Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 4

Präsenzaufgabe 4.1 (Untervektorräume)
Es seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Teilmengen jeweils Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ sind. Geben Sie gegebenenfalls auch an, welche Forderung an einen Untervektorraum verletzt ist:

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1\}$.

b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$.

c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 - 2x_2 = 0\}$.

d) $M_4 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdot x_2 = 0\}$.

e) $M_5 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : x_2 = 0\}$.

f) $M_6 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_2 = 0\}$.

g) $M_7 = \mathbb{Z}^n$.

Lösung zu Aufgabe 4.1
Zur Wiederholung: Ist V ein K-Vektorraum und $U \subset V$, dann ist U ein Untervektorraum (UVR) von V, wenn

(i) $0 \in U$,

(ii) $\forall v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$,

(iii) $\forall u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in U$.

Der Schnitt $U_1 \cap U_2$ und die Summe $U_1 + U_2$ zweier Untervektorräume U_1, U_2 von V sind wieder Untervektorräume von V.

a) Für $0 \in \mathbb{R}^n$ gilt $0 \notin M_1$. Also ist M_1 kein UVR.

b) Betrachte $x = (1, 0, \dots, 0)^T \in M_2$. Es gilt $(-1, 0, \dots, 0)^T = -x = -1 \cdot x \notin M_2$, womit (iii) oben verletzt ist.

c) M_3 ist ein UVR.

   (i) Klar: $0 - 2 \cdot 0 = 0$.

   (ii) Seien $x, y \in M_3$. Dann gilt $x_1 - 2x_2 = 0$ und $y - 2y_2 = 0$. Es folgt $(x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) = 0$, also $x + y \in M_3$.

   (iii) Seien $x \in M_3$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist $x_1 - 2x_2 = 0$ also auch $\lambda x_1 - 2\lambda x_2 = \lambda(x_1 - 2x_2) = 0$. Folglich ist $\lambda x \in M_3$.

d,e) M_4, M_5 sind keine UVR: Seien $x = (1, 0, \dots, 0)^T$ und $y = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$. Dann gilt $x, y \in M_i$, aber $x + y = (1, 1, 0, \dots, 0)^T \notin M_i$, $i = 4, 5$. (Essentiel gilt $M_4 = M_5$!)

f) M_6 ist als Schnitt zweier UVR (siehe (b)) auch ein UVR.

g) M_7 ist kein UVR: Betrachte $x = (1, 0, \dots, 0)^T \in M_7$. Es gilt $(\frac{1}{2}, 0, \cdots 0) = \frac{1}{2}x \notin M_7$, obwohl $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

Präsenzaufgabe 4.2 (Zugehörigkeit zum Untervektorraum testen)
Es seien $u_1 := (1, 2, 3)^T$ und $u_2 := (-1, 0, 1)^T$ und $U := \langle u_1, u_2 \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Prüfen Sie, ob $v \in U$ ist für

$$\text{(a)} \quad v = (7, 6, 5)^T \qquad \text{(b)} \quad v = (-2, 0, -1)^T$$

und stellen Sie gegebenenfalls v als Linearkombination von u_1 und u_2 dar.

Lösung zu Aufgabe 4.2
Zur Wiederholung: Ist V ein K-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$, dann ist

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle := \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n : a_1, \dots, a_n \in K\}$$

der Span / das Erzeugnis von $v_1, \dots, v_n$. Ist U ein UVR von V und gilt $U = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, dann heißt $v_1, \dots, v_n$ Erzeugendensystem von V.

a) Damit $v = (7, 6, 5)^T \in \langle u_1, u_2 \rangle$ muss es $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ geben, sodass $v = a_1 u_1 + a_2 u_2$. Die Bestimmung von a_1, a_2 führt auf ein LGS mit folgender erweiterter Koeffizientenmatrix:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Mittels des Gauß–Algorithmus überführen wir in Zeilenstufenform:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -16 \end{array}\right] \quad \to \quad \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Es ergibt sich also $a_2 = -4$ und damit $a_1 = 3$. Es gilt also $v = 3u_1 - 4u_2$.

b) Mit dem gleichen Ansatz erhalten wir dieses Mal das LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

was wir mit den gleichen Umformungen wie oben in

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

überführen. Das LGS besitzt also keine Lösung und es folgt, dass $v \notin \langle u_1, u_2 \rangle$.

Bemerkung: Man hätte beide LGS simultan mit einer erweiterten Koeffizientenmatrix mit 2 Rechteseite-Vektoren

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 7 & -2 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right] \quad \to \quad \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

lösen können.

