

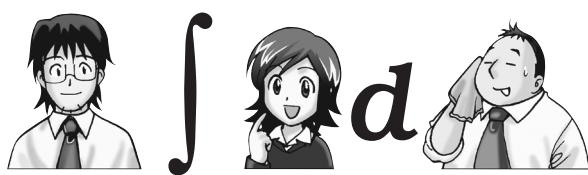
I MANGA DELLE SCIENZE

# MATEMATICA

## ANALISI

HIROYUKI KOJIMA  
SHIN TOGAMI  
BECOM CO., LTD.





I MANGA DELLE SCIENZE

# MATEMATICA

ANALISI

HIROYUKI KOJIMA  
SHIN TOGAMI  
BECOM CO., LTD.





# SOMMARIO

PREFAZIONE .....	IX
PROLOGO:	
CHE COS'È UNA FUNZIONE? .....	1
Esercizio .....	14
1	
DERIVIAMO LE FUNZIONI! .....	15
Approssimare con le funzioni .....	16
Calcoliamo l'errore relativo .....	27
Derivate in azione! .....	32
Passo 1 .....	34
Passo 2 .....	34
Passo 3 .....	35
Calcoliamo la derivata .....	39
Calcoliamo la derivata di una funzione costante, lineare e quadratica .....	40
Riassunto .....	40
Esercizi .....	41
2	
IMPARIAMO A DERIVARE! .....	43
La derivata della somma .....	48
La derivata del prodotto .....	53
La derivata dei polinomi .....	62
Troviamo i massimi e i minimi .....	64
Il teorema del valor medio .....	72
La derivata di un quoziente .....	74
La derivata della funzione composta .....	75
La derivata della funzione inversa .....	75
Esercizi .....	76
3	
INTEGRIAMO LE FUNZIONI! .....	77
Il teorema fondamentale del calcolo .....	82
Passo 1 — Quando la densità è costante .....	83
Passo 2 — Quando la densità è costante a tratti .....	84
Passo 3 — Quando la densità cambia in maniera continua .....	85
Passo 4 — Ripassiamo le approssimazioni lineari .....	88

Passo 5 — Dall'approssimazione al valore esatto .....	89
Passo 6 — $p(x)$ è la derivata di $q(x)$ .....	90
Applichiamo il teorema fondamentale del calcolo .....	91
Riassunto .....	93
Una spiegazione più rigorosa del passo 5 .....	94
Calcolare con gli integrali .....	95
Applichiamo il teorema fondamentale .....	101
La curva dell'offerta .....	102
La curva della domanda .....	103
Ricapitoliamo il teorema fondamentale del calcolo .....	110
Integrazione per sostituzione .....	111
Integrale di una potenza .....	112
Esercizi .....	113

## 4 IMPARIAMO A INTEGRARE!

Le funzioni trigonometriche .....	116
Gli integrali delle funzioni trigonometriche .....	125
L'esponenziale e il logaritmo .....	131
Generalizziamo l'esponenziale e il logaritmo .....	135
Riassunto delle funzioni esponenziale e logaritmica .....	140
Altre applicazioni del teorema fondamentale del calcolo .....	142
Integrazione per parti .....	143
Esercizi .....	144

## 5 SVILUPPI DI TAYLOR!

Approssimare con i polinomi .....	147
Come ricavare lo sviluppo di Taylor .....	155
Sviluppi di Taylor di funzioni .....	160
Che cosa ci dicono gli sviluppi di Taylor? .....	161
Esercizi .....	178

## 6 LE DERIVATE PARZIALI!

Cosa sono le funzioni di più variabili? .....	179
Funzioni lineari in più variabili: i fondamenti .....	180
Derivate parziali .....	184
Definizione di differenziale parziale .....	191
Differenziali totali .....	196

Condizioni per gli estremi . . . . .	199
Applicazioni all'economia . . . . .	202
Funzione composta in più variabili . . . . .	206
Derivate delle funzioni implicate. . . . .	218
Esercizi . . . . .	218
<b>EPILOGO:</b>	
<b>A COSA SERVE LA MATEMATICA?</b> . . . . .	219
<b>A</b>	
<b>SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI</b> . . . . .	225
Prologo . . . . .	225
Capitolo 1 . . . . .	225
Capitolo 2 . . . . .	225
Capitolo 3 . . . . .	226
Capitolo 4 . . . . .	227
Capitolo 5 . . . . .	228
Capitolo 6 . . . . .	229
<b>B</b>	
<b>PRINCIPALI FORMULE, TEOREMI E FUNZIONI CHE TROVATE IN QUESTO LIBRO</b> . . . . .	231
Equazioni lineari . . . . .	231
Derivazione . . . . .	231
Derivate di funzioni importanti . . . . .	232
Integrali . . . . .	233
Sviluppi di Taylor . . . . .	234
Derivate per funzioni di più variabili . . . . .	234
<b>INDICE</b> . . . . .	235



# PREFAZIONE

Certe cose si possono fare solo con i fumetti, cioè – nel nostro caso – con i manga.

E siccome avete preso in mano questo volumetto e state leggendo queste pagine, con ogni probabilità appartenete a una delle categorie seguenti.

La prima comprende persone che semplicemente amano il fumetto e pensano “L’Analisi Matematica spiegata con i manga? Fantastico!” Se siete questo tipo di persona, dovreste precipitarvi alla cassa e comprarlo all’istante. Non ve ne pentirete. È un manga delizioso. Nulla di cui meravigliarsi, naturalmente: il disegnatore Shin Togami è un mangaka molto apprezzato, e l’idea editoriale è della BeCom, uno studio molto professionale.

“Ma di solito i manga scientifici non sono particolarmente divertenti.” potreste obiettare. Vero. E in effetti, quando un editor della Ohmsha mi chiese di scrivere questo libro per poco non rifiutai. Molti dei cosiddetti “manga didattici” sono decisamente deludenti: anche se sono pieni di illustrazioni e di immagini grandi, non sono dei veri fumetti. Ma quando la Ohmsha mi mostrò un esempio (era “I manga delle scienze – Statistica”) cambiai idea immediatamente. A differenza di altre guide analoghe, si leggeva che era un piacere e l’editor mi disse che il mio libro sarebbe stato qualcosa di molto simile, così accettai. In realtà, avevo sempre pensato che usando i manga sarebbe stato più facile insegnare la matematica e mi sembrò un’ottima occasione di mettere in pratica quell’idea. Vi garantisco che più siete pazzi per i manga e più vi piacerà. Be’, cosa state aspettando? Se già non l’avete fatto, correte a comprarlo!

Un secondo tipo di lettore è quello che ha preso in mano il libro pensando “Anche se sono un disastro o proprio completamente allergico alla matematica, forse un manga mi aiuterà a capire”. Anche in questo caso, questo libro fa per voi, perché comprende deliberatamente dei passaggi pensati per chi in passato è rimasto traumatizzato dall’Analisi: non solo la spiega a fumetti ma lo fa in un modo sostanzialmente diverso dai testi tradizionali sull’argomento. Innanzitutto, proponiamo in continuazione le idee alla base dell’Analisi. Cose che non potreste mai capire limitandovi a impostazioni didattiche basate unicamente sui limiti (quella che io chiamo “la logica  $\varepsilon$ - $\delta$ ”). Non potrete mai capire veramente l’Analisi, o farne uso con disinvolta, se non avrete un’idea chiara di ciò che può veramente fare e

del perché è utile nel mondo reale. Finireste inevitabilmente in un circolo vizioso fatto di regole e formule imparate a memoria. Il libro spiega le formule sulla base di un'idea molto generale, quella di approssimazione del primo ordine, cercando di aiutarvi a visualizzare il significato delle formule, e a capirle. Si tratta di un approccio didattico unico, che vi permetterà di passare facilmente dalla derivazione all'integrazione. Ho inoltre adottato un metodo originale, che non si trova in altri testi, per spiegare l'integrazione delle funzioni esponenziali e trigonometriche, cosa che anche dopo ripetute spiegazioni di solito resta arabo per un sacco di persone. Inoltre, approfondiamo argomenti che in altri manga sullo stesso argomento non si trovano, come gli sviluppi di Taylor e le derivate parziali. Infine, ho invitato tre regolari fruitori dell'Analisi – Fisica, Statistica ed Economia – a fare parte del libro, presentando numerose applicazioni da cui è evidente quando l'Analisi possa essere indispensabile. Forti di questo armamentario, vedrete anche voi l'Analisi non come qualcosa di inarrivabile, ma come uno strumento da utilizzare.

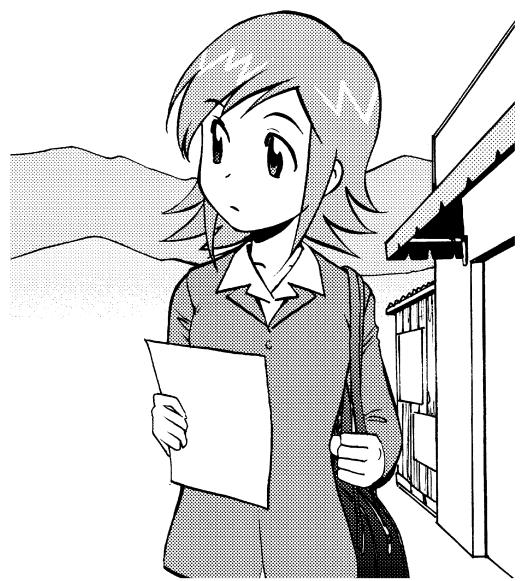
Non lo ripeterò mai abbastanza: tutto ciò è stato possibile grazie al linguaggio dei manga. Ma perché sarebbe possibile acquisire più informazioni leggendo un manga invece che un romanzo in prosa? Perché gli elementi visivi del manga vengono presentati come una forma di animazione. L'Analisi è un ramo della matematica nato per descrivere illustrata con i manga.

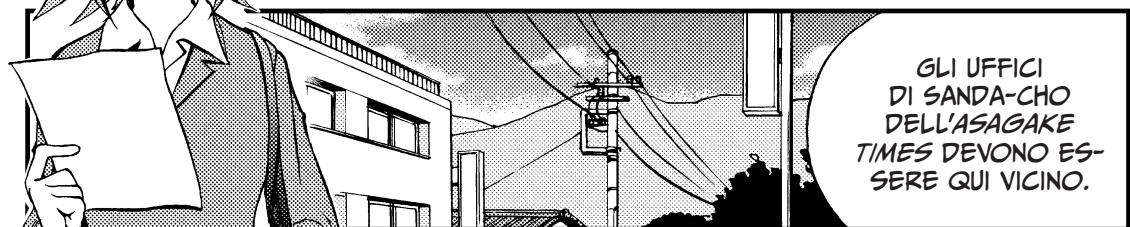
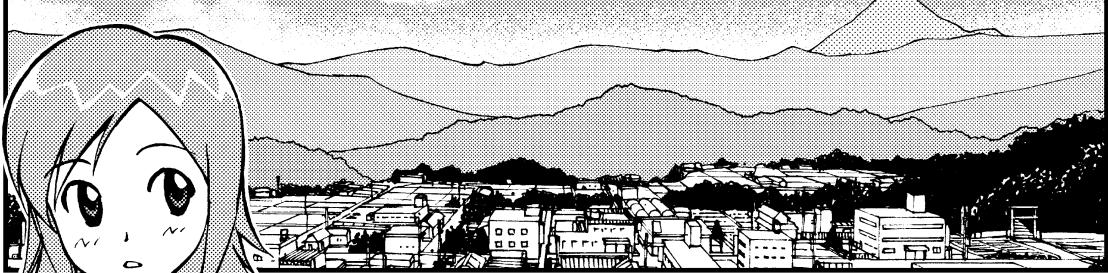
E adesso voltate pagina e divertitevi anche voi con questo meraviglioso connubio tra fumetto e matematica.

Hiroyuki Kojima

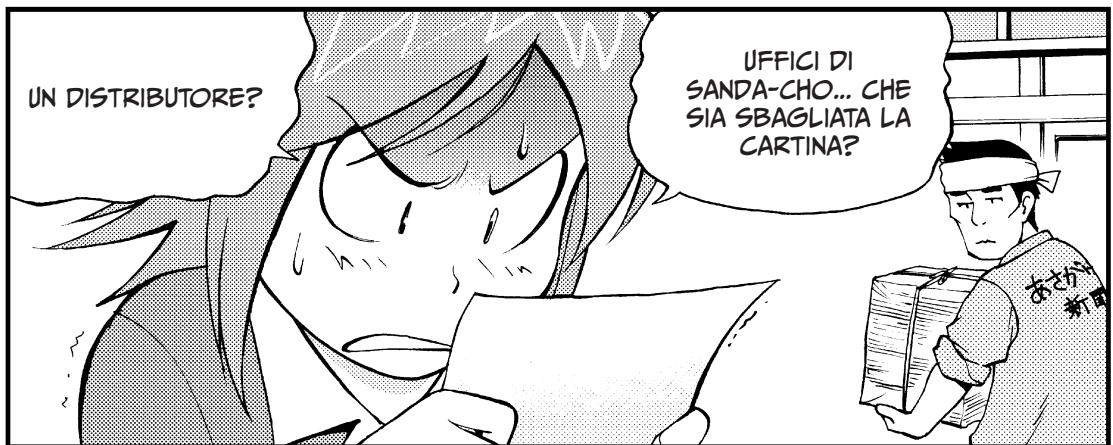
NOTA – Per chiarezza, alcune figure non sono riportate in scala.

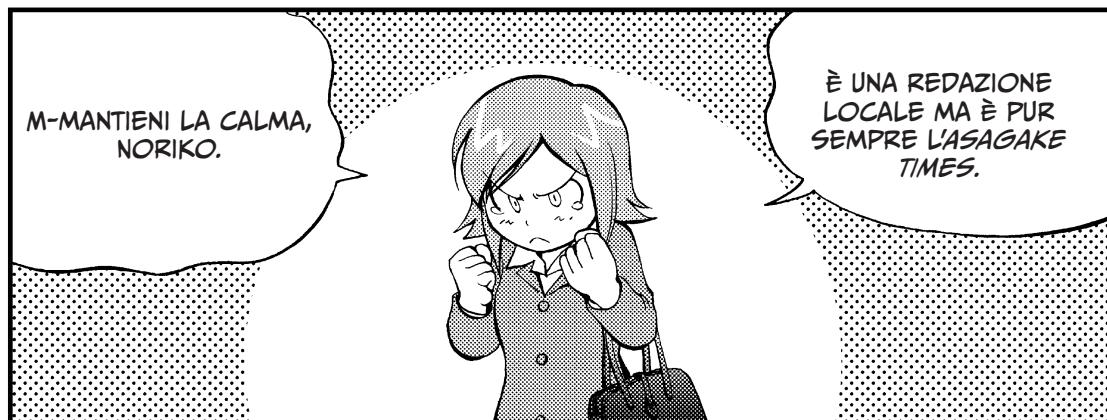
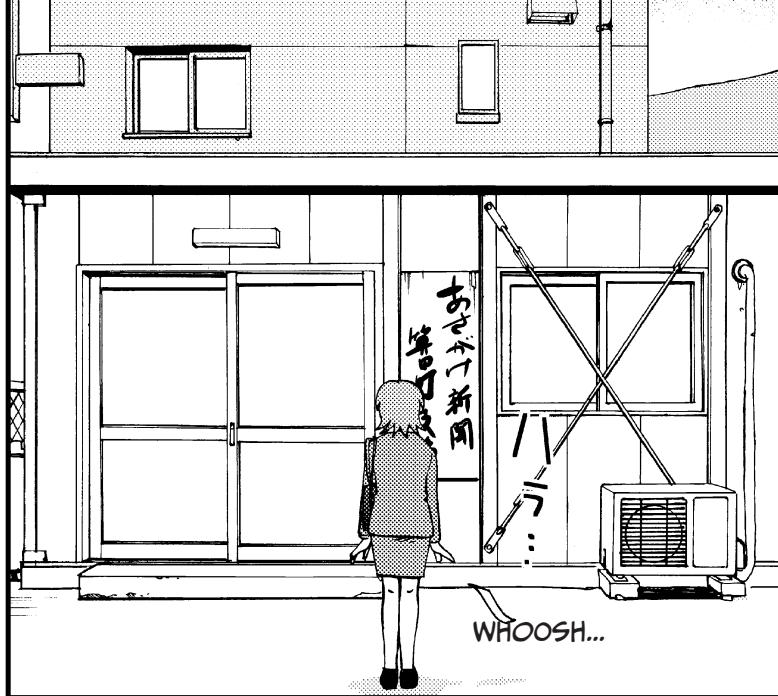
# PROLOGO. CHE COS'È UNA FUNZIONE?

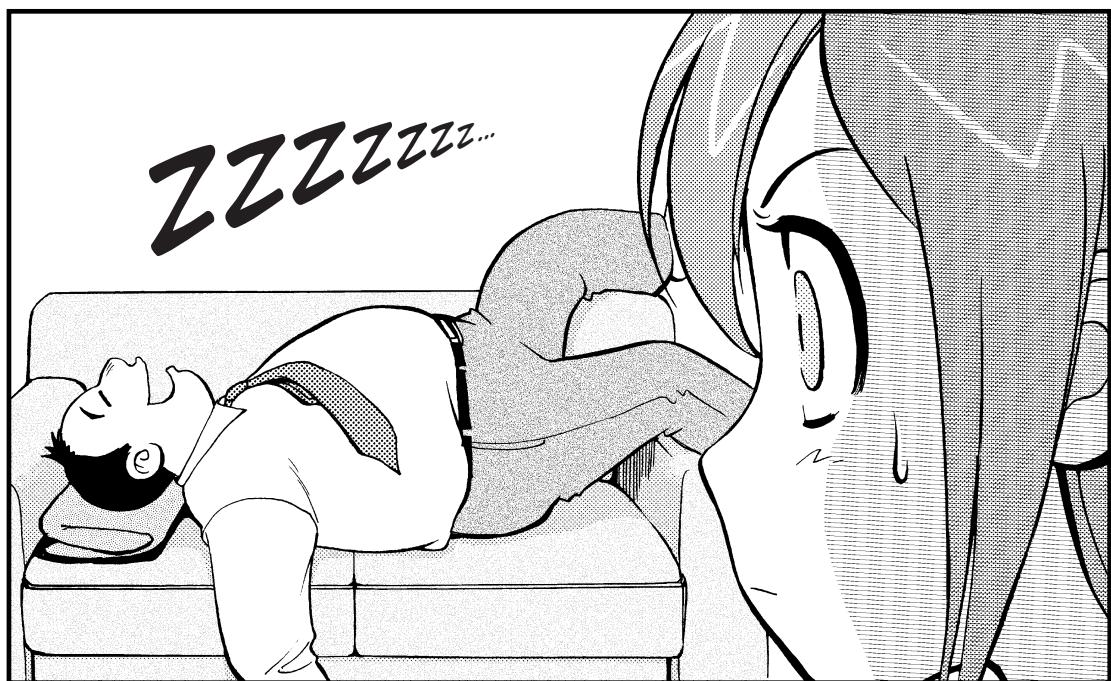
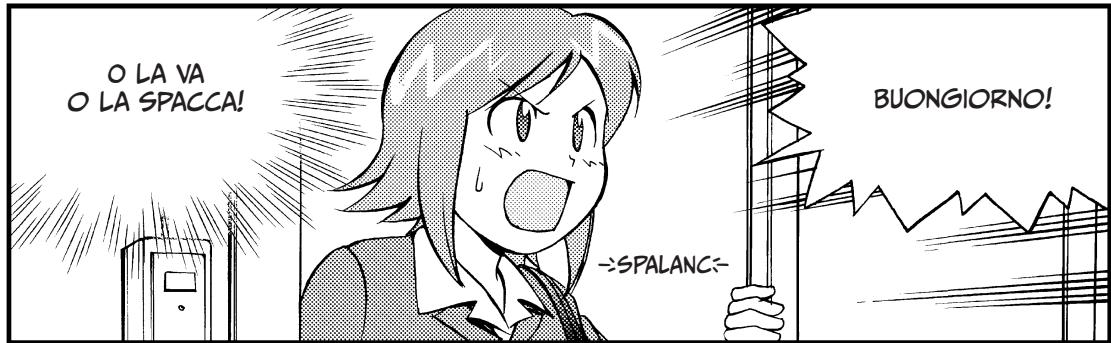


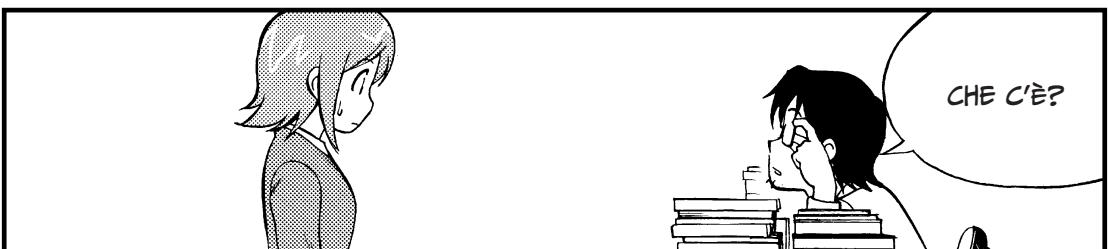


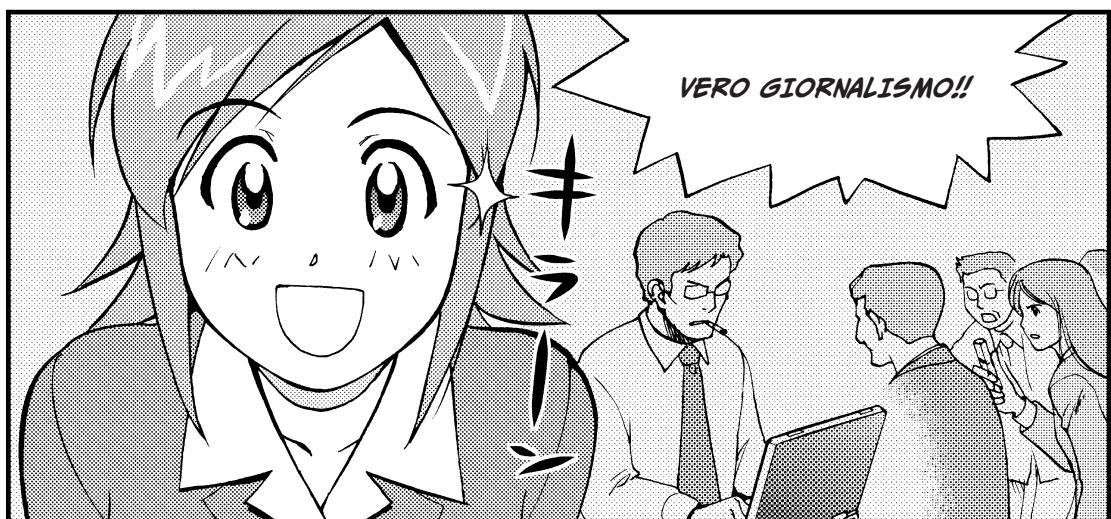
È SOLO LA  
REDAZIONE LOCA-  
LE DI UN PICCOLO  
GIORNALE, MA SONO  
PUR SEMPRE UNA  
GIORNALISTA!

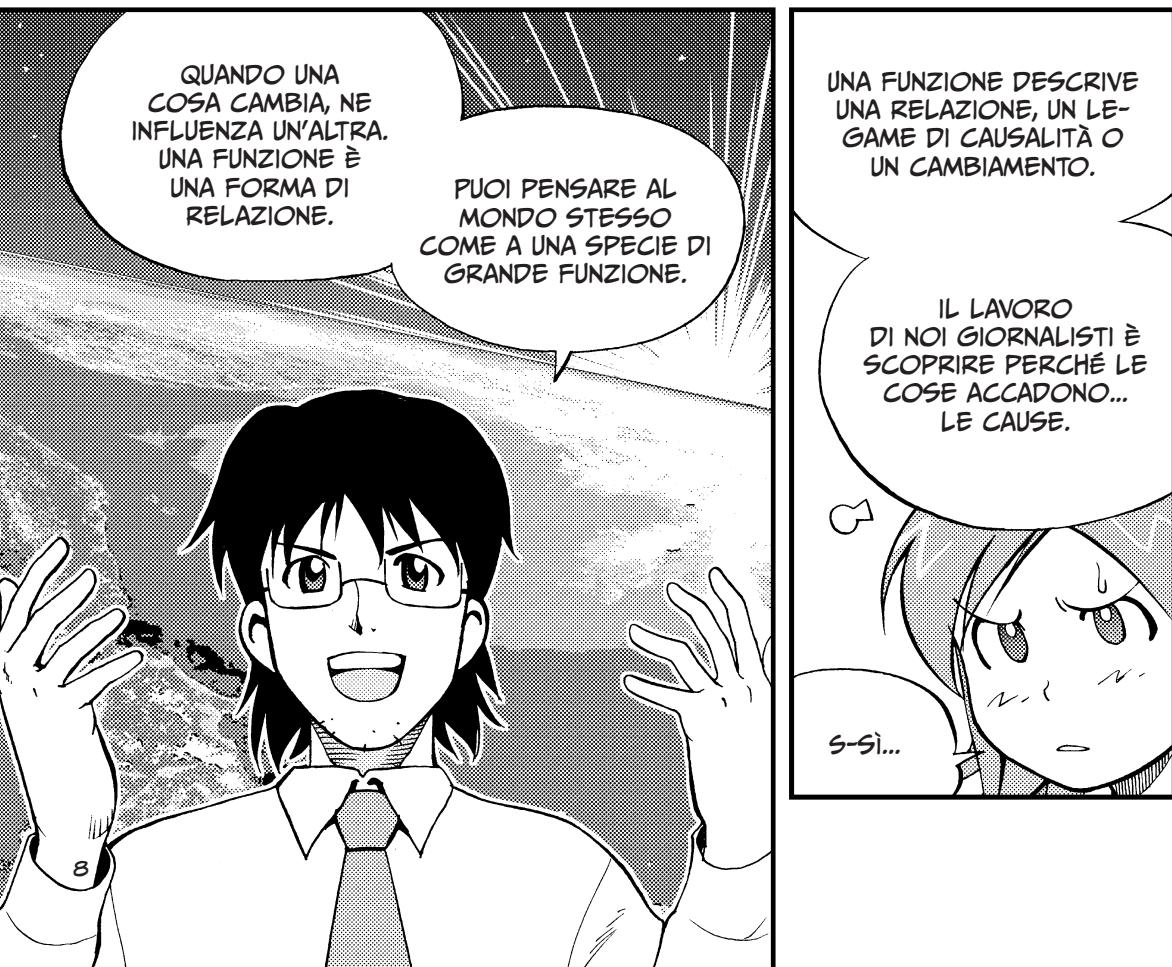
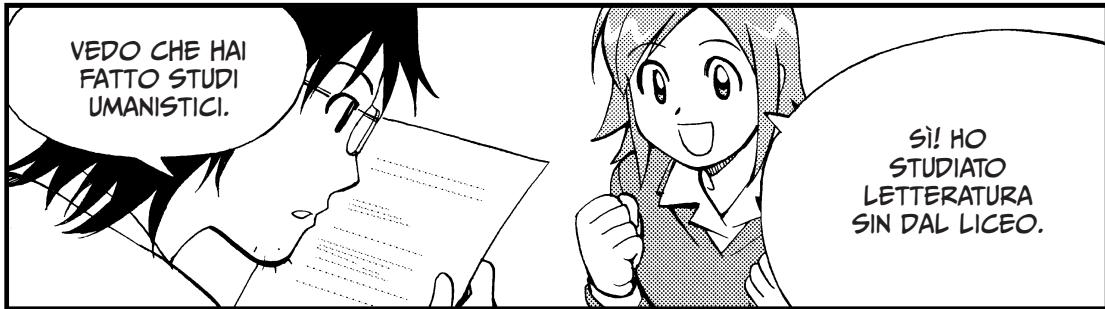


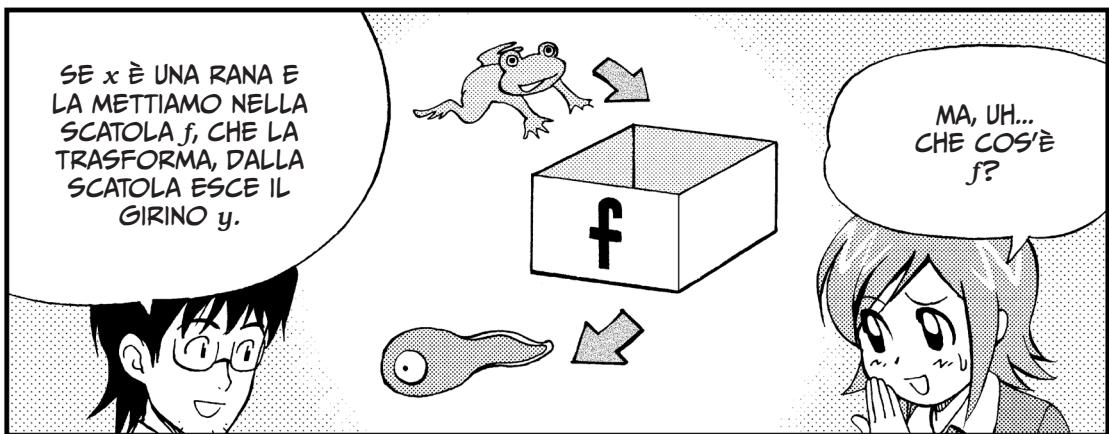
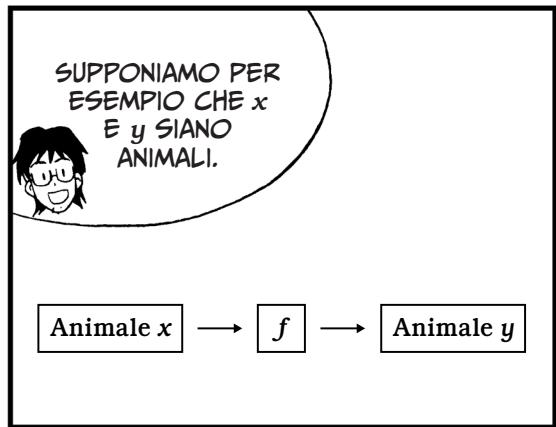




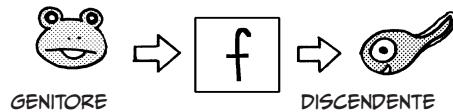








IN QUESTO CASO  
 $f$  DESCRIVE LA  
RELAZIONE, O  
REGOLA, TRA  
UN "GENITORE"  
E UN "DISCEN-  
DENTE".



UNA RELAZIONE  
CHE È VERA PER  
QUALSIASI ANI-  
MALE. SE  $x$  È UN  
UCCELLO,  $y$  È UN  
UCCELLINO.

PERFETTO! ORA  
GUARDA QUA.

Crisi:  
calano i  
consumi  
di  
caviale

UN ALTRO ESEMPIO:  
LA RELAZIONE TRA  
IL REDDITO E LE  
SPESE PUÒ ESSE-  
RE VISTA COME UNA  
FUNZIONE.

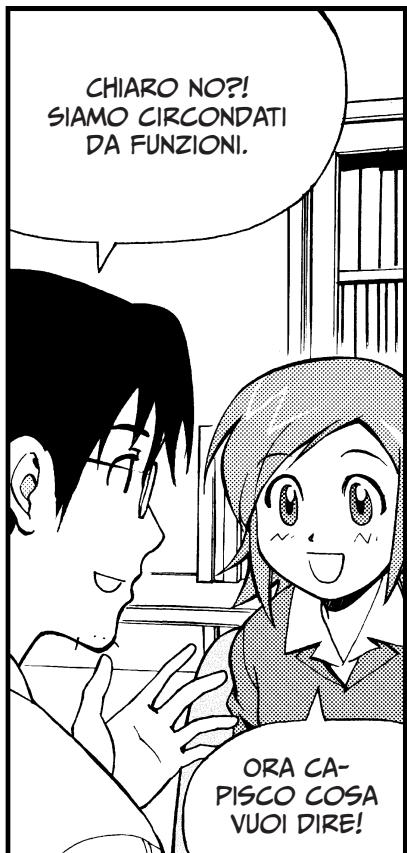
COME QUANDO  
LE VENDITE DI UNA  
SOCIETÀ AUMENTA-  
NO E I DIPENDENTI  
RICEVONO DEI  
BONUS?

Jet X-43 raggiunge  
Mach 9,6  
Nuovo record del mondo

ANCHE LA VELOCITÀ DEL  
SUONO E LA TEMPERATURA  
POSSONO ESSERE VISTE  
COME LEGATE DA UNA FUN-  
ZIONE. QUANDO LA TEMPERA-  
TURA AUMENTA DI UN GRADO  
LA VELOCITÀ DEL SUONO  
AUMENTA DI 0,6 METRI  
AL SECONDO.

YOO!  
DEEL!

E IN MONTAGNA  
LA TEMPERATU-  
RA SCENDE DI  
CIRCA 0,5 GRADI  
OGNI 100 METRI  
D'ALTEZZA, DICO  
BENE?



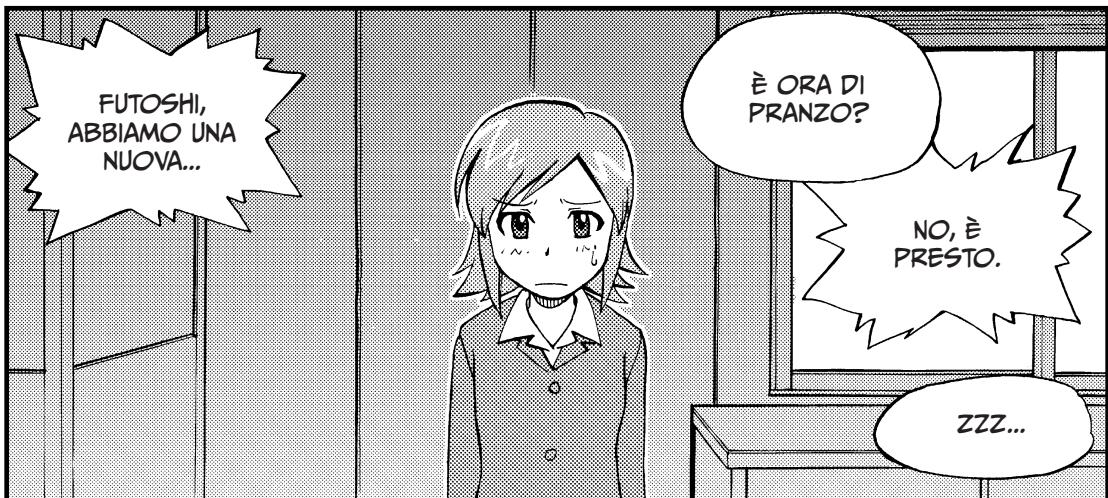


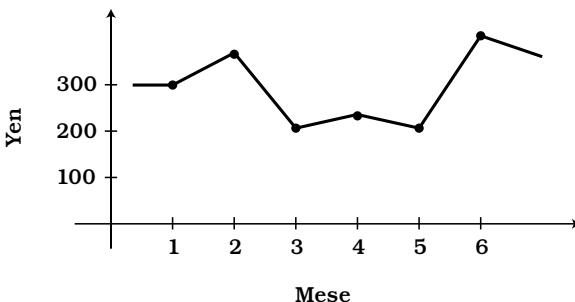
TABELLA 1: LE CARATTERISTICHE DI UNA FUNZIONE

ARGOMENTO	FORMULA	GRAFICO
Relazione	<p>La frequenza del frinire dei grilli dipende dalla temperatura. Indicativamente, la relazione tra <math>y</math> versi al minuto di un grillo esposto alla temperatura di <math>x</math> gradi centigradi (<math>^{\circ}\text{C}</math>) è</p> $y = g(x) = 7x - 30$ $\begin{array}{ccc} \uparrow & & \downarrow \\ x = 27^{\circ} & 7 \times 27 - 30 \end{array}$ <p>Il risultato è di 159 versi al minuto.</p>	<p>Quando tracciamo il grafico di queste funzioni otteniamo una linea retta. Per questo le chiamiamo “lineari”.</p>
Variazioni	<p>La velocità del suono <math>y</math>, espressa in metri al secondo (<math>\text{m/s}</math>), nell'aria alla temperatura di <math>C</math>, è data da</p> $y = v(x) = 0.6x + 331$ <p>A <math>15^{\circ}\text{C}</math>,</p> $y = v(15) = 0.6 \times 15 + 331 = 340 \text{ m/s}$ <p>A <math>-5^{\circ}\text{C}</math>,</p> $y = v(-5) = 0.6 \times (-5) + 331 = 328 \text{ m/s}$	
Conversioni unità di misura	<p>Passaggio da <math>x</math> gradi Fahrenheit (<math>^{\circ}\text{F}</math>) a <math>y</math> gradi Celsius (<math>^{\circ}\text{C}</math>)</p> $y = f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ <p>Perciò <math>50^{\circ}\text{F}</math> equivalgono a</p> $\frac{5}{9}(50 - 32) = 10^{\circ}\text{C}$	
	<p>I computer memorizzano i numeri utilizzando un sistema binario (cioè le cifre “1” e “0”, dette anche “bit”). Un numero binario espresso da <math>x</math> bit può codificare <math>y</math> numeri</p> $y = b(x) = 2^x$ <p>(ulteriori dettagli su questo esempio a pagina 131)</p>	<p>Il grafico è una funzione esponenziale</p>

ALCUNE FUNZIONI NON HANNO GRAFICI COMPOSTI DA LINEE RETTE O DA CURVE CON UNA FORMA REGOLARE.

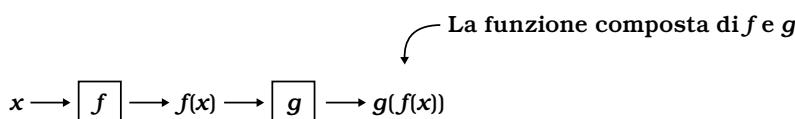


Il valore  $P$  del titolo di una società nel mese  $x$  nel corso del 2016 è  
 $y = P(x)$



$P(x)$  non ha la forma di una funzione già nota ma è comunque una funzione. Se in giugno aveste trovato il modo di predire il valore  $P(7)$  che il titolo avrebbe avuto in luglio, avreste potuto realizzare grossi guadagni.

QUANDO APPLICHIAMO CONSECUTIVAMENTE DUE O PIÙ FUNZIONI PARLIAMO DI "COMPOSIZIONE DI FUNZIONI", UNA TECNICA CHE CI PERMETTE DI ALLARGARE I POSSIBILI TIPI DI CAUSALITÀ.



## ESERCIZIO

1. Scrivere la funzione che esprima la frequenza in frinii/minuto di un grillo alla temperatura di  $x$  °F

1

# DERIVIAMO LE FUNZIONI!



## APPROSSIMARE CON LE FUNZIONI





A: REDATTORI

OGGETTO: TITOLI DEL GIORNO

ORSO IRROMPE NUOVAMENTE IN ABITAZIONE - NESSUN FERITO

LA REPUTAZIONE DEI COCOMERI DI SANDA-CHO IN  
AUMENTO IN TUTTA LA PREFETTURA

MA... PUBBLICHI  
SEMPRE STORIE  
DEL GENERE?

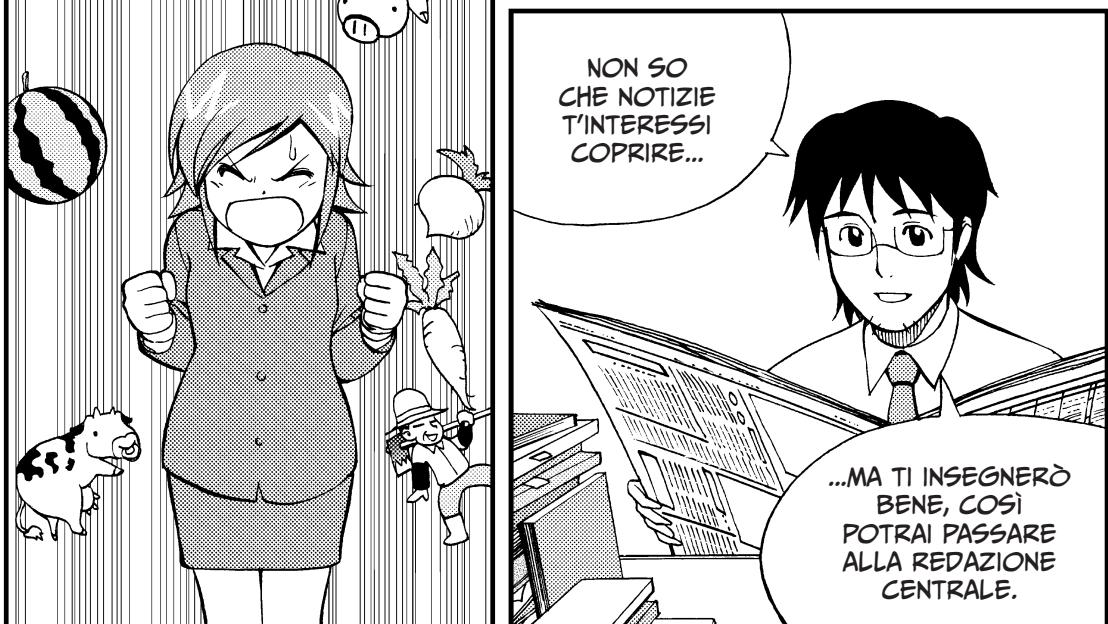
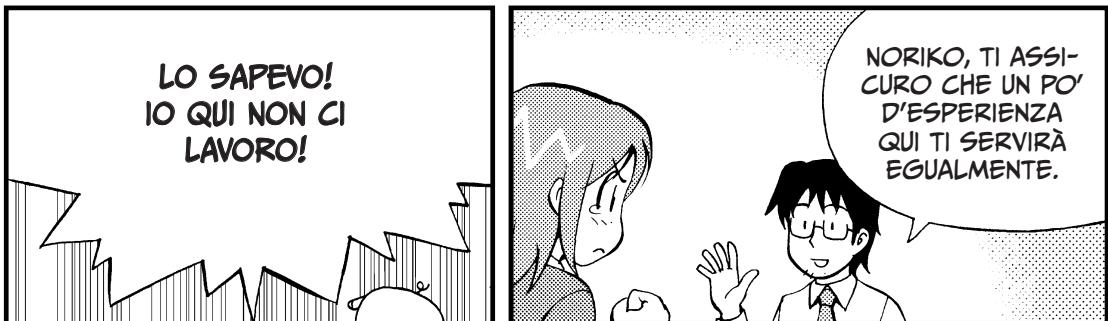
NOTIZIE LOCALI  
COME QUESTE  
NON SONO MALE.  
INOLTRE, L'ASPET-  
TO UMANO PUÒ  
ESSERE...

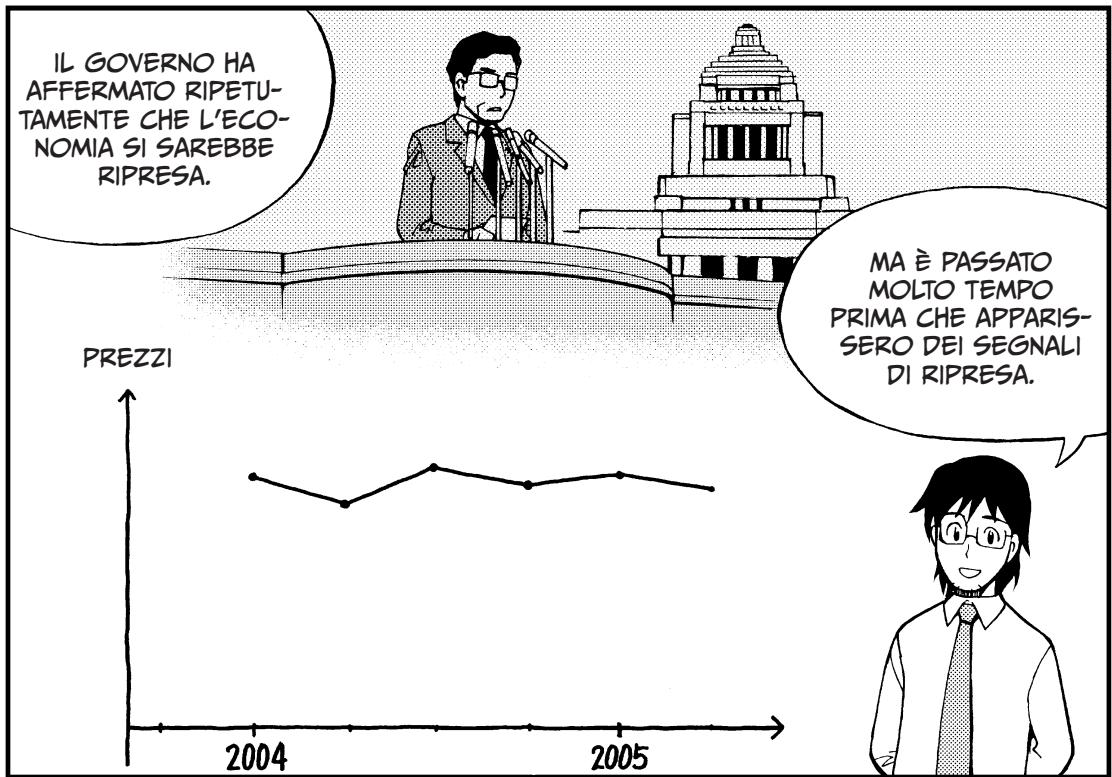
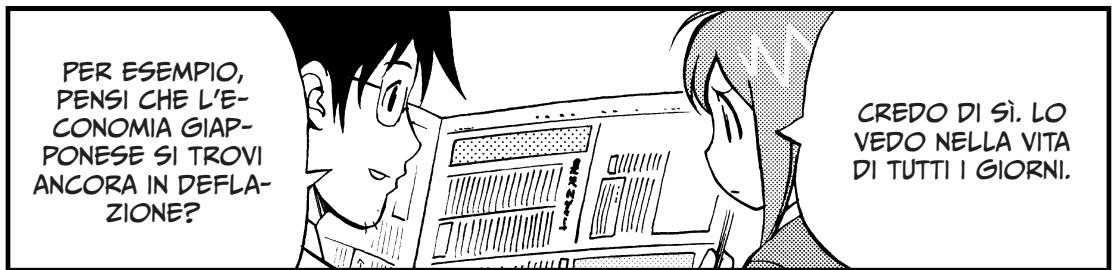
POLITICA,  
ESTERI, FINANZA,  
ECONOMIA...

IO VOGLIO  
TRATTARE GLI  
ARGOMENTI CHE  
CONTANO!!

OH...  
QUELLO È  
IMPOSSI-  
BILE.





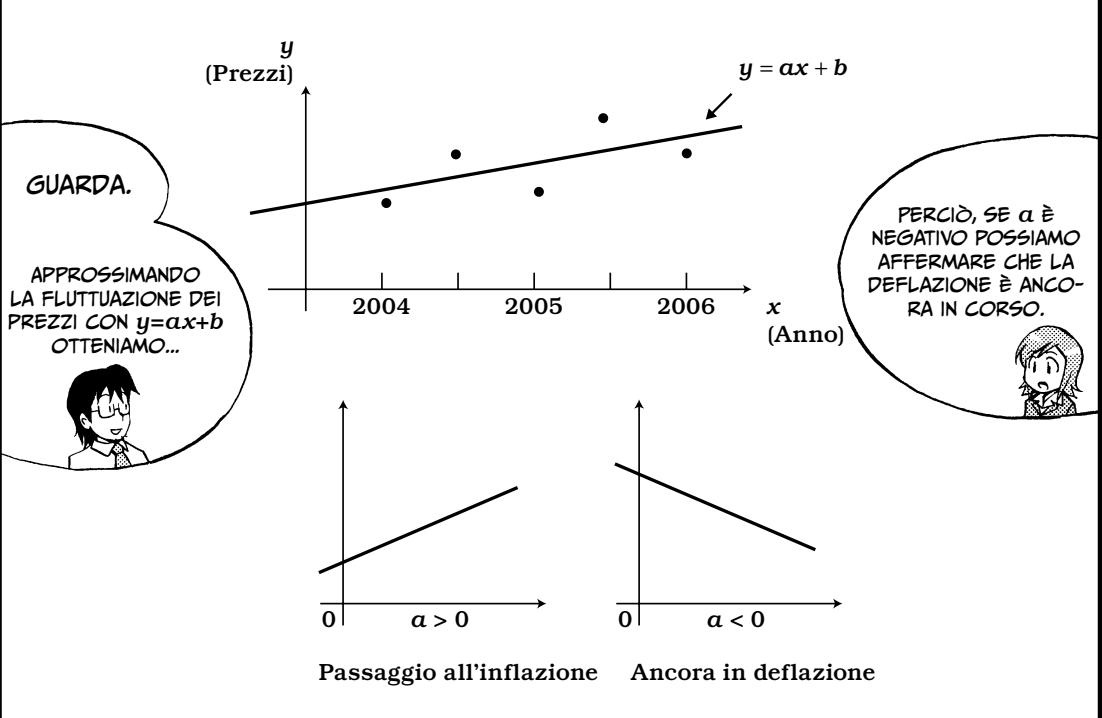


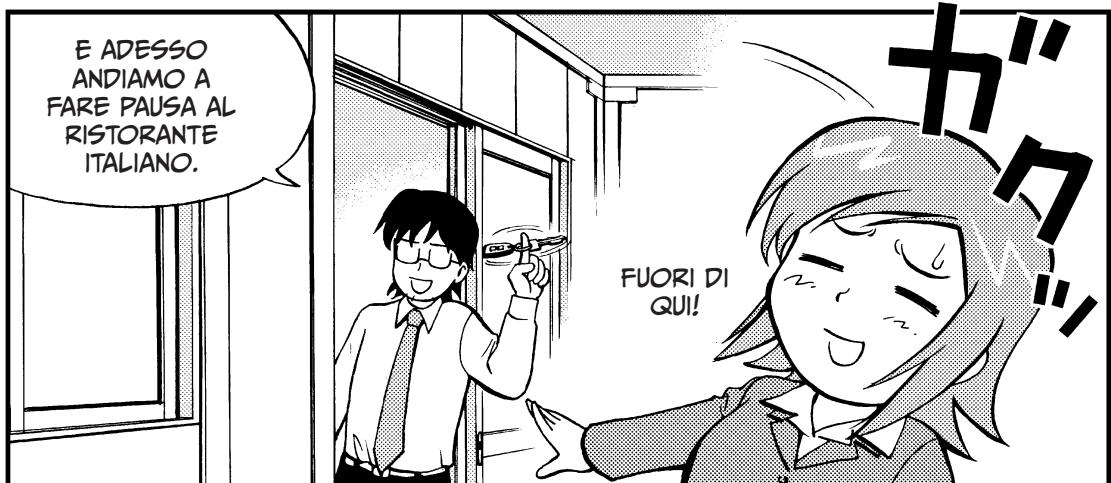
SE RIESCI AD APPROSSIMARE CIÒ CHE VEDI CON UNA FUNZIONE SEMPLICE, LA RISPOSTA TI APPARIRÀ PIÙ CHIARAMENTE.

QUI ABBIAMO USATO UN'E-SPRESSIONE LINEARE:  
 $y = ax + b$

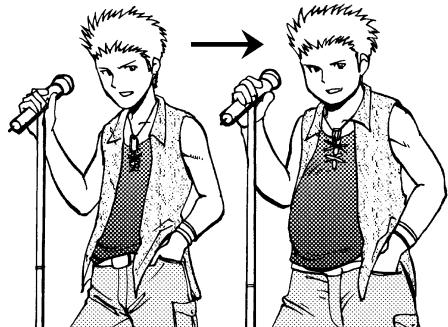
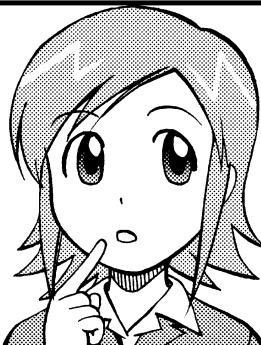


ORA, CIÒ CHE PIÙ DESIDERIAMO SAPERE È SE I PREZZI SALIRANNO O CALEERANNO.





MA DOPO CHE  
SI È LASCIATO IN  
MALO MODO CON  
LA FIDANZATA È  
TORNATO IMPROV-  
VISAMENTE A  
INGRASSARE.



ANCHE SE IL  
SUO AGENTE  
LO AVEVA AV-  
VERTITO.

SONO GIÀ AL  
MASSIMO DEL  
PESO.



NE ERA CERTO.  
ORA, QUELLO CHE  
IL SUO AGENTE  
VORREBBE CAPIRE...

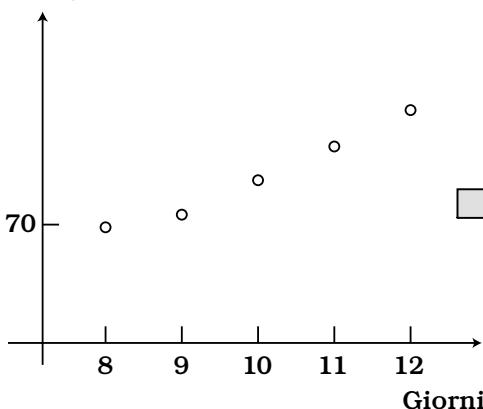
È SE  
VERAMENTE IL  
PESO DI JOHNNY  
HA SMESSO DI  
AUMENTARE,  
COME LUI  
SOSTIENE.



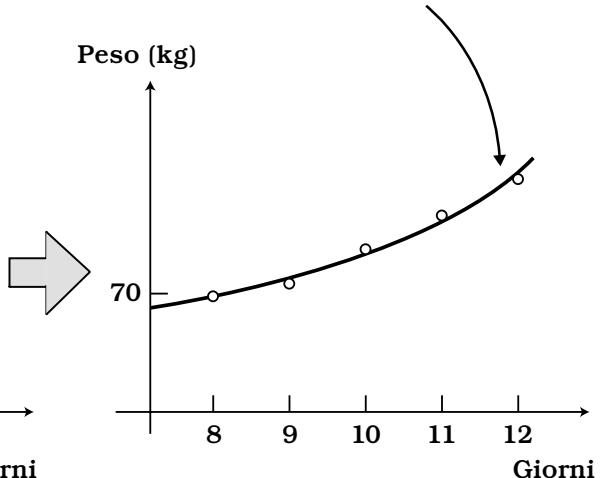
ESATTAMENTE.  
PROVIAMO ALLORA A  
DESCRIVERE L'AU-  
MENTO DEL PESO CON  
 $y = ax^2 + bx + c$

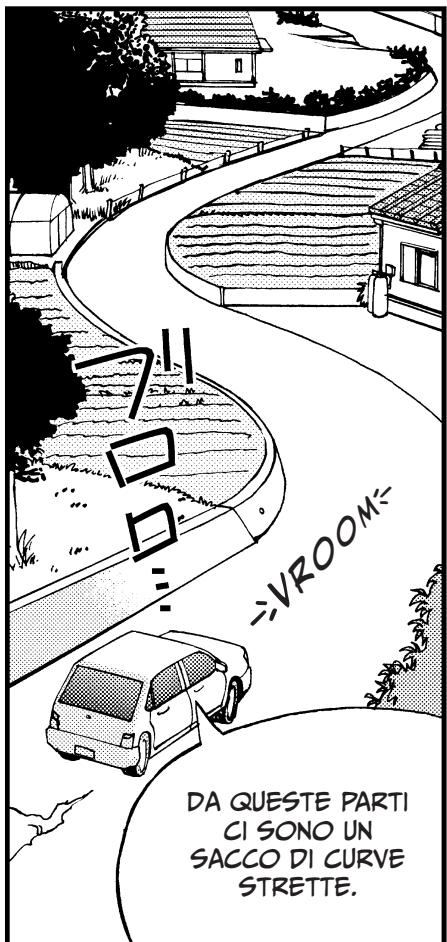
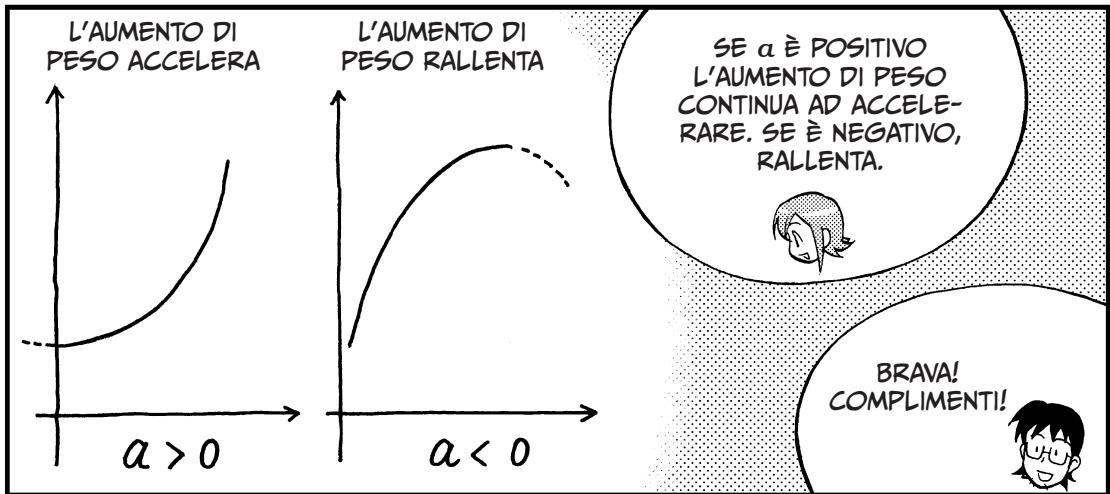
$$y = ax^2 + bx + c$$

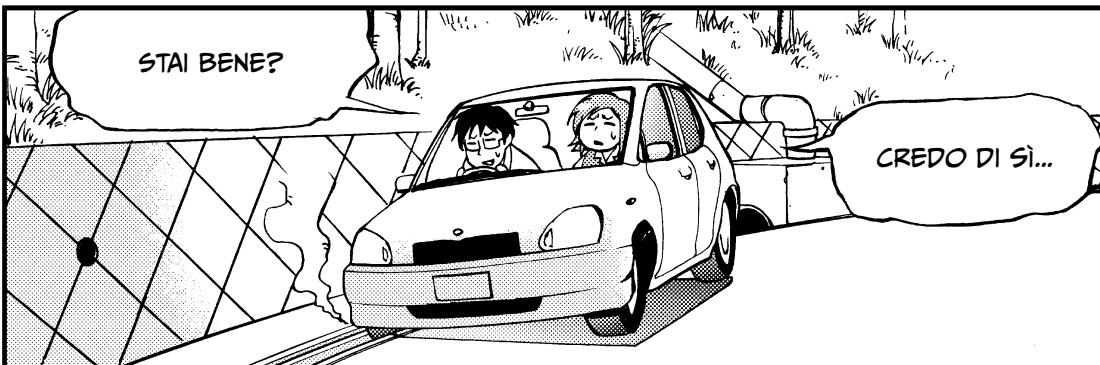
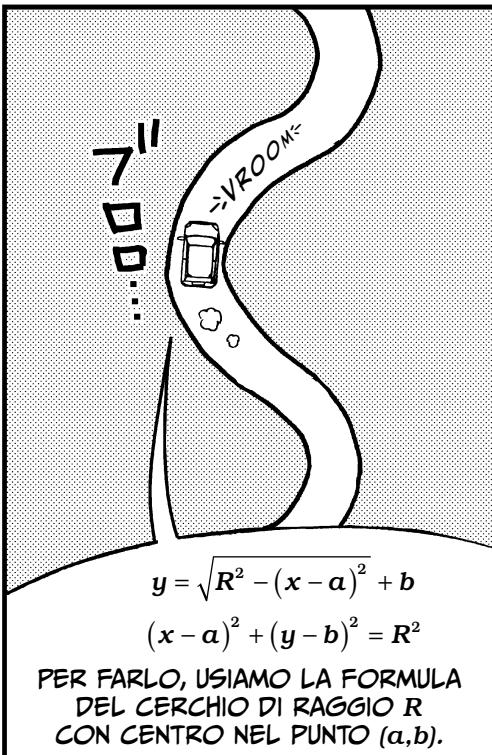
Peso (kg)

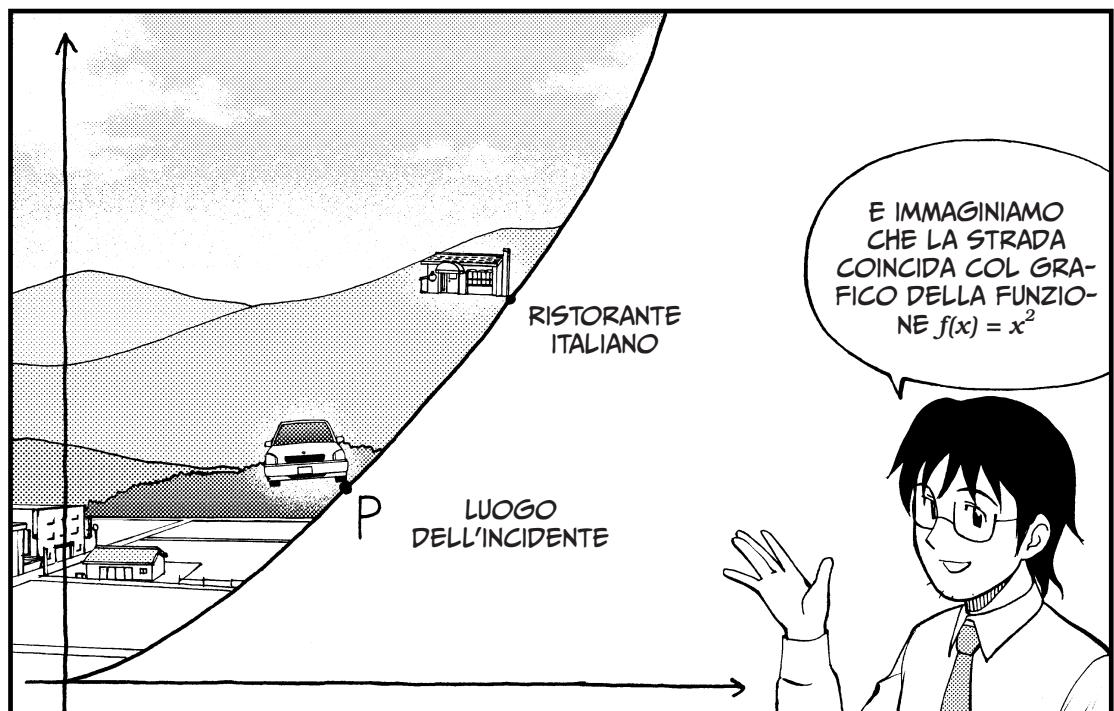
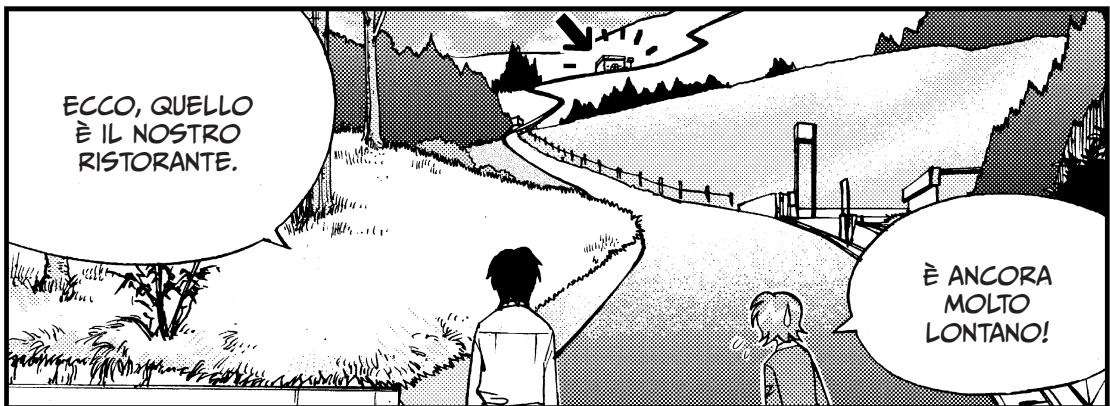


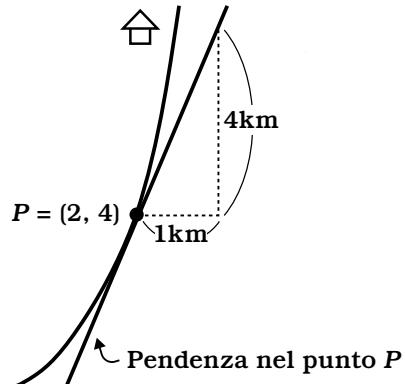
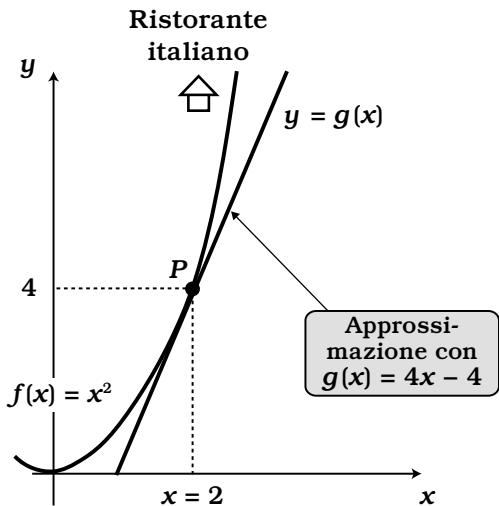
Peso (kg)











LA FUNZIONE LINEARE  
CHE APPROSSIMA LA FUNZIONE  
 $f(x) = x^2$  (LA STRADA) IN  $x = 2$  È  
 $g(x) = 4x - 4$ \*. POSSIAMO USARE  
QUESTA ESPRESSIONE PER CAL-  
COLARE L'INCLINAZIONE IN QUEL  
PUNTO PARTICOLARE.

