Lineare Algebra für Informatik (MA0901)

PD Dr. S. Borgwardt, Dr. R. Brandenberg

Aufgabenblatt 9

Präsenzaufgabe 9.1 (Eigenwerte und charakteristisches Polynom)
Berechnen Sie jeweils das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte der folgenden Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$:

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\quad D = \begin{pmatrix} -8+i & 5 & 0 \\ 0 & 9+2i & 0 \\ 8-2i & 7+3i & 5-i \end{pmatrix} \qquad \text{e)}\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -4 \\ 81 & 17 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 9.1
Zur Wiederholung: Sei $A \in K^{n\times n}$.

- $\chi_A(x) := \det(x \cdot I_n - A) \in K[x]$ heißt charakteristisches Polynom von A.
- $\lambda \in K$ heißt Eigenwert zu A, falls es ein $v \in K^n, v \neq 0$ gibt, sodass $Av = \lambda v$ gilt.
- v heißt dann Eigenvektor.
- Die Eigenwerte sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (denn $Av = \lambda v$ für $v \neq 0$, genau dann wenn $\lambda \cdot I_n - A$ singulär).

a) $\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2 - 1 = x(x-2)$, d.h. die Eigenwerte sind 0 und 2 (egal, ob über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

b) $\chi_B(x) = \det \begin{pmatrix} x-3 & 4 \\ -1 & x+2 \end{pmatrix} = (x-3)(x+2) + 4 = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, d.h. die Eigenwerte sind -1 und 2 (egal, ob über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

c) $\chi_C(x) = \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$. Die Eigenwerte (über $\mathbb{C}$) sind also i und $-i$ (während C über $\mathbb{R}$ keine Eigenwerte besitzt – C ist eine Drehung!).

d) $\chi_D(x) = \det \begin{pmatrix} x+8-i & -5 & 0 \\ 0 & x-9-2i & 0 \\ -8+2i & -7-3i & x-5+i \end{pmatrix} = (x-(-8+i))(x-(9+2i))(x-(5-i))$.
Man kann dies direkt ablesen: Die Matrix ist zunächst eine untere Blockdreiecksmatrix mit Blöcken der Größe 2×2 und 1×1. Dann ist weiter der 2×2 Block eine obere Dreiecksmatix. Die Eigenwerte sind also $-8+i, 9+2i, 5-i$.

e) $\chi_E(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & x-3 & 4 \\ -81 & -17 & -1 & x+2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} x-3 & 4 \\ -1 & x+2 \end{pmatrix}$
$= x(x+1)(x-2)^2$ (mit (a) und (b)), d.h. die Eigenwerte sind 0,-1,2 (egal, ob über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

Präsenzaufgabe 9.2 (Eigenwerte, Eigenräume, Diagonalisierbarkeit)
Bestimmen Sie jeweils Eigenwerte, Eigenräume sowie die zugehörigen geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der folgenden Matrizen. Sind die jeweilige Matrizen diagonalisierbar? Geben Sie gegebenenfalls eine Basis aus Eigenvektoren an, sowie eine invertiebare Matrix S, so dass $S^{-1}AS = D$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lauten die Diagonaleinträge?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

c) $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Lösung zu Aufgabe 9.2
Mehr Wiederholung:

- $E_\lambda = \{v \in K^n : Av = \lambda v\} = \{v : (A - \lambda I_n)v = 0\} = \mathrm{Kern}(A - \lambda I_n)$ heißt Eigenraum von A zu λ.
- λ Eigenwert von $A \iff E_\lambda \neq \{0\}$.
- $\dim(E_\lambda) \geq 1$ heißt geeometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ.
- Falls das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt

$$\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{e_1} \cdot (x - \lambda_r)^{e_r}, e_1 + \ldots + e_r = n$$

  wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschiedene Eigenwerte sind, dann heißt e_i algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i.
- Es gilt *immer* geometrische Vielfachheit $\leq$ algebraische Vielfachheit und A diagonalisierbar, genau dann wenn *alle* geometrischen Vielfachheiten = algebraische Vielfachheiten.
- Stimmen die Vielfachheiten überein ist die Matrix diagonalisierbar und wir erhalten die diagonalisierte Matrix $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_r)$ (mit je e_i-fach wiederholtem λ_i) als $D = S^{-1}AS$. wobei sich die Spalten von S aus einer (gemäß der Nummerierung der Eigenwerte sortierten) Basis von Eigenvektoren ergibt.

