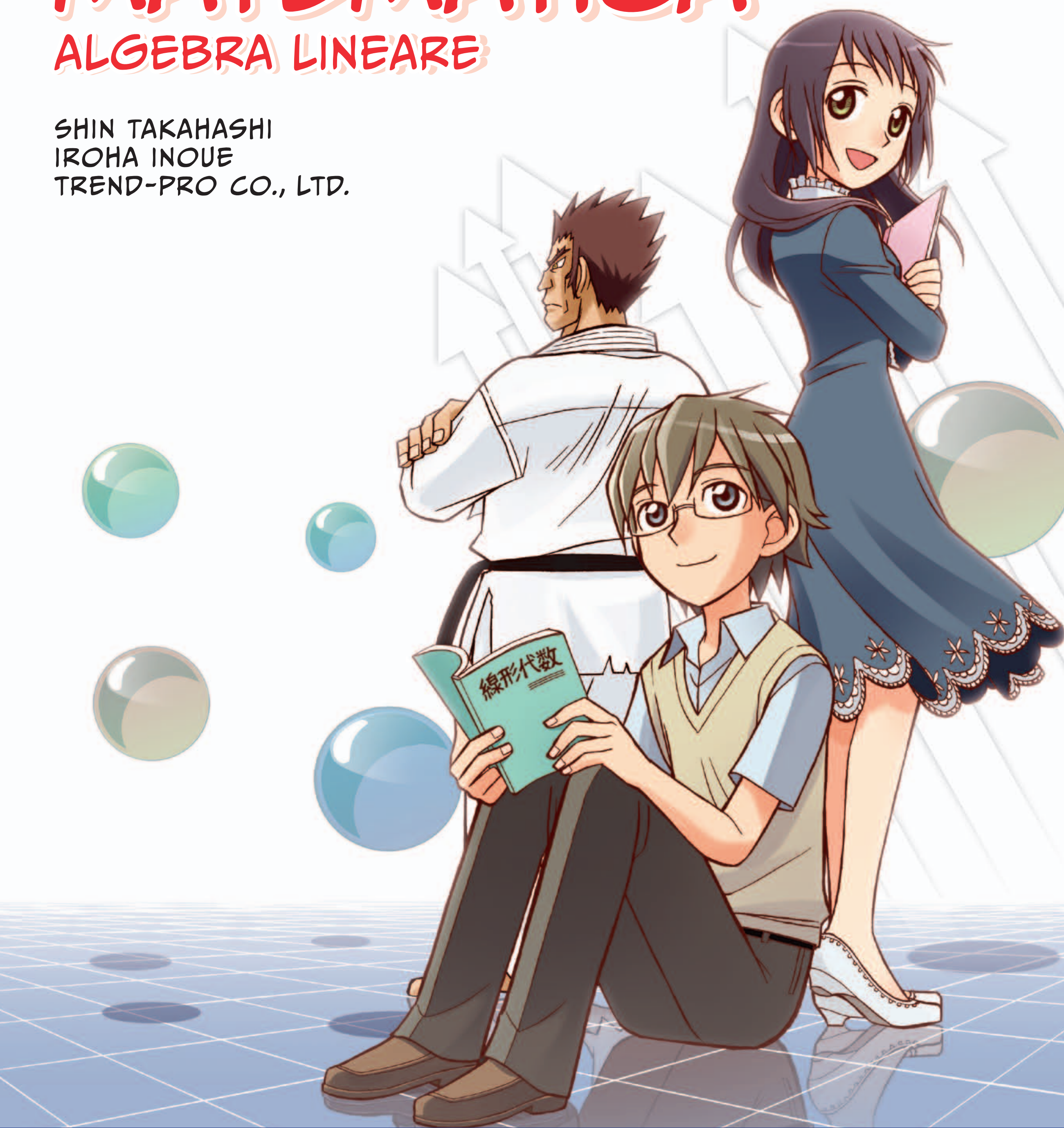
I MANGA DELLE SCIENZE

MATEMATICA

ALGEBRA LINEARE

SHIN TAKAHASHI
IROHA INOUE
TREND-PRO CO., LTD.



Ohmsha
no starch press
la Repubblica
Le Scienze

I MANGA DELLE SCIENZE

MATEMATICA

ALGEBRA LINEARE

SHIN TAKAHASHI
IROHA INOUE
TREND-PRO CO., LTD.

水
E-BOOKS

SOMMARIO

PREFAZIONE

Questo libro è destinato a chiunque voglia farsi una prima idea dell'algebra lineare in tempi abbastanza rapidi, e potrà risultare particolarmente utile a:

- studenti universitari che intendono seguire un corso di algebra lineare, o che lo stanno già seguendo e hanno bisogno di una mano;
- studenti che pur avendo già seguito un corso in merito non hanno ben capito cosa sia l'algebra lineare;
- liceali che progettano di iscriversi a una facoltà scientifica;
- chiunque abbia il senso dell'umorismo e si interessi di matematica!

Il libro è così suddiviso:
Capitolo 1: Cos'è l'algebra lineare?
Capitolo 2: I fondamenti
Capitoli 3 e 4: Le matrici
Capitoli 5 e 6: I vettori
Capitolo 7: Le trasformazioni lineari
Capitolo 8: Gli autovalori e gli autovettori

In quasi tutti i capitoli si trovano alcune pagine di manga e altre di testo.

Saltando il testo e leggendo solo i manga avrete una panoramica rapida di ciascun tema, ma per un apprendimento più efficace raccomando di leggere entrambe le parti e rivedere ogni tema più nel dettaglio.

Questo libro vuole integrare testi più completi, non sostituirli.

Vorrei ringraziare il mio editore, Ohmsha, per avermi dato l'opportunità di scrivere questo libro, e il disegnatore Iroha Inoue. Vorrei inoltre esprimere la mia gratitudine a re_akino, che ha ideato la sceneggiatura, e a tutto il personale di Trend Pro, che mi ha aiutato a trasformare il manoscritto in questo manga. Infine, Kazuyuki Hiraoka e Shizuka Hori mi hanno dato molti ottimi consigli.

Un sincero ringraziamento a tutti.

Shin Takahashi

PROLOGO

*CLUB DI KARATE DI HANAMICHI


ドキドキ
BU-BUM
BU-BUM
TRRR
MI SCU...
BUMP
MA CHE...
真派花道
CHE SUCCEDE QUI?


IO... SONO UNA MATRICOLA... MI CHIAMO REIJI YURINO.
LEI È PER CASO TETSUO ICHINOSE, IL CAPITANO DEL CLUB DI KARATE?
ESATTO.
WOW... IL RANDELLO DI HANAMICHI IN PERSONA!
EHM...
?
NON POSSO TIRARMI INDIETRO ADESSO!
VORREI ISCRIVERMI AL CLUB DI KARATE!
INCHINO
STRAP
NON HO MAI PROVATO, MA PENSO CHE...
SICURO? GUARDA CHE I MIEI ALLIEVI TI RIDUCONO IN POLPETTE.

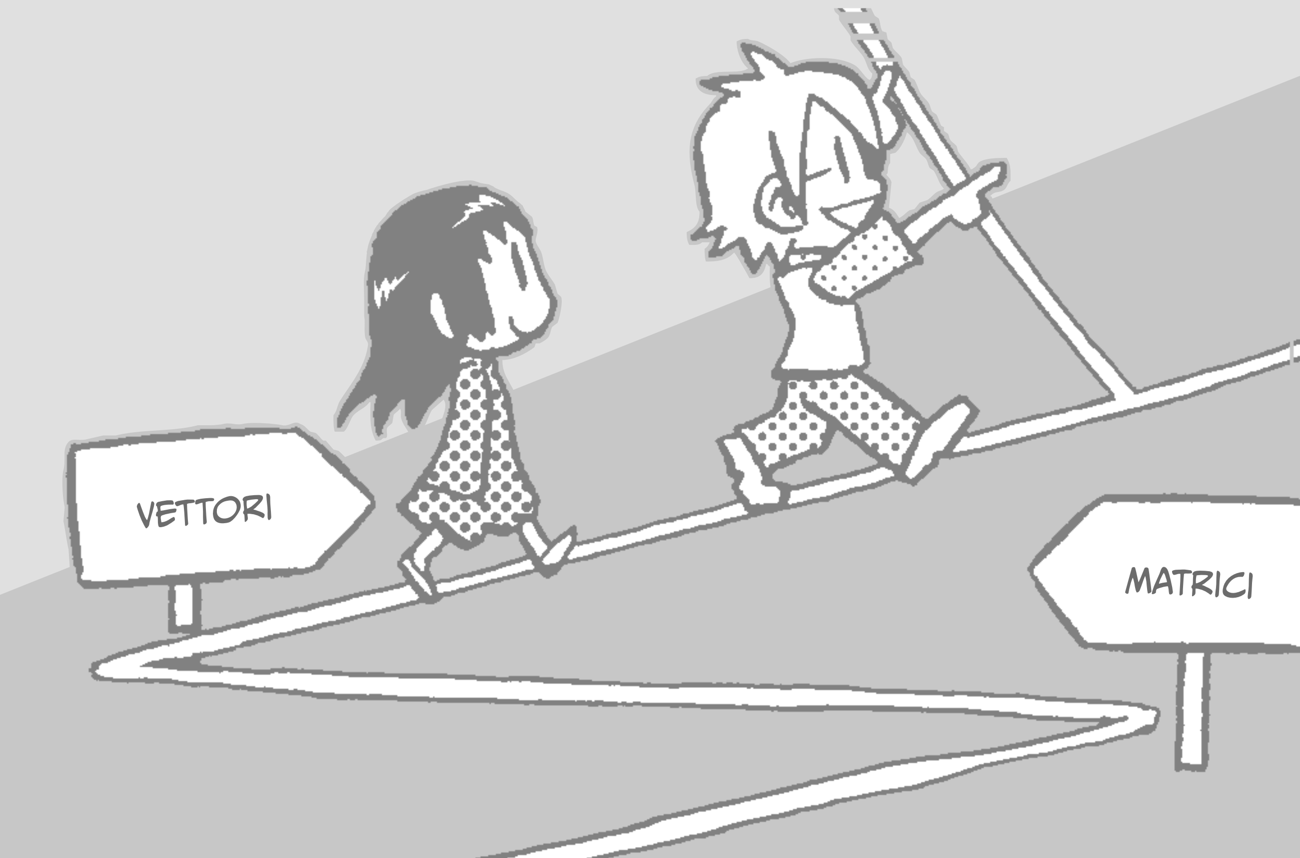

PER FAVORE! IO...
VOGLIO DIVENTARE FORTE!
STRAP
STRAP
...
MMM?
LA TUA FACCIA MI DICE QUALCOSA...
UUH...
ECCO!

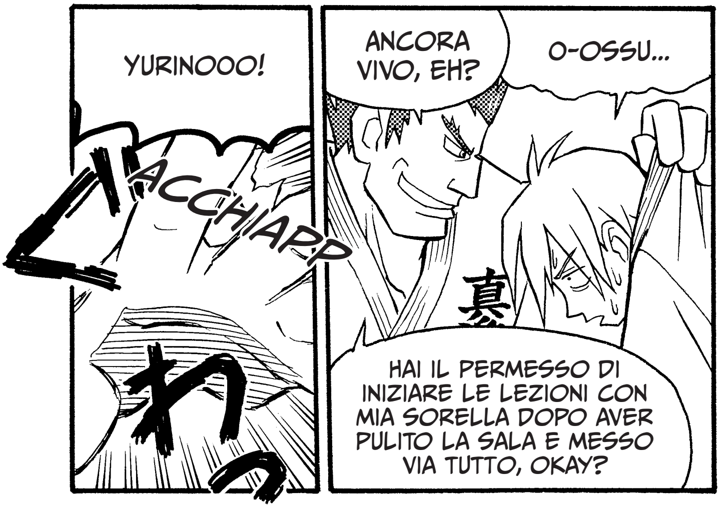

SARAI MICA QUELLO? QUELLO SUL LIBRO DI MATEMATICA DI MIA SORELLA?
現役大学生が教える
誰でも徹底数学
百合野玲治著
LA MATEMATICA PER TUTTI
AUTORE: REIJI YURINO
DAGLI STUDENTI PER GLI STUDENTI
どどーん
UH, HA VISTO IL MIO LIBRO?
MA ALLORA SEI *PROPRIO* TU!
S-SÌ.
NON SARÒ FORTISSIMO...
MA SONO SEMPRE STATO UN MAGO DEI NUMERI.
CAPISCO...
HM
POTREI ANCHE PENSARE DI AMMETTERTI...
COS...?


DAVVERO?!
...A UNA CONDIZIONE!
DEVI DARE RIPETIZIONI DI MATEMATICA ALLA MIA SORELLINA.
ARGH
SAI, NON SE L'È MAI CAVATA GRANCHÉ BENE COI NUMERI...
E PROPRIO IERI SI LAMENTAVA CHE FA FATICA AL CORSO DI ALGEBRA LINEARE...
E QUINDI, SE DO RIPETIZIONI A SUA SORELLA LEI MI AMMETTERÀ?

真派花道
真派
TI ANDREBBE BENE?
ACCETTO!
MI SA CHE È MEGLIO AVVISARTI PRIMA...
SE TI AZZARDI A PROVARCI CON LEI...
...ANCHE UNA VOLTA SOLA...
CROC
IO... NON MI PERMETTEREI MAI!
CRIC
ゴキ
ゴキ
IN TAL CASO... SEGUIMI.
E SAPPI CHE NON CI ANDREMO LEGGERI.
NATURALMENTE!
INIZIAMO SUBITO!
真派花道空手会
MI HANNO PRESO!

1
CHE COS'È L'ALGEBRA LINEARE?





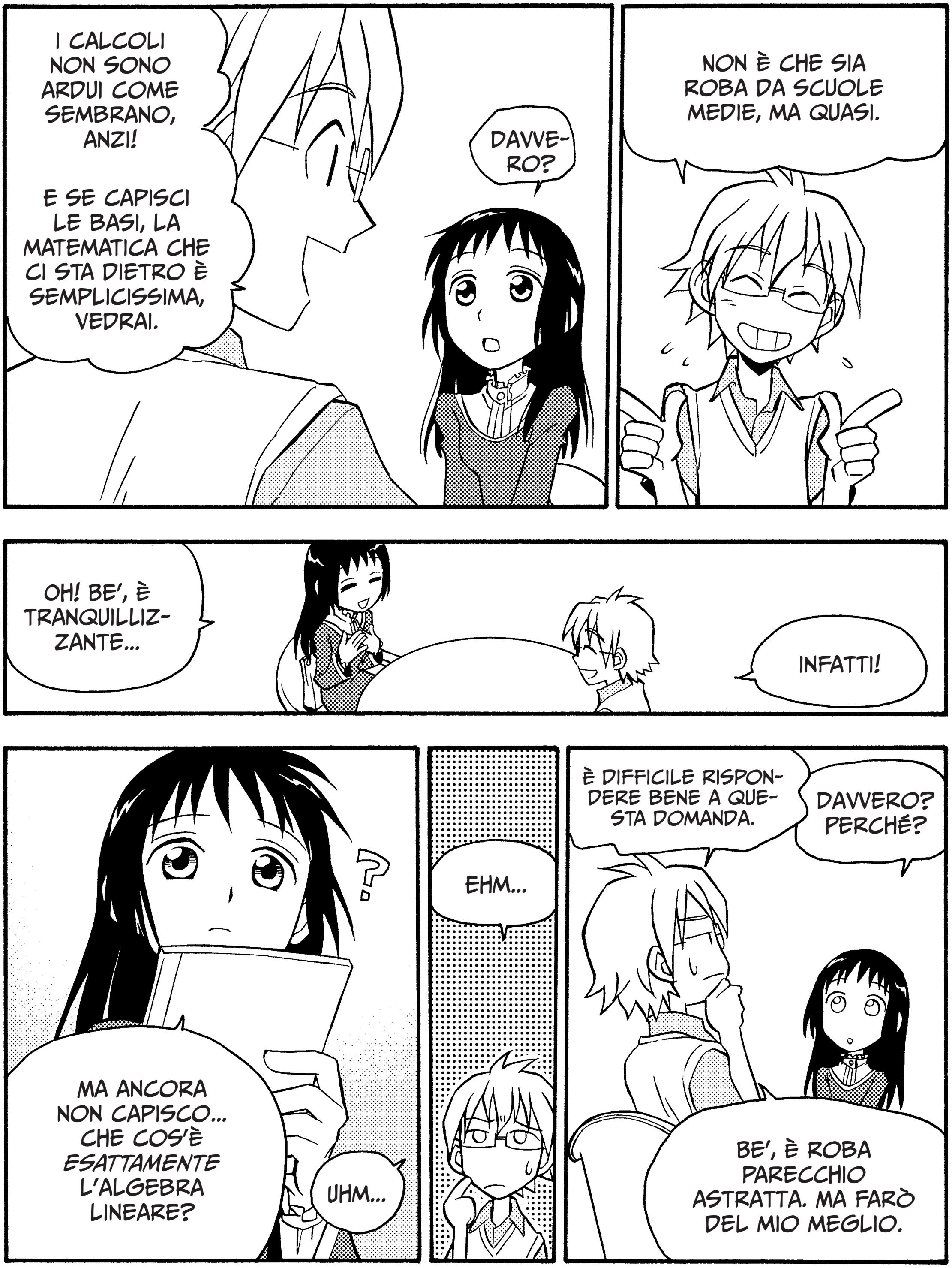
*OSSU È UN'ESCLAMAZIONE USATA SPESSO NELLE ARTI MARZIALI GIAPPONESI; SERVE A CONCENTRARSI E AUMENTARE LA POTENZA DEI COLPI.

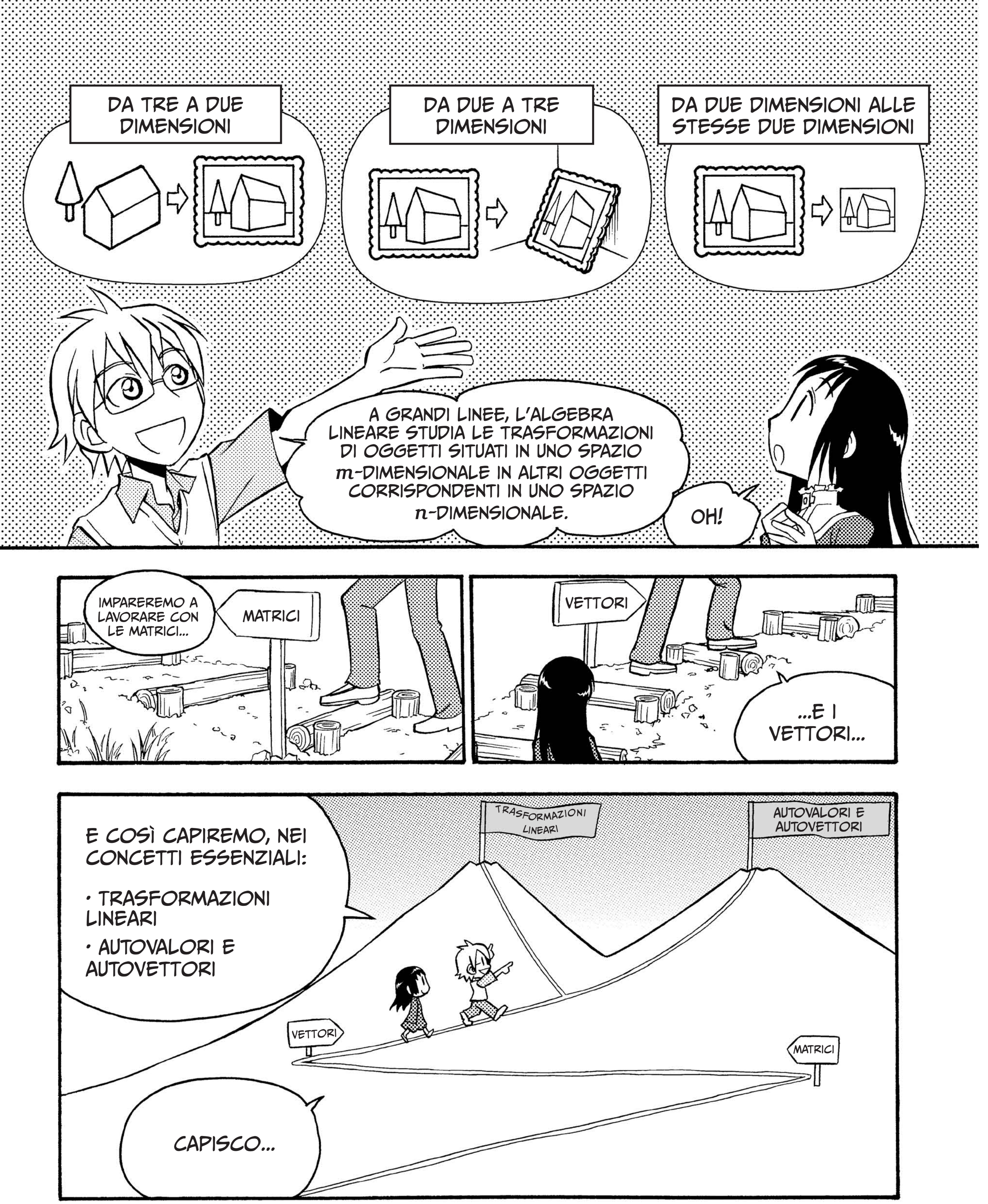
ストン
SBAM
OOH...
CHISSÀ CHE ASPETTO AVRÀ...
OUCH...
QUESTA CI SOMIGLIA, A TETSUO...
UM...
SCUSA, SEI REIJI YURINO?
CO...
PIACERE DI CONO-SCERTI.
MI CHIAMO MISA ICHINOSE.

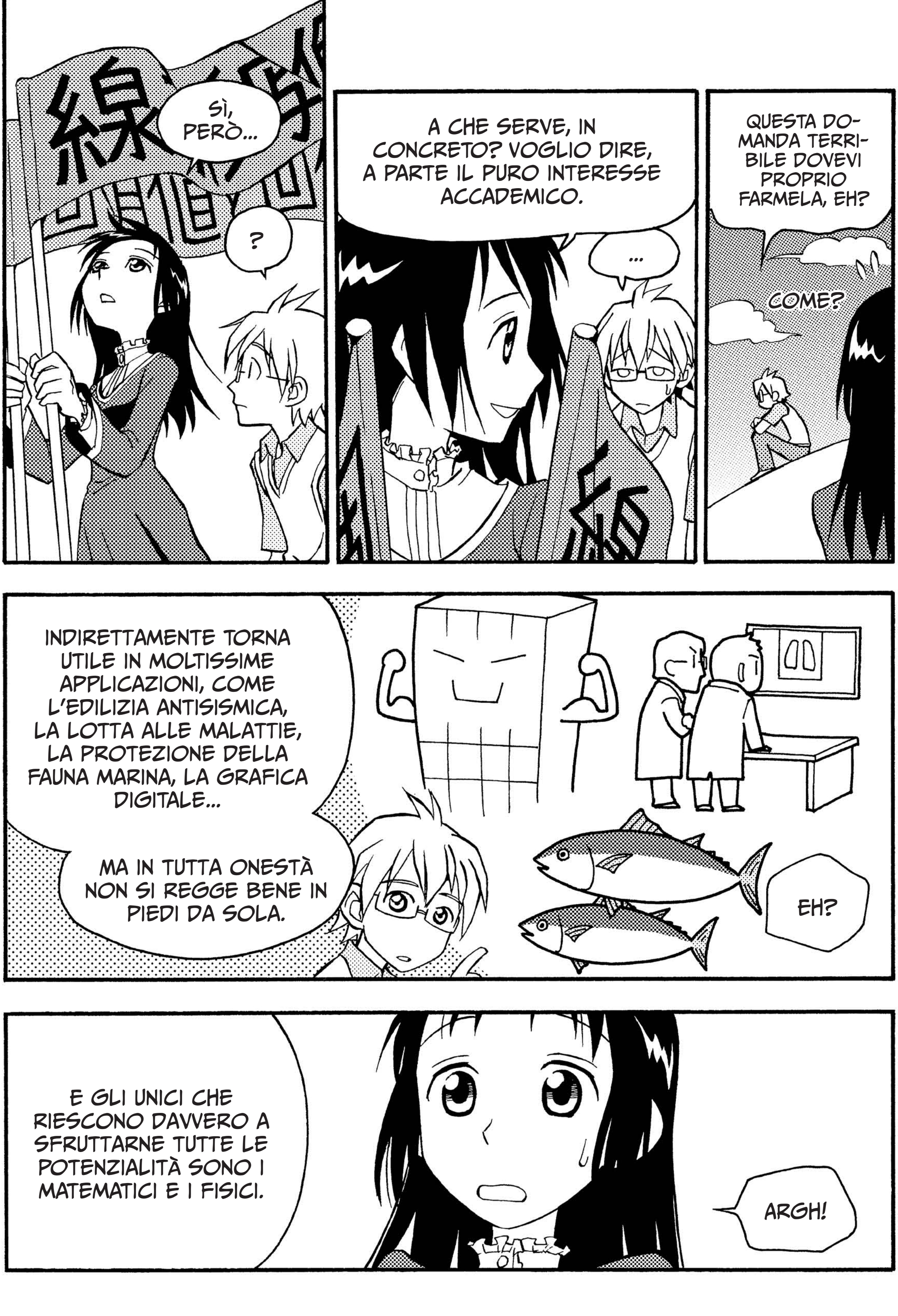
MI SPIACE, MIO FRATELLO TI HA CHIESTO QUESTA COSA ALL'IMPROVVISO...
NESSUN PROBLEMA! LO FACCIO VOLENTIERI!
MA COME FA A ESSERE SUA SORELLA?!
SOLO CHE...
誰でも徹底数学
NON SAPEVO PROPRIO DI FREQUENTARE LA STESSA UNIVERSITÀ DEL FAMOSO REIJI YURINO!
BE', *FAMOSO* NON DIREI...
NON VEDEVO L'ORA!
EHM... TI DISPIACEREBBE FIRMARMI IL LIBRO?
TIPO... UN AUTOGRAFO?
SOLO SE TI VA. MA SE T'IMBARAZZA...
NO, È UN PIACERE.
SFIORA
GULP.