NEL PUNTO  $P$   
L'INCLINAZIONE AUMENTA DI  
4 CHILOMETRI IN VERTICALE  
PER CIASCUN CHILOMETRO  
PERCORSO ORIZZONTALMENTE.  
IN REALTÀ, PER LA MAG-  
GIOR PARTE IL PERCORSO  
NON È COSÌ RIPIDO.

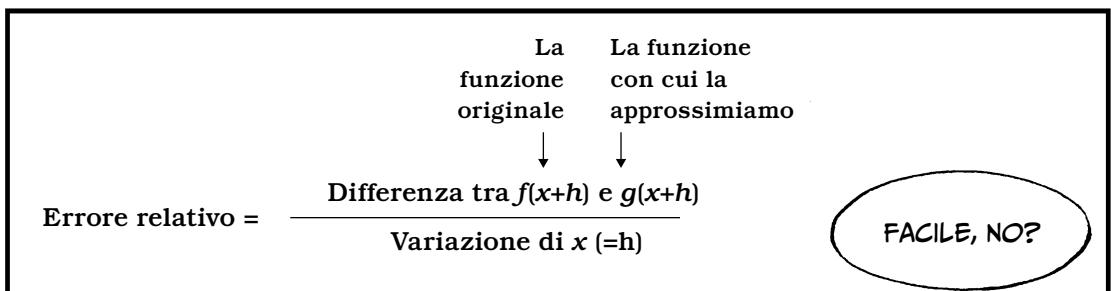
\*IL MOTIVO È SPIEGATO A PAGINA 39

FUTOSHI? ABBIAMO  
AVUTO UN INCIDENTE.  
PUOI VENIRE A DAR-  
CI UNA MANO?

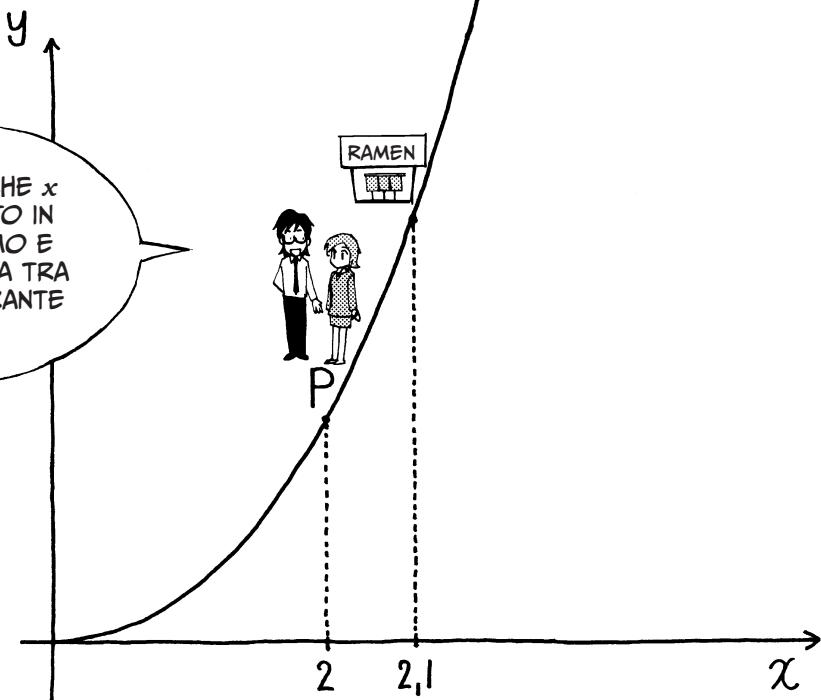
DOVE? È  
SUCCESSO NEL  
PUNTO  $P$ .

CHE RAZZA DI  
FUNZIONE DOVREI  
USARE PER AP-  
PROSSIMARE QUEL-  
LO CHE HAI DENTRO  
LA TESTA?

## CALCOLIAMO L'ERRORE RELATIVO



SUPPONIAMO CHE  $x$  SIA 2 NEL PUNTO IN CUI CI TROVIAMO E CHE LA DISTANZA TRA NOI E IL RISTORANTE SIA 0,1.



VARIAMO  $x$  DI 0,1:  $x=2$  DIVENTA  $x=2,1$

$$f(2,1) = 2,1^2 = 4,41$$

$$g(2,1) = 4 \times 2,1 - 4 = 4,4$$

LA DIFFERENZA DIVENTA ALLORA  
 $f(2,1) - g(2,1) = 0,01$   
E L'ERRORE RELATIVO È  
 $0,01 / 0,1 = 0,1$  (IL 10%).

SUPPONIAMO ORA CHE IL PUNTO IN CUI MI TROVO DISTI 0,01 DA P.



AUMENTIAMO  $x$  DI 0,01:  
 $x=2$  DIVENTA  $x=2,01$

ERRORE  $f(2,01) - g(2,01) = 4,0401 - 4,04 = 0,0001$

ERRORE RELATIVO

$$\frac{0,0001}{0,01} = 0,01 \\ = [1\%]$$

L'ERRORE RELATIVO  
PER QUESTO PUNTO  
È MINORE CHE PER IL  
RISTORANTE.

IN ALTRE PAROLE,  
PIÙ RESTO VICINO AL  
LUOGO DELL'INCIDENTE E MEGLIO  $g(x)$   
APPROSSIMA  $f(x)$ .



Se lo scostamento tende a 0, anche l'errore relativo tende a 0.

SCOSTAMENTO DI $x$ DA 2	$f(x)$	$g(x)$	ERRORE	ERRORE RELATIVO
1	9	8	1	100,0%
0,1	4,41	4,4	0,01	10,0%
0,01	4,0401	4,04	0,0001	1,0%
0,001	4,004001	4,004	0,000001	0,1%
↓				↓
0				0

NON MI SEMBRA  
AFFATTO SOR-  
PRENDENTE...

GRANDIOSO!  
CAPISCI GIÀ LE  
DERIVATE.

PERCÒ IL  
RISTORANTE  
CON L'ERRO-  
RE RELATIVO  
MINORE È...

NON GIRARCI IN-  
TORNO! HAI INTEN-  
ZIONE DI ANDARE  
AL RISTORANTE DI  
RAMEN, VERO?

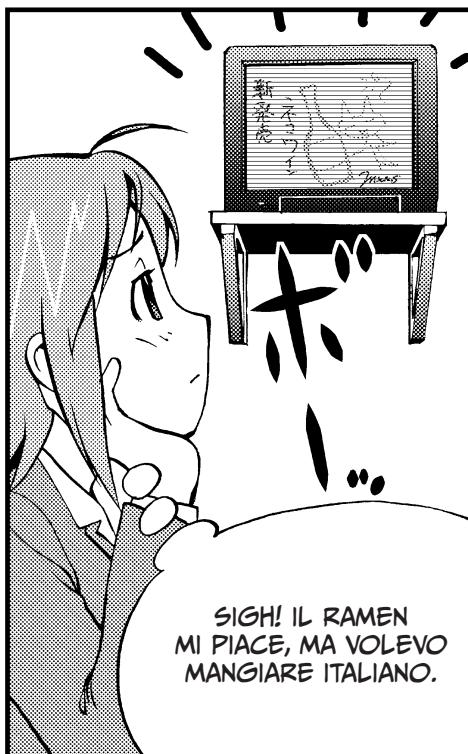
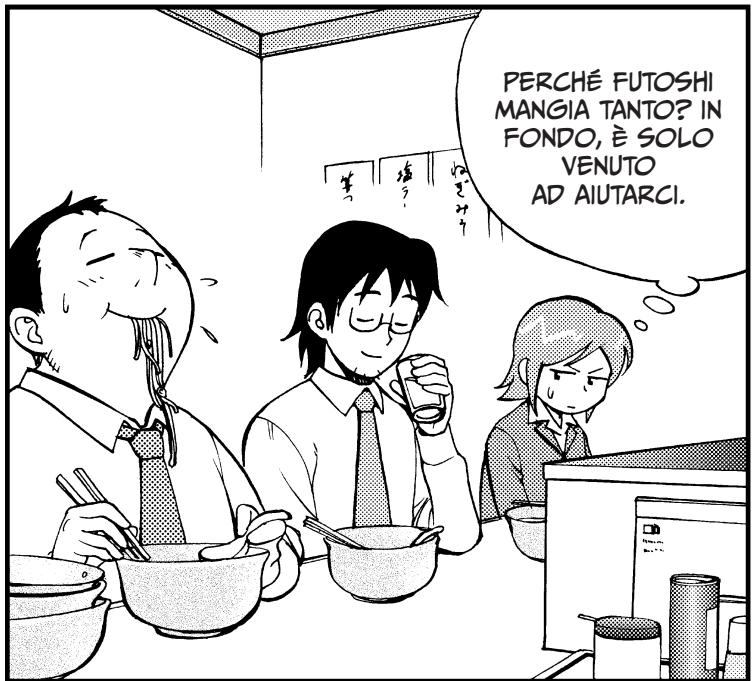
SÌ. È PIÙ VICINO AL  
PUNTO P E OGGI  
ANDREMO LÌ.

...QUELLO DI  
RAMEN.

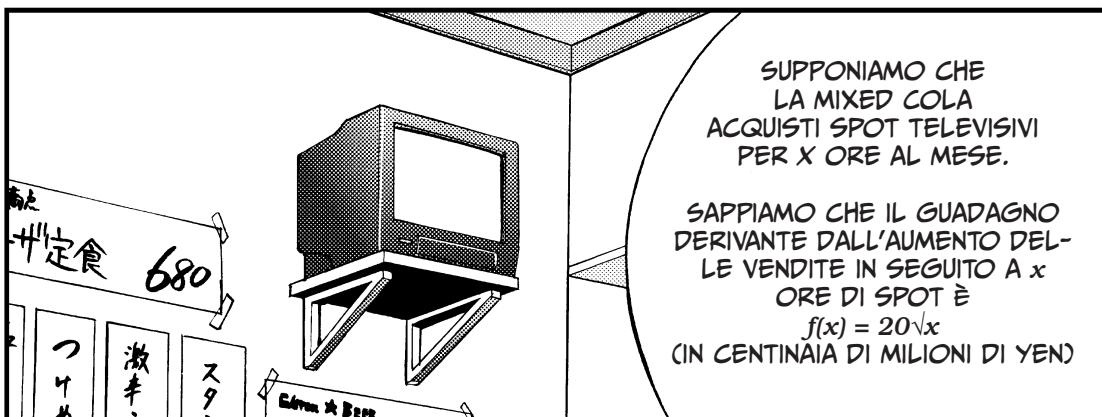
LA FUNZIONE LINEARE CHE APPROSSIMA  
QUELLA ORIGINALE È TALE CHE, LOCALMENTE,  
IL SUO ERRORE RELATIVO È ZERO.

PERCÒ, FINCHÉ CI RIFERIAMO A CARATTERISTICHE  
LOCALI, POSSIAMO RICAVARE RISULTATI CORRETTI  
UTILIZZANDO L'APPROSSIMAZIONE LINEARE AL  
POSTO DELLA FUNZIONE ORIGINALE.

TROVATE TUTTI I DETTAGLI A PAGINA 39.



## DERIVATE IN AZIONE!



ATTUALMENTE, IN UN MESE LA MIXED COLA MANDA IN ONDA SPOT PER 4 ORE.

È BUONISSIMA!

E SICCOME  
 $f(4) = 20\sqrt{4} = 40$ ,  
LA SOCIETÀ GUADAGNA  
4 MILIARDI DI YEN.

IL COSTO DEGLI SPOT È DI 10 MILIONI DI YEN AL MINUTO.

UN MINUTO DI SPOT = 10 MILIONI DI YEN

D-DIECI M-MILONI...?!

UN RESPONSABILE FRESCO DI NOMINA HA DECISO DI INTERVENIRE SUI TEMPI DEGLI SPOT. SECONDO TE, LI AUMENTERÀ O LI DIMINUIRÀ?

$f(x) = 20\sqrt{x}$  CENTINAIA DI MILIONI DI YEN  
UN MINUTO DI SPOT = 10 MILIONI DI YEN

MMM...

## PASSO 1

SICCOME  $f(x) = 20\sqrt{x}$  È UNA FUNZIONE COMPLICATA, RICAVIAMONE UNA LINEARE CHE LE ASSOMIGLI PER POI ESEGUIRE UNA STIMA INDICATIVA.

$$f(x) = 20\sqrt{x}$$

CENTINAIA DI MILIONI DI YEN

NON POSSIAMO IMITARE L'INTERA FUNZIONE CON UN'ALTRA LINEARE, QUINDI LO FAREMO SOLO NEI PRESSI DEL TEMPO DI MESSA IN ONDA  $x=4$ .

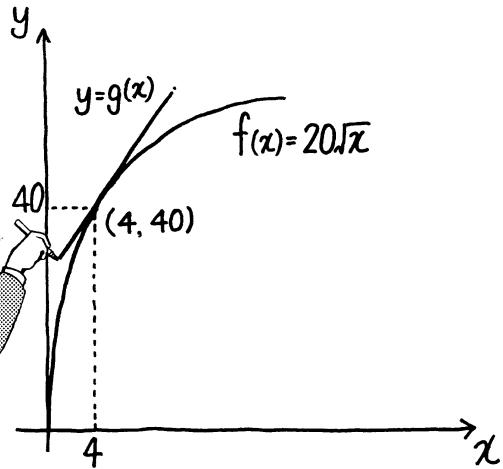
APPROSSIMIAMOLA CON

$$y = g(x)$$



## PASSO 2

ORA TRACCIAMO LA TANGENTE\* AL GRAFICO DI  $f(x) = 20\sqrt{x}$  NEL PUNTO  $(4, 40)$ .



\*Ecco i calcoli per la retta tangente (v. anche le spiegazioni sulla derivata a pagina 39). Per  $f(x) = 20\sqrt{x}$ ,  $f'(4)$  è data da

$$\begin{aligned} \frac{f(4 + \varepsilon) - f(4)}{\varepsilon} &= \frac{20\sqrt{4 + \varepsilon} - 20\sqrt{4}}{\varepsilon} = 20 \frac{(\sqrt{4 + \varepsilon} - 2)(\sqrt{4 + \varepsilon} + 2)}{\varepsilon \times (\sqrt{4 + \varepsilon} + 2)} \\ &= 20 \frac{4 + \varepsilon - 4}{\varepsilon (\sqrt{4 + \varepsilon} + 2)} = \frac{20}{\sqrt{4 + \varepsilon} + 2} \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

Quando  $\varepsilon$  tende a 0, il denominatore di  $\textcircled{1}$   $\sqrt{4 + \varepsilon} + 2 \rightarrow 4$ .

Perciò,  $\textcircled{1} \rightarrow 20 \div 4 = 5$ .

La funzione lineare che approssima  $f$  è quindi  $g(x) = 5(x - 4) + 40 = 5x + 20$

SE  $x$  CAMBIA MOLTO - DI UN'ORA, PER ESEMPIO - IL VALORE  $g(x)$  SARÀ TROPPO DIVERSO DA  $f(x)$  E NON POTREMO USARLO.

IN REALTÀ, I TEMPI DI MESSA IN ONDA DEGLI SPOT DEVONO VARIARE DI UNA QUANTITÀ PICCOLA, IN PIÙ O IN MENO.

SE CONSIDERIAMO PER ESEMPIO UNA VARIAZIONE DI SEI MINUTI (0,1 ORE), L'APPROXIMAZIONE REGGE, PERCHÉ [PER PICCOLE VARIAZIONI DI  $x$ ] L'ERRORE RELATIVO RESTA PICCOLO.

### PASSO 3

VICINO A  $x = 4$  ORE,  $f(x)$  È APPOROSSIMATA BENE DA  $g(x) = 5x + 20$ .

IL FATTO CHE NELL'ESPRESSIONE DI  $g$  IL COEFFICIENTE SIA 5 SIGNIFICA UN AUMENTO DEGLI INTROITI DI 500 MILIONI DI YEN ALL'ORA. PERCÒ, SE LA VARIAZIONE È DI SOLI 6 MINUTI (0,1 ORE), CHE COSA SUCCIDE?

UN AUMENTO DI SEI MINUTI PRODUCE UN AUMENTO DEI PROFITTI DI  $5 \times 0,1 = 0,5$  MILIARDI DI YEN, CIOÈ 500 MILIONI.

$$5 \times 0,1 = 0,5 \text{ 億}$$

ESATTO. MA QUANTO COSTA AUMENTARE DI SEI MINUTI I TEMPI DEGLI SPOT?

IL COSTO DELL'AUMENTO È DI  $6 \times 0,1 = 0,6$  CENTINAIA DI MILIONI DI YEN.

SE INVECE I TEMPI DIMINUISCONO, DIMINUIRANNO ANCHE GLI INTROITI DI CIRCA 0,5 MILIARDI, CIOÈ 500 MILIONI. MA SICCOME AVREMO 600 MILIONI DI COSTI IN MENO...



LA RISPOSTA È... LA SOCIETÀ HA DECISO DI DIMINUIRE GLI SPOT!

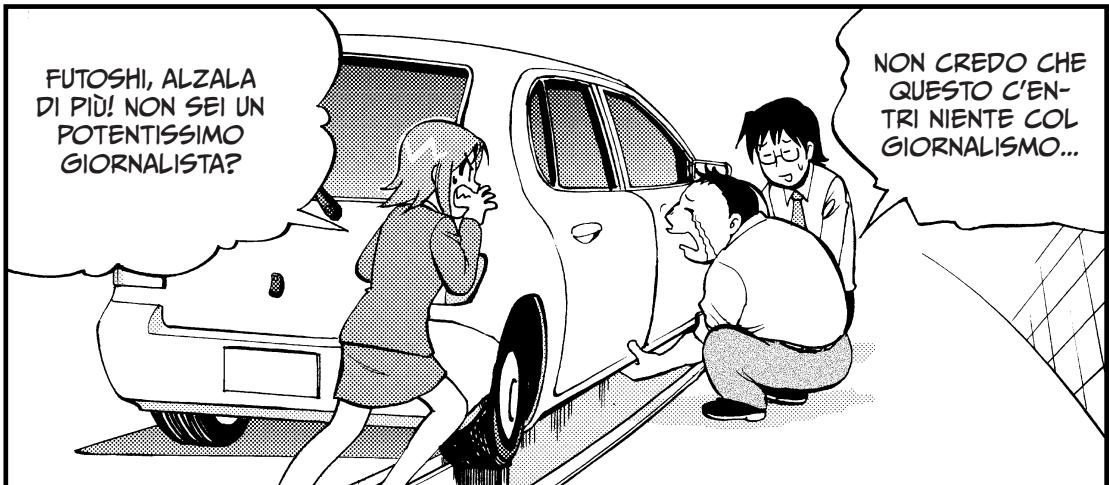
ESATTO!

NEL MONDO REALE USIAMO LE FUNZIONI PER RISOLVERE I PROBLEMI DI LAVORO E DELLA VITA DI TUTTI I GIORNI.

ESATTAMENTE, NON IMPORTA CHE NE SIAMO CONSAPEVOLI OPPURE NO.

PER LA CRONACA, CHI FU A RISOLVERE QUESTO PROBLEMA?





## CALCOLIAMO LA DERIVATA

Per determinare la funzione lineare  $g(x) = kx + 1$  che approssima la funzione  $f(x)$  nel punto  $x=a$  dobbiamo trovarne la pendenza  $k$ .

$$\textcircled{1} \quad g(x) = k(x - a) + f(a) \quad (g(x) \text{ coincide con } f(x) \text{ quando } x = a)$$

E adesso calcoliamo l'errore relativo quando  $x$  passa da  $x = a$  a  $x = a + \varepsilon$ .

$$\text{Errore relativo} = \frac{\text{Differenza tra } f \text{ e } g \text{ dopo la variazione di } x}{\text{Scostamento di } x \text{ da } x = a}$$

$$= \frac{f(a + \varepsilon) - g(a + \varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$= \frac{f(a + \varepsilon) - (k\varepsilon + f(a))}{\varepsilon}$$

$$= \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} - k \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0$$

$$k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}$$

$$g(a + \varepsilon) = k(a + \varepsilon - a) + f(a) \\ = k\varepsilon + f(a)$$

Quando  $\varepsilon$  tende a 0, anche l'errore relativo va a 0.

$$\frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \text{ tende a } k \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0.$$

(Il simbolo “lim” rappresenta il procedimento che produce il valore a sinistra del segno di uguaglianza quando  $\varepsilon$  si avvicina a 0.)

Con questo valore di  $k$ , la funzione lineare  $\textcircled{1}$ , o  $g(x)$ , è un'approssimazione di  $f(x)$ .  $k$  viene chiamato *coefficiente angolare* (o *differenziale*) di  $f(x)$  nel punto  $x = a$ .

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}$$

Pendenza della retta tangente a  $y=f(x)$  in un qualsiasi punto  $(a, f(a))$ .

Lo indichiamo con un apostrofo dopo la  $f$ .

$$f'(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \quad f'(a) \text{ è la pendenza della retta tangente a } y=f(x) \text{ in } x=a.$$

Poiché  $a$  è un valore generico, possiamo sostituirlo con la lettera  $x$  e ora  $f'(x)$  può essere vista come una funzione di  $x$ , che chiamiamo “funzione derivata della funzione  $f$ ”, o semplicemente *derivata di  $f$* .

## CALCOLIAMO LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE COSTANTE, LINEARE E QUADRATICA

1. Troviamo la derivata di una funzione costante  $f(x) = \alpha$ . Il coefficiente angolare di  $f(x)$  at  $x = a$  è

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha - \alpha}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 0 = 0$$

Quindi la derivata di  $f(x)$  è  $f'(x) = 0$ . Questo è ragionevole, perché il tasso di variazione di una funzione costante è 0.

**NOTA** Spesso il coefficiente angolare di  $f(x)$  in  $x=a$  viene chiamato *derivata* di  $f(x)$  in  $x=a$ , o semplicemente  $f'(a)$ .

2. Calcoliamo la derivata di una funzione lineare  $f(x) = \alpha x + \beta$ . La derivata di  $f(x)$  at  $x = a$  è

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha(a + \varepsilon) + \beta - (\alpha a + \beta)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha = \alpha$$

Perciò la derivata di  $f(x)$  is  $f'(x) = \alpha$ , cioè un valore costante. Anche questo dovrebbe essere intuitivo: il tasso di variazione delle funzioni lineari è costante per definizione.

3. Troviamo ora la derivata della funzione  $f(x) = x^2$ , che appare nella storia. Il coefficiente angolare in  $f(x)$  at  $x = a$  è

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(a + \varepsilon)^2 - a^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2a\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2a + \varepsilon) = 2a$$

Il coefficiente angolare di  $f(x)$  in  $x=a$  è  $2a$ , o anche  $f'(a) = 2a$ .  
La derivata di  $f(x)$  è quindi  $f'(x) = 2x$ .

## RIASSUNTO

- Il calcolo di un limite è semplicemente una formula per il calcolo di un errore.
- Da un limite otteniamo una derivata.
- La derivata è la pendenza della retta tangente al grafico della funzione in un dato punto.
- La derivata è semplicemente il tasso di variazione.

La derivata di  $f(x)$  in  $x=a$  è data da

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}$$

$g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$  è quindi l'approssimazione lineare di  $f(x)$ .

$f'(x)$  rappresenta la pendenza della retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(x, f(x))$  e viene chiamata la derivata di  $f(x)$ . Oltre a  $f'(x)$ , per indicare la derivata di una funzione  $y=f(x)$  si usano anche i seguenti simboli

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx} f(x)$$

## ESERCIZI

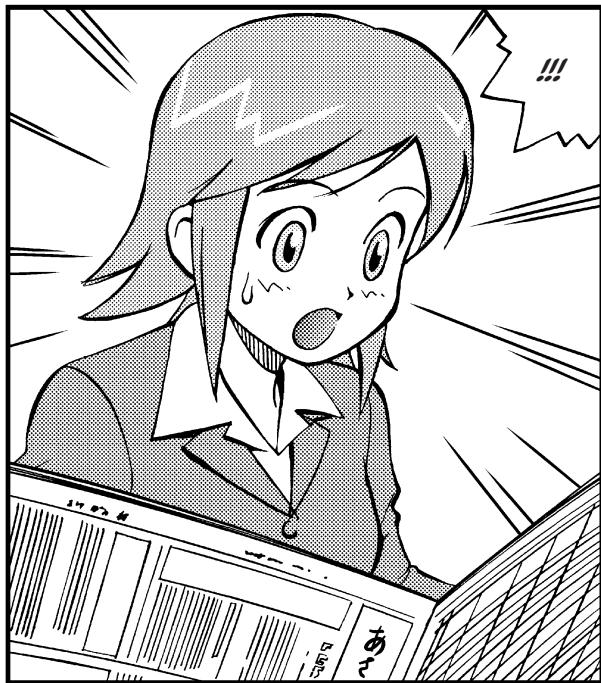
1. Sia data una funzione  $f(x)$  e una funzione lineare  $g(x)=8x+10$ . Sappiamo che l'errore relativo tra le due funzioni tende a 0 per  $x$  che tende a 5.
  - A. Calcolare  $f(5)$ .
  - B. Calcolare  $f'(5)$ .
2. Data  $f(x) = x^3$ , calcolare la derivata  $f'(x)$ .



# **Z**

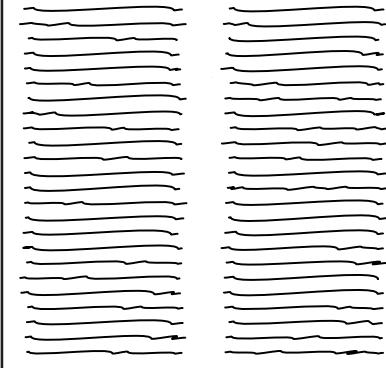
## **IMPARIAMO A DERIVARE!**



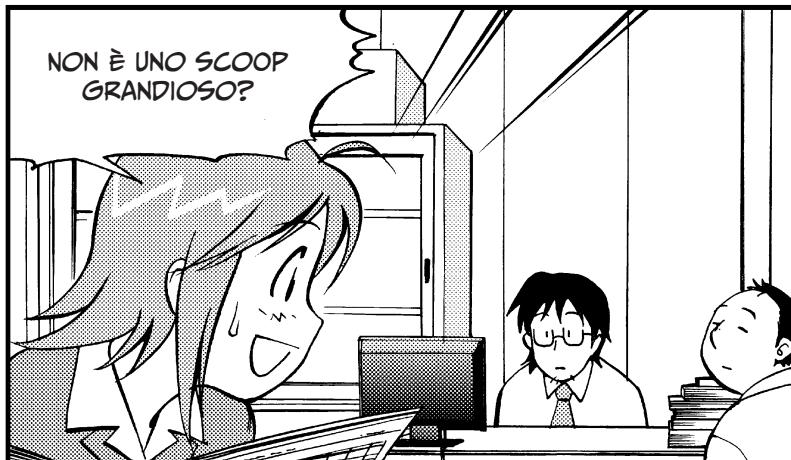


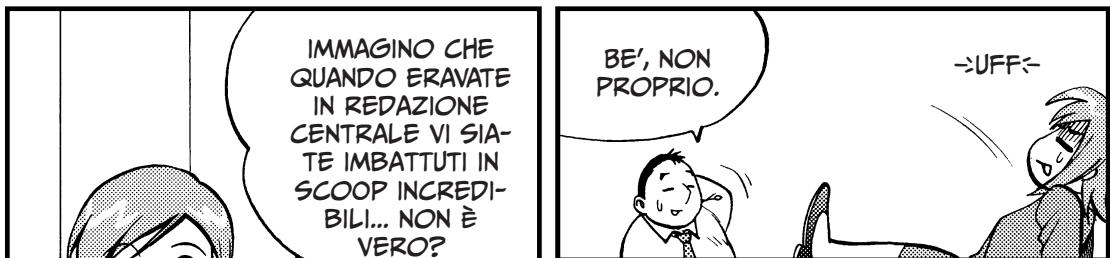
## Accuse di rilevanza penale contro Megatrox

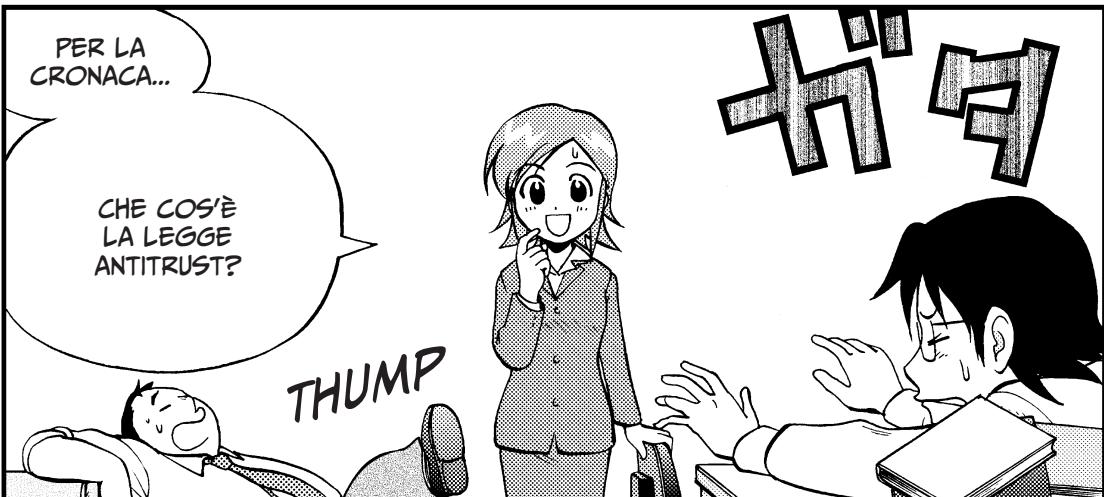
Leggi antitrust violate da contratto edilizio

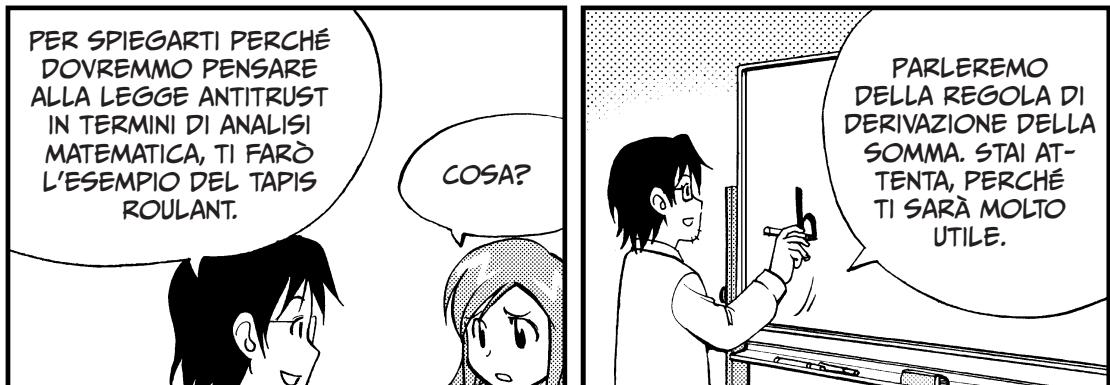


WOW! MEGATROX  
È UNA SOCIETÀ ENORME!









## LA DERIVATA DELLA SOMMA

FORMULA 2.1

LA DERIVATA DELLA SOMMA

sia

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

CERCHIAMO DI  
CAPIRLO APPROS-  
SIMANDO LE COSE  
NEI DINTORNI DI  
 $x = a$ .

LO ABBA-  
MO GIÀ  
FATTO.

IN ALTRE PAROLE, LA  
DERIVATA DELLA SOM-  
MA DI DUE FUNZIONI È  
UGUALE ALLA SOMMA  
DELLE DERIVATE DEL-  
LE SINGOLE FUNZIONI.

CHE  
COSA VUOL  
DIRE?

$$f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a) \quad ①$$

APPROSSIMANDO

SQUEAK

$$g(x) \approx g'(a)(x-a) + g(a) \quad ②$$

APPROSSIMANDO

SQUEAK

SQUEAK

DATO CHE

$$h(x) \approx k(x-a) + l \quad ③$$

APPROSSIMANDO

VOGLIAMO  
TROVARE  $k$ .

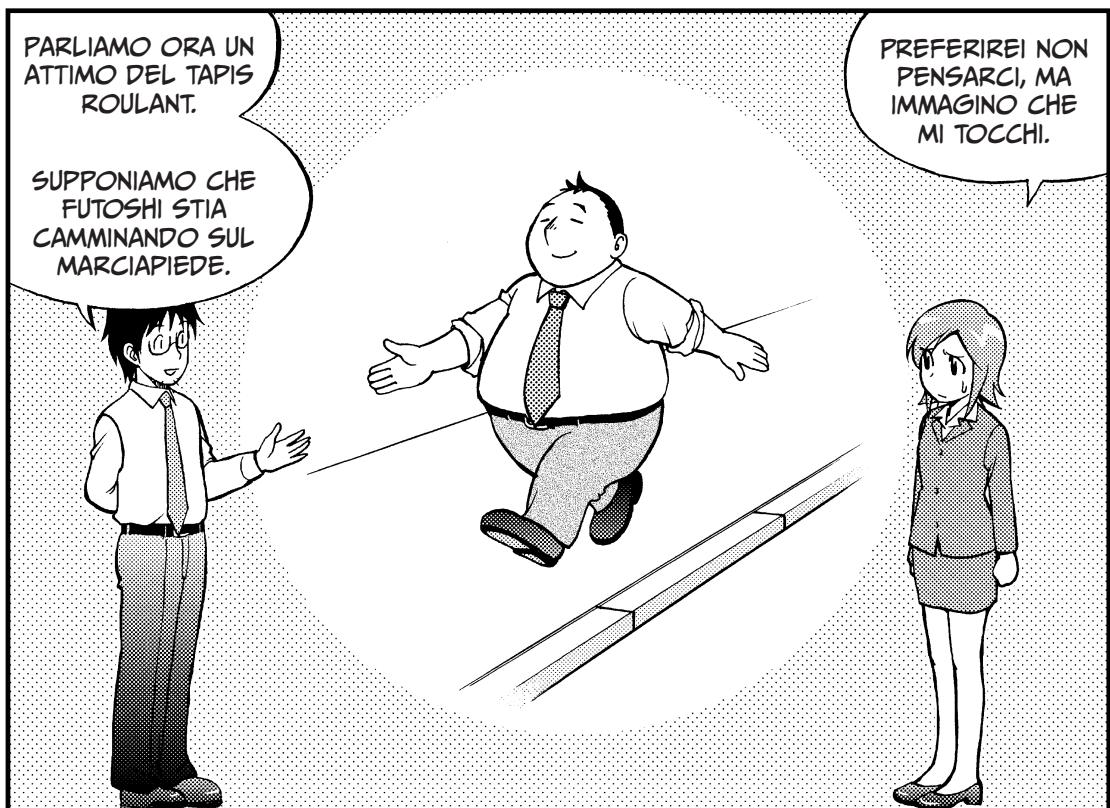
POICHÉ  $h(x) = f(x) + g(x)$ ,  
SOSTITUIAMO ① E ②  
IN QUESTA  
EQUAZIONE

UH-OH



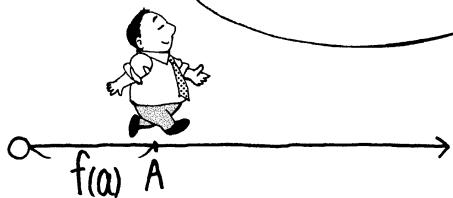
INOLTRE SAP-  
PIAMO CHE...

$$h(x) \approx f(a)(x-a) + f(a) + g'(a)(x-a) + g(a) \quad ④$$

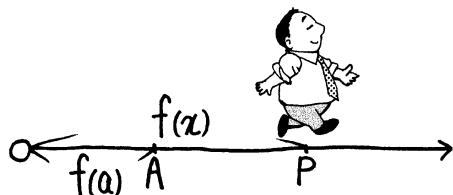


SUPPONIAMO CHE IN  $x$  MINUTI PERCORRA  $f(x)$  METRI A PARTIRE DALL'ORIGINE O DEL RIFERIMENTO.

$a$  MINUTI  
DOPO SI TROVA  
NEL PUNTO A.



SUPPONIAMO CHE  
ALTRI  $x$  MINUTI  
DOPO SIA NEL  
PUNTO P.



QUESTO  
SIGNIFICA CHE È  
PASSATO DA A A P IN  
( $x - a$ ) MINUTI.

OKAY. MA  
COSA VUOL  
DIRE?

SUPPONIAMO CHE  
QUESTO TEMPO  
( $x - a$ ) SIA  
ESTREMAMENTE  
BREVE.

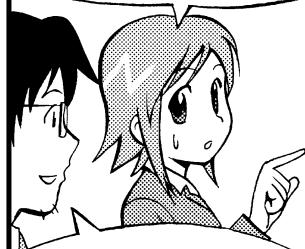
$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$$



ALLORA L'E-  
SPRESSIONE  
DIVENTA...

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx f'(a)$$

MR. SEKI, IL MEMBRO  
DI SINISTRA È LA  
DISTANZA PERCORSÀ  
DIVISO IL TEMPO IM-  
PIEGATO... QUINDI È LA  
VELOCITÀ, GIUSTO?



PRECISAMENTE!  
QUINDI  $f'(a)$  RAPPRE-  
SENTA LA VELOCITÀ  
DI FUTOSHI QUANDO  
TRANSITA PER IL  
PUNTO A.

PERCÒ DERIVARE  $f$  SIGNIFICA TROVARE LA VELOCITÀ QUANDO  $f(x)$  RAPPRESENTA LA DISTANZA IN FUNZIONE DEL TEMPO!



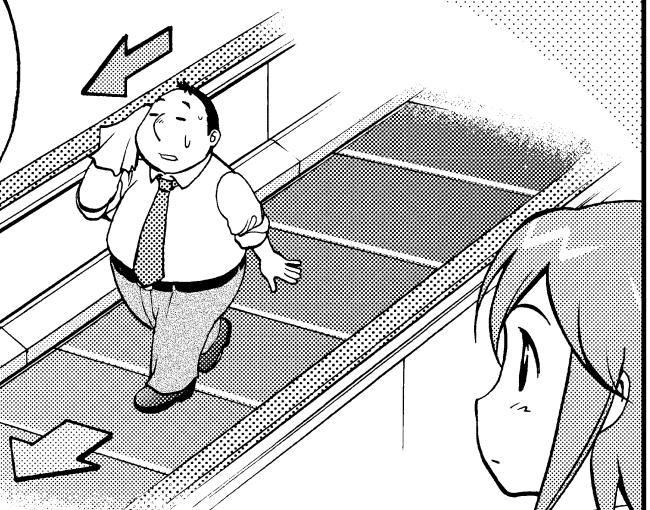
ESATTO. E SE  $h(x) = f(x) + g(x)$  ALLORA  $h'(x) = f'(x) + g'(x)$  SIGNIFICA QUANTO SEGUE.



SUPPONIAMO CHE FUTOSHI CAMMINI SU UN TAPIS ROULANT, COME NEGLI AEROPORTI.

IL NASTRO AVANZA DI  $f(x)$  METRI IN  $x$  MINUTI. RELATIVAMENTE AL NASTRO, NELLO STESSO TEMPO FUTOSHI PERCORRE  $g(x)$  METRI.

PERCORRE  $g(x)$  METRI IN  $x$  MINUTI



AVANZA DI  $f(x)$  METRI IN  $x$  MINUTI

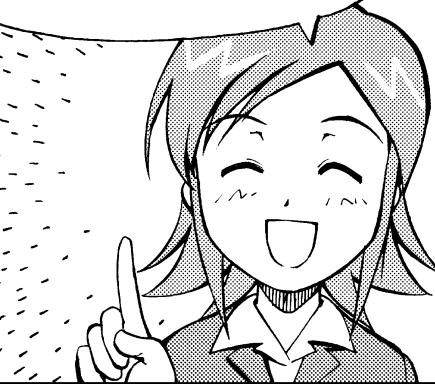
QUINDI LA DISTANZA TOTALE PERCORSATA DA FUTOSHI IN  $x$  MINUTI DIVENTA  $h(x) = f(x) + g(x)$ .

COSA SIGNIFICA ALLORA  
 $h'(x) = f'(x) + g'(x)$ ?

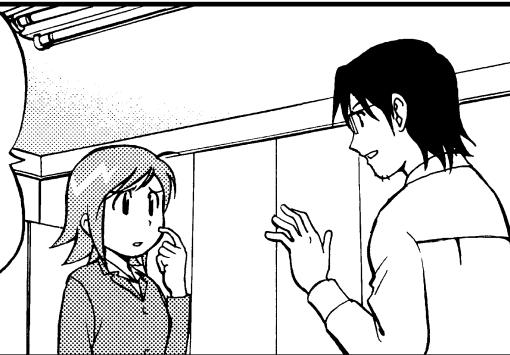


vuol dire che la velocità di Futoshi, misurata da una persona che non è sul tapis roulant, è la somma della sua velocità rispetto al tapis roulant e di quella del tapis roulant, giusto?

GIUSTO.



MA COSA C'È DI SPECIALE, IN TUTTO CIÒ? E CHE COSA C'ENTRA CON LA LEGGE ANTITRUST?



ABBI UN ALTRO PO' DI PAZIENZA, CARA LA MIA CICALA. COME TI HO DETTO, LE BASI SONO IMPORTANTI.

ANCHE LA PROSSIMA REGOLA È FONDAMENTALE, QUINDI VEDI DI IMPARARLA, OKAY?

MA CERTO!

-PANT, PANT-

-UFF UFF-

H<sup>II</sup>

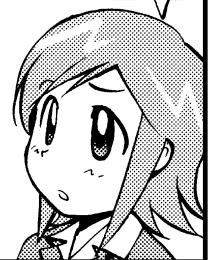
## LA DERIVATA DEL PRODOTTO

### FORMULA 2.2 LA DERIVATA DEL PRODOTTO

Sia  $h(x) = f(x)g(x)$   
 $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

La derivata di un prodotto è la somma dei prodotti di ciascuna funzione per la derivata dell'altra.

DAVVERO?



Sì.  
CONSIDERIAMO  
 $x = a$ .



$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$$

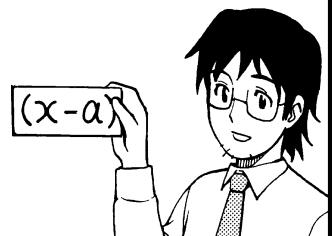
$$g(x) \approx g'(a)(x - a) + g(a)$$

$$h(x) = f(x)g(x) \approx k(x - a) + l$$

$$h(x) \approx \{f'(a)(x - a) + f(a)\} \times \{g'(a)(x - a) + g(a)\}$$

$$h(x) \approx f'(a)g'(a)(x - a)^2 + f(a)g'(a)(x - a) + f'(a)(x - a)g(a) + f(a)g(a)$$

$(x - a)$  È UNA  
VARIAZIONE PICCOLA. QUE-  
STO SIGNIFICA CHE  $(x - a)^2$   
È ANCORA PIÙ PICCOLA E  
RAGIONANDO PER APPRO-  
SIMAZIONE POSSIAMO  
TRASCURARLA.



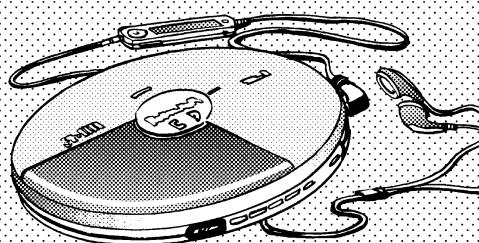
$$h(x) \approx \{f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\}(x - a) + f(a)g(a)$$

$$k = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

ECCO IL  
RISULTATO.



SUPPONIAMO PER ESEMPIO CHE UNA SOCIETÀ CHE PRODUCE DEI LETTORI CD, AL PREZZO UNITARIO DI MERCATO DI 12.000 YEN, VALUTI LA POSSIBILITÀ DI AUMENTARE LA PRODUZIONE.



SE IL COSTO DI PRODUZIONE DI UNA UNITÀ IN PIÙ È 10.000 YEN, L'AZIENDA AUMENTERÀ SICURAMENTE LA PRODUZIONE, PERCHÉ IN QUESTO MODO AUMENTERÀ ANCHE I GUADAGNI.

AUMENTO DI PRODUZIONE



SICCOME ANCHE ALTRI CONCORRENTI PRODUCONO LO STESSO BENE, L'AZIENDA PENSA CHE L'AUMENTO DI PRODUZIONE PRODURRA UNA DIMINUZIONE DEL PREZZO DI VENDITA.

POTREBBE QUINDI DECIDERE DI PRODURRE DI PIÙ, MA QUESTO FARÀ VARIARE IL COSTO DI PRODUZIONE DI OGNI UNITÀ IN PIÙ, E CON ESSO LA PRODUTTIVITÀ. ALLA FINE, IL COSTO DI PRODUZIONE DELL'UNITÀ IN PIÙ RAGGIUNGERÀ IL PREZZO DI MERCATO DI 12.000 YEN. A QUESTO PUNTO, I COSTI NON GIUSTIFICHEREBBERO L'AUMENTO DI PRODUZIONE.

IN BREVE, IL MERCATO SI STABILIZZA QUANDO IL PREZZO DI MERCATO DI UNA UNITÀ IN PIÙ RAGGIUNGE IL COSTO DI PRODUZIONE DI QUELL'UNITÀ.

UH-UH



D'ALTRA PARTE IN UN MONOPOLIO, DOVE IL BENE È DISPONIBILE PRESSO UN UNICO PRODUTTORE, LE COSE VANNO DIVERSAMENTE. IN QUEL CASO L'INTERO MERCATO COINCIDE CON UN'UNICA AZIENDA.

MERCATO

MONOPOLISTICO

SE GUARDIAMO AL MERCATO COME A UN TUTT'UNO, UN AUMENTO DELL'OFFERTA PROVOCHERÀ UNA DIMINUZIONE DEI PREZZI. LA LEGGE DELLA DOMANDA E DELL'OFFERTA.

SUPPONIAMO ORA CHE IL PREZZO CHE CONSENTE ALLA SOCIETÀ DI VENDERE L'INTERA QUANTITÀ  $x$  DELLA PRODUZIONE SIA UNA FUNZIONE DI  $x$ , CHE CHIAMEREMO  $p(x)$ .

PER LA CRONACA, LA VARIAZIONE  $p'(x)$  DEL PREZZO È NEGATIVA, PERCHÉ ALL'AUMENTARE DI  $x$  IL PREZZO UNITARIO DIMINUISCE.

PRECISAMENTE,  
I RICAVI DELLA  
SOCIETÀ SONO  
QUINDI...

V  
SQUEAK  
SQUEAK

Ricavo =  $R(x) = \text{prezzo} \times \text{quantità} = p(x) \times x$

### FORMULA 2.3 IL RICAVO AZIENDALE

Da  $R(x) \approx R'(a)(x - a) + R(a)$   
ricaviamo

$$\frac{R(x) - R(a)}{\text{VARIAZIONE DEL RICAVO}} \approx \frac{R'(a)(x - a)}{\text{VARIAZIONE DELLA PRODUZIONE}}$$

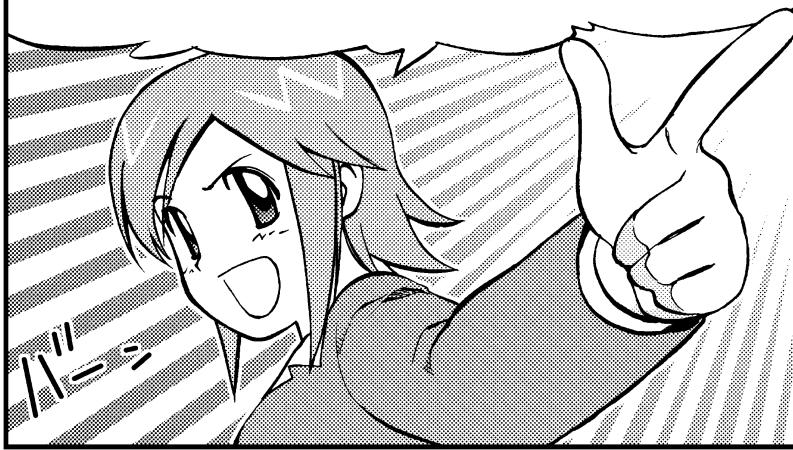
DA CUI SI VEDA  
CHE IL RICAVO AGGIUNTIVO DERIVATO  
DA UNA VARIAZIONE  
NELLA PRODUZIONE  
È  $R'(a)$  PER OGNI  
UNITÀ.

HO CAPITO! PER DECIDERE SE AUMENTARE LA PRODUZIONE, L'AZIENDA DOVRÀ CALCOLARE  $R'$  E CONFRONTARLO COI COSTI DI PRODUZIONE.

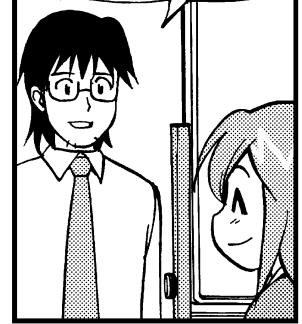
PROPRIO COSÌ. E  
SICCOME  $R(x) = p(x) \times x$ ,  
RICORDIAMOCI  
DELLA REGOLA DI  
DERIVAZIONE DEL  
PRODOTTO.

CERTO...

...QUINDI OTTENIAMO\*  $R'(a) = p'(a) \times a + p(a) \times 1$



ESATTO. LA PRODUZIONE VA INTERROTTA ESATTAMENTE QUANDO QUESTA QUANTITÀ DIVENTA INFERIORE AL COSTO DELL'AUMENTO DELLA PRODUZIONE DI UN'UNITÀ.



\*LA DERIVATA DI  $x$  È 1 (V. PAGINA 40 PER I DETTAGLI SULLA DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI LINEARI)

IN ALTRE PAROLE, LA PRODUZIONE SI FERMERA' QUANDO  $p'(a) \times a + p(a) =$  COSTO DI PRODUZIONE. SAPPIAMO CHE IL PRIMO TERMINE È NEGATIVO E QUESTO GARANTISCE CHE IL PREZZO DI MERCATO SIA MAGGIORRE DEL COSTO.



MA QUANDO È UN MONOPOLISTA A INTERROMPERE LA PRODUZIONE, IL PREZZO IN REALTÀ È MAGGIORRE DEI COSTI DI PRODUZIONE ADDIZIONALI.

CIOÈ UNA MANIPOLAZIONE INDEBITA DEI PREZZI, GIUSTO?

OH.

GIUSTO. MA DIAMO UN'OCCHIATA PIÙ DA VICINO. SI TRATTA DI UNA DECISIONE PRESA SU UNA BASE RAZIONALE.



CONSIDERIAMO NUOVAMENTE L'ESPRESSONE DEI RICAVI.

Le vendite aumentano quando la produzione aumenta ancora un po':

$$R'(a) = p'(a)a + p(a)$$

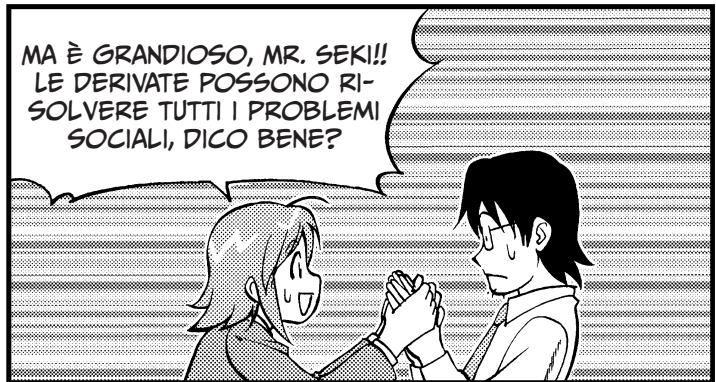
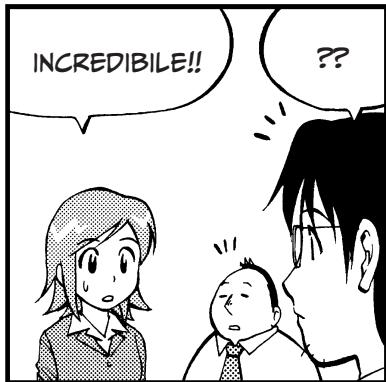
I due termini hanno il seguente significato:

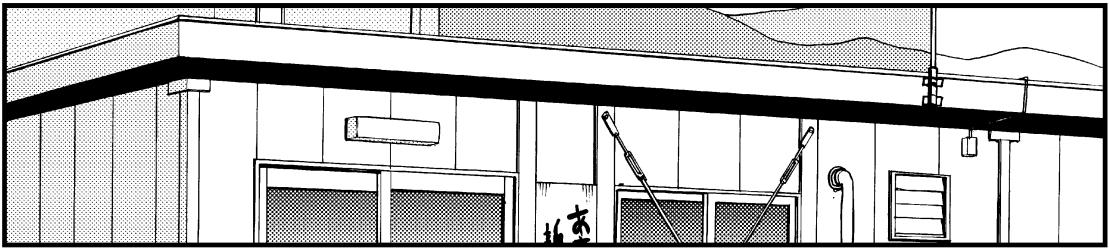
$p(a)$  è il ricavo dalla vendita di  $a$  unità

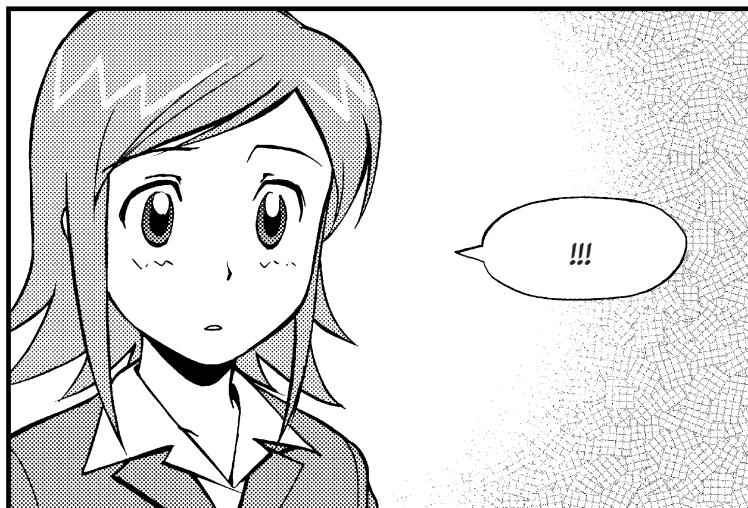
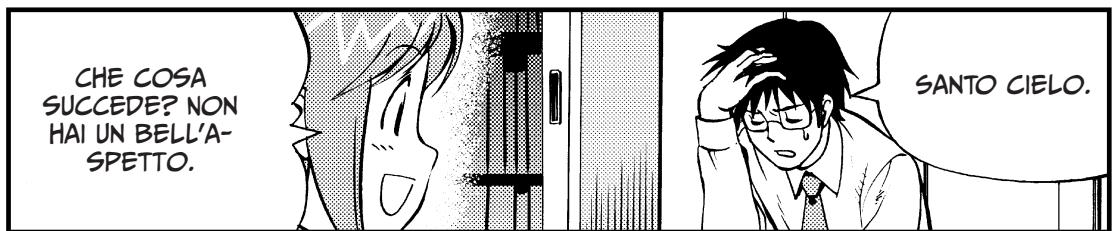
$p'(a)a$  = Tasso di aumento del prezzo × produzione

= Gravi perdite a causa della diminuzione di prezzo di tutte le unità



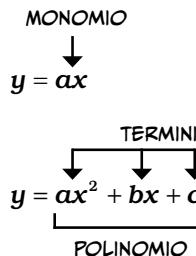






# LA DERIVATA DEI POLINOMI

E ORA CAMBIAMO ARGOMENTO.



PER CONCLUDERE, RICAVIAMO UNA FORMULA PER DERIVARE I POLINOMI. LA DERIVATA DI QUALESiasi POLINOMIO SI OTTIEENE COMBINANDO TRE FORMULE.