a) $\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = (x-1)x$, d.h. die Eigenwerte sind 0 und 1, beide mit algebraischer Vielfachheit 1. Der Eigenraum E_0 zum Eigenwert 0 ist $E_0 = \mathrm{Kern}(A - 0) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1, -1)^T \rangle$. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ergibt sich zu $E_1 = \mathrm{Kern}(A - I_2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1, 0)^T \rangle$. Damit sind die geometrischen Vielfachheiten ebenfalls 1 (was klar war da mindestens 1 und höchstens algebraische Vielfachheit). Eine Basis aus Eigenvektoren ist damit $\left\{(1,-1)^T,(1,0)^T\right\}$, womit wir $S=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ und $S^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ erhalten und leicht nachrechnen, dass tatsächlich $S^{-1}AS=\operatorname{diag}(0,1)$ gilt.

b) $\chi_B(x)=\det\begin{pmatrix}x & -1\\ 0 & x\end{pmatrix}=x^2$, d.h. der einzige Eigenwert ist 0 mit algebraischer Vielfachheit 2.

Der Eigenraum E_0 zum Eigenwert 0 ist $E_0=\operatorname{Kern}(A-0)=\operatorname{Kern}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\langle(1,0)^T\rangle$. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts ist daher nur 1, also kleiner als die algebraische, womit A nicht diagonalisierbar ist.

c)

$$\begin{aligned}\chi_C(x)=\det\begin{pmatrix}x-4 & 0 & 2\\ -1 & x-3 & 2\\ -1 & -2 & x+1\end{pmatrix}&=(x-3)\det\begin{pmatrix}x-4 & 2\\ -1 & x+1\end{pmatrix}+2\det\begin{pmatrix}x-4 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\\ &=(x-3)((x-4)(x+1)+2)+2(2(x-4)+2)=(x-3)(x^2-3x-2)+4(x-3)\\ &=(x-3)(x-1)(x-2).\end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte $1,2,3$, jeweils mit algebraischer (und geometrischer) Vielfachheit 1.

$$\begin{aligned}E_1&=\operatorname{Kern}(A-I_3)=\operatorname{Kern}\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}=\operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -6 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\langle(2,2,3)^T\rangle,\\ E_2&=\operatorname{Kern}(A-2I_3)=\operatorname{Kern}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}=\operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}=\operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &=\langle(1,1,1)^T\rangle \text{ und}\\ E_3&=\operatorname{Kern}(A-3I_3)=\operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}==\operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\langle(2,1,1)^T\rangle.\end{aligned}$$

Eine Basis aus Eigenvektoren ist damit $\left\{(2,2,3)^T,(1,1,1)^T,(2,1,1)^T\right\}$, woraus sich

$$S=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad\text{und}\qquad D=S^{-1}AS=\operatorname{diag}(1,2,3)$$

ergibt.

d) $\chi_D(x)=\det\begin{pmatrix}x-1 & -2 & 0\\ -2 & x-1 & 0\\ 1 & -1 & x-3\end{pmatrix}=(x-3)\det\begin{pmatrix}x-1 & -2\\ -2 & x-1\end{pmatrix}=(x-3)^2(x+1)$. Eigenwerte sind also $-1,3$, wobei -1 algebraische (und geometrische) Vielfachheit 1 hat, aber 3 algebraische

Vielfachheit 2.

$$E_{-1} = \text{Kern}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (2,-2,1)^T \rangle,$$
$$E_3 = \text{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,1,0)^T, (0,0,1)^T \rangle,$$

womit wir auch erkennen, dass 2 auch die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 3 ist. Basis aus Eigenvektoren ist also $\left\{(2,-2,1)^T, (1,1,0)^T, (0,0,1)^T\right\}$ und damit also

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D = S^{-1}AS = \text{diag}(-1,3,3).$$

Präsenzaufgabe 9.3 (Eigenwerte unter Skalierung)
Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und $\tau \in K \setminus \{0\}$ ein Skalar. Es soll ein Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Matrizen A und $\tau \cdot A$ untersucht werden. Füllen Sie die Lücke in der folgenden Aussage, und beweisen Sie diese:
Für $\lambda \in K$ gilt

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \iff \boxed{} \text{ ist Eigenwert von } \tau \cdot A.$$

Lösung zu Aufgabe 9.5
Behauptung: λ ist Eigenwert von A, genau dann wenn $\lambda\tau$ Eigenwert von $\tau \cdot A$ ist.