EHM...
...
SCU...
...SA
FRATEL-
LONE!
SCUSA MISA,
OGGI VADO A
CASA UN PO'
PRIMA.
YURINOOO!
TI RICORDI IL NOSTRO DISCORSETTO?
SISSIGNORE!

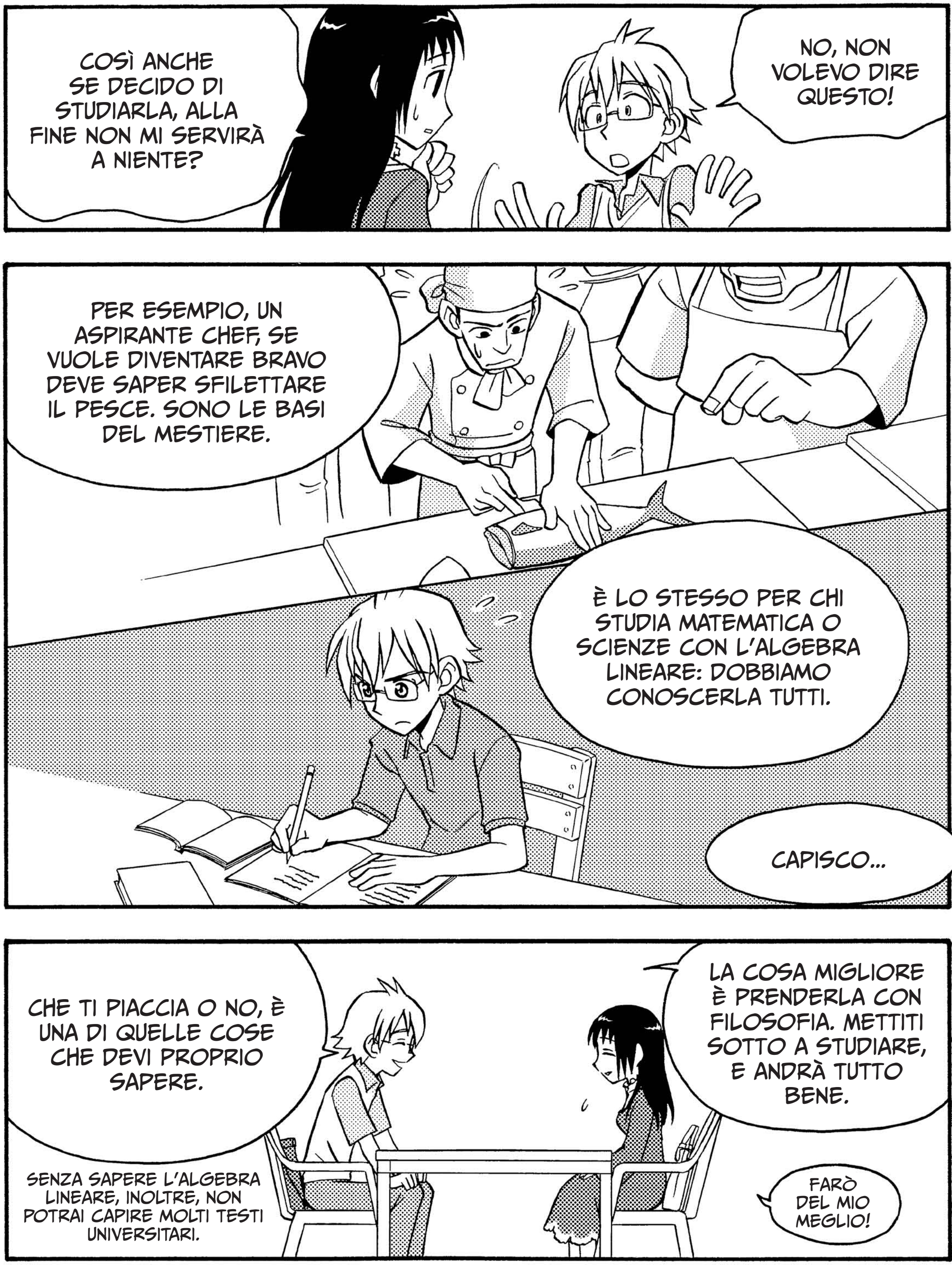

UNA PANORAMICA SULL'ALGEBRA LINEARE
ALLORA, QUANDO VORRESTI INIZIARE?
MAGARI ANCHE SUBITO?
DUNQUE...
TUO FRATELLO DICE CHE HAI PROBLEMI CON L'ALGEBRA LINEARE, VERO?
SÌ.
NON MI È PROPRIO CHIARA L'IDEA CHE C'È DIETRO...
E HO PAURA CHE I CALCOLI NON LI CAPIRÒ MAI.
È VERO CHE L'ALGEBRA LINEARE È UNA MATERIA PARECCHIO ASTRATTA...
E ALCUNI CONCETTI SONO UN PO' COMPLICATI...
INDIPENDENZA LINEARE
SOTTOSPAZIO
BASI
MA!


I CALCOLI NON SONO ARDUI COME SEMBRANO, ANZI!
E SE CAPISCI LE BASI, LA MATEMATICA CHE CI STA DIETRO È SEMPLICISSIMA, VEDRAI.
DAVVE-RO?
NON È CHE SIA ROBA DA SCUOLE MEDIE, MA QUASI.
OH! BE', È TRANQUILLIZ-ZANTE...
INFATTI!
MA ANCORA NON CAPISCO... CHE COS'È *ESATTAMENTE* L'ALGEBRA LINEARE?
UHM...
EHM...
È DIFFICILE RISPON-DERE BENE A QUE-STA DOMANDA.
DAVVERO? PERCHÉ?
BE', È ROBA PARECCHIO ASTRATTA. MA FARÒ DEL MIO MEGLIO.


DA TRE A DUE DIMENSIONI
DA DUE A TRE DIMENSIONI
DA DUE DIMENSIONI ALLE STESSE DUE DIMENSIONI
A GRANDI LINEE, L'ALGEBRA LINEARE STUDIA LE TRASFORMAZIONI DI OGGETTI SITUATI IN UNO SPAZIO m-DIMENSIONALE IN ALTRI OGGETTI CORRISPONDENTI IN UNO SPAZIO n-DIMENSIONALE.
OH!
IMPAREREMO A LAVORARE CON LE MATRICI...
MATRICI
VETTORI
...E I VETTORI...
E COSÌ CAPIREMO, NEI CONCETTI ESSENZIALI:
· TRASFORMAZIONI LINEARI
· AUTOVALORI E AUTOVETTORI
TRASFORMAZIONI LINEARI
AUTOVALORI E AUTOVETTORI
VETTORI
MATRICI
CAPISCO...



SÌ, PERÒ...
?
A CHE SERVE, IN CONCRETO? VOGLIO DIRE, A PARTE IL PURO INTERESSE ACCADEMICO.
...
QUESTA DOMANDA TERRIBILE DOVEVI PROPRIO FARMELA, EH?
COME?
INDIRETTAMENTE TORNA UTILE IN MOLTISSIME APPLICAZIONI, COME L'EDILIZIA ANTISISMICA, LA LOTTA ALLE MALATTIE, LA PROTEZIONE DELLA FAUNA MARINA, LA GRAFICA DIGITALE...
MA IN TUTTA ONESTÀ NON SI REGGE BENE IN PIEDI DA SOLA.
EH?
E GLI UNICI CHE RIESCONO DAVVERO A SFRUTTARNE TUTTE LE POTENZIALITÀ SONO I MATEMATICI E I FISICI.
ARGH!

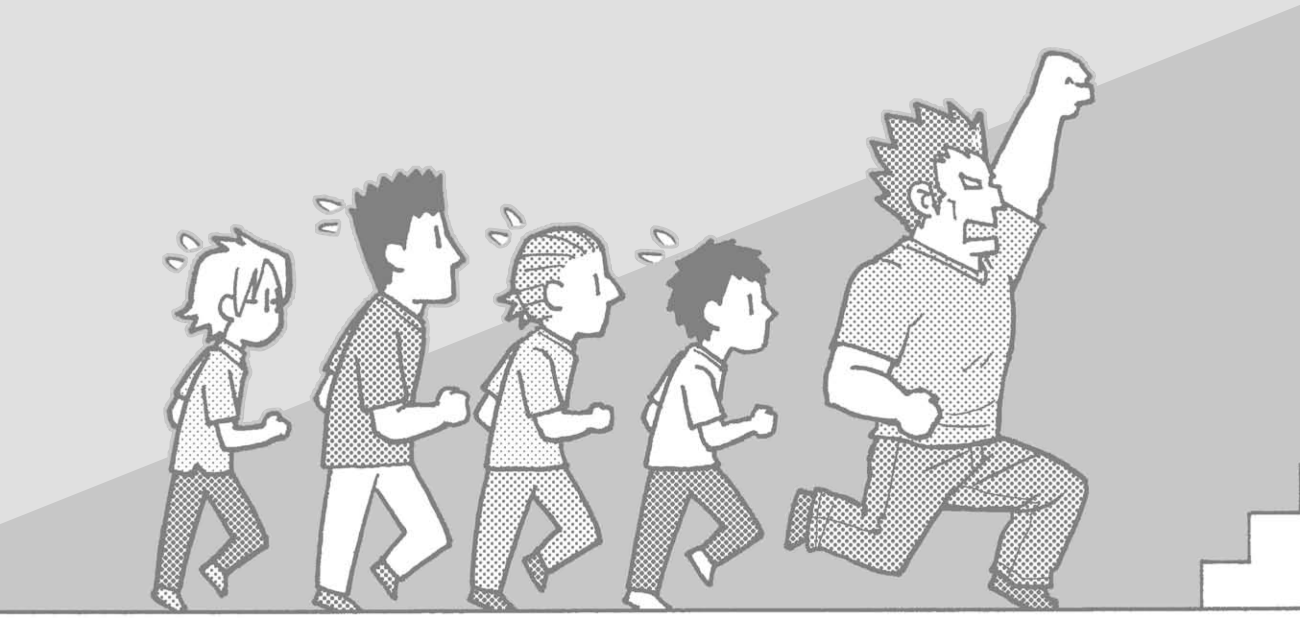


COSÌ ANCHE SE DECIDO DI STUDIARLA, ALLA FINE NON MI SERVIRÀ A NIENTE?
NO, NON VOLEVO DIRE QUESTO!
PER ESEMPIO, UN ASPIRANTE CHEF, SE VUOLE DIVENTARE BRAVO DEVE SAPER SFILETTARE IL PESCE. SONO LE BASI DEL MESTIERE.
È LO STESSO PER CHI STUDIA MATEMATICA O SCIENZE CON L'ALGEBRA LINEARE: DOBBIAMO CONOSCERLA TUTTI.
CAPISCO...
CHE TI PIACCIA O NO, È UNA DI QUELLE COSE CHE DEVI PROPRIO SAPERE.
SENZA SAPERE L'ALGEBRA LINEARE, INOLTRE, NON POTRAI CAPIRE MOLTI TESTI UNIVERSITARI.
LA COSA MIGLIORE È PRENDERLA CON FILOSOFIA. METTITI SOTTO A STUDIARE, E ANDRÀ TUTTO BENE.
FARÒ DEL MIO MEGLIO!


QUANTO ALLE PROSSIME LEZIONI...
PENSO CHE LA COSA MIGLIORE SARÀ CONCENTRARSI SULL'ALGEBRA LINEARE IN MANIERA GLOBALE.
TRASFORMAZIONI LINEARI
AUTOVALORI E AUTOVETTORI
VETTORI
MATRICI
IN GENERE NEI LIBRI E A LEZIONE LA SPIEGANO CON LUNGHI CALCOLI E DIMOSTRAZIONI DETTAGLIATE.
NE SEGUE CHE...
CERCHERÒ DI EVITARLI AL MASSIMO...
FIUUU.
...PENSANDO PIUTTOSTO A SPIEGARE LE BASI MEGLIO CHE POSSO.
GRANDE!

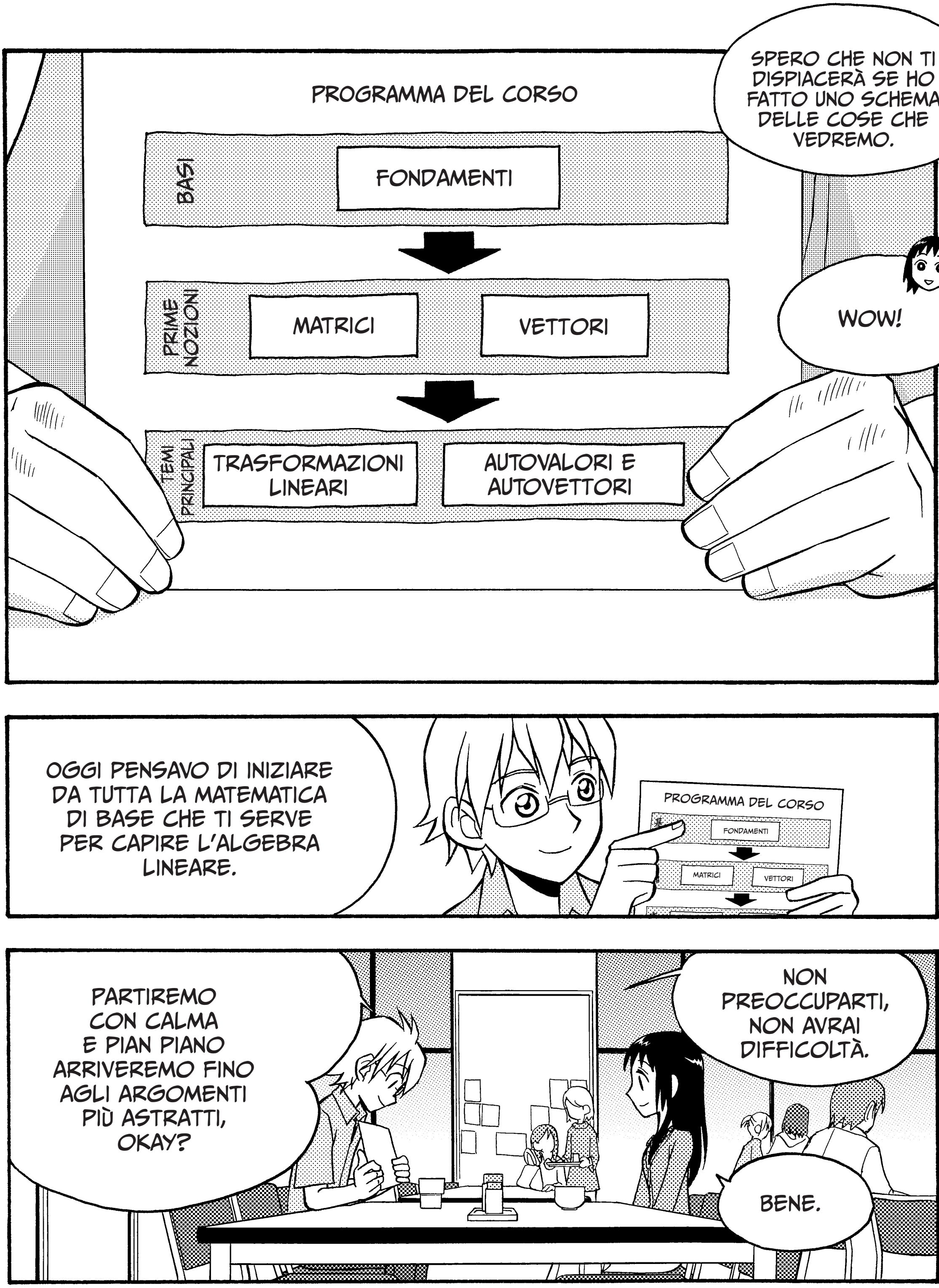
OKAY, NON VOGLIO FRASTORNARTI. PERCHÉ NON CI FERMIAMO QUI, PER OGGI?
LA PROSSIMA VOLTA CHE CI VEDIAMO INIZIEREMO DA ALCUNI CONCETTI BASE.
OKAY.
DRIN
DRIN
OPS, È IL MIO!
DRIN
DRIN
È MIO FRATELLO.
OH?
IL SENSEI MANDA MESSAGGINI?!
DA NON CREDERCI...
"VIENI SUBITO A CASA"
AH, EHM... SALUTALO!

2
I FONDAMENTI




97...
98...
99...
DOVETE SAPERE BENE L'ABC!
NNGH!
SBAM
F-FAT-TO!
100!
TI PIACEREBBE! QUANDO HAI FINITO CON LE FLESSIONI, VOGLIO CHE ATTACCHI CON LE GAMBE! CIOÈ COI PIEGAMENTI! FORZA!
CIAO... PENSAVO DI INIZIARE DA...
REIJI, OGGI SEMBRI PARECCHIO DISTRUTTO.
TUTTO A POSTO?
S-STO BENE. GUARDA UN PO' QUE...


GURGLE
EHM...
SCUSA, MI SA CHE DEVO MANGIARE QUALCOSA...
NON PREOCCUPARTI, È NORMALE DOPO UNO SFORZO FISICO DEL GENERE.
DAMMI GIUSTO CINQUE MINUTI...
NESSUN PROBLEMA, FAI CON CALMA.
GNAM GNAM GNAM
OKAY, INIZIAMO.
GUARDA UN PO' QUI.


PROGRAMMA DEL CORSO
BASI
FONDAMENTI
PRIME NOZIONI
MATRICI
VETTORI
TEMI PRINCIPALI
TRASFORMAZIONI LINEARI
AUTOVALORI E AUTOVETTORI
SPERO CHE NON TI DISPIACERÀ SE HO FATTO UNO SCHEMA DELLE COSE CHE VEDREMO.
WOW!
OGGI PENSAVO DI INIZIARE DA TUTTA LA MATEMATICA DI BASE CHE TI SERVE PER CAPIRE L'ALGEBRA LINEARE.
PROGRAMMA DEL CORSO
FONDAMENTI
MATRICI
VETTORI
PARTIREMO CON CALMA E PIAN PIANO ARRIVEREMO FINO AGLI ARGOMENTI PIÙ ASTRATTI, OKAY?
NON PREOCCUPARTI, NON AVRAI DIFFICOLTÀ.
BENE.

INSIEMI NUMERICI

NUMERI COMPLESSI

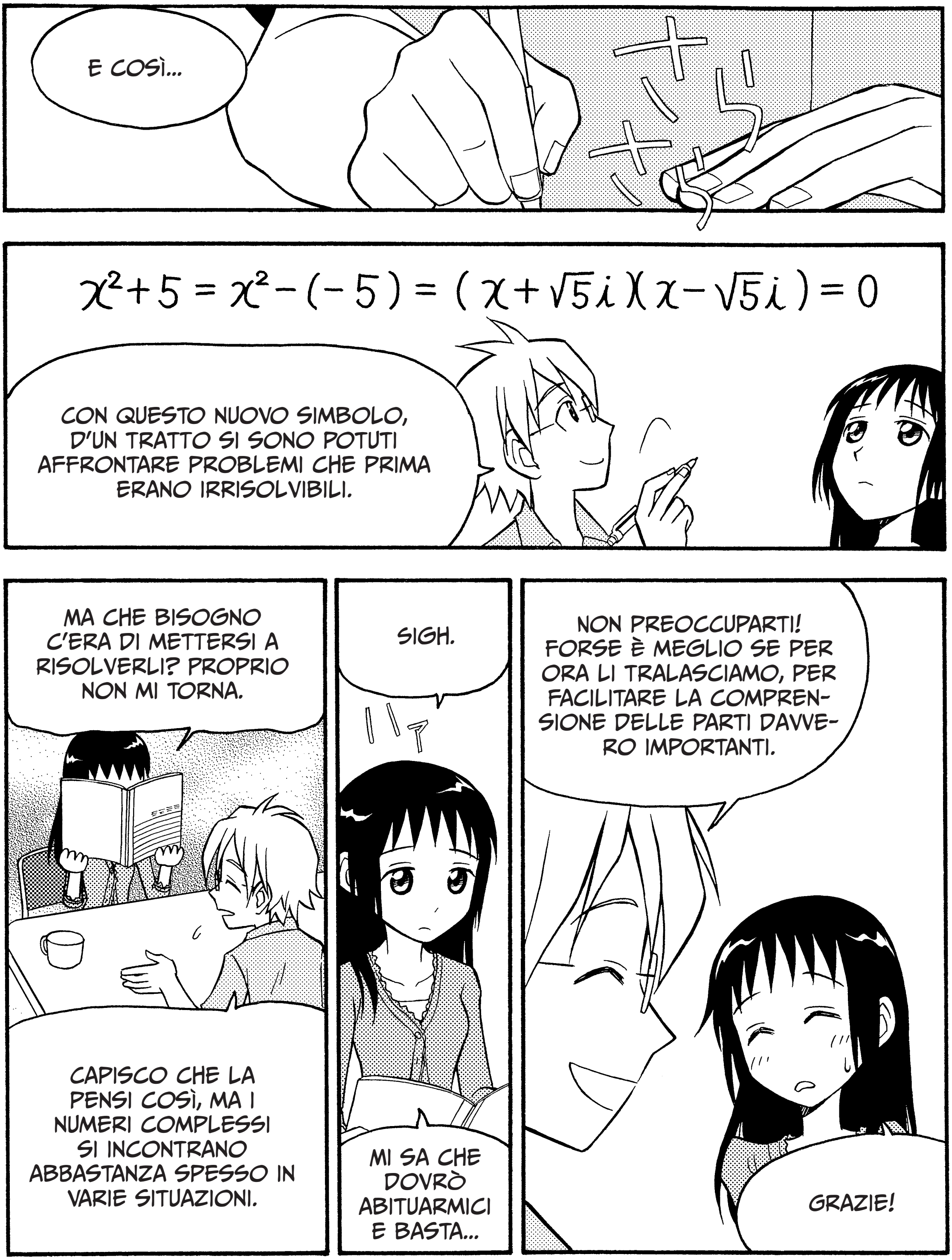
I numeri complessi si scrivono in questa forma:

$a + b \cdot i$

dove a e b sono numeri reali e i è l'*unità immaginaria*, definita come $i = \sqrt{-1}$

NUMERI REALI			NUMERI IMMAGINARI
INTERI	NUMERI RAZIONALI* (NON INTERI)	NUMERI IRRAZIONALI	
• Numeri naturali positivi • 0 • Numeri naturali negativi	• Numeri decimali finiti come 0,3 • Numeri decimali infiniti come 0,333...	• Numeri come π e √2, le cui cifre decimali si ripetono all'infinito senza seguire alcuno schema	• Numeri complessi senza componente reale, come $0 + b \cdot i$, dove b è un numero reale non nullo

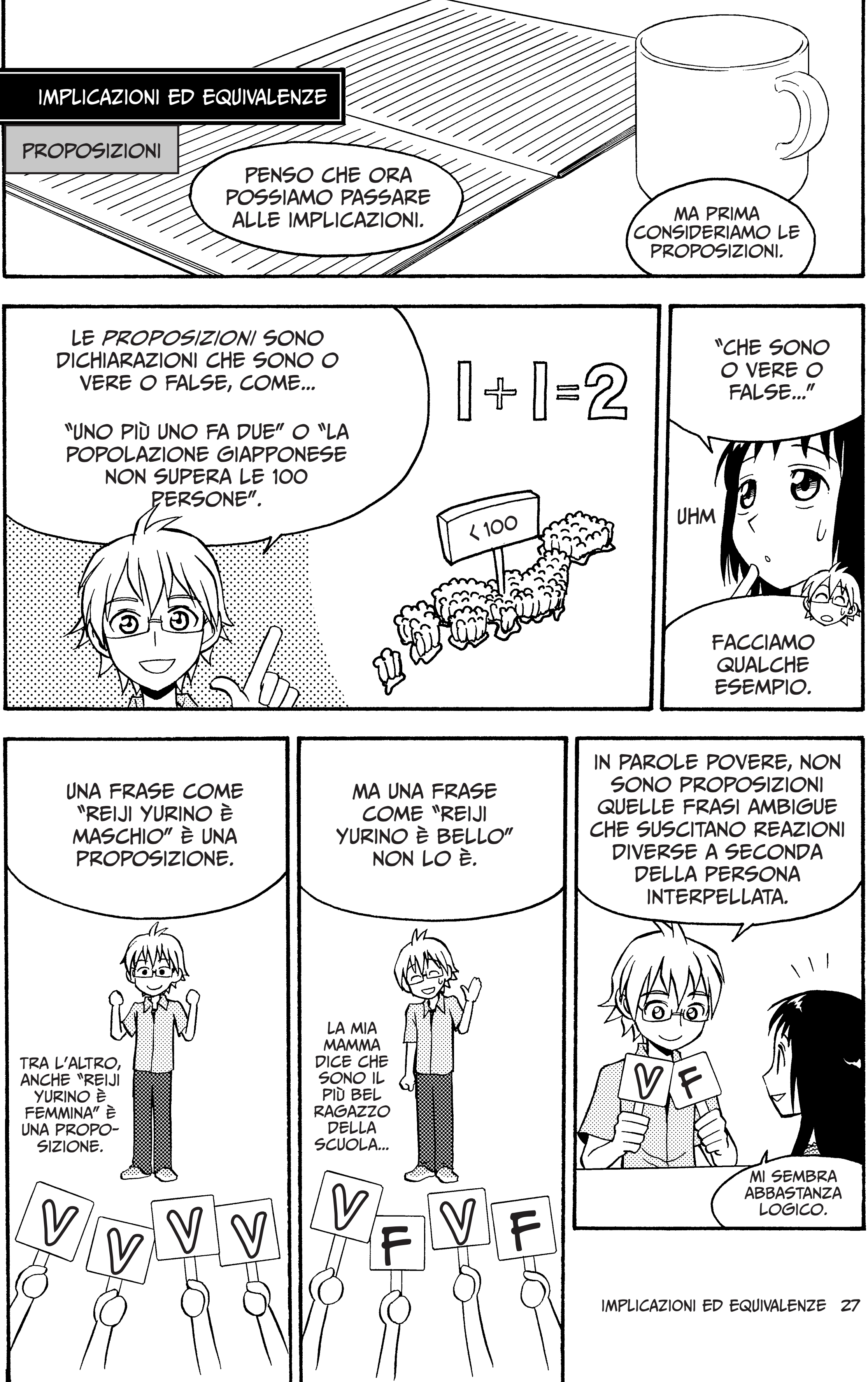
* I NUMERI ESPRIMIBILI NELLA FORMA *Q/P* (CON *Q* E *P* INTERI E *P* NON NULLO) SONO DETTI *NUMERI RAZIONALI*. GLI INTERI SONO SOLO UN CASO PARTICOLARE DEI NUMERI RAZIONALI.