Präsenzaufgabe 4.3 (Linear unabhängige Vektoren)
Gegeben sind die Vektoren $v_1 := (1,1,1)^T, v_2 := (0,1,1)^T, v_3 := (1,0,1)^T$ und $v_4 := (1,0,0)^T$ im $\mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie jeweils, ob die Mengen $A := \{v_1, v_2, v_3\}$ bzw. $B := \{v_1, v_2, v_4\}$ linear unabhängig sind. Geben Sie im Falle der linearen Abhängigkeit wenigstens eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors an.

Lösung zu Aufgabe 4.3
A ist linear unabhängig, genau dann wenn $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ als einzige Lüsung für die Linearfaktoren $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ erlaubt, also genua dann wenn 0 die eindeutige Lösung des LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ist. Wir transformieren auf Zeilenstufenform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \to \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Das LGS ist also eindeutig lösbar, eindeutige Lösung ist 0, womit folgt, dass die Vektoren linear unbahängig sind. Wir können mit gleichem Ansatz zeigen, dass 0 nicht die eindeutige Lösung des entsprechenden LGS zu B ist und somit, dass B nicht l.u. ist. Wir können aber auch sofort sehen, dass $v_1 = v_2 + v_4$ gilt; also $v_1 - v_2 - v_4 = 0$ womit wir eine nicht-triviale Linearkombination der 0 aus den Vektoren in B gefunden haben.

Präsenzaufgabe 4.4 (Erzeugendensysteme und Basen)

a) Wir betrachten die folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$:

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{und} \qquad V := \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Bestimmen Sie die Dimension von $U + V$ und wählen Sie aus der Menge S der fünf Vektoren, die U bzw. V in der Aufgabenstellung aufspannen eine Basis aus.

b) Nun betrachten wir den Untervektorraum $U = \left\{(a+b+c, -b, a, 2a-c)^T \in \mathbb{R}^4 : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ des $\mathbb{R}^4$. Vergewissern Sie sich, dass U ein Untervektorraum ist und bestimmen Sie ein endliches Erzeugendensystem B von U. Ist Ihre Menge B eine Basis von U?

Lösung zu Aufgabe 4.4

a) Es gilt

$$U + V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Betrachten wir die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

so erkennen wir sofort, dass die erste und dritte Zeile identisch sind, dass aber die zweite Zeile kein vielfaches der ersten Zeile ist. Der Rang der Matrix ist also 2 und damit ist die Dimension von $u + V$ ebenfalls 2. (Sie können dies auch durhc ÜBerführung in Zeilenstufenform feststellen).

Jede AUswahl von 2 linear unabhängigen Vektoren aus S bildet daher eine Basis von $U + V$. Da 2 Vektoren nur l.a. sind, wenn sie ein direktes Vielfaches voneinander sind, ist jede Wahl außer den beiden letzten Vektoren korrekt.

b) Durch die Bestimmung des endlichen Erzeugendensystems erkennen wir auch, dass U ein UVR ist. Wir schreiben:

$$\begin{pmatrix} a+b+c \\ -b \\ a \\ 2a-c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D.h. $U = \left\langle (1,0,1,2)^T, (1,-1,0,0)^T, (1,0,0,-1)^T \right\rangle$ und das gefundene Erzeugendensystem ist eine Basis, da man leicht erkennt, dass die 3 Vektoren l.u. sind.

Hausaufgabe 4.5 (Untervektorräume 2)

a) Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$?

(i) $M_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = x_3\}$,

(ii) $M_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \cdot x_2 = x_3\}$,

b) Die Menge $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ Abbildung}\}$ ist mit den in der Vorlesung definierten Verknüpfungen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume dieses Vektorraums?

(i) $M_1 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1) = 0\}$,

(ii) $M_2 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(0) = 1\}$,

(iii) $M_3 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ hat höchstens endlich viele Nullstellen}\}$,

(iv) $M_4 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \text{ für höchstens endlich viele } x \in \mathbb{R} \text{ ist } f(x) \neq 0\}$,

(v) $M_5 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ ist beschränkt}\}$.

Dabei heißt eine Abbildung $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ beschränkt, falls ein $\rho > 0$ existiert, sodass $|f(x)| \leq \rho$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 4.5

a) (i) M_1 ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, denn:

- $0 \in M_1$ (da $0 + 0 = 0$).
- Aus $x, y \in M_1$ folgt $x_1 + x_2 = x_3$ und $y_1 + y_2 = y_3$. Also gilt $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = x_3 + y_3$ und damit $x + y \in M_1$.
- Aus $x \in M_1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt $x_1 + x_2 = x_3$ und $\lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 = \lambda \cdot (x_1 + x_2) = \lambda \cdot x_3$, also $\lambda \cdot x \in M_1$.