## FORMULA 2.4 - LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE DI GRADO N

La derivata di  $h(x) = x^n$  è  $h'(x) = nx^{n-1}$

Come ricaviamo questa regola generale? Applichiamo più volte la regola per la derivata del prodotto.

Per  $h(x) = x^2$ , si ha  $h(x) = x \times x$ ,  $h'(x) = x \times 1 + 1 \times x = 2x$

USIAMO QUESTO RISULTATO

Ed è questa la formula

Per  $h(x) = x^3$ , si ha  $h(x) = x^2 \times x$ ,  $h'(x) = (x^2)' \times x + x^2 \times (x)' = (2x)x + x^2 \times 1 = 3x^2$

Anche in questo caso la formula è di nuovo giusta.

Per  $h(x) = x^4$ , si ha  $h(x) = x^3 \times x$ ,  $h'(x) = (x^3)' \times x + x^3 \times (x)' = 3x^2 \times x + x^3 \times 1 = 4x^3$

E la formula è di nuovo quella giusta, per  $n=3$ . E così via: combinando queste tre formule possiamo derivare qualsiasi polinomio.

## FORMULA 2.5 - LA DERIVATA DELLA SOMMA, DELLA MOLTIPLICAZIONE PER UNA COSTANTE E DI $x^n$

① Regola

della somma:  $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$

③ Regola delle

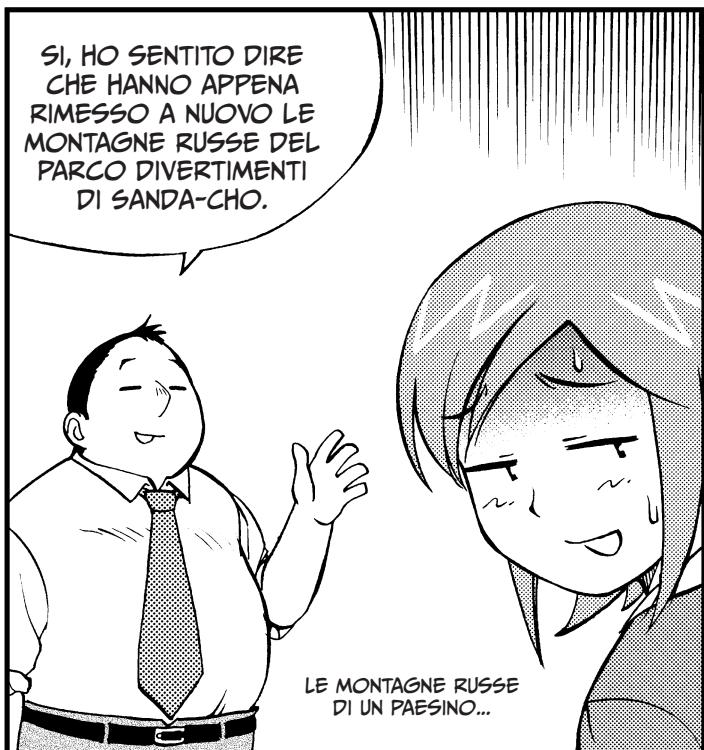
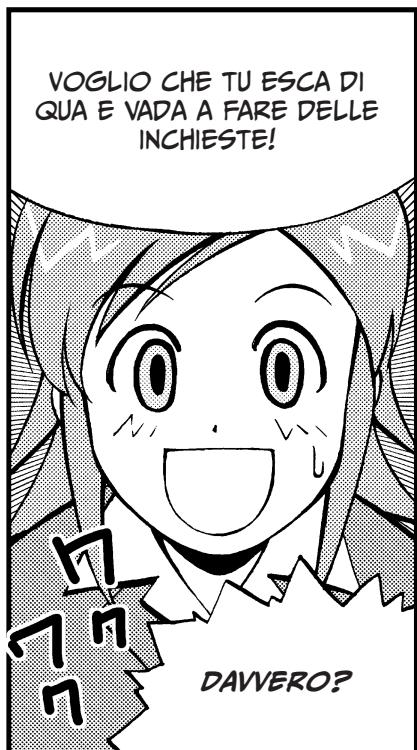
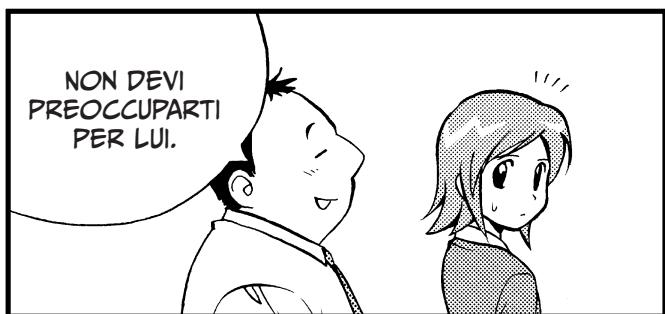
potenze:  $\{x^n\}' = nx^{n-1}$

②

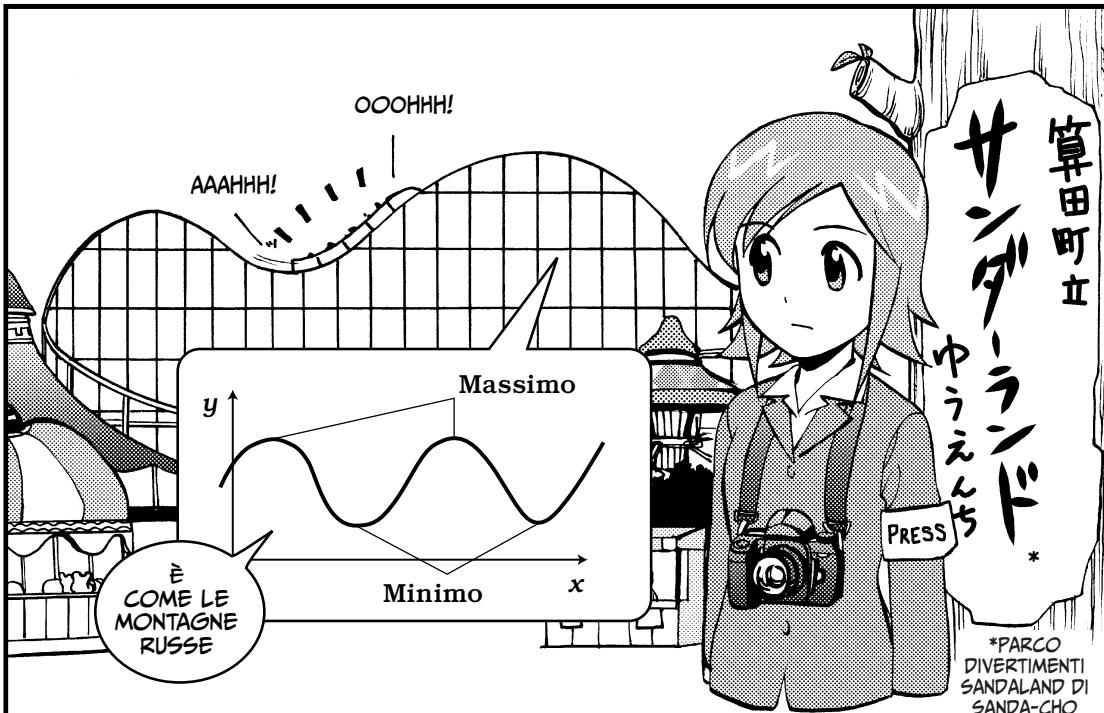
Moltiplicazione per una costante:  $\{\alpha f(x)\}' = \alpha f'(x)$

E adesso applichiamole tutte! Deriviamo  $h(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \{x^3 + 2x^2 + 5x + 3\}' = \overbrace{(x^3)' + (2x^2)' + (5x)' + (3)'}^{\text{regola ①}} \\
 &= \underbrace{(x^3)'}_{\text{regola ②}} + 2\underbrace{(x^2)'}_{\text{regola ②}} + 5\underbrace{(x)'}_{\text{regola ②}} = 3x^2 + 2(2x) + 5 \times 1 = 3x^2 + 4x + 5
 \end{aligned}$$



## TROVIAMO I MASSIMI E I MINIMI



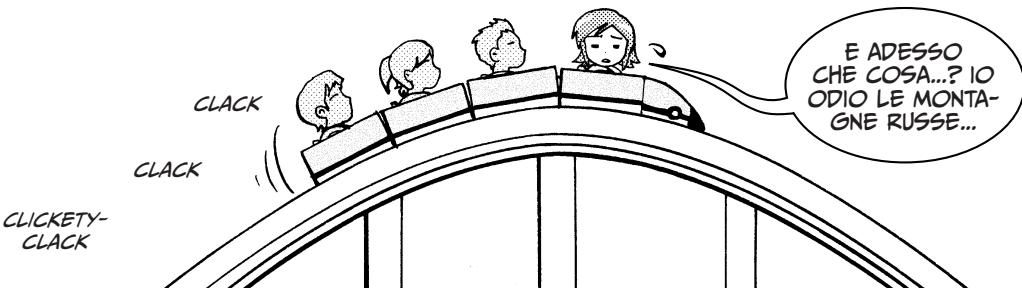
I punti di **massimo** e di **minimo** sono punti in cui la funzione smette di crescere e comincia a diminuire, e viceversa. Quindi sono importanti nell'analisi del comportamento della funzione.

Siccome un massimo o un minimo potrebbe essere un massimo o un minimo assoluto, è un punto importante nella ricerca di una soluzione ottimale.

### TEOREMA 2.1: CONDIZIONI PER PUNTI ESTREMANTI

Se in  $x=a$  la funzione  $y = f(x)$  è derivabile e ha un massimo o un minimo, allora  $f'(a)=0$ .

Questo significa che troveremo i punti di massimo e di minimo tra quelli a per cui  $f'(a) = 0$ . Questi valori sono chiamati *estremanti*.



Supponiamo che  $f'(a) > 0$ .

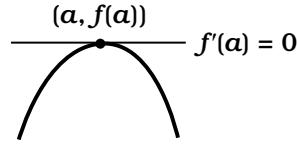
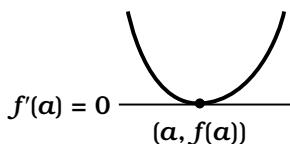
Poiché in un intorno di  $x=a$  si ha  $f(x) \approx f'(a)(x-a)+f(a)$ ,  $f'(a)>0$  implica che in  $x=a$  l'approssimazione lineare di  $f$  - e quindi  $f$  - aumenta.

In altre parole, le montagne russe sono in salita e non si trovano né in una cima (massimo) né in un avvallamento (minimo).

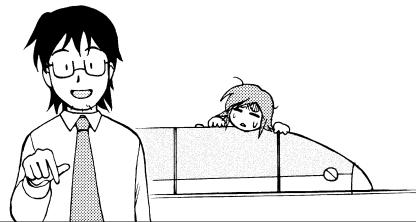
Analogamente, se  $f'(a)<0$  allora  $f(x)$  è decrescente e i valori che assume non sono né di massimo né di minimo.

Ne segue che se  $f(x)$  è crescente o decrescente - per  $f'(a)>0$  e  $f'(a)<0$ , rispettivamente - in un avvallamento o in una cima si può solo avere  $f'(a)=0$ .

Infatti, questo implica che l'approssimazione lineare  $y=f'(a)(x-a)+f(a)$  si riduca alla costante  $y=f(a)$ , il cui grafico è una retta orizzontale, in accordo con la nostra idea di massimo o minimo.



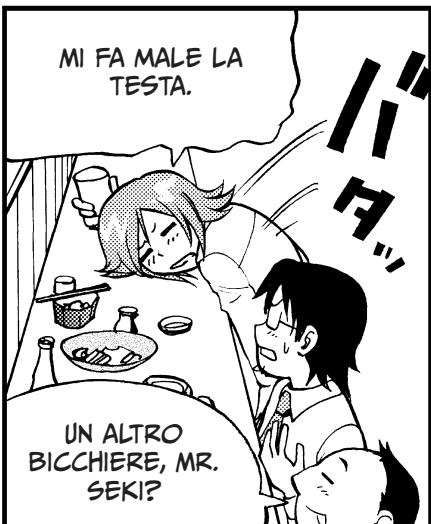
POSSIAMO  
RIASSUMERE L'IN-  
TERA DISCUSSIONE  
COL SEGUENTE  
TEOREMA.



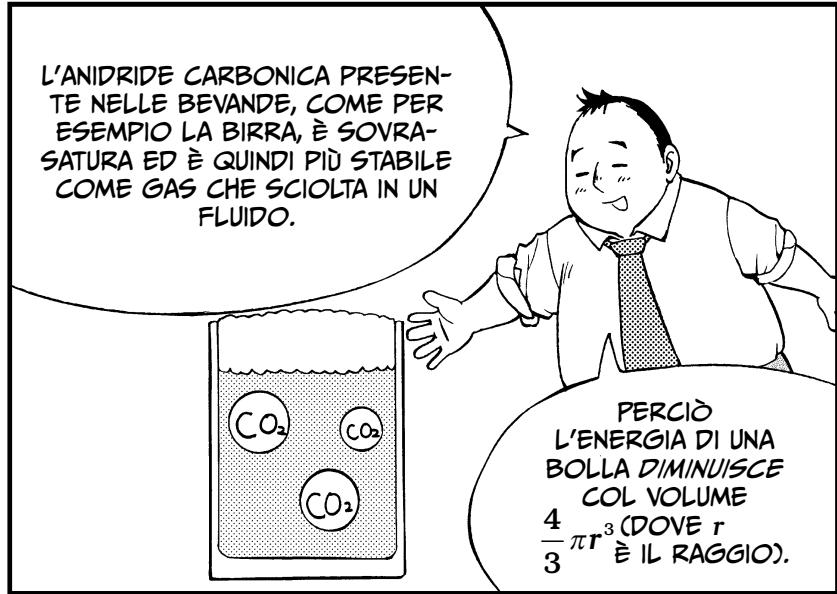
#### TEOREMA 2.2 - CRITERI PER FUNZIONI CRESCENTI O DECRESCENTI

Se  $f'(a)>0$  allora  $y=f(x)$  è crescente in un intorno di  $x=a$

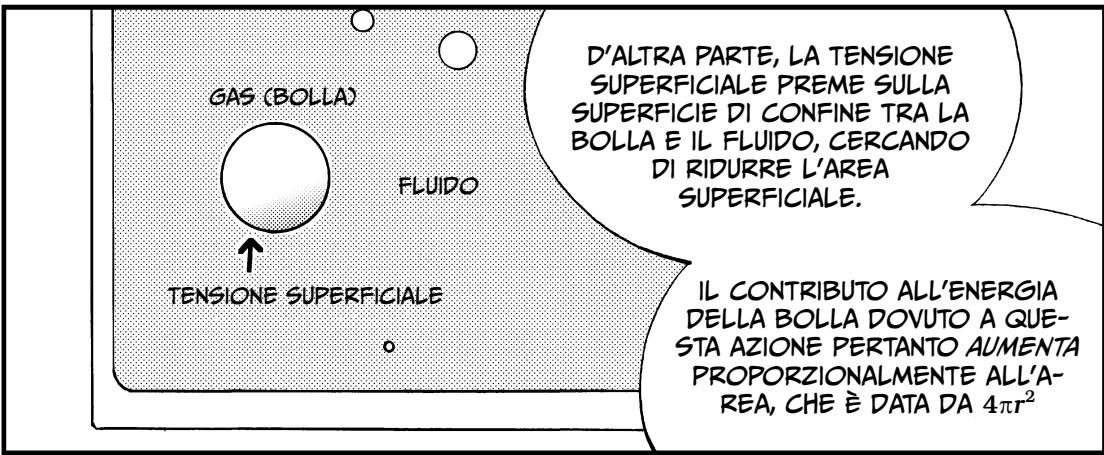
Se  $f'(a)<0$  allora  $y=f(x)$  è decrescente in un intorno di  $x=a$



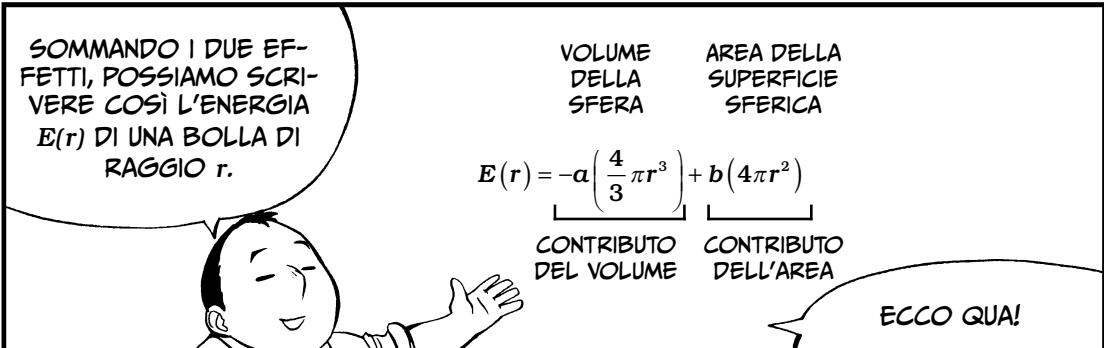




PERCÒ  
L'ENERGIA DI UNA  
BOLLA DIMINUISCE  
COL VOLUME  
 $\frac{4}{3}\pi r^3$  (DOVE  $r$   
È IL RAGGIO).



IL CONTRIBUTO ALL'ENERGIA DELLA BOLLA DOVUTO A QUESTA AZIONE PERTANTO AUMENTA PROPORTZIONALMENTE ALL'AREA, CHE È DATA DA  $4\pi r^2$



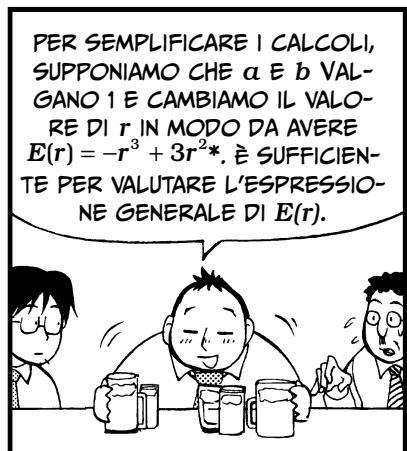
VOLUME DELLA SFERA      AREA DELLA SUPERFICIE SFERICA

$$E(r) = -a \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) + b (4\pi r^2)$$

CONTRIBUTO DEL VOLUME

CONTRIBUTO DELL'AREA

ECCO QUA!

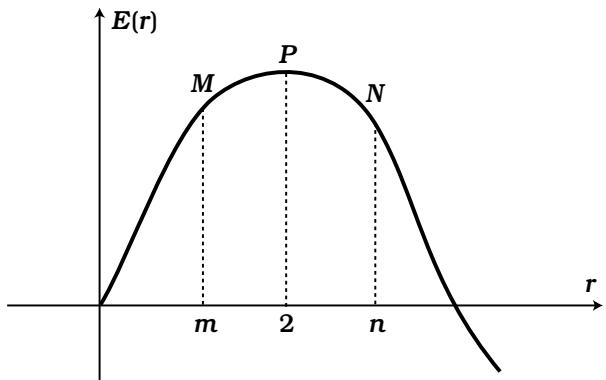


\*SI CHIAMA RINORMALIZZAZIONE DI UNA VARIABILE. ABBIAMO SEMPLICEMENTE MOLTIPLICATO CIASCUN TERMINE PER  $3/(4\pi)$

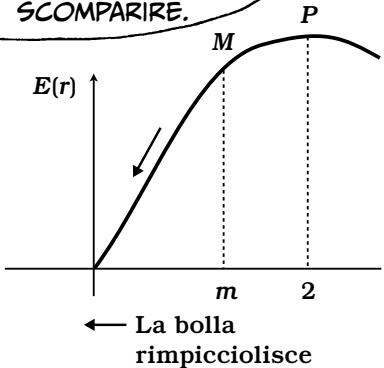


$$\begin{aligned} \text{POICHÉ} \\ E'(r) &= (-r^3)' + (3r^2)' \\ &= -3r^2 + 6r \\ &= -3r(r-2) \end{aligned}$$

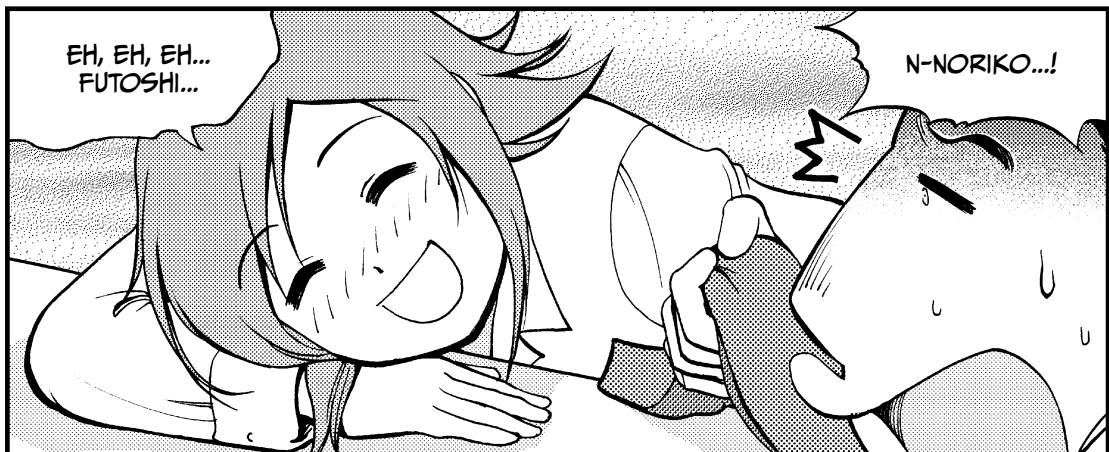
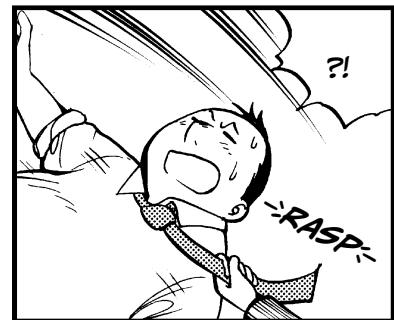
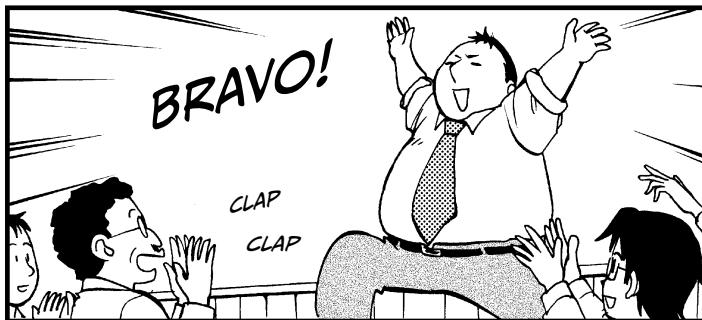
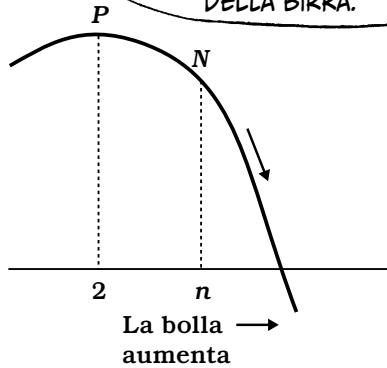
PER  $r = 2$  ABBIAMO  $E'(r) = 0$ . PER  $0 < r < 2$  ABBIAMO INVECE  $E'(r) > 0$  E LA FUNZIONE È CRESCENTE. PER  $r > 2$ ,  $E'(r) < 0$  E LA FUNZIONE È DECRESCENTE. ORA VEDIAMO QUANTO VALE  $E(r)$  NEL PUNTO DI MASSIMO  $r=2$ .



PER RIDURRE LA PROPRIA ENERGIA  $E(r)$ , UNA BOLLA DI RAGGIO ED ENERGIA CORRISPONDENTI AL PUNTO M DOVRÀ RIDURRE IL PROPRIO RAGGIO AL DI SOTTO DI  $m$ . LA BOLLA DIVENTERÀ QUINDI SEMPRE PIÙ PICCOLA, FINO A SCOMPARIRE.



D'ALTRA PARTE, PER RIDURRE LA PROPRIA ENERGIA  $E(r)$ , UNA BOLLA DI RAGGIO ED ENERGIA CORRISPONDENTI AL PUNTO N DOVRÀ AUMENTARE IL PROPRIO RAGGIO AL DI SOPRA DI  $n$ . E DIVENTERÀ SEMPRE PIÙ GRANDE, GALLEGGIANDO FINO ALLA SUPERFICIE DELLA BIRRA.





## IL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sappiamo che la derivata è il coefficiente della  $x$  nell'approssimazione lineare in un intorno di  $x=a$ .

In altre parole,

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a) \quad (\text{con } x \text{ molto vicino ad } a)$$

Ma l'approssimazione, appunto, è solo una "imitazione" di  $f(x)$  e, in generale, per un valore  $b$  vicino a (ma diverso da)  $x$  si avrà

❶  $f(b) \neq f'(a)(b - a) + f(a)$

Che non è un'equazione!



IL SEGUENTE TEOREMA È PER TUTTI QUELLI CHE  
NON SOPPORTANO TANTA IMPRECISIONE.

### TEOREMA 2.3 – TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Se  $f$  è derivabile per tutti i valori compresi tra  $a$  e  $b$ , con  $a < b$ , allora esiste un numero  $c$  per cui

$$f(b) = f'(c)(b - a) + f(a)$$

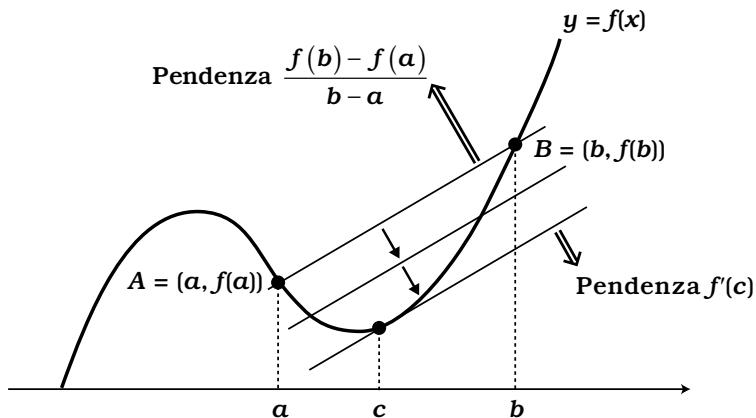
In altre parole, da qualche parte tra  $a$  e  $b^*$  esiste un valore  $c$  per cui nell'espressione ❶ vale il segno di uguaglianza.

COME MAI?



\*Geometricamente: tra  $a$  e  $b$  esiste un punto nel quale la retta tangente al grafico di  $f$  è parallela alla retta che congiunge i punti  $A=f(a)$  e  $B=f(b)$ .

Consideriamo il segmento di retta che unisce i punti  $A=(a,f(a))$  e  $B=(b,f(b))$ .



Sappiamo che la pendenza è semplicemente  $\Delta y / \Delta x$ :

$$\textcircled{2} \quad \text{Pendenza di } AB = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ora spostiamo la retta del segmento  $AB$  parallelamente a se stessa, verso il basso, come in figura, finché avrà in comune col grafico un unico punto. Indichiamolo con  $(c, f(c))$ .

In questo punto, la retta è diventata la tangente al grafico e la sua pendenza è  $f'(c)$ .

Per costruzione, la sua pendenza non è cambiata e sarà uguale a quella del segmento  $AB$ .

**PERCÒ**

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

**DA CUI RICAVIAMO**

$$f(b) = f'(c)(b - a) + f(a)$$



## LA DERIVATA DI UN QUOTIENTE

Troviamo la formula per la derivata di  $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

Per cominciare, limitiamoci a  $p(x) = \frac{1}{f(x)}$ , cioè il reciproco di  $f(x)$ .

Una volta trovata la sua derivata, potremo applicare alla funzione  $h(x)$  la regola per la derivazione di un prodotto.

Siccome per ogni  $x$  vale l'identità  $f(x)p(x) = 1$  otteniamo

$$1 = f(x)p(x) \approx \{f'(a)(x-a) + f(a)\}\{p'(a)(x-a) + p(a)\}$$

Derivando quindi i due membri, otteniamo.

$$0 = p(x)f'(x) + p'(x)f(x)$$

$$\text{Abbiamo quindi } p'(x) = -\frac{p(x)f'(x)}{f(x)}.$$

Siccome  $p(a) = \frac{1}{f(a)}$ , sostituendo nell'espressione precedente otteniamo  
$$p'(a) = \frac{-f'(a)}{f(a)^2}.$$

Data  $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$  consideriamo in generale  $h(x) = g(x) \times \frac{1}{f(x)} = g(x)p(x)$

e applichiamo a questa espressione la regola di derivazione del prodotto.

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)p(x) + g(x)p'(x) = g'(x)\frac{1}{f(x)} - g(x)\frac{f'(x)}{f(x)^2} \\ &= \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2} \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

### FORMULA 2.6 – LA DERIVATA DI UN QUOTIENTE

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}$$

## LA DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

Troviamo la formula per la derivata di  $h(x) = g(f(x))$ .

In un intorno di  $x = a$ ,

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a)$$

Mentre in  $y = b$ ,

$$g(y) - g(b) \approx g'(b)(y - b)$$

Sostituiamo ora  $b=f(a)$  e  $y=f(x)$  nell'ultima espressione.

In un intorno di  $x=a$  abbiamo

$$g(f(x)) - g(f(a)) \approx g'(f(a))(f(x) - f(a))$$

Sostituiamo  $f(x) - f(a)$  nel membro destro con quello della prima espressione:

$$g(f(x)) - g(f(a)) \approx g'(f(a))f'(a)(x - a)$$

Poiché  $g(f(x))=h(x)$ , il coefficiente di  $(x-a)$  risulta essere  $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$ .

Otteniamo così la formula

### FORMULA 2.7 - DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

## LA DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Usiamo la formula appena trovata per calcolare la derivata di  $x=g(y)$ , la funzione inversa di  $y=f(x)$ .

Poiché  $x=g(f(x))$  per ogni  $x$ , derivando i due membri otteniamo  $1=g'(f(x))f'(x)$ . Quindi  $1=g'(y)f'(x)$  e quindi

### FORMULA 2.8 - DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

## LE FORMULE DELLE DERIVATE

FORMULA	PRO MEMORIA
Moltiplicazione per una costante $\{\alpha f(x)\}' = \alpha f'(x)$	La costante “passa attraverso” la derivazione.
$x^n$ (Potenza) $(x^n)' = nx^{n-1}$	L'esponente diventa il coefficiente, e il grado si riduce di 1.
Somma $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$	La derivata di una somma è la somma delle derivate.
Prodotto $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	La somma dei prodotti di ciascuna funzione per la derivata dell'altra.
Quoziente $\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\right\}' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}$	Il denominatore elevato al quadrato. Il numeratore è la differenza tra i prodotti di ogni funzione per la derivata dell'altra.
Funzione composta $\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x)$	Prodotto delle derivate della funzione esterna e di quella interna.
Funzione inversa $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$	Il reciproco della funzione originale.

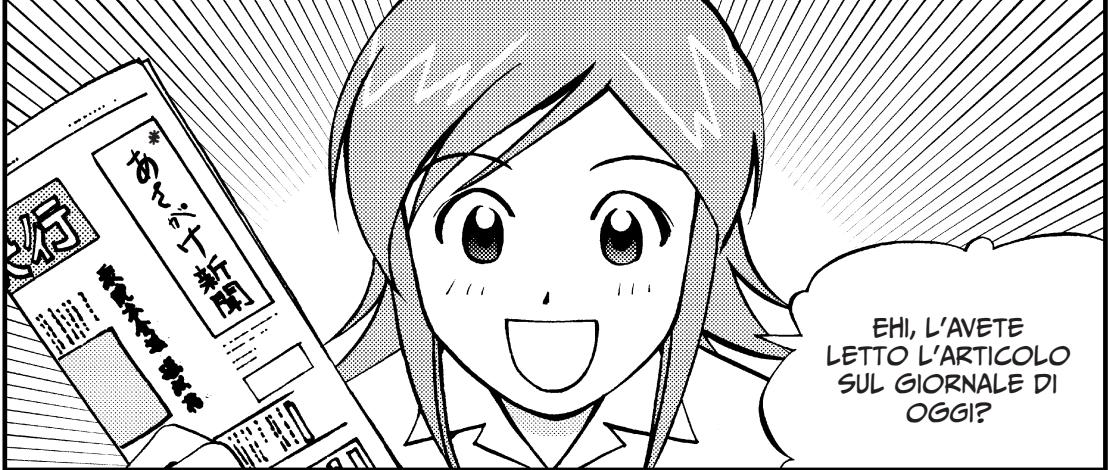
## ESERCIZI

- Per ogni numero naturale  $n$ , calcolare la derivata  $f'(x)$  di  $f(x) = \frac{1}{x^n}$ .
- Trovare gli estremi di  $f(x) = x^3 - 12x$ .
- Calcolare la derivata di  $f'(x)$  of  $f(x) = (1 - x)^3$ .
- Calcolare il massimo valore di  $g(x) = x^2(1 - x)^3$  sull'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ .

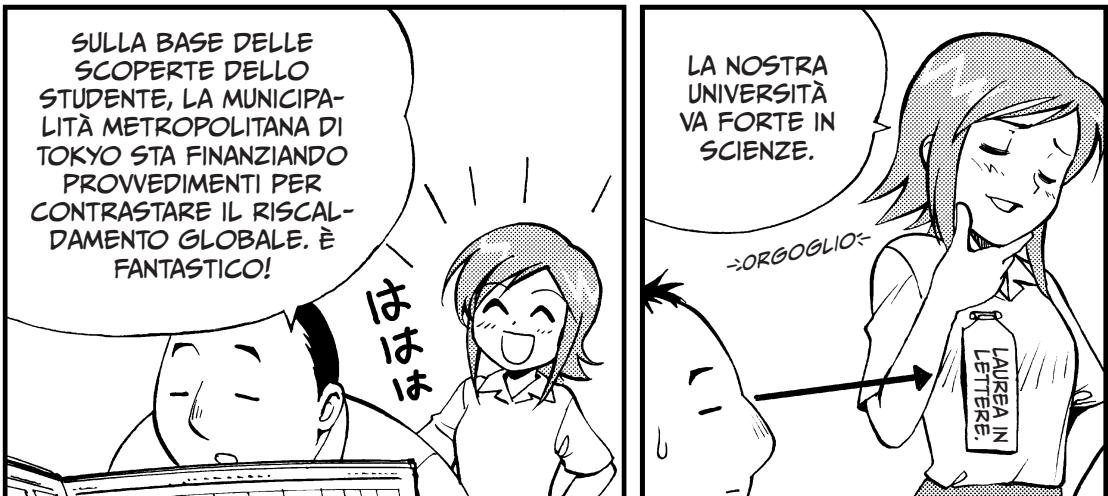
**3**

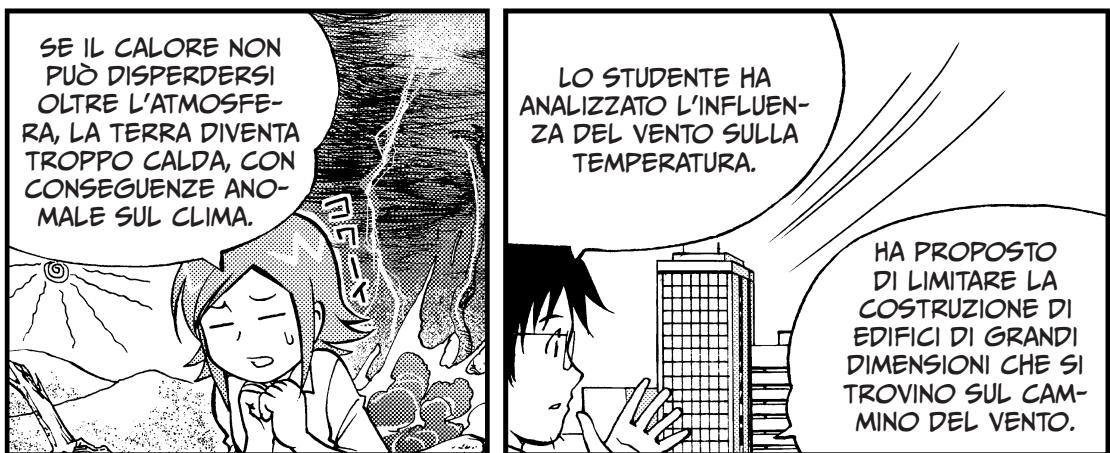
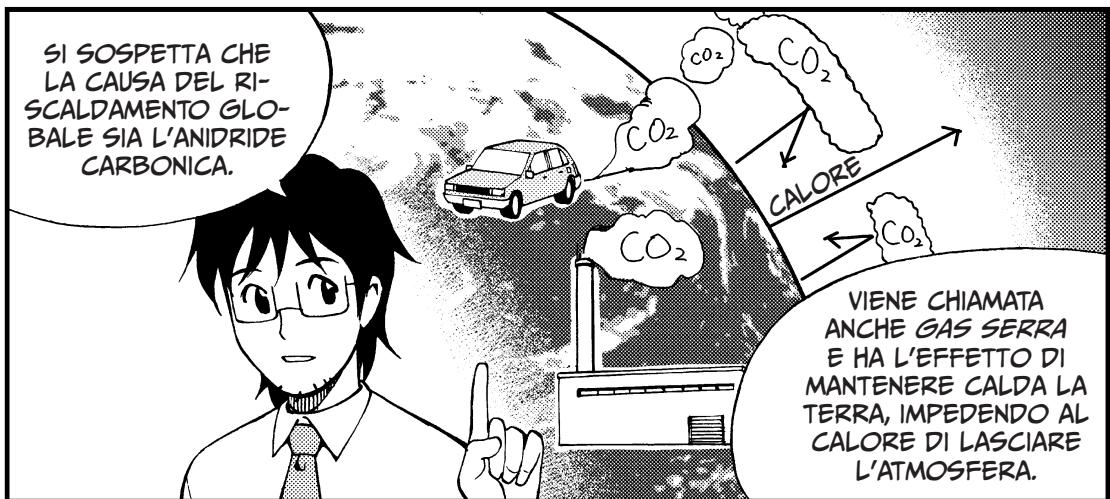
**INTEGRIAMO LE FUNZIONI!**

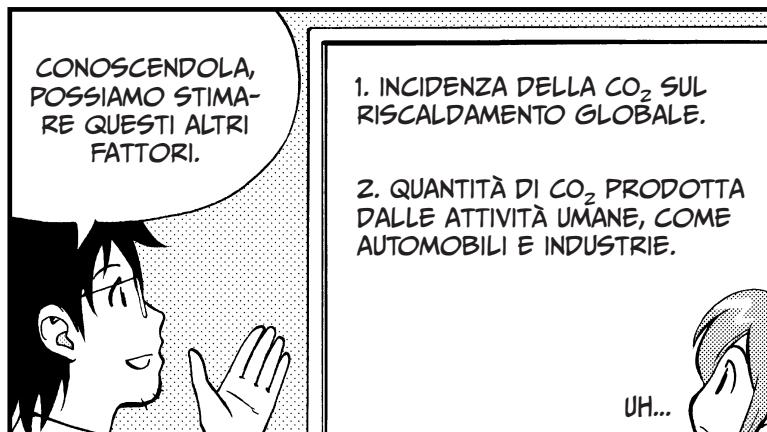
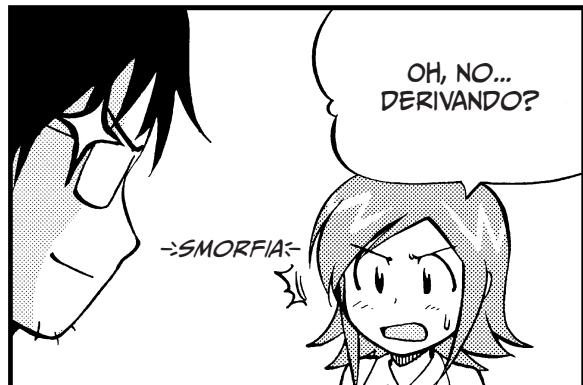


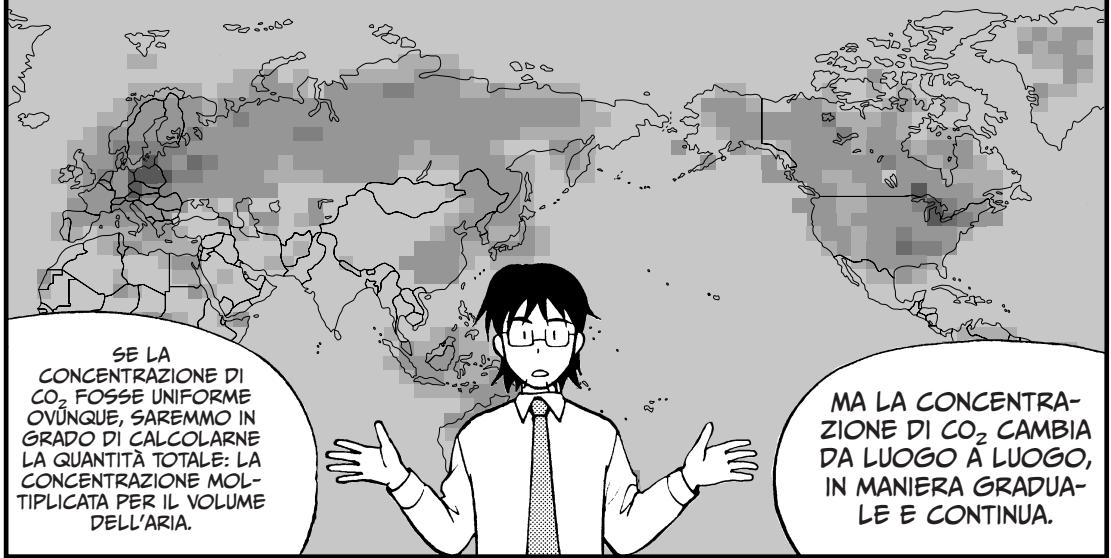


\*ASAGAKE TIMES

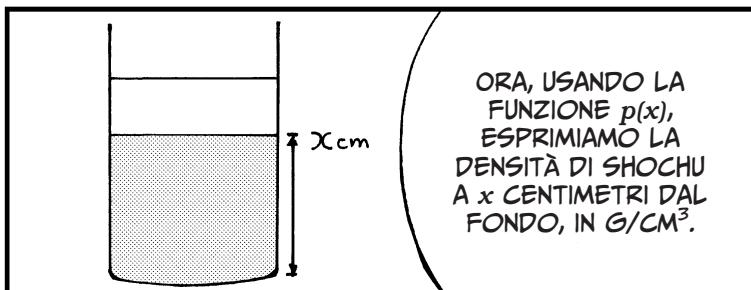
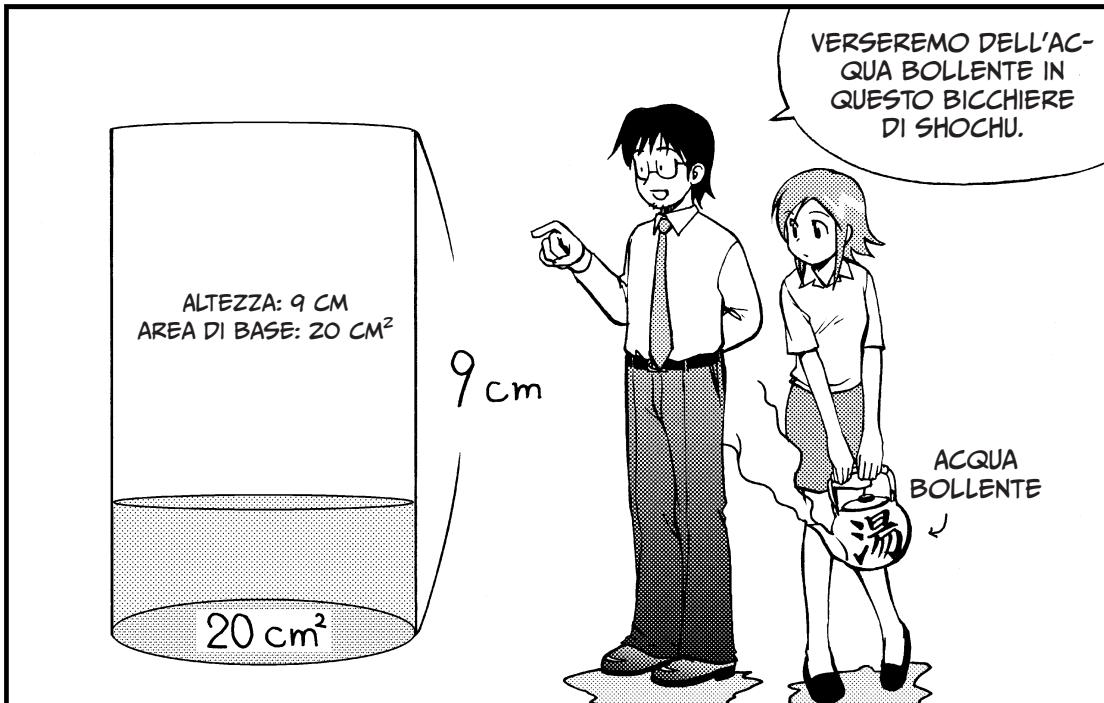


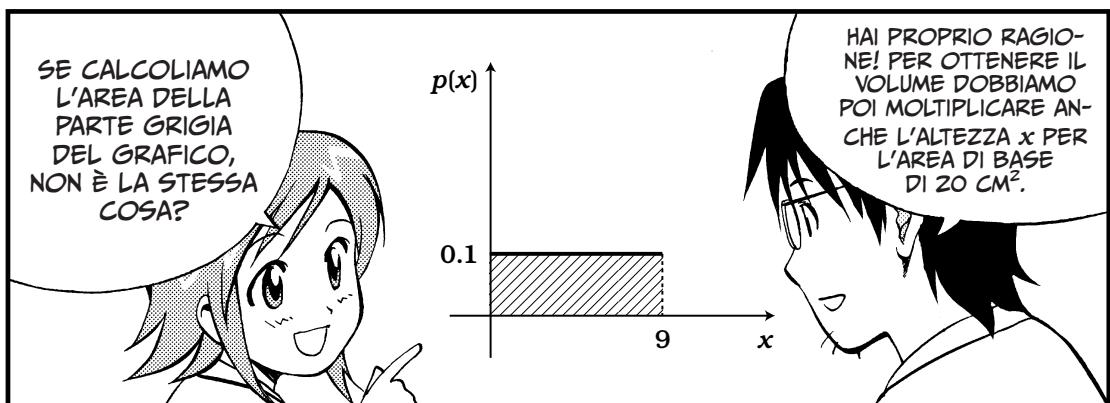
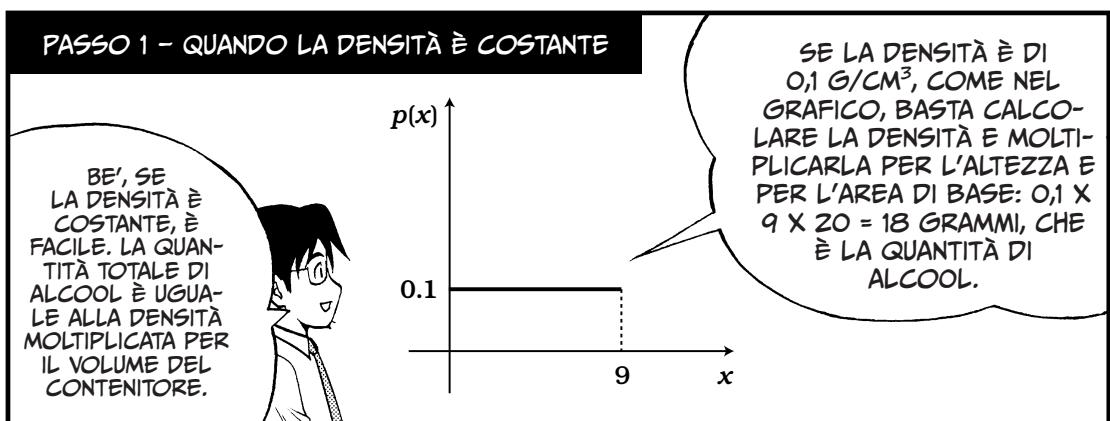
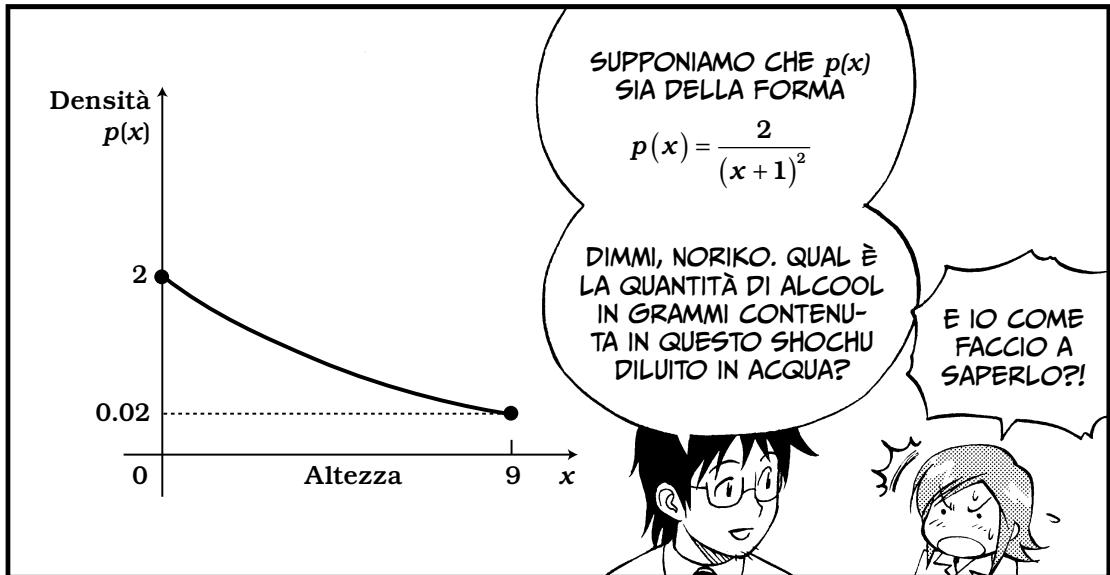




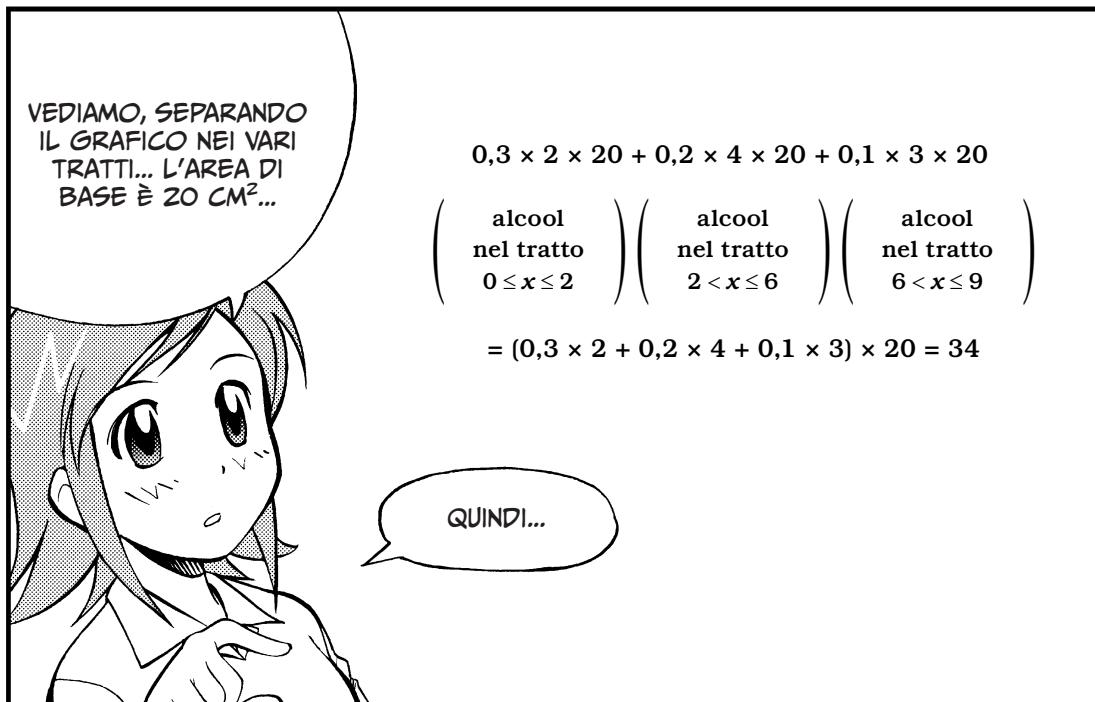
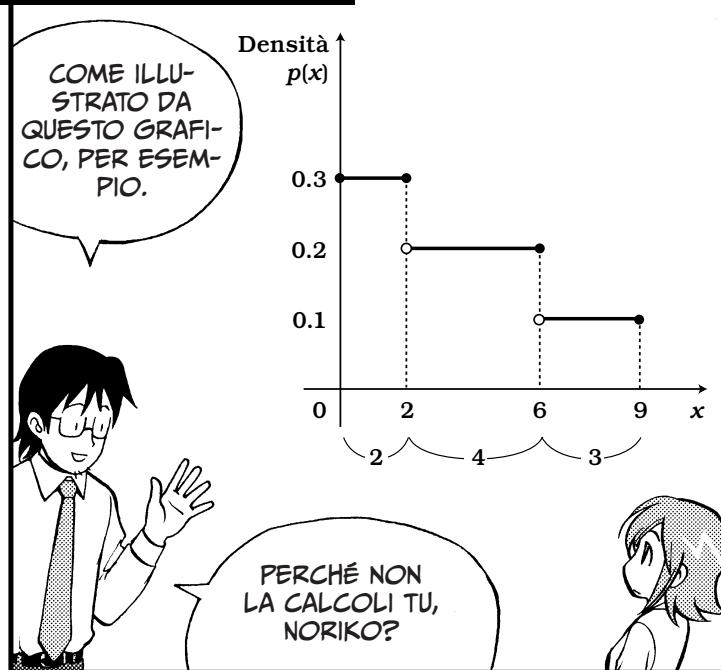


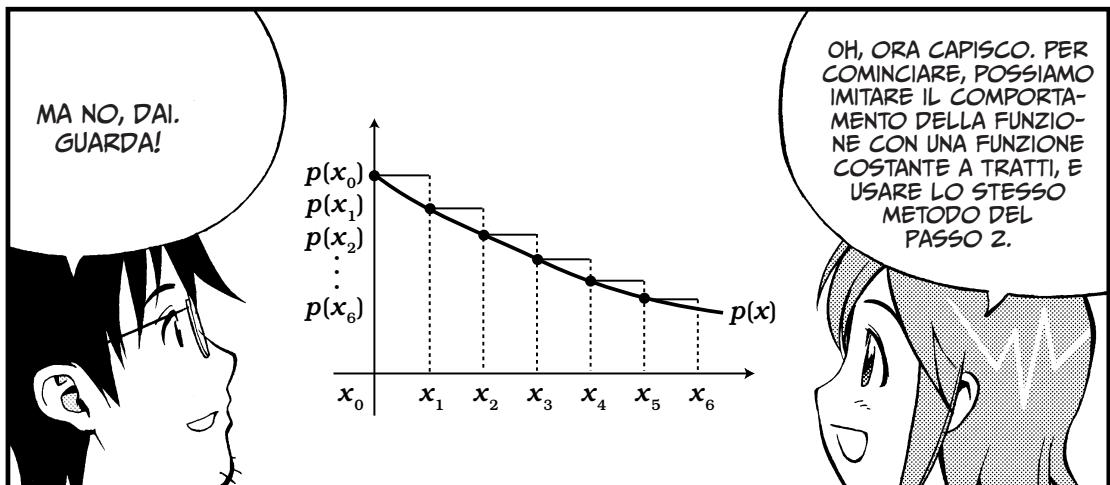
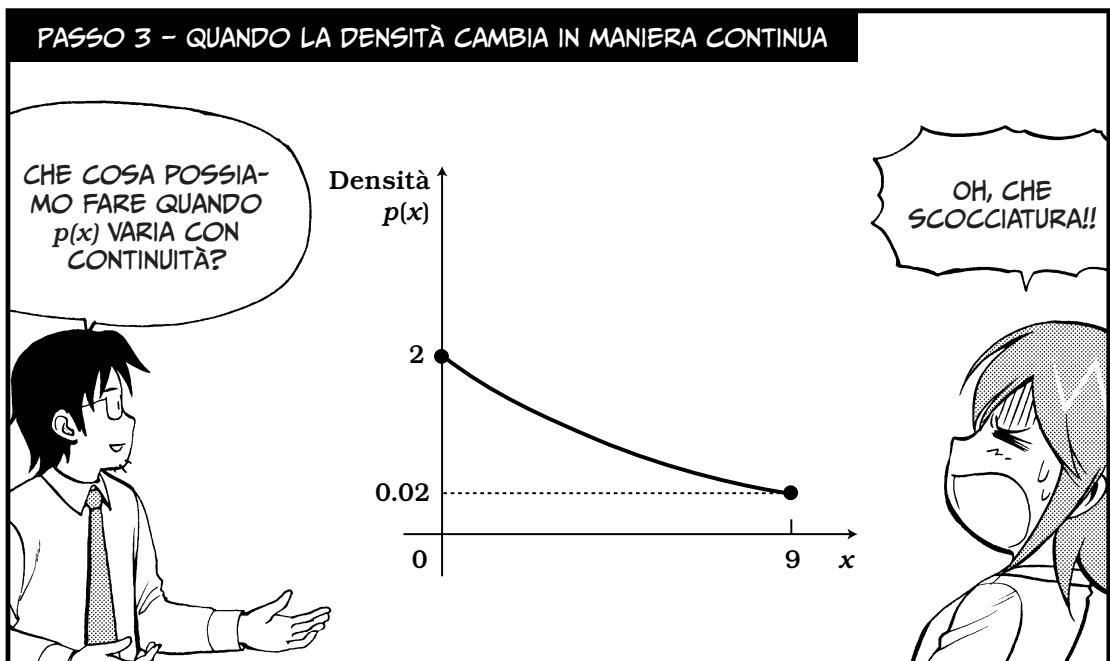
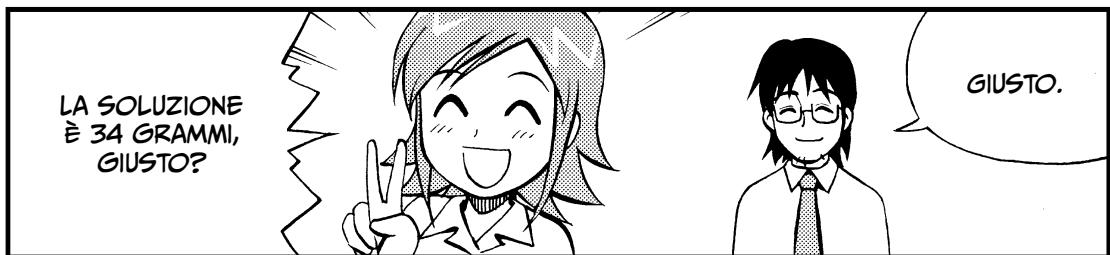
## IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO





## PASSO 2 - QUANDO LA DENSITÀ È COSTANTE A TRATTI





ESATTO!  
SCEGLIENDO  
SULL'ASSE DELLE  
X DEI PUNTI  $x_0$ ,  
 $x_1$ ,  $x_2$ ... E  $x_6$ .

La densità è costante tra  $x_0$  e  $x_1$   
e vale  $p(x_0)$ .

La densità è costante tra  $x_1$  e  $x_2$   
e vale  $p(x_1)$ .

La densità è costante tra  $x_2$  e  $x_3$   
e vale  $p(x_2)$ .

LA QUANTITÀ DI AL-  
COOL CALCOLATA  
IN QUESTO MODO È  
UN'APPROSSIMAZIO-  
NE DEL QUANTITATIVO  
ESATTO.

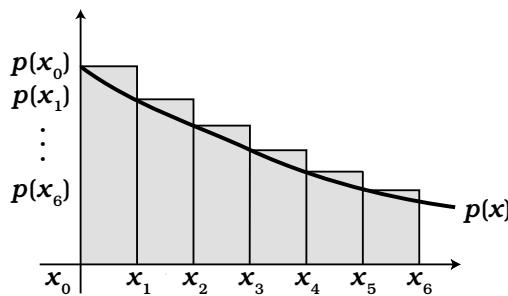
IN QUESTO MODO,  
SIMULIAMO  $p(x)$  CON  
UNA FUNZIONE COSTAN-  
TE A TRATTI.