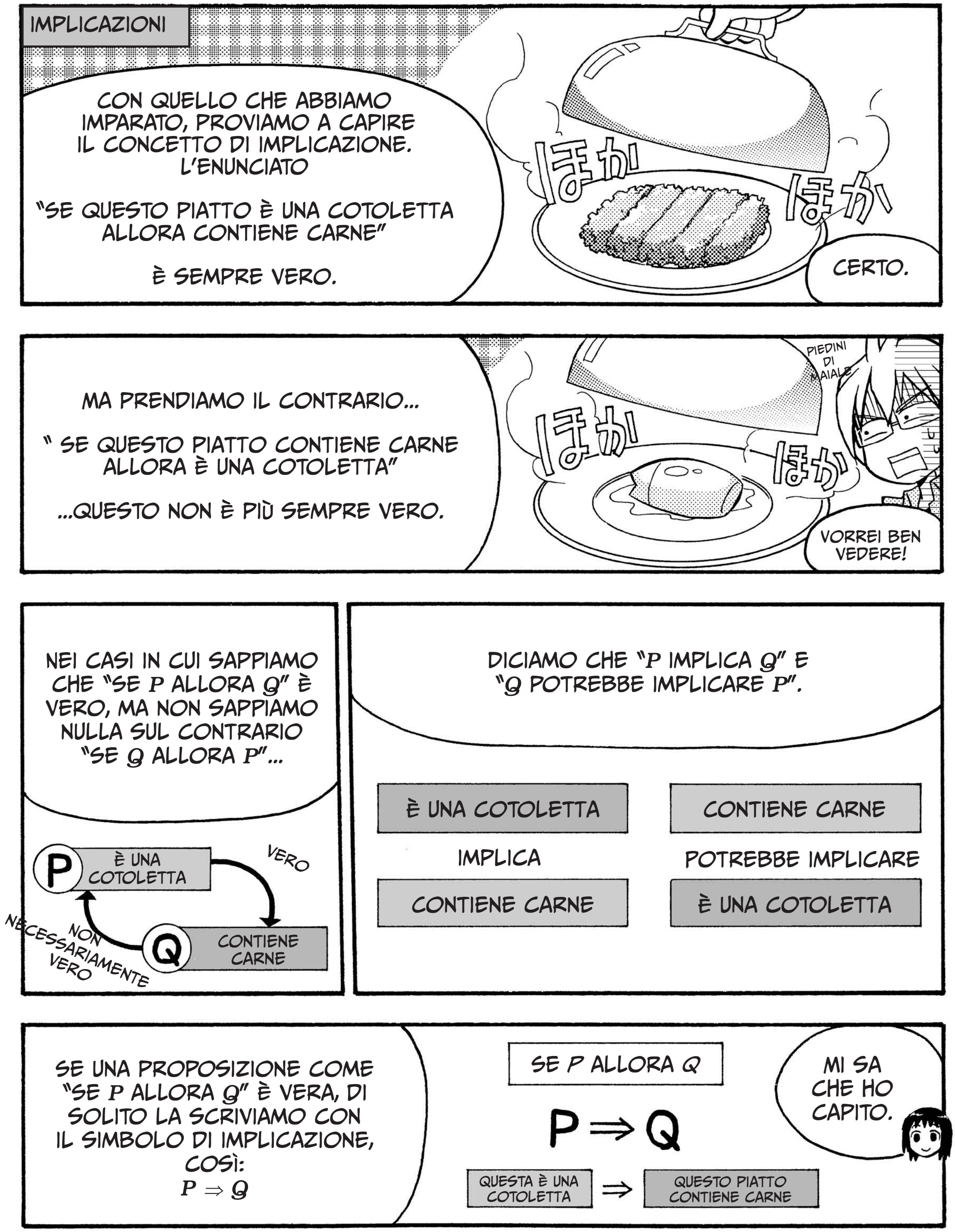


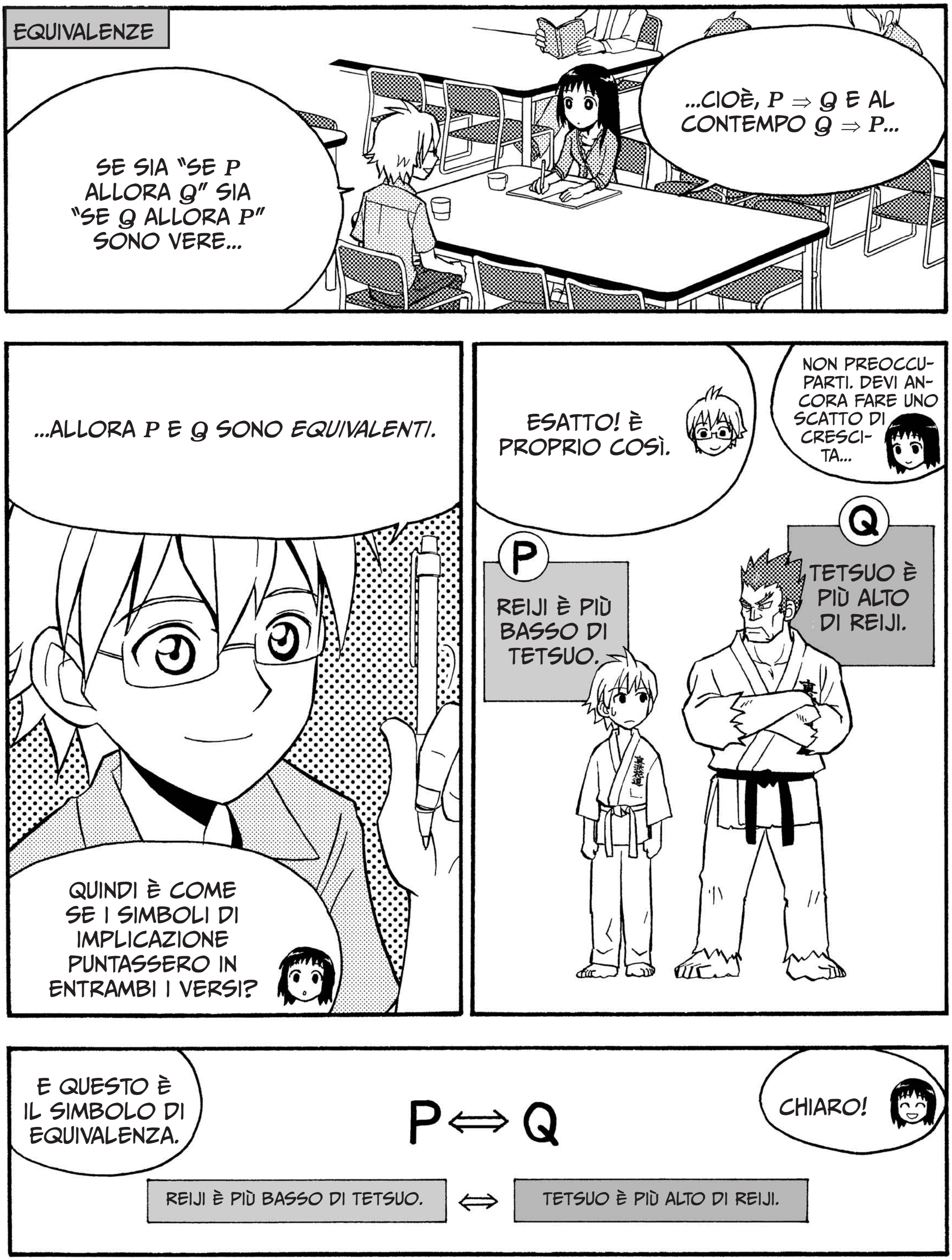
E COSÌ...
$x^2+5 = x^2-(-5) = (x+\sqrt{5}i)(x-\sqrt{5}i) = 0$
CON QUESTO NUOVO SIMBOLO, D'UN TRATTO SI SONO POTUTI AFFRONTARE PROBLEMI CHE PRIMA ERANO IRRISOLVIBILI.
MA CHE BISOGNO C'ERA DI METTERSI A RISOLVERLI? PROPRIO NON MI TORNA.
CAPISCO CHE LA PENSI COSÌ, MA I NUMERI COMPLESSI SI INCONTRANO ABBASTANZA SPESSO IN VARIE SITUAZIONI.
SIGH.
MI SA CHE DOVRÒ ABITUARMICI E BASTA...
NON PREOCCUPARTI! FORSE È MEGLIO SE PER ORA LI TRALASCIAMO, PER FACILITARE LA COMPRENSIONE DELLE PARTI DAVVERO IMPORTANTI.
GRAZIE!

IMPLICAZIONI ED EQUIVALENZE

PROPOSIZIONI



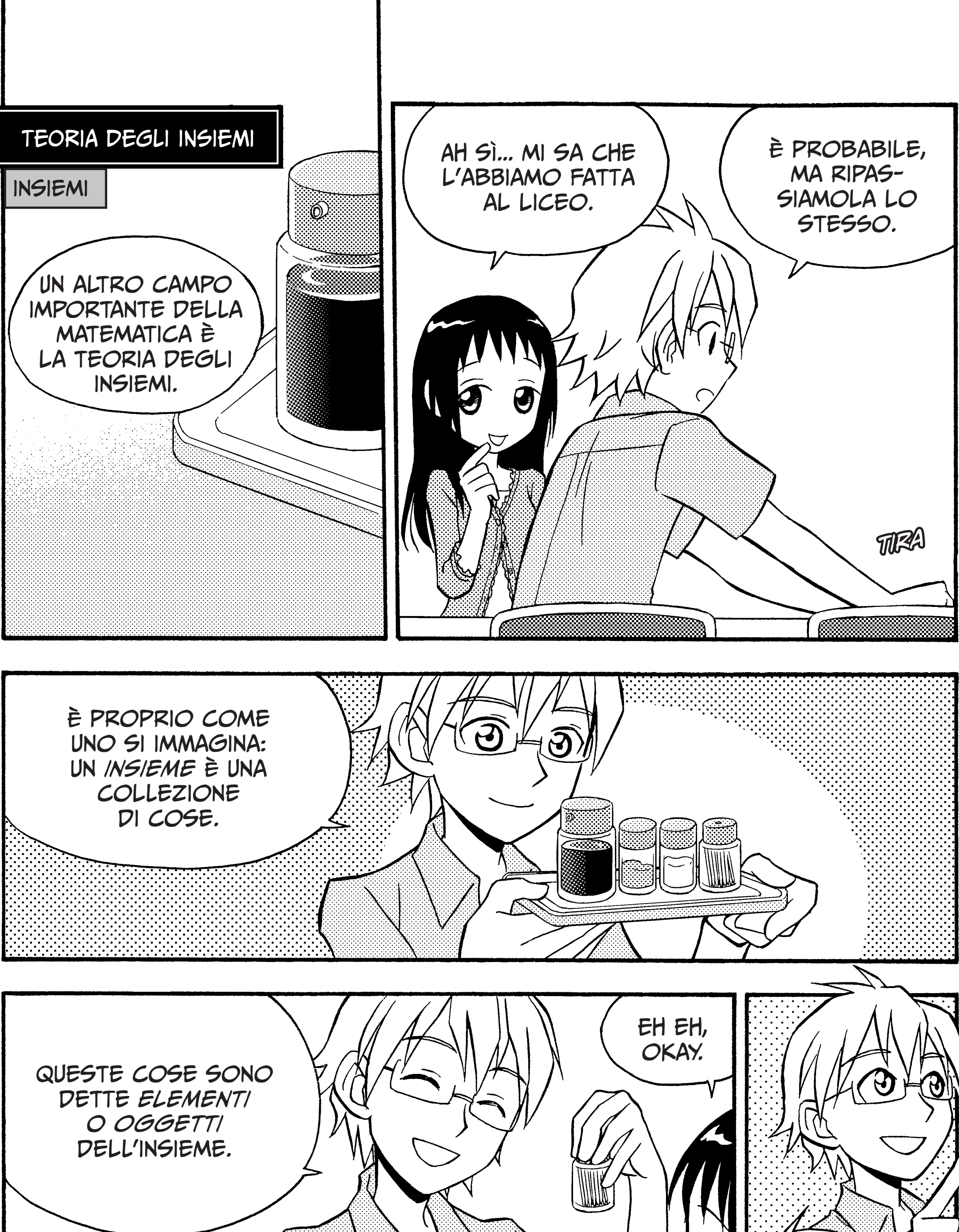

IMPLICAZIONI
CON QUELLO CHE ABBIAMO IMPARATO, PROVIAMO A CAPIRE IL CONCETTO DI IMPLICAZIONE. L'ENUNCIATO
"SE QUESTO PIATTO È UNA COTOLETTA ALLORA CONTIENE CARNE"
È SEMPRE VERO.
ほか ほか
CERTO.
MA PRENDIAMO IL CONTRARIO...
" SE QUESTO PIATTO CONTIENE CARNE ALLORA È UNA COTOLETTA"
...QUESTO NON È PIÙ SEMPRE VERO.
ほか ほか
PIEDINI DI MAIALE
VORREI BEN VEDERE!
NEI CASI IN CUI SAPPIAMO CHE "SE P ALLORA Q" È VERO, MA NON SAPPIAMO NULLA SUL CONTRARIO "SE Q ALLORA P"...
P È UNA COTOLETTA
VERO
Q CONTIENE CARNE
NON NECESSARIAMENTE VERO
DICIAMO CHE "P IMPLICA Q" E "Q POTREBBE IMPLICARE P".
È UNA COTOLETTA
IMPLICA
CONTIENE CARNE
CONTIENE CARNE
POTREBBE IMPLICARE
È UNA COTOLETTA
SE UNA PROPOSIZIONE COME "SE P ALLORA Q" È VERA, DI SOLITO LA SCRIVIAMO CON IL SIMBOLO DI IMPLICAZIONE, COSÌ: $P \Rightarrow Q$
SE P ALLORA Q
$P \Rightarrow Q$
QUESTA È UNA COTOLETTA $\Rightarrow$ QUESTO PIATTO CONTIENE CARNE
MI SA CHE HO CAPITO.



EQUIVALENZE
SE SIA "SE P ALLORA Q" SIA "SE Q ALLORA P" SONO VERE...
...CIOÈ, $P \Rightarrow Q$ E AL CONTEMPO $Q \Rightarrow P$...
...ALLORA P E Q SONO *EQUIVALENTI*.
QUINDI È COME SE I SIMBOLI DI IMPLICAZIONE PUNTASSERO IN ENTRAMBI I VERSI?
ESATTO! È PROPRIO COSÌ.
NON PREOCCUPARTI. DEVI ANCORA FARE UNO SCATTO DI CRESCITA...
P
REIJI È PIÙ BASSO DI TETSUO.
Q
TETSUO È PIÙ ALTO DI REIJI.
E QUESTO È IL SIMBOLO DI EQUIVALENZA.
$P \Leftrightarrow Q$
CHIARO!
REIJI È PIÙ BASSO DI TETSUO. $\Leftrightarrow$ TETSUO È PIÙ ALTO DI REIJI.

TEORIA DEGLI INSIEMI

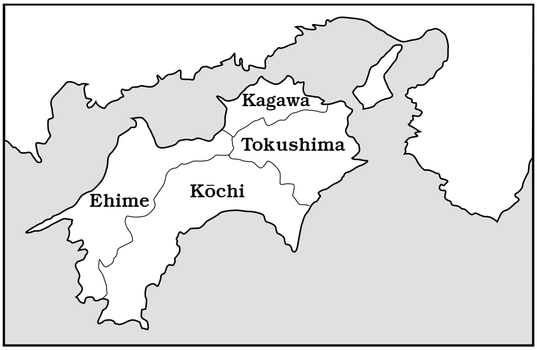
INSIEMI



ESEMPIO 1

L'insieme "Shikoku", l'isola più piccola fra le quattro che compongono il Giappone, consiste di quattro elementi:

- Kagawa-ken[1]
- Ehime-ken
- Kōchi-ken
- Tokushima-ken

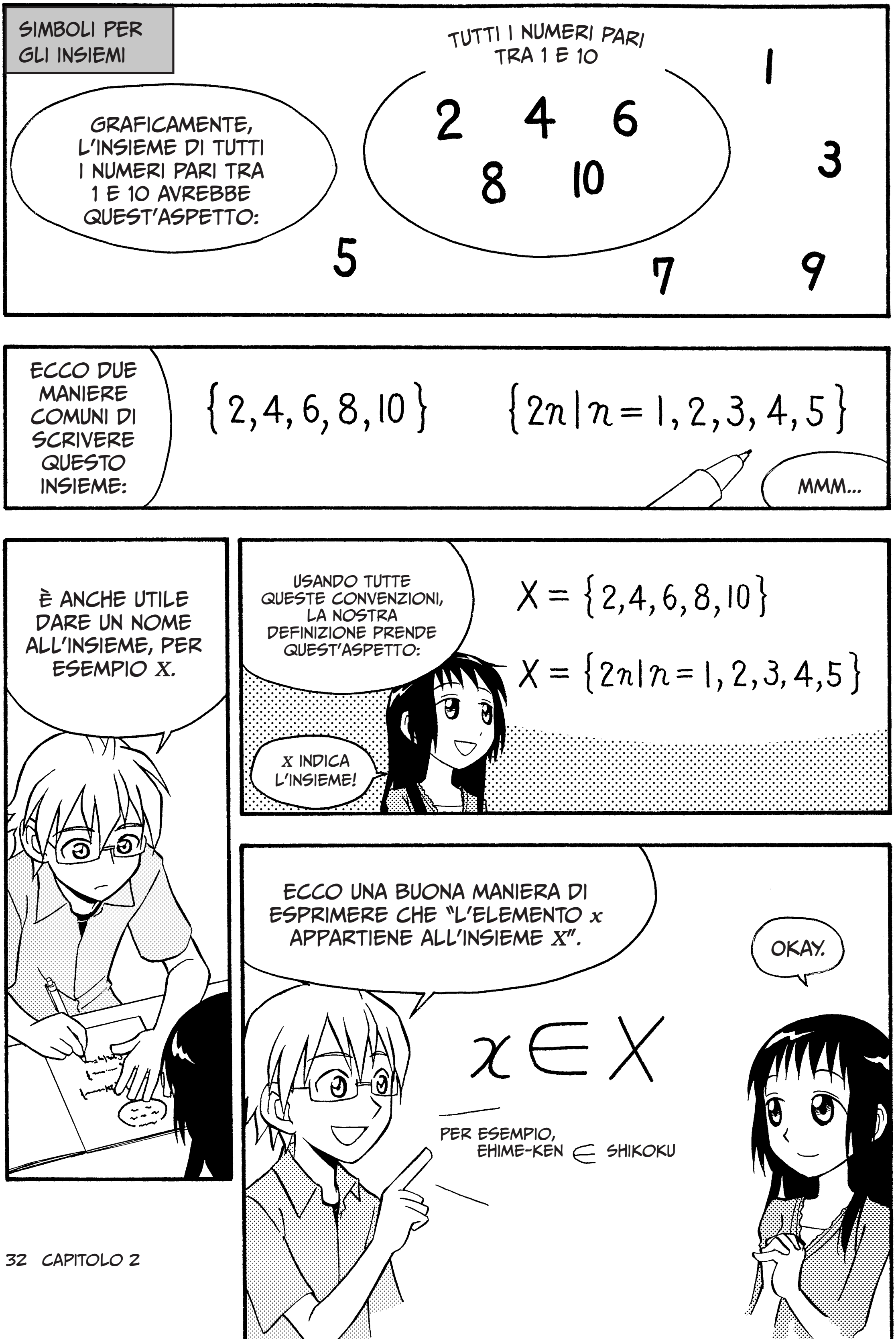


ESEMPIO 2

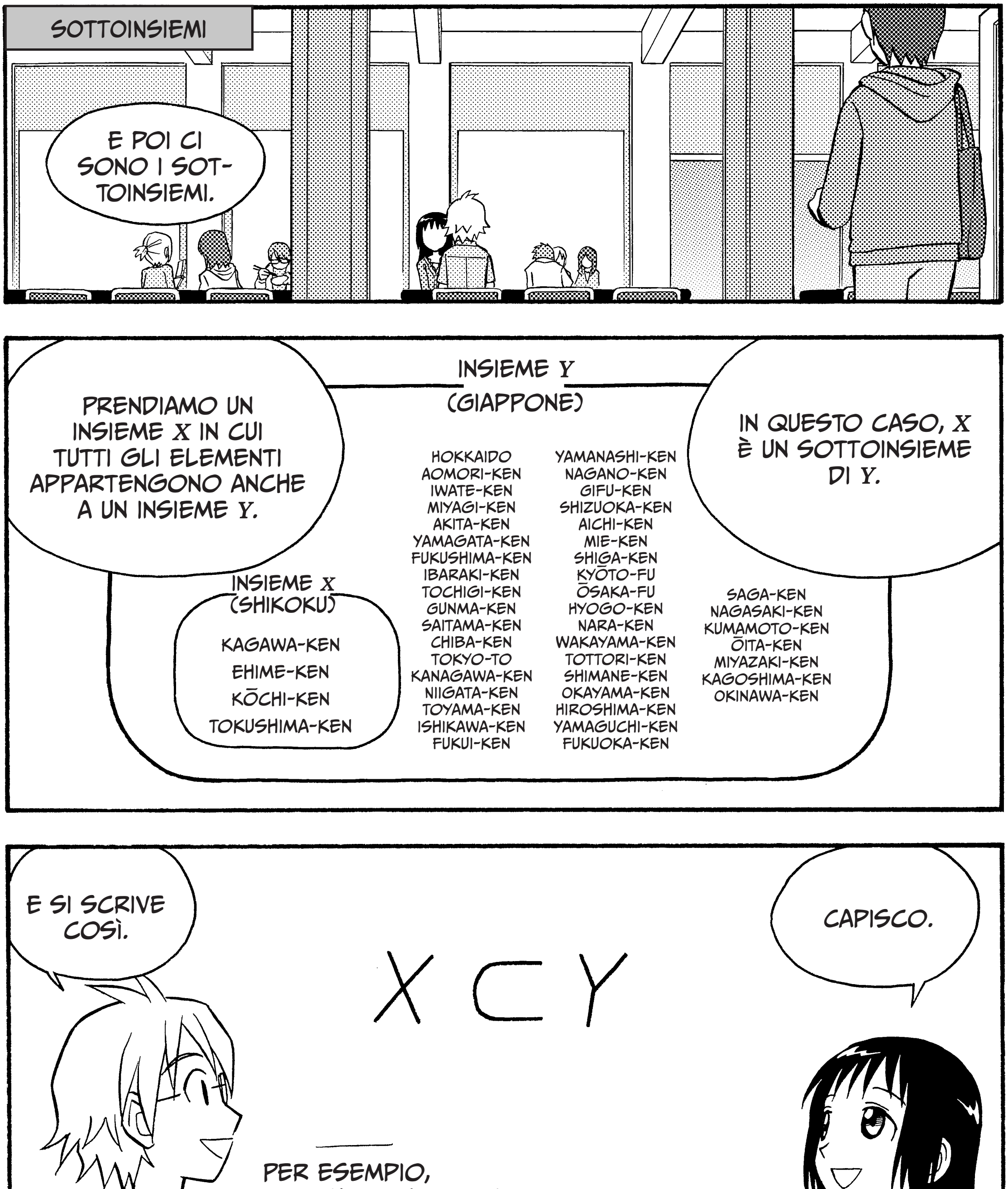
L'insieme formato da tutti gli interi pari da 1 a 10 contiene questi cinque elementi:

- 2
- 4
- 6
- 8
- 10

*Un ken (o prefettura) in Giappone è come una provincia in Italia.