Beweis: Sei $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt λ ist Eigenwert von A zu $v \iff Av = \lambda v \Rightarrow \tau \cdot Av = \tau\lambda v \iff \tau\lambda$ ist Eigenwert von $\tau \cdot A$ zu v.

Hausaufgabe 9.4 (Eigenwerte und charakteristisches Polynom)
Berechnen Sie jeweils das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte der folgenden Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 9.4

a) $\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ -2 & x-2 \end{pmatrix} = (x-1)(x-2) - 2 = x^2 - 3x = x(x-3)$, womit 0 und 3 die Eigenwerte von A sind.

b) $\chi_B(x) = \det \begin{pmatrix} x+1 & -1 \\ 8 & x-3 \end{pmatrix} = (x+1)(x-3)+8 = x^2-2x+5$. Die Eigenwerte ergeben sich als dessen Nullstellen (die wir etwa durch quadratische Ergänzung oder mithilfe der „p,q-Formel erhalten“): $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{-16}) = 1 \pm 2i$.

c) $\chi_C(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ -4 & x-2 & 2 \\ 0 & 0 & x+3 \end{pmatrix} = (x+3)(x-1)(x-2)$, d.h. die Eigenwerte sind $1, 2, -3$.

d) Durch Nutzung der Blockstrucktur erhalten wir

$$\begin{aligned}
\chi_D(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & x-1 & 0 & -8 \\ -4 & -5 & x-6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & x-10 \end{pmatrix} &= (x-10) \det \begin{pmatrix} x-1 & -5 & 0 \\ -5 & x-1 & 0 \\ -4 & -5 & x-6 \end{pmatrix} \\
&= (x-6)(x-10) \det \begin{pmatrix} x-1 & -5 \\ -5 & x-1 \end{pmatrix} = (x^2-2x-24)(x-6)(x-10) \\
&= (x-6)^2(x+4)(x-10).
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $-4, 6, 10$.

Hausaufgabe 9.5 (Eigenwerte und Eigenräume)
Bestimmen Sie jeweils Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ b) $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

c) $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$

Lösung zu Aufgabe 9.5

a) $\chi_A = \det \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-3)(x-1)+1 = x^2-4x+4 = (x-2)^2$, also Eigenwert: 2.

$E_2 = \text{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,1)^T \rangle$.

b)

$$\chi_B = \det\begin{pmatrix} x-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & x+\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & x+\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\det\begin{pmatrix} 3x-1 & -2 & -2 \\ -2 & 3x+2 & -1 \\ -2 & -1 & 3x+2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\det\begin{pmatrix} 3x+3 & -2 & -6x-6 \\ -6x-6 & 3x+2 & (3x+2)^2-1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\det\begin{pmatrix} 3x+3 & -6x-6 \\ -6x-6 & 9x^2+12x+3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\left((3x+3)(9x^2+12x+3)-(-6x-6)^2\right) = \frac{1}{27}\left(3(x+1)\cdot 3(3x^2+4x+1)-6^2(x+1)^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}(x+1)\left((3x^2+4x+1)-4(x+1)\right) = \frac{1}{3}(x+1)(3x^2-3)$$

$$= \frac{1}{3}(x+1)\cdot 3(x+1)(x-1) = (x+1)^2(x-1).$$

Eigenwerte: -1 und 1.

$$E_{-1} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,-2,0)^T, (1,0,-2)^T \rangle$$

$$E_{1} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (2,1,1)^T \rangle.$$

c)

$$\chi_C = \det\begin{pmatrix} x+3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x+1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & x+2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & x+2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & x+2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x+3 & -1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}\cdot (x+2)^3$$

$$= \left((x+3)(x+1)+1\right)(x+2)^3 = (x^2+4x+4)(x+2)^3 = (x+2)^5.$$

Eigenwert: -2.

$$E_{-2} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,1,0,1,1)^T, (0,0,1,0,0)^T \rangle.$$

Hausaufgabe 9.6 (Matrizen diagonalisieren)
Es seien

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \quad \text{bzw.} \quad \text{b)}\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

(i) Bestimmen Sie jeweils das charakteristische Polynom der Matrizen und geben Sie alle (möglicherweise komplexen) Eigenwerte von A an.