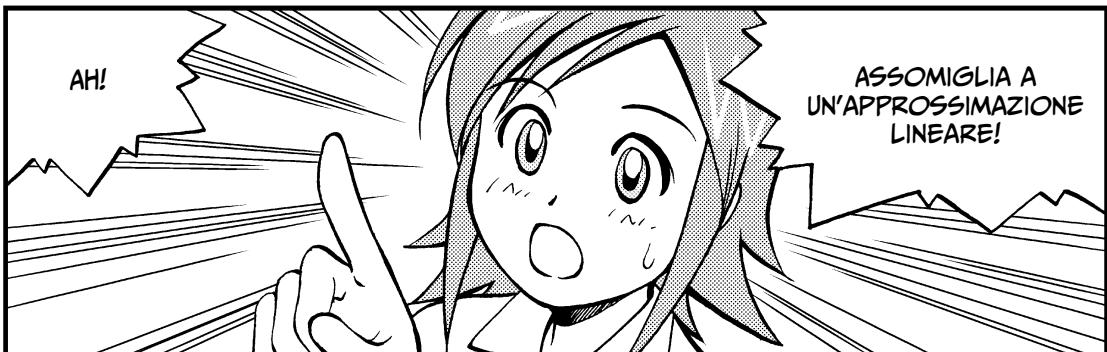
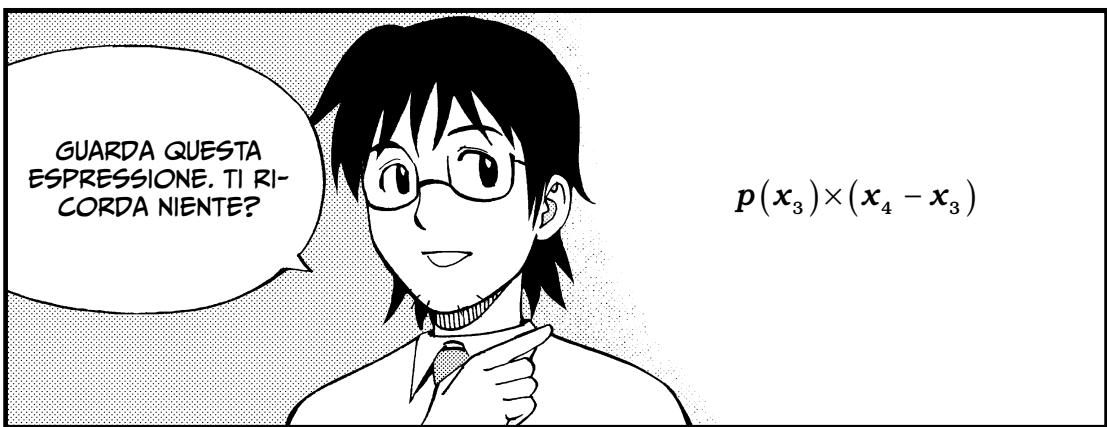
E QUESTI SONO  
I CALCOLI COM-  
PLETI, VERO?

$$\begin{aligned} & p(x_0) \times (x_1 - x_0) \times 20 \\ & p(x_1) \times (x_2 - x_1) \times 20 \\ & p(x_2) \times (x_3 - x_2) \times 20 \\ & p(x_3) \times (x_4 - x_3) \times 20 \\ & p(x_4) \times (x_5 - x_4) \times 20 \\ & + p(x_5) \times (x_6 - x_5) \times 20 \end{aligned}$$

Quantità approssi-  
mativa di alcool

ESATTO. L'AREA GRI-  
GIA DELLA FUNZIONE  
COSTANTE A TRATTI È  
LA SOMMA DI QUESTE  
QUANTITÀ (MA SENZA  
MOLTIPLICARE PER  
L'AREA DI BASE DI  
20 CM<sup>2</sup>).





## PASSO 4 - RIPASSIAMO LE APPROXIMAZIONI LINEARI

Se  $f'(x)$  è la derivata di  $f(x)$ , allora in un intorno di  $x = a$  abbiamo

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a).$$

Possiamo scriverlo come

$$\textcircled{1} \quad f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a)$$

ovvero *(variazione di f) ≈ (derivata di f) × (variazione di x)*

Se l'intervallo tra due valori consecutivi come  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_6$  è abbastanza piccolo, allora  $x_1$  è vicino a  $x_0$ ,  $x_2$  è vicino a  $x_1$ , e così via.

Introduciamo ora una nuova funzione,  $q(x)$ , la cui derivata è  $p(x)$ :

$$q'(x) = p(x).$$

Applicando **1** a  $q(x)$ , abbiamo

*(Variazione di q) ≈ (derivata di q) × (variazione di x)*

$$q(x_1) - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$q(x_2) - q(x_1) \approx p(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$q(x_1) - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$q(x_2) - q(x_1) \approx p(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$\cancel{q(x_3) - q(x_2)} \approx p(x_2)(x_3 - x_2)$$

$$\cancel{q(x_4) - q(x_3)} \approx p(x_3)(x_4 - x_3)$$

$$\cancel{q(x_5) - q(x_4)} \approx p(x_4)(x_5 - x_4)$$

$$\underline{+ q(x_6) - q(x_5)} \approx p(x_5)(x_6 - x_5)$$

$$q(x_6) - q(x_0) \approx \text{La somma}$$

QUINDI DOBBIAMO  
TROVARE UNA FUN-  
ZIONE TALE CHE  
 $q'(x) = p(x)$

Sostituendo  $x_6 = 9$  and  $x_0 = 0$ , otteniamo

Quantità approssimativa di alcool = somma × 20

$$\{q(9) - q(0)\} \times 20$$

$$\{q(9) - q(0)\} \times 20$$



## PASSO 5 – DALL'APPROSSIMAZIONE AL VALORE ESATTO

ABBIAMO APPENA OTTENUTO LA SEGUENTE RELAZIONE TRA LE ESPRESSIONI RIPORTATE NELLA PAGINA PRECEDENTE.



La quantità di alcool approssimata ( $\div 20$ ) data dalla funzione a tratti:

$$p(x_0)(x_1 - x_0) + p(x_1)(x_2 - x_1) + \dots$$

②

$\approx$

$$q(9) - q(0)$$

(Costante)

①  $\approx$

La quantità esatta di alcool ( $\div 20$ )

MA SE AUMENTIAMO IL NUMERO DEI PUNTI  $x_0, x_1, x_2, x_3$  E COSÌ VIA, ALL'INFINITO...

POSSIAMO DIRE CHE L'ESPRESSIONE ① DA "APPROSSIMATA" DIVENTA "ESATTA".

MA POICHÉ LA SOMMA DELLE ESPRESSIONI APPROSSIMA IL VALORE COSTANTE  $q(9) - q(0)$

La somma di  $p(x_i)(x_{i+1} - x_i)$   
Per un numero infinito di  $x_i$

=

$$q(9) - q(0)$$

Quantità esatta di alcool ( $\div 20$ )

=

=

OTteniamo l'espressione che abbiamo scritto\*.

\*A PAGINA 94 LA RICAVEREMO IN MANIERA PIÙ RIGOROSA.

## PASSO 6 – $p(x)$ È LA DERIVATA DI $q(x)$



Supponiamo che  $q(x) = -\frac{2}{x+1}$ , allora  $q'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} = p(x)$

In altre parole,  $p(x)$  è la derivata di  $q(x)$ .  
 $q(x)$  viene chiamata la *primitiva* di  $p(x)$ .



Quantità di alcool

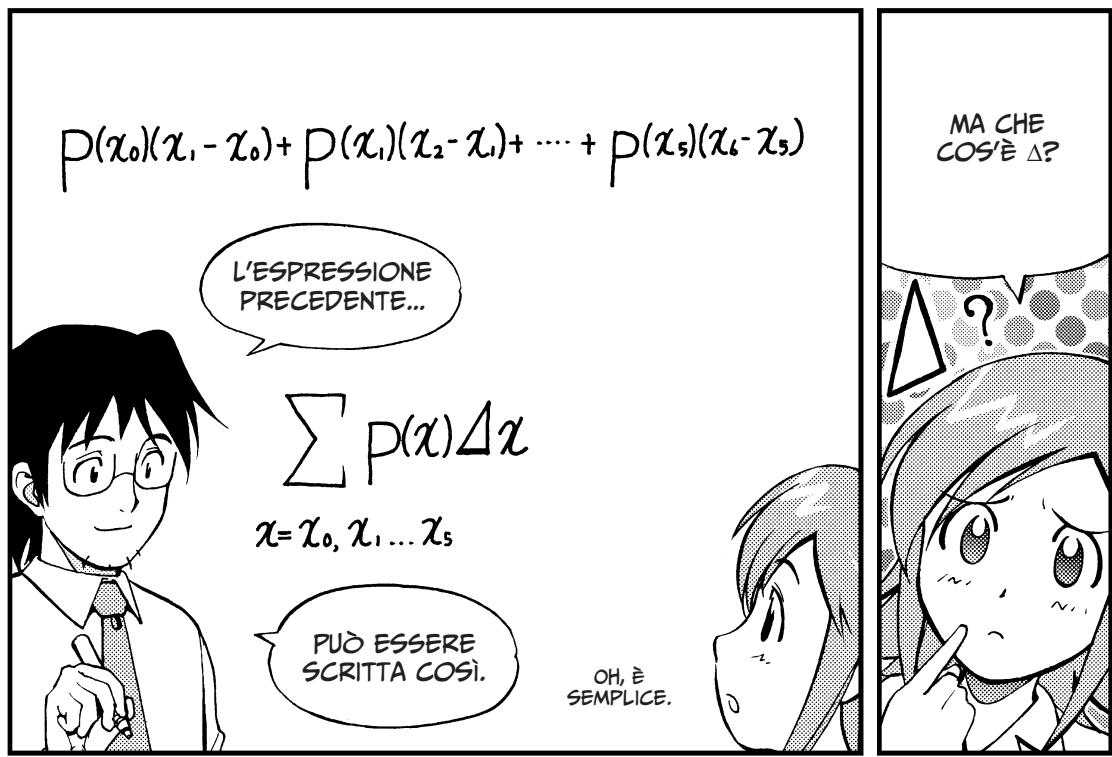
$$\begin{aligned} &= \{q(9) - q(0)\} \times 20 \\ &= \left\{ -\frac{2}{9+1} - \left( -\frac{2}{0+1} \right) \right\} \times 20 \\ &= 36 \text{ grammi} \end{aligned}$$



LA SOMMA INFINTA CHE ABBIAMO SVOLTO...



## APPLICHIAMO IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO



È UN'ALTRA LETTERA GRECA, SI LEGGE "SIGMA" E USATA IN QUESTO MODO

$$\sum_{x=x_0, x_1, \dots, x_5}$$

INDICA L'OPERAZIONE  
"SOMMA DA  $x_0=0$   
A  $x_5=9$ ".

PERCIÒ,  
CHE COSA SIGNIFICA

$$\sum_{x=x_0, x_1, \dots, x_5} p(x) \Delta x$$

NORIKO?

INDICA LA SOMMA DEI PRODOTTI TRA VALORI DI  $p$  NEI PUNTI  $x$  PER LA DISTANZA DI  $x$  DAL PUNTO SUCCESSIVO.

ESATTO. ED È  
L'EQUAZIONE CHE  
ABBIAMO VISTO IN  
FONDO A PAGINA  
89.

IL PROSSIMO SIMBOLO CI SERVIRÀ PER SEMPLIFICARE ULTERIORMENTE QUESTA EQUAZIONE.

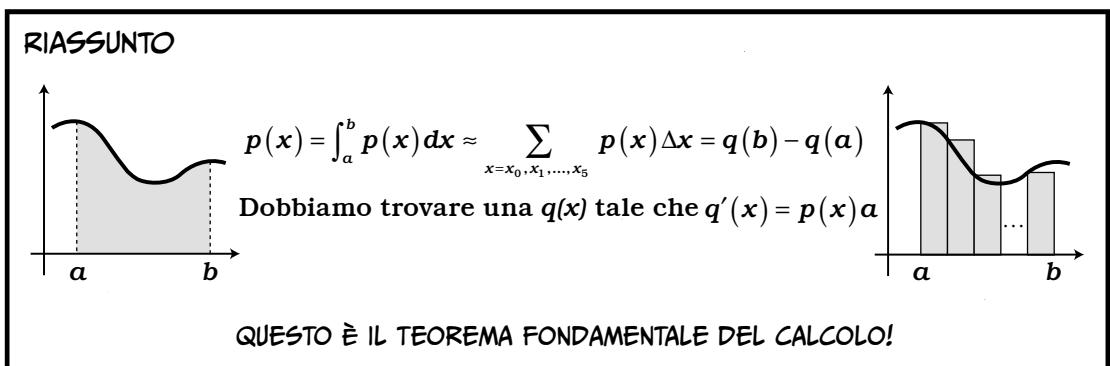
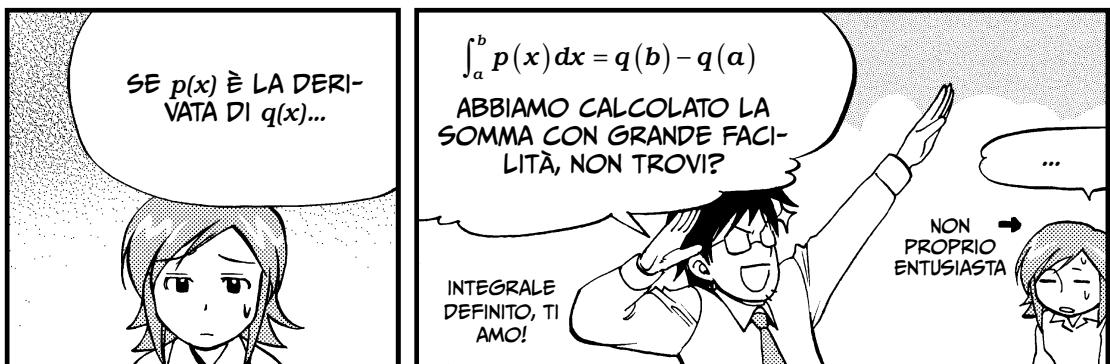
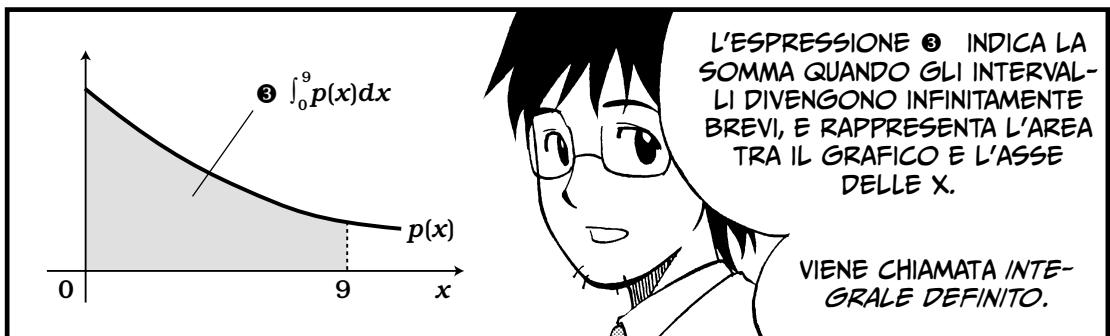
SICCOME RAPPRESENTA  
LA SOMMA DI UN NUMERO FINITO DI TERMINI,  
PASSANDO ALL'INFINITO LO ARROTONDIAMO.

AR... ROTONDIAMO?

SÌ, COSÌ...



$$\sum p(x) \Delta x \rightarrow \int_0^q p(x) \Delta x \rightarrow \int_0^q p(x) dx$$



## UNA SPIEGAZIONE PIÙ RIGOROSA DEL PASSO 5

Nella spiegazione a pagina 89 abbiamo usato l'espressione  $q(x_1) - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0)$ , una stima "rozza" del valore esatto. Per chi non fosse soddisfatto da tanta approssimazione, ora saremo un po' più precisi e, grazie al teorema del valor medio, otterremo il medesimo risultato.



Per cominciare, troveremo una funzione  $q(x)$  tale che  $q'(x) = p(x)$ .

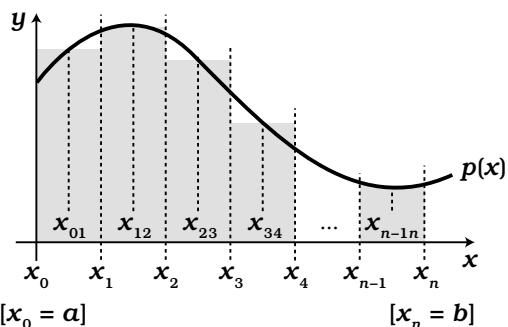
Fissiamo sull'asse delle  $x$  dei punti  $x_0 (= a)$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , ...,  $x_n (= b)$

Poi consideriamo il punto  $x_{01}$  tra  $x_0$  e  $x_1$  per cui  $q(x_1) - q(x_0) \approx q'(x_{01})(x_1 - x_0)$ .

Questo punto esiste per il teorema del valor medio.

Analogamente, consideriamo il punto  $x_{12}$  tra  $x_1$  e  $x_2$  per cui

$$q(x_2) - q(x_1) \approx q'(x_{12})(x_2 - x_1)$$



Proseguendo con questa operazione, otteniamo

$$\begin{aligned}
 q(x_1) - q(x_0) &= q'(x_{01})(x_1 - x_0) &= p(x_{01})(x_1 - x_0) \\
 q(x_2) - q(x_1) &= q'(x_{12})(x_2 - x_1) &= p(x_{12})(x_2 - x_1) \\
 q(x_3) - q(x_2) &= q'(x_{23})(x_3 - x_2) &= p(x_{23})(x_3 - x_2) \\
 &\dots &\dots &\dots \\
 + \underline{q(x_n) - q(x_{n-1})} &= \underline{q'(x_{n-1n})(x_n - x_{n-1})} &= \underline{p(x_{n-1n})(x_n - x_{n-1})} \\
 q(x_n) - q(x_0) &\leftarrow \boxed{\text{Sempre uguali}} \rightarrow \text{Approssimazione dell'area} \\
 q(b) - q(a) &\leftarrow \boxed{\text{Uguali}} \rightarrow \text{Area esatta} \\
 &\downarrow &&\downarrow \text{Sezioni infinitamente sottili}
 \end{aligned}$$

Questo schema è equivalente a quello del Passo 5

## CALCOLARE CON GLI INTEGRALI

### FORMULA 3.1 – LE FORMULE PRINCIPALI

$$\textcircled{1} \quad \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Possiamo unire intervalli adiacenti degli integrali definiti della stessa funzione.

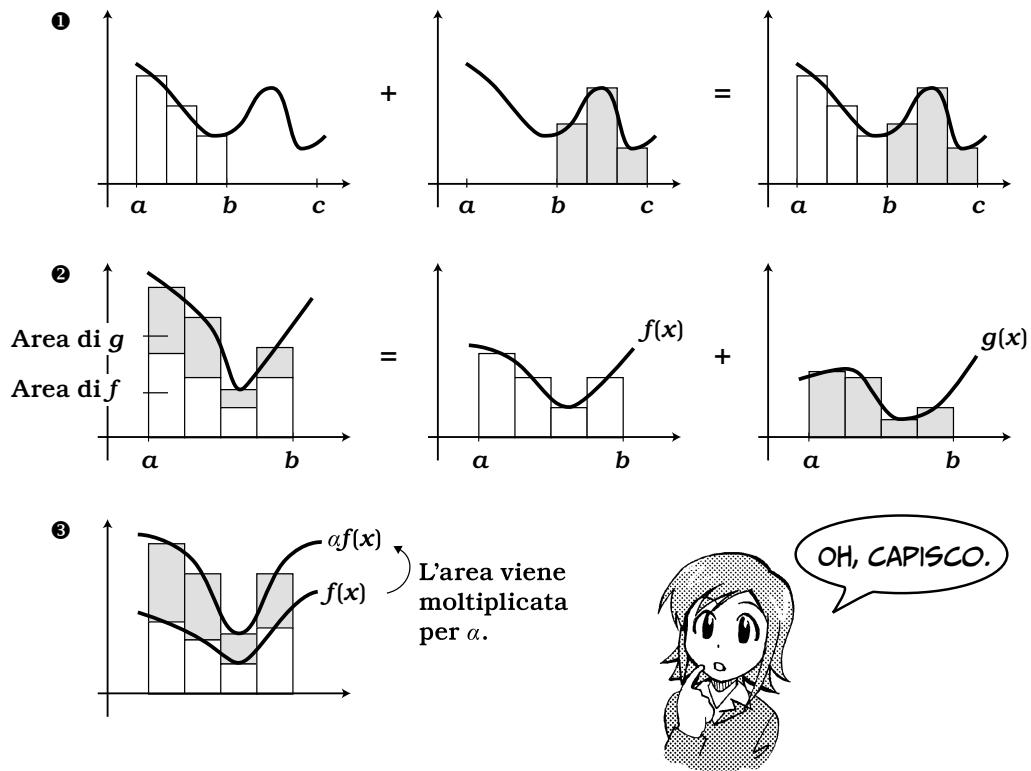
$$\textcircled{2} \quad \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

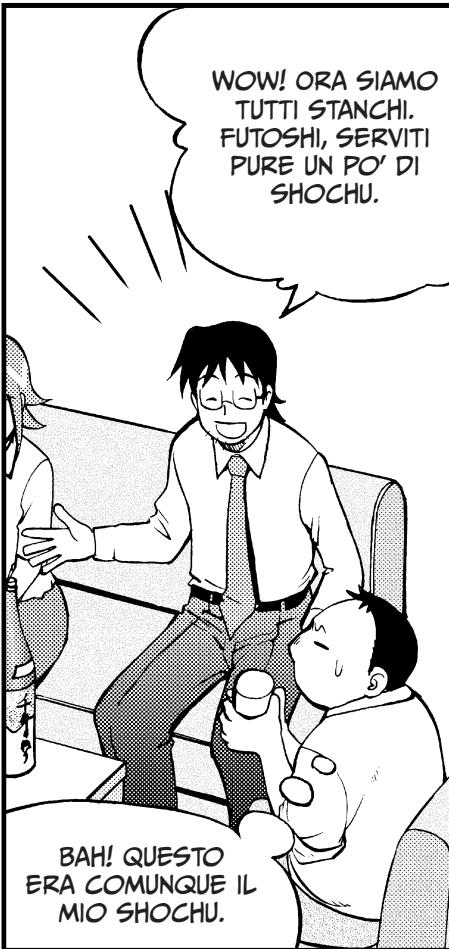
L'integrale definito di una somma di funzioni è uguale alla somma degli integrali definiti delle singole funzioni.

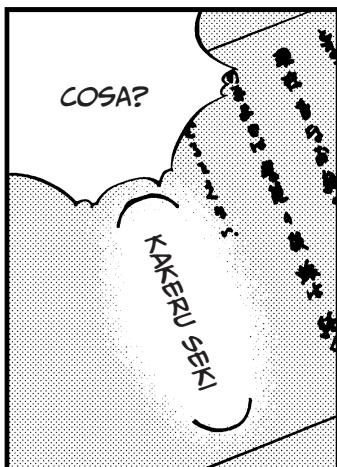
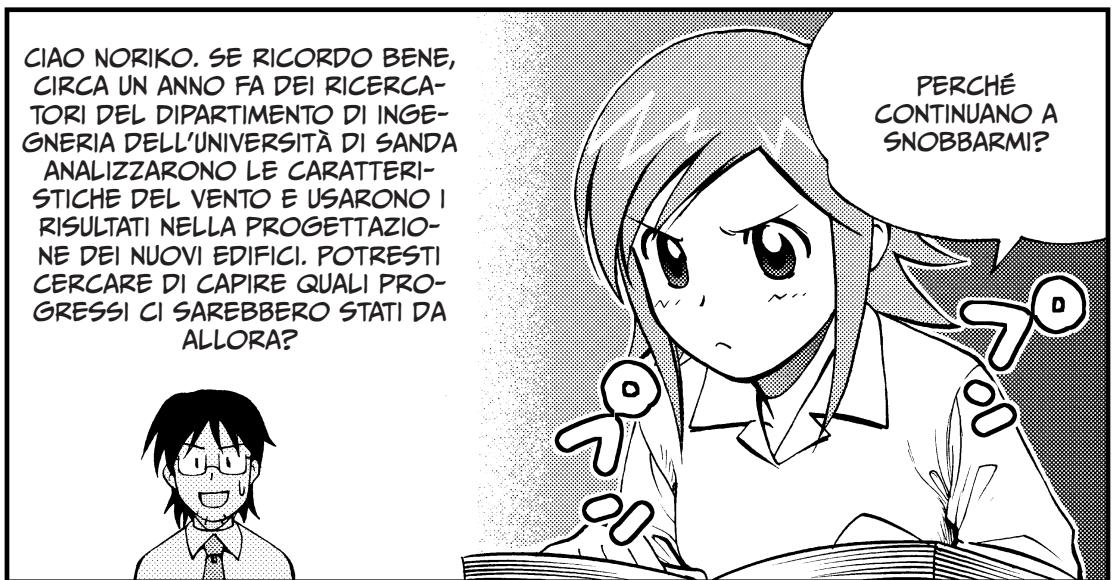
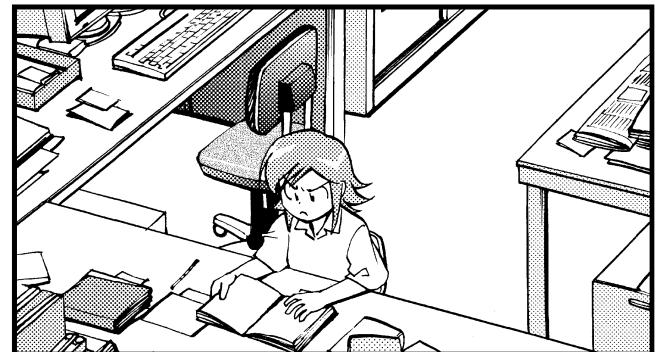
$$\textcircled{3} \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

Una costante moltiplicativa può essere “portata fuori” dal simbolo di integrale.

Le espressioni da **1** a **3** diventano intuitive se ne rappresentiamo i grafici.



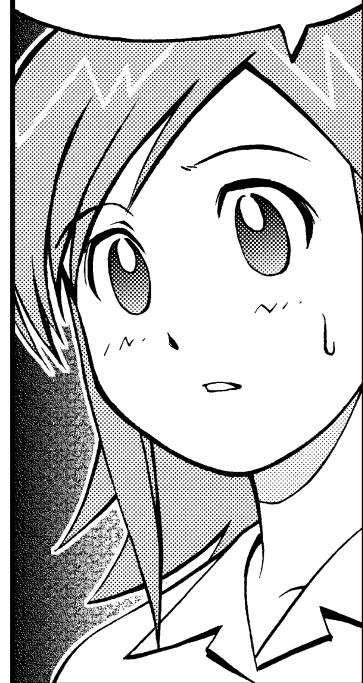




# Baia Inquinata

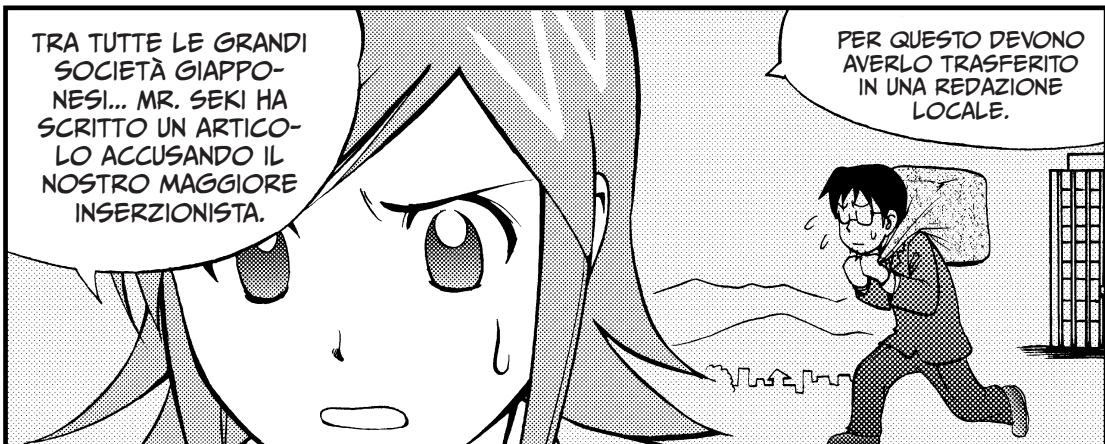
La causa: un  
versamento di scorie  
della Burnham  
Chemical Products

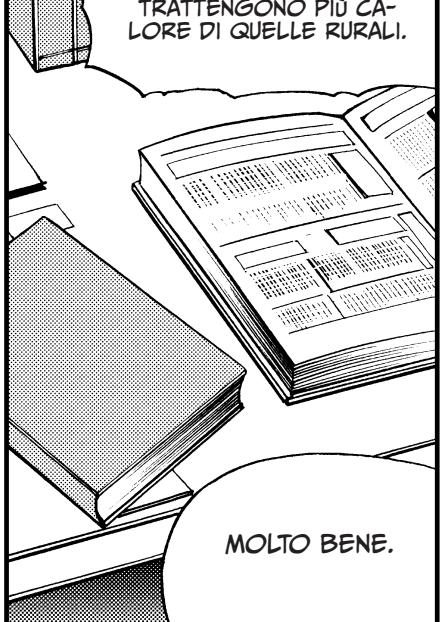
BURNHAM... UNO  
DEGLI INSERZIONI-  
STI DELL'ASAGAKE  
TIMES.

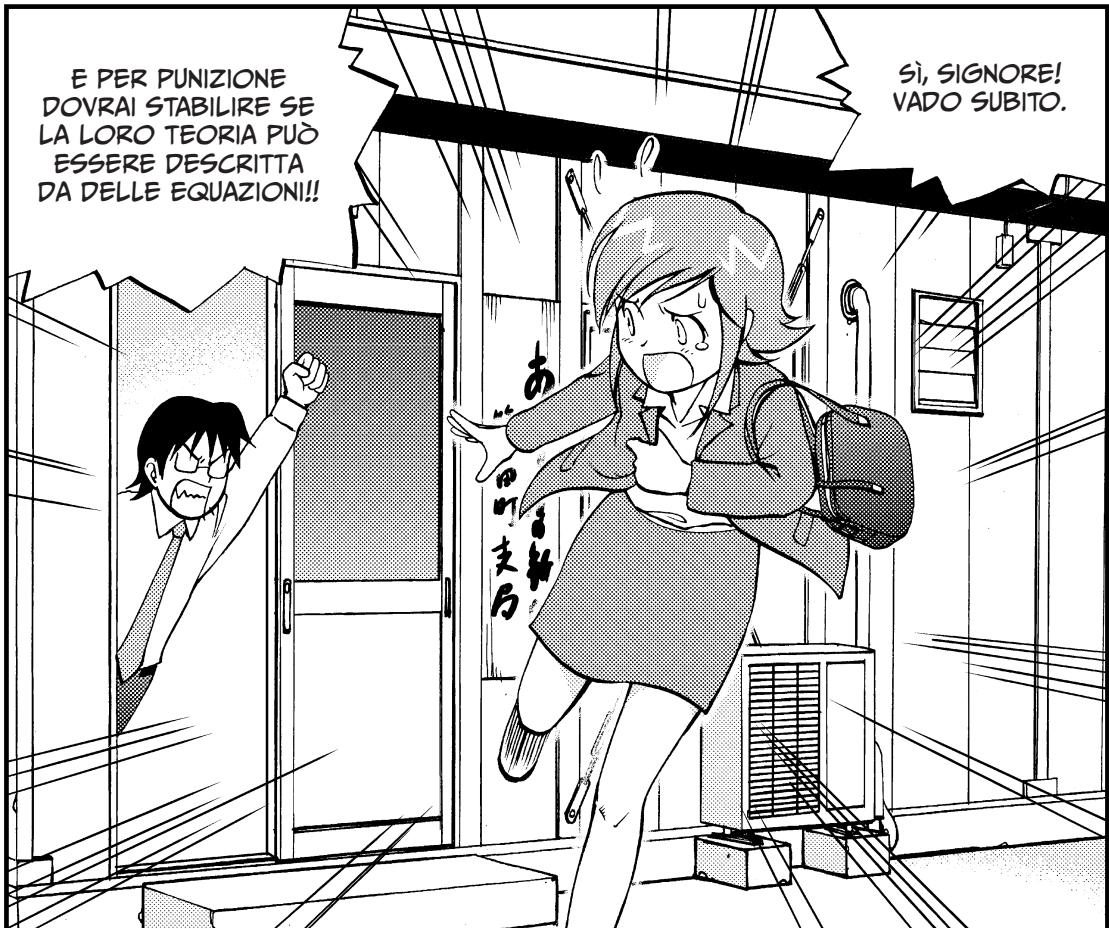


TRA TUTTE LE GRANDI  
SOCIETÀ GIAPPO-  
NESI... MR. SEKI HA  
SCRITTO UN ARTICO-  
LO ACCUSANDO IL  
NOSTRO MAGGIORE  
INSERZIONISTA.

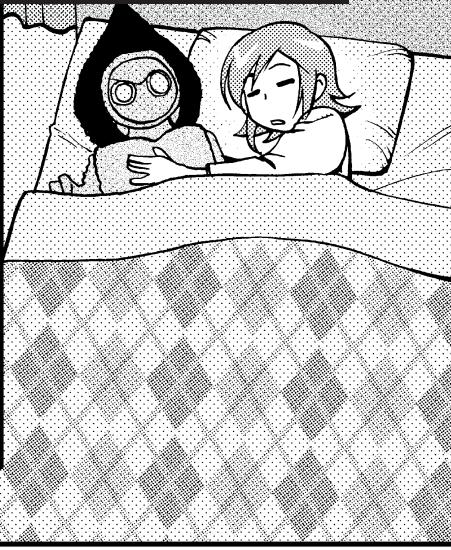
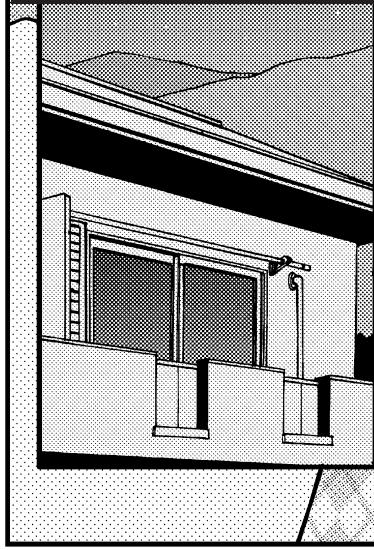
PER QUESTO DEVONO  
AVERLO TRASFERITO  
IN UNA REDAZIONE  
LOCALE.





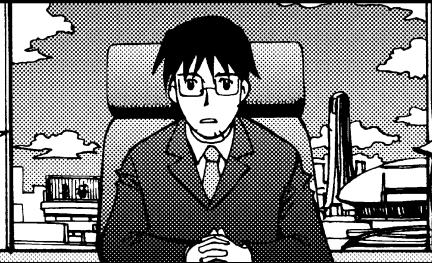


APPLICHIAMO IL TEOREMA FONDAMENTALE



...QUINDI, STIAMO PARLANDO DI DOMANDA E OFFERTA, GIUSTO?

PRECISAMENTE. IN ECONOMIA, SI RITIENE CHE L'INTERSEZIONE TRA LA CURVA DELLA DOMANDA E QUELLA DELL'OFFERTA...



...DETERMINI PREZZO E QUANTITÀ A CUI LE AZIENDE PRODUCONO I BENI.

CERTO, L'IDEA DI BASE È CHIARA.

QUESTO NON VUOL DIRE CHE LE ATTIVITÀ SI SVOLGANO EFFETTIVAMENTE NEL PUNTO D'INTERSEZIONE.



ANCHE SE IN REALTÀ, LA SOCIETÀ NE RICAVA I MAGGIORI BENEFICI SE I COMMERCI RISPETTANO QUESTE SITUAZIONI IDEALI.



E POSSIAMO CAPIRLO MEGLIO USANDO IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO.

## LA CURVA DELL'OFFERTA



PER COMINCIARE, VEDIAMO COME LE IMPRESE CERCHINO DI MASSIMIZZARE IL PROFITTO IN UN MERCATO PERFETTAMENTE CONCORRENZIALE. COMINCIAMO CON LA CURVA DELL'OFFERTA.

L'utile  $P(x)$  derivante dalla produzione di  $x$  unità di un bene è dato dalla funzione seguente:

$$\begin{array}{c} P(x) \\ p \\ x \\ C(x) \end{array}$$

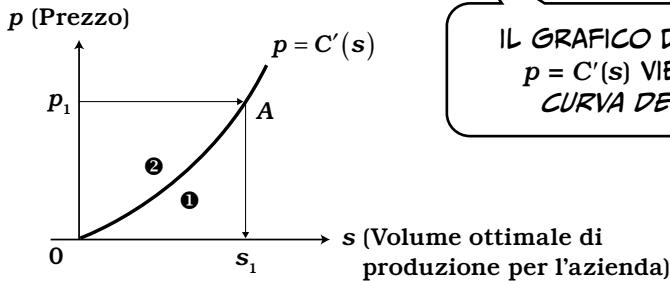
(Profitto) = (Prezzo) × (Quantità prodotta) - (Costo) =  $px - C(x)$

dove  $C(x)$  sono i costi di produzione.

Supponiamo che il valore  $x$  per cui l'utile  $P(x)$  è massimo sia la quantità prodotta  $s$ .

Lo scopo di un'azienda è quello di massimizzare il proprio utile. Ricordiamo che per trovare gli estremi di una funzione poniamo a zero la sua derivata: questo significa che per la produzione  $s$  di eventuale massimo dell'utile abbiamo

$$P'(s) = p - C'(s) = 0$$



IL GRAFICO DELLA FUNZIONE  
 $p = C'(s)$  VIENE CHIAMATO  
CURVA DELL'OFFERTA.

Il prezzo  $p_1$  corrisponde al valore ottimale di produzione  $s_1$ .

L'area del rettangolo delimitato dai quattro punti  $(p_1, A, s_1)$  e l'origine equivale al prezzo unitario moltiplicato per la quantità prodotta. In teoria, questo rappresenta il ricavo lordo dell'azienda, prima di sottrarre i costi di produzione, ma guardiamo bene: la porzione ❶ del grafico corrisponde ai costi di produzione, che possiamo ricavare con un integrale.

$$\int_0^{s_1} C'(s) ds = C(s_1) - C(0) = C(s_1) = \text{Costi}$$

Qui applichiamo il teorema fondamentale.      Assumiamo per semplicità  $C(0) = 0$ .

Questo significa che l'utile netto è rappresentato dall'area della regione ❷, cioè l'area dell'intero rettangolo meno ❶.

### CURVA DELLA DOMANDA

Ora prendiamo in considerazione le esigenze dei consumatori.

Quando un consumatore acquista  $x$  unità di un bene, i vantaggi  $B(x)$  sono espressi dall'equazione

$$B(x) = \text{Valore totale dei consumi} - (\text{Prezzo} \times \text{Quantità}) = u(x) - px$$

Dove  $u(x)$  è una funzione che descrive il valore dei beni per tutti i consumatori.

Questi ultimi, acquisteranno la massima quantità di beni quando sarà massimizzata anche  $B(x)$ .

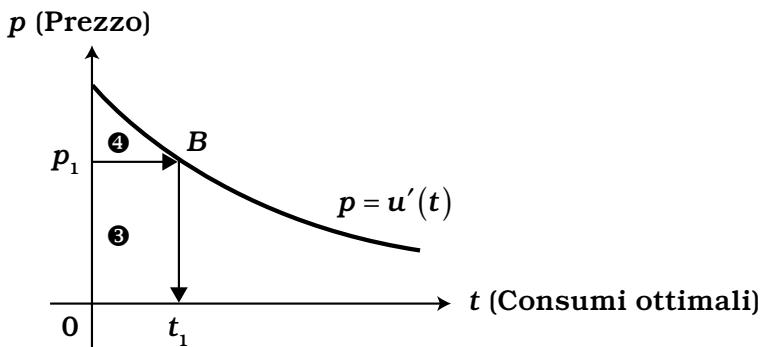
Se  $t$  è il valore dei consumi che annulla la derivata  $B'(t)$ , otteniamo l'equazione\*

$$B'(t) = u'(t) - p = 0$$

LA FUNZIONE  $p=u'(t)$  VIENE CHIAMATA CURVA DELLA DOMANDA.



\* Notiamo ancora una volta che siccome i consumatori desiderano massimizzare i propri benefici, stiamo cercando dei punti di estremo (quelli per cui  $B'(t)=0$ ).



Consideriamo ora l'area del rettangolo ③: essa è data dal prezzo moltiplicato per i consumi. In altre parole, si tratta della spesa totale effettuata dai consumatori in cambio del prodotto.

La somma delle aree ③ e ④ si può ottenere per integrazione.

$$\int_0^{t_1} u'(t) dt = u(t_1) - u(0) = u(t_1) \quad \text{= Valore totale dei consumi}$$

Per semplificare,  
supponiamo che  
 $u(0) = 0$ .

Sottraendo l'area del rettangolo ③ dall'integrale da 0 a  $t_1$  determiniamo l'area di ④, cioè i vantaggi dei consumatori.

QUINDI ④ È DATO DAL VALORE TOTALE DEI CONSUMI MENO LA CIFRA PAGATA ③, DICO BENE?

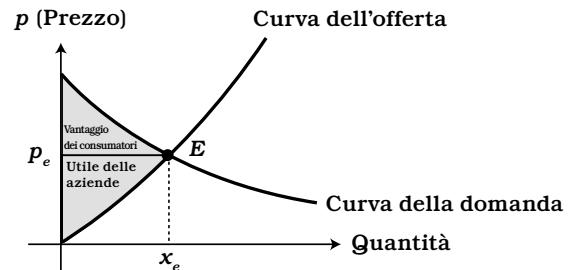
ESATTAMENTE. E ADESSO DIAMO UN'OCCHIATA ALLE CURVE DELLA DOMANDA E DELL'OFFERTA PRESE INSIEME.



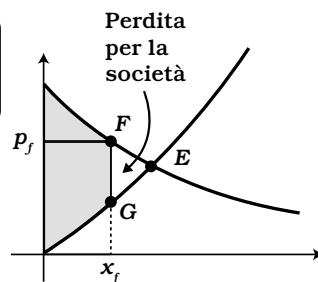
POSSIAMO DIRE CHE GLI UTILI DELL'AZIENDA UNITI AI VANTAGGI DEI CONSUMATORI PRODUCONO IL VANTAGGIO DELLA SOCIETÀ NEL SUO COMPLESSO, RAPPRESENTATO DALL'AREA IN GRIGIO.



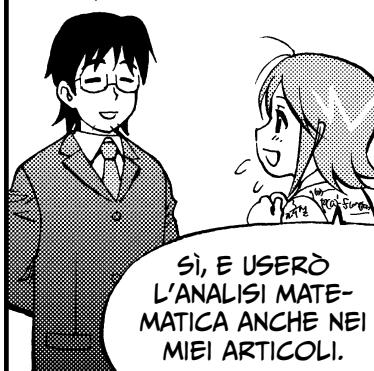
MA CHE COSA SUCCIDE SE LA TRANSAZIONE NON AVVIENE AL PREZZO E PER LA QUANTITÀ CORRISPONDENTI AL PUNTO D'INTERSEZIONE?



I BENEFICI COMPLESSIVI PER LA SOCIETÀ SI RIDUCONO DELLA QUANTITÀ CORRISPONDENTE ALL'AREA VUOTA IN FIGURA.

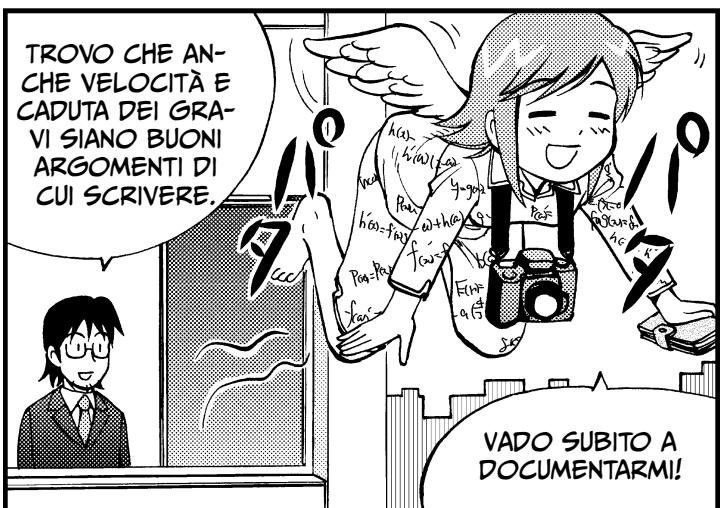


TUTTO CHIARO?



SÌ, E USERÒ L'ANALISI MATEMATICA ANCHE NEI MIEI ARTICOLI.

TROVO CHE ANCHE VELOCITÀ E CADUTA DEI GRAVI SIANO BUONI ARGOMENTI DI CUI SCRIVERE.



VADO SUBITO A DOCUMENTARMI!

## È matematico: l'integrale della velocità (nel tempo) è la distanza!

*L'integrale della velocità = variazione della posizione nel tempo = distanza percorsa*

Ci hanno sempre detto che capendo questa formula saremo in grado di calcolare la distanza percorsa da corpi la cui velocità cambia in maniera costante. Ma sarà vero?

Il nostro promettente neo-acquisto Noriko Hikima ci spiega come stanno le cose nel suo sconvolgente servizio.

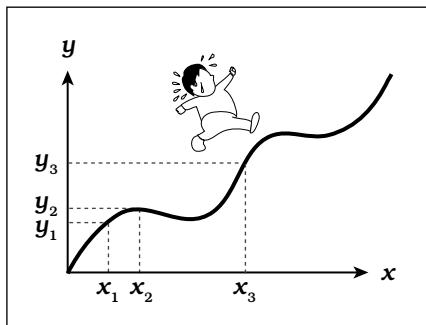


Figura 1: il grafico rappresenta la distanza percorsa nel tempo da Futoshi. Mentre il tempo passa attraverso gli istanti  $y_1, y_2, y_3\dots$  il nostro amico si sposta nelle posizioni  $x_1, x_2, x_3\dots$

Sanda-Cho – Alcuni lettori ricorderanno un nostro precedente esempio, nel quale Futoshi si spostava sopra un tapis-roulant. Altri avranno cercato di rimuovere al più presto la sua immagine sudata e affannata. Ma sicuramente ricorderete che la derivata della distanza è la velocità.

$$\textcircled{1} \quad y = F(x)$$

$$\textcircled{2} \quad \int_a^b v(x) dx = F(b) - F(a)$$

L'equazione **1** descrive la posizione del nostro sudaticcio, sgradevolissimo Futoshi. In altre parole, dopo  $x$  secondi, si sarà trascinato per una distanza  $y$ .

### Integrale della velocità = variazione della posizione

La derivata  $F'(x)$  rappresenta la “velocità istantanea” al secondo  $x$ . Se riscriviamo  $F'(x)$  come  $v(x)$ , (“ $v$ ” come “**velocità**”), il Teorema Fondamentale del Calcolo ci permette di trovare l'espressione **2**! Diamo un'occhiata al grafico di  $v(x)$  nella figura 2-A: la velocità di Futoshi nel tempo. L'area grigia rappresenta l'integrale, cioè l'espressione **2**.

Ma guardiamo anche la figura 2-B, che rappresenta la distanza percorsa da Futoshi nel tempo. Se accostiamo le due figure, notiamo

che l'integrale della velocità è uguale alla differenza nella posizione (cioè alla distanza percorsa)! Osservate attentamente i due grafici: quando la velocità di Futoshi è positiva, la distanza aumenta, e viceversa.

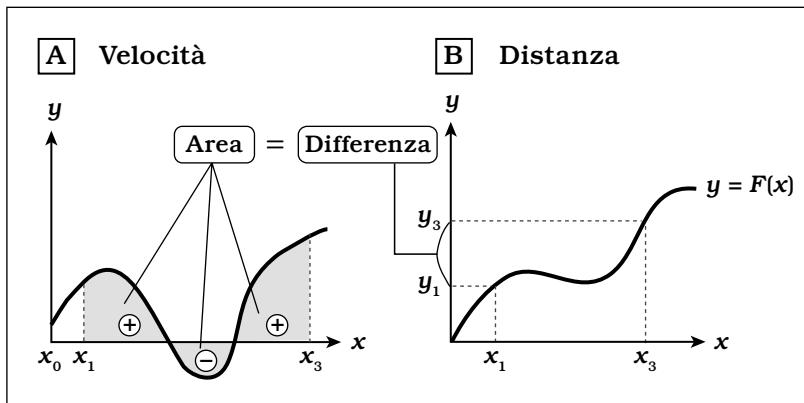


Figura 2

# In caduta libera dalla Torre di Tokyo

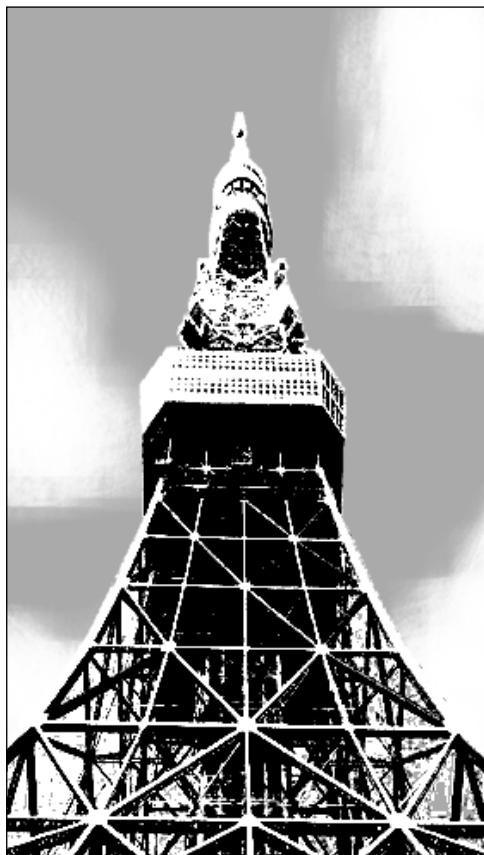
## In quanti secondi a terra?

È facile dare tutto per scontato. Prendiamo per esempio la gravità. Se un oggetto vi sfugge di mano, cadrà a terra. Possiamo dire che il suo moto cambia a ogni istante: accelera a causa dell'attrazione gravitazionale della Terra. Un moto che possiamo descrivere facilmente con un po' di Analisi.

Ma consideriamo una caduta un po' più impegnativa – dalla cima della torre di Tokyo – e vediamo di rispondere alla domanda “quanto tempo impiega un oggetto per arrivare a terra?” (ignorando l’osservazione di Futoshi: “Perché non salite in cima alla torre con un cronometro e lo scoprirete da soli?”).

L'aumento della velocità quando un oggetto si trova in caduta libera viene detto accelerazione gravitazionale ed è di  $9,8 \text{ m/sec}^2$ . In altre parole, ogni secondo la velocità di un oggetto aumenta di  $9,8 \text{ m/sec}$ . Perché l'accelerazione è questa? Be', diciamo che per oggi ci limiteremo ad accettare quello che ci dicono gli scienziati.

L'espressione ① esprime la distanza percorsa da un oggetto che cade per  $T$  secondi. Poiché l'integrale della velocità è la differenza tra posizione iniziale e posizione finale, cioè la distanza percorsa dall'oggetto, possiamo ricavare l'espressione ②. Date un'occhiata alla figura 3: abbiamo calcolato l'area come metà del prodotto dei valori di  $x$  e di  $y$  (in questo caso,  $\frac{1}{2} \times 9,8t \times t$ ). Inoltre, sappiamo che l'altezza della torre di Tokyo è 333 metri. La radice quadrata di  $(333/4,9)$  è circa 8,2, che sono i secondi impiegati da un oggetto per raggiungere il suolo (per semplificità, abbiamo trascurato la resistenza dell'aria).



$$\textcircled{1} \quad F(T) - F(0) = \int_0^T v(x) dx = \int_0^T 9,8(x) dx$$

$$\textcircled{2} \quad 4,9T^2 - 4,9 \times 0^2 = 4,9T^2$$

$$333 = 4,9T^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{333}{4,9}} = 8,2 \text{ secondi}$$

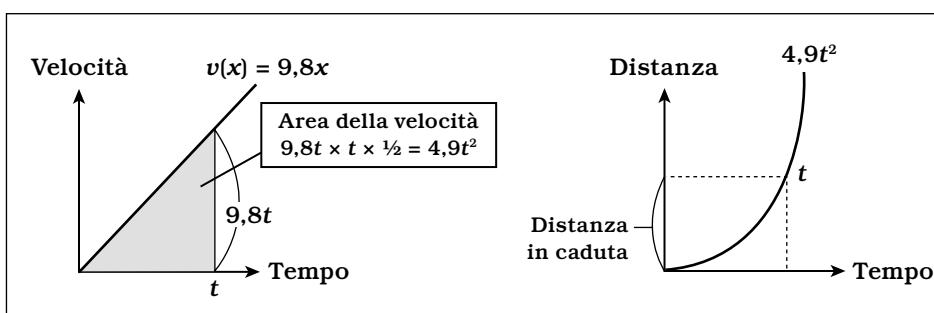


Figura 3

## Il dado è tratto!

**Il Teorema Fondamentale del Calcolo vale anche per i dadi!**

Ricordiamo tutti quando da ragazzi giocavamo coi dadi. Sin dall'antichità questi speciali esaedri sono stati lanciati un po' in tutto il mondo, non solo per giocare, ma anche per predire la sorte e per scommessa.

Da un punto di vista matematico, possiamo dire che i dadi sono i più piccoli generatori di numeri casuali. E sono davvero meravigliosi... ora li lanceremo per fare degli esperimenti! Su ogni faccia c'è un numero da 1 a 6 e la probabilità che ha ciascun numero di uscire è di una su 6. Lo vediamo bene con un istogramma (Figura 4), dove i numeri sono sull'asse delle  $x$  e le probabilità su quello delle  $y$ .

L'equazione ① si legge così: “ $f(x)$  = probabilità che esca il numero  $x$ ”. Nel caso che tentiamo di predire uno specifico risultato per esempio che esca 4 diventa la ②.

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \text{Probabilità che esca } x$$

$$\textcircled{2} \quad f(4) = \frac{1}{6} = \text{Probabilità che esca 4}$$

Ora diamo un'occhiata alla figura 5, che descrive una funzione di distribuzione. Cominciamo da 1, sull'asse delle  $x$ . Siccome su un dado non esiste nessun numero inferiore a 1, la probabilità associata a questa regione è 0. In  $x=1$  il grafico balza a  $1/6$ , perché è questa la probabilità che esca un qualsiasi numero minore o uguale a 1. Lo stesso vale per un numero maggiore o uguale a 1 e inferiore a 2. Questo è abbastanza intuitivo. In 2 la probabilità sale a  $2/6$ , nel senso che è questa la probabilità che esca un numero inferiore o uguale a 2, e resta tale fino a prima di 3.

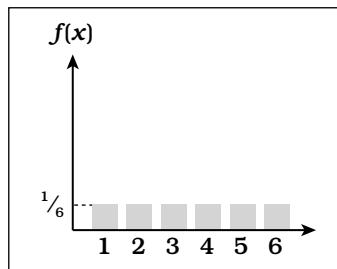


Figura 4: Funzione densità

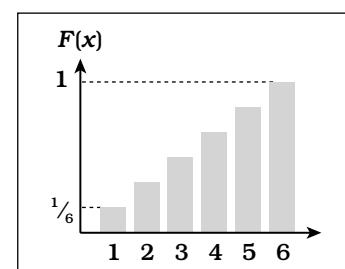


Figura 5: Funzione distribuzione

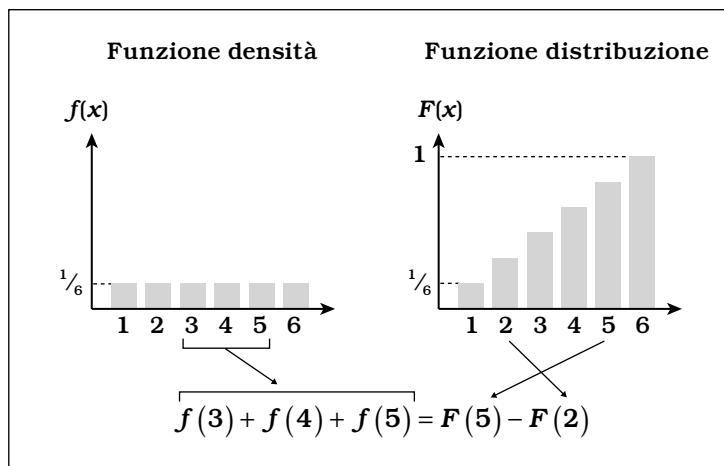


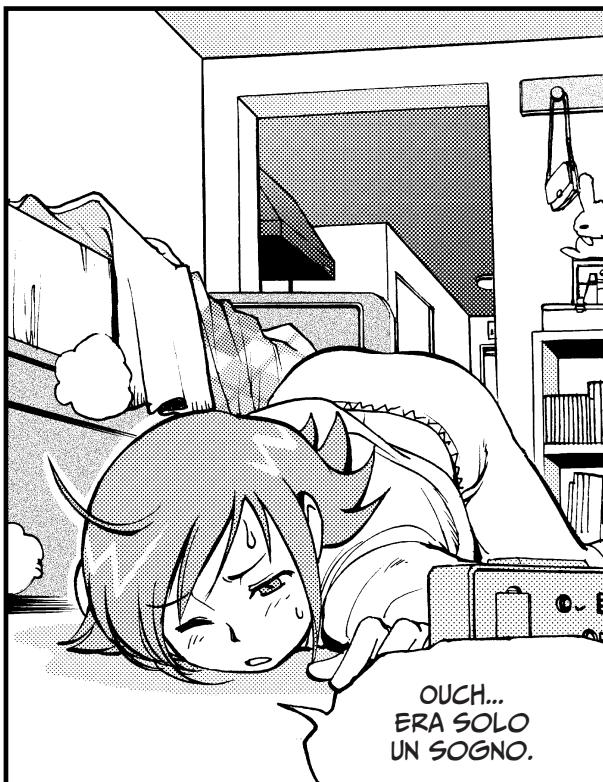
Figura 6: Derivata della funzione distribuzione  
 $F(x) = \text{Funzione densità } f(x)$

$$\textcircled{3} \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

= Probabilità che esca  $x$  con  $a \leq x \leq b$

Analogamente, vediamo che la probabilità che esca 6 o un qualsiasi numero inferiore a 6 (cioè un qualsiasi numero presente sul dado) è 1. Dopotutto, un dado non può restarsene in equilibrio su un vertice. Ora diamo un'occhiata alla probabilità che escano numeri inferiori o uguali a 5. La situazione è illustrata nella figura 6.

Notiamo che l'equazione ③ illustra ciò che ben sappiamo: “L'integrale definito su un intervallo di una funzione derivabile = differenza negli estremi della funzione derivata”. Nient'altro che il Teorema Fondamentale del Calcolo! Ma quanto sono belli i dadi?



## RICAPITOLIAMO IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

Se la derivata di  $F(x)$  è  $f(x)$ , cioè  $f(x) = F'(x)$ , allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Possiamo anche scrivere così

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$



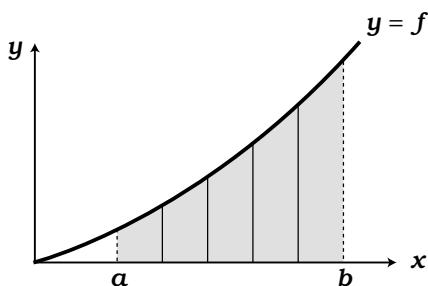
Il significato di queste espressioni è il seguente:

(Funzione derivata) $dx$

= Variazione della funzione originale tra  $a$  e  $b$

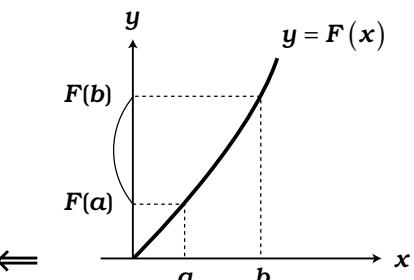
L'interpretazione grafica è questa:

$$\left( \begin{array}{l} \text{l'area compresa tra la funzione derivata e} \\ \text{l'asse delle } x, \text{ tra } x = a \text{ e } x = b \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{variazione della funzione} \\ \text{originale tra } a \text{ e } b \end{array} \right)$$



Teorema  
fondamentale  
del calcolo

$$\int_a^b f(x) dx$$



Variazione della  
funzione originale

## INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Quando effettuiamo un cambio di variabile, nella forma  $x=g(y)$ , ci chiediamo come fare a calcolare

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

cioè l'integrale definito rispetto a  $x$ , però rispetto a  $y$ .