SIMBOLI PER GLI INSIEMI
GRAFICAMENTE, L'INSIEME DI TUTTI I NUMERI PARI TRA 1 E 10 AVREBBE QUEST'ASPETTO:
TUTTI I NUMERI PARI TRA 1 E 10
2 4 6 8 10
1 3 5 7 9
ECCO DUE MANIERE COMUNI DI SCRIVERE QUESTO INSIEME:
$\{2, 4, 6, 8, 10\}$
$\{2n \mid n = 1, 2, 3, 4, 5\}$
MMM...
È ANCHE UTILE DARE UN NOME ALL'INSIEME, PER ESEMPIO X.
USANDO TUTTE QUESTE CONVENZIONI, LA NOSTRA DEFINIZIONE PRENDE QUEST'ASPETTO:
$X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
$X = \{2n \mid n = 1, 2, 3, 4, 5\}$
X INDICA L'INSIEME!
ECCO UNA BUONA MANIERA DI ESPRIMERE CHE "L'ELEMENTO x APPARTIENE ALL'INSIEME X".
OKAY.
$x \in X$
PER ESEMPIO, EHIME-KEN $\in$ SHIKOKU

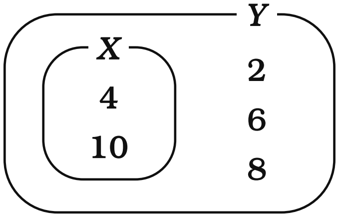

SOTTOINSIEMI
E POI CI SONO I SOTTOINSIEMI.
PRENDIAMO UN INSIEME X IN CUI TUTTI GLI ELEMENTI APPARTENGONO ANCHE A UN INSIEME Y.
INSIEME Y (GIAPPONE)
HOKKAIDO
AOMORI-KEN
IWATE-KEN
MIYAGI-KEN
AKITA-KEN
YAMAGATA-KEN
FUKUSHIMA-KEN
IBARAKI-KEN
TOCHIGI-KEN
GUNMA-KEN
SAITAMA-KEN
CHIBA-KEN
TOKYO-TO
KANAGAWA-KEN
NIIGATA-KEN
TOYAMA-KEN
ISHIKAWA-KEN
FUKUI-KEN
YAMANASHI-KEN
NAGANO-KEN
GIFU-KEN
SHIZUOKA-KEN
AICHI-KEN
MIE-KEN
SHIGA-KEN
KYŌTO-FU
ŌSAKA-FU
HYOGO-KEN
NARA-KEN
WAKAYAMA-KEN
TOTTORI-KEN
SHIMANE-KEN
OKAYAMA-KEN
HIROSHIMA-KEN
YAMAGUCHI-KEN
FUKUOKA-KEN
SAGA-KEN
NAGASAKI-KEN
KUMAMOTO-KEN
ŌITA-KEN
MIYAZAKI-KEN
KAGOSHIMA-KEN
OKINAWA-KEN
INSIEME X (SHIKOKU)
KAGAWA-KEN
EHIME-KEN
KŌCHI-KEN
TOKUSHIMA-KEN
IN QUESTO CASO, X È UN SOTTOINSIEME DI Y.
CAPISCO.
E SI SCRIVE COSÌ.
X ⊂ Y
PER ESEMPIO, SHIKOKU ⊂ GIAPPONE

ESEMPIO 1

Prendiamo due insiemi *X* e *Y*:

$X = \{ 4, 10 \}$
$Y = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$

X è un sottoinsieme di *Y*, poiché tutti gli elementi di *X* appartengono anche a *Y*.

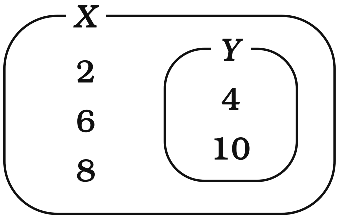


ESEMPIO 2

Scambiamo i ruoli degli insiemi:

$X = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$
$Y = \{ 4, 10 \}$

Poiché non tutti gli elementi di *X* appartengono anche a *Y*, *X* non è più un sottoinsieme di *Y*.

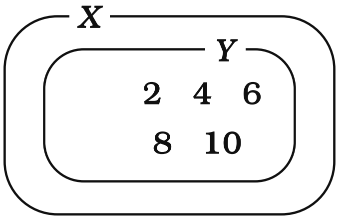


EXAMPLE 3

Ora prendiamo due insiemi uguali:

$X = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$
$Y = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$

In questo caso, ciascun insieme è un sottoinsieme dell'altro. Cioè *X* è un sottoinsieme di *Y* e *Y* è un sottoinsieme di *X*.



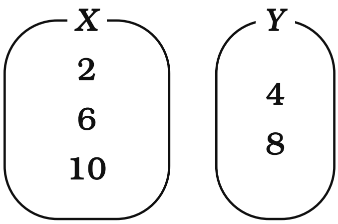
ESEMPIO 4

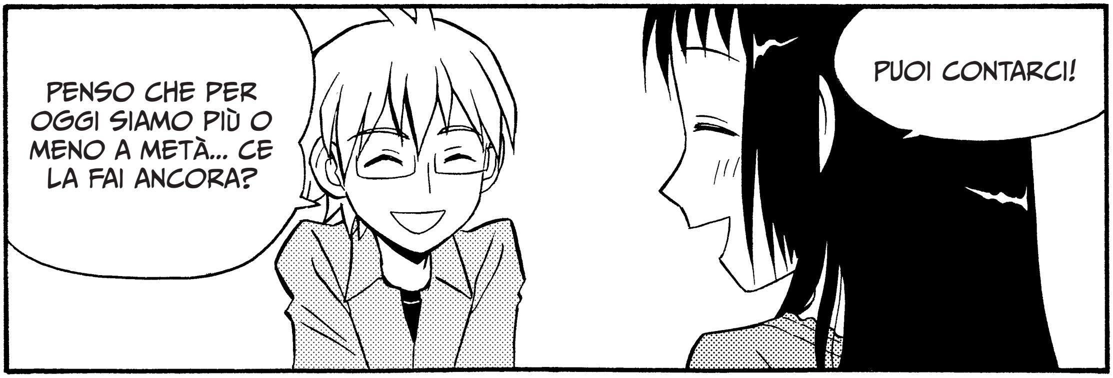
Ora consideriamo questi due insiemi:

$X = \{ 2, 6, 10 \}$

$Y = \{ 4, 8 \}$

In questo caso nessuno dei due insiemi è un sottoinsieme dell'altro.

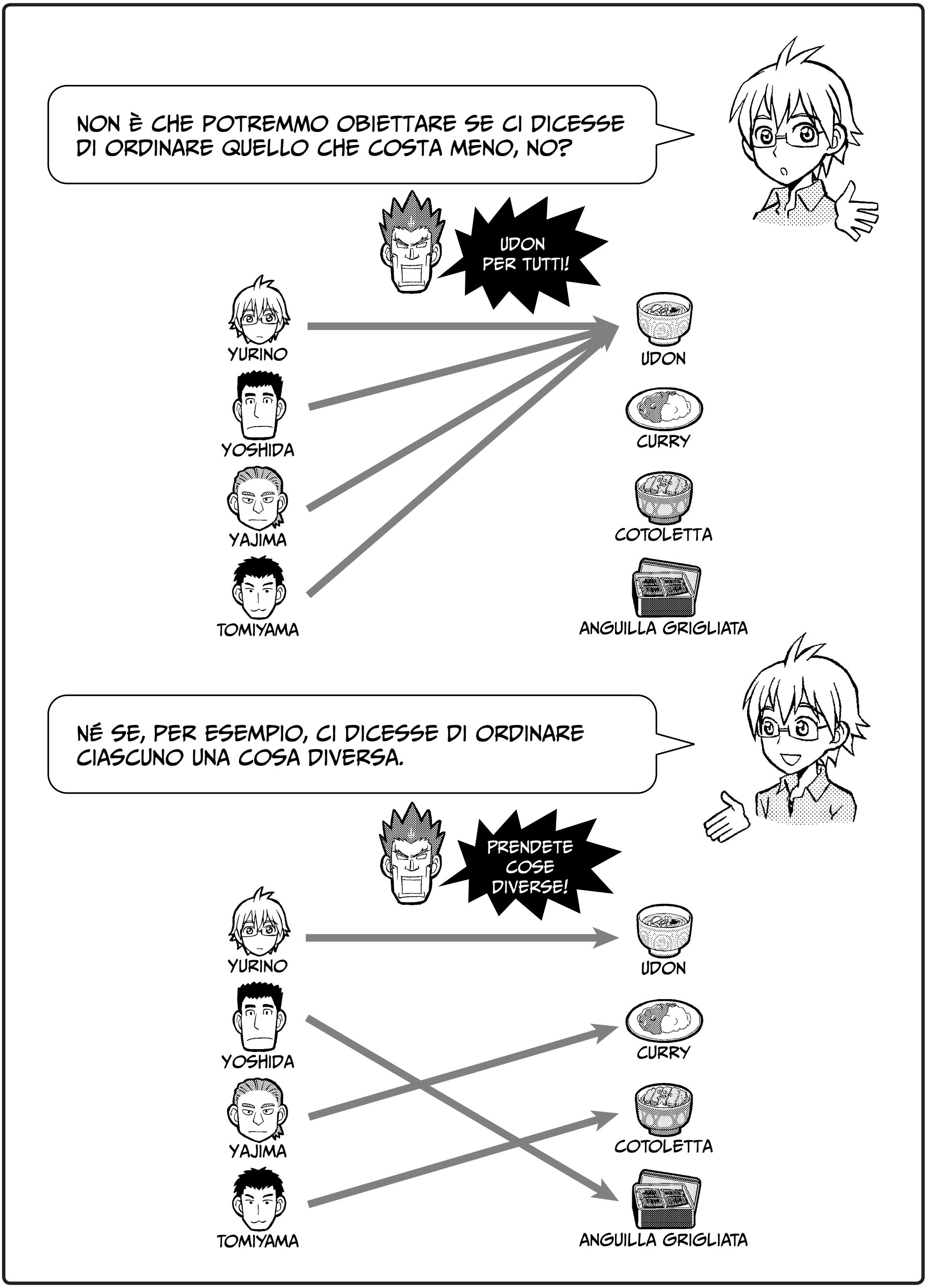


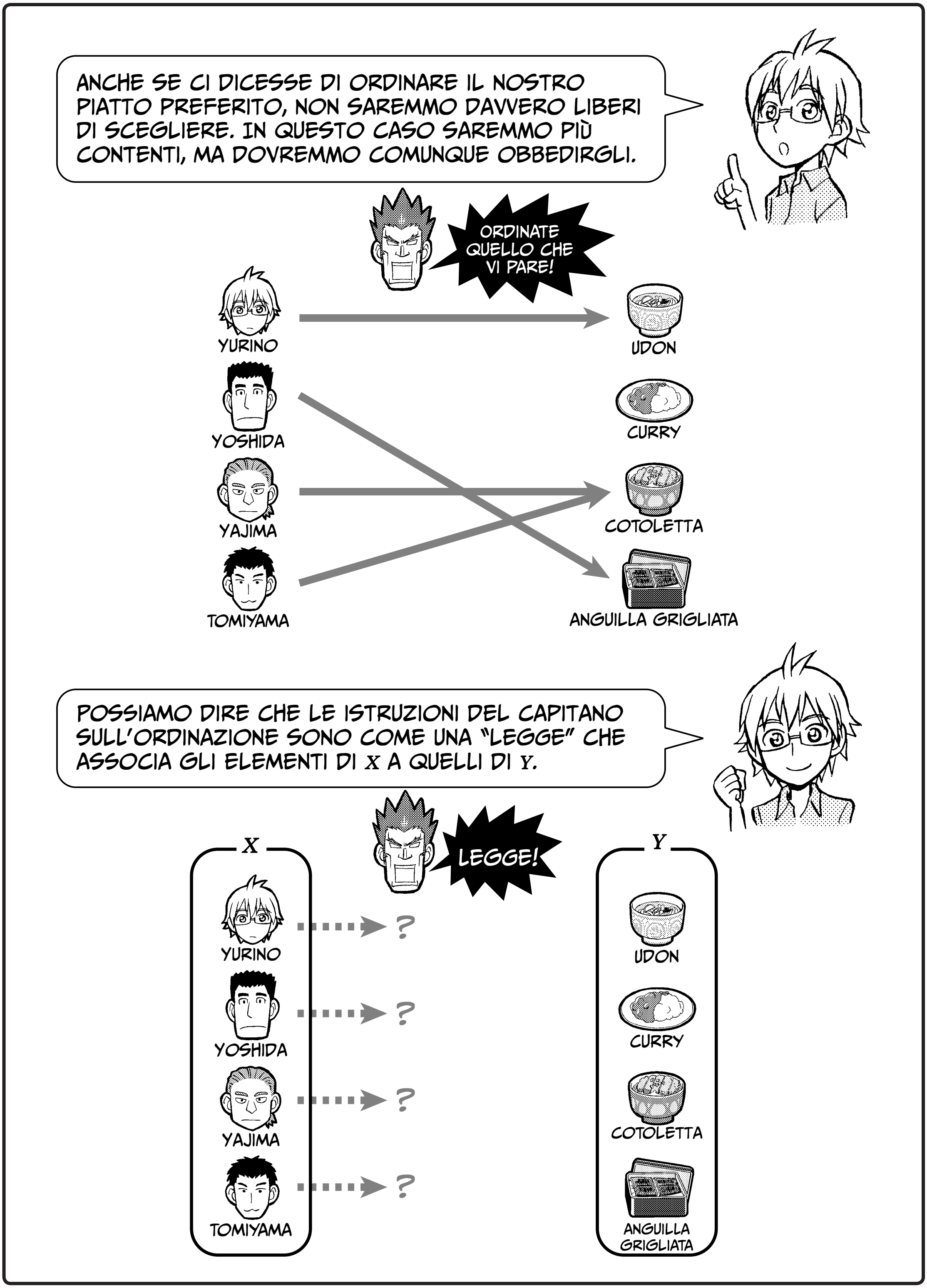


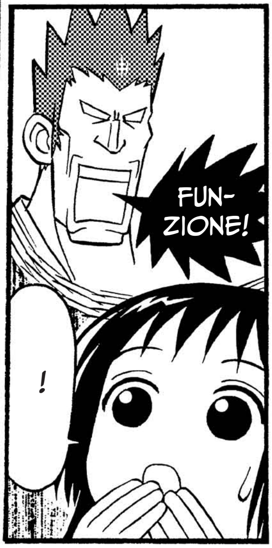
FUNZIONI

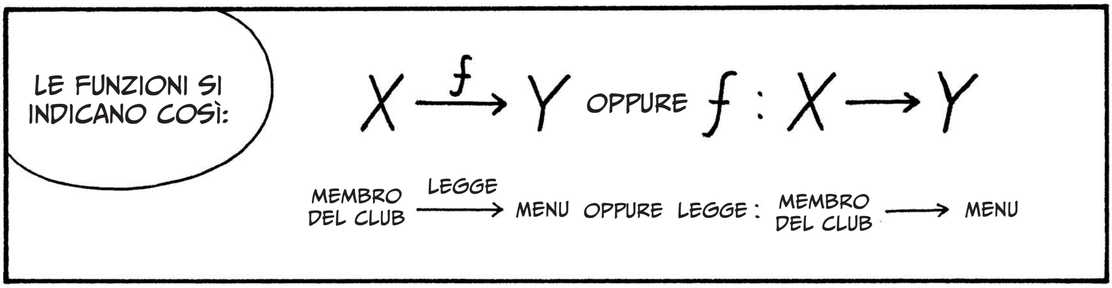

DIREI CHE ORA POSSIAMO PASSARE ALLE FUNZIONI E AI CONCETTI ASSOCIATI.
FUNZIONI
È ROBA PARECCHIO ASTRATTA, MA TE LA CAVERAI BENISSIMO SE RIFLETTERAI CON CALMA SU OGNI NUOVA IDEA.
CAPITO.
COMINCIAMO DALLA DEFINIZIONE.
BENE.

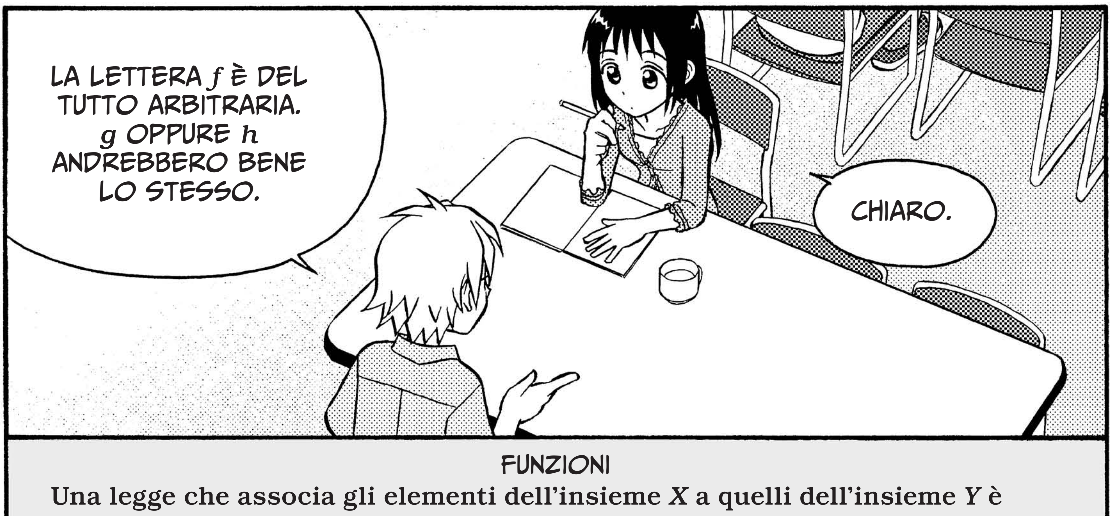

IMMAGINA QUESTA SITUAZIONE:
IL CAPITANO ICHINOSE È DI BUON UMORE E DECIDE DI INVITARE NOI MATRICOLE A PRANZO.
SEGUITEMI!
COSÌ CI PORTA AL RISTORANTE A.
QUESTO È IL MENÙ DEL RISTORANTE.
UDON 500 YEN
CURRY 700 YEN
COTOLETTA 1000 YEN
ANGUILLA GRIGLIATA 1500 YEN
MA OVVIAMENTE C'È LA FREGATURA.
CIOÈ?
VISTO CHE PAGA LUI, IL CAPITANO DECIDE COSA ORDINARE PER CIASCUNO.
?
PIÙ O MENO COSÌ.


NON È CHE POTREMMO OBIETTARE SE CI DICESSE DI ORDINARE QUELLO CHE COSTA MENO, NO?
UDON PER TUTTI!
YURINO
YOSHIDA
YAJIMA
TOMIYAMA
UDON
CURRY
COTOLETTA
ANGUILLA GRIGLIATA
NÉ SE, PER ESEMPIO, CI DICESSE DI ORDINARE CIASCUNO UNA COSA DIVERSA.
PRENDETE COSE DIVERSE!
YURINO
YOSHIDA
YAJIMA
TOMIYAMA
UDON
CURRY
COTOLETTA
ANGUILLA GRIGLIATA


ANCHE SE CI DICESSE DI ORDINARE IL NOSTRO PIATTO PREFERITO, NON SAREMMO DAVVERO LIBERI DI SCEGLIERE. IN QUESTO CASO SAREMMO PIÙ CONTENTI, MA DOVREMMO COMUNQUE OBBEDIRGLI.
ORDINATE QUELLO CHE VI PARE!
YURINO
YOSHIDA
YAJIMA
TOMIYAMA
UDON
CURRY
COTOLETTA
ANGUILLA GRIGLIATA
POSSIAMO DIRE CHE LE ISTRUZIONI DEL CAPITANO SULL'ORDINAZIONE SONO COME UNA "LEGGE" CHE ASSOCIA GLI ELEMENTI DI X A QUELLI DI Y.
LEGGE!
X
YURINO
?
YOSHIDA
?
YAJIMA
?
TOMIYAMA
?
Y
UDON
CURRY
COTOLETTA
ANGUILLA GRIGLIATA

