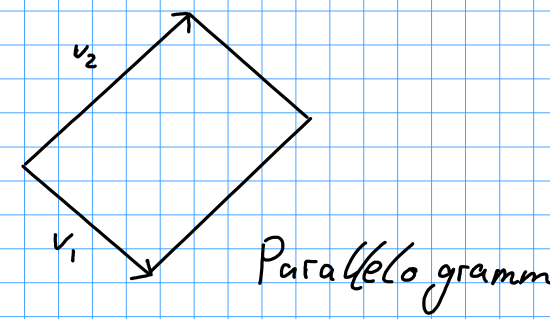
Anwendungen der Determinante

- Geometrie: Für $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ ist $|\det(v_1, v_2)|$ der Flächeninhalt des Parallelogramms.

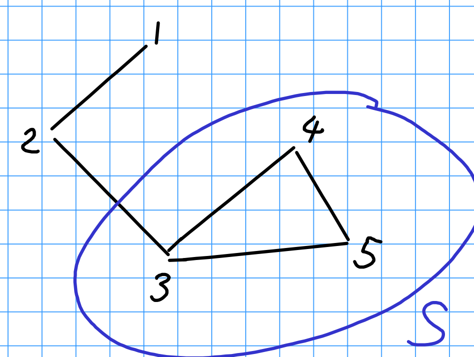


  Ähnliches gilt auch für höhere Dimension und wird für die Volumenberechnung allgemeinerer polyedrischer Objekte benutzt.

- Datenanalyse: Berechnung von Eigenwerten
- Graphentheorie:

  Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \det = 2$$



K_n sei der vollständige Graph auf n Knoten

$\Rightarrow \det(K_n) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)$

diese Information kann man benutzen, um vollständige Subgraphen zu entdecken

$S \cong K_3 \Rightarrow$ die Determinante der zugehörigen Teilmatrix muss $\det(K_3) = (-1)^{3-1} \cdot (3-1) = 2$ sein

für große Matrizen kann das also schon hilfreich sein, um einen möglichst großen vollständigen Subgraphen zu finden

aktuelles Forschungsgebiet: „spektrale Graphentheorie"

hier wird die Determinante auch für kompliziertere Fragestellungen benutzt, z.B. zum Zählen der Zusammenhangs-komponenten oder zur Bestimmung dichter Subgraphen

viele Kanten

(10) Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition: Sei $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Ein $\lambda \in K$ ist ein <u>Eigenwert</u> von A, falls es $v \in K^n \setminus \{0\}$ gibt mit $A \cdot v = \lambda \cdot v$.

d.h. für v ist die Anwendung von A nur eine Streckung

Ein solches Vektor v heißt <u>Eigenvektor</u> von A zum Eigenwert λ.

$E_\lambda = \{ v \in K^n \mid A \cdot v = \lambda \cdot v \}$ heißt der <u>Eigenraum</u> des Eigenwerts λ. Der Nullvektor ist in E_λ für alle λ.

Damit kann man auch ein nichtleeres E_λ angeben für λ, die keine Eigenwerte sind.

Die Definition ist analog für lineare Abbildungen.

<u>Beispiele</u>

- I_n hat den einzigen Eigenwert 1, denn $I_n \cdot v = 1 \cdot v \quad \forall v \in V$

  zudem: $E_1 = V$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow$ 1 ist Eigenwert von A und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zu 1

  eigentlich sogar $\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}$ für $s \in \mathbb{R}$

  $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow -1$ ist Eigenwert von A und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zu -1

  eigentlich sogar $\begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix}$ für $s \in \mathbb{R}$

Beobachtung (aus dem zweiten Beispiel):

$E_1 = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid A \cdot v = v \} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid (A - I_2) v = 0 \}$, also der Lösungsraum des homogenen LGS $(A - I_2)x = 0$

$\Rightarrow$ wir können unsere Ergebnisse zu LGSen anwenden.

Mit $A - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sieht man $\operatorname{rang}(A - I_2) = 1$ und daher

$\dim(E_1) = 1 \Rightarrow E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

analog: $E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

die Information, die man hier aus dem Rang zieht, ist dass keine weiteren EV existieren weitere Beobachtung:

$\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \rangle$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren

$\Rightarrow$ Fragen: · Ergibt so eine Konstruktion immer eine Basis?

· Wie findet man alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren?

Mit einer allgemeinen Formulierung der obigen Beobachtungen weiß man, dass Eigenräume insbesondere Untervektorräume sind. Für $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$ ist E_λ der Lösungsraum des homogenen LGS $(A-\lambda I_n)x=0$.

Berechnung von Eigenwerten

Idee: homogenes LGS $(A-\lambda I_n)x=0$ ist nicht eindeutig lösbar — sonst wäre 0 die einzige Lösung

$\Leftrightarrow$ λ ist Eigenwert von A

Definition Sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und sei $\chi_A = \det(x \cdot I_n - A)$ (chi) ein Polynom in $K[x]$. Dann heißt χ_A <u>charakteristisches Polynom</u> von A.

Beobachtung: χ_A ist ein Polynom von Grad n mit höchstem Koeffizienten 1.

$$\underline{\ }x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Satz Die Eigenwerte von $A \in K^{n\times n}$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A.

Beispiele

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow \chi_A = \det \underbrace{\begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}}_{x \cdot I_n - A} = x^2 - 1$

  $\Rightarrow 1$ und -1 sind die einzigen Eigenwerte

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow \chi_A = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1$

  $\Rightarrow A$ hat keine Eigenwerte <u>in $\mathbb{R}$</u>

  in $\mathbb{C}$ schon!!

  zur Erinnerung: $\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ mit $i^2 = -1$ und kanonischer Summe und Multiplikation

  funktioniert immer

Berechnung von Nullstellen von Polynomen

$K[x]$ ist der Polynomring mit Addition und Multiplikation von Polynomen

Division mit Rest

$$f, g \in K[x] \text{ mit } g \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists\, q, r \in K[x] \text{ mit } f = g \cdot \underbrace{q}_{\text{Quotient}} + \underbrace{r}_{\text{Rest}} \text{ und } \deg(r) < \deg(g)$$

- $\lambda \in K$ Nullstelle von $f \neq 0$

  $\Rightarrow$ Division mit Rest durch $g = x - \lambda$ ergibt $f = (x-\lambda) \cdot q + r$ mit $\deg(r) < 1$

  $\Rightarrow$ r ist konstantes Polynom und Einsetzen von λ ergibt

  $$f(\lambda) = 0 = (\lambda - \lambda) \cdot q + r = 0 + r \quad \Rightarrow \quad r = 0$$

  $\Rightarrow$ $f = (x - \lambda) \cdot q$ mit $\deg(q) = \deg(f) - 1$, d.h. man kann den Linearfaktor $(x - \lambda)$ von f abspalten

- $\mu \in K$ Nullstelle von f mit $\mu \neq \lambda$

$\Rightarrow \quad f(\mu) = 0 = \underbrace{(\mu - \lambda)}_{\neq 0} q(\mu) \quad \Rightarrow \quad q(\mu) = 0$

$\Rightarrow$ man kann das Prinzip induktiv wiederholen, was höchstens $n = \deg(f)$ mal notwendig ist

$\Rightarrow$ Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von f.
Dann ist $f = (x - \lambda_1)^{e_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{e_r} \cdot g$ mit $g \in K[x]$ einem Polynom ohne Nullstellen in K, mit $r \leq n$ und $e_i \in \mathbb{N}$. Die Zahl e_i heißt <u>Vielfachheit</u> der Nullstelle λ_i.