Per cominciare esprimiamo l'integrale definito, in maniera approssimata, in termini di una funzione a tratti

$$S \approx \sum_{k=0,1,2,\dots,n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \quad (x_0 = a, x_n = b)$$

Col cambio di variabile  $x=g(y)$ , otteniamo

$$y_0 = \alpha, y_1, y_2, \dots, y_n = \beta$$

e di conseguenza

$$\alpha = g(\alpha), x_1 = g(y_1), x_2 = g(y_2), \dots, b = g(\beta)$$

Notiamo ora che usando l'approssimazione lineare

$$x_{k+1} - x_k = g(y_{k+1}) - g(y_k) \approx g'(y_k)(y_{k+1} - y_k)$$

e sostituendo queste espressioni in  $S$ , otteniamo

$$S \approx \sum_{k=0,1,2,\dots,n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \approx \sum_{k=0,1,2,\dots,n-1} f(g(y_k))g'(y_k)(y_{k+1} - y_k)$$

L'ultima espressione è un'approssimazione di

$$\int_\alpha^\beta f(g(y))g'(y) dy$$

Passando al limite sull'ampiezza degli intervalli otteniamo la formula seguente

### FORMULA 3.2 – INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(y))g'(y) dy$$

**ESEMPIO:**

Calcoliamo:

$$\int_0^1 10(2x+1)^4 dx$$

Per prima cosa, effettuiamo la sostituzione di variabile

$$y = 2x + 1, \text{ cioè } x = g(y) = \frac{y-1}{2}.$$

La derivata della nuova funzione è  $g'(y) = \frac{1}{2}$ .

Integrando rispetto a  $y$ , gli estremi del nuovo intervallo d'integrazione diventano  $0=g(1)$  e  $1=g(3)$ <sup>\*</sup>, da cui

$$\int_0^1 10(2x+1)^4 dx = \int_1^3 10y^4 \frac{1}{2} dy = \int_1^3 5y^4 dy = 3^5 - 1^5 = 242$$

## INTEGRALE DI UNA POTENZA

Nell'esempio precedente, per concludere l'esercizio abbiamo sfruttato il fatto che la derivata di  $y^5$  è  $5y^4$ . Se  $F(x) = x^n$ , allora se  $F'(x) = f(x) = nx^{(n+1)}$ , dovremmo essere in grado di trovare una formula generale per la funzione  $F(x)$  data  $f(x) = x^n$ .

Sappiamo che nell'espressione di  $F(x)$  deve comparire  $x^{(n+1)}$  ma cosa possiamo dire del coefficiente? Nella derivata non c'è nessun coefficiente e siccome derivando otteniamo il fattore  $(n+1)$ , ne segue che per semplificarlo dovrà esserci  $1 / (n+1)$ . Abbiamo quindi che la formula generale per la primitiva  $F(x)$  di  $f(x) = x^n$  è

$$F(x) = \frac{1}{n+1} \times x^{(n+1)} = \frac{x^{(n+1)}}{n+1}$$

<sup>\*</sup>In altre parole, quando  $x=0$  si ha  $y=1$  e quando  $x=1$  si ha  $y=3$ . Ed è questo il nuovo intervallo d'integrazione.

## ESERCIZI

1. Calcolare i seguenti integrali definiti

①  $\int_1^3 3x^2 dx$

②  $\int_2^4 \frac{x^3 + 1}{x^2} dx$

③  $\int_0^5 x + (1 + x^2)^7 dx + \int_0^5 x - (1 + x^2)^7 dx$

2. Rispondere alle seguenti domande:

- Scrivere lo sviluppo di un integrale definito per calcolare l'area compresa tra il grafico di  $y=f(x)=x^2-3x$  e l'asse delle x.
- Calcolare l'area risultante dall'espressione.



4

## IMPARIAMO A INTEGRARE!



## LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



\*LO YUKATA È IL TRADIZIONALE ABITO ESTIVO GIAPPONESE.

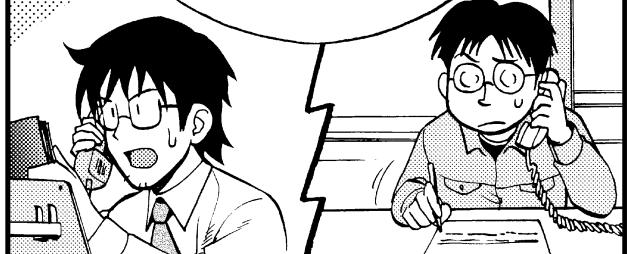


QUAND'ERO IO UN REPORTER ALLE PRIME ARMI CERTE COMODITÀ NON C'ERANO.

SPESO, QUANDO AVEVO UNA SCADENZA, PER INVIARE UN PEZZO USAVO UN TELEFONO A GETTONE.

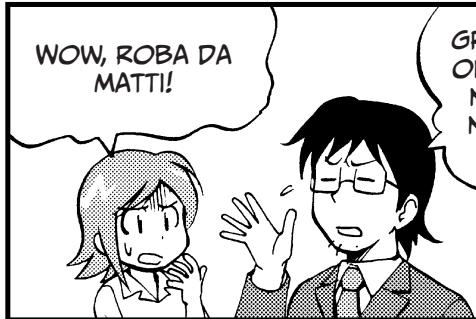


DETTAVO L'ARTICOLO AL TELEFONO AL MIO ASSISTENTE, PAROLA PER PAROLA.



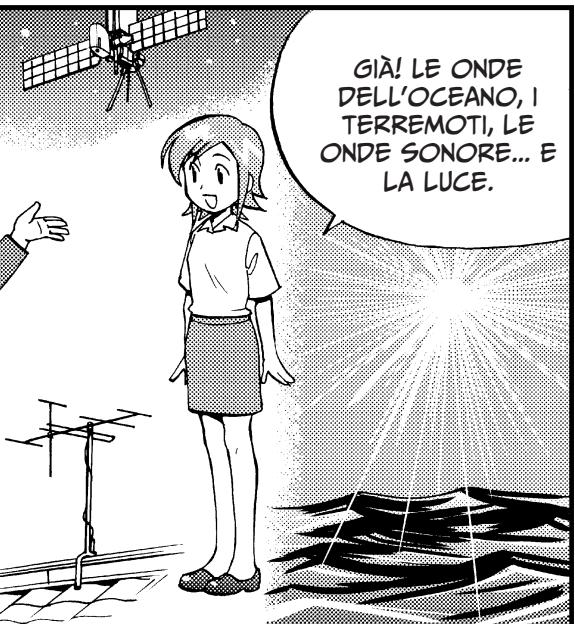
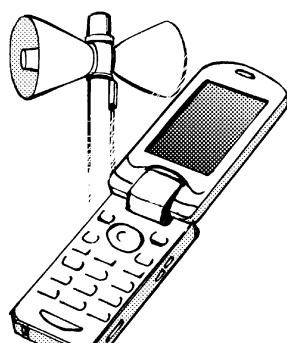
WOW, ROBA DA MATTI!

GRAZIE ALLE Onde RADIO NON È PIÙ NECESSARIO.

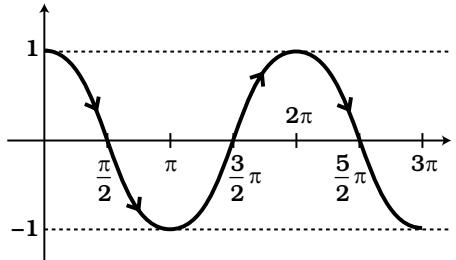


IN NATURA ESISTONO Onde DI OGNI TIPO.

GIÀ! LE Onde DELL'OCEANO, I TERREMOTI, LE Onde SONORE... E LA LUCE.



POSSIAMO DESCRIVERE LE Onde CON DELLE FUNZIONI, PER ESEMPIO COL COSENO DI THETA, CIOÈ DI UN ANGOLO ( $\cos\theta$ ). LO SAPEVI?



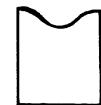
UH... DEVO TORNARE AL LAVORO.



NORIKO!



SI DÀ IL CASO, CHE SE STACCHIAMO LA MANICA DI UNA CAMICIA, LA SEZIONE È UN GRAFICO DI  $\cos\theta$ .



LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE SONO MOLTO IMPORTANTI NELL'ABBIGLIAMENTO.

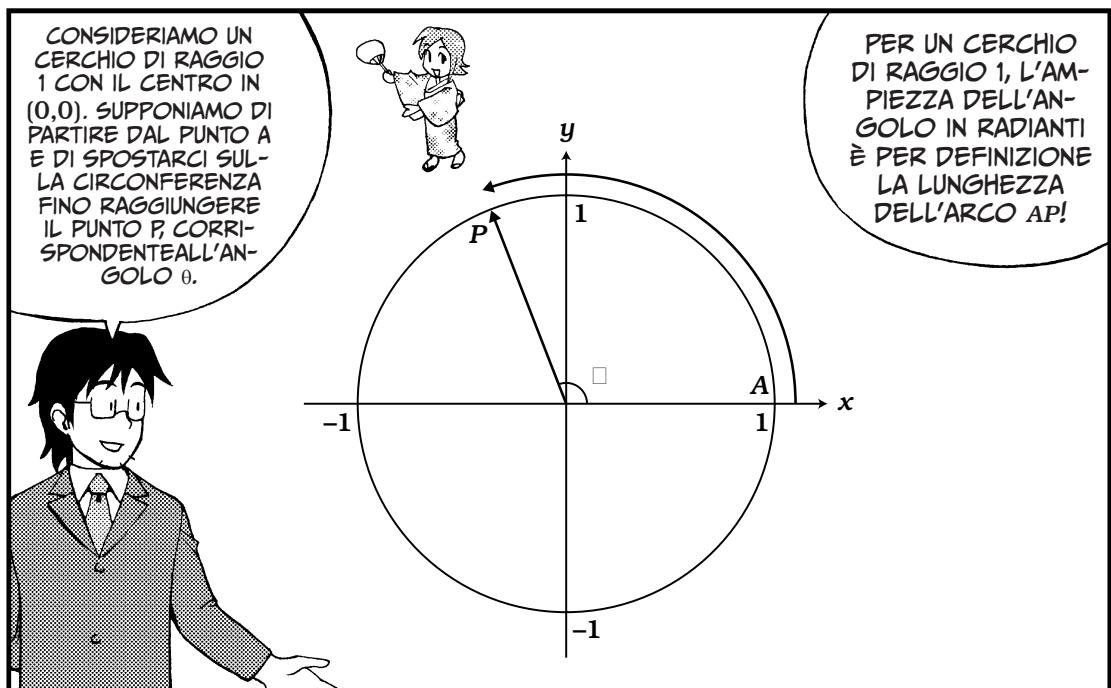
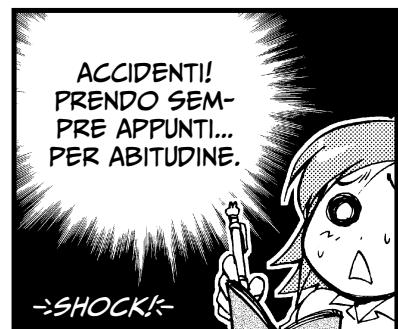
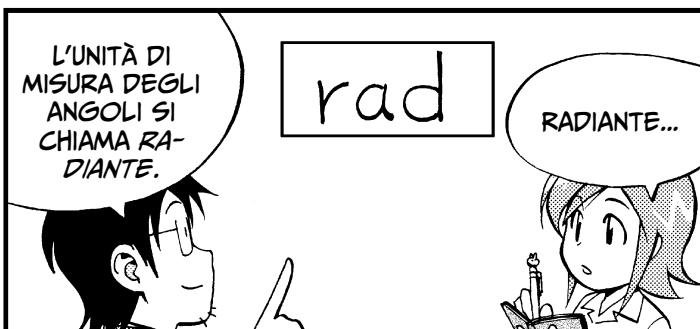


FRITTTELLE

POP CORN

CRÈPES



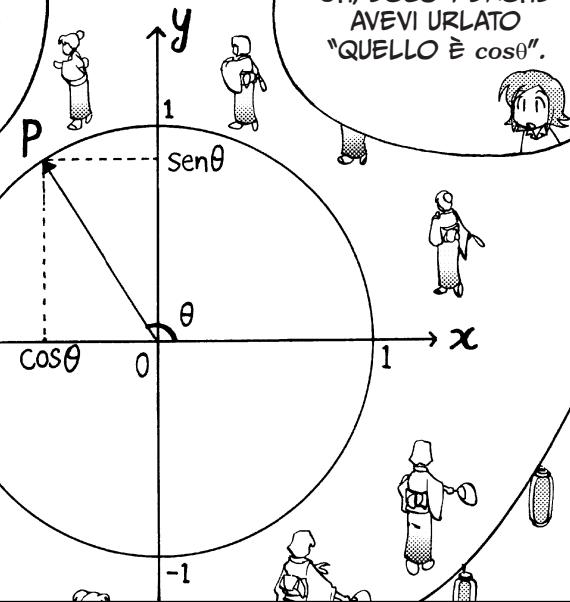


PER UN CERCHIO DI RAGGIO 1, L'AMPIEZZA DELL'ANGOLO IN RADIANI È PER DEFINIZIONE LA LUNGHEZZA DELL'ARCO AP!

SICCOME LA MISURA DELLA LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA È  $2\pi$ , POSSIAMO DIRE CHE 90 GRADI EQUIVALGONO A  $\pi/2$  RADIANI, E CHE 180 GRADI CORRISPONDONO A  $\pi$  RADIANI. UN RADIANTE EQUIVALE A CIRCA 57,2958 GRADI.

DA QUESTO MOMENTO, PER MISURARE GLI ANGOLI USEREMO I RADIANI.

DEFINIAMO POI IL COSENZO COME UNA FUNZIONE DELL'ANGOLÒ:  $x = \cos\theta$ . IL COSENZO È LA POSIZIONE ORIZZONTALE DI UNA DANZATRICE CHE ABbia RUOTATO DI  $\theta$  RADIANI. VEDI DI RICORDARTELLO!



OH, ECCO PERCHÉ AVEVI URLATO "QUELLO È  $\cos\theta$ ".

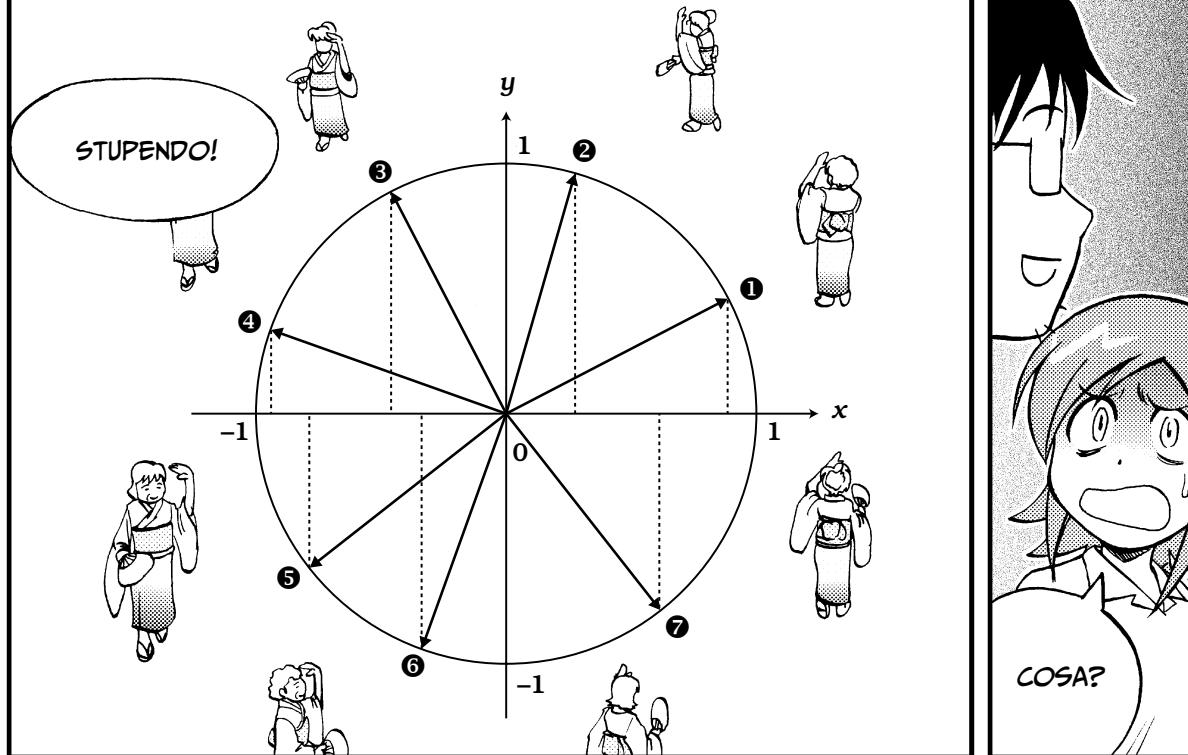
CHE COSA GLI PASSA PER LA TESTA?

ALLO STESSO MODO, LA POSIZIONE VERTICALE DELLA DANZATRICE DEFINISCE LA FUNZIONE  $\operatorname{sen}\theta = y$ .

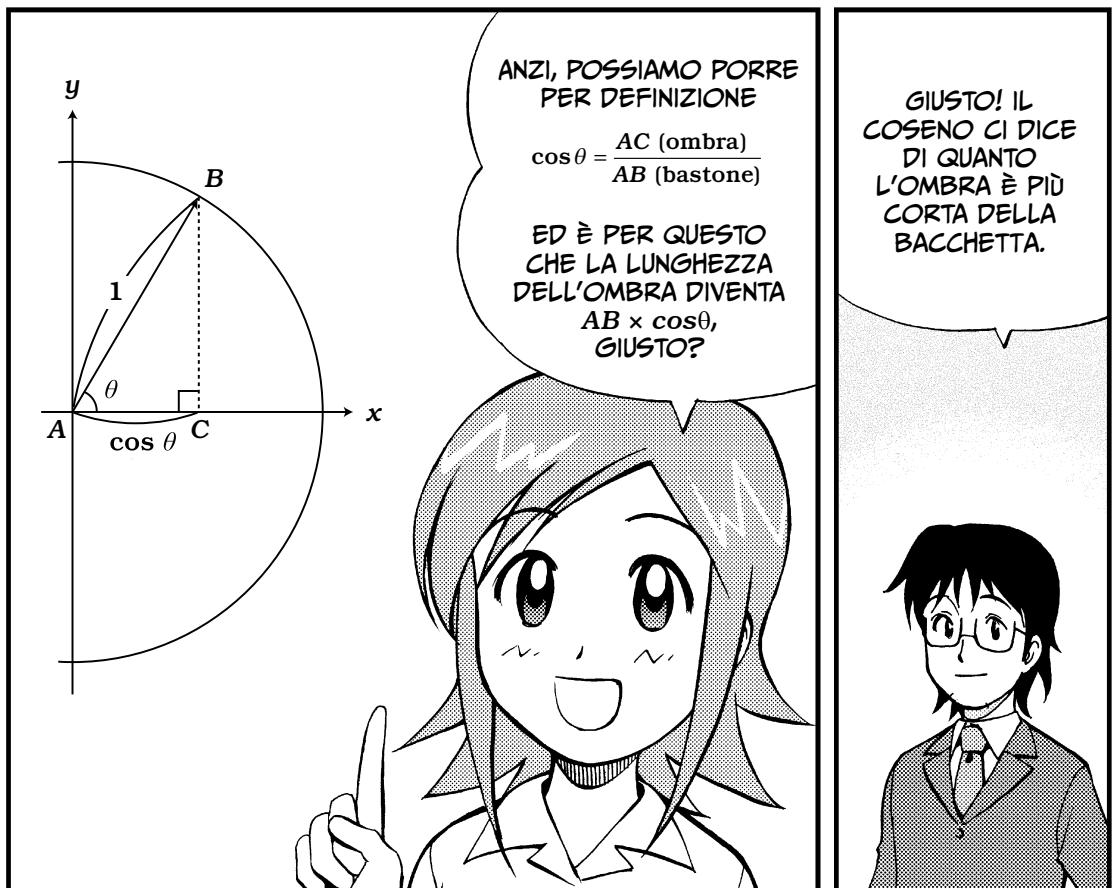
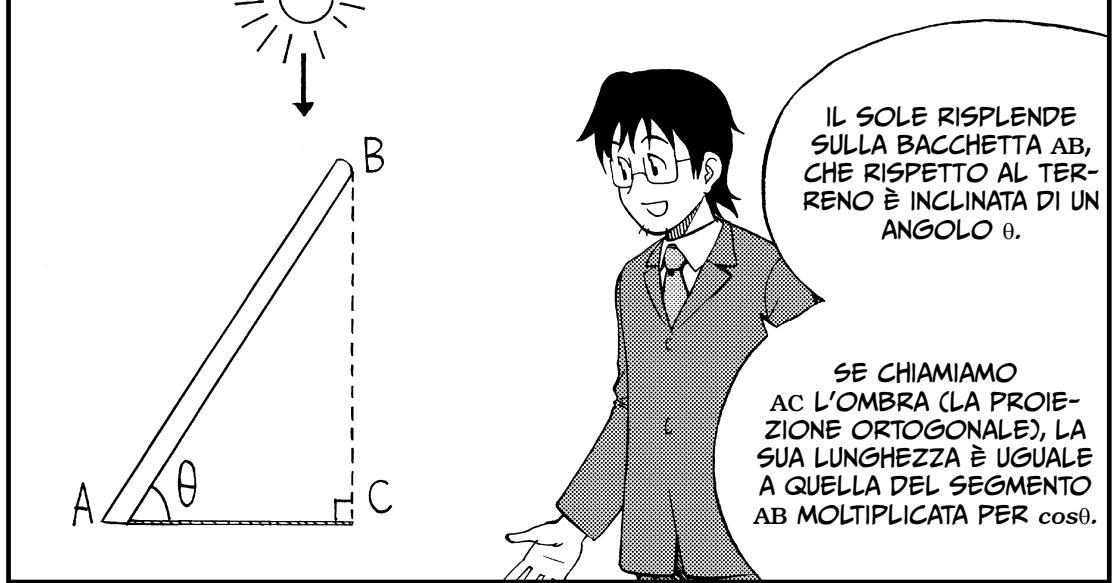
UH, OKAY...

GUARDA, NORIKO!!

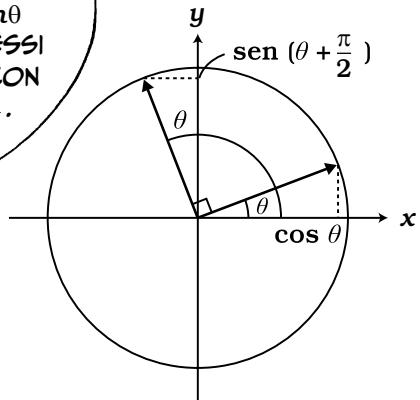






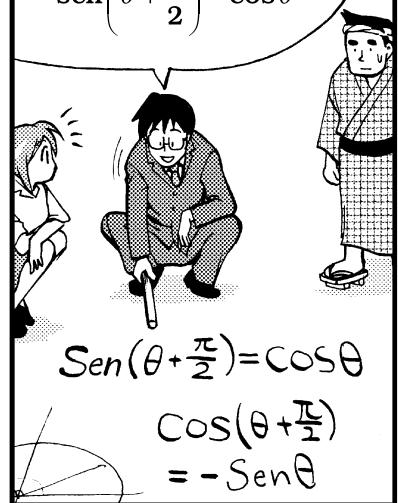


PER LA CRONACA,  
POICHÉ SE RUOTIAMO  
L'ASSE X DI 90  
GRADI ( $\frac{\pi}{2}$  RADIANI),  
POSSIAMO DIRE CHE  
LA FUNZIONE  $\sin\theta$   
FORNISCE GLI STESSI  
VALORI DI  $\cos\theta$ , CON  
UN RITARDO DI  $\frac{\pi}{2}$ .



IN ALTRE PAROLE

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$$



SI?

UH... POTREBBE RI-  
DARCI LE NOSTRE  
BACCHETTE?

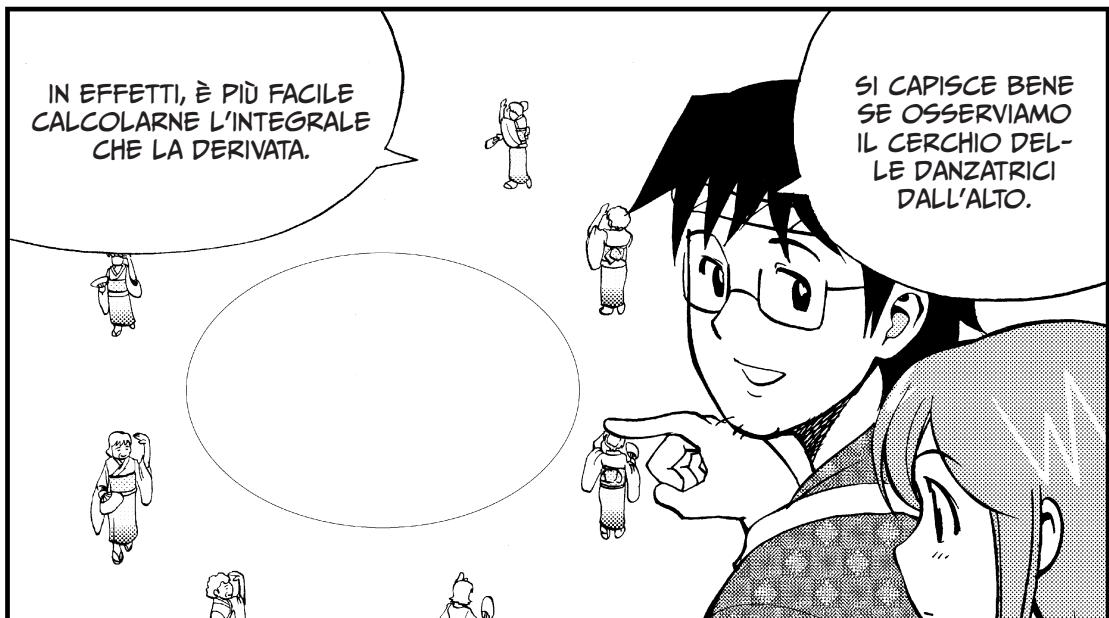
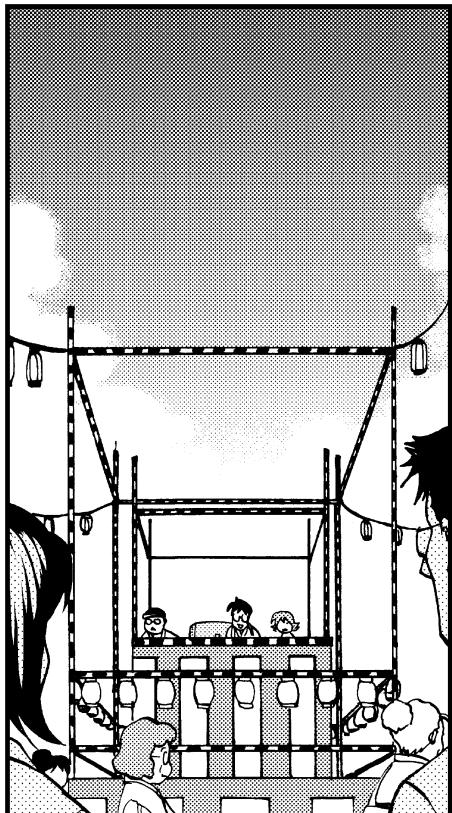


ORA SIAMO PRONTI  
PER LA PARTE PIÙ IM-  
PORTANTE DEL SANDA  
SUMMER FESTIVAL!!

OOPS!

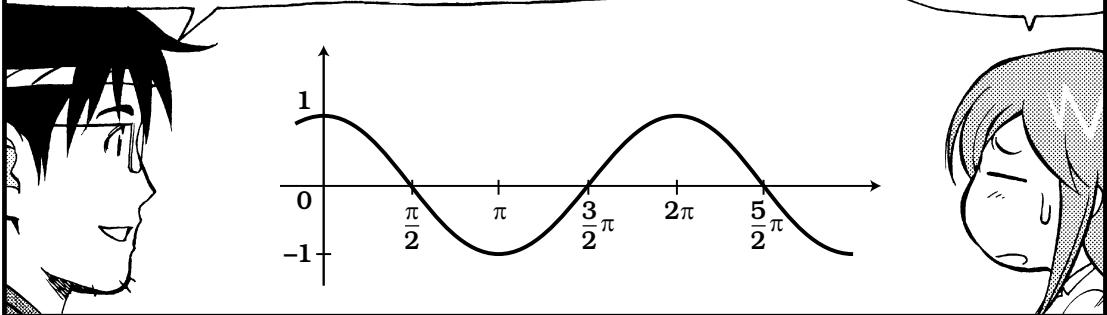


## GLI INTEGRALI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

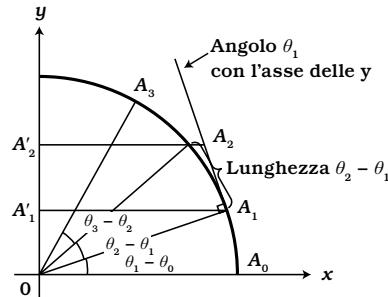
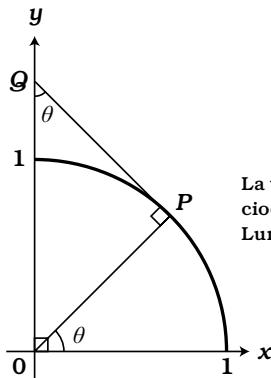


IL NOSTRO SCOPO È DETERMINARE QUANTO VALE  $\sum$   
 $\cos \theta \times \Delta\theta = \cos \theta_0 (\theta_1 - \theta_0) + \cos \theta_1 (\theta_2 - \theta_1) + \dots$   
 $+ \cos \theta_{n-1} (\theta_n - \theta_{n-1})$

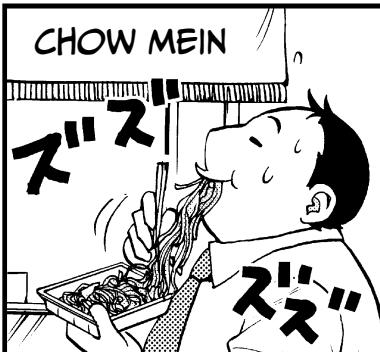
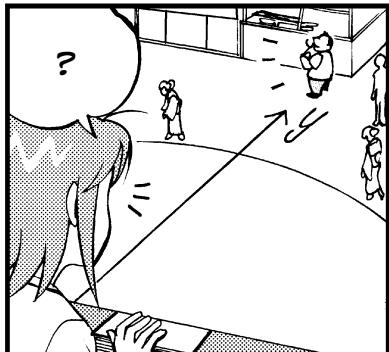
MI  
SI ANNEBBIA  
LA VISTA.

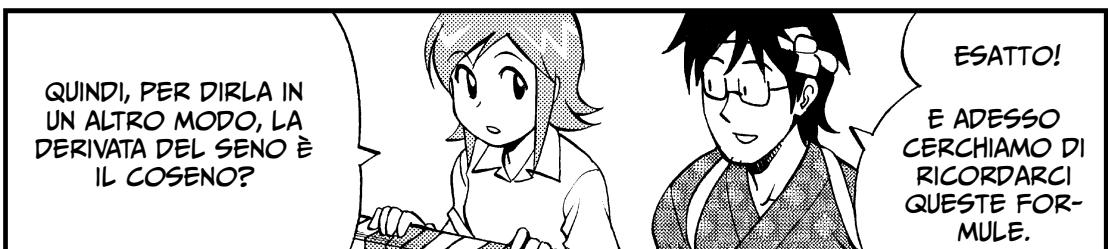
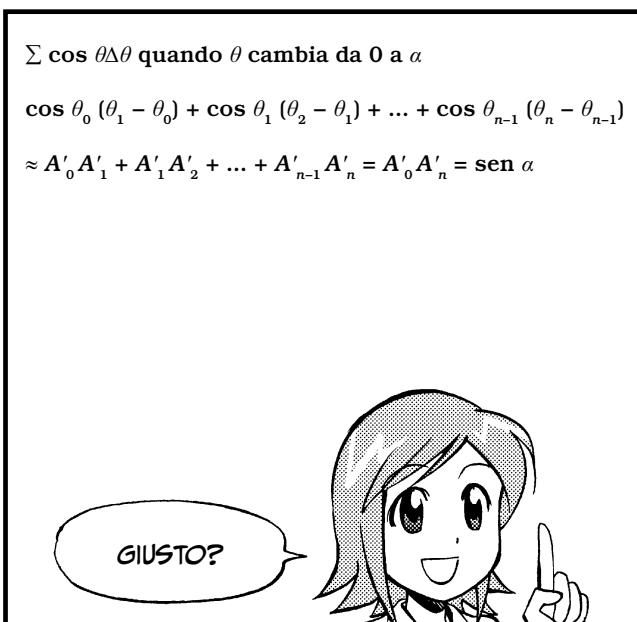
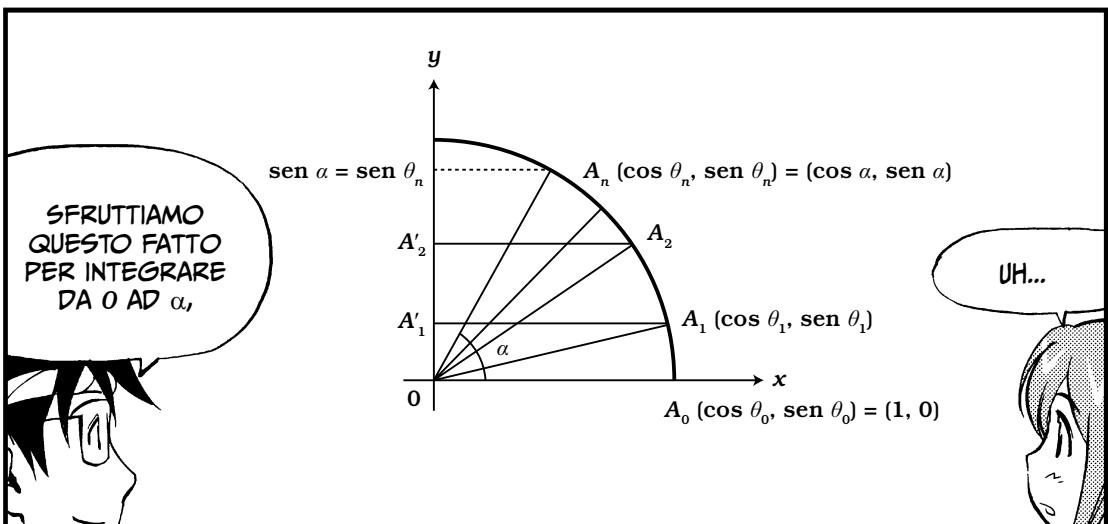


GUARDA QUESTA FIGURA. NON TI FA VENIRE UN'IDEA? MOSTRA CHE SE P È IL PUNTO CHE RUOTA DI  $\theta$  A PARTIRE DA  $(1,0)$ , L'ANGOLI FORMATO DALL'ASSE DELLE Y E DALLA TANGENTE PQ È ANCORA  $\theta$ .



La variazione di  $\cos \theta$  è la lunghezza  $A'_1 A'_2$ , cioè la proiezione ortogonale di  $A_1 A_2$ .  
 Lunghezza di  $A'_1 A'_2 \approx \text{arc } A_1 A_2 \times \cos \theta_1 = (\theta_2 - \theta_1) \times \cos \theta_1$





## FORMULA 4.1 – DERIVAZIONE E INTEGRAZIONE DI FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Da ①  $\int_0^\alpha \cos \theta d\theta = \sin \alpha - \sin 0$ , sappiamo che il seno è la derivata del coseno.

$$② (\sin \theta)' = \cos \theta$$

Ora in ② sostituiamo  $\theta + \frac{\pi}{2}$  con  $\theta$ . Otteniamo  $\left\{ \sin \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right\}' = \cos \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right)$ .

Dalle equazioni di pagina 124 concludiamo che

$$③ (\cos \theta)' = -\sin \theta$$

Quindi derivando o integrando il seno otteniamo il coseno, e viceversa (a meno del segno).



## IL BALLO DELL'ANALISI VERSIONE TRIGONOMETRICA

BALLA

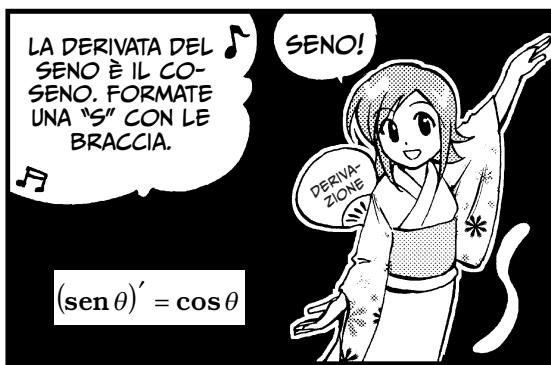


A SINISTRA CON UN SAL-  
TELLO



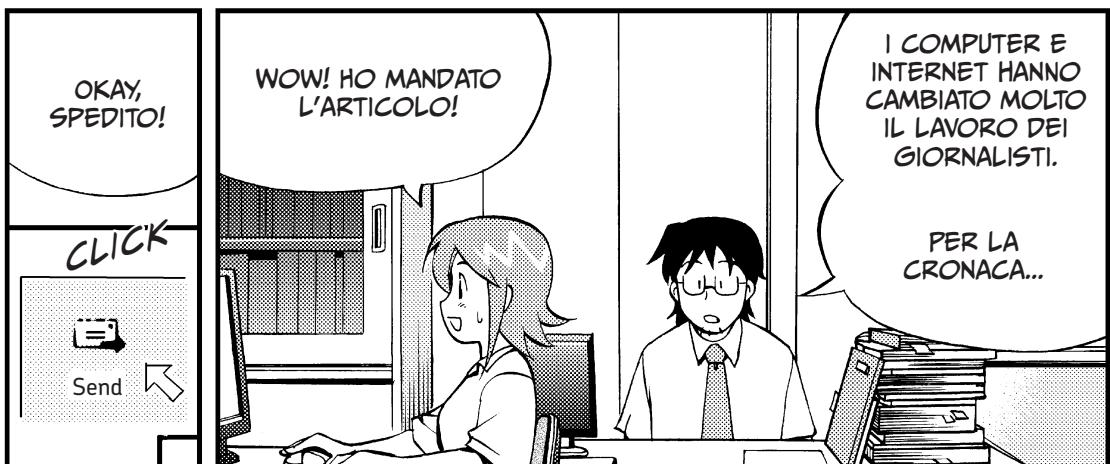
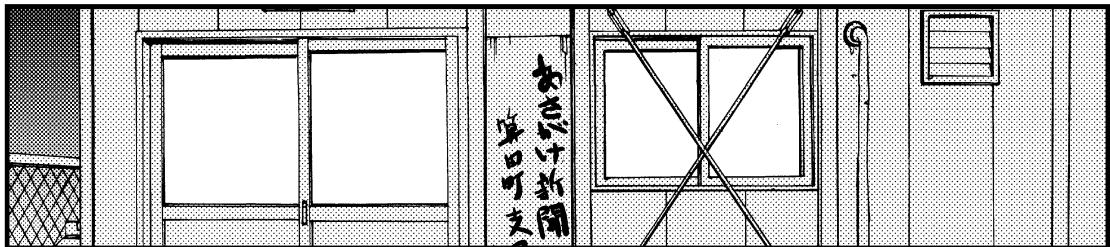
UN ALTRO  
SALTO, BATTI  
LE MANI DUE  
VOLTE.







## L'ESPOENZIALE E IL LOGARITMO



I COMPUTER MANIPOLANO L'INFORMAZIONE IN FORMATO BINARIO E UN BIT PUÒ QUINDI RAPPRESENTARE DUE NUMERI (0 E 1). DUE BIT NE RAPPRESENTANO QUATTRO (00, 01, 10, 11). TRE BIT NE RAPPRESENTANO OTTO E IN GENERALE  $n$  BIT RAPPRESENTANO  $2^n$  NUMERI.

SE  $f(x)$  È IL NUMERO DEI VALORI CODIFICABILI CON  $x$  BIT, ALLORA  $f(x) = 2^x$ , CIOÈ UNA FUNZIONE ESPOENZIALE.

### FUNZIONE ESPOENZIALE

FUNZIONE ESPOENZIALE?

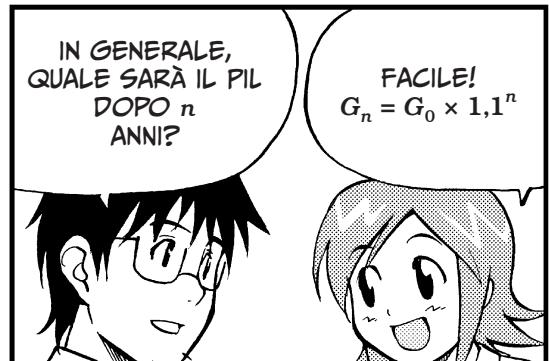
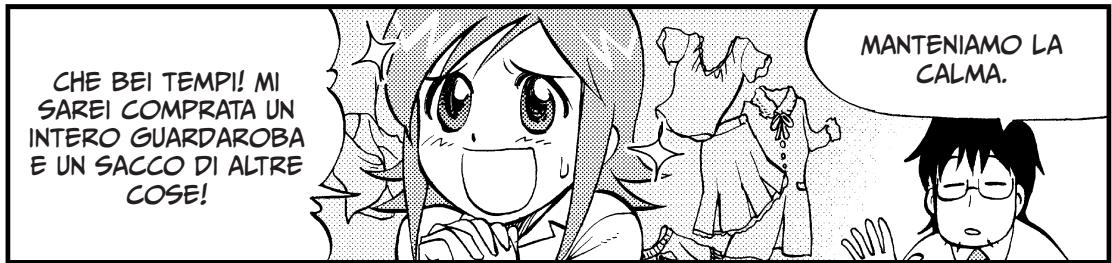
UNA FUNZIONE ESPOENZIALE ESPRIME UNA FORMA DI CRESCITA, COME PER ESEMPIO QUELLA ECONOMICA.

VEDIAMO... UN ESEMPIO...

NEGLI ANNI CINQUANTA, IN GIAPPONE CI FU UN TASSO DI CRESCITA MOLTO ELEVATO: CIRCA IL 10% ALL'ANNO.

UN REDDITO ANNUALE DI 5 MILIONI DI YEN DIVENTAVA DI 5,5 MILIONI L'ANNO SUCCESSIVO.

QUESTO AUMENTO PERMETTEVA DI ACQUISTARE IL 10% IN PIÙ DI BENI E SERVIZI RISPETTO ALL'ANNO PRECEDENTE.



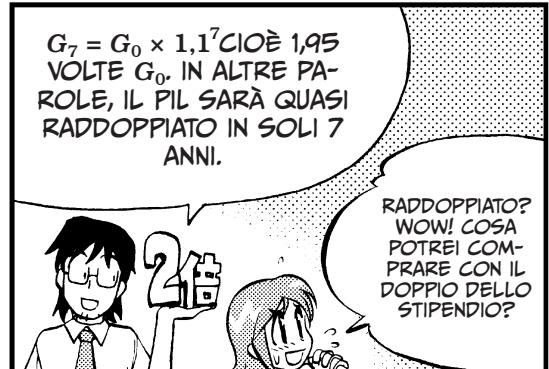
$G_1 = G_0 \times 1,1$   
Prodotto interno lordo dopo 1 anno

$G_2 = G_1 \times 1,1 = G_0 \times 1,1^2$   
Prodotto interno lordo dopo 2 anni

$G_3 = G_0 \times 1,1^3$   
Prodotto interno lordo dopo 3 anni

$G_4 = G_0 \times 1,1^4$   
Prodotto interno lordo dopo 4 anni

$G_5 = G_0 \times 1,1^5$   
Prodotto interno lordo dopo 5 anni

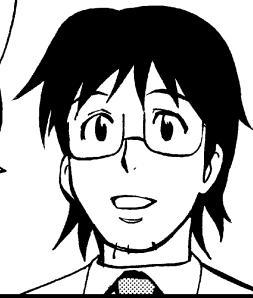


DICEVAMO PRIMA CHE I BIT SONO CODICI CHE RAPPRESENTANO L'INFORMAZIONE.

SÌ, 1 BIT PER 2 CONFIGURAZIONI, 2 BIT PER 4.

ABBIAMO VISTO CHE QUESTO NUMERO È DATO DA  $f(x) = 2^x$ . ESISTE UNA FUNZIONE, DETTA FUNZIONE INVERSA, CHE Torna A TRASFORMARE IN BIT QUELLE CHE HAI CHIAMATO CONFIGURAZIONI.

LA FUNZIONE INVERSA



NON È DIFFICILE, BASTA RAGIONARE AL CONTRARIO.

2 CONFIGURAZIONI → 1 BIT

4 CONFIGURAZIONI → 2 BIT

8 CONFIGURAZIONI → 3 BIT

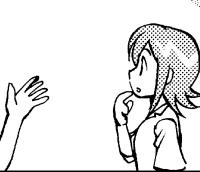
⋮

IN ALTRE PAROLE, POSSIAMO RAPPRESENTARE  $2^n$  POSSIBILI NUMERI USANDO  $n$  BIT.

CHIAMIAMO  $g(y)$  QUESTA "FUNZIONE INVERSA" DI  $f(x)$ : UNA FUNZIONE CHE TRASFORMA  $y$  CONFIGURAZIONI IN  $x$  BIT. PROVA!

OTTENIAMO  $g(2) = 1$ ,  $g(4) = 2$ ,  $g(8) = 3$ ,  $g(16) = 4$ ...

IL RAPPORTO TRA  $f$  E  $g$  PUÒ QUINDI ESSERE RAPPRESENTATO COME  $g(f(x)) = x$  e  $f(g(y)) = y$ .



ESATTO! E ABBIAMO COSÌ  $\log_2 2 = 1$ ,  $\log_2 4 = 2$ ,  $\log_2 8 = 3$ ,  $\log_2 16 = 4$ ...

L'INVERSA DELL'ESPONENTIALE VIENE CHIAMATA FUNZIONE LOGARITMICA E SI INDICA CON IL SIMBOLO  $\log$ .

**log**

NEL CASO PRECEDENTE, POSSIAMO SCRIVERE  $g(y) = \log_2 y$ .



## GENERALIZZIAMO L'ESPOENZIALE E IL LOGARITMO



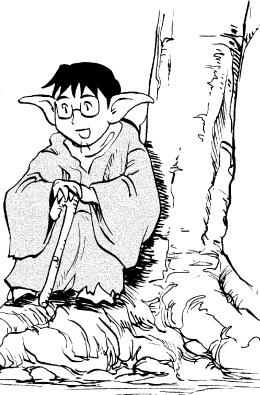
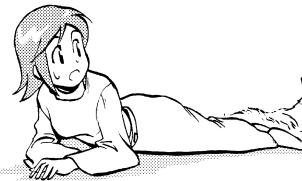
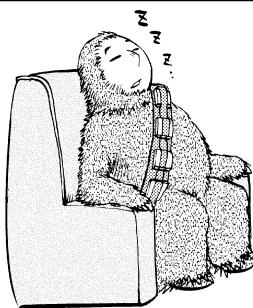
LE FUNZIONI ESPOENZIALE E LOGARITMICA SONO GIÀ MOLTO UTILI, MA PER ORA LE ABBIAMO DEFINITE SOLO NEL CASO CHE LA  $x \ln f(x) = 2^x$  E LA  $y \ln g(y) = \log_2 y$  SIANO ESCLUSIVAMENTE NUMERI NATURALI.

UMMM... E COME FACCIAMO?



ORA CON DEGLI ESEMPI VEDREMO COME DEFINIRE L'ESPOENZIALE E IL LOGARITMO PIÙ IN GENERALE.

L'ETTO CHE ABBA CHIESTO SONO IO. LA POTENZA DELL'ANALISI USEREMO NOI. OH, SÌ.



PER COMINCIARE, PARTENDO DAL NOSTRO ESEMPIO, DAL TASSO DI CRESCITA ANNUO PASSIAMO AL TASSO ISTANTANEO.

$$\text{Tasso di crescita annuo} = \frac{\text{Valore dopo 1 anno} - \text{Valore attuale}}{\text{Valore attuale}} = \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$$



PARTIAMO DA QUESTA  
ESPRESSONE!



NE RICAVEREMO IL TASSO Istantaneo nel modo seguente.

Tasso di crescita istantaneo=

$$= \text{Idealizzazione di } \left( \frac{\text{Valore leggermente successivo} - \text{Valore attuale}}{\text{Valore attuale}} \div \text{Tempo trascorso} \right)$$

$$= \text{Risultato per } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ in } \left( \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{f(x)} \right) \frac{1}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} \left( \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$



DEFINIAMO QUINDI IL  
TASSO DI CRESCITA  
ISTANTANEO COME  $\frac{f'(x)}{f(x)}$

Supponiamo ora che esista una funzione  $f$  con tasso di crescita istantaneo costante, cioè

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c \quad \text{dove } c \text{ è una costante.}$$

Supponendo che  $c = 1$ ,  
troveremo una  $f(x)$  per cui

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

TROVARLA? E  
COME FACCIAMO?



1. Per cominciare ipotizzeremo che abbia una forma esponenziale.  
Vediamo perché...

INTANTO, SE  $f'(x) = f(x)$  ①, ALLORA  $f'(0) = f(0)$   
POI, RICORDIAMO CHE PER  $h$  VICINO ALLO 0, ABBIAMO  
 $f(h) \approx f'(0)(h - 0) + f(0)$



Da ①, abbiamo  $f(h) \approx f(0)h + f(0)$  e quindi

$$② \quad f(h) \approx f(0)(h+1)$$

Se  $x$  è sufficientemente vicino ad  $h$ , otteniamo

$$f(x) \approx f'(h)(x-h) + f(h)$$

Sostituendo  $x$  con  $2h$  e ricordando che  $f'(h) = f(h)$ ,

$$f(2h) \approx f'(h)(2h-h) + f(h)$$

$$f(2h) \approx f(h)(h) + f(h)$$

$$f(2h) \approx f(h)(h+1)$$

Sostituiamo ora  $f(h) \approx f(0)(h+1)$  nell'equazione.

$$f(2h) \approx f(0)(h+1)(h+1)$$

$$f(2h) \approx f(0)(h+1)^2$$

Analogamente, sostituiamo  $3h$ ,  $4h$ ,  $5h$ , ..., e così via al posto di  $x$ , e prendiamo  $m$  in modo che  $mh = 1$ .

$$f(1) = f(mh) \approx f(0)(h+1)^m$$

Allo stesso modo,

$$f(2) = f(2mh) \approx f(0)(h+1)^{2m} = f(0)\left\{(1+h)^m\right\}^2$$

$$f(3) = f(3mh) \approx f(0)(h+1)^{3m} = f(0)\left\{(1+h)^m\right\}^3$$

Così otteniamo

$$f(n) \approx f(0)a^n \quad \text{osservando che } a = (1+h)^m$$

e in effetti questa ricorda molto da vicino una funzione esponenziale\*.

\* Poiché  $mh = 1$ ,  $h = \frac{1}{m}$ . Abbiamo quindi,  $f(1) \approx f(0)\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ . per  $m \rightarrow \infty$ ,  $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \rightarrow e$ , un numero detto costante di Eulero, pari a circa 2.718. Perciò,  $f(1) = f(0) \times e$ , coerentemente con la discussione che vedremo a pagina 141.

z. Ora vedremo che  $f(x)$  esiste e quale forma ha.

SCRIVIAMO LA FUNZIONE INVERSA  
DI  $y = f(x)$  AS  $x = g(y)$ .



A PAGINA 136 ABBIAMO VISTO CHE  $f'(x) = f(x)$  COINCIDE CON LA SUA DERIVATA. QUESTO PERÒ NON CI AIUTA MOLTO: QUALE SARÀ MAI LA DERIVATA DI  $g(y)$ ?

$$③ \quad g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

In generale vale questa uguaglianza,\*

$$④ \quad g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{y}$$

da cui vediamo che la derivata della funzione inversa  $g(y)$  è  $\frac{1}{y}$ .

Adesso, col Teorema Fondamentale del Calcolo, abbiamo

$$⑤ \quad \int_1^{\alpha} \frac{1}{y} dy = g(\alpha) - g(1)$$

Siccome  $g'(y) = \frac{1}{y}$ , integrando  $\frac{1}{y}$  da 1 ad  $\alpha$  otteniamo  $g(\alpha)$ .

Poniamo  $g(1) = 0$  e...

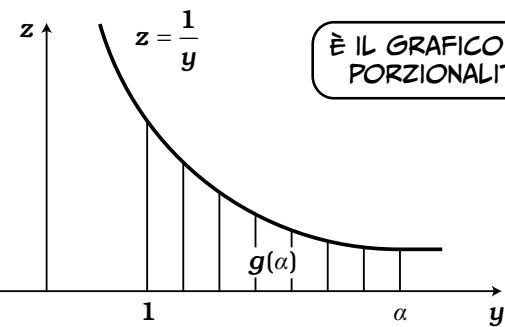
$$\text{OTTENIAMO } g(\alpha) = \int_1^{\alpha} \frac{1}{y} dy$$



BRAVA! E ADESSO TRACCIAMO IL GRAFICO DI  $z = \frac{1}{y}$ !



\*Come abbiamo visto a pagina 75, se  $g(y)$  è l'inversa di  $f(x)$ , allora  $f'(x) g'(y) = 1$



È IL GRAFICO DELLA PROPORZIONALITÀ INVERSA.



ORA DEFINIAMO  $g(\alpha)$  COME L'AREA DELLA SUPERFICIE COMPRESA TRA IL GRAFICO, L'ASSE DELLE  $y$  NELL'INTERVALLO DA 1 A  $\alpha$ . QUESTA FUNZIONE È BEN DEFINITA, CIOÈ, IN ALTRE PAROLE,  $g(\alpha)$  ASSUME UN VALORE BEN PRECISO PER OGNI VALORE DI  $\alpha$ , ANCHE SE FOSSE UNA FRAZIONE O  $\sqrt{2}$ .

POICHÉ  $z = \frac{1}{y}$  È UNA FUNZIONE IN FORMA ESPlicita, POSSIAMO CALCOLARE L'AREA IN MANIERA ESATTA.



Poiché  $g(1) = \int_1^1 \frac{1}{y} dy = 0$ ,  $\int_1^\alpha \frac{1}{y} dy = g(\alpha) - g(1)$  che soddisfa la ⑤.

Abbiamo quindi trovato la funzione inversa  $g(y)$ , cioè l'area sotto la curva, che esprime anche la funzione originale  $f(x)$ .

A PROPOSITO,  
CHE MI DICE DEL  
TASSO DI CRE-  
SCITA DELL'ASA-  
GAKÉ TIMES?



## RIASSUNTO DELLE FUNZIONI ESPONENZIALE E LOGARITMICA

❶  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  è il tasso di crescita.

❷ una  $y = f(x)$  che soddisfa  $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$  è una funzione con tasso di crescita costante uguale a 1.

Si tratta della funzione esponenziale, che quindi soddisfa la condizione

$$f'(x) = f(x)$$

❸ Se  $x = g(y)$  è la funzione inversa di  $y = f(x)$ , allora

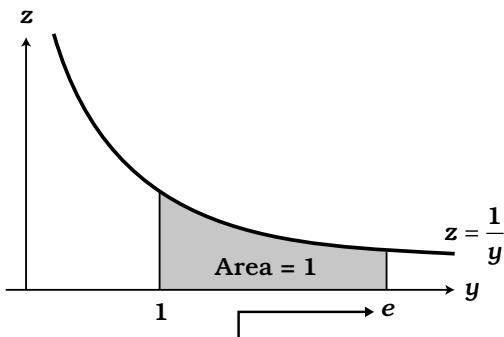
$$g'(y) = \frac{1}{y} \quad *$$

❹ Definiamo  $g(\alpha)$ , come l'area delimitata dal grafico  $h(y) = \frac{1}{y}$ ,

$$g(\alpha) = \int_1^{\alpha} \frac{1}{y} dy$$

La funzione inversa di  $f(x)$  è la funzione che soddisfa \* e  $g(1) = 0$ .

❺



e è un numero irrazionale  
che vale circa 2,7178.

Definiamo  $e$  (la base dei logaritmi naturali) come il valore  $y$  per cui  $g(y) = 1$ . In altre parole, quel determinato valore per cui vale 1 l'area tra la curva e l'asse delle  $y$  nell'intervallo da 1 a  $e$ .

Siccome  $f(x)$  è una funzione esponenziale, usando la costante  $a_0$  possiamo scriverla come

$$f(x) = a_0 a^x$$

Poiché  $f(g(1)) = f(0) = a_0 a^0 = a_0$  and  $f(g(1)) = 1$ , abbiamo

$$f(g(1)) = 1 = a_0$$

Quindi

$$f(x) = a^x$$

Analogamente, poiché

$$f(g(e)) = f(1) = a^1 \quad e$$

$$f(g(e)) = e$$

$$e = a^1$$

Abbiamo quindi  $f(x) = e^x$ .

La funzione inversa  $g(y)$  è  $\log_e y$  che chiameremo “logaritmo naturale” e che scriveremo semplicemente come “ $\ln y$ ”.

Ora riscriviamo ② usando la ④ in termini di  $e^x$  e  $\ln y$ .

$$\textcircled{6} \quad f'(x) = f(x) \Leftrightarrow (e^x)' = e^x$$

$$\textcircled{7} \quad g'(y) = \frac{1}{y} \Leftrightarrow (\ln y)' = \frac{1}{y}$$

$$\textcircled{8} \quad g(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{1}{y} dy \Leftrightarrow \ln y = \int_1^y \frac{1}{y} dy$$

⑨ Per definire  $2^x$ , che nasce come funzione dei bit, per ogni numero reale  $x$ , partiamo da

$$f(x) = e^{(\ln 2)x} \quad (\text{dove } x \text{ è un numero reale qualunque})$$

Il motivo è il seguente. Poiché  $e^x$  e  $\ln y$  sono funzioni inverse l'una dell'altra,

$$e^{\ln 2} = 2$$

Pertanto, per ogni numero naturale  $x$  abbiamo che

$$f(x) = (e^{\ln 2})^x = 2^x$$

## ALTRÉ APPLICAZIONI DEL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

Possiamo rappresentare anche altre funzioni nella forma  $f(x) = x^\alpha$ . Eccone alcune

$$\frac{1}{x} = x^{-1}, \frac{1}{x^2} = x^{-2}, \frac{1}{x^3} = x^{-3}, \dots$$

In generale, continua a valere la formula che abbiamo già trovato.

### FORMULA 4.2 - DERIVATA DI UNA POTENZA

$$f(x) = x^\alpha \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

ESEMPIO:

Sia  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ,  $f'(x) = (x^{-3})' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$

Sia  $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ,  $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$



DIMOSTRAZIONE:

Scriviamo  $f(x)$  in termini di  $e$ . Osserviamo che  $e^{\ln x} = x$ , e che quindi

$$f(x) = x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Perciò,

$$\ln f(x) = \alpha \ln x$$

Derivando ambo i membri, ricordando che  $\ln w = \frac{1}{w}$ , e applicando la regola per la derivata della funzione composta, otteniamo

$$\frac{1}{f(x)} \times f'(x) = \alpha \times \frac{1}{x}$$

Quindi,

$$f'(x) = \alpha \times \frac{1}{x} \times f(x) = \alpha \times \frac{1}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

## INTEGRAZIONE PER PARTI

Se  $h(x) = f(x) g(x)$ , calcolando la derivata del prodotto otteniamo,

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Poiché  $f(x) g(x)$  è la funzione la cui derivata è  $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ , per il Teorema Fondamentale del Calcolo abbiamo

$$\int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Per integrazione della somma, otteniamo:

### FORMULA 4.3 – INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

A titolo di esempio, calcoliamo

$$\int_0^\pi x \sin x dx$$

Ponendo  $f(x)=x$  e  $g(x)=\cos x$ , otteniamo

$$\int_0^\pi x' \cos x dx + \int_0^\pi x (\cos x)' dx = f(x)g(x)|_0^\pi$$

Ora possiamo valutare

$$= f(\pi)g(\pi) - f(0)g(0)$$

Sostituendo le funzioni originali  $f(x)$  e  $g(x)$  otteniamo

$$= \pi \cos \pi - 0 \cos 0 = \pi(-1) - 0 = -\pi$$

Per la prima equazione, abbiamo quindi

$$\int_0^\pi x' \cos x dx + \int_0^\pi x (\cos x)' dx = -\pi$$

Perciò:

$$\int_0^\pi \cos x \, dx + \int_0^\pi x(-\sin x) \, dx = -\pi$$

che possiamo riscrivere anche come

$$\int_0^\pi \cos x \, dx - \int_0^\pi x \sin x \, dx = -\pi$$

Ed ecco che ritroviamo l'integrale di partenza, ma in una forma che ora possiamo risolvere! Ricaviamo quindi la funzione originale:

$$x \sin x \, dx = \int_0^\pi \cos x \, dx + \pi$$

Ricordiamo che  $\int \cos x \, dx = \sin x$ , e che quindi

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = \sin x \Big|_0^\pi + \pi$$

$$= \sin \pi - \sin 0 + \pi$$

$$= 0 - 0 + \pi = \pi$$



Trovato!