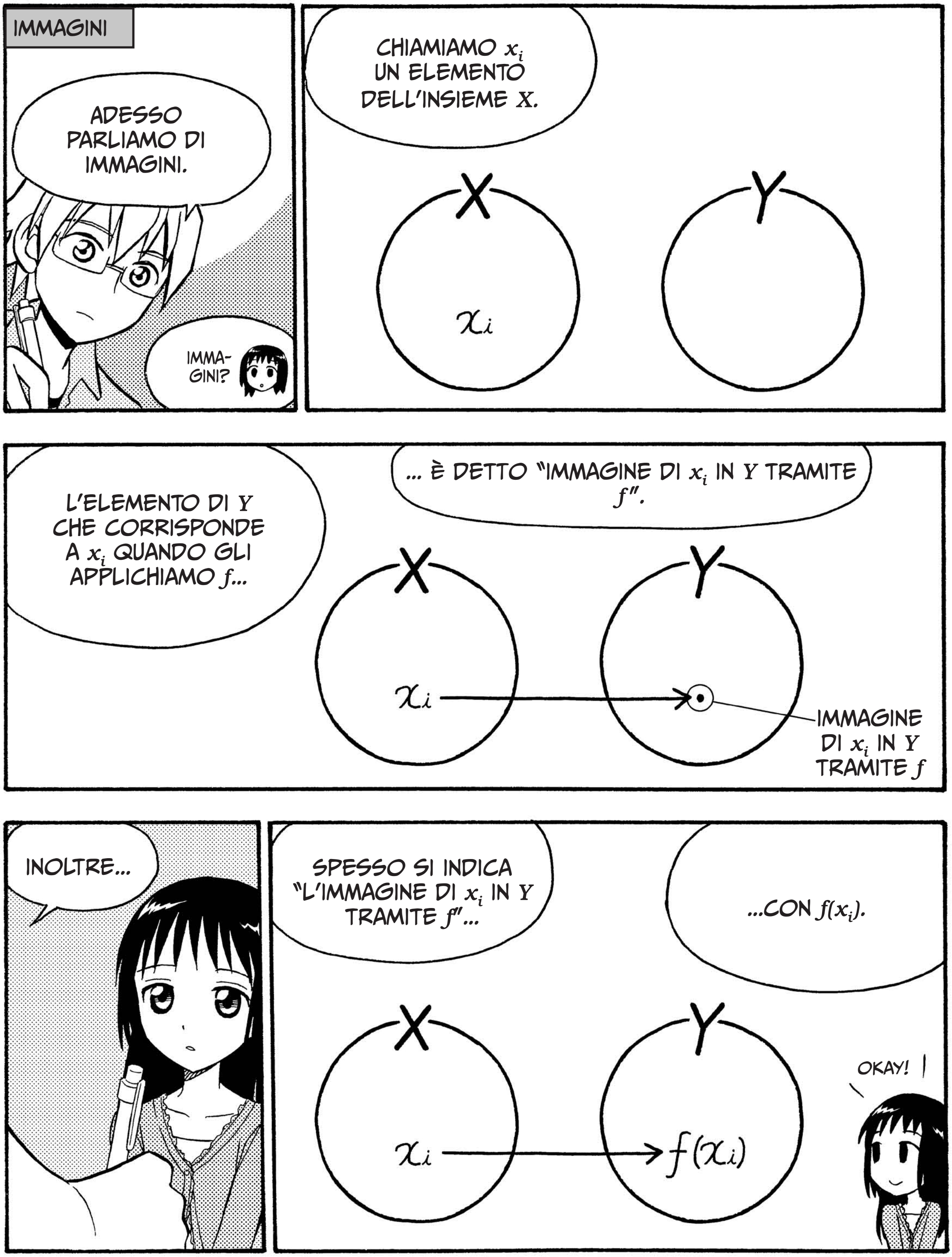


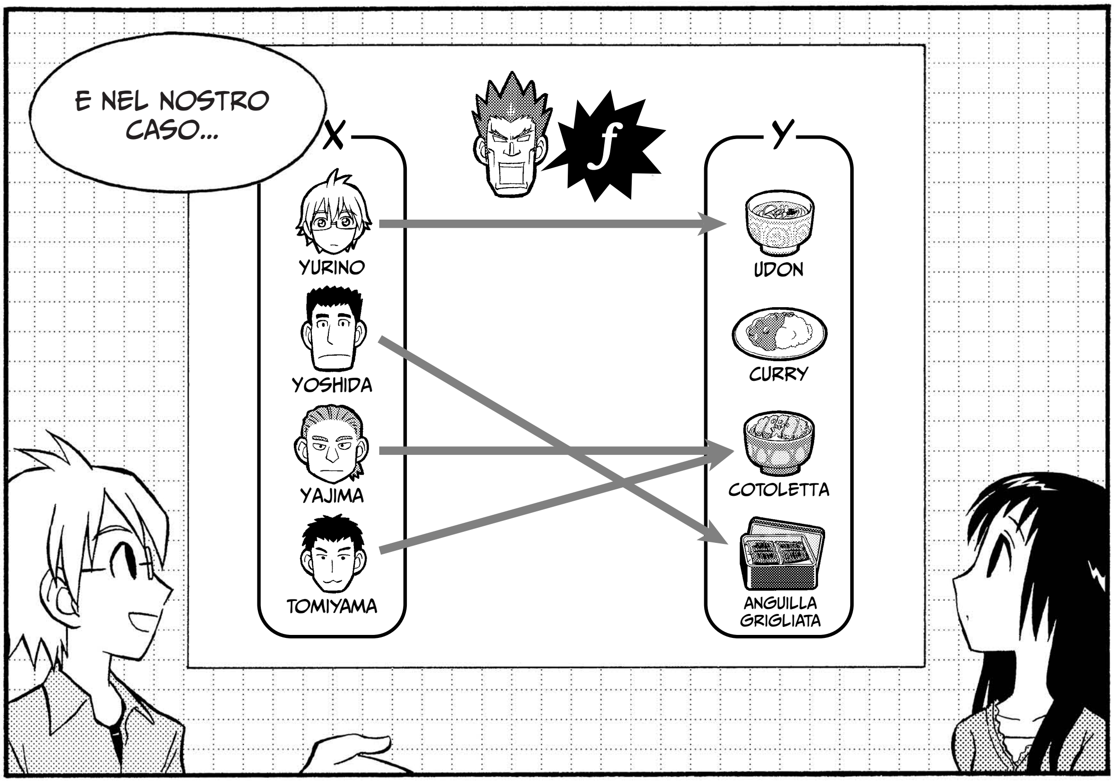


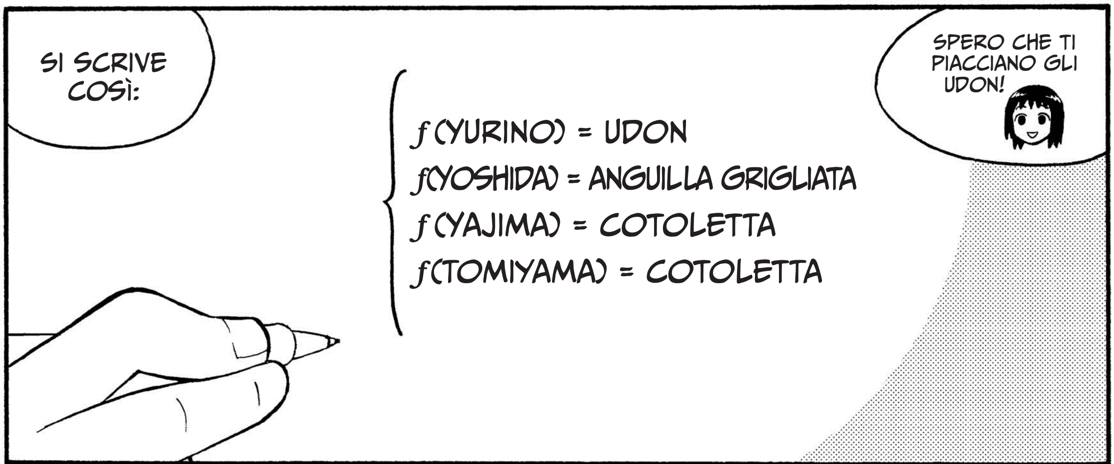


FUNZIONI

Una legge che associa gli elementi dell'insieme X a quelli dell'insieme Y è detta "funzione da X a Y". In genere X è detto *dominio* e Y è detto *codominio* della funzione.

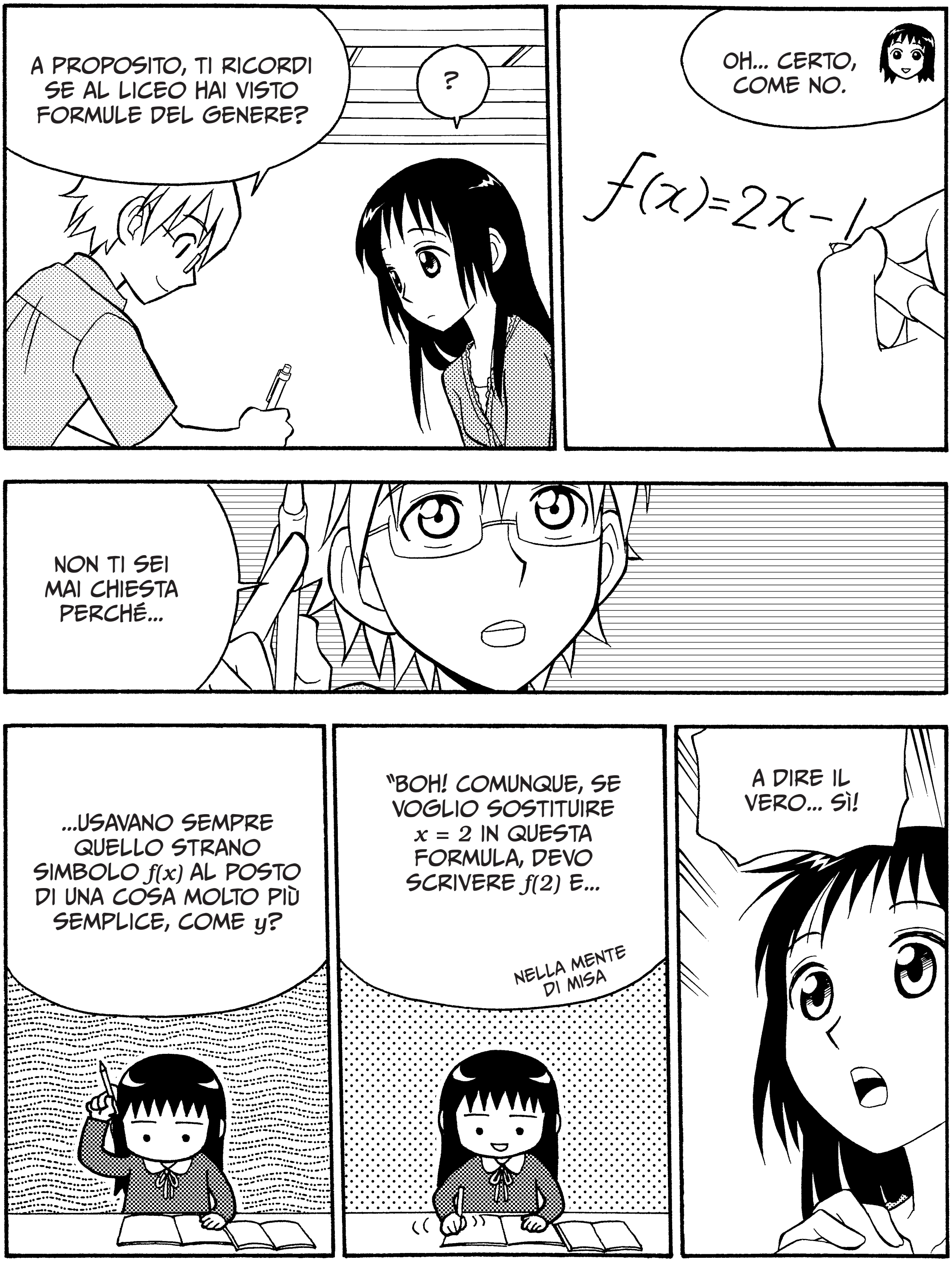

IMMAGINI
ADESSO PARLIAMO DI IMMAGINI.
IMMA-GINI?
CHIAMIAMO x_i UN ELEMENTO DELL'INSIEME X.
X
Y
x_i
L'ELEMENTO DI Y CHE CORRISPONDE A x_i QUANDO GLI APPLICHIAMO f...
... È DETTO "IMMAGINE DI x_i IN Y TRAMITE f".
X
Y
x_i
IMMAGINE DI x_i IN Y TRAMITE f
INOLTRE...
SPESSO SI INDICA "L'IMMAGINE DI x_i IN Y TRAMITE f"...
...CON $f(x_i)$.
X
Y
x_i
$f(x_i)$
OKAY!

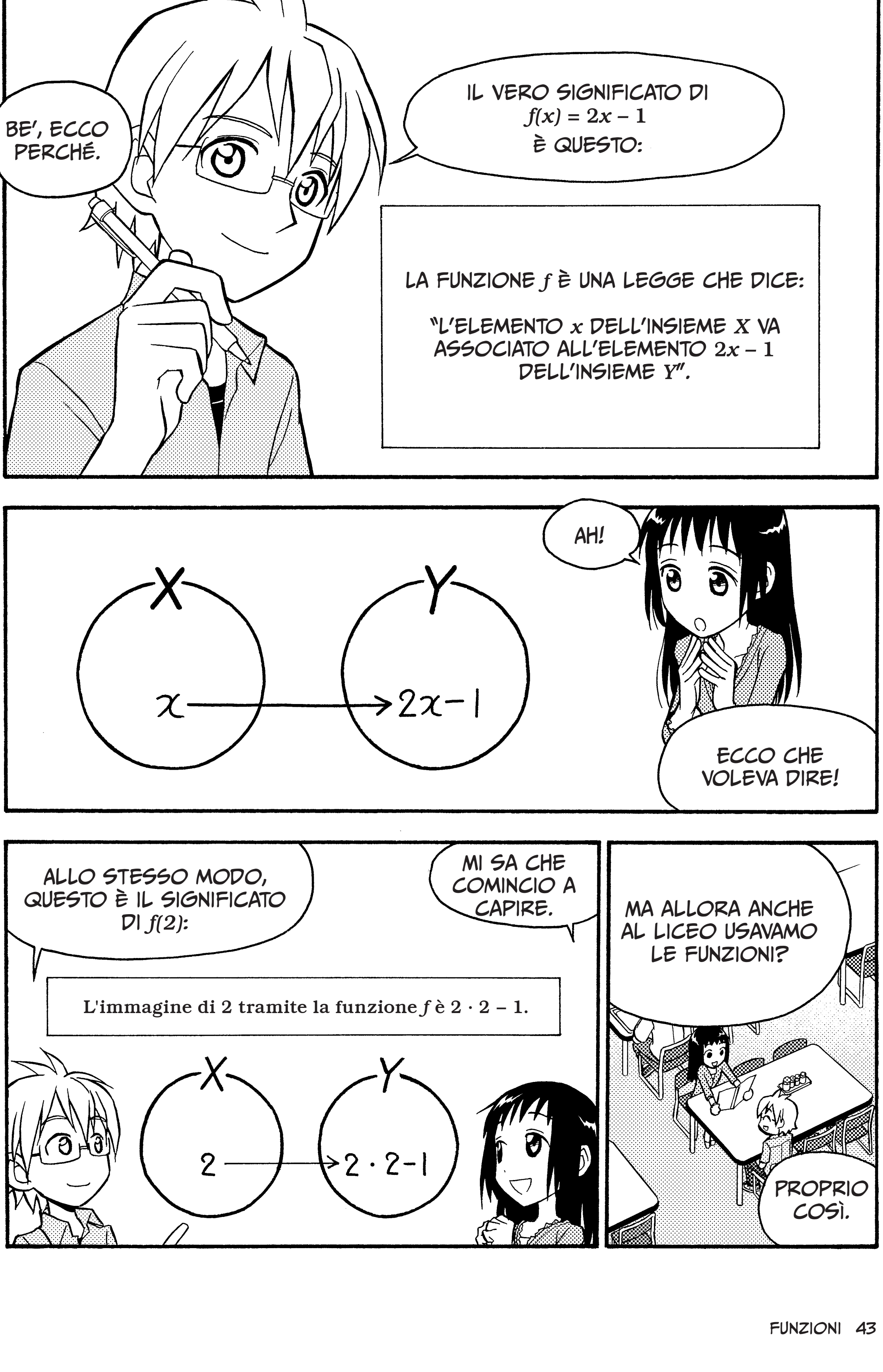


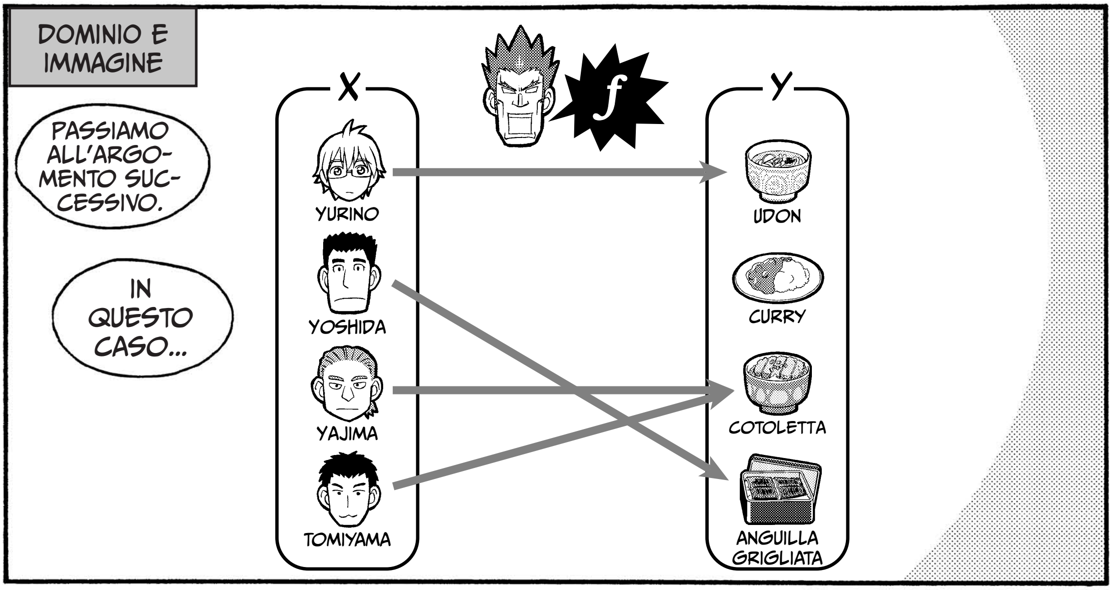


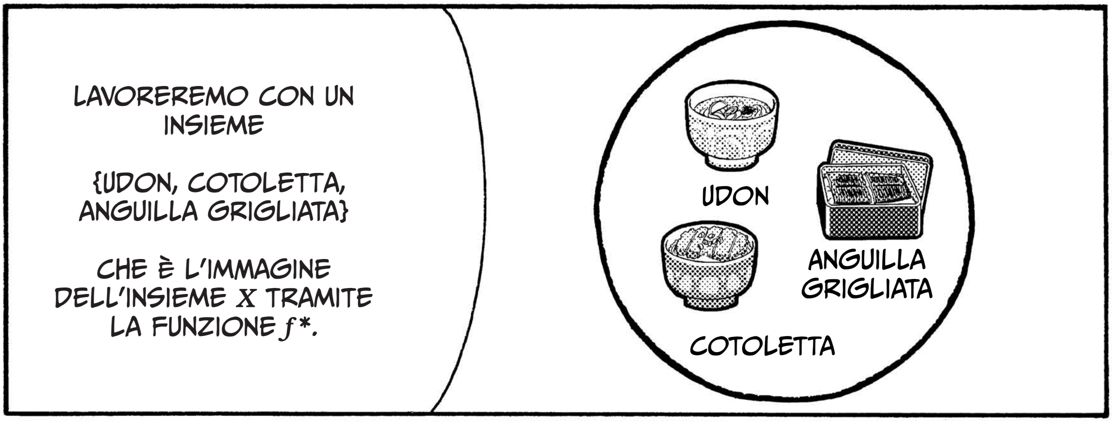
IMMAGINE

È l'elemento di *Y* che corrisponde all'elemento x_i dell'insieme *X* mediante la funzione *f*.


A PROPOSITO, TI RICORDI SE AL LICEO HAI VISTO FORMULE DEL GENERE?
?
OH... CERTO, COME NO.
$f(x)=2x-1$
NON TI SEI MAI CHIESTA PERCHÉ...
...USAVANO SEMPRE QUELLO STRANO SIMBOLO $f(x)$ AL POSTO DI UNA COSA MOLTO PIÙ SEMPLICE, COME y?
"BOH! COMUNQUE, SE VOGLIO SOSTITUIRE $x = 2$ IN QUESTA FORMULA, DEVO SCRIVERE $f(2)$ E...
NELLA MENTE DI MISA
A DIRE IL VERO... SÌ!


BE', ECCO PERCHÉ.
IL VERO SIGNIFICATO DI $f(x) = 2x - 1$ È QUESTO:
LA FUNZIONE f È UNA LEGGE CHE DICE:
"L'ELEMENTO x DELL'INSIEME X VA ASSOCIATO ALL'ELEMENTO $2x - 1$ DELL'INSIEME Y".
AH!
X
Y
$x \rightarrow 2x-1$
ECCO CHE VOLEVA DIRE!
ALLO STESSO MODO, QUESTO È IL SIGNIFICATO DI $f(2)$:
MI SA CHE COMINCIO A CAPIRE.
L'immagine di 2 tramite la funzione f è $2 \cdot 2 - 1$.
X
Y
$2 \rightarrow 2 \cdot 2-1$
MA ALLORA ANCHE AL LICEO USAVAMO LE FUNZIONI?
PROPRIO COSÌ.





*IL TERMINE *IMMAGINE* QUI DESCRIVE L'*INSIEME* DI ELEMENTI DI Y CHE SONO IMMAGINI DI ALMENO UN ELEMENTO DI X.

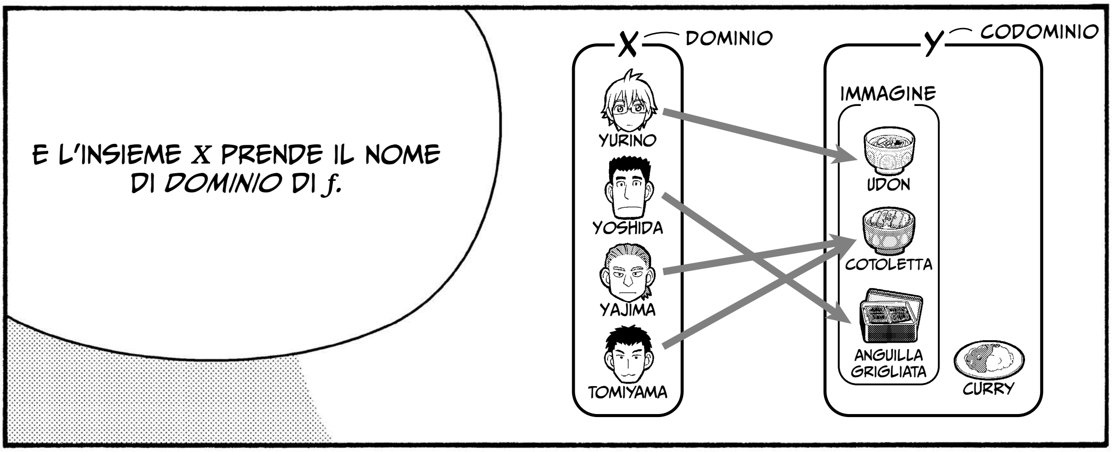


IMMAGINE E CODOMINIO

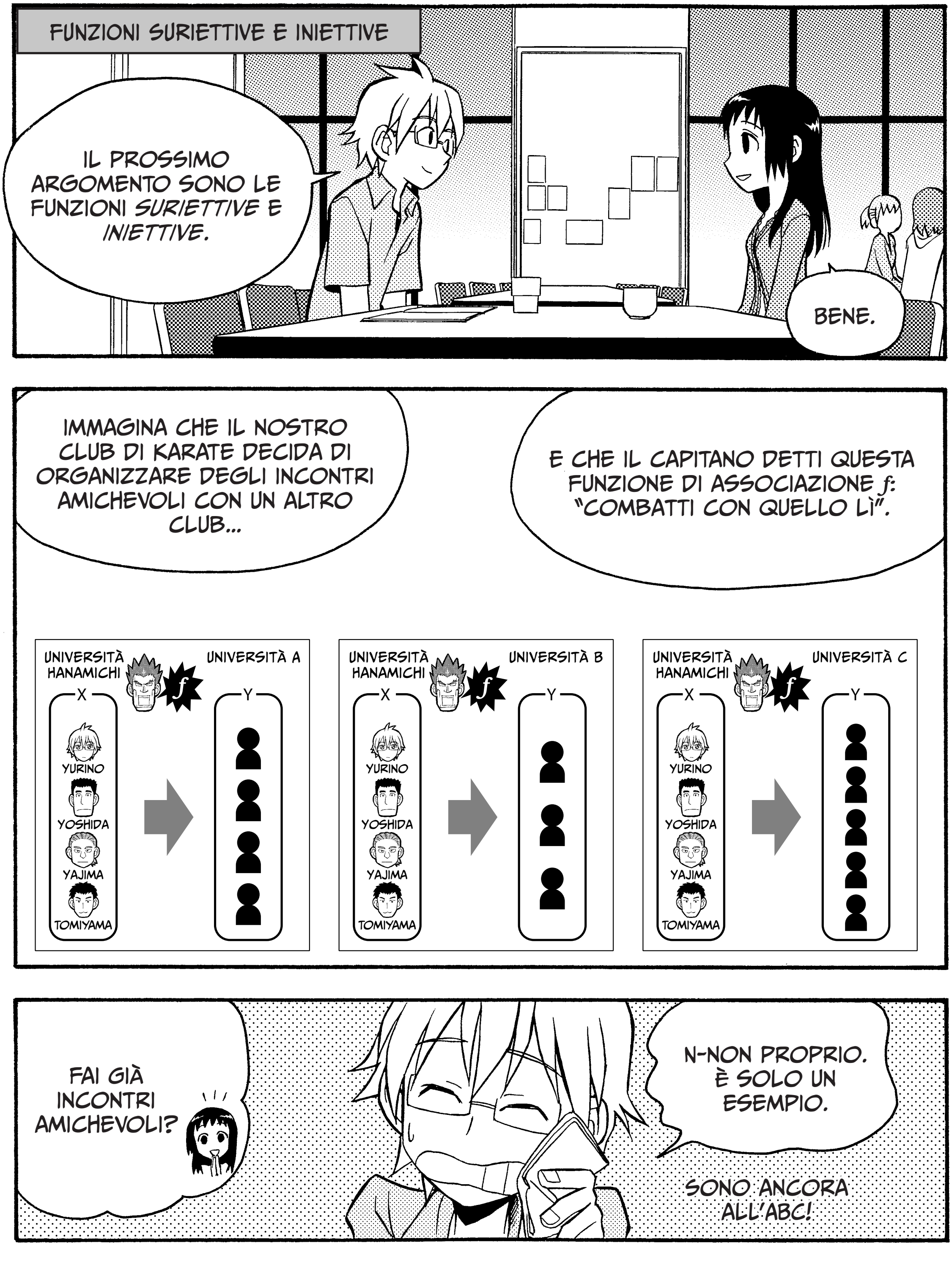
L'insieme che comprende tutte le immagini della funzione *f*, cioè {*f*(*x*1), *f*(*x*2), … , *f*(*xn*)}, è detto *immagine* di *f*, e l'insieme di arrivo della legge di associazione *f*, eventualmente più grande, è detto *codominio* della funzione.