(ii) M_2 ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, denn zu $x := (1, 1, 1)^T \in M_3$ (da $1 \cdot 1 = 1$) und $\lambda := 2 \in \mathbb{R}$, ist $\lambda \cdot x = (2, 2, 2)^T \notin M_3$ (da $2 \cdot 2 = 4 \neq 2$).

b) (i) M_1 ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, denn:

- Die Nullfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ liegt in M_1.
- Sind $f, g \in M_1$ dann gilt $f(1) = g(1) = 0$, also $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$. Folglich ist $f + g \in M_1$.
- Ist $f \in M_1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt $f(1) = 0$ und damit $(\lambda \cdot f)(1) = \lambda \cdot f(1) = \lambda \cdot 0 = 0$. Also ist $\lambda \cdot f \in M_1$.

(ii) M_2 ist kein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, da die Nullfunktion nicht in M_2 liegt.

(iii) M_3 ist kein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, da die Nullfunktion auch nicht in M_3 liegt.

(iv) M_4 ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, denn:

- Die Nullfunktion besitzt gar keine von Null abweichenden Funktionswerte, gehört also zu M_4.

- Sind $f, g \in M_4$, dann gilt $f(x) = 0$, $g(y) = 0$ für alle bis auf endlich viele x bzw. $y \in \mathbb{R}$. Damit ist aber $(f+g)(z) = f(z) + g(z) = 0 + 0 = 0$ für alle bis auf endlich viele $z \in \mathbb{R}$. (Ausnahmen kann es nur für die obigen x und y geben, die zusammen immer noch endlich viele sind. Also gilt $f + g \in M_4$.
- Ist $f \in M_4$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ so gilt $f(x) = 0$ füur alle bis auf endlich viele $x \in \mathbb{R}$. Also ist $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot 0 = 0$ für alle bis auf endlich viele $x \in \mathbb{R}$, womit $\lambda \cdot f \in M_4$ folgt.

(v) M_5 ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, denn:

- Die Nullfunktion kann offen sichtlich mit jedem $\rho > 0$ beschränkt werden.
- Sind $f_1 f_2 \in M_5$, dann existieren $\rho_1, \rho_2 > 0$, sodass $|f_i(x)| \leq \rho_i$, $i = 1, 2$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit folgt $|(f_1 + f_2)(x)| = |f_1(x) + f_2(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \leq \rho_1 + \rho_2$ mit $\rho_1 + \rho_2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $f_1 + f_2 \in M_5$.
- Ist $f \in M_5$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ so existiert $\rho > 0$ mit $|f(x)| \leq \rho$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $|\lambda \cdot f)(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| \leq |\lambda| \rho$ für alle $x \in \mathbb{R}$, womit $\lambda \cdot f \in M_5$ folgt.

Hausaufgabe 4.6 (Eine Schar von Untervektorräumen)
Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sei der Untervektorraum $U_a \subset \mathbb{R}^4$ gegeben als die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$x_1 + x_2 + a x_4 = 0.$$

Bestimmen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ den Schnitt $U_a \cap U_b$ der zu a und b gehörigen Untervektorräume und zeigen Sie, dass dieser nicht von der Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ (mit $a \neq b$) abhängt.

Lösung zu Aufgabe 4.6
Es sei $a \neq b$. Dann eribt sich der Schnitt $U_a \cap U_b$ als Lösungsmenge des LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 & b & 0 \end{array}\right]$$

Wir lösen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & 0 \end{array}\right] \quad \to \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \to \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Hierbei haben wir zunächst die erste Zeile von der zweiten abgezogen, dann in Schritt 2 die zweite Zeile durch $a - b \neq 0$ dividiert und im letzten Schritt das a-fache der zweiten Zeile von der ersten abgezogen. Wir erhalten als Lösungsmenge mit den freien Parametern $\lambda := x_2$ und $\mu := x_3$:

$$U_a \cap U_b = L = \left\{(-\lambda, \lambda, \mu, 0) \in \mathbb{R}^4 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\},$$

unabhängig von der Wahl von $a \neq b$.

Hausaufgabe 4.7 (Test auf Zugehörigkeit zu einem Untervektorraum und Lineare Unabhängigkeit)
Es seien

$$u_1 := (1, 1, -1, -2)^T, u_2 := (2, 1, 0, 3)^T, u_3 := (0, -1, 2, 7)^T, u_4 := (-1, 2-1, 1)^T \in \mathbb{Q}^4$$

und $U := \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle \subset \mathbb{Q}^4$ der von u_1, u_2, u_3, u_4 erzeugte Unterraum von $\mathbb{Q}^4$.

a) Prüfen Sie, ob $v \in U$ ist für

$$\text{(i)} \quad v = (6, -4, 2, -2)^T \qquad \text{(ii)} \quad v = (1, 3, -1, 2)^T$$

und stellen Sie, falls dies möglich ist, v als Linearkombination von u_1, u_2, u_3, u_4 dar.

b) Ist die Menge $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ linear unabhängig?