## ESERCIZI

1. La funzione  $\tan x$  è definita come  $\sin x / \cos x$ . Calcolate la derivata di  $\tan x$ .
2. Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$$

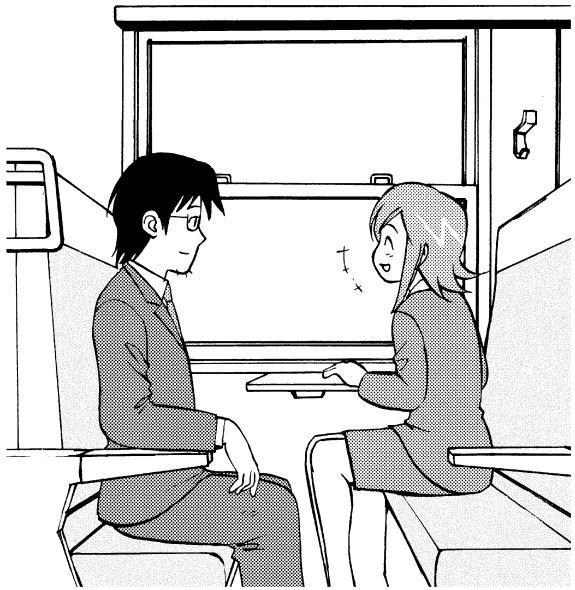
3. Determinare  $x$  tale che  $f(x) = xe^x$  abbia un minimo.
4. Calcolare

$$\int_1^e 2x \ln x \, dx$$

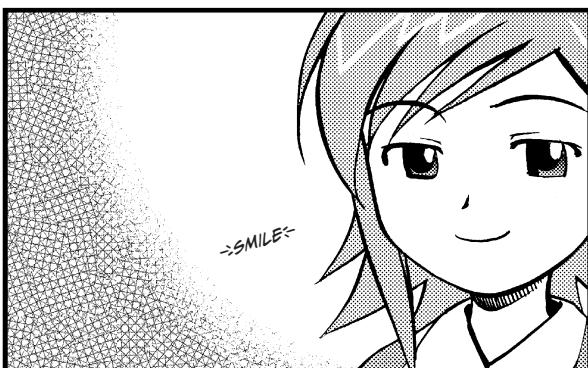
Suggerimento: ponete  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \ln x$ , e integrate per parti.

# 5

## SVILUPPI DI TAYLOR!



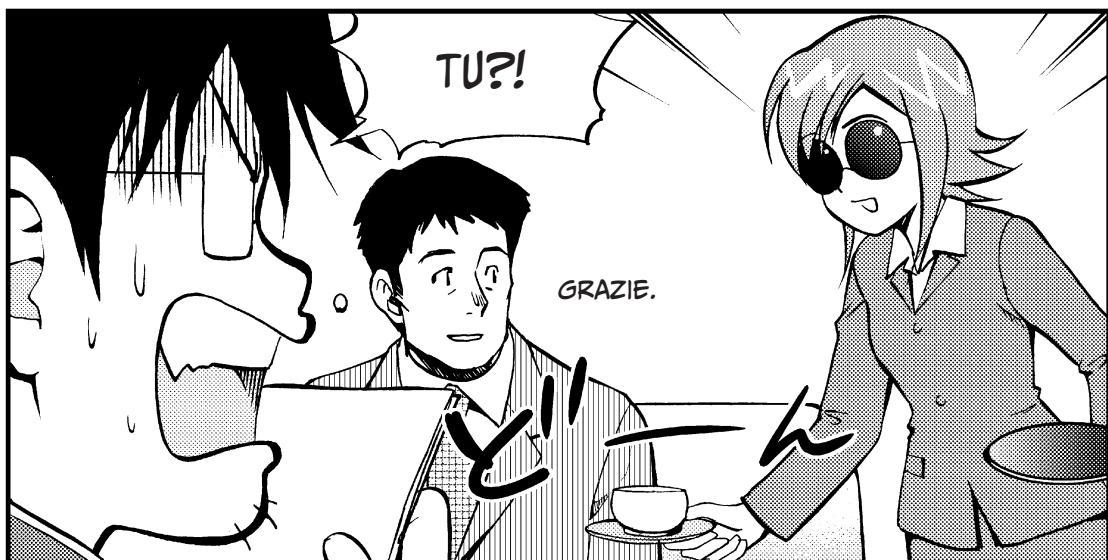
REDAZIONE CENTRALE  
DELL'ASAGAKE TIMES.

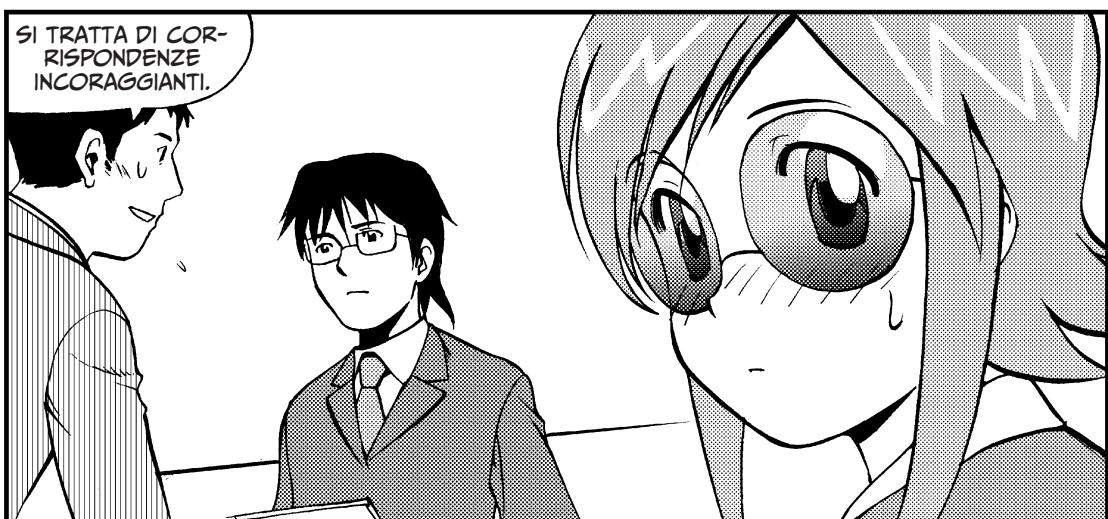


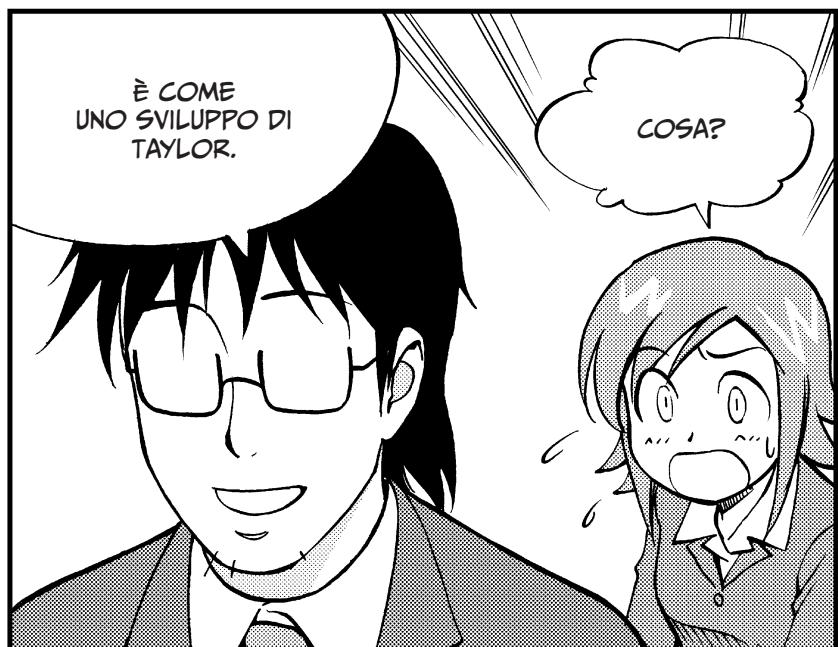
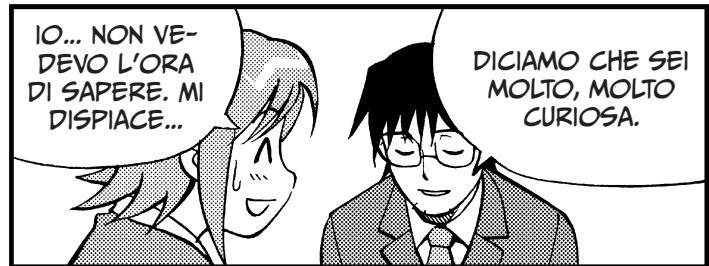
## APPROSSIMARE CON I POLINOMI



HO SENTITO PARLARE MOLTO DI LEI, MR. SEKI.







DERIVARE SIGNIFICA SEMPLICEMENTE APPROXIMARE CON UNA FUNZIONE LINEARE.



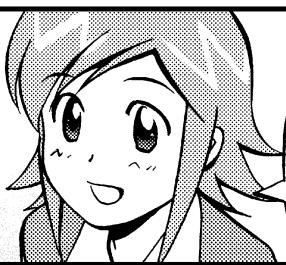
ABBIAMO APPROSSIMATO LE FUNZIONI PER RICAVARE INFORMAZIONI DI MASSIMA DA SITUAZIONI SEMPLIFICATE, DICO BENE?



DATA LA FUNZIONE  $f(x)$ , SE PONIAMO  $p=f(a)$  e  $q=f(a)$ , VICINO AL VALORE  $x=a$  POSSIAMO APPROXIMARLA CON LA FUNZIONE LINEARE  $f(x) \approx q + p(x-a)$ .

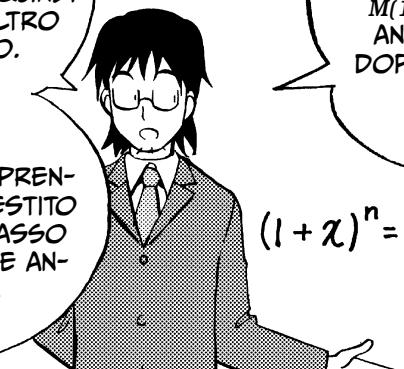


IN ALTRI CASI, INVECE, ABBIAMO USATO UNA FUNZIONE QUADRATICA O CUBICA.



SÌ, PER ESEMPIO NEL CASO DI JOHNNY FANTASTIC, CHE AVEVA COMINCIATO A INGRASSARE DOPO AVERE ROTTO CON LA FIDANZATA.

È UN PO' CHE NON LO FACCIO, QUINDI ECCO UN ALTRO ESEMPIO.



SUPPONI DI PRENDERE IN PRESTITO  $M$  YEN AL TASSO D'INTERESSE ANNUO  $x$ .

SE RIPAGHI IL DENARO DOPO UN ANNO, PAGHERAI LA CIFRA  $M(1+x)$ . SE CI METTERAI DUE ANNI, PAGHERAI  $M(1+x)(1+x)$ . DOPO  $n$  ANNI, ABBIAMO  $M(1+x)^n$ . ORA, SE VOGLIAMO "SVILUPPARE" QUESTA FUNZIONE\*...

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \dots$$

OTTENIAMO QUESTO.

$$(1+x)^n = 1 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + {}_n C_3 x^3 + \dots + {}_n C_n x^n$$

\*È LA FORMULA DELLO SVILUPPO BINOMIALE, DOVE  ${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$  E  ${}_n C_1 = n$

$${}_n C_2 = \frac{n(n-1)}{2}, {}_n C_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \dots, {}_n C_r = \frac{n(n-1)\dots(n-(r-1))}{r!}$$

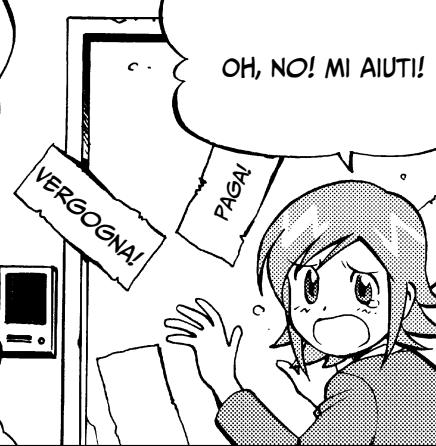
PRENDERE SOLO  
I PRIMI TERMINI  
SIGNIFICA  
APPROSSIMARE  
 $(1+x)^n$  CON LA  
FUNZIONE LINEARE  
 $1+nx.$

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx$$

MA...

IN EFFETTI, È  
UN'APPROSSIMA-  
ZIONE TROPPO  
RUDIMENTALE PER  
SERVIRE A QUA-  
COSA.

SE USASSI QUE-  
STA ESPRESSIONE,  
PRENDERESTI IN  
PRESTITO TROPPI  
SOLDI E FINIRE-  
STI DENTRO PER  
DEBITI.



PERCIÒ USEREMO  
UN'APPROSSIMA-  
ZIONE QUA-  
DRATICA...

A-ASPETTI UN ATTIMO!  
CREDEVO CHE GLI  
SVILUPPI DI TAYLOR  
RIGUARDASSERO  
IL NOSTRO  
GIORNALE!

TI DISPIACE PA-  
ZIENTARE SOLO  
UN ALTRO UN  
MINUTO?

### FORMULA 5.1 - L'APPROXIMAZIONE QUADRATICA

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

MODIFICANDO LEGGERMENTE QUESTA ESPRESSIONE OTTENIAMO UNA REGOLA MOLTO INTERESSANTE.



Per ogni coppia di numeri  $n$  e  $x$  per cui  $nx = 0,7$  abbiamo

$$\begin{aligned}(1+x)^n &\approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \approx 1 + nx + \frac{1}{2}(nx)^2 - \frac{1}{2}nx^2 \\ &\approx 1 + 0.7 + \frac{1}{2} \times 0.7^2 = 1.945 \approx 2\end{aligned}$$

è quasi 0, quindi lo trascuriamo

In breve, se  $nx = 0,7$  allora  $(1+x)^n$  vale quasi 2.

Possiamo scriverlo così:

#### LA LEGGE DELL'INFERNO DEL DEBITORE

Se numero degli anni  $\times$  il tasso d'interesse = 0,7  
ripagherete circa il doppio di quanto preso in prestito.

CIRCA IL DOPPIO  
DOPO 35 ANNI AL 2%  
CIRCA IL DOPPIO DOPO  
7 ANNI AL 10%  
CIRCA IL DOPPIO DOPO 2  
ANNI AL 35%



OH, NO!!  
MA È TERRIBILE!!



I TERMINI  $x^n$  PER CUI N È MAGGIORE DI 1 VENGONO DETTI TERMINI DI ORDINE SUPERIORE.

APPROSSIMARE UNA FUNZIONE CON UNA CURVA QUADRATICA (DI SECONDO GRADO) SPESO CI PERMETTE DI FARE ALCUNE SCOPERTE INTERESSANTI. PROVIAMO ADESSO A FARLO CON UN POLINOMIO DI ORDINE SUPERIORE. IN EFFETTI, È BEN NOTO CHE È POSSIBILE RICOSTRUIRE ESATTAMENTE LA FUNZIONE ORIGINALE CON UN POLINOMIO DI ORDINE INFINTO.

Se per esempio  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , abbiamo

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (\text{all'infinito})$$

Attenzione! c'è scritto = invece di  $\approx$ .



COM'È POSSIBILE? DEV'ESSERE UN ERRORE, NON PUÒ ESSERE UGUALE!

SAPEVO CHE L'AVRESTI DETTO.  
PROVIAMO A SVOLGERE I CALCOLI.



Supponiamo che  $x = 0,1$ . Allora

$$f(0,1) = \frac{1}{1-0,1} = \frac{1}{0,9} = \frac{10}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{Membro destro} &= 1 + 0,1 + 0,1^2 + 0,1^3 + 0,1^4 + \dots \\ &= 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots \\ &= 1,111111\dots \end{aligned}$$

Se calcoliamo  $10/9$  facendo la divisione, otteniamo il medesimo risultato.

$$\begin{array}{r} 1.111\dots \\ 9 \overline{)10} \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 1 \end{array}$$

Quando una funzione generica  $f(x)$  (che sia però derivabile un numero qualsiasi di volte) può essere scritta nella forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Il membro destro viene chiamato sviluppo di Taylor di  $f(x)$  (in un intorno di  $x=0$ ).



QUESTO VUOL DIRE CHE  $f(x)$  COINCIDE ESATTAMENTE CON UN POLINOMIO DI GRADO INFINTO IN UN DETERMINATO INTERVALLO CONTENENTE  $x=0$ . NOTIAMO PERÒ CHE IL MEMBRO DI DESTRA PUÒ PERDERE DI SIGNIFICATO E NON AVERE UN VALORE BEN DEFINITO AL DI FUORI DELL'INTERVALLO IN QUESTIONE.

PER ESEMPIO, SOSTITUIAMO  
 $x=2$  IN ENTRAMBI I MEMBRI  
DELL'ESPRESSIONE ①

$$\text{A sinistra} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$\text{A destra} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

VISTO?  
NON SONO UGUALI.

Si può dimostrare che l'espressione ① ha senso per  $-1 < x < 1$ , che è l'insieme dei valori ammissibili per lo sviluppo di Taylor (in  $x=0$ ). Questo insieme viene chiamato *intervallo di convergenza*.



## COME RICAVARE LO SVILUPPO DI TAYLOR

Dato lo sviluppo

$$\textcircled{2} \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

cerchiamo di trovare il coefficiente  $a_n$ .

Sostituendo  $x = 0$  nell'espressione e osservando che  $f(0) = a_0$ , vediamo che il coefficiente di grado 0  $a_0$  è  $f(0)$ .

Ora deriviamo \textcircled{2}.

$$\textcircled{3} \quad f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

Sostituendo  $x = 0$  in \textcircled{3} e osservando che  $f'(0) = a_1$ , Abbiamo determinato il coefficiente di primo grado.

Ora deriviamo \textcircled{3} e otteniamo

$$\textcircled{4} \quad f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots$$

Sostituendo  $x = 0$  in \textcircled{4}, vediamo che il coefficiente di secondo grado

$a_2$  è  $\frac{1}{2} f''(0)$ .

Derivando \textcircled{4}, otteniamo

$$f'''(x) = 6a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + \dots$$

Da cui il coefficiente di terzo grado, che è  $a_3$  is  $\frac{1}{6} f'''(0)$ .

Ripetendo l'operazione e derivando  $n$  volte, otteniamo

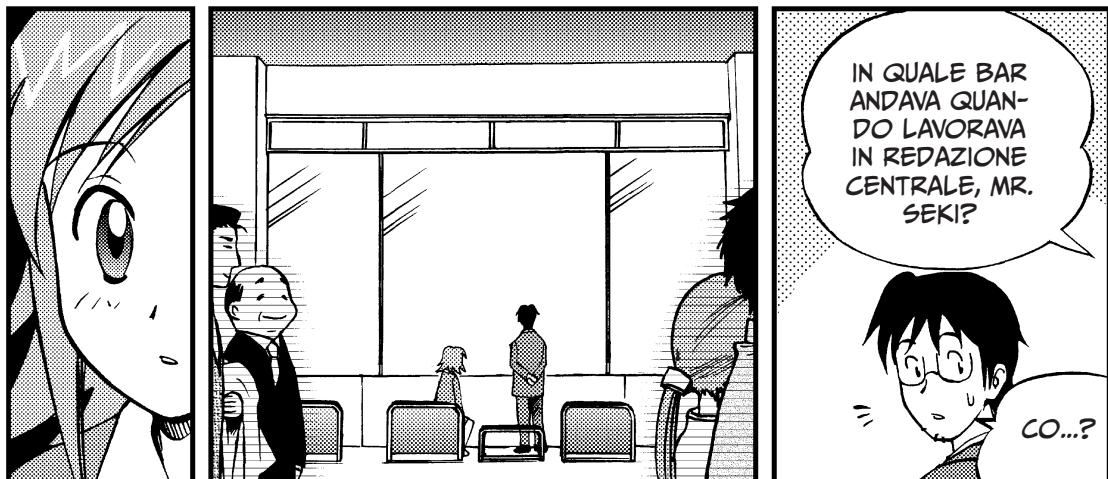
$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\dots \times 2 \times 1 a_n + \dots$$

dove  $f^{(n)}(x)$  è quello che si ottiene derivando  $n$  volte  $f(x)$ .

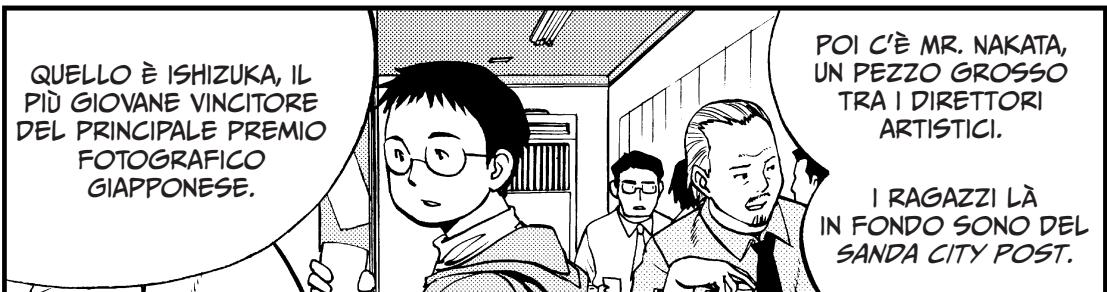
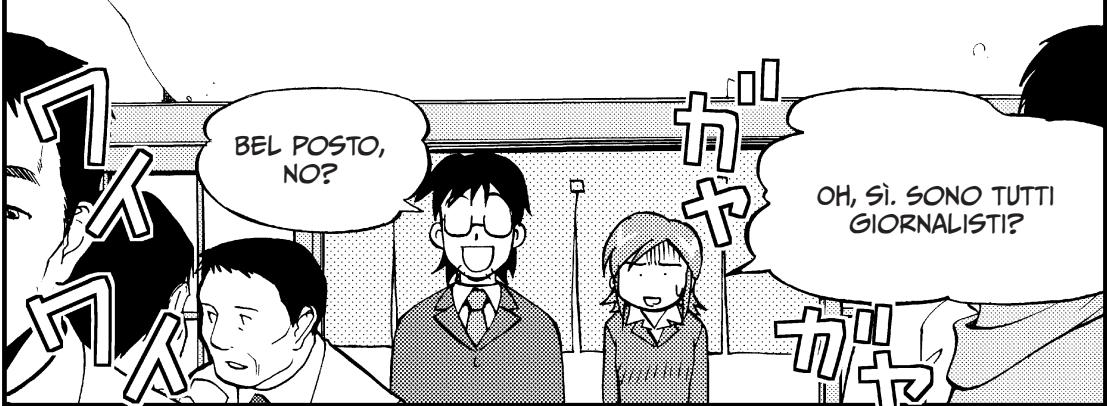
Da qui è facile trovare il coefficiente di grado  $n$ :

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

$n!$  si legge "n.fattoriale" e indica il numero  $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ .







## FORMULA 5.2 - LO SVILUPPO DI TAYLOR

Se  $f(x)$  possiede uno sviluppo di Taylor in  $x = 0$ , allora è dato da

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \dots$$

Da cui discende

$f(0)$	Termine costante di grado 0	$a_0 = f(0)$
$f'(0)x$	Termine di grado 1	$a_1 = f'(0)$
$\frac{1}{2!} f''(0)x^2$	Termine di grado 2	$a_2 = \frac{1}{2} f''(0)$
$\frac{1}{3!} f'''(0)x^3$	Termine di grado 3	$a_3 = \frac{1}{6} f'''(0)$

Per ora, non preoccupiamoci delle condizioni sotto cui lo sviluppo esiste in un certo intervallo di convergenza.

Usando questa formula, verifichiamo la ① a pagina 153.

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \dots$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 2, f'''(0) = 6, \dots, f^{(n)}(0) = n!$$

Perciò abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \dots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!} \times 2x^2 + \frac{1}{3!} \times 6x^3 + \dots + \frac{1}{n!} n!x^n + \dots \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \end{aligned}$$

COINCIDONO!



LA FORMULA RAPPRESENTA UN POLINOMIO DI GRADO INFINTO CHE COINCIDE CON LA FUNZIONE ORIGINALE IN UN INTORNO DI  $x=0$ . LA FORMULA PER UN POLINOMIO IN UN INTORNO DI UN GENERICO PUNTO  $x=a$  È LA SEGUENTE. PROVATE A VERIFICARLA CON L'ESERCIZIO A PAGINA 178!

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \dots \end{aligned}$$

LO SVILUPPO DI TAYLOR DI UNA FUNZIONE È UN'ECCELLENTE APPROSSIMAZIONE.



# SVILUPPI DI TAYLOR DI FUNZIONI

## [1] SVILUPPO DI TAYLOR DELLA RADICE QUADRATA

Poniamo  $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ .

Per cui, da  $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}}, \dots$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = -\frac{1}{4}, f'''(0) = \frac{3}{8}, \dots$$

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!} \times \left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{1}{3!} \times \frac{3}{8}x^3 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \dots$$

## [3] SVILUPPO DI TAYLOR DELLA FUNZIONE LOGARITMO $\ln(1+x)$

Poniamo  $f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2}, f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3},$$

$$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}, \dots$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f^{(3)}(0) = 2!,$$

$$f^{(4)}(0) = -3!, \dots$$

Abbiamo quindi

$$\ln(1+x) =$$

$$0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!} \times 2!x^3 - \frac{1}{4}3!x^4 + \dots$$

$$\ln(1+x) =$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}x^n + \dots$$

## [2] SVILUPPO DI TAYLOR DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE $e^x$

Se poniamo  $f(x) = e^x$ ,

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f'''(x) = e^x, \dots$$

Perciò, da

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

Sostituendo  $x = 1$ , otteniamo

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

NEL CAPITOLO 4 ABBIAMO VISTO CHE  $e$  VALE CIRCA 2,71. ORA ABBIAMO RICAVATO UN'ESPRESSIONE PER CALCOLARLO CON PRECISIONE MAGGIORE.



## [4] SVILUPPO DI TAYLOR DI FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Sia  $f(x) = \cos x$ .

$$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f^{(3)}(x) = \sin x, f^{(4)}(x) = \cos x, \dots$$

Da cui

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1,$$

$$f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1, \dots$$

Perciò,

$$\cos x = 1 + 0x - \frac{1}{2!} \times 1 \times x^2 + \frac{1}{3!} \times 0 \times x^3 + \frac{1}{4!} \times 1 \times x^4 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \dots$$

Analogamente

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \dots$$

## CHE COSA CI DICONO GLI SVILUPPI DI TAYLOR?



SONO UN MODO PER SOSTITUIRE FUNZIONI COMPLICATE CON UN POLINOMIO. PER ESEMPIO, SAPRESTI DISEGNARE IL GRAFICO DI  $\ln(x+1)$ ?

IL PUNTO È CHE PER CAPIRE IL MONDO INVISIBILE CHE SI CELA DIETRO UNA FUNZIONE DOBBIAMO PRIMA APROSSIMARLA, DICO BENE?



ESATTO. CONSIDERIAMO  $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$   
UNO DEGLI ESEMPI DI CUI SOPRA, PER CAPIRE QUANTO POSSONO ESSERE UTILI GLI SVILUPPI DI TAYLOR.



$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

Appross. lineare  
Appross. di grado 0      Appross. cubica  
Appross. quadratica

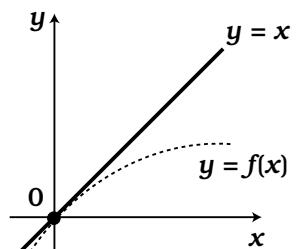
PER COMINCIARE, UN'APPROSSIMAZIONE DI GRADO ZERO.  $\ln(1+x) \approx 0$  IN UN INTORNO DI  $x=0$ . CHE COSA VUOL DIRE, NORIKO?



UH... ECCO... CHE IN  $x=0$  IL VALORE DI  $f(x)$  È 0 E QUINDI IL GRAFICO PASSA PER IL PUNTO  $(0,0)$ .



ESATTAMENTE. POI È IL MOMENTO DELL'APPROSSIMAZIONE LINEARE. VEDI CHE VICINO A  $x=0$  LA FUNZIONE  $y=f(x)$  RICORDA APPROSSIMATIVAMENTE  $y=x$ ? QUESTO VUOL DIRE CHE IN  $x=0$  LA FUNZIONE CRESCЕ.

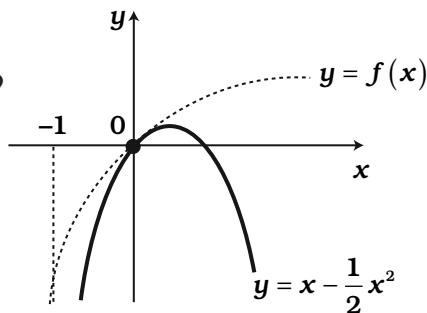




E ORA, UN PASSO IN AVANTI CON L'APPROXIMAZIONE QUADRATICA. CONSIDERIAMO IL GRAFICO DI

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$$

IN UN INTORNO DELLO 0. CHE COSA SIGNIFICA, NORIKO?



VUOL DIRE CHE VICINO ALLO 0  $y=f(x)$  ASSOMIGLIA APPROSSIMATIVAMENTE A  $y = x - \frac{1}{2}x^2$

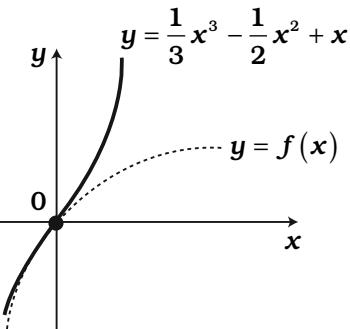
E CHE IN  $x=0$  IL GRAFICO È RIVOLTO VERSO IL BASSO  
(L'APPROXIMAZIONE QUADRATICA CI PERMETTE DI STIMARNE LA CURVATURA IN UN PUNTO  $x=a$ )



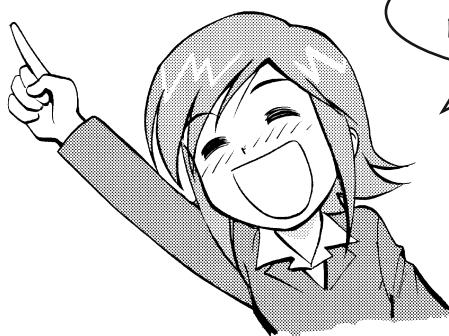
INFINE, SPINGIAMOCI FINO ALL'APPROXIMAZIONE CUBICA! VICINO A  $x=0$ ,

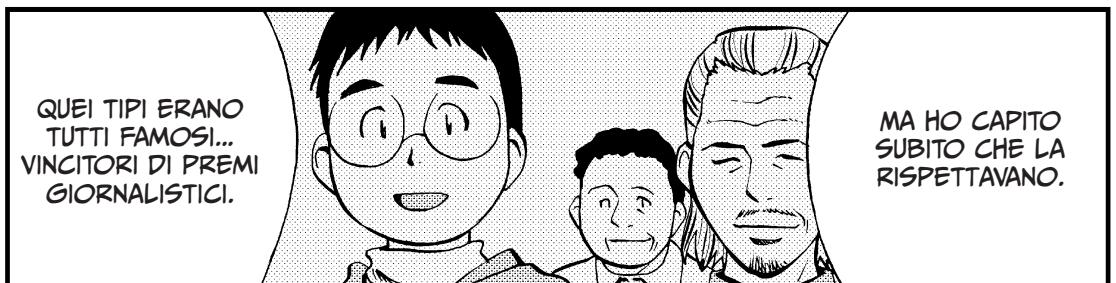
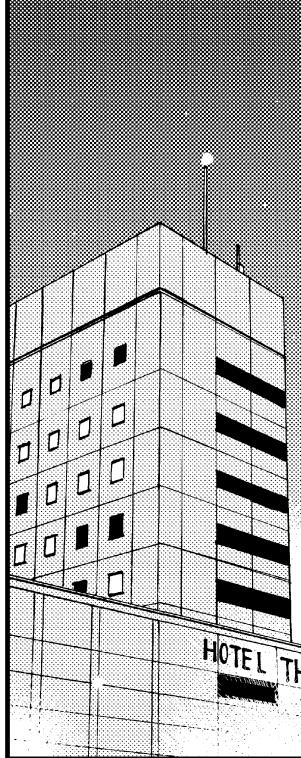
$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

(L'APPROXIMAZIONE CUBICA CORREGGE ULTERIORMENTE L'ERRORE DI QUELLA QUADRATICA).



E ADESSO TUTTI AL PROSSIMO PUB, MR. SEKI!





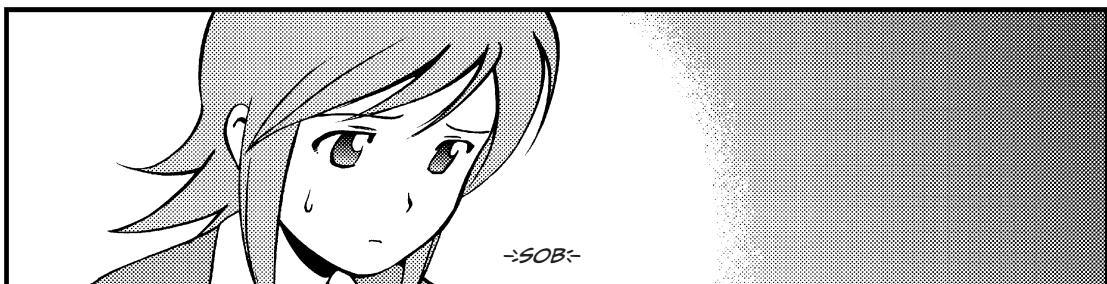
COME PUÒ ESSERE  
FELICE DI RESTARSE-  
NE RINTANATO IN UNA  
REDAZIONE LOCALE?

ORMAI SCR-  
VE SOLO  
ASSURDITÀ!

BASTA ALCOOL  
PER LEI.

MI CHIEDO CHE  
PROBABILITÀ AB-  
BIA VERAMENTE  
DI DIVENTARE UNA  
STAR DEL GIOR-  
NALISMO, COME  
QUELLI DEL  
PUB.

SE L'UNICA COSA CHE TI  
INTERESSA È LA PRO-  
BABILITÀ DI DIVENTARE  
IMPORTANTE, NON DI-  
VENTERAI NIENTE. NON  
ARRIVERAI DA NESSUNA  
PARTE CONTINUANDO AD  
ASPETTARE.



QUANDO ANALIZZIAMO GLI EVENTI INCERTI USANDO LA PROBABILITÀ, SPESISSIMO USIAMO LA DISTRIBUZIONE NORMALE.

$f(x)$

0

$x$

UH-UH...



LA DISTRIBUZIONE È CARATTERIZZATA DA UNA FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ, PROPORZIONALE A

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

A MENO DI UN FATTORE DI SCALA. DALLA FIGURA, È CHIARO CHE IL GRAFICO È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE DELLE Y E HA LA FORMA DI UNA CAMPANA.



SCRATCH  
SCRATCH

ME LO SCUSINO, MI SA CHE SCRIVERÀ UN SACCO. AVETE MICA DEGLI ALTRI SOTTO-BICCHIERI?

OPLÀ!



È UNA DISTRIBUZIONE TIPICA DI UN SACCO DI FENOMENI. PER ESEMPIO, L'ALTEZZA DEGLI ESSERI UMANI O DEGLI ANIMALI.

O GLI ERRORI DI MISURA NEGLI ESPERIMENTI.



NEGLI AMBIENTI FINANZIARI, SI PENSA CHE I TASSI DEGLI UTILI GENERATI DALLE AZIONI SEGUANO UNA DISTRIBUZIONE NORMALE.

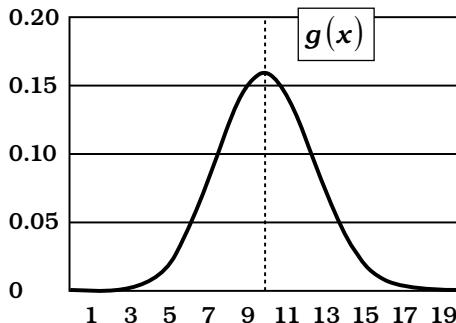
I SISTEMI DI VOTAZIONE PER GLI STUDENTI SPESO SI BASANO SULLA DISTRIBUZIONE NORMALE, PERCHÉ CI SI ASPETTA CHE VENGANO SEGUITA DAI RISULTATI DEGLI ESAMI.

GRAZIE A UNO SVILUPPO DI TAYLOR, TI MOSTRERÒ COME IL LANCIO DI UNA MONETA SEGLIA LA DISTRIBUZIONE NORMALE. QUAL È LA PROBABILITÀ CHE ESCA TESTA?

FLIP

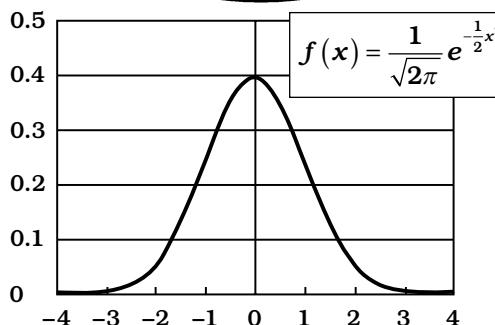
NON MI TRATTI DA STUPIDA!  
È 0,5.

ESATTO. NON SAPPIAMO QUALE FACCIA USCIRÀ MA SAPPIAMO CHE LA PROBABILITÀ DI UNA PARTICOLARE FACCIA È DI 1 SU 2.



Numero di "testa" lanciando 20 monete tutte insieme  
(distribuzione binomiale).

IL PRIMO GRAFICO MOSTRA LA PROBABILITÀ CHE ESCA "TESTA" LANCIANDO 20 MONETE TUTTE INSIEME: SULL'ASSE DELLE  $x$  ABBIAMO IL NUMERO DELLE USCITE, SU QUELLO DELLE  $y$  ABBIAMO LA PROBABILITÀ.



Distribuzione normale standard

OH... ASSOMIGLIA AL SECONDO.

SÌ, SI SOVRAPPONE QUASI PERFETTAMENTE AL GRAFICO DI UNA DISTRIBUZIONE NORMALE.

IN EFFETTI, SE DEFINIAMO  $g_n(x)$  COME LA "PROBABILITÀ DI OTTENERE TESTA  $x$  VOLTE LANCIANDO  $n$  MONETE TUTTE INSIEME"\*, E FACCIAVAMO TENDERE  $n$  ALL'INFINTO...

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

QUELL'EQUAZIONE  
L'HA GIÀ SCRITTA!  
PERCHÉ CONTINUA A  
CONSUMARE I MIEI  
SOTTOBICCHIERI?

CALMA,  
EMH...

...LA POSSIAMO  
RISCRIVERE E  
VEDERE CHE È  
PROPORTZIONALE  
ALLA FUNZIONE  
NORMALE.

\* La distribuzione della probabilità di ottenere  $x$  "testa" lanciando  $n$  monete, di solito viene chiamata distribuzione binomiale.

Troviamo per esempio la probabilità di ottenere 3 volte testa lanciando 5 monete. Se T=testa e C=coda, la probabilità di ottenere TTCTC è

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

Siccome esistono  ${}_5C_3$  modi di ottenere 3 volte testa e 2 volte croce, la probabilità è  ${}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^5$ . L'espressione generale è  ${}_nC_x \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . Ora mostriremo che per  $n$  molto grande la distribuzione binomiale si avvicina a quella normale.

USANDO LA DISTRIBUZIONE BINOMIALE,  
ABBIAMO

$$g_n(x) = {}_n C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$$
$$= {}_n C_x \left(\frac{1}{2}\right)^n$$



POICHÉ IL GRAFICO  
DI  $f(x)$  È SIMMETRICO  
RISPETTO ALL'ASSE  
 $x=0$  E  $g_n(x)$  RISPETTO  
A  $x=\frac{1}{2}$ ...



INVECE DI  $g_n(x)$   
POSSIAMO CONSIDERARE  $g_n(n/2)$

QUINDI...

$$g_n\left(\frac{n}{2}\right) = {}_n C_{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

DIVIDIAMO  $g_n(x)$   
PER IL RISULTATO

$$h_n(x) = \frac{g_n(x)}{g_n\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{{}_n C_x}{{}_n C_{\frac{n}{2}}}$$

E OTTENIAMO  
 $h_n$ , LA FUNZIONE SCALATA.

POICHÉ

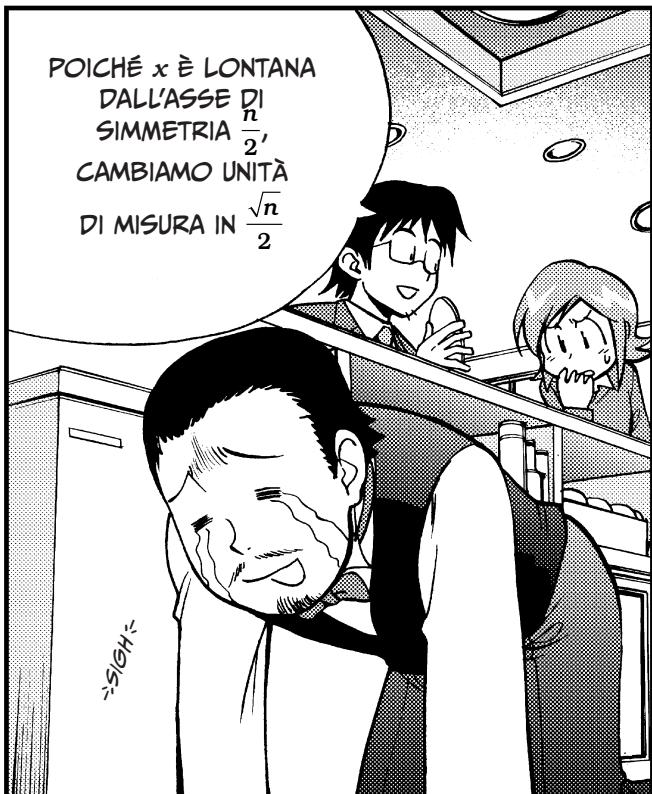
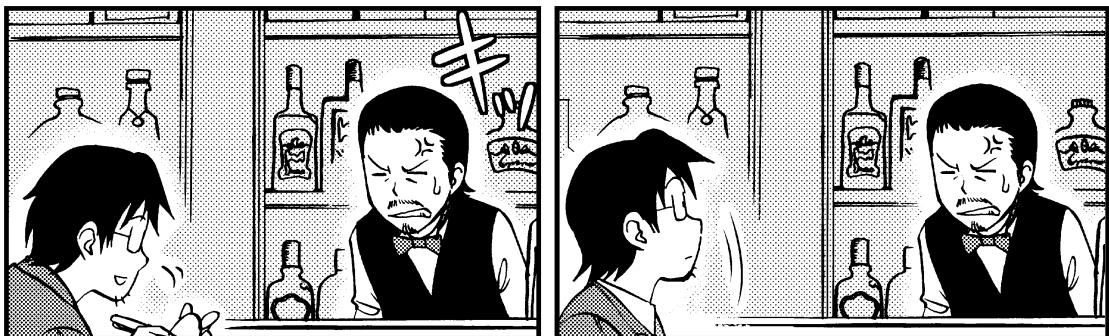
$${}_n C_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

ABBIAMO CHE

$${}_n C_{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

E DIVIDENDO...

$$h_n(x) = \left( \frac{n!}{x!(n-x)!} \right) \times \left( \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}{n!} \right) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}{x!(n-x)!}$$



\*LA DEVIAZIONE STANDARD È UNA MISURA DELLA DISPERSIONE DEI DATI.

IN ALTRE PAROLE

$$\chi = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} \times 1 \rightarrow z = 1$$

$$\chi = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} \times 2 \rightarrow z = 2$$

$$\chi = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} \times 3 \rightarrow z = 3$$

IN QUESTO MODO, ABBIAMO CAMBIATO VARIABILE. QUELLA NUOVA, LA Z, RAPPRESENTA IL NUMERO DI DEVIAZIONI STANDARD DALL'ASSE DI SIMMETRIA.



PONIAMO  $\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z = x$   
E SOSTITUIAMO z IN  $h_n$ .

$$\text{OTTENIAMO } h_n(z) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z\right)! \left(\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} z\right)!}$$

$$\left[ n - \left( \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z \right) \right]$$

PASSIAMO POI AL LOGARITMO  $\ln$  DI CIASCUN MEMBRO\*

$$\ln h_n(z)$$

$$= \ln \left[ \left( \frac{n}{2} \right)! \right] + \ln \left[ \left( \frac{n}{2} \right)! \right] - \ln \left[ \left( \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z \right)! \right] - \ln \left[ \left( \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} z \right)! \right]$$

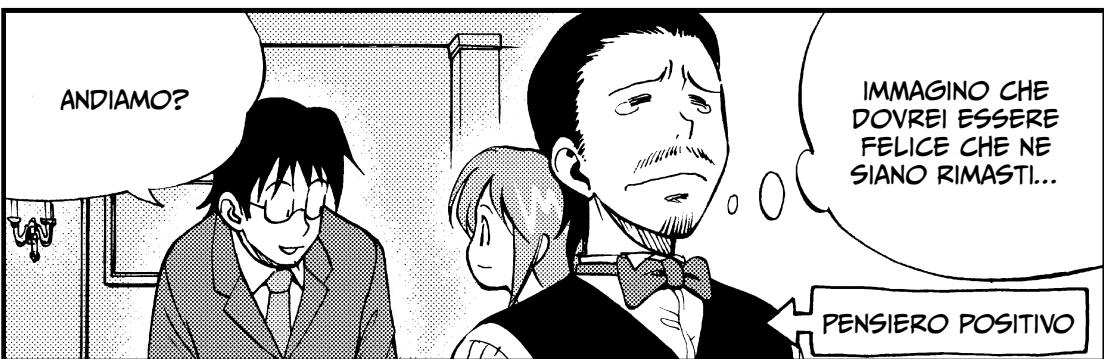
\* RICORDIAMO LA PROPRIETÀ

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{d}{c} = \ln d - \ln c$$

ORA DOBBIAMO CALCOLARE QUESTA ESPRESSIONE... MA FORSE SARÀ MEGLIO CAMBIARE BAR.





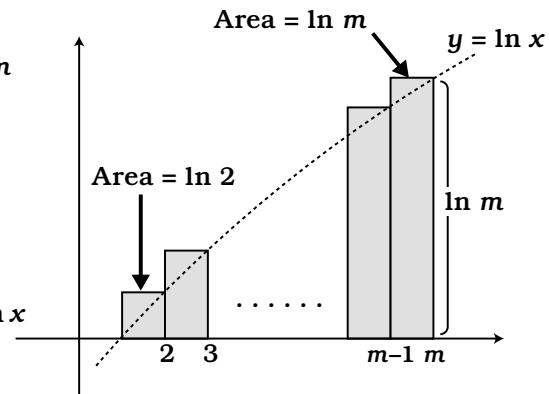
Approssimiamo  $\ln(m!)$

$$\ln m! = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln m$$

Se nel grafico di  $\ln x$  consideriamo dei rettangoli come in figura, otteniamo

$$\ln 2 + \dots + \ln m \approx \int_1^m \ln x dx$$

$$(x \ln x - x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$



Quindi,

$$\begin{aligned} \int_1^m \ln x dx &= (m \ln m - m) - (1 \ln 1 - 1) \\ &= m \ln m - m + 1 \end{aligned}$$

Siccome faremo uso di questa formula per  $m$  molto grande, il termine più importante è  $m \ln m$ , mentre  $-m+1$  è molto più piccolo, e lo ignoriamo. Indicativamente, possiamo quindi usare l'approssimazione  $m! \approx m \ln m$



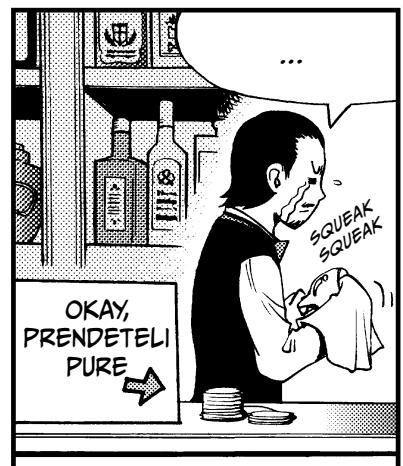
$$\ln h_n(x) \approx \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} - \left( \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z \right) \ln \left( \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z \right) - \left( \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} z \right) \ln \left( \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} z \right)$$

Dopo un sacco di passaggi, otteniamo

$$\ln h_n(x) \approx - \left[ \left( \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z \right) \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{n}}{n} z \right) + \left( \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} z \right) \ln \left( 1 - \frac{\sqrt{n}}{n} z \right) \right]$$

TRA L'ALTRO,  
ABBIAMO USATO  
L'UGUAGLIANZA

$$\ln \left( \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z \right) = \ln \left\{ \frac{n}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{n}}{n} z \right) \right\} = \ln \frac{n}{2} + \ln \left( 1 + \frac{\sqrt{n}}{n} z \right)$$



QUANDO T SI AVVICINA A ZERO

$$\ln(1+t) \approx t - \frac{1}{2}t^2$$

(APPROXIMAZIONE QUADRATICA, O DEL SECOND'ORDINE\*)



PER  $n$  ABBASTANZA

GRANDE,  $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$  È VICINO ALLO ZERO.

QUINDI LO È ANCHE  $\frac{\sqrt{n}}{n} z$  PER OGNI  $z$  FISSATO.



\*V. PAGINA 161

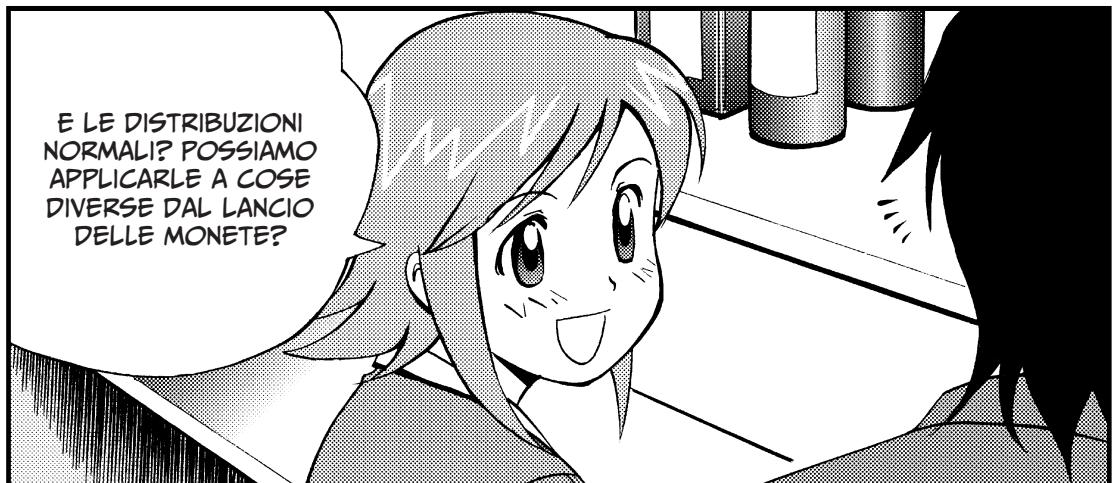
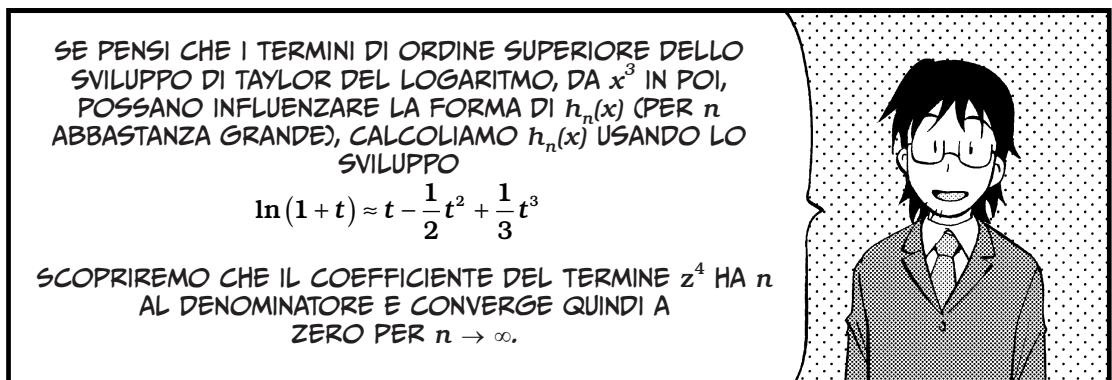
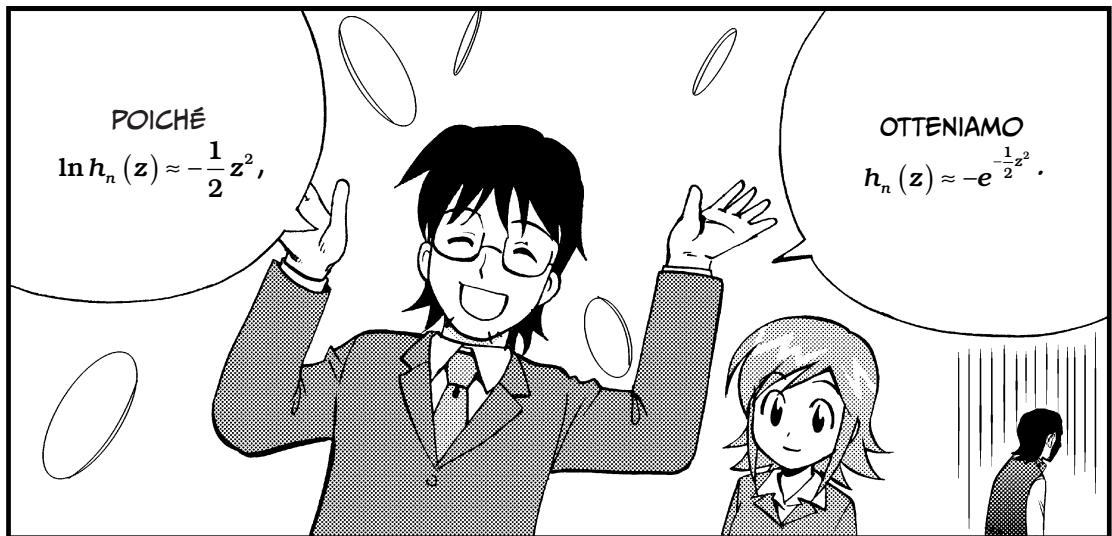
PERTANTO,

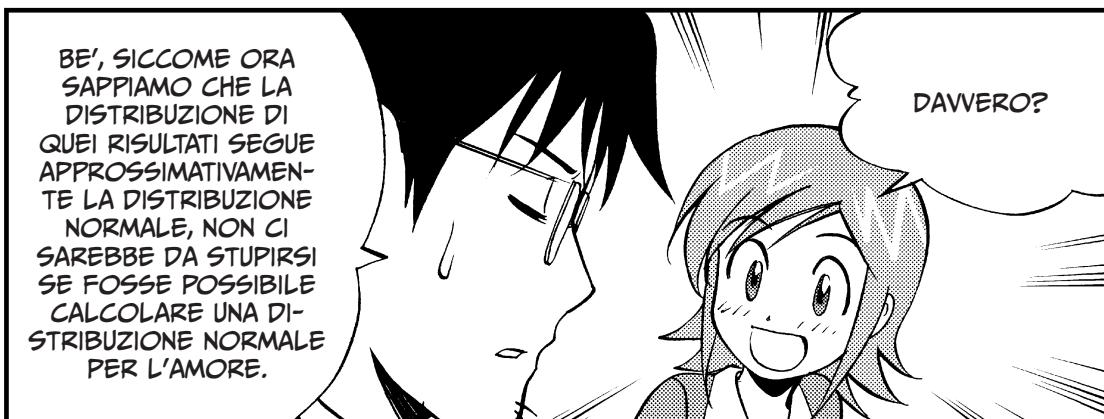
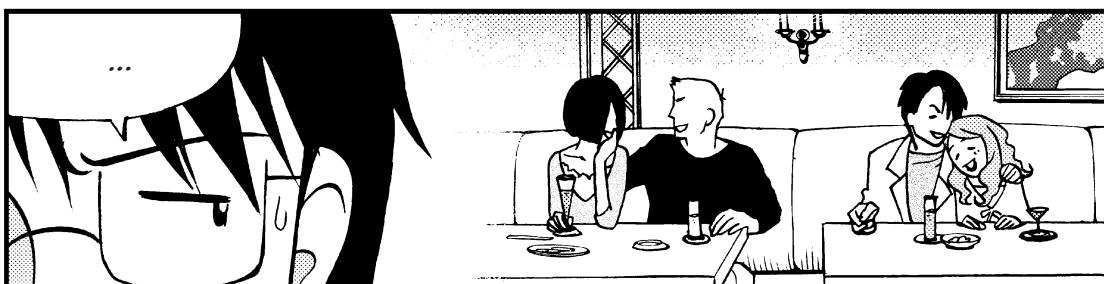
$$\ln\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n} z\right) \approx \frac{\sqrt{n}}{n} z - \frac{1}{2} \frac{1}{n} z^2$$

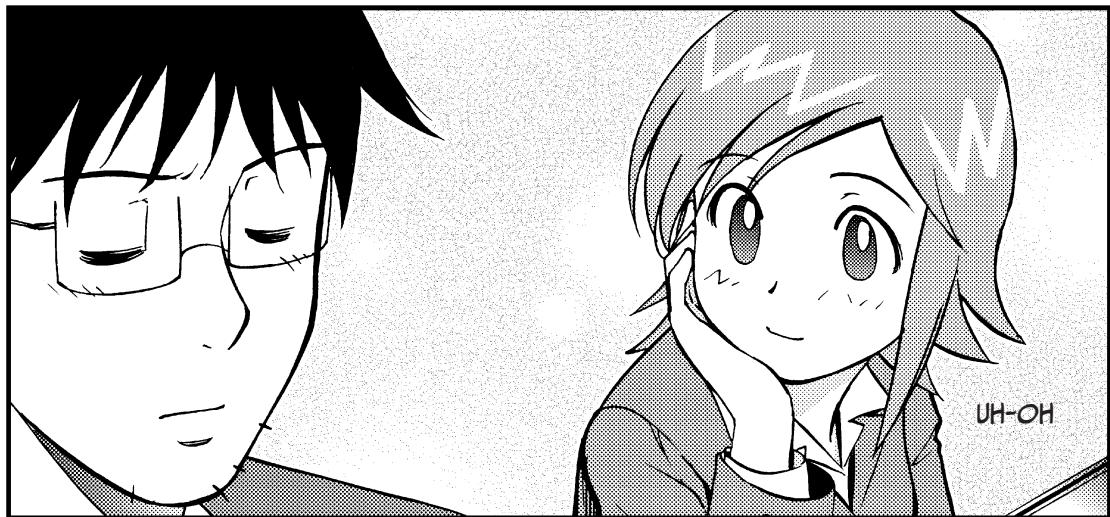
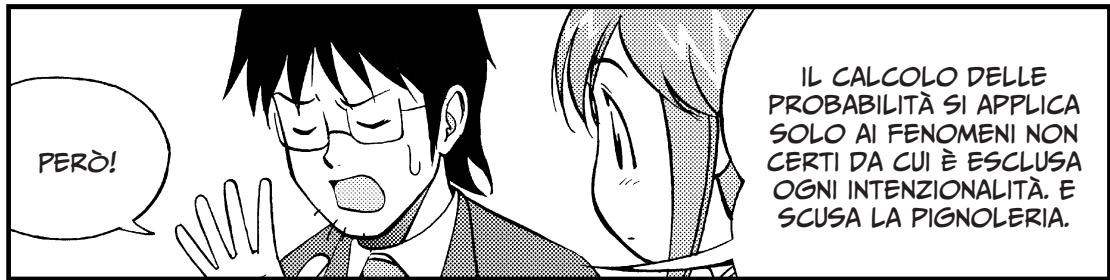
$$\ln\left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n} z\right) \approx -\frac{\sqrt{n}}{n} z - \frac{1}{2} \frac{1}{n} z^2$$

POSSIAMO SO-  
STITUIRLO NELL'E-  
SPRESSIONE

$$\begin{aligned}\ln h_n(x) &\approx -\left[\left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z\right)\left(\frac{\sqrt{n}}{n} z - \frac{1}{2} \frac{1}{n} z^2\right) + \left(\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} z\right)\left(-\frac{\sqrt{n}}{n} z - \frac{1}{2} \frac{1}{n} z^2\right)\right] \\ &= -\left[z^2 - \frac{1}{2} z^2\right] = -\frac{1}{2} z^2\end{aligned}$$







## ESERCIZI

1. Calcolare lo sviluppo di Taylor di  $f(x) = e^{-x}$  in  $x = 0$ .
2. Calcolare l'approssimazione quadratica di  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$  in  $x = 0$ .
3. Derivare lo sviluppo di Taylor di  $f(x)$  in  $x=1$  di pagina 159. In altre parole, ricavate l'espressione dei coefficienti  $c_n$  nell'espressione:

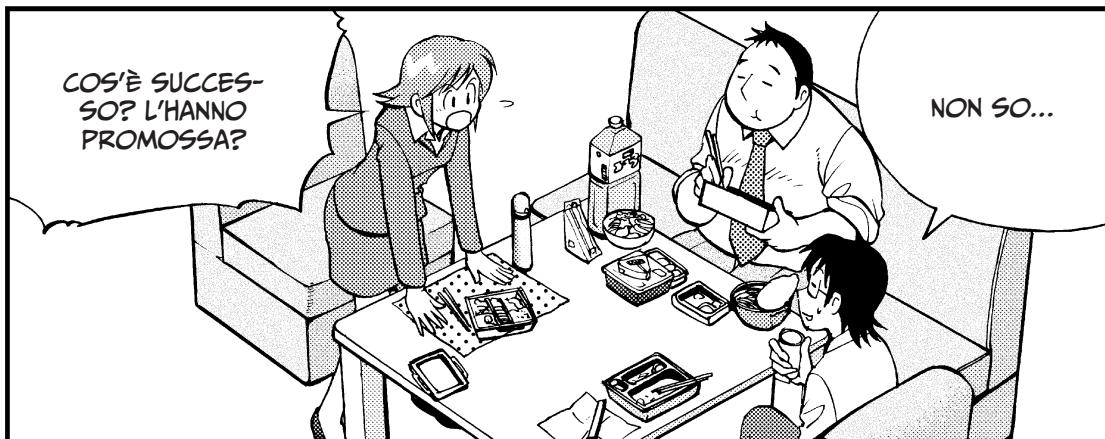
$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n$$

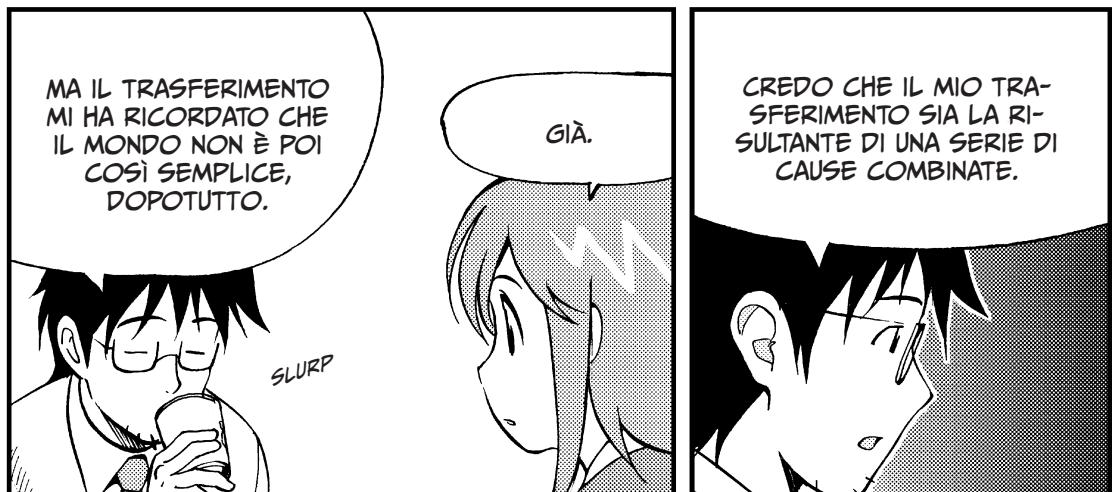
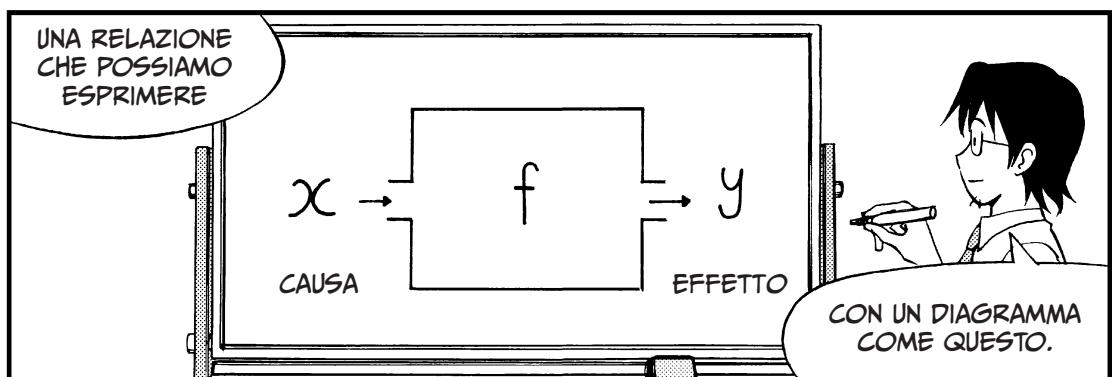
# 6

## LE DERIVATE PARZIALI!

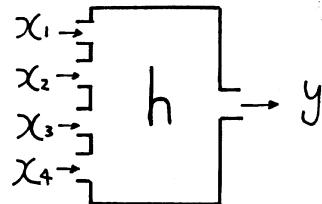
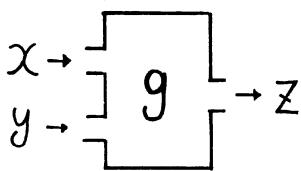


## CHE COSA SONO LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI?





POSSIAMO  
RAPPRESEN-  
TARLO



IN QUESTO MODO

NEL CASO DI MR. SEKI, LA  $x$  È LO STILE ECCELLENTE,  $y$  È IL SUO GIORNALISMO D'INCHIESTA SENZA COMPROMESSI E  $z$  È IL TRASFERIMENTO ALLA REDAZIONE CENTRALE, DICO BENE?

