Satz Seien U, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit Basen A, B, C.
Seien ferner $\varphi: U \to V$, $\psi: V \to W$ lineare Abbildungen.
Dann gilt:

$$D_{A,C}(\psi \circ \varphi) = D_{B,C}(\psi) \cdot D_{A,B}(\varphi)$$

ist linear

Komposition von linearen Abbildungen $\hat{=}$ Matrixprodukt

für diese Eigenschaft wurde das Matrixprodukt genau so definiert

Beweis: Notation $A = \{u_1, \dots, u_n\}$, $B = \{v_1, \dots, v_m\}$, $C = \{w_1, \dots, w_\ell\}$
und $D_{B,C}(\psi) = (a_{ij}) \in K^{\ell \times m}$, $D_{A,B}(\varphi) = (b_{ij}) \in K^{m \times n}$

Für $j \in \{1,\dots,n\}$ gilt

$$(\psi \circ \varphi)(u_j) = \psi\left(\sum_{k=1}^{m} b_{kj} v_k\right) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} \cdot \psi(v_k) = \sum_{k=1}^{m}\left(b_{kj} \cdot \sum_{i=1}^{l} a_{ik} w_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\right) w_i$$

Koeffizient von w_i ist genau der i,j-te Eintrag von $A \cdot B$

$\Rightarrow$ Behauptung $\square$

$A \in K^{l\times m}$, $B \in K^{m \times n}$ und zugehörige Abbildungen $\varphi_A : K^m \to K^l$, $\varphi_B : K^n \to K^m$

Dann $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{A \cdot B}$. Ist $A \in K^{n\times n}$ invertierbar, so folgt $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{id} = id_{K^n}$.

$\Rightarrow$ Also ist $\varphi_{A^{-1}} = \varphi_A^{-1}$ die Umkehrabbildung von φ_A.

$\Rightarrow$ A^{-1} ist die Darstellungsmatrix von φ_A^{-1} bezüglich der Standardbasis

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit der inversen Matrix

$$\varphi_A^{-1} \circ \varphi_A = id_{K^n} = \varphi_A \circ \varphi_A^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$$

Die invertierbaren Matrizen erfüllen (nach obiger Bemerkung und den explizit besprochenen Operationen auf Matrizen) als Menge alle Eigenschaften einer Gruppe mit dem Matrixprodukt.

Definition $\quad GL_n(K) = \{A \in K^{n\times n} \mid A \text{ invertierbar}\}$

ist die allgemeine lineare Gruppe.

Basiswechsel

Die Basen von Vektorräumen können sich unterscheiden und manche Basen sind für die Darstellung von Daten (Menge von Vektoren) geeigneter als andere. Was passiert mit der Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $V \to V$ bei einem Basiswechsel?

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad B' = \{v_1', \dots, v_n'\} \quad \text{Basen von } V$$

$\mathcal{B}$ Basis $\Rightarrow$ Elemente von $\mathcal{B}'$ kann man über $\mathcal{B}$ ausdrücken:

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \quad \text{mit } a_{ij} \in K$$

$\Rightarrow$ Matrix $S = S_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ heißt <u>Basiswechselmatrix.</u>

Diese kann man benutzen, um den Übergang von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$ zu beschreiben.

Spalten von $S \hat{=}$ Koordinatenvektoren der (neuen) zweiten Basis $\mathcal{B}'$ geschrieben in der ersten Basis $\mathcal{B}$

umgekehrt:

$\mathcal{B}'$ Basis $\Rightarrow$ Elemente von $\mathcal{B}$ kann man über $\mathcal{B}'$ ausdrücken

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i' \quad \text{mit } b_{ij} \in K$$

$T = (b_{ij}) \in K^{n \times n}$ sei die zugehörige Basiswechselmatrix

$\forall j = 1, \dots, n$ gilt jetzt $\quad v_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i' = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k \right) =$

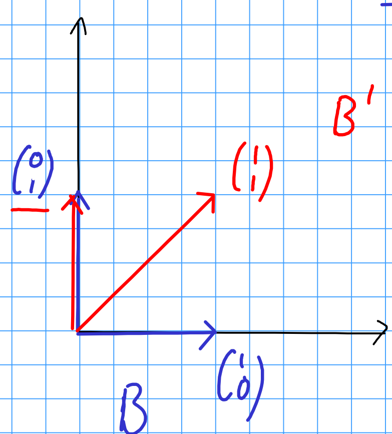
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ij} \right) v_k$$

Element an Stelle (k,j) von $S \cdot T$

B Basis $\Rightarrow$ Koeffizientenvergleich $\quad S \cdot T = I_n \quad \Rightarrow \quad T = S^{-1}$

$\Rightarrow$ zudem: Jede invertierbare Matrizen $S = (a_{ij}) \in GL_n(K)$ beschreibt einen Basiswechsel.

Beispiel $\quad \cdot V = \mathbb{R}^2 \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$



Basiswechselmatrix von B nach B'

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Basiswechselmatrix von B' nach B:

$$T = S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontrolle $S \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Darstellung von Vektoren durch B bzw. B' an

Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ in Basis B bedeutet $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

selber Vektor in B': $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ der Vektor hätte also in B' die Darstellung $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wie sieht man den Zusammenhang dieser Schreibweisen $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ in B und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ in B' für den selben Vektor?

Antwort später

hier: $S \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zufall

aber Vorsicht! Das sieht nur so einfach aus, da B die Standardbasis!

Seien $\varphi: V \to V$ eine lineare Abbildung und $D_B(\varphi) = d_{ij} \in K^{n\times n}$.

Wir suchen $D_{B'}(\varphi)$. Dazu:

$$\varphi(v_j') = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} v_i\right) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\, \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^n d_{ki} v_k\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_{ki} a_{ij} \left(\sum_{l=1}^n b_{lk} v_l'\right) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{lk} d_{ki} a_{ij}\right) v_l'$$

Eintrag (l,j) in Produkt $T \cdot D_B(\varphi) \cdot S$

und durch Koeffizientenvergleich sieht man, dass das der (l,j)-te Eintrag von $D_{B'}(\varphi)$ sein muss,

$\Rightarrow$ __Satz__ Seien B, B' Basen eines endlich-dimensionalen Vektorraum V und $S = S_{B,B'}$ die Basiswechselmatrix. Dann gilt für eine lineare Abbildung $\varphi: V \to V$: $D_{B'}(\varphi) = S^{-1} \cdot D_B(\varphi) \cdot S$.

analog für allgemeine lineare Abbildungen: (also nicht nur für Basiswechsel)

Satz Seien B, B' Basen eines endlich-dimensionalen Vektorraums V und C, C' Basen eines endlich-dimensionalen Vektorraums W. Dann gilt für eine lineare Abbildung $\varphi: V \to W$

$$D_{B',C'}(\varphi) = S_{C,C'}^{-1} \cdot D_{B,C}(\varphi) \cdot S_{B,B'}.$$

Definition Zwei quadratische Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen <u>ähnlich</u>, falls es $S \in GL_n(K)$ gibt mit $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

Zwei Matrizen $A, B \in K^{m \times n}$ heißen <u>äquivalent</u>, falls es $S \in GL_n(K)$ und $T \in GL_m(K)$ gibt mit $B = T^{-1} A S$.