Il legame tra l'immagine e il codominio è questo:

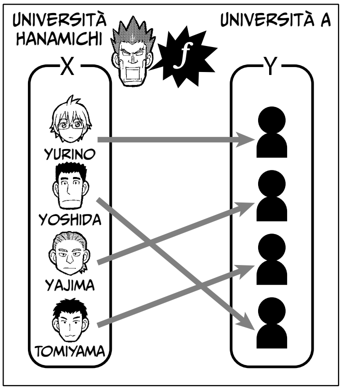
$$\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \subset Y$$

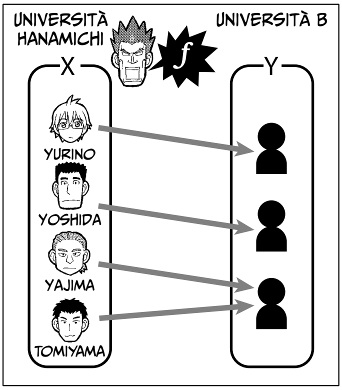
In altri termini, l'immagine di una funzione è un sottoinsieme del suo codominio. Nel caso particolare in cui tutti gli elementi di *Y* sono immagini di qualche elemento di *X*, abbiamo

$$\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} = Y$$


FUNZIONI SURIETTIVE E INIETTIVE
IL PROSSIMO ARGOMENTO SONO LE FUNZIONI *SURIETTIVE* E *INIETTIVE*.
BENE.
IMMAGINA CHE IL NOSTRO CLUB DI KARATE DECIDA DI ORGANIZZARE DEGLI INCONTRI AMICHEVOLI CON UN ALTRO CLUB...
E CHE IL CAPITANO DETTI QUESTA FUNZIONE DI ASSOCIAZIONE *f*: "COMBATTI CON QUELLO LÌ".
UNIVERSITÀ HANAMICHI
UNIVERSITÀ A
f
X
Y
YURINO
YOSHIDA
YAJIMA
TOMIYAMA
UNIVERSITÀ HANAMICHI
UNIVERSITÀ B
f
X
Y
YURINO
YOSHIDA
YAJIMA
TOMIYAMA
UNIVERSITÀ HANAMICHI
UNIVERSITÀ C
f
X
Y
YURINO
YOSHIDA
YAJIMA
TOMIYAMA
FAI GIÀ INCONTRI AMICHEVOLI?
N-NON PROPRIO. È SOLO UN ESEMPIO.
SONO ANCORA ALL'ABC!

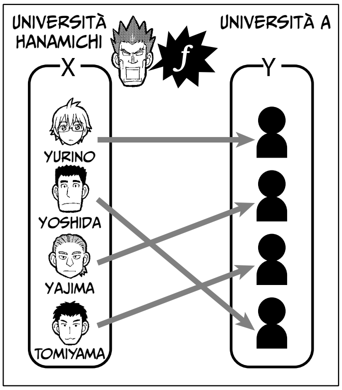
FUNZIONI SURIETTIVE

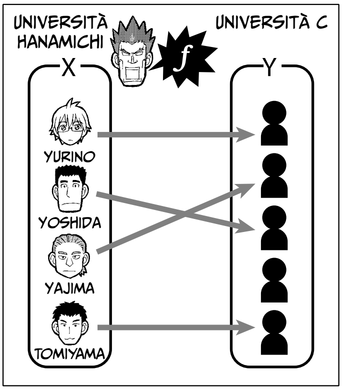




LA FUNZIONE È SURIETTIVA SE LA SUA IMMAGINE COINCIDE CON IL CODOMINIO. CIÒ SIGNIFICA CHE TUTTI GLI ELEMENTI DEL CODOMINIO DI UNA FUNZIONE SURIETTIVA SONO ASSOCIATI A QUALCHE ELEMENTO DEL DOMINIO.

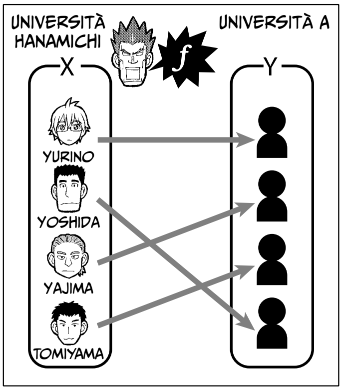
FUNZIONI INIETTIVE



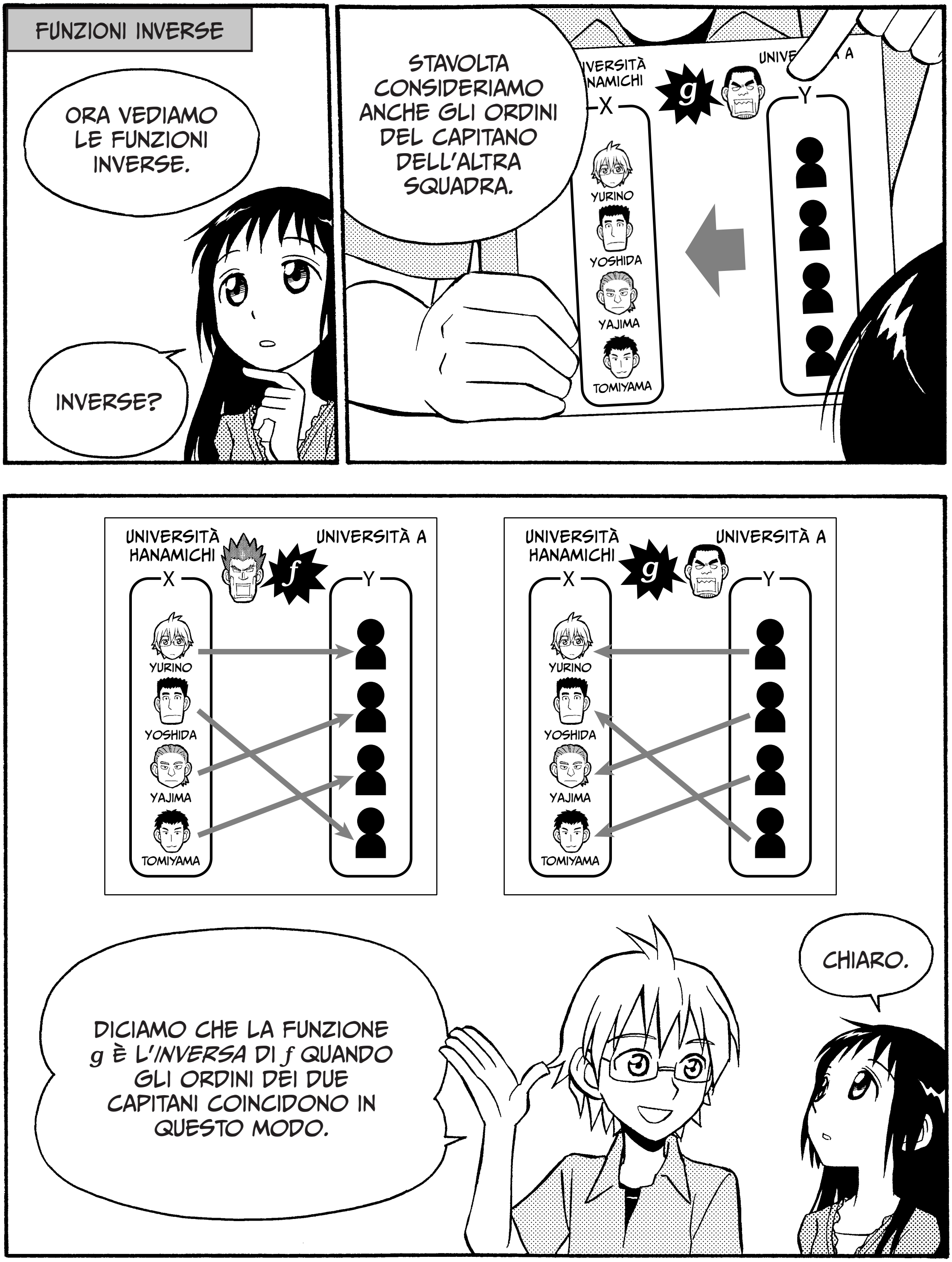


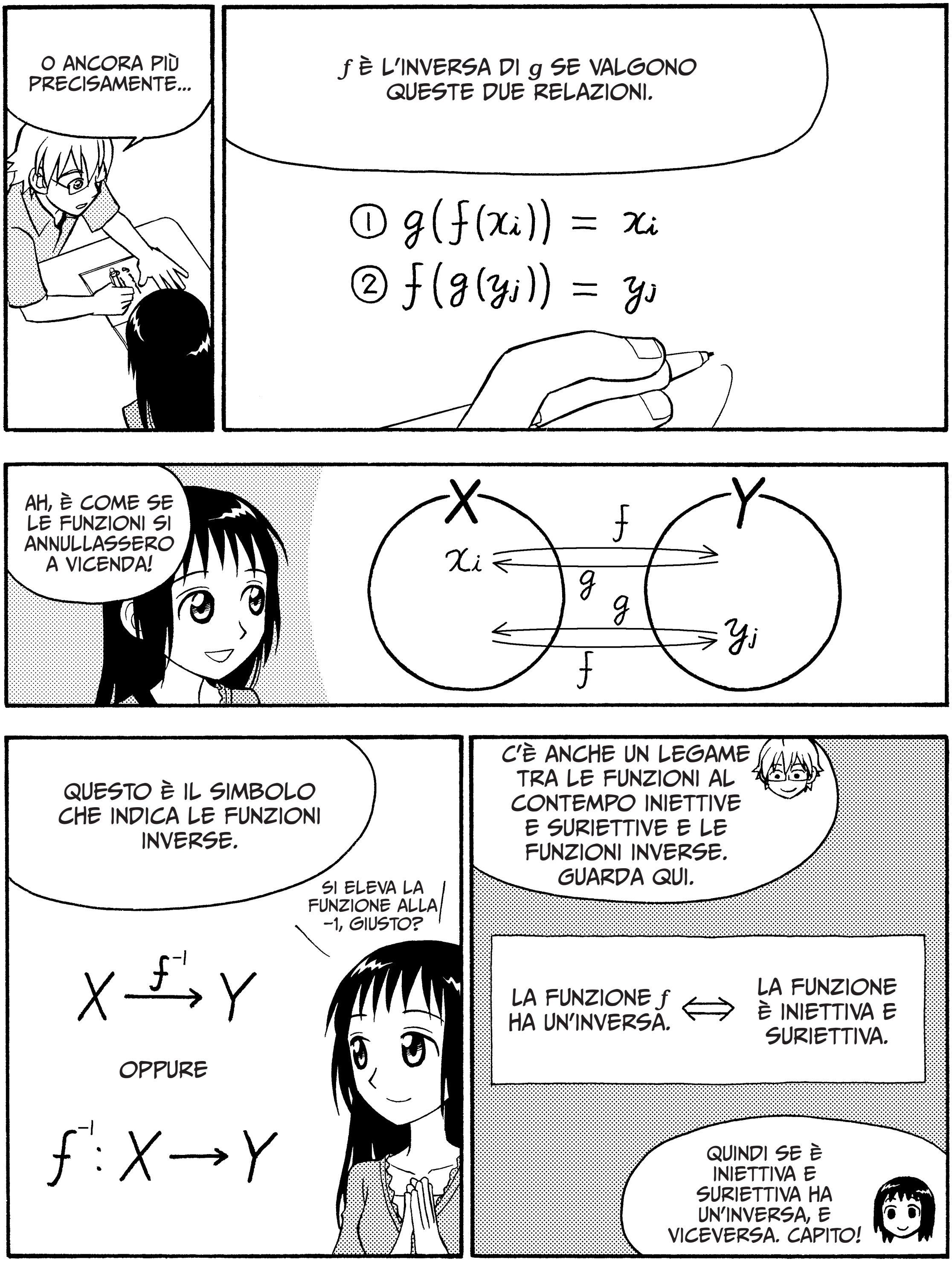
SE $x_i \neq x_j$ IMPLICA $f(x_i) \neq f(x_j)$ DICIAMO CHE LA FUNZIONE È INIETTIVA. CIÒ SIGNIFICA CHE NESSUN ELEMENTO DEL CODOMINIO PUÒ ESSERE ASSOCIATO A PIÙ DI UN ELEMENTO DEL DOMINIO.

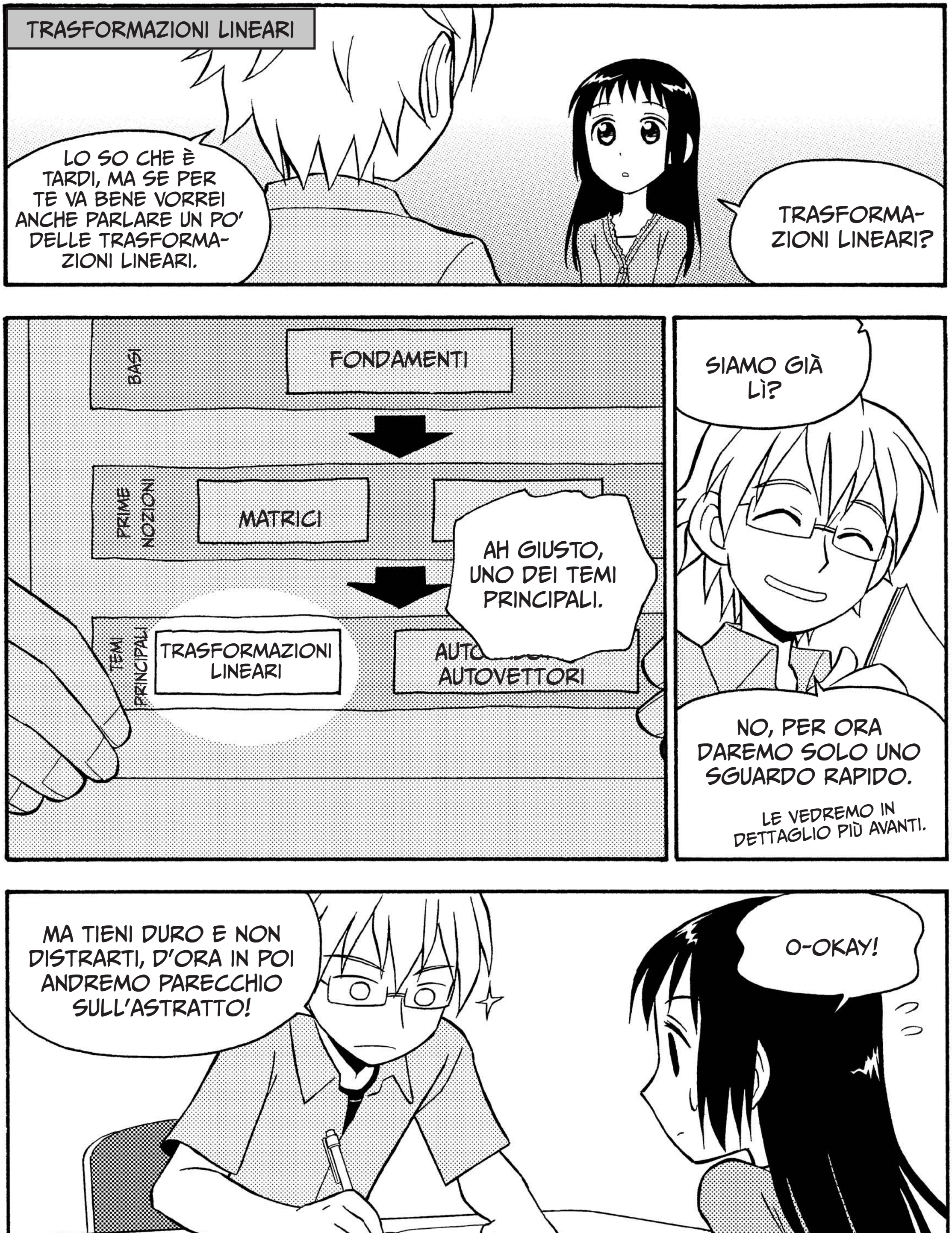
FUNZIONI INIETTIVE E SURIETTIVE



ESISTONO ANCHE FUNZIONI AL CONTEMPO SURIETTIVE E INIETTIVE. QUESTE FUNZIONI CREANO "COPPIE FISSE" TRA GLI ELEMENTI DEL DOMINIO E DEL CODOMINIO. OGNI ELEMENTO HA UNO E UN SOLO "PARTNER".


FUNZIONI INVERSE
ORA VEDIAMO LE FUNZIONI INVERSE.
INVERSE?
STAVOLTA CONSIDERIAMO ANCHE GLI ORDINI DEL CAPITANO DELL'ALTRA SQUADRA.
g
X
Y
YURINO
YOSHIDA
YAJIMA
TOMIYAMA
UNIVERSITÀ HANAMICHI
UNIVERSITÀ A
f
X
Y
YURINO
YOSHIDA
YAJIMA
TOMIYAMA
UNIVERSITÀ HANAMICHI
UNIVERSITÀ A
g
X
Y
YURINO
YOSHIDA
YAJIMA
TOMIYAMA
DICIAMO CHE LA FUNZIONE g È L'*INVERSA* DI f QUANDO GLI ORDINI DEI DUE CAPITANI COINCIDONO IN QUESTO MODO.
CHIARO.


O ANCORA PIÙ PRECISAMENTE...
f È L'INVERSA DI g SE VALGONO QUESTE DUE RELAZIONI.
① $g(f(x_i)) = x_i$
② $f(g(y_j)) = y_j$
AH, È COME SE LE FUNZIONI SI ANNULLASSERO A VICENDA!
X
Y
f
x_i
g
g
y_j
f
QUESTO È IL SIMBOLO CHE INDICA LE FUNZIONI INVERSE.
$X \xrightarrow{f^{-1}} Y$
OPPURE
$f^{-1} : X \longrightarrow Y$
SI ELEVA LA FUNZIONE ALLA −1, GIUSTO?
C'È ANCHE UN LEGAME TRA LE FUNZIONI AL CONTEMPO INIETTIVE E SURIETTIVE E LE FUNZIONI INVERSE. GUARDA QUI.
LA FUNZIONE f HA UN'INVERSA. $\Longleftrightarrow$ LA FUNZIONE È INIETTIVA E SURIETTIVA.
QUINDI SE È INIETTIVA E SURIETTIVA HA UN'INVERSA, E VICEVERSA. CAPITO!

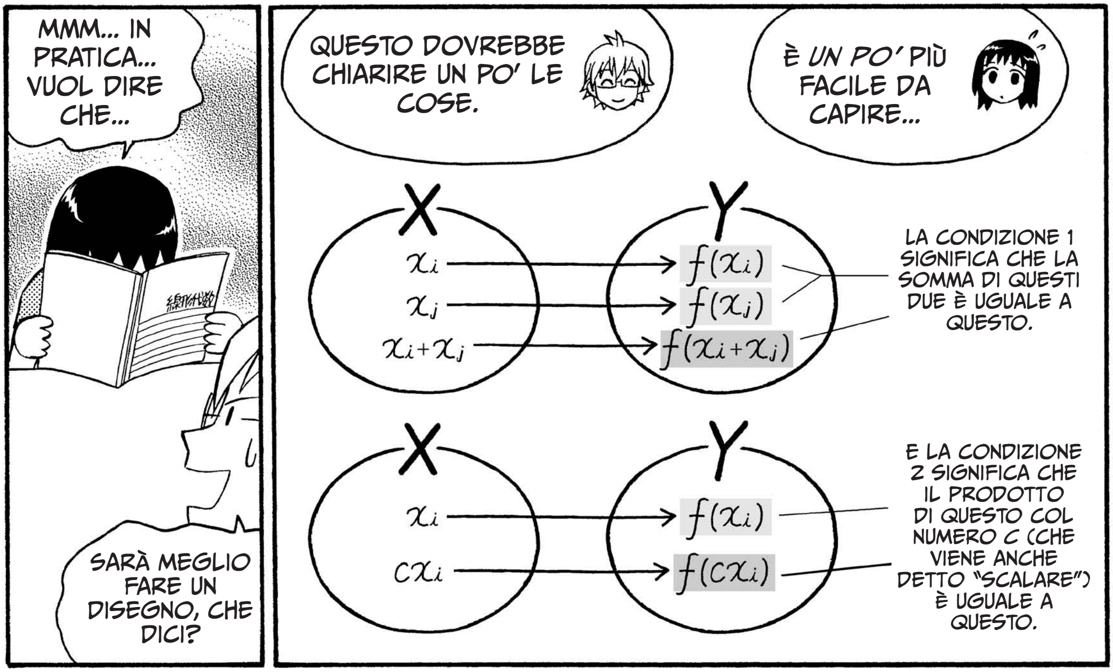

TRASFORMAZIONI LINEARI
LO SO CHE È TARDI, MA SE PER TE VA BENE VORREI ANCHE PARLARE UN PO' DELLE TRASFORMAZIONI LINEARI.
TRASFORMAZIONI LINEARI?
BASI
FONDAMENTI
PRIME NOZIONI
MATRICI
TEMI PRINCIPALI
TRASFORMAZIONI LINEARI
AUTOVETTORI
AH GIUSTO, UNO DEI TEMI PRINCIPALI.
SIAMO GIÀ LÌ?
NO, PER ORA DAREMO SOLO UNO SGUARDO RAPIDO.
LE VEDREMO IN DETTAGLIO PIÙ AVANTI.
MA TIENI DURO E NON DISTRARTI, D'ORA IN POI ANDREMO PARECCHIO SULL'ASTRATTO!
O-OKAY!

TRASFORMAZIONI LINEARI

Siano x_i e x_j due elementi arbitrari dell'insieme X, c un numero reale arbitrario e f una funzione da X a Y. f è detta *trasformazione lineare* da X a Y se soddisfa le due condizioni seguenti:

❶ $f(x_i) + f(x_j) = f(x_i + x_j)$

❷ $cf(x_i) = f(cx_i)$



ESEMPIO DI TRASFORMAZIONE LINEARE

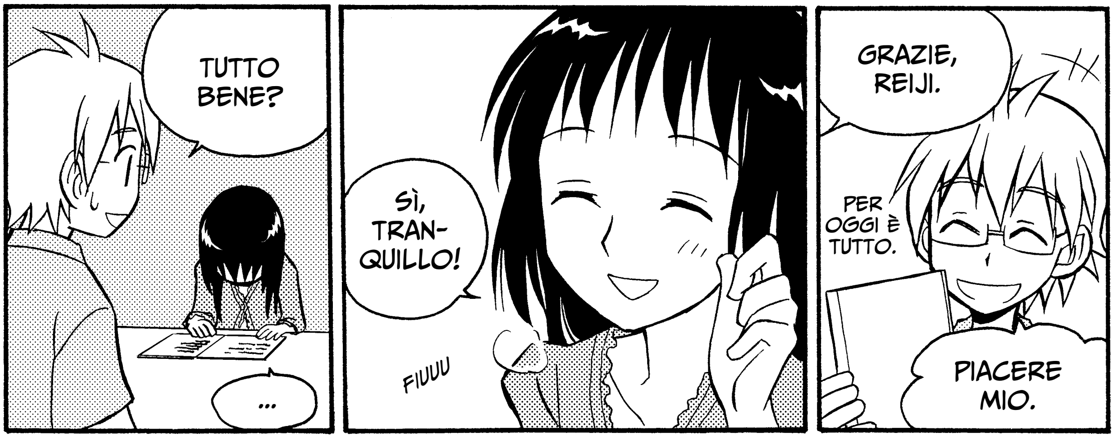
La funzione $f(x) = 2x$ è una trasformazione lineare. Infatti soddisfa sia ❶ che ❷, come potete vedere nella tabella qui sotto.

Condizione ❶	$\begin{cases} f(x_i) + f(x_j) = 2x_i + 2x_j \\ f(x_i + x_j) = 2(x_i + x_j) = 2x_i + 2x_j \end{cases}$
Condizione ❷	$\begin{cases} cf(x_i) = c(2x_i) = 2cx_i \\ f(cx_i) = 2(cx_i) = 2cx_i \end{cases}$

ESEMPIO DI UNA FUNZIONE CHE NON È UNA TRASFORMAZIONE LINEARE

La funzione $f(x) = 2x - 1$ non è una trasformazione lineare. Infatti non soddisfa né ❶ né ❷, come si può vedere nella tabella qui.

Condizione ❶	$\begin{cases} f(x_i) + f(x_j) = (2x_i - 1) + (2x_j - 1) = 2x_i + 2x_j - 2 \\ f(x_i + x_j) = 2(x_i + x_j) - 1 = 2x_i + 2x_j - 1 \end{cases}$
Condizione ❷	$\begin{cases} cf(x_i) = c(2x_i - 1) = 2cx_i - c \\ f(cx_i) = 2(cx_i) - 1 = 2cx_i - 1 \end{cases}$




REIJI?
EHM...
PRANZI SEMPRE ALLA MENSA DELLA SCUOLA?
IN GENERE SÌ, PERCHÉ ABITO DA SOLO E NON SONO TANTO BRAVO A CUCINARE...
OKAY, NON NE AVRAI PIÙ BISOGNO. LA PROSSIMA VOLTA TI PREPARO IO IL PRANZO!
え!?
NON DISTURBARTI! SONO ANCORA IN DEBITO CON TETSUO PER UN SACCO DI COSE!
OH, NON VUOI?