BE', IN REALTÀ ANCORA NON CONOSCO I MOTIVI DEL TRASFERIMENTO.

NEL CASO DI NORIKO,  $x_1$  SONO LE CANTONATE DEL MESE SCORSO,  $x_2$  QUELLE DI QUESTO MESE E  $x_3$  E  $x_4$  SONO TRASCURATEZZA E SCARSA IGIENE PERSONALE, IL CHE SPIEGA IL CONFINAMENTO AI NECROLOGI.



CHIUDI IL BECCO, RAZZA DI BUE!

BASTA COSÌ,  
NORIKO. NON CI RESTA  
MOLTO TEMPO.

DOBBIAMO  
IMPARARE LE  
NOZIONI FONDA-  
MENTALI.



#### ESEMPIO 1

Supponiamo che un oggetto si trovi all'altezza di  $h(v,t)$  metri dopo che sono trascorsi  $t$  secondi da quando è stato gettato verticalmente verso terra con la velocità  $v$ . Allora  $h(v,t)$  è data da

$$h(v,t) = vt - 4,9t^2$$

#### ESEMPIO 2

La concentrazione  $f(x,y)$  di sciroppo di glucosio che si ottiene sciogliendo  $y$  grammi di zucchero in  $x$  grammi di acqua è data da

$$f(x,y) = \frac{y}{x+y} \times 100$$

#### ESEMPIO 3

Sia  $K$  la quantità (detta *capitale*) di attrezzature e macchinari a disposizione in un paese, e  $L$  il lavoro. Supponiamo che la produzione complessiva di beni (o PIL, Prodotto Interno Lordo) sia data da  $Y(K,L)$ .



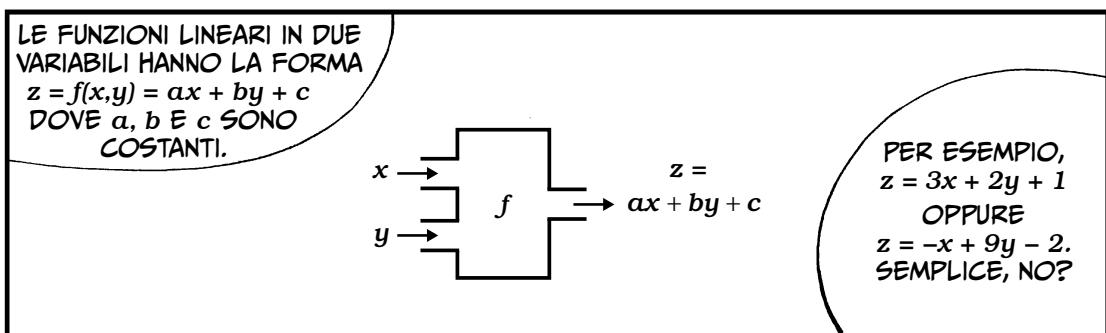
IN TEORIA ECONOMICA SI USA LA FUNZIONE  
 $Y(L,K) = \beta L^\alpha K^{1-\alpha}$  DETTA "FUNZIONE DI COBB-DOUGLAS", DOVE  $\alpha$  E  $\beta$  SONO COSTANTI, COME APPROSSIMAZIONE DI  $Y(L, K)$ . (V. A PAGINA 203).

#### ESEMPIO 4

In fisica, se  $P$  è la pressione di un gas ideale e  $V$  il suo volume, sappiamo che la temperatura  $T$  è una funzione di  $P$  e di  $V$ , ed è data da

$$T(P,V) = \gamma PV$$

## FUNZIONI LINEARI IN PIÙ VARIABILI: I FONDAMENTI

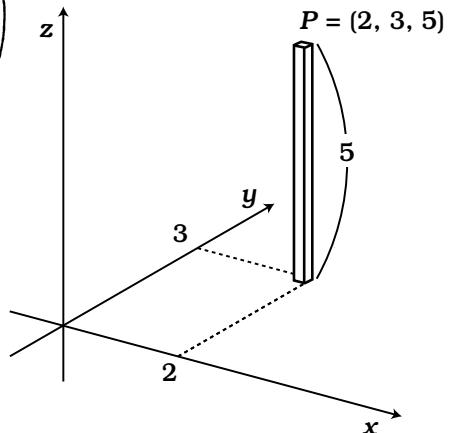


QUALCOSA  
NON VA?

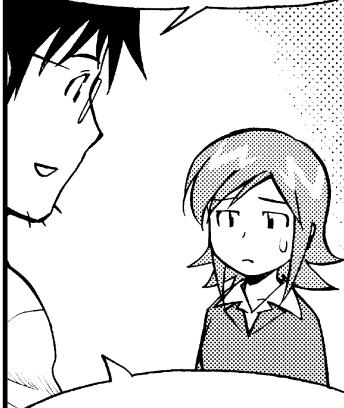


NO, NO!  
ANDIAMO AVANTI.

COME PUOI VEDERE,  
IL PUNTO  $P$  DI COOR-  
DINATE  $(2, 3, 5)$  È IL  
PUNTO IN CIMA A UNA  
COLONNA DI ALTEZZA  
5 POSIZIONATA NEL  
PUNTO SUL PAVIMENTO  
DI COORDINATE  $(2, 3)$ .

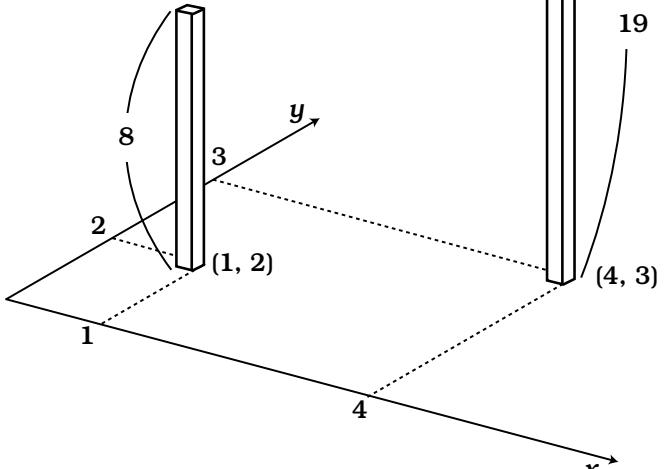


E ORA, CHE ASPETTO  
PENSI CHE POTRÀ AVE-  
RE IL GRAFICO DI UNA  
FUNZIONE LINEARE?



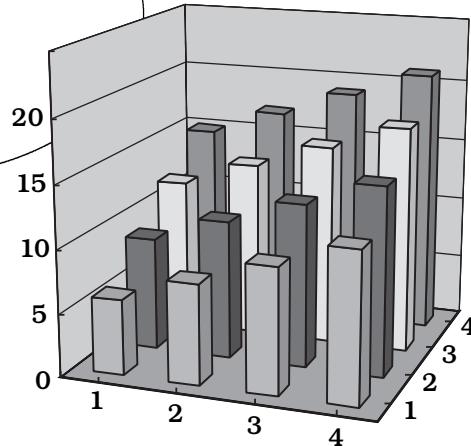
COME  
ESEMPIO, TRACCIAVAMO  
QUELLO DI  
 $z = f(x, y) = 3x + 2y + 1$ .

PER PRIMA COSA, COLLOCHE-  
MO NEL PUNTO  $(1, 2)$  SUL PAVI-  
MENTO UNA COLONNA DI LUNGHEZZA  
 $f(1, 2) = 3 \times 1 + 2 \times 2 + 1 = 8$ .  
ANALOGAMENTE, L'ALTEZZA DEL  
GRAFICO NEL PUNTO  $(4, 3)$  SARÀ  
 $f(4, 3) = 3 \times 4 + 2 \times 3 + 1 = 19$  \*.



\*IN REALTÀ DOVREMMO SCRIVERE  $(1, 2, 0)$  E  $(4, 3, 0)$  MA PER  
SEMPLICITÀ OMETTIAMO LA TERZA COORDINATA.

NELLO STESSO MODO,  
COLLOCHIAMO 16  
COLONNE NEI 16  
PUNTI  $(x,y)$  PER CUI  
 $1 \leq x \leq 4$  E  $1 \leq y \leq 4$ ,  
COME IN FIGURA.



POSSIAMO GIÀ  
VEDERE CHE IL GRA-  
FICO COMINCIA AD  
ASSOMIGLIARE A UN  
PIANO, NON TROVI?



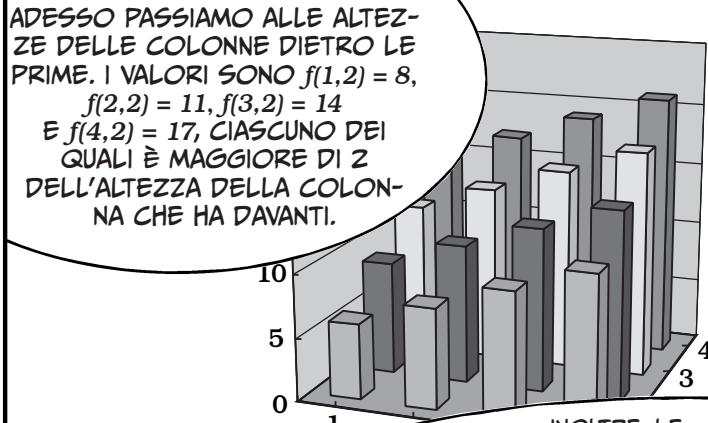
DIAMO ORA UN'OCCHIA-  
TA ALLE COLONNE SUL  
LATO PIÙ VICINO.

COMINCIANDO DA SINISTRA,  
LE ALTEZZE HANNO I VA-  
LORI  $f(1,1) = 6, f(2,1) = 9,$   
 $f(3,1) = 12$ , E  $f(4,1) = 15$ .

È INTUITIVO VEDERE  
CHE QUESTI PUNTI  
GIACCIONO SU UNA  
RETTA DI PENDEN-  
ZA 3. INFATTI, SE  $y$   
È COSTANTE ( $y=1$ ) IN  
 $z = f(x,y) = 3x + 2y + 1$ ,  
ABBIAMO  $z = 3x + 2 \times$   
 $1 + 1 = 3x + 3$ .



ADESSO PASSIAMO ALLE ALTEZ-  
ZE DELLE COLONNE DIETRO LE  
PRIME. I VALORI SONO  $f(1,2) = 8$ ,  
 $f(2,2) = 11$ ,  $f(3,2) = 14$   
E  $f(4,2) = 17$ , CIASCUNO DEI  
QUALI È MAGGIORE DI 2  
DELL'ALTEZZA DELLA COLON-  
NA CHE HA DAVANTI.

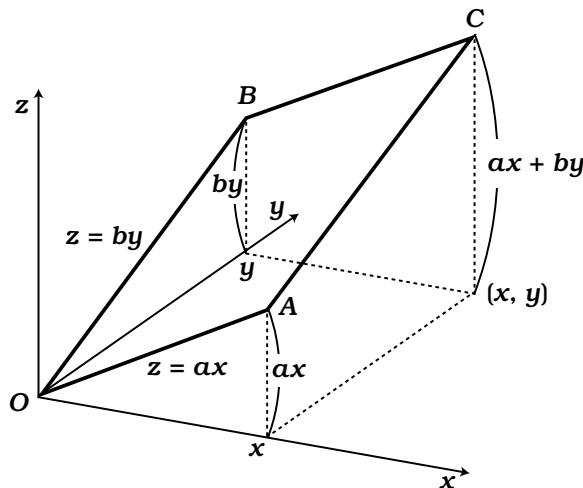


INOLTRE, LE  
ALTEZZE DELLE COLONNE  
ANCORA POSTERIORI SONO  
 $f(1,3) = 10, f(2,3) = 13, f(3,3) = 16$ , E  
 $f(4,3) = 19$  E ANCHE CIASCUNA DI QUESTE  
È MAGGIORE DI 2 DELL'ALTEZZA DELLA  
COLONNA CHE HA DAVANTI.

MANO A MANO CHE LE COLONNE SI ALLONTANANO DA NOI, LA LORO ALTEZZA AUMENTA SEMPRE DI 2...

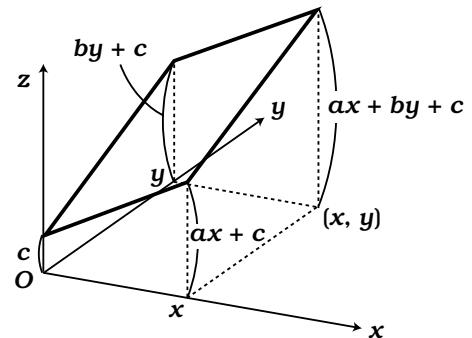
...PERCIÒ LE CIME DELLE COLONNE GIACCIONO TUTTE SU UN UNICO PIANO. ORA POSSIAMO GENERALIZZARE.

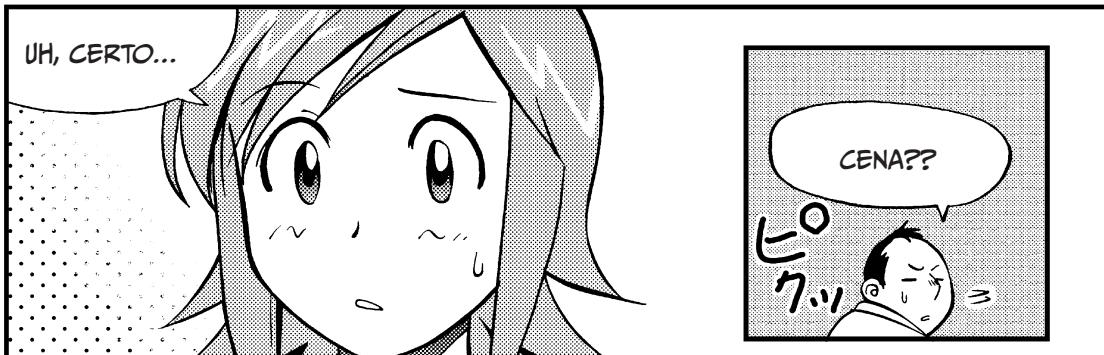
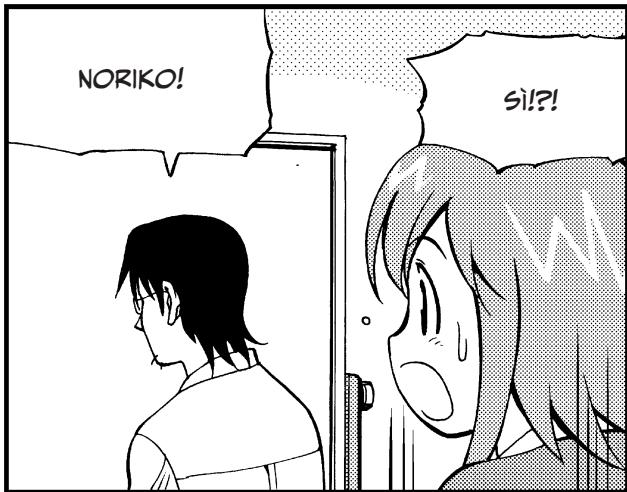
PER PRIMA COSA VEDIAMO COME TRACCIARE IL GRAFICO DI  $z = f(x, y) = ax + by$  (CON LA COSTANTE  $c=0$ ).



COMINCIAMO DAL PUNTO  $O(0,0,0)$ , CIOÈ DALL'ORIGINE, E CONSIDERIAMO IL SEGMENTO DI RETTA OA: OTTIENIAMO UNA FUNZIONE CHE LO RAPPRESENTI PONENDO  $y=0$ . QUESTO È COME DIRE CHE LA RETTA È RAPPRESENTATA DA  $z=ax$ , E HA PENDENZA  $a$ . ANALOGAMENTE, PONENDO  $x=0$ , IL SEGMENTO DI RETTA OB DEL PIANO È RAPPRESENTATO DA  $z=by$  E HA PENDENZA  $b$ . IL PUNTO C SUL PIANO OACB HA ALTEZZA UGUALE A  $ax+by$ . SE VOLESSIMO RAPPRESENTARE FISICAMENTE QUESTO PIANO, POTREMMO ATTACCARE UN LENZUOLO AI SEGMENTI OA E OB, E TIRARLO.

DOVENDO ORA CONSIDERARE ANCHE LA COSTANTE  $c$ , SEMPLICEMENTE ADATTIAMO IL GRAFICO ELEVANDO IL PIANO ALL'ALTEZZA  $c$ . ORA IL PUNTO O SUL PIANO SI TROVA IN  $(0,0,c)$ , IL PUNTO A HA UN'ALTEZZA  $ax+c$  E COSÌ VIA.





SCUOLA TANAKA,  
DOMENICA



HANNO CHIUSO  
QUESTA SCUOLA  
QUALCHE  
ANNO FA.

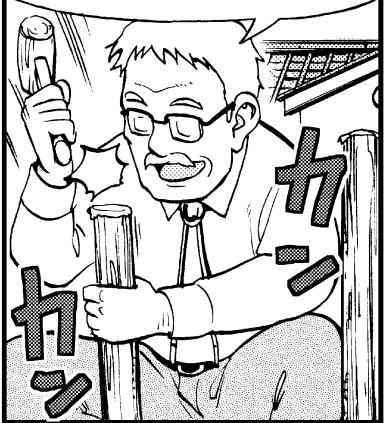
NO, MI PIACE  
PERCHÉ È QUI CHE  
HO IMPARATO LA  
MATEMATICA.

SUL SERIO?  
E VORREBBE FARCI  
SOPRA UN SERVIZIO?

IN EFFETTI,  
QUESTA È LA  
MIA CITTÀ.

ERA UNA PICCOLA  
SCUOLA. MA AVEVO UNO  
DEI MIGLIORI INSEGNANTI  
DEL MONDO.

SE TRACCIAMO IL GRAFICO DELLA FUNZIONE DI DUE VARIABILI  
 $z = f(x,y) = 3x + 2y + 1$   
IN UN SISTEMA DI COORDINATE TRIDIMENSIONALI, CHE ASPECTO AVRÀ, KAKERU?



SUPPONIAMO CHE QUESTO VECCHIO SACCO SIA IL PIANO OACB...



MAESTRO, C'ERA-NO ANCORA DEN-  
TRO DELLE PATATE.  
CHE COSA NE FACCIAMO?



SE SAISI RISOLVERE IL PROBLEMA,  
BOLLIAMOLE E MANGIAMOLE...  
OH, OH, OH!

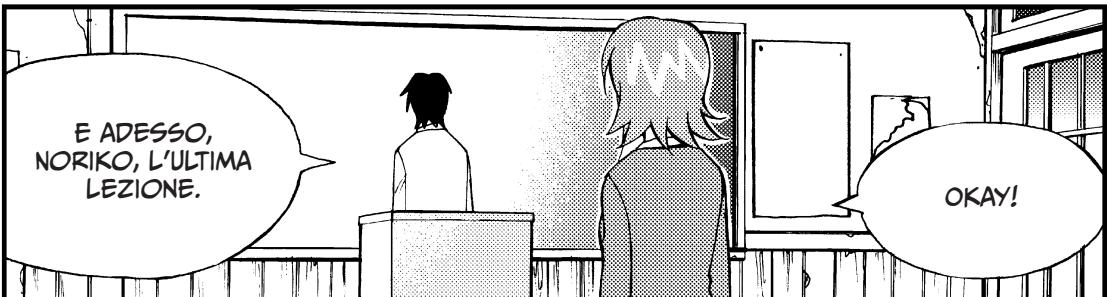


MR. KINJIRO BUN-  
DA ERA UN OTTIMO  
INSEGNANTE.

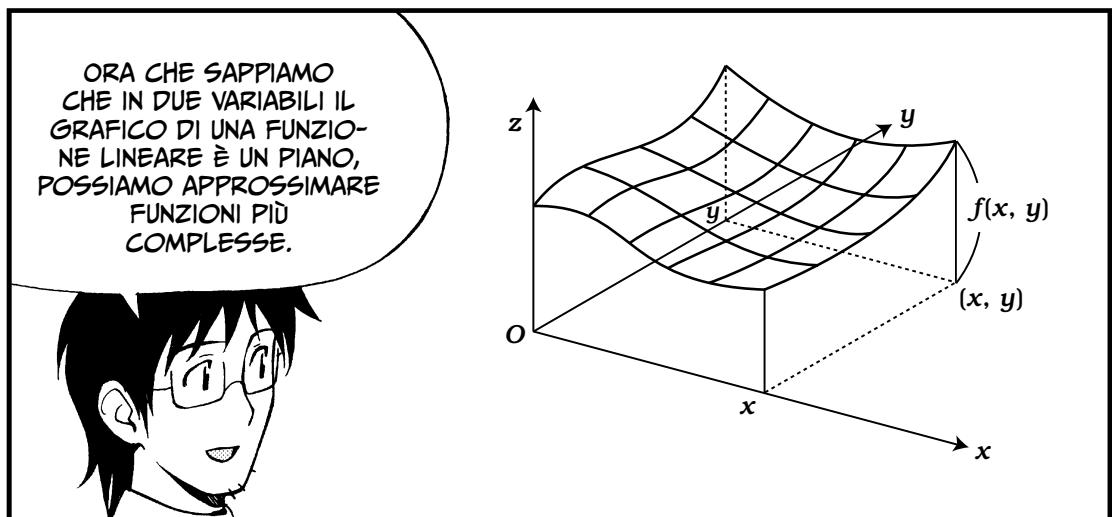


E ADESSO,  
NORIKO, L'ULTIMA  
LEZIONE.

OKAY!

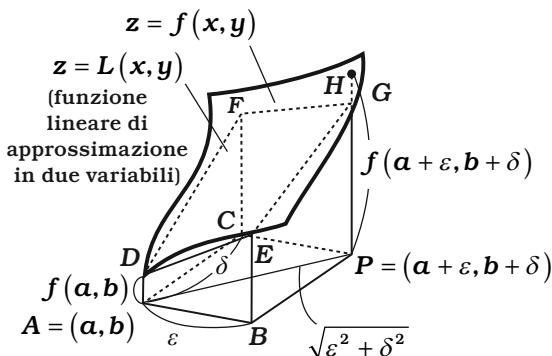


## DERIVATE PARZIALI



Costruiremo una funzione lineare con la medesima altezza di  $f(a,b)$  nel punto  $(a,b)$ . La formula è  $L(a,b) = p(x-a) + q(y-b) + f(a,b)$ .

Sostituendo  $x=a$  e  $y=b$  otteniamo  $L(a,b) = f(a,b)$ .



I grafici di  $z=f(x,y)$  e di  $z=L(x,y)$  passano per lo stesso punto al di sopra di  $A(a,b)$  ma hanno altezza diversa in  $P(a+\varepsilon,b+\delta)$ . In questo caso l'errore è  $f(a+\varepsilon,b+\delta) - L(a+\varepsilon,b+\delta) = f(a+\varepsilon,b+\delta) - f(a,b) - (p\varepsilon+q\delta)$  e l'errore relativo esprime il rapporto tra l'errore e la distanza  $AP$ .

$$\text{Errore relativo} = \frac{\text{differenza tra } f \text{ e } L}{\text{distanza } AP}$$

$$\textcircled{1} \quad = \frac{f(a+\varepsilon,b+\delta) - f(a,b) - (p\varepsilon+q\delta)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}}$$

Vediamo ora il comportamento di  $L(x,y)$  quando la sua differenza converge a 0 (questo avviene quando  $P$  tende ad  $A$ ), in qualità di approssimazione lineare. Vediamo che ne ricaveremo  $p$  e  $q$ . In figura,  $p$  è la pendenza di  $DE$  e  $q$  è quella di  $DF$ . Siccome  $\varepsilon$  e  $\delta$  sono arbitrari, poniamo per cominciare  $\delta=0$  e vediamo che  $\textcircled{1}$  diventa

$$\begin{aligned} \text{Errore relativo} &= \frac{f(a+\varepsilon,b+0) - f(a,b) - (p\varepsilon+q \times 0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + 0^2}} \\ &= \frac{f(a+\varepsilon,b) - f(a,b)}{\varepsilon} - p \end{aligned}$$

Perciò l'affermazione "l'errore relativo tende a 0 per  $\varepsilon$  che tende a 0" significa che:

$$\textcircled{2} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon, b) - f(a, b)}{\varepsilon} = p$$

Questa è la pendenza di DE.

Dev'essere chiaro che il membro di sinistra di (2) è lo stesso che avremmo per la derivata di una funzione di una sola variabile. In altre parole, se a  $y$  sostituiamo  $b$  e lo manteniamo costante, otteniamo  $f(x, b)$ , che è una funzione della sola  $x$ . Il membro sinistro di (2) è a questo punto la definizione di derivata di questa funzione in  $x=a$ .

La tentazione di scrivere il membro di sinistra come  $f'(a, b)$  è fortissima: in fondo si tratta di una derivata, ma non sarebbe chiaro rispetto a quale variabile abbiamo derivato.

Scriviamo quindi "la derivata di  $f$  in  $x=a$  con  $y$  costante uguale a  $b$ " col simbolo  $f_x(a, b)$ .

Questa funzione  $f_x$  è detta "derivata parziale di  $f$  nella direzione  $x$ " ed è l'equivalente della notazione con l'apostrofo nella derivazione di un'unica variabile

Si usa anche la notazione  $\frac{df}{dx}(a, b)$ , che corrisponde a  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . In breve, abbiamo:

"La derivata di  $f$  nella direzione  $x$  in  $x=a$  con  $y=b$ "

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \text{o anche} \quad \left( \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=a, y=b} \right)$$

= Pendenza di DE

Esattamente allo stesso modo, otteniamo

*SI LEGGE "DERIVATA PARZIALE".*

"La derivata di  $f$  nella direzione  $y$  in  $y=b$  con  $x=a$ "

$$f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

= Pendenza di DF



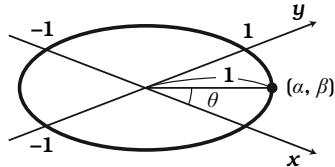
Abbiamo quindi stabilito quanto segue.

Se  $z = f(x, y)$  ammette un'approssimazione lineare in un intorno di  $(x, y) = (a, b)$ , questa è data da

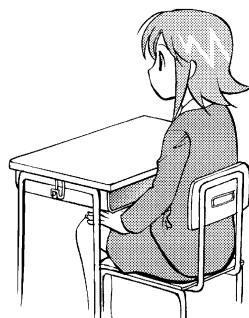
$$③ \quad z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

$$\text{ovvero*} \quad z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

Consideriamo il punto  $(a, \beta)$  su un cerchio di raggio 1 con centro nell'origine del piano  $x - y$  (il pavimento). Abbiamo allora  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  (questo perché  $\alpha = \cos\theta$  and  $\beta = \sin\theta$ ). Calcoliamo ora la derivata nella direzione che va da  $(0, 0)$  a  $(a, \beta)$ . Uno spostamento lungo  $t$  in questa direzione è espresso da  $(a, b) \rightarrow (a + \alpha t, b + \beta t)$ . Se in ① poniamo  $\varepsilon = \alpha t$  e  $\delta = \beta t$  otteniamo



$$\begin{aligned} \text{Errore relativo} &= \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b) - (p\alpha t + q\beta t)}{\sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta^2 t^2}} \\ &= \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b)}{t \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - p\alpha - q\beta \\ &= \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b)}{t} - p\alpha - q\beta \end{aligned}$$



$$④ \quad \text{Poiché} \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$$

Ponendo  $p = f_x(a, b)$  and  $q = f_y(a, b)$ , modifichiamo ④ come segue:

$$⑤ \quad \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b + \beta t)}{t} + \frac{f(a, b + \beta t) - f(a, b)}{t} - f_x(a, b)\alpha - f_y(a, b)\beta$$

Siccome la derivata di  $f(x, b + \beta t)$ , come funzione della sola  $x$  in  $x = a$  è

$$f_x(a, b + \beta t)$$

dall'approssimazione lineare in una sola variabile otteniamo,

$$f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b + \beta t) \approx f_x(a, b + \beta t)\alpha t$$

\*Abbiamo calcolato l'approssimazione lineare in modo che l'errore relativo tenda a 0 per AP che va a 0 nella direzione  $x$  o  $y$ . Non è però ovvio se l'errore relativo vada a 0 quando AP va a zero lungo una direzione qualsiasi per un'approssimazione lineare costruita a partire dalle derivate  $f_x(a, b)$  e  $f_y(a, b)$ . Ora approfondiremo questo punto, anche se non in maniera rigorosissima.

Analogamente,

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \beta t) - f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \approx f_y(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \beta t$$

Sostituendo in ❸,

$$\begin{aligned}\textcircled{3} &\approx f_x(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \beta t) \alpha + f_y(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \beta - f_x(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \alpha - f_y(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \beta \\ &= (f_x(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \beta t) - f_x(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \alpha\end{aligned}$$

Poiché per  $t$  abbastanza piccolo  $f_x(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \beta t) - f_x(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \approx 0$ , per l'errore relativo abbiamo  $= \textcircled{3} \approx 0$ . Abbiamo quindi dimostrato che "l'errore relativo tende a 0 quando AP tende a 0 in qualsiasi direzione."

Notiamo anche che per potere affermare  $f_x(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \beta t) - f_x(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \approx 0$  ( $t \approx 0$ )  $f_x$  dev'essere continua. Se non fosse continua, non potremmo dire che la derivata esiste in ogni direzione, anche se  $f_x$  e  $f_y$  esistono. Questo può capire per funzioni piuttosto strane ed "esotiche" e in questo libro non ne parleremo.

#### ESEMPI (FUNZIONE DELL'ESEMPIO 1 A PAGINA 183)

Troviamo le derivate parziali di  $h(v, t) = vt - 4,9t^2$  in  $(v, t) = (100, 5)$ .

Nella direzione  $v$  deriviamo  $h(v, 5) = 5v - 122,5$  e otteniamo

$$\frac{\partial h}{\partial v}(v, 5) = 5$$



Perciò,

$$\frac{\partial h}{\partial v}(100, 5) = h_v(100, 5) = 5$$

Nella direzione  $t$  deriviamo  $h(100, t) = 100t - 4,9t^2$  e otteniamo

$$\frac{\partial h}{\partial t}(100, t) = 100 - 9,8t$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(100, 5) = h_t(100, 5) = 100 - 9,8 \times 5 = 51$$

E l'approssimazione lineare è quindi

$$L(x, y) = 5(v - 100) + 51(t - 5) - 377,5$$

In generale,

$$\frac{\partial h}{\partial v} = t, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = v - 9,8t$$

Quindi, dalla ❸ a pagina 194, in un intorno di  $(v, t) = (v_0, t_0)$ ,

$$h(v, t) \approx t_0(v - v_0) + (v_0 - 9,8t_0)(t - t_0) + h(v_0, t_0)$$

Ora cercheremo di approssimare la concentrazione di sciroppo di glucosio dati  $y$  grammi di zucchero in  $x$  grammi di acqua.

$$f(x, y) = \frac{100y}{x + y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = -\frac{100y}{(x + y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{100(x + y) - 100y \times 1}{(x + y)^2} = \frac{100x}{(x + y)^2}$$

Pertanto, in un intorno di  $(x, y) = (a, b)$ , abbiamo

$$f(x, y) \approx -\frac{100b}{(a + b)^2}(x - a) + \frac{100a}{(a + b)^2}(y - b) + \frac{100b}{a + b}$$

### DEFINIZIONE DI DIFFERENZIALE PARZIALE

Se  $z=f(x,y)$  è parzialmente derivabile rispetto a  $x$  in ogni punto  $(x,y)$  di una certa regione, la funzione  $(x,y) \rightarrow f_x(x,y)$  che a  $(x,y)$  associa  $f_x(x,y)$ , cioè la derivata parziale rispetto a  $x$  in quel punto, viene detta il differenziale parziale di  $z=f(x,y)$  rispetto a  $x$  e si indica con una qualunque delle seguenti notazioni

$$f_x, f_x(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$$

Analogamente, se  $z=f(x,y)$  ammette derivata parziale rispetto a  $y$  per ogni punto  $(x,y)$ , la funzione

$$(x, y) \rightarrow f_y(x, y)$$

viene detta differenziale parziale di  $z=f(x,y)$  rispetto a  $y$  e si indica con una qualunque delle seguenti notazioni:

$$f_y, f_y(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

L'operazione di calcolo delle derivate parziali di una funzione viene detto *derivazione parziale*.

## DIFFERENZIALI TOTALI



Dall'approssimazione lineare di  $z=f(x,y)$  in  $(x,y)=(a,b)$  abbiamo determinato

$$f(x,y) \approx f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

Che possiamo scrivere così

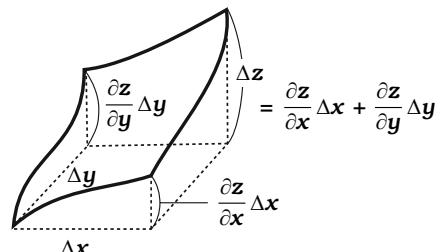
$$\textcircled{6} \quad f(x,y) - f(a,b) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Siccome  $f(x,y) - f(a,b)$  rappresenta l'incremento di  $z=f(x,y)$  quando un punto si sposta da  $(a,b)$  a  $(x,y)$ , possiamo rappresentarlo come  $\Delta z$ , proprio come abbiamo fatto per le funzioni di una sola variabile.

Inoltre,  $(x-a)$  è  $\Delta x$  e  $(y-b)$  è  $\Delta y$ .

Possiamo quindi riscrivere l'espressione **6** come

$$\textcircled{7} \quad \Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$



L'espressione si può leggere come "se  $x$  varia di  $\Delta x$  rispetto ad  $a$  e  $y$  di  $\Delta y$  rispetto a  $b$  in  $z=f(x,y)$ ,  $z$  varia di"

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

Poiché  $\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x$  è “l'incremento di  $z$  nella direzione  $x$  in  $y=b$ ” e  $\frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$  è “l'incremento nella direzione  $y$  in  $x=a$ ”, l'espressione ⑦ può anche essere intepretata come “l'incremento di  $z = f(x, y)$  è la somma dell'incremento nella direzione  $x$  e di quello nella direzione  $y$ .”

Quando in ⑦ passiamo al limite facendo tendere  $\Delta x$  e  $\Delta y$  a 0, otteniamo

$$⑧ \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

o

$$⑨ \quad df = f_x dx + f_y dy$$

LE ESPRESSIONI ⑧ O ⑨ VENGONO DETTE DIFFERENZIALE TOTALE.



(al posto di “ $\Delta$ ” abbiamo una “ $d$ ”).

Il significato è il seguente:

Variazione in altezza di una superficie =

Derivata parziale nella direzione  $x$   $\times$  Incremento nel- la direzione  $x$  + Derivata parziale nella direzione  $y$   $\times$  Incremento nella direzione  $y$

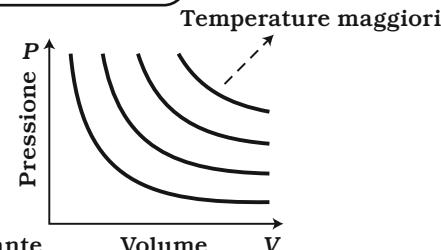
E ora diamo un'occhiata all'espressione di un differenziale totale a partire dall'esempio 4 di pagina 183.

Convertendo opportunamente l'unità di misura, riscriviamo l'equazione della temperatura come  $T=PV$

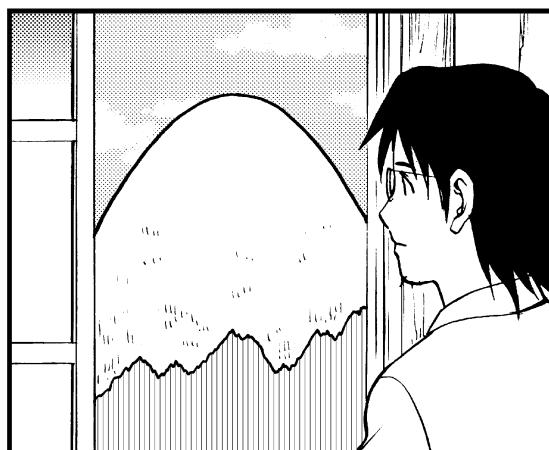
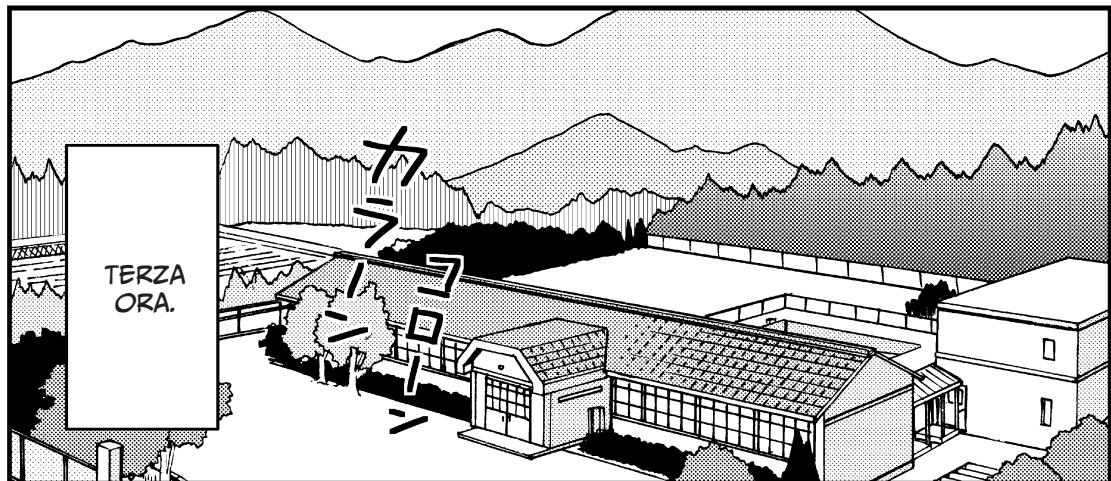
$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{\partial(PV)}{\partial P} = V \quad \text{and} \quad \frac{\partial T}{\partial V} = \frac{\partial(PV)}{\partial V} = P$$

Il differenziale totale può quindi essere scritto come  $dT = VdP + PdV$ . In maniera approssimata, diventa  $\Delta T \approx V\Delta P + P\Delta V$ .

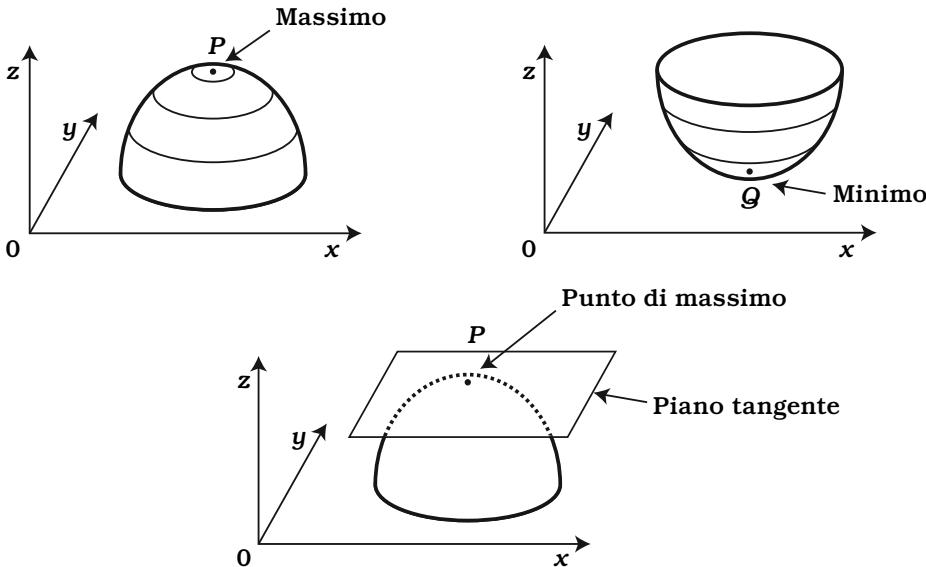
QUESTO VUOL DIRE CHE PER UN GAS IDEALE L'INCREMENTO DI TEMPERATURA PUÒ ESSERE CALCOLATO MOLTIPLICANDO IL VOLUME PER L'INCREMENTO DI PRESSIONE E SOMMANDO LA PRESSIONE MOLTIPLICATA PER L'INCREMENTO DI VOLUME.



## CONDIZIONI PER GLI ESTREMI



Gli estremi di una funzione di due variabili  $f(x,y)$  sono punti in cui il grafico raggiunge “la cima di una montagna” o “il fondo di una vallata”.



Poiché il piano tangente al grafico nei punti  $P$  o  $Q$  è parallelo al piano  $x$ - $y$ , abbiamo

$$f(x,y) \approx p(x-a) + q(y-b) + f(a,b)$$

con  $p = q = 0$  nell'approssimazione lineare.

Inoltre

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} (= f_x) \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} (= f_y)$$

quindi, se  $f(x,y)$  possiede un estremo in  $(x,y)=(a,b)$ , una condizione necessaria\* è

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

cioè

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

\*Non è vero il contrario: anche se  $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ ,  $f$  potrebbe non avere un estremo in  $(a,b)$ . In altre parole, questa condizione serve per selezionare i candidati a essere dei punti estremanti.



NEI PUNTI DI ESTREMO DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI, LE DERIVATE PARZIALI NELLE DIREZIONI  $x$  E  $y$  SONO ENTRAMBE ZERO.

#### ESEMPIO

Troviamo il minimo di  $f(x,y) = (x - y)^2 + (y - 2)^2$ .

Per prima cosa, facciamolo algebricamente: abbiamo quindi

$$(x - y)^2 \geq 0 \quad (y - 2)^2 \geq 0$$

$$f(x,y) = (x - y)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$$

Sostituendo  $x = y = 2$ ,

$$f(2,2) = (2 - 2)^2 + (2 - 2)^2 = 0$$

Da qui, vediamo che  $f(x,y) \geq f(2,2)$  per tutte le coppie  $(x,y)$ . In altre parole,  $f(x, y)$  nel punto  $(2,2)$ , la funzione  $f$  ha un minimo, che vale 0.

D'altra parte,  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x - y)(-1) + 2(y - 2) = -2x + 4y - 4$ . Se poniamo

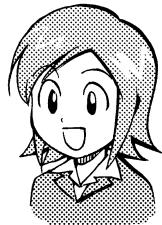
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

e risolviamo il sistema di equazioni,

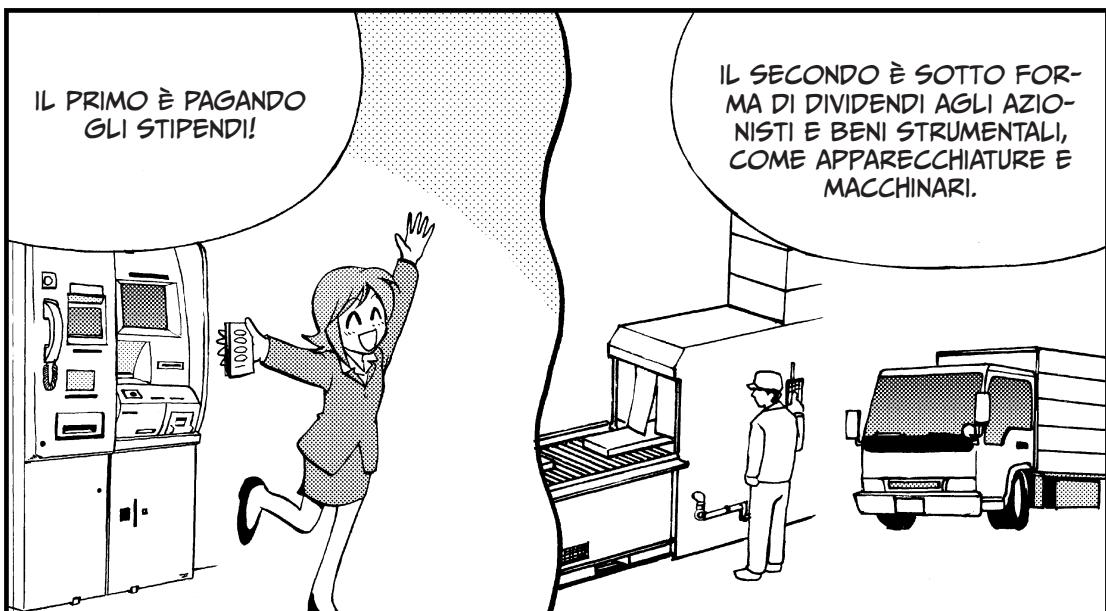
$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

troviamo nuovamente  $(x,y) = (2,2)$ .

LE DUE SOLUZIONI SONO UGUALI!



## APPLICAZIONI ALL'ECONOMIA



DOUGLAS STUDIÒ IL RAPPORTO TRA LAVORO E QUOTE DI CAPITALE NEGLI STATI UNITI E SCOPRÌ CHE ERA RIMASTO COSTANTE PER CIRCA 40 ANNI.

CIRCA IL 70% (0,7) DEL PIL VENIVA DISTRIBUITO SOTTO FORMA DI RETRIBUZIONE DEL LAVORO E IL 30% (0,3) COME DIVIDENDI AZIONARI AI PROPRIETARI.

STRANO CHE QUESTO RAPPORTO NON FOSSE CAMBIATO, CON UNA SITUAZIONE ECONOMICA IN CONTINUA TRASFORMAZIONE.

TI PIACEREBBE SAPERE COM'È FATTA LA FUNZIONE  $f(L, K)$  CHE FORNISCE UN SIMILE RISULTATO, VERO?

ANCHE DOUGLAS ERA PERPLESSO, COSÌ SI CONSULTÒ COL MATEMATICO CHARLES COBB.

LA FUNZIONE CHE TROVARONO, FU LA CELEBRE FUNZIONE DI DOUGLAS-COBB. L RAPPRESENTA IL LAVORO, K IL CAPITALE E  $\beta$  E  $\alpha$  SONO COSTANTI.

FUNZIONE DI DOUGLAS-COBB

$$f(L, K) = \beta L^\alpha K^{1-\alpha}$$

QUINDI ADESSO PARLEREMO UN PO' DEL MIO STIPENDIO?

OKAY, È UN'OTTIMA APPLICAZIONE DELLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI.

Per prima cosa, supponiamo che gli stipendi si misurino in unità  $w$ , e il capitale in unità  $r$ . Ipotizziamo che la produzione del paese sia rappresentata dalla funzione  $f(L, K)$  e che il paese agisca in modo da massimizzare il profitto. L'utile (o profitto)  $P$  è allora dato dall'equazione:

$$P = f(L, K) - wL - rK$$

Siccome i valori di  $L$  e  $K$  vengono selezionati dall'attività d'impresa in modo da massimizzare  $P$ , otteniamo le seguenti condizioni per gli estremi:

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \frac{\partial P}{\partial K} = 0$$

$$\textcircled{1} \quad 0 = \frac{\partial P}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L} - \frac{\partial(wL)}{\partial L} - \frac{\partial(rK)}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L} - w \Rightarrow w = \frac{\partial f}{\partial L}$$

$$\textcircled{2} \quad 0 = \frac{\partial P}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} - \frac{\partial(wL)}{\partial K} - \frac{\partial(rK)}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} - r \Rightarrow r = \frac{\partial f}{\partial K}$$

Le relazioni all'estrema destra significano quanto segue:

$w$  = stipendi = derivata parziale della funzione di produzione rispetto a  $L$

$r$  = quota di capitale = derivata parziale della funzione di produzione rispetto a  $K$

Il compenso complessivo che la popolazione riceve è stipendi  $\times$  lavoro =  $wL$ . Se questo valore rappresenta il 70% del PIL abbiamo

$$\textcircled{3} \quad wL = 0,7f(L, K)$$

Analogamente, l'introito complessivo incamerato dagli azionisti del capitale è

$$\textcircled{4} \quad rK = 0,3f(L, K)$$

Da **1** e **3**,

$$\textcircled{5} \quad \frac{\partial f}{\partial L} \times L = 0,7f(L, K)$$

Da **2** e **4**,

$$\textcircled{6} \quad \frac{\partial f}{\partial K} \times K = 0,3f(L, K)$$



Cobb determinò una  $f(L, K)$  che soddisfa queste equazioni:

$$f(L, K) = \beta L^{0.7} K^{0.3}$$

dove  $\beta$  è un parametro positivo che fotografa il livello tecnologico.

Vediamo se soddisfa le condizioni.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial L} \times L &= \frac{\partial (\beta L^{0.7} K^{0.3})}{\partial L} \times L = 0,7\beta L^{(-0.3)} K^{0.3} \times L^1 \\ &= 0,7\beta L^{0.7} K^{0.3} \\ &= 0,7f(L, K)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial K} \times K &= \frac{\partial (\beta L^{0.7} K^{0.3})}{\partial K} \times K = 0,3\beta L^{0.7} K^{(-0.7)} \times K^1 \\ &= 0,3\beta L^{0.7} K^{0.3} \\ &= 0,3f(L, K)\end{aligned}$$



DIREI PROPRIO  
DI SÌ.

IN QUESTO MODO, LE DERIVATE PARZIALI SVELARONO  
UNA LEGGE MISTERIOSA  
NASCOSTA TRA LE PIEGHE  
DELL'ECONOMIA SU LARGA  
SCALA CHE GOVERNA LA  
RICCHEZZA DI UN PAESE.

DIETRO LE QUINTE  
LE DERIVATE PAR-  
ZIALI SI DANNO DA  
FARE, EH?

## FUNZIONE COMPOSTA IN PIÙ VARIABILI

A pagina 14 abbiamo visto la regola per la derivata della funzione composta di funzioni di una variabile

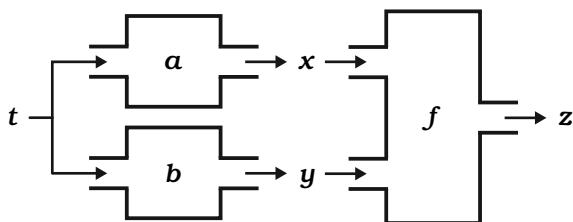
$$y = f(x), \quad z = g(y), \quad z = g(f(x)),$$

$$g(f(x))' = g'(f(x))f'(x)$$



ORA RICAVEREMO LA FORMULA PER LE DERIVATE PARZIALI DI FUNZIONI COMPOSTE IN PIÙ VARIABILI.

Supponiamo che  $z$  sia una variabile delle due funzioni  $x$  e  $y$ , nella forma  $z=f(x,y)$ , e che sia  $x$  che  $y$  siano funzioni di un'unica variabile  $t$ , nella forma  $x=a(t)$ ,  $y=b(t)$ . Allora possiamo esprimere  $z$  come funzione della sola variabile  $t$ .



La relazione avrà la forma

$$z = f(x, y) = f(a(t), b(t))$$

Cosa sarà allora  $\frac{dz}{dt}$  ?

Poniamo  $a(t_0) = x_0$ ,  $b(t_0) = y_0$  e  $f(x_0, y_0) = f(a(t_0), b(t_0)) = z_0$  per  $t = t_0$ , e consideriamo solo intorni di  $t_0$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ , and  $z_0$ .

Se trovassimo un  $\alpha$  per cui

$$\textcircled{1} \quad z - z_0 \approx \alpha \times (t - t_0)$$

Allora sarebbe un candidato per  $\frac{dz}{dt}(t_0)$ .

Intanto, dall'approssimazione di  $x = a(t)$ ,

$$\textcircled{2} \quad x - x_0 \approx \frac{da}{dt}(t_0)(t - t_0)$$

Analogamente, per  $y = b(t)$ ,

$$\textcircled{3} \quad y - y_0 \approx \frac{db}{dt}(t_0)(t - t_0)$$

Ora, per la formula del differenziale totale di una funzione di due variabili,  $f(x, y)$ ,

$$\textcircled{4} \quad z - z_0 \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Sostituendo **2** e **3** in **4**,

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad z - z_0 &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{da}{dt}(t_0)(t - t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{db}{dt}(t_0)(t - t_0) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{da}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{db}{dt}(t_0) \right) (t - t_0) \end{aligned}$$

Dal confronto tra **1** e **5**, ricaviamo

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{da}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{db}{dt}(t_0)$$

Che è quello che volevamo!

Da cui la formula:

#### FORMULA 6.1 – DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

Se  $z = f(x, y), x = a(t), y = b(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{da}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{db}{dt}$$



Supponiamo che il pescato sia espresso da una funzione di due variabili  $g(y, b)$  della quantità di lavoro  $y$  di scorie  $b$ .

(la pescosità diminuisce con l'aumento di  $b$ , quindi,  $\frac{\partial g}{\partial b}$  è negativa.)

Poiché dipende dalla variabile  $x$  nella forma  $g(y, b) = g(y, b(f(x)))$ , la produzione dell'impianto influenza direttamente l'attività dell'industria ittica, senza passare per il mercato. Si tratta quindi di un'esternalità.

Per cominciare, vediamo cosa succede quando sia l'impianto industriale che il comparto dell'ittico agiscono (egoisticamente) unicamente per il proprio tornaconto. Se per entrambi il costo del lavoro è  $w$ , il prezzo del bene prodotto dall'impianto è  $p$  e il prezzo del pesce è  $q$ , l'utile per l'impianto è dato da

$$\textcircled{1} \quad P_1(x) = pf(x) - wx$$

L'industria vuole quindi massimizzare questa funzione, e le condizioni per gli estremi sono

$$\textcircled{2} \quad \frac{dP_1}{dx} = pf'(x) - w = 0 \Leftrightarrow pf'(x) = w$$

Sia  $s$  una soluzione dell'equazione:

$$\textcircled{3} \quad pf'(s) = w$$

Questa  $s$  è quindi la quantità di lavoro utilizzata dall'impianto, la produzione è  $f(s)$  e la quantità delle scorie è data da

$$b^* = b(f(s))$$

L'utile per l'industria ittica è dato da

$$P_2 = qg(y, b) - wy$$

Siccome la quantità di scorie industriali è data da  $b^* = b(f(s))$ ,

$$\textcircled{4} \quad P_2 = qg(y, b^*) - wy$$

che in pratica è una funzione in  $y$  di una sola variabile. Per massimizzare  $P_2$ , imponiamo la condizione per gli estremi di una funzione di due variabili solo nella variabile  $y$

$$\textcircled{5} \quad \frac{\partial P_2}{\partial y} = q \frac{\partial g}{\partial y}(y, b^*) - w = 0 \Leftrightarrow q \frac{\partial g}{\partial y}(y, b^*) = w$$

La quantità ottimale di lavoro  $t$  sarà quindi

$$\textcircled{6} \quad q \frac{\partial g}{\partial y}(t, b^*) = w$$



### RIASSUMENDO

La produzione industriale e la quantità di pescato quando entrambi i settori agiscono liberamente secondo questo modello è data da  $f(s)$  e  $g(t, b^*)$ , rispettivamente, dove  $s$  e  $t$  soddisfano le condizioni

$$③ \quad pf'(s) = w$$

$$⑥ \quad b^* = b(f(s)), q \frac{\partial g}{\partial y}(t, b^*) = w$$



E ADESSO, MR. SEKI, VERIFICHIAMO SE QUESTO SIA IL RISULTATO IDEALE PER LA SOCIETÀ NEL SUO COMPLESSO. PRENDENDO IN CONSIDERAZIONE ENTRAMBI I COMPARTI, QUELLO CHE VOGLIAMO FARE È MASSIMIZZARE IL PROFITTO DI ENTRAMBI.

$$P_3 = pf(x) + qg(y, b(f(x))) - wx - wy$$

$P_3$  è una funzione di due variabili in  $x$  e  $y$ , perciò la condizione per gli estremi è data da

$$\frac{\partial P_3}{\partial x} = \frac{\partial P_3}{\partial y} = 0$$

La prima derivata parziale si calcola così

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_3}{\partial x} &= pf'(x) + q \frac{\partial g(y, b(f(x)))}{\partial x} - w \\ &= pf'(x) + q \frac{\partial g}{\partial b}(y, b(f(x))) b'(f(x)) f'(x) - w \end{aligned}$$

(abbiamo usato la regola della funzione composta)

Quindi,

$$\frac{\partial P_3}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \left( p + q \frac{\partial g}{\partial b}(y, b(f(x))) b'(f(x)) \right) f'(x) = w$$

Analogamente,

$$⑧ \quad \frac{\partial P_3}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow q \frac{\partial g}{\partial y}(y, b(f(x))) = w$$

Se i valori ottimali del lavoro per il comparto ittico e per l'industria sono  $T$  ed  $S$  rispettivamente, soddisferanno le condizioni

$$⑨ \quad \left( p + q \frac{\partial g}{\partial b}(T, b(f(S))) b'(f(S)) \right) f'(S) = w$$

$$⑩ \quad q \frac{\partial g}{\partial y}(T, b(f(S))) = w$$

Queste equazioni hanno un aspetto complicato ma in realtà solo solo equazioni simultanee in due variabili.

