Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 9

Präsenzaufgabe 9.1 (Eigenwerte und charakteristisches Polynom)
Berechnen Sie jeweils das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte der folgenden Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$:

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\quad D = \begin{pmatrix} -8+i & 5 & 0 \\ 0 & 9+2i & 0 \\ 8-2i & 7+3i & 5-i \end{pmatrix} \qquad \text{e)}\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -4 \\ 81 & 17 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Präsenzaufgabe 9.2 (Eigenwerte, Eigenräume, Diagonalisierbarkeit)
Bestimmen Sie jeweils Eigenwerte, Eigenräume sowie die zugehörigen geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der folgenden Matrizen. Sind die jeweilige Matrizen diagonalisierbar? Geben Sie gegebenenfalls eine Basis aus Eigenvektoren an, sowie eine invertiebare Matrix S, so dass $S^{-1}AS = D$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lauten die Diagonaleinträge?

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{b)}\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\text{c)}\quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{d)}\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Präsenzaufgabe 9.3 (Eigenwerte unter Skalierung)
Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und $\tau \in K \setminus \{0\}$ ein Skalar. Es soll ein Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Matrizen A und $\tau \cdot A$ untersucht werden. Füllen Sie die Lücke in der folgenden Aussage, und beweisen Sie diese:
Für $\lambda \in K$ gilt

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \iff \boxed{} \text{ ist Eigenwert von } \tau \cdot A.$$

Bitte wenden!

Hausaufgabe 9.4 (Eigenwerte und charakteristisches Polynom)
Berechnen Sie jeweils das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte der folgenden Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

Hausaufgabe 9.5 (Eigenwerte und Eigenräume)
Bestimmen Sie jeweils Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ b) $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

c) $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$

Hausaufgabe 9.6 (Matrizen diagonalisieren)
Es seien

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ bzw. b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(i) Bestimmen Sie jeweils das charakteristische Polynom der Matrizen und geben Sie alle (möglicherweise komplexen) Eigenwerte von A an.

(ii) Geben Sie jeweils die zugehörigen Eigenräume an.

(iii) Bestimmen Sie jeweils eine Basis B bestehend aus Eigenvektoren von A, sowie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS = D$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lauten die Diagonaleinträge?

Hausaufgabe 9.7 (Eigenwerte und Verschiebung)
Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und $\tau \in K$ ein Skalar. Es soll ein Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Matrizen A und $A + \tau \cdot I_n$ untersucht werden, wobei I_n die $n \times n$ Einheitsmatrix ist. Füllen Sie die Lücke in der folgenden Aussage, und beweisen Sie diese:
Für $\lambda \in K$ gilt

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \iff \boxed{} \text{ ist Eigenwert von } A + \tau \cdot I_n.$$

Abgabe: bis Mittwoch, 22.6.2016, 11:00 Uhr im dafür vorgesehenen Kasten im Untergeschoss.

Verwenden Sie bei Abgabe das auf der Homepage hochgeladene Deckblatt und geben Sie in Zweier- oder Dreiergruppen ab.