NO, NON È QUELLO, È CHE...
EHM...
RIPENSANDOCI, MI FAREBBE DAVVERO PIACERE SE TU...
... MI PREPARASSI IL PRANZO.
FANTASTICO!
SAI, LI PREPARO SPESSO ANCHE PER MIO FRATELLO: PRANZI ENERGETICI!
OH... MOLTO CARINO DA PARTE TUA.

COMBINAZIONI E DISPOSIZIONI

Per spiegare le combinazioni e le permutazioni, la cosa migliore è fare un esempio concreto.

Inizieremo vedendo il PROBLEMA, poi illustreremo un RAGIONAMENTO, e infine troveremo una SOLUZIONE.

PROBLEMA

Qualche giorno fa Reiji ha comprato un CD con sette canzoni diverse, che chiameremo A, B, C, D, E, F e G. L'indomani, preparandosi per un viaggio che farà con il suo amico Nemoto, ha pensato che non sarebbe male portarsi le canzoni per ascoltarle in macchina. Ma non poteva prenderle tutte, perché lui e Nemoto hanno gusti musicali abbastanza diversi. Dopo averci pensato un po' decide di fare un nuovo CD con tre sole canzoni, scelte fra le sette originali.

Domande:

1. In quanti modi Reiji può scegliere tre canzoni tra le sette originali?
2. In quanti modi si possono ordinare le tre canzoni scelte?
3. In quanti modi si può fare un CD scegliendo tre canzoni da un insieme di sette?

RAGIONAMENTO

Possiamo rispondere alla domanda 3 scindendola in questi due sottoproblemi:

1. Scegliamo tre canzoni tra le sette possibili.
2. Scegliamo un ordine in cui ascoltarle.

Vi sarete forse accorti che queste sono le prime due domande. La risposta alla domanda 3 è quindi:

RISPOSTA ALLA DOMANDA 1 ·	RISPOSTA ALLA DOMANDA 2 =	RISPOSTA ALLA DOMANDA 3
In quanti modi Reiji può scegliere tre canzoni tra le sette originali?	In quanti modi si possono ordinare le tre canzoni scelte?	In quanti modi si può fare un CD scegliendo tre canzoni da un insieme di sette?

SOLUZIONE

1. **In quanti modi Reiji può scegliere tre canzoni tra le sette originali?**

La tabella qui sotto riporta tutti e 35 i modi in cui scegliere le canzoni. Guardateli con calma.

Scelta 1	A e B e C	Scelta 16	B e C e D
Scelta 2	A e B e D	Scelta 17	B e C e E
Scelta 3	A e B e E	Scelta 18	B e C e F
Scelta 4	A e B e F	Scelta 19	B e C e G
Scelta 5	A e B e G	Scelta 20	B e D e E
Scelta 6	A e C e D	Scelta 21	B e D e F
Scelta 7	A e C e E	Scelta 22	B e D e G
Scelta 8	A e C e F	Scelta 23	B e E e F
Scelta 9	A e C e G	Scelta 24	B e E e G
Scelta 10	A e D e E	Scelta 25	B e F e G
Scelta 11	A e D e F	Scelta 26	C e D e E
Scelta 12	A e D e G	Scelta 27	C e D e F
Scelta 13	A e E e F	Scelta 28	C e D e G
Scelta 14	A e E e G	Scelta 29	C e E e F
Scelta 15	A e F e G	Scelta 30	C e E e G
		Scelta 31	C e F e G
		Scelta 32	D e E e F
		Scelta 33	D e E e G
		Scelta 34	D e F e G
		Scelta 35	E e F e G

La scelta di k elementi fra n possibili, ignorando l'ordine in cui sono presi, è detta *combinazione*. La notazione usata per indicare il numero di maniere diverse in cui operare questa scelta è il coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k}$$

che si legge "n su k".

Nel nostro caso,

$$\binom{7}{3} = 35$$

2. **In quanti modi si possono ordinare le tre canzoni scelte?**

Immaginiamo di aver scelto le canzoni A, B e C. Questa tabella riporta i 6 ordinamenti possibili:

Prima canzone	Seconda canzone	Terza canzone
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Se invece avessimo scelto B, E e G:

Prima canzone	Seconda canzone	Terza canzone
B	E	G
B	G	E
E	B	G
E	G	B
G	B	E
G	E	B

Studiando qualche altra terna di canzoni scoprirete una regolarità: il numero di ordinamenti possibili è sempre sei e non dipende da quali elementi sono stati scelti. Ecco perché:

Il nostro risultato (cioè 6) si può riscrivere come $3 \cdot 2 \cdot 1$, che si ottiene così:

1. Iniziamo dall'intera terna di canzoni e come prima canzone ne scegliamo una qualunque.
2. Quando scegliamo la seconda canzone, sono rimaste soltanto due opzioni.
3. Per l'ultima canzone non ci rimane che una possibilità.
4. Questo dà 3 possibilità · 2 possibilità · 1 possibilità = 6 possibilità.

2. **In quanti modi si può fare un CD scegliendo tre canzoni in un insieme di sette?**

Il numero di scelte diverse che si possono fare è:

Il numero di combinazioni possibili scegliendo tre canzoni da sette è:	$\cdot$	Numero di ordinamenti possibili per la terna scelta

$$= \binom{7}{3} \cdot 6$$

$$= 35 \cdot 6$$

$$= 210$$

Ciò significa che ci sono 210 modi differenti di fare il CD.

La scelta di tre elementi presi da un insieme di sette e messi in un certo ordine è chiamato *disposizione* degli elementi scelti. Il numero delle possibili disposizioni di k oggetti scelti tra n si scrive come

$$D_{k,n}$$

Nel nostro caso, questo dà

$$D_{7,3} = 210$$

Ogni modo di ordinare n oggetti fra n possibili è detto *permutazione* e ce ne sono in tutto n fattoriale:

$$D_{n,n} = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Per esempio, potremmo usare questa formula per sapere in quanti modi si possono ordinare sette oggetti. La risposta è

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

Nella tabella qui sotto sono riportate tutte le maniere possibili di scegliere tre canzoni tra le sette originali (A, B, C, D, E, F e G).

	Prima canzone	Seconda canzone	Terza canzone
Scelta 1	A	B	C
Scelta 2	A	B	D
Scelta 3	A	B	E
...	...	...	...
Scelta 30	A	G	F
Scelta 31	B	A	C
...	...	...	...
Scelta 60	B	G	F
Scelta 61	C	A	B
...	...	...	...
Scelta 90	C	G	F
Scelta 91	D	A	B
...	...	...	...
Scelta 120	D	G	F
Scelta 121	E	A	B
...	...	...	...
Scelta 150	E	G	F
Scelta 151	F	A	B
...	...	...	...
Scelta 180	F	G	E
Scelta 181	G	A	B
...	...	...	...
Scelta 209	G	E	F
Scelta 210	G	F	E

Proprio come nell'esempio precedente, possiamo riscrivere il conteggio delle maniere diverse di fare un CD nella forma $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. Queste cifre si ricavano così:

1. Possiamo scegliere come prima canzone una qualsiasi delle 7 canzoni A, B, C, D, E, F e G.
1. Ora possiamo scegliere come seconda canzone una qualsiasi delle 6 rimanenti.
1. E infine possiamo scegliere come ultima canzone una qualsiasi di quelle rimaste, che ora sono 5.

Il coefficiente binomiale si definisce così:

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-(r-1))}{r \cdot (r-1) \cdots 1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)}{r \cdot (r-1) \cdots 1}$$

Osservate che

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-(r-1))}{r \cdot (r-1) \cdots 1} \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-(r-1))}{r \cdot (r-1) \cdots 1} \cdot \frac{(n-r) \cdot (n-r+1) \cdots 1}{(n-r) \cdot (n-r+1) \cdots 1} \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-(r-1)) \cdot (n-r) \cdot (n-r+1) \cdots 1}{(r \cdot (r-1) \cdots 1) \cdot ((n-r) \cdot (n-r+1) \cdots 1)} \\
&= \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}
\end{aligned}$$

Molti trovano che la seconda forma sia più facile da memorizzare:

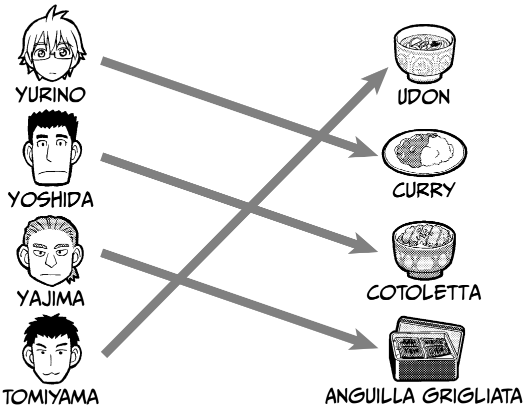
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

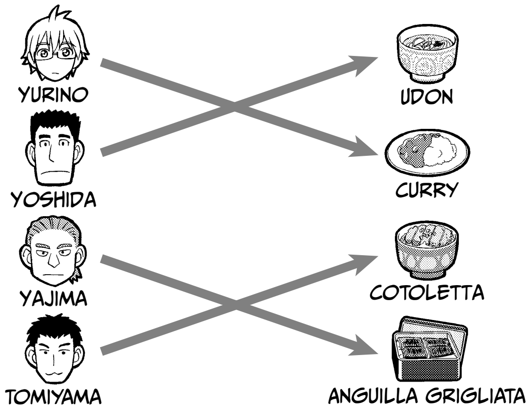
Possiamo ora riscrivere in questo modo la domanda 3 (in quante maniere si può fare il CD?):

$$D_{7,3} = \binom{7}{3} \cdot 6 = \binom{7}{3} \cdot 3! = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 3! = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

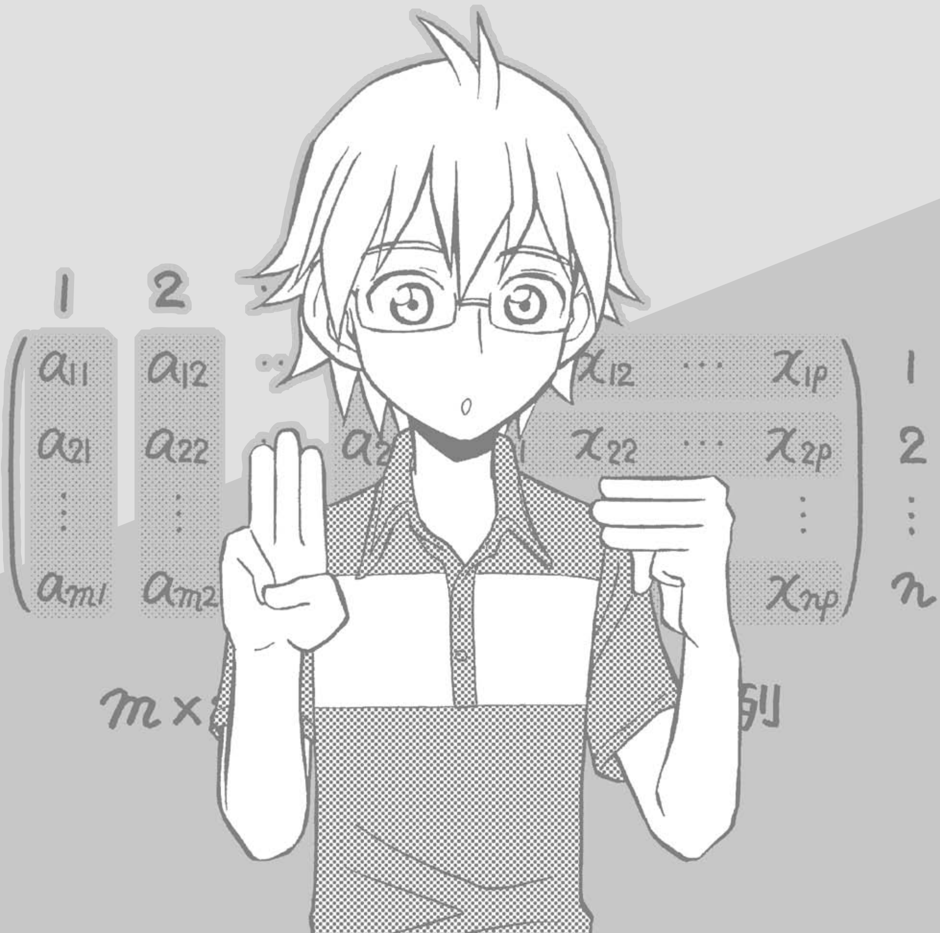
NON TUTTE LE "LEGGI DI ORDINAMENTO" SONO FUNZIONI

Alle pagine 37-38 abbiamo descritto i tre comandi "Ordinate quello che costa meno!", "Ordinate cose diverse!" e "Ordinate quello che vi pare!" come funzioni. È importante notare, però, che in realtà "Ordinate cose diverse!" non è una funzione vera e propria, perché ci sono svariate maniere di obbedire a un comando simile.

