A \cdot B$ als auch $B \cdot A$ sind gleichzeitig wohldefiniert, wenn $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times m}$. Dann gilt $A \cdot B \in K^{m \times m}$ und $B \cdot A \in K^{n \times n}$.

③ Lineare Gleichungssysteme

Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 2x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 \qquad\quad + 4x_3 - 2x_4 &= 2 \\ x_2 \qquad\qquad - x_4 &= 2 \\ x_1 \qquad\quad + 2x_3 + 2x_4 &= -5 \end{aligned}$$

Lineare Terme
lineare Gleichungen

linear $\hat{=}$ keine Variablen werden miteinander multipliziert

Formulierung mit Matrizen

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

„rechte Seite"

Definitionen Eine Gleichung der Form $A \cdot x = b$ mit $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$ heißt **Lineares Gleichungssystem** (LGS). Die **Lösungsmenge** ist die Menge aller $x \in K^n$, die das LGS (d.h. alle Gleichungen) erfüllen. Ein LGS heißt **homogen**, falls $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, sonst inhomogen.

A ist die **Koeffizientenmatrix** des LGS. Ein LGS lässt sich vollständig durch die **erweiterte Koeffizientenmatrix** $(A\ b) \in K^{m \times (n+1)}$ beschreiben. (Für diese wird der Vektor b als $(n+1)$-te Spalte an A angehängt.)