(ii) Geben Sie jeweils die zugehörigen Eigenräume an.

(iii) Bestimmen Sie jeweils eine Basis B bestehend aus Eigenvektoren von A, sowie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS = D$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lauten die Diagonaleinträge?

Lösung zu Aufgabe 9.6

a) (i) Aufgrund der Blockstruktur liest man direkt $\chi_A(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$ ab und erhält so die Eigenwerte $1, -1, 2$.

(ii) Wir erhalten die Eigenräume $E_\lambda = \mathrm{Kern}(A - \lambda I_3)$ zu

$$E_1 = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,1,0)^T \rangle,$$

$$E_{-1} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \langle (0,1,0)^T \rangle \text{ und}$$

$$E_2 = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,1,1)^T \rangle.$$

(iii) Eine Basis aus Eigenvektoren ist somit $\left\{(1,1,0)^T, (0,1,0)^T, (1,1,1)^T\right\}$, d.h. mit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt $S^{-1}AS = D = \mathrm{diag}(1, -1, 2)$.

b) (i) Mithilfe der Determinantenregel von Sarrus erhalten wir

$$\chi_A = \det\begin{pmatrix} x & 5 & 0 \\ -5 & x & -5 \\ 0 & 5 & x \end{pmatrix} = x^3 + 25x + 25x = x(x^2+50) = x(x+5\sqrt{2}i)(x-5\sqrt{2}i).$$

Die Eigenwerte von A lauten also $-5\sqrt{2}i$, 0, $5\sqrt{2}i$.

(ii) Die Eigenräume erhalten wir wieder mittels der Kerne $\mathrm{Kern}(A - \lambda I_3)$:

$$
\begin{aligned}
E_{-5\sqrt{2}i} &= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -5\sqrt{2}i & 5 & 0 \\ -5 & -5\sqrt{2}i & -5 \\ 0 & 5 & -5\sqrt{2}i \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} \sqrt{2}i & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}i & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2}i \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sqrt{2}i \\ 1 & \sqrt{2}i & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2}i \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2}i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \langle (1, \sqrt{2}i, 1)^T \rangle. \\
E_0 &= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \langle (1, 0, -1)^T \rangle. \\
E_{5\sqrt{2}i} &= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 5\sqrt{2}i & 5 & 0 \\ -5 & 5\sqrt{2}i & -5 \\ 0 & 5 & 5\sqrt{2}i \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} \sqrt{2}i & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2}i & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}i \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -\sqrt{2}i \\ 1 & -\sqrt{2}i & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}i \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \langle (1, -\sqrt{2}i, 1)^T \rangle.
\end{aligned}
$$

(iii) Wir erhalten $\left\{(1, \sqrt{2}i, 1)^T, (1, 0, -1)^T, (1, -\sqrt{2}i, 1)^T\right\}$ als Basis aus Eigenvektoren und mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2}i & 0 & -\sqrt{2}i \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $S^{-1}AS = D = \mathrm{diag}(-5\sqrt{2}i, 0, 5\sqrt{2}i)$.

Hausaufgabe 9.7 (Eigenwerte und Verschiebung)
Es sei $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix und $\tau \in K$ ein Skalar. Es soll ein Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Matrizen A und $A + \tau \cdot I_n$ untersucht werden, wobei I_n die $n \times n$ Einheitsmatrix ist. Füllen Sie die Lücke in der folgenden Aussage, und beweisen Sie diese:
Für $\lambda \in K$ gilt

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{} \quad \text{ist Eigenwert von } A + \tau \cdot I_n.$$

Lösung zu Aufgabe 9.7
Behauptung λ ist Eigenwert von A, genau dann wenn $\lambda + \tau$ Eigenwert von $A + \tau \cdot I_n$ ist.

Beweis: Sei $v \in K^n \setminus \{0\}$. Dann gilt: v ist Eigenvektor zum Eigenwert λ von $A \iff Av = \lambda v \iff (A + \tau \cdot I_n)v = (\lambda + \tau)v \iff v$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda + \tau$ von $A + \tau \cdot I_n$.