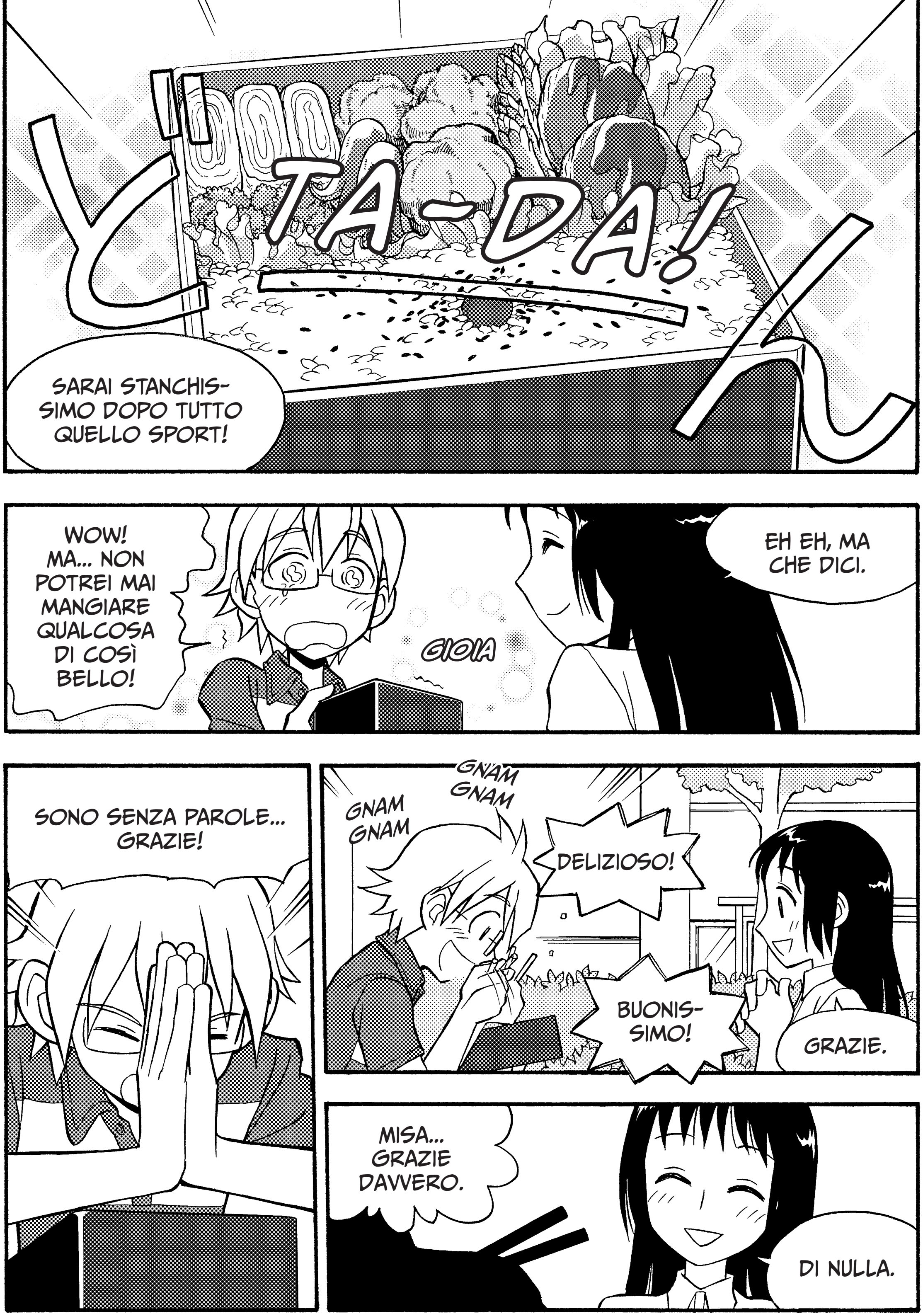


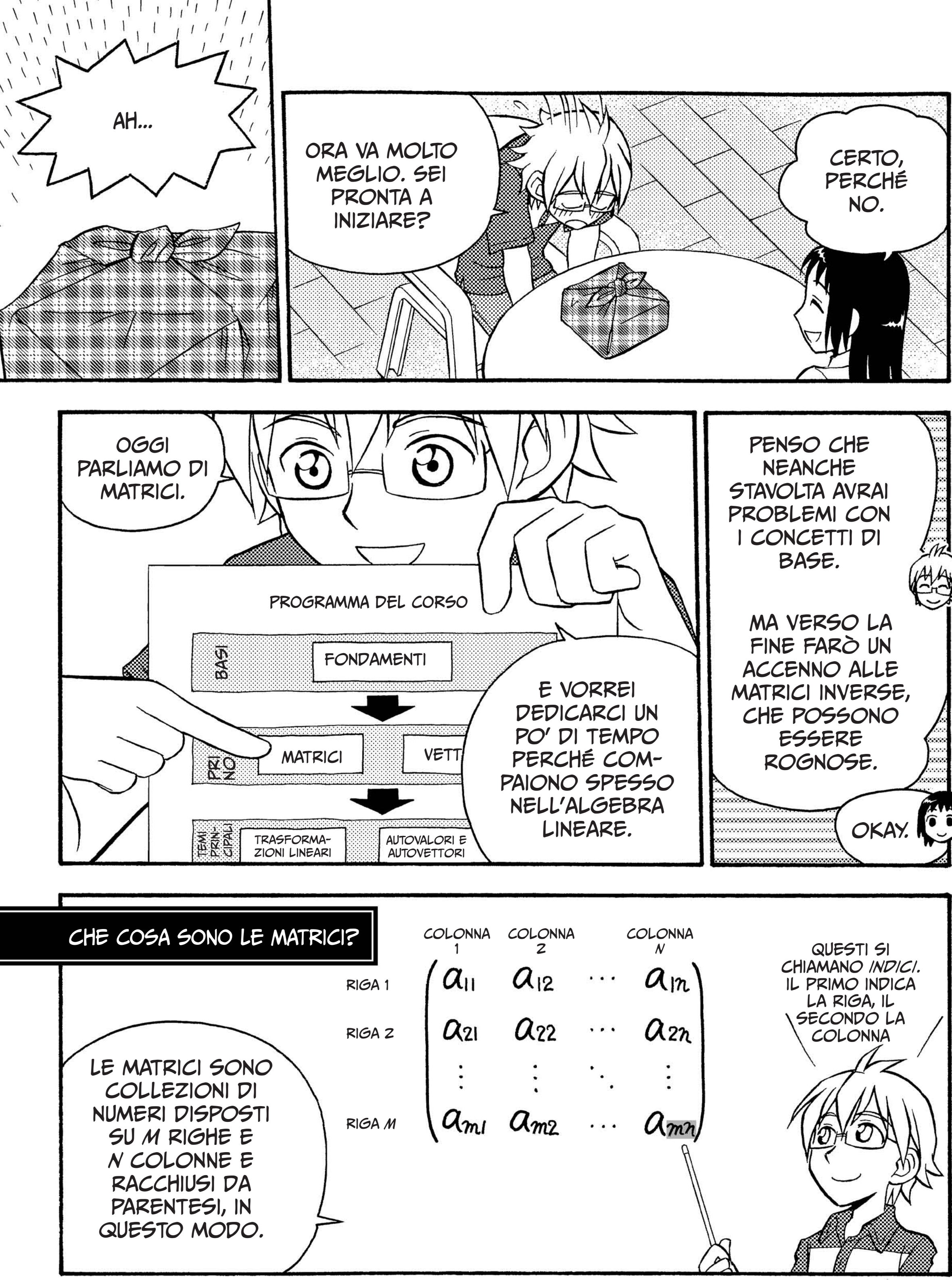


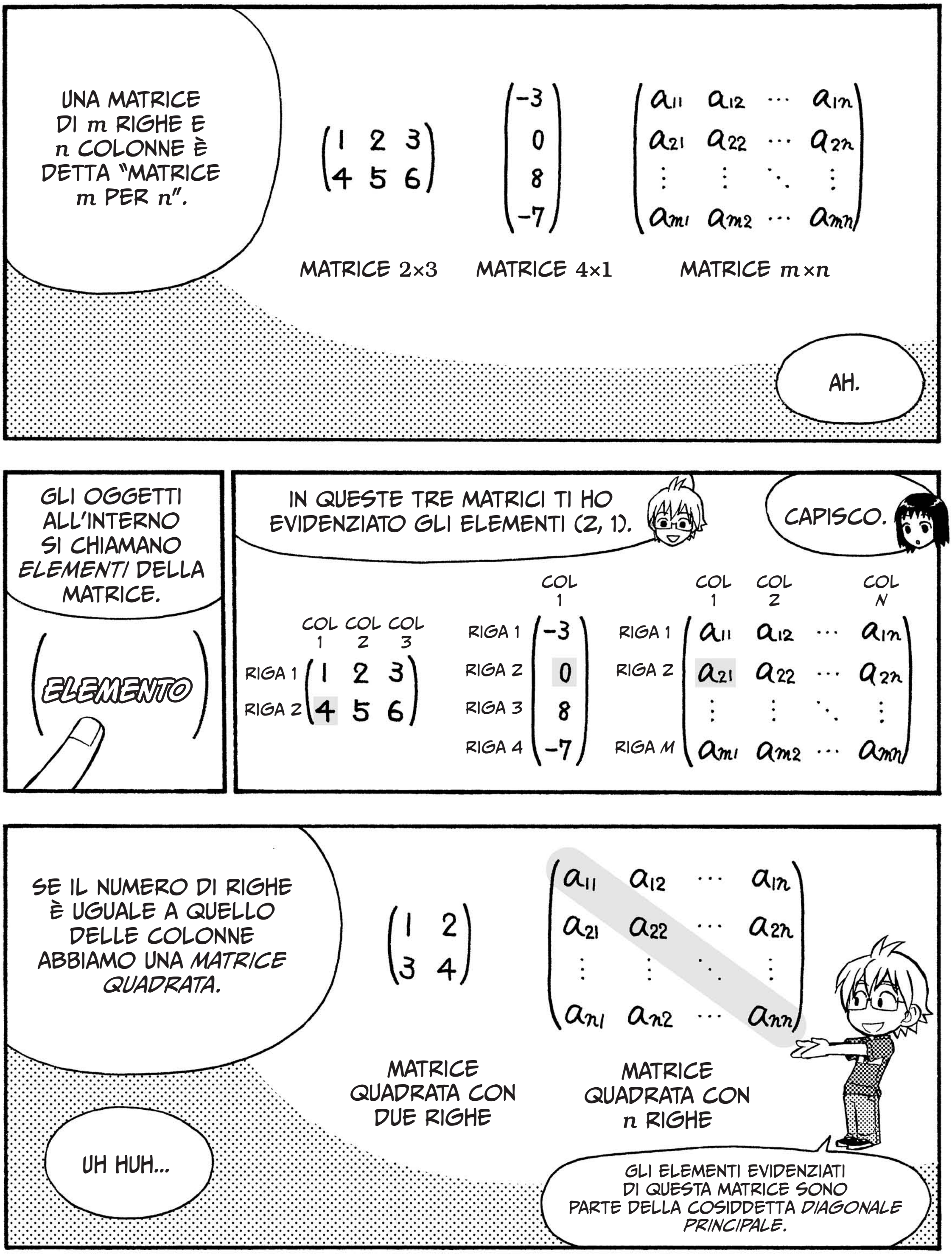
3
INTRODUZIONE ALLE MATRICI

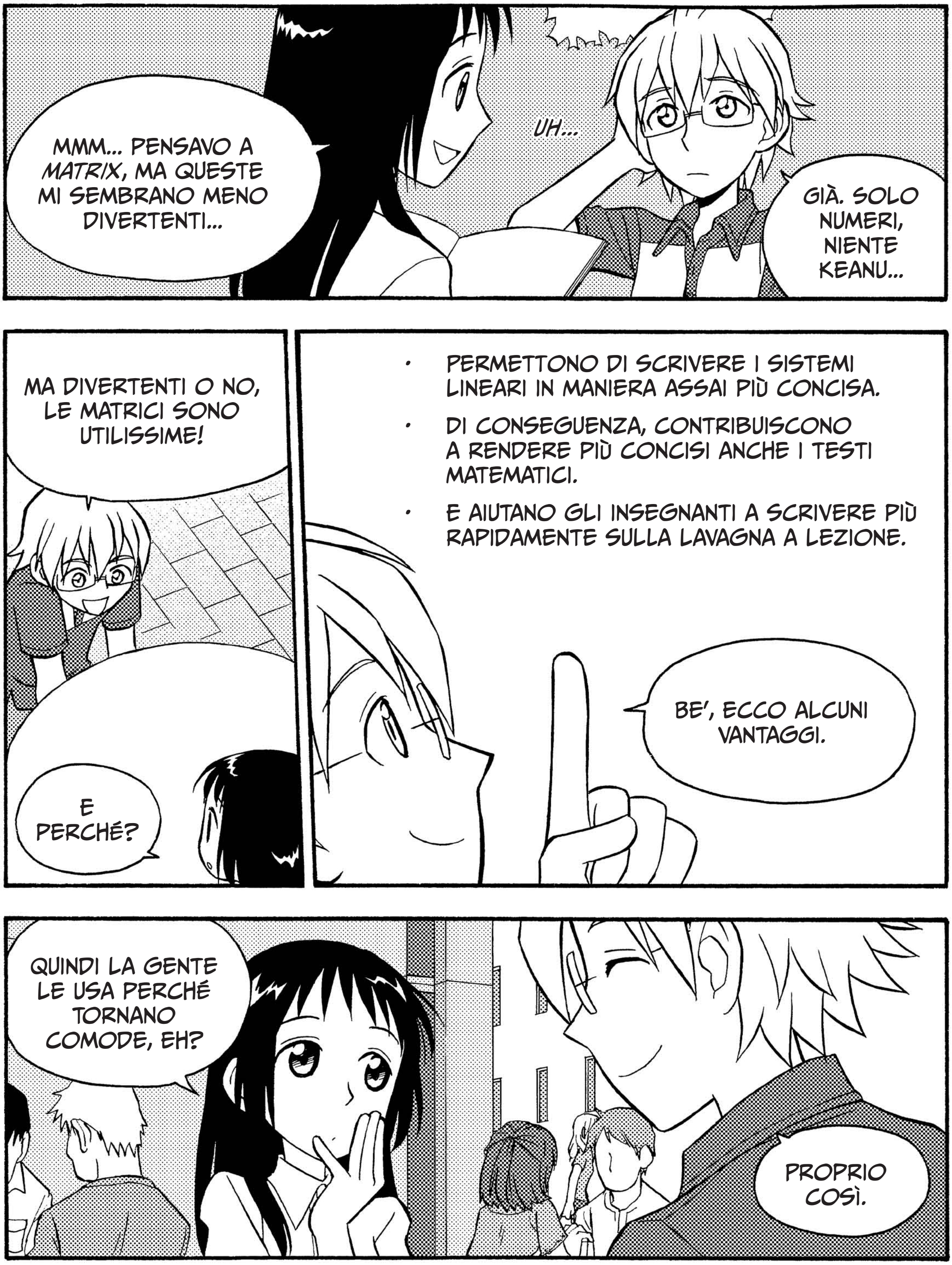


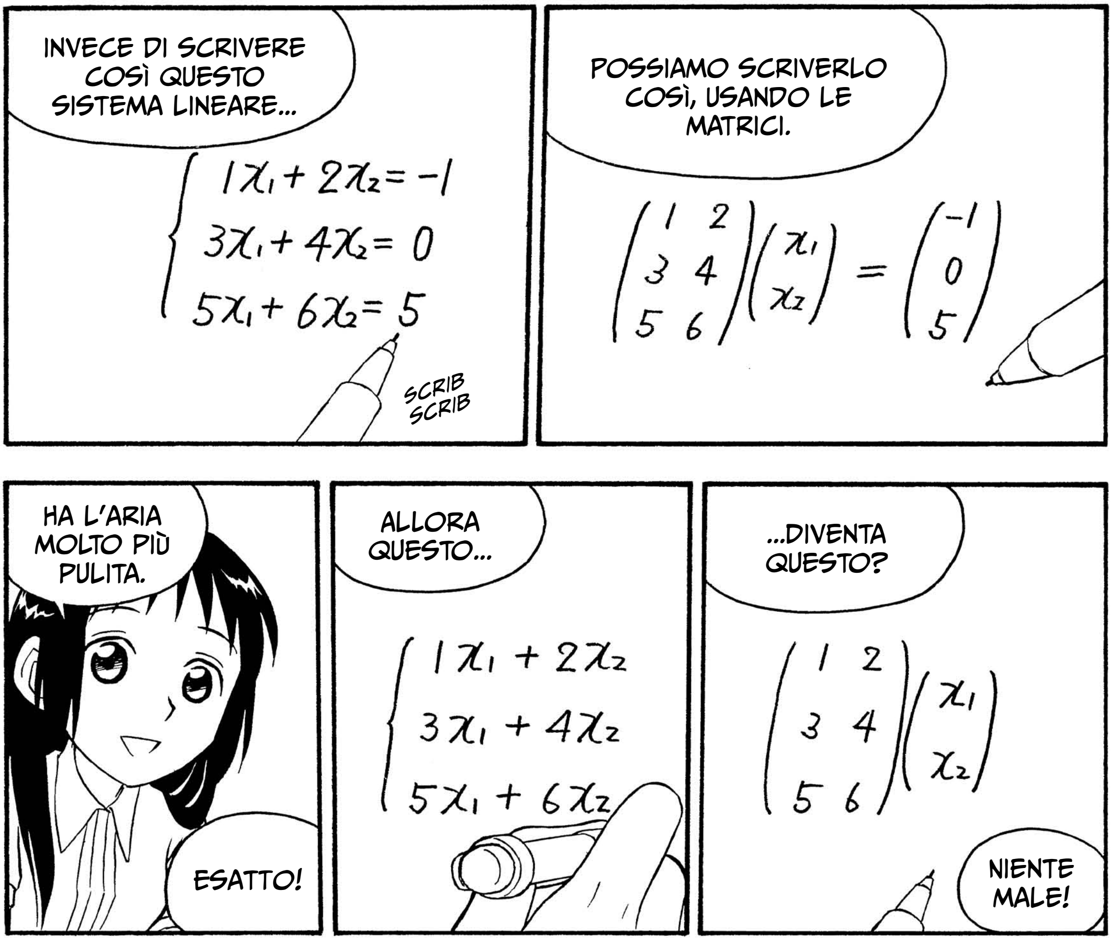

EI!
EI!
FATE FORZA CON LA SCHIENA!
YURINO!
LE MANI NON BASTANO.
USA GLI ADDOMINALI!
OSSU!
PENSAVO CHE AVREBBE MOLLATO SUBITO...
MI SA CHE MI SBAGLIAVO.
EH EH
フフン


TA-DA!
SARAI STANCHISSIMO DOPO TUTTO QUELLO SPORT!
WOW! MA... NON POTREI MAI MANGIARE QUALCOSA DI COSÌ BELLO!
GIOIA
EH EH, MA CHE DICI.
SONO SENZA PAROLE... GRAZIE!
GNAM GNAM
GNAM GNAM
DELIZIOSO!
BUONISSIMO!
GRAZIE.
MISA... GRAZIE DAVVERO.
DI NULLA.


AH...
ORA VA MOLTO MEGLIO. SEI PRONTA A INIZIARE?
CERTO, PERCHÉ NO.
OGGI PARLIAMO DI MATRICI.
PROGRAMMA DEL CORSO
BASI
FONDAMENTI
MATRICI
PRI-NO
TEMI PRIN-CIPALI
TRASFORMAZIONI LINEARI
AUTOVALORI E AUTOVETTORI
E VORREI DEDICARCI UN PO' DI TEMPO PERCHÉ COMPAIONO SPESSO NELL'ALGEBRA LINEARE.
PENSO CHE NEANCHE STAVOLTA AVRAI PROBLEMI CON I CONCETTI DI BASE.
MA VERSO LA FINE FARÒ UN ACCENNO ALLE MATRICI INVERSE, CHE POSSONO ESSERE ROGNOSE.
OKAY.
CHE COSA SONO LE MATRICI?
LE MATRICI SONO COLLEZIONI DI NUMERI DISPOSTI SU *M* RIGHE E *N* COLONNE E RACCHIUSI DA PARENTESI, IN QUESTO MODO.
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \text{COLONNA 1} & \text{COLONNA 2} & & \text{COLONNA } N \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{RIGA 1} \\ \text{RIGA 2} \\ \\ \text{RIGA } M \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$
QUESTI SI CHIAMANO *INDICI*. IL PRIMO INDICA LA RIGA, IL SECONDO LA COLONNA


UNA MATRICE DI m RIGHE E n COLONNE È DETTA "MATRICE m PER n".
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
MATRICE 2×3
MATRICE 4×1
MATRICE $m\times n$
AH.
GLI OGGETTI ALL'INTERNO SI CHIAMANO *ELEMENTI* DELLA MATRICE.
ELEMENTO
IN QUESTE TRE MATRICI TI HO EVIDENZIATO GLI ELEMENTI (2, 1).
CAPISCO.
$\begin{array}{c|c} & \text{COL 1} \quad \text{COL 2} \quad \text{COL 3} \\ \text{RIGA 1} & \\ \text{RIGA 2} & \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
$\begin{array}{c} \text{COL 1} \end{array}$ RIGA 1, RIGA 2, RIGA 3, RIGA 4 $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$
COL 1, COL 2, COL N; RIGA 1, RIGA 2, RIGA M $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
SE IL NUMERO DI RIGHE È UGUALE A QUELLO DELLE COLONNE ABBIAMO UNA *MATRICE QUADRATA.*
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
MATRICE QUADRATA CON DUE RIGHE
MATRICE QUADRATA CON n RIGHE
UH HUH...
GLI ELEMENTI EVIDENZIATI DI QUESTA MATRICE SONO PARTE DELLA COSIDDETTA *DIAGONALE PRINCIPALE.*


MMM... PENSAVO A *MATRIX*, MA QUESTE MI SEMBRANO MENO DIVERTENTI...
UH...
GIÀ. SOLO NUMERI, NIENTE KEANU...
MA DIVERTENTI O NO, LE MATRICI SONO UTILISSIME!
E PERCHÉ?
BE', ECCO ALCUNI VANTAGGI.
• PERMETTONO DI SCRIVERE I SISTEMI LINEARI IN MANIERA ASSAI PIÙ CONCISA.
• DI CONSEGUENZA, CONTRIBUISCONO A RENDERE PIÙ CONCISI ANCHE I TESTI MATEMATICI.
• E AIUTANO GLI INSEGNANTI A SCRIVERE PIÙ RAPIDAMENTE SULLA LAVAGNA A LEZIONE.
QUINDI LA GENTE LE USA PERCHÉ TORNANO COMODE, EH?
PROPRIO COSÌ.

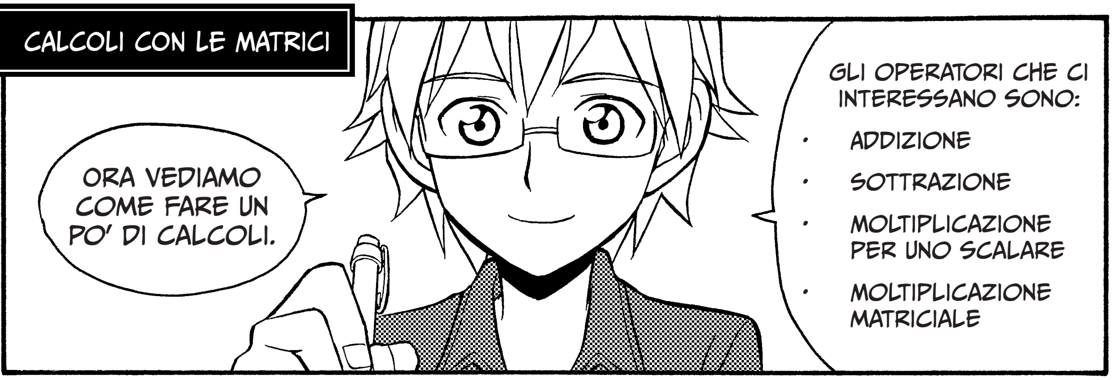


SCRIVIAMO I SISTEMI DI EQUAZIONI IN FORMA MATRICIALE

- $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ si scrive come $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

- $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$ si scrive come $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

CALCOLI CON LE MATRICI



ADDIZIONE

SOMMIAMO LA MATRICE 3×2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

A QUESTA MATRICE 3×2 $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

CIOÈ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

GLI ELEMENTI SI SOMMANO SINGOLARMENTE, COSÌ: $\begin{pmatrix} 1+6 & 2+5 \\ 3+4 & 4+3 \\ 5+2 & 6+1 \end{pmatrix}$

ESEMPI

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+5 \\ 3+4 & 4+3 \\ 5+2 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$
- $(10,\ 10) + (-3,\ -6) = (10 + (-3),\ 10 + (-6)) = (7,\ 4)$
- $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + (-3) \\ 10 + (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

SOTTRAZIONE

SOTTRAIAMO LA MATRICE 3×2 $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

DA QUESTA MATRICE 3×2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

CIOÈ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

GLI ELEMENTI SI SOTTRAGGONO OGNUNO DAL CORRISPONDENTE, COSÌ: $\begin{pmatrix} 1-6 & 2-5 \\ 3-4 & 4-3 \\ 5-2 & 6-1 \end{pmatrix}$

ESEMPI

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6 & 2-5 \\ 3-4 & 4-3 \\ 5-2 & 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

- $(10,\ 10) - (-3,\ -6) = (10 - (-3),\ 10 - (-6)) = (13,\ 16)$

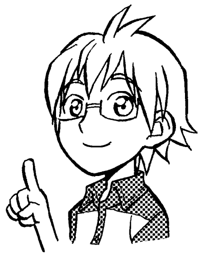
- $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - (-3) \\ 10 - (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 16 \end{pmatrix}$

MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE

MOLTIPLICHIAMO LA MATRICE 3×2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

PER 10. CIOÈ: $10\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

OGNI ELEMENTO SI MOLTIPLICA PER 10, COSÌ: $\begin{pmatrix} 10 \cdot 1 & 10 \cdot 2 \\ 10 \cdot 3 & 10 \cdot 4 \\ 10 \cdot 5 & 10 \cdot 6 \end{pmatrix}$



ESEMPI

- $10\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 1 & 10 \cdot 2 \\ 10 \cdot 3 & 10 \cdot 4 \\ 10 \cdot 5 & 10 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{pmatrix}$
- $2\,(3, 1) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 1) = (6, 2)$
- $2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

MOLTIPLICAZIONE MATRICIALE (O "RIGHE PER COLONNE")

POSSIAMO CALCOLARE IL PRODOTTO $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 & 1y_1 + 2y_2 \\ 3x_1 + 4x_2 & 3y_1 + 4y_2 \\ 5x_1 + 6x_2 & 5y_1 + 6y_2 \end{pmatrix}$

SE SEPARIAMO TEMPORANEAMENTE LE DUE COLONNE

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ FORMANDO I DUE PRODOTTI

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1y_1 + 2y_2 \\ 3y_1 + 4y_2 \\ 5y_1 + 6y_2 \end{pmatrix}$

E POI RICOMPONENDO LE COLONNE RISULTANTI:

$$\begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 & 1y_1 + 2y_2 \\ 3x_1 + 4x_2 & 3y_1 + 4y_2 \\ 5x_1 + 6x_2 & 5y_1 + 6y_2 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

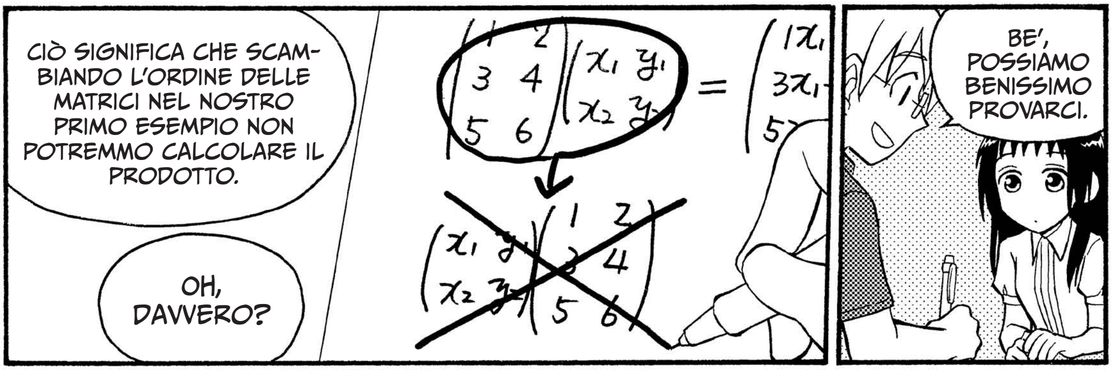
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 & 1y_1 + 2y_2 \\ 3x_1 + 4x_2 & 3y_1 + 4y_2 \\ 5x_1 + 6x_2 & 5y_1 + 6y_2 \end{pmatrix}$

- $$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 & 8 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 - 3 & 8 - 6 \\ 6 + 1 & 2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 8 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 8 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 + 2 & -9 + 1 \\ 8 + 4 & -3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -8 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \end{array}$$

IL PRODOTTO DI UNA MATRICE $m \times n$ PER UNA MATRICE $n \times p$ È UNA MATRICE $m \times p$.



PRODOTTO DI FATTORI 3×2 E 2×2

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ SI PUÒ SEPARARE IN $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ CHE EQUIVALE A

$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 1y_1 + 2y_2 \\ 3y_1 + 4y_2 \\ 5y_1 + 6y_2 \end{cases}$ NELLA STESSA MATRICE.

PRODOTTO DI FATTORI 2×2 E 3×2

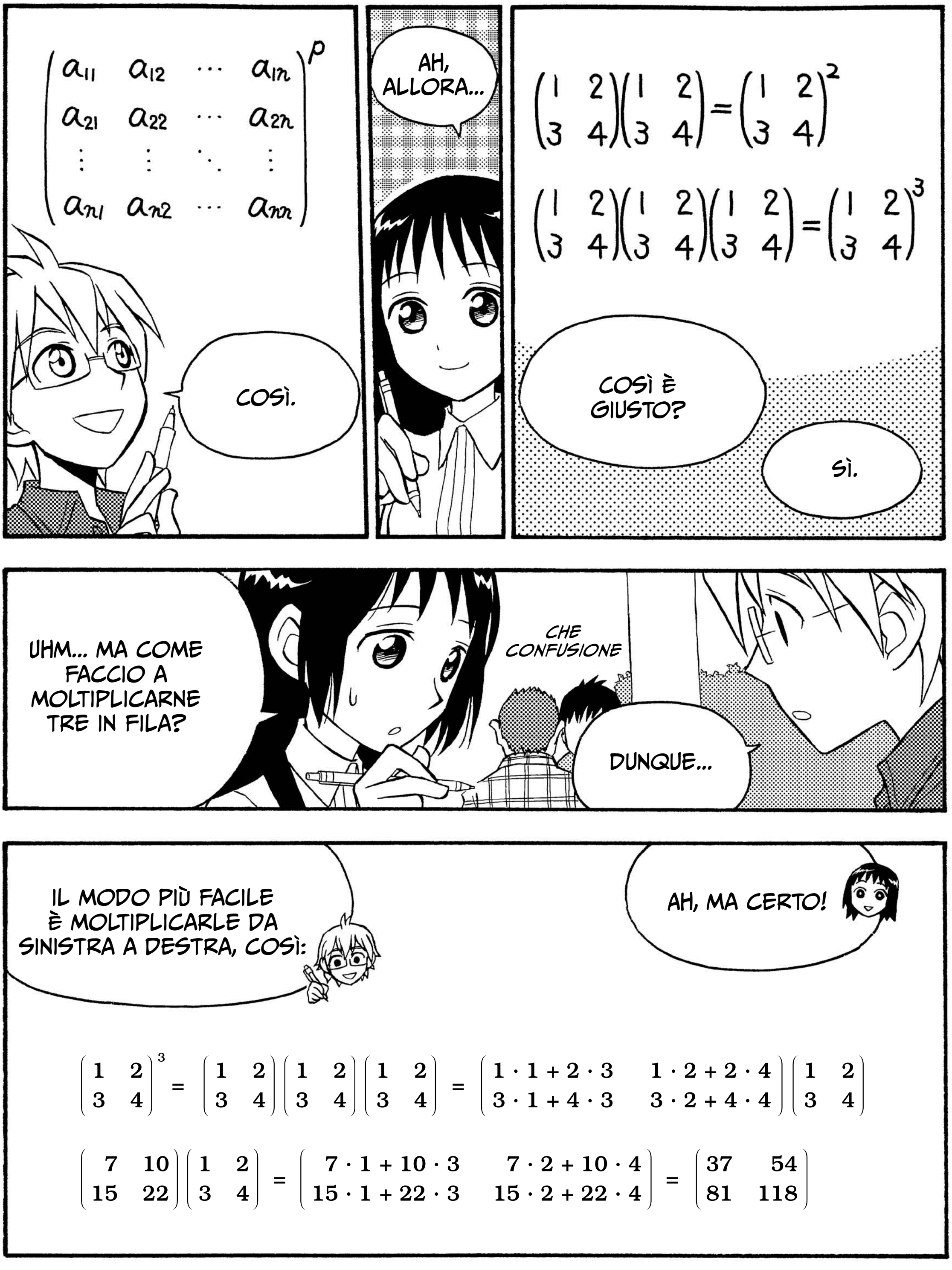
$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ SI PUÒ SEPARARE IN $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ CHE EQUIVALE A

$\begin{cases} x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot 3 + \boxed{?} \cdot 5 \\ x_2 \cdot 1 + y_2 \cdot 3 + \boxed{?} \cdot 5 \end{cases}$ E $\begin{cases} x_1 \cdot 2 + y_1 \cdot 4 + \boxed{?} \cdot 6 \\ x_2 \cdot 2 + y_2 \cdot 4 + \boxed{?} \cdot 6 \end{cases}$ NELLA STESSA MATRICE.

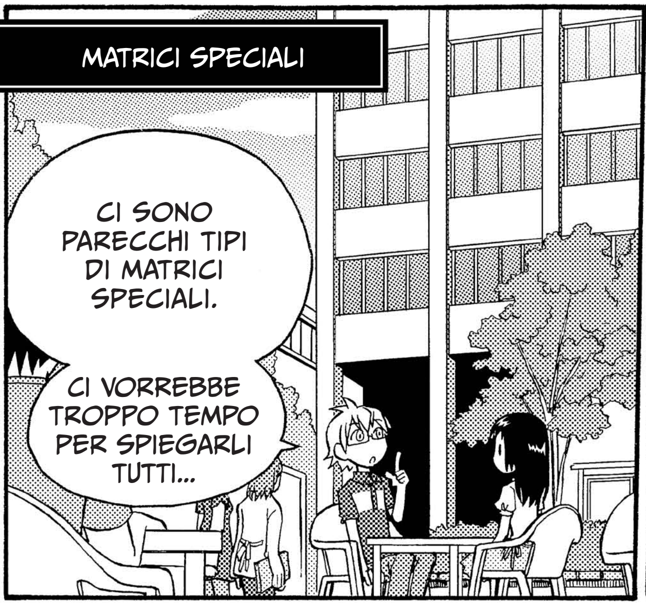
QUI ABBIAMO UN PROBLEMA: NESSUN ELEMENTO CORRISPONDE A QUESTE POSIZIONI!

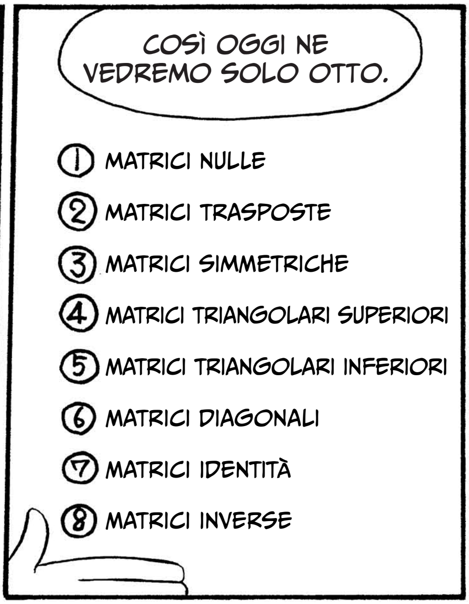
UN'ULTIMA COSA. È POSSIBILE USARE GLI ESPONENTI PER INDICARE LA MOLTIPLICAZIONE RIPETUTA DI MATRICI QUADRATE.