Se le confrontiamo con ③ e ⑥, vediamo che ③ e ⑨ sono diverse, mentre ⑥ e ⑩ sono la stessa equazione. In che cosa sono diverse, allora?

$$③ \quad p \times f'(s) = w$$

$$⑪ \quad (p + \heartsuit) \times f'(S) = w$$

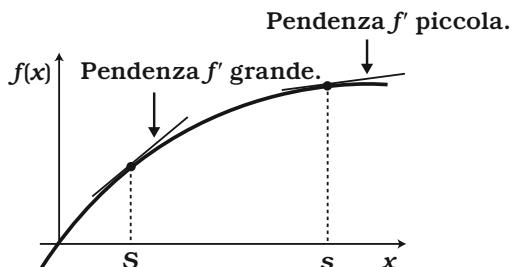
E come vedete, nell'espressione ha fatto la sua comparsa  $\heartsuit$ .

Dato che  $\left( \heartsuit = q \frac{\partial g}{\partial b} b'(f(S)) \right)$  è negativo,  $p + \heartsuit$  è minore di  $p$ .

Quindi da ③ e ⑪ ricaviamo che  $f'(S)$  è maggiore di  $f'(s)$ .



SUPPONIAMO  
CHE IL GRAFICO  
DI  $f$  ABBIA QUE-  
STO ANDAMENTO



A BENEFICIO DELLA SOCIETÀ, L'INDUSTRIA DOVREBBE RIDURRE LA PRODUZIONE DA S A s, NEL CASO DI ATTIVITÀ PURAMENTE EGOISTICA.

SE DA UN LATO IL VANTAGGIO SOCIALE RAGGIUNGE UN MASSIMO ALL'INTERSEZIONE DELLA CURVA DELLA DOMANDA E DELL'OFFERTA\*, CHE RAPPRESENTA LE ATTIVITÀ EGOISTICHE, QUESTO NON ACCADE IN PRESENZA DI ESTERNALITÀ NEGATIVE, COME PER ESEMPIO - IN QUESTO CASO - L'INQUINAMENTO.

\*COME VISTO A PAGINA 105

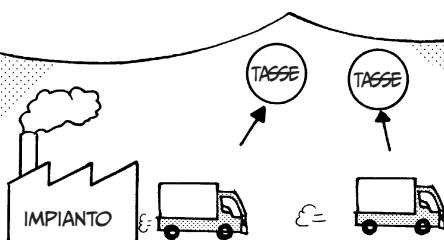
ESISTONO QUINDI MEZZI PRATICABILI PER INDURRE L'AZIENDA A RIDURRE SPONTANEALEMENTE LA PRODUZIONE DA S A s?

IN UN'ECONOMIA PIANIFICATA, O SOCIALISTA, IL GOVERNO PUÒ COSTRINGERE L'AZIENDA A FARLO PER LEGGE.

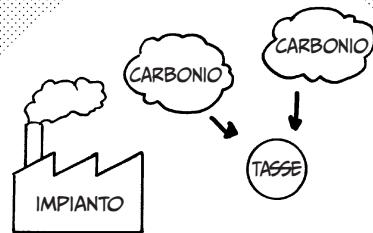
UN ALTRO STRUMENTO È LA TASSAZIONE.

IL GOVERNO TASSA L'AZIENDA PROPORZIONALMENTE ALLA PRODUZIONE.

DI SOLITO SI PARLA DI TASSA AMBIENTALE.



PER PORRE RIMEDIO AL RISCALDAMENTO GLOBALE, PER ESEMPIO, SI È DISCUSSO DI UNA CARBON TAX SULLE EMISSIONI DI CARBONIO.



SUPPONIAMO CHE LA TASSA SULL'UNITÀ DI BENE PRODOTTO DALLA FABBRICA SIA

- $\heartsuit$

$$-\heartsuit = -q \frac{\partial g}{\partial b} b'(f(s))$$

QUESTA È UNA COSTANTE POSITIVA.

PERCIÒ IL PROFITTO <sup>⑪</sup>, NEL CASO DI ATTIVITÀ EGOISTICHE, ASSUME QUESTA FORMA:

$$\textcircled{12} \quad P_1(x) = pf(x) - wx - (-\heartsuit f(x))$$

LA CONDIZIONE PER MASSIMIZZARLO È

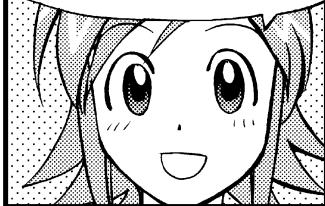
$$\textcircled{13} \quad \frac{\partial P_1}{\partial x} = pf'(x) - w + \heartsuit f'(x) = 0 \Leftrightarrow (p + \heartsuit) f'(x) = w$$

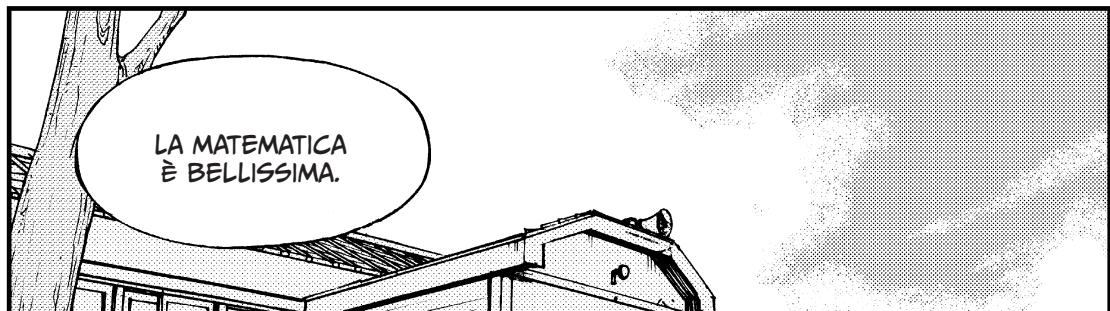
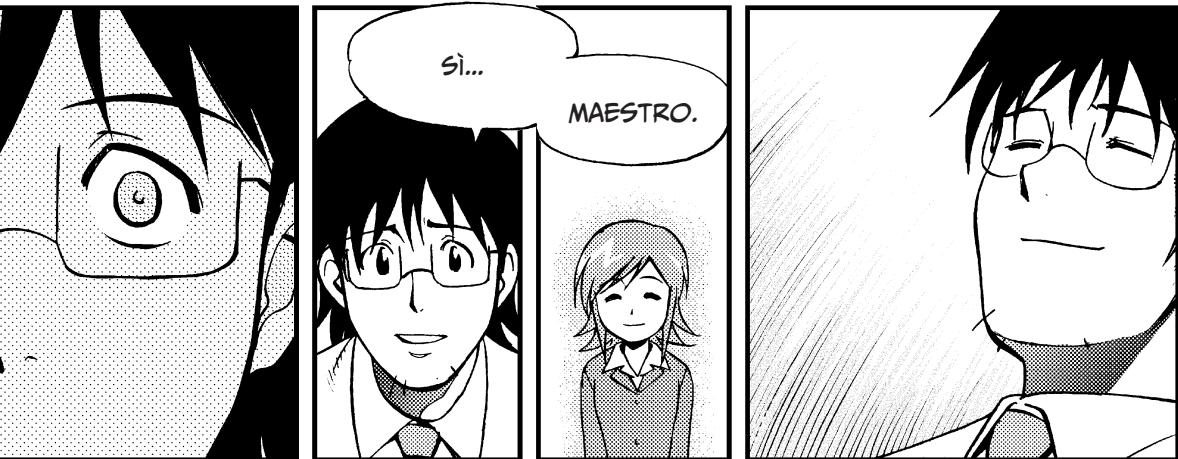
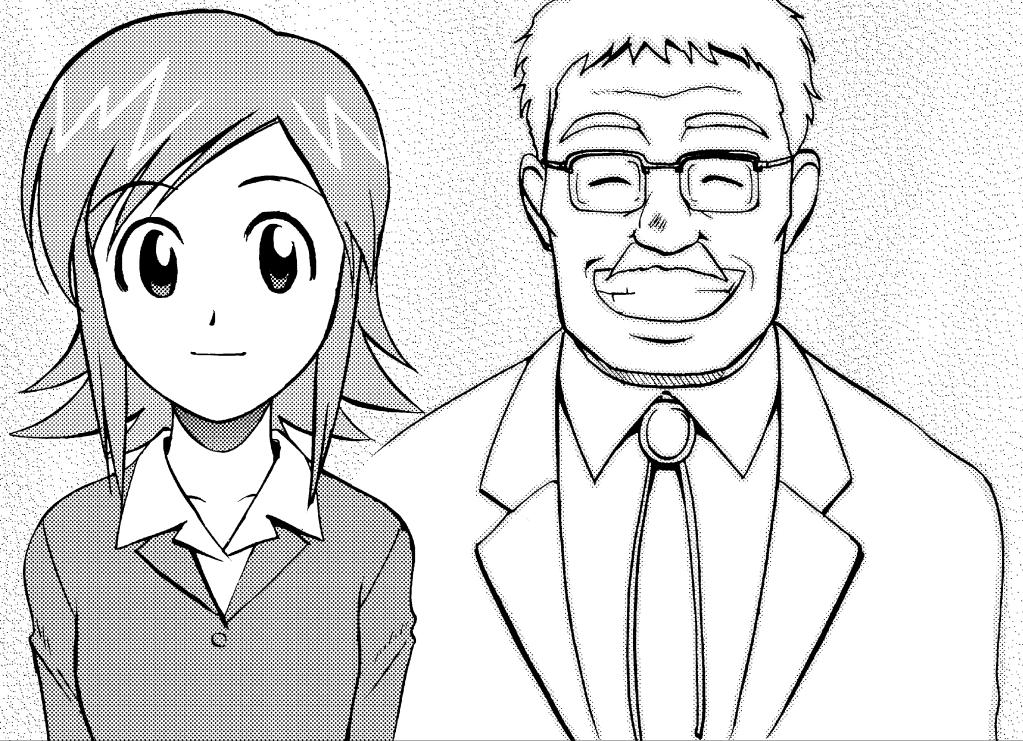
ORA, <sup>⑬</sup> E <sup>⑨</sup> SONO LA STESSA EQUAZIONE E LA PRODUZIONE MASSIMIZZA IL VANTAGGIO SOCIALE.

LA TASSAZIONE ORDINARIA (IMPOSTA SUL REDDITO, SUI CONSUMI, ECCETERA) SERVE PER GLI INVESTIMENTI PUBBLICI...

UNA TASSA AMBIENTALE È FINALIZZATA ALLA TUTELA DELL'AMBIENTE ATTRAVERSO IL CONTROLLO DELL'ECONOMIA.

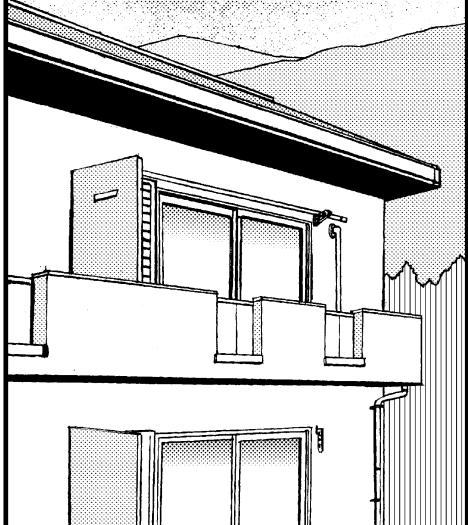
TUTTO CHIARO, MR. SEKI?



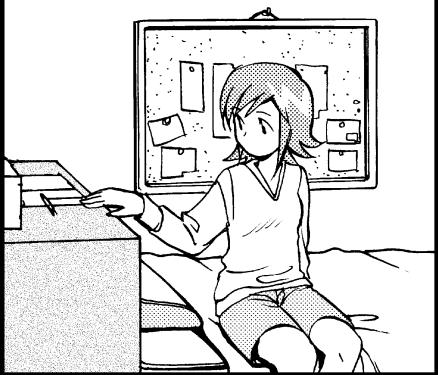


APPARTAMENTO DI NORIKO,  
ALCUNI GIORNI DOPO.

FIUUU.



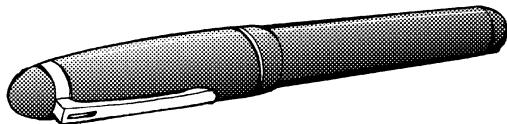
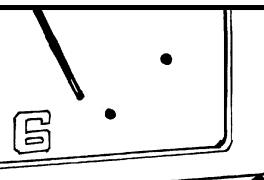
TI FARANNO  
SAPERE PRESTO  
LA TUA  
DESTINAZIONE.



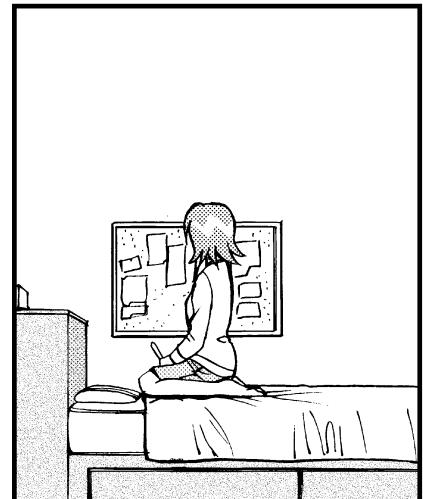
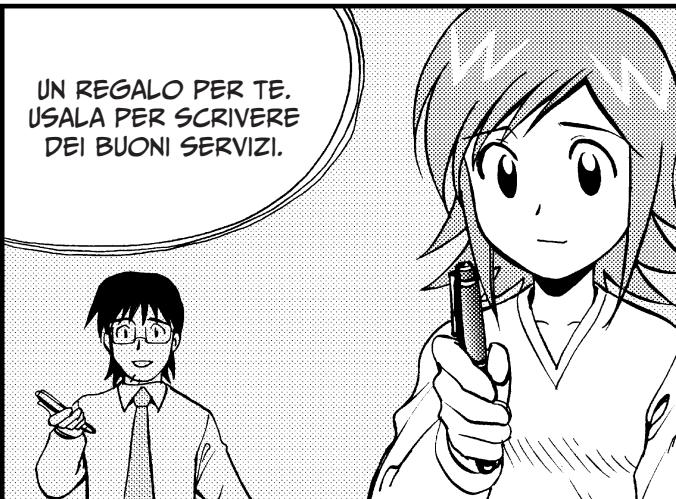
NON AVREI MAI  
PENSATO DI AN-  
DARE A LAVORA-  
RE A OKINAWA.



NON SAPEVO  
NEPPURE CHE A  
OKINAWA AVESSIMO  
UNA REDAZIONE.



UN REGALO PER TE.  
USALA PER SCRIVERE  
DEI BUONI SERVIZI.

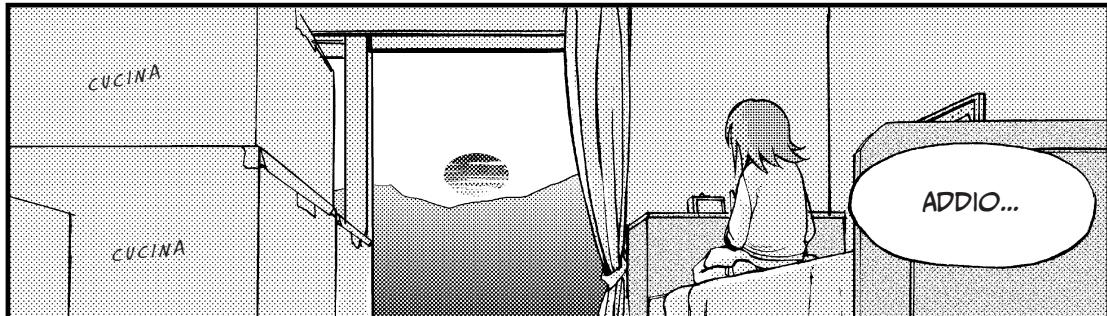
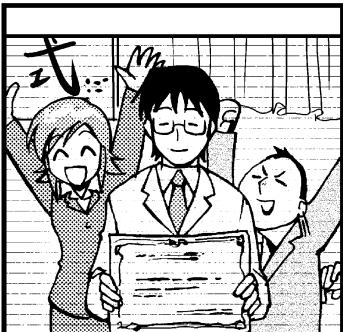
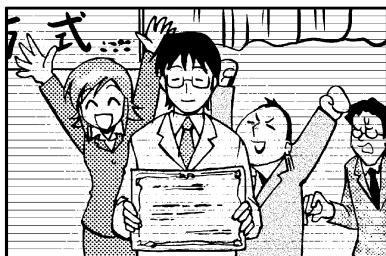


# Le scuse della Burnham Chemical

L'inquinamento di Ox Bay

Imminente un  
accordo con le  
cooperative  
dei pescatori.

Servizio: ambiente ed economia



## DERIVATE DELLE FUNZIONI IMPLICITE

Consideriamo i punti di coordinate  $(x,y)$  nei quali una funzione di due variabili  $f(x,y)$  assume il valore costante  $f(x,y)=c$ . Quando una parte di questi punti può essere vista come il grafico di una funzione di una singola variabile  $y=h(x)$ , la  $h$  viene detta funzione implicita. Per una funzione implicita vale la relazione  $f(x,h(x))=c$  per tutti gli  $x$  per cui è definita. Ora cercheremo di ricavarla.

Data  $z=f(x,y)$ , per la formula dei differenziali totali abbiamo  $dz = f_x d_x + f_y d_y$ . Nell'insieme dei valori  $(x,y)$  per cui  $f(x,y)=c$  il valore di  $f$  non cambia, l'incremento di  $z$  è 0 e quindi anche il suo differenziale  $dz=0$ . Abbiamo quindi  $0=f_x d_x + f_y d_y$ . Se richiediamo che  $f_y \neq 0$ , operando formalmente otteniamo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

Il membro sinistro è l'espressione formale dell'incremento di  $f$  diviso per quello di  $x$  nel punto  $(x,y)$ . Per definizione, è la derivata di  $h$  in  $x$ . Quindi

$$h'(x) = -\frac{f_x}{f_y}$$

### ESEMPIO

$f(x,y) = r^2$ , dove  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , rappresenta un cerchio di raggio  $r$  con centro nell'origine. In un intorno di un punto per cui  $x^2 \neq r^2$ , possiamo risolvere l'equazione  $f(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$  e determinare la funzione隐式  $y = h(x) = r^2 - x^2$  oppure  $y = h(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ . Poi, grazie alla formula, la derivata sarà data da

$$h'(x) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{x}{y}$$

## ESERCIZI

1. Ricavare  $f_x$  e  $f_y$  per  $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ .
2. Data l'accelerazione gravitazionale  $g$ , il periodo  $T$  di un pendolo di lunghezza  $L$  è dato da  $by$

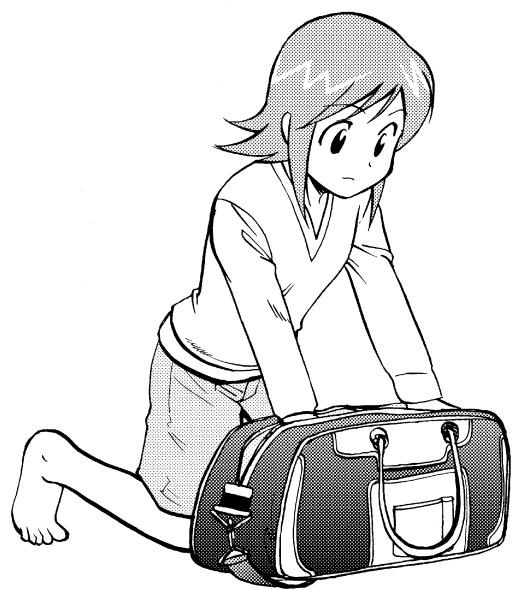
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

(l'accelerazione gravitazionale  $g$  varia a seconda della distanza dal suolo). Ricavare l'espressione per il differenziale totale di  $T$ .

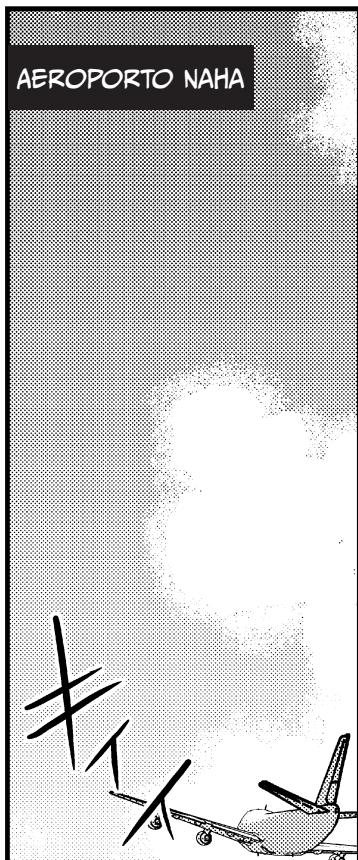
Se  $L$  aumenta dell'1% e  $g$  diminuisce del 2%, di quale percentuale aumenterà  $T$ ?

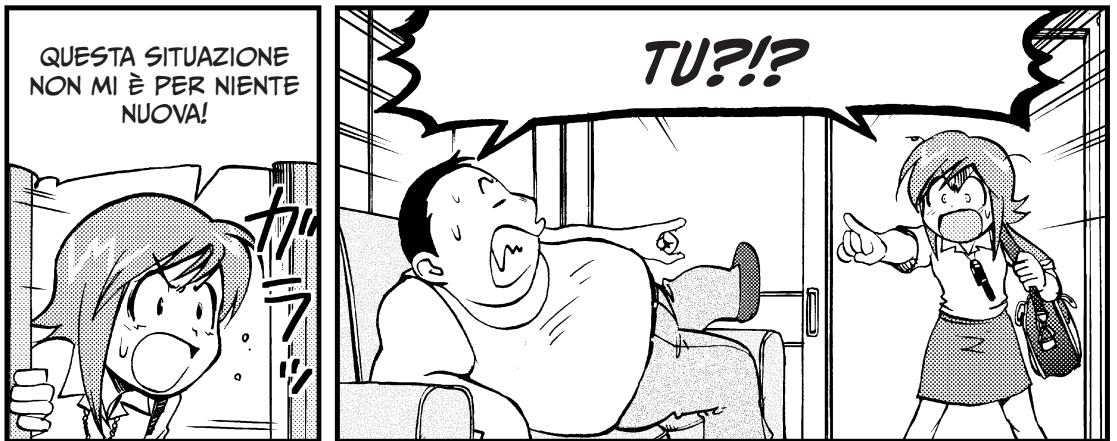
3. Usando la regola della funzione composta, ricavare in maniera diversa il differenziale della funzione implicita  $h(x)$  di  $f(x,y)=c$ .

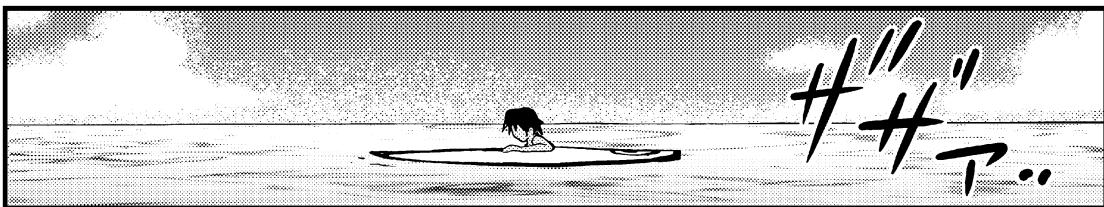
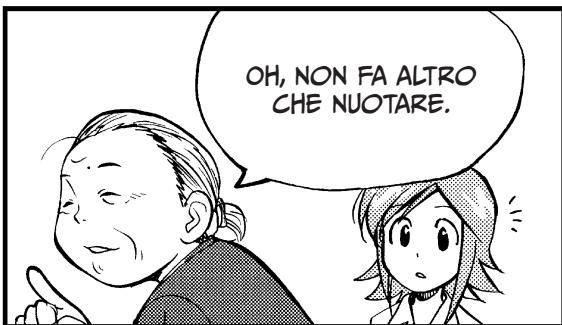
# EPILOGO. A COSA SERVE LA MATEMATICA?

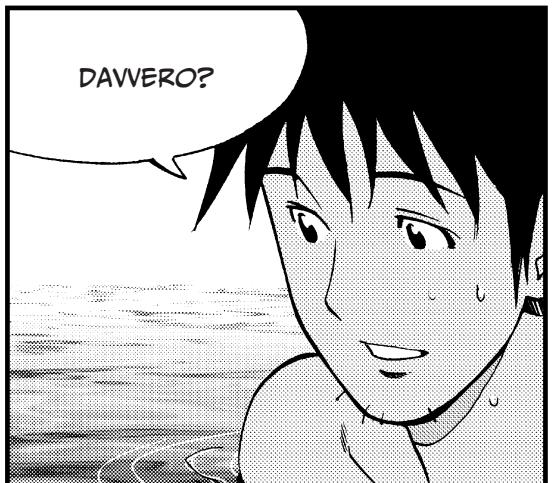
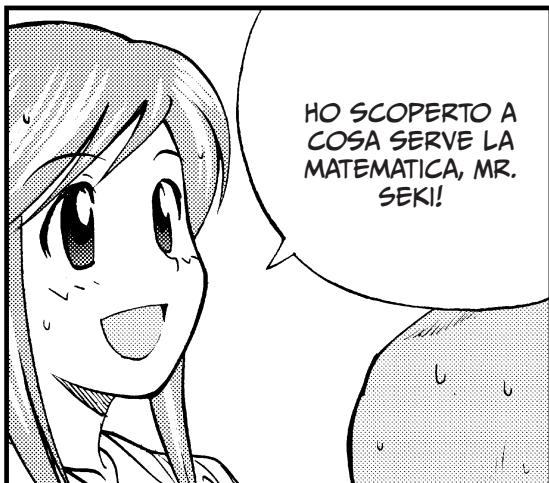
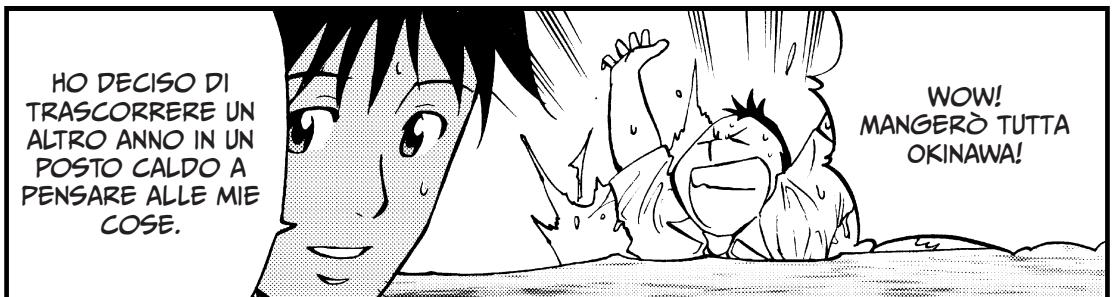
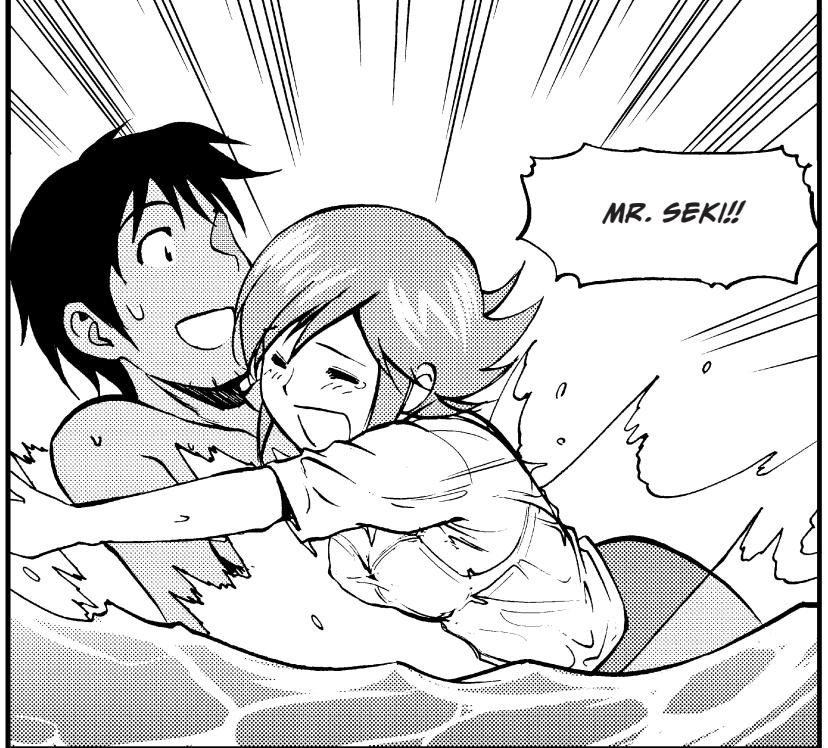
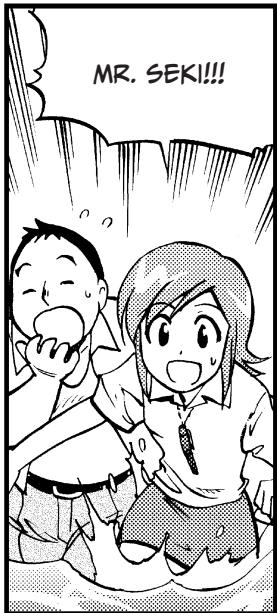


AEROPORTO NAHA

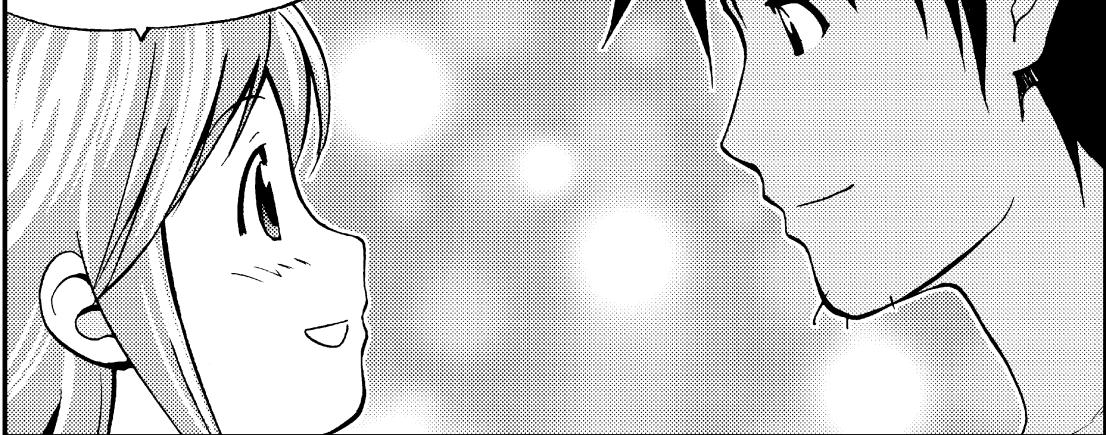








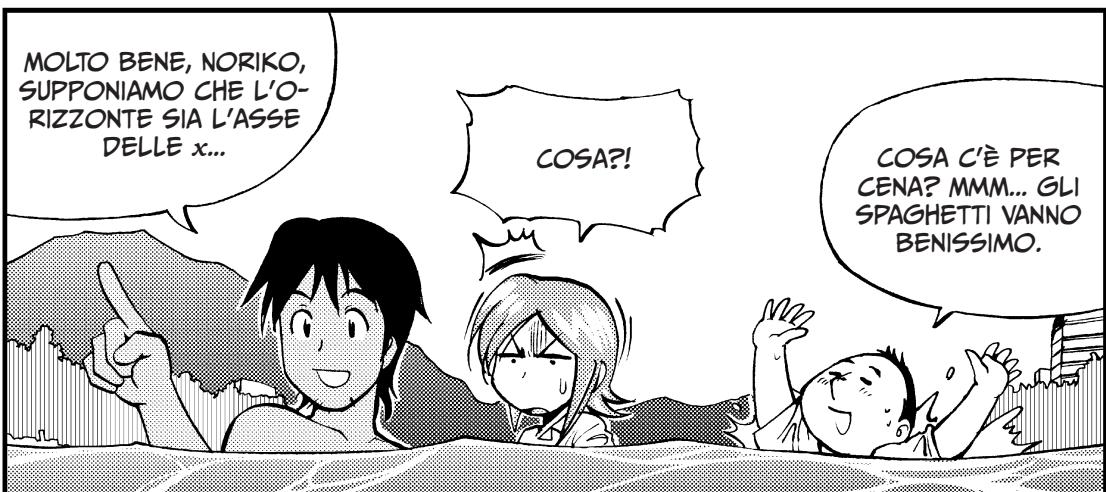
SERVE A ESPRIMERE  
QUELLO CHE NON PUÒ  
ESSERE DETTO CON  
LE PAROLE.



MOLTO BENE, NORIKO,  
SUPPONIAMO CHE L'O-  
RIZZONTE SIA L'ASSE  
DELLE x...

COSA?!

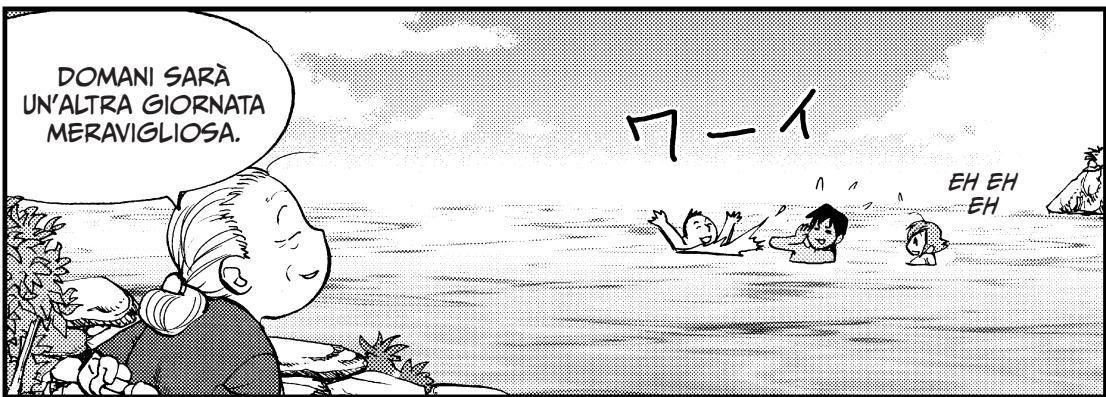
COSA C'È PER  
CENA? MMM... GLI  
SPAGHETTI VANNO  
BENISSIMO.



DOMANI SARÀ  
UN'ALTRA GIORNATA  
MERAVIGLIOSA.

7 - 1

EH EH  
EH



# A

## SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

### PROLOGO

1. Sostituendo

$$y = \frac{5}{9}(x - 32) \text{ in } z = 7y - 30, z = \frac{35}{9}(x - 32) - 30$$

### CAPITOLO 1

1. A.  $f(5) = g(5) = 50$   
B.  $f'(5) = 8$

$$\begin{aligned}2. \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(a + \varepsilon)^3 - a^3}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{\varepsilon} \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2) = 3a^2\end{aligned}$$

Perciò la derivata di  $f(x)$  è  $f'(x) = 3x^2$ .

### CAPITOLO 2

1. La soluzione è

$$f'(x) = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

2.  $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$

Per  $x < -2$ ,  $f'(x) > 0$ , per  $-2 < x < 2$ ,  $f'(x) < 0$ , e per  $x > 2$ ,  $f'(x) > 0$ . Quindi per  $x = -2$ , abbiamo il massimo  $f(-2) = 16$ , e in  $x = 2$ , il minimo  $f(2) = -16$ .

3. Poiché  $f(x) = (1 - x)^3$  è una funzione  $g(h(x))$  composta di  $g(x) = x^3$  e  $h(x) = 1 - x$  abbiamo.

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 3(1 - x)^2(-1) = -3(1 - x)^2$$

4. Derivando  $g(x) = x^2(1 - x)^3$  otteniamo

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^2)'(1 - x)^3 + x^2((1 - x)^3)' \\ &= 2x(1 - x)^3 + x^2(-3(1 - x)^2) \\ &= x(1 - x)^2(2(1 - x) - 3x) \\ &= x(1 - x)^2(2 - 5x) \\ g'(x) = 0 \text{ quando } x &= \frac{2}{5} \text{ o } x = 1, \text{ e } g(1) = 0. \end{aligned}$$

Ha quindi il massimo  $g\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{108}{3125}$  in  $x = \frac{2}{5}$

## CAPITOLO 3

1. Le soluzioni sono

$$\textcircled{1} \quad \int_1^3 3x^2 dx = x^3 \Big|_1^3 = 3^3 - 1^3 = 26$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \int_2^4 \frac{x^3 + 1}{x^2} dx &= \int_2^4 \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_2^4 x dx + \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2}(4^2 - 2^2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4}\right) = \frac{25}{4} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad \int_0^5 x + (1 + x^2)^7 dx + \int_0^5 x - (1 + x^2)^7 dx = \int_0^5 2x dx = 5^2 - 0^2 = 25$$

z. A. L'area tra il grafico di  $y = f(x) = x^2 - 3x$  e l'asse delle  $x$  è data da

$$-\int_0^3 x^2 - 3x \, dx$$

$$\text{B. } -\int_0^3 x^2 - 3x \, dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^3 = -\frac{1}{3}(3^3 - 0^3) + \frac{3}{2}(3^2 - 0^2) = \frac{9}{2}$$

## CAPITOLO 4

1. La soluzione è

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

z. Poiché

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 \end{aligned}$$

3. Da

$$f'(x) = (x)' e^x + x (e^x)' = e^x + x e^x = (1+x)e^x$$

il minimo è

$$f(-1) = -\frac{1}{e}$$

4. Ponendo  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = \ln x$ , integrando per parti.

$$\int_1^e (x^2)' \ln x \, dx + \int_1^e x^2 (\ln x)' \, dx = e^2 \ln e - \ln 1$$

Da cui,

$$\int_1^e 2x \ln x dx + \int_1^e x^2 \frac{1}{x} dx = e^2$$

$$\begin{aligned}\int_1^e 2x \ln x dx &= -\int_1^e x dx + e^2 = -\frac{1}{2}(e^2 - 1)^2 + e^2 \\ &= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

## CAPITOLO 5

1. Per

$$f(x) = e^{-x}, f'(x) = -e^{-x}, f''(x) = e^{-x}, f'''(x) = -e^{-x}$$

$$f(0) = 1, f'(0) = -1, f''(0) = 1, f'''(0) = -1\dots$$

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

2. Deriviamo

$$f(x) = (\cos x)^{-1}, f'(x) = (\cos x)^{-2} \sin x$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= 2(\cos x)^{-3} (\sin x)^2 + (\cos x)^{-2} \cos x \\ &= 2(\cos x)^{-3} (\sin x)^2 + (\cos x)^{-1}\end{aligned}$$

Da cui  $f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 1$

3. Procedere esattamente come a pagina 155, derivando più volte  $f(x)$ . Poiché lo sviluppo è centrato in  $x = a$ , sostituendo  $a$  troverete i  $c_n$ . Dovete ritrovare  $c_n = 1/n! f^{(n)}(a)$ , come nella formula di pagina 159.

## CAPITOLO 6

1. Per  $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ ,  $f_x = 2x + 2y$ , e  $f_y = 2x + 6y$ .

2. Il differenziale totale di

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi g^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

è dato da

$$dT = \frac{\partial T}{\partial g} dg + \frac{\partial T}{\partial L} dL = -\pi g^{-\frac{3}{2}} L^{\frac{1}{2}} dg + \pi g^{-\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} dL$$

Perciò,

$$\Delta T \approx -\pi g^{-\frac{3}{2}} L^{\frac{1}{2}} \Delta g + \pi g^{-\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} \Delta L$$

Sostituendo  $\Delta g = -0,02g$ ,  $\Delta L = 0,01L$ , abbiamo

$$\begin{aligned}\Delta T &\approx 0,02\pi g^{-\frac{3}{2}} L^{\frac{1}{2}} g + 0,01\pi g^{-\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} L \\ &= 0,03\pi g^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} = 0,03 \frac{T}{2} = 0,015T\end{aligned}$$

Quindi  $T$  aumenta dell'1,5%.

3. Supponiamo che  $y = h(x)$  sia la funzione implicita di  $f(x, y) = c$ .

4. Poiché il membro destro è costante per tutti i valori di  $(x, y)$  in esame, in un intorno di  $x$  abbiamo  $f(x, h(x)) = c$ .

Per la formula della funzione composta

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dx} = f_x + f_y h'(x) = 0$$

Perciò

$$h'(x) = -\frac{f_x}{f_y}$$



# B

## PRINCIPALI FORMULE, TEOREMI E FUNZIONI CHE TROVATE IN QUESTO LIBRO

### EQUAZIONI LINEARI

L'equazione di una retta di pendenza  $m$  passante per il punto  $(a,b)$ :

$$y = m(x - a) + b$$

### DERIVAZIONE

#### COEFFICIENTI DI DERIVAZIONE

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

#### DERIVATA

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Altri simboli per la derivata

$$\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx} f(x)$$

#### DERIVATA DEL PRODOTTO PER UNA COSTANTE

$$\{\alpha f(x)\}' = \alpha f'(x)$$

#### DERIVATA DELLA POTENZA N-ESIMA

$$\{x^n\}' = nx^{n-1}$$

### DERIVATA DELLA SOMMA

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

### DERIVATA DEL PRODOTTO

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

### DERIVATA DEL QUOZIENTE

$$\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\right\}' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

### DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x)$$

### DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Con  $y = f(x)$  e  $x = g(y)$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

### ESTREMI

Se  $y=f(x)$  ha un massimo o un minimo in  $x=a$ , allora  $f'(a)=0$

Se  $f'(a)>0$ , allora  $y=f(x)$  aumenta in un intorno di  $x=a$

Se  $f'(a)<0$ , allora  $y=f(x)$  diminuisce in un intorno di  $x=a$

### TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Dati  $a, b$  ( $a < b$ ), allora esiste  $c$  con  $a < c < b$ , e tale che

$$f(b) = f'(c)(b-a) + f(a)$$

## DERIVATE DI FUNZIONI IMPORTANTI

### FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

$$\{\cos \theta\}' = -\sin \theta, \{\sin \theta\}' = \cos \theta$$

## FUNZIONI ESPONENZIALI

$$\{e^x\}' = e^x$$

## FUNZIONI LOGARITMICHE

$$\{\log x\}' = \frac{1}{x}$$

# INTEGRALI

## INTEGRALI DEFINITI

Se  $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

## INTEGRAZIONE SULL'UNIONE DEGLI INTERVALLI

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

## INTEGRALE DELLA SOMMA

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

## INTEGRALE DEL PRODOTTO PER UNA COSTANTE

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

## INTEGRALE PER SOSTITUZIONE

Se  $x = g(y)$ ,  $b = g(\beta)$ ,  $a = g(\alpha)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(y)) g'(y) dy$$

## INTEGRALE PER PARTI

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx + \int_a^b f(x) g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

## SVILUPPI DI TAYLOR

Se  $f(x)$  ammette uno sviluppo di Taylor in un intorno di  $x = a$ , allora

$$\begin{aligned}f(x) &= f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 \\&\quad + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^{(n)} + \dots\end{aligned}$$

### SVILUPPO DI TAYLOR DI VARIE FUNZIONI

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} x^n + \dots$$

## DERIVATE PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

### DERIVATE PARZIALI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

### DIFFERENZIALI TOTALI

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

### DERIVATA PARZIALE DELLA FUNZIONE COMPOSTA

Se  $z = f(x, y)$ ,  $x = a(t)$ ,  $y = b(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{da}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{db}{dt}$$

# INDICE

## A

- algebra, 74, 173, 201
- antitrust (leggi), 44, 46–47, 52, 58
- approssimare le funzioni lineari, 26, 30, 34, 39, 41, 65, 72, 111, 161
- approssimazione
  - con le funzioni, 16–26, 48
  - cubica, 161–162
  - lineare, 161
  - quadratica, 152, 161–162, 174, 178
  - valore esatto, 89–94

## B

- ballo dell'analisi, 128–129
- binomiale,
  - distribuzione, 167–169
  - sviluppo, 150
- bit, 131–132

## C

- calcolo, teorema fondamentale del. (v. teorema fondamentale del calcolo)
- causalità, 8, 13, 14
- causa ed effetto, 181
- convergenza (intervallo di), 154, 159
- circonferenza, 24, 119–120
- Cobb-Douglas,
  - funzione di, 183, 203
- coefficienti, 35, 49, 72, 75, 76, 112, 155, 175
- differenziali di, 39–40, 49, 231

- computer, bit, 131–132
- condizioni per gli estremi, 64, 199–201 (v. anche punti estremanti)
- conversioni unità di misura, 13
- costante
  - (moltiplicazione per una), 62, 76, 231, 233
- costante di Eulero, 137n
- costante positiva, 213
- coseno,
  - funzioni, 118, 122–129
- criteri per funzioni crescenti o decrescenti, 65–71
- cubica,
  - approssimazione, 161–162
  - funzione, 150
- curva della domanda, 101, 103–105, 212
- curva dell'offerta, 101, 102–103, 105, 212

## D

- deflazione, 19–20
- delta (simbolo), 91
- domanda (curva della), 101, 103–105, 212
- densità (funzione di), 108, 166
- densità costante, 82–86
- derivata di una potenza, 142
- derivata di un prodotto, 53–59, 62, 74, 143, 232
- derivate,
  - calcolo delle, 39–41, 75, 76, 231
  - definizione di, 39
- di funzioni di grado N, 62–63, 155, 231
- primitive, 90, 112, 143
- derivate parziali, 193, 195–198, 201, 204, 210, 234
- cenni introduttivi, 191–198
- condizioni per gli estremi, 199–201
- definizione, 196–198
- differenziale totale, 197–198, 207, 218, 229, 234
- di funzioni implicite, 218
- di funzioni composte, 142, 206–211, 218, 229, 234
- economia (applicazioni in), 202–205
- derivazione,
  - coefficienti di, 39–40, 49, 231
  - formule di, 74–76, 231–232
  - funzione composta (derivata della), 75, 76, 142, 206–211, 218, 229, 234
  - funzione di grado N (derivate di), 62–63, 155, 231
  - funzioni inverse, 75, 76
  - integrale di funzioni trigonometriche, 128, 129, 232
  - moltiplicazione per una costante, 62, 76, 231, 233
  - polinomi (derivata dei), 62

- potenza (derivata di), 142
- prodotto (derivata di), 53–59, 62, 74, 143, 232
- punti estremanti, 64, 78, 102, 103n, 199–201, 200n, 204, 209–210, 213, 232
- quoziente (derivata di) 74, 76
- somma (derivata di) 47, 48–52, 62, 76, 232
- deviazione standard, 169–170
- differenziali totali, 197–198, 207, 218, 229, 234
- distribuzione
  - binomiale, 167–169
  - normale, 166–168, 175, 176
- domanda.
  - curva della, 101, 103–105, 212
  - e offerta, 55, 101, 104

## E

- economia, 101, 132–133, 183, 202–205
- errore relativo, 27–30, 35, 39, 41, 192–195, 194n
- esercizi
  - calcolare le derivate, 41
  - derivate parziali, 218
  - formule delle derivate, 76
  - funzioni (sostituzione di), 14
  - integrali, 113, 144
  - soluzioni, 225–229
  - sviluppo di Taylor, 178

## F

- formule e regole (v. anche teoremi),
  - approssimazione quadratica, 161–162, 174, 178
  - derivata della somma, 47, 48–52, 62, 76, 232
  - derivate delle funzioni composte, 142, 206–211, 218, 229, 234
  - derivate di funzione di grado N, 62–63, 155, 231
  - derivata di un prodotto, 53–59, 62, 74, 143, 232
  - derivata di un quoziente, 74, 76
  - derivata di una potenza, 142
  - di derivazione, 74–76, 231–232
  - funzione composta, 75, 76
  - funzioni esponenziali, 133–135, 140–141, 160, 233, 234
  - funzioni inverse, derivate di, 75, 76
  - funzioni logaritmiche, 134, 140, 160, 233, 234
  - integrale di una potenza, 112
  - integrali, 95, 106–107, 111–112
  - integrali della somma, 95, 233
  - integrali definiti, 233
  - integrazione per parti, 143–144, 233
  - integrazione per sostituzione, 111–112, 233

- moltiplicazione per una costante, 62, 76
- sviluppo binomiale, 150
- sviluppo di Taylor, 159, 234
- funzioni trigonometriche (derivate e integrazioni di), 128, 129, 232
- funzioni, 32–38, 183–185, 191–192, 200, 206, 207, 209–211, 218.  
(v. anche funzioni a due variabili; funzioni esponenziali; funzioni lineari; funzioni logaritmiche; funzioni trigonometriche)
- approssimare con, 16–26
- approssimate lineari, 26, 30, 34, 39, 41, 65, 72, 111, 161
- caratteristiche di, 13
- cenni introduttivi, 8–14
- Cobb-Douglas, 183, 203
- complesse in più variabili, 184, 191
- composizione di, 14
- composte, 75, 76
- coseno, 118, 122–129
- costanti, 40, 65
- cubica, 150
- curva della domanda, 101, 103–105, 212
- curva dell'offerta, 101, 102–103
- densità, 108, 166
- di distribuzioni, 108

- di grado N, 62–63, 155, 231
- di più variabili, 180–183, 206, 208
- esponenziali, 13, 131–132, 140–141, 160, 233, 234
- implicite, 218
- inverse, 75, 76, 134, 138–141, 138n, 232
- lineari approssimanti, 39, 87, 88, 150–151, 184, 192, 194–195, 194n, 197, 200
- logaritmiche, 131, 134–135, 140–141, 160, 233, 234
- quadratica, 40, 150, 151–153
- seno, 127–129
- funzioni a due variabili,** 183–185, 191–192, 200, 206, 207, 209–211, 218
- funzioni esponenziali,** 13, 131–132, 140–141, 160, 233
- sviluppo di Taylor, 160, 234
- funzioni lineari**
  - a due variabili, 184–187, 190–192
  - a più variabili, 184, 191
  - approssimare, 39, 87, 88, 150–151, 184, 192, 194–195, 194n, 197, 200
  - approssimate, 30, 34, 39, 41, 65, 72, 111
  - calcolare la derivata di, 40
  - cenni introduttivi, 13, 34, 39–41
  - variabili, 184–192

- funzioni logaritmiche,** 131, 134–135, 140–141, 160, 233, 234
  - sviluppo di Taylor delle, 160, 234
  - funzioni trigonometriche**
    - derivazione e integrazione di, 128, 129, 232
    - integrali con, 125
    - sviluppo di Taylor di, 160, 234
    - utilizzo di, 116, 118–124
- G**
- gas serra, 79–81**
- I**
- infinito**
    - polinomi di ordine, 153–154, 159
    - tendere a, 168
  - integrali (formule),** 95, 106–107, 233
  - integrali**
    - definiti, 93, 95, 108, 111, 113, 154, 233
    - di funzioni trigonometriche (derivazione e integrazione di), 128, 129, 232
    - di potenze, 112
    - di somme, 95, 233
    - formule di, 233
  - integrazione**
    - per parti, 143–144, 233
    - per sostituzione, 111–112, 233
  - intervallo di convergenza, 154, 159**
  - inversa**

- funzione, 75, 76, 134, 138–141, 138n, 232
- proporzione, 139

## L

- leggi antitrust, 44, 46–47, 52, 58**
- lineare**
  - approssimazione, 161
  - equazioni, 231
  - espressioni, 20, 26
  - funzione (v. funzioni lineari)
- log (simbolo), 134**
- logaritmo naturale, 140, 141**

## M

- massimi/minimi, 64–65. (v.anche punti estremanti)**
- monopolio, 54–58**

## O

- offerta**
  - curva della, 101, 102–103, 105, 212
  - e domanda, 55, 101, 104

## P

- pendenza, 26, 39–40, 72–73, 186–187, 192–193, 211, 231**
- polinomi**
  - derivata dei, 62
  - di ordine infinito, 153–154, 159
  - di ordine superiore, 153, 175
- potenza (integrale di una), 112**
- primitive, 90, 112, 143**
- probabilità (distribuzione delle), 165–168, 177**

prodotto (derivata del), 53–59, 62, 74, 143, 232  
prodotto interno lordo (PIL), 202  
proporzioni  
  proporzioni, 139  
punti estremanti, 64, 78, 102, 103n, 200n, 204, 209–210, 213, 232  
- condizioni per il teorema, 64, 199–201  
- massimo/minimo, 64–65

## Q

quadratica  
- approssimazione, 152, 161–162, 174, 178  
- funzione, 40, 150, 151–153  
quoziente (derivata di un), 74, 76

## R

radiane, 119–120, 124  
radice quadrata, 107  
- sviluppo di Taylor di, 160, 234  
regole. (v. formule e regole)  
relazione, 9–10, 13, 89, 134, 181, 206

## S

seno (funzioni), 127–129  
sigma (simbolo), 91–92  
somma  
- derivata della, 47, 48–52, 62, 76, 232  
- integrale della, 95, 233  
sostituzione  
  (integrazione per), 111–112, 233

sviluppo binomiale, 150  
sviluppo di Taylor  
- cenni introduttivi, 149–156, 161–162  
- come ricavarlo, 155  
- della radice quadrata, 160, 234  
- di funzioni esponenziali, 160  
- di funzioni logaritmiche, 160, 234  
- di funzioni trigonometriche, 160, 234  
- formule di, 159, 234

## T

tangenti (linee), 34, 40, 72n, 73, 126, 161  
tasse ambientali, 212  
tasso di variazione, 40  
Taylor (sviluppo di),  
- cenni introduttivi, 149–156, 161–162  
- come ricavarlo, 155  
- della radice quadrata, 160, 234  
- di funzioni esponenziali, 160  
- di funzioni logaritmiche, 160, 234  
- di funzioni trigonometriche, 160, 234  
- formule di, 159, 234

teorema fondamentale del calcolo  
- applicazioni, 101–108  
- spiegazione, 82–90  
- riassunto del, 110–112  
- utilizzi, 91–93, 142–144  
teoremi

- condizioni per punti estremanti, 64, 199–201  
- criteri per funzioni crescenti o decrescenti, 65–71  
- punti estremanti, 64, 78, 102, 103n, 199–201, 200n, 204, 209–210, 213, 232  
- valor medio, 72–73, 94, 232  
termini di ordine superiore, 153

## U

unità di misura  
(conversioni), 13

## V

valor medio (teorema del), 72–73, 94, 232  
variazione, 27, 29  
velocità, 105, 106–107, 183

## X

x (asse delle), 86, 93, 94, 108, 110, 113, 124, 224, 227  
xn (potenza), 76

## IL BALLO DELLE DERIVATE E DEGLI INTEGRALI PER LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

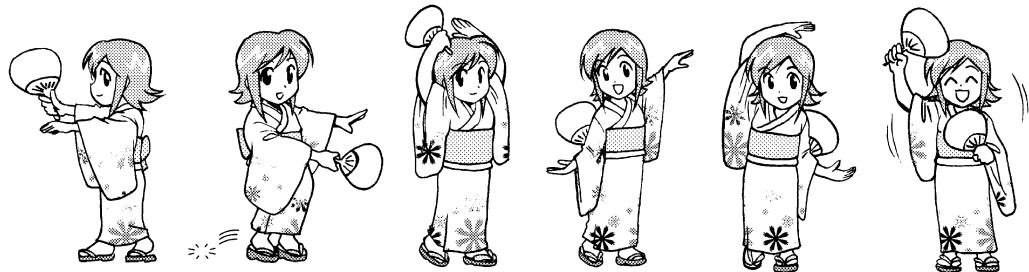
POTRÀ SEMBRARVI PEDANTINO E POCO PRATICABILE MA CON QUESTA CANZONE DIVENTERÀ FACILE!

SENO E COSENO SONO COME UN VORTICE! DI DERIVATE E INTEGRALI SARÒ L'AMBASCIATRICE!

SENO E COSENO SONO COME UN VORTICE, È COSÌ NATURALE! LO DICE IL CALCOLO INTEGRALE E DIFFERENZIALE.

DA COSENO E SENO CON L'INTEGRALE!

DA SENO A COSENO CON LA DERIVATA!





## L'AUTORE

Hiroyuki Kojima è nato nel 1958 e ha conseguito un dottorato di ricerca in Economia presso l'Università di Tokyo.  
È stato un apprezzato conferenziere e ora è Professore Associato presso la Facoltà di economia dell'Università Teikyo di Tokyo.  
È un economista di fama e un saggista prolifico, con al suo attivo un gran numero di pubblicazioni di matematica ed economia a livello base, divulgativo e accademico.

# UN'AFFASCINANTE GUIDA ALLA MATEMATICA. A FUMETTI!



NORIKO È UNA GIORNALISTA ALLE PRIME ARMI, LAVORA PER IL NAGASAKE TIMES E DESIDERÀ CON TUTTA SE STESSA AFFRONTARE ARGOMENTI VERAMENTE IMPORTANTI, COME LA CRONACA POLITICA E GLI AFFARI ESTERI... MA SARÀ ALL'ALTEZZA? PER FORTUNA C'È MR SEKI, IL SUO CAPO CON LA FISSAZIONE PER L'ANALISI, CHE LE INSEGNERÀ COME AFFRONTARE I VARI CASI CON UN APPROCCIO MATEMATICO.

CON "I MANGA DELLE SCIENZE 2 - MATEMATICA" SEGUIRETE NORIKO MENTRE, PASSO DOPO PASSO, IMPARERÀ CHE L'ANALISI NON È SEMPLICEMENTE UN CORSO CON CUI SCREMARE LAUREANDI SPOCCHIOSI. CAPIRETE COME CON L'ANALISI SIA POSSIBILE INTERPRETARE LE LEGGI DELLA FISICA, DELL'ECONOMIA E DEL MONDO CHE CI CIRCONDA, GRAZIE A ESEMPI CONCRETI COME LA PROBABILITÀ, LE CURVE DELLA DOMANDA E DELL'OFFERTA, L'ECONOMIA DELL'INQUINAMENTO E LA DENSITÀ DEL SHOCHU, IL DELIZIOSO LIQUORE GIAPPONESE.

MR SEKI INSEGNERÀ A NORIKO A:

- » USARE LE DERIVATE PER CAPIRE LA VELOCITÀ DI VARIAZIONE DI UNA FUNZIONE;
- » APPLICARE IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO E CAPIRE LA RELAZIONE TRA LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE E IL SUO INTEGRALE;
- » INTEGRARE E DERIVARE LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE E ALTRE FUNZIONI IMPORTANTI;
- » AFFRONTARE FUNZIONI CON LE DERIVATE IN PIÙ VARIABILI;
- » USARE GLI SVILUPPI DI TAYLOR PER APPROSSIMARE FUNZIONI NON BANALI PER MEZZO DEI POLINOMI.

SIA CHE VI TROViate ALLE PRESE PER LA PRIMA VOLTA CON UN CORSO DI ANALISI O CHE VI SERVA SEMPLICEMENTE UN RAPIDO RIPASSO, NE "I MANGA DELLE SCIENZE 2 - MATEMATICA" TROVERETE QUELLO CHE VI SERVE!



la Repubblica Le Scienze



Pubblicazione settimanale da vendersi esclusivamente  
in abbinamento a la Repubblica oppure a Le Scienze.  
Supplemento al numero in edicola.  
9,90 euro + il prezzo di Repubblica oppure de Le Scienze.