Lösung zu Aufgabe 4.7

a) Die Bedingung (i) $v = (6, -4, 2, -2)^T \in U$ ist äquivalent zur Lösbarkeit des durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 7 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Entsprechend ist die Bedingung (ii) $v = (1, 3, -1, 2)^T \in U$ äquivalent zur Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$, das durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Wir fassen beide Systeme in einer erweiterten Koeffizientenmatrix mit 2 Rechteseite-Vektoren zusammen:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 2 & 0 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 7 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

Auf diese Weise können wir beide Systeme zugleich lösen. Der Gauß–Algorithmus liefert:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 2 & 0 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Also ist $(6, -4, 2, -2)^T \in U$, während $(1, 3, -1, 2)^T \notin U$. Um $(6, -4, 2, -2)^T$ als Linearkombination von u_1, u_2, u_3, u_4 darzustellen, ist das durch die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

gegebene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ zu lösen. Wiederum liefert der Gauß–Algorithmus

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Eine Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist $(1, 1, 0, -3)$, und in der Tat ist

$$v = (6, -4, 2, -2)^T = 1 \cdot (1, 1, -1, -2)^T + 1 \cdot (2, 1, 0, 3)^T - 3 \cdot (-1, 2, -1, 1)^T$$

eine Darstellung von v als Linearkombination von u_1, u_2, u_3, u_4.

b) Der Gauß–Algorithmus in (a) mit der Koeffizientenmatrix $A = [u_1, u_2, u_3, u_4]$ hat gezeigt, dass $\operatorname{rang}(A) = 3 < 4$ ist. Daher sind die Vektoren $u_1, \dots, u_4$ linear abhängig.

Hausaufgabe 4.8 (Basen von Untervektorräumen)

a) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension für

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

b) Es sei L die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Berechnen Sie L. und bestimmen Sie eine Basis B von L.

Lösung zu Aufgabe 4.8

a) Wir schreiben die sechs Vektoren als Zeilen in eine Matrix A und wenden auf diese den Gauß–Algorithmus an, um eine Zeilenstufenform zu erhalten. Die Nichtnullzeilen dieser Zeilenstufenform bilden dann eine Basis von U und ihre Anzahl ($\operatorname{rang}(A)$) ist demnach die Dimension des Untervektorraumes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Hier wurde im ersten Schritt die dritte Zeile nach oben geschrieben und von der ersten und zweiten subtrahiert; im zweiten Schritt wurde die fünfte Zeile als nun zweite gewählt und von der zweiten und vierten subtrahiert; im dritten Schritt wurde die dritte Zeile mit $-\frac{1}{2}$ multipliziert und dann damit die ganze vierte Spalte ausgeräumt.) Als Ergebnis erhalten wir als Basis von U

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\},$$

die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$, und die Dimension $\dim(U) = 4$ (also $U = \mathbb{R}^4$).

b) Zunächst: Als Lösungsmenge eine *homogenen* linearen LGS ist L ein Untervektorraum. Die Aufgabenstellung ist also sinnvoll.

Der Gauß–Algorithmus liefert

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \to \quad \left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & -7 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \to \quad \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 11 & 22 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

in strenger Zeilenstufenform. Dabei wurde im ersten Schritt die erste Zeile von der zweiten abgezogen, um dort eine Eins zu erzeugen. Danach wurden (in einem Doppelschritt) die Zeilen vertauscht und dann das zweifache der ersten Zeile von der zweiten abgezogen. Nun können wir die Lösungsmenge mit den freien Variablen x_3, x_4, x_5, x_6 unmittelbar angeben:

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \begin{pmatrix} x_3 + 3x_4 + 7x_5 \\ -3x_3 - 11x_4 - 22x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} : x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 7 \\ -22 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -22 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Die vier Vektoren in den spitzen Klammern bilden die gesuchte Menge B. Aufgrund der „Struktur“ der Vektoren bei den Koordinaten die zu den freien Variablen gehören (Koordinaten Nr. $3, 4, 5, 6$) erkennt man die Vektoren sofort als linear unabhängig. Tatsächlich erhält man auf diese Weise mit dem Gauß–Algorithmus die Lösungsmenge immer als Spann linear unabhängiger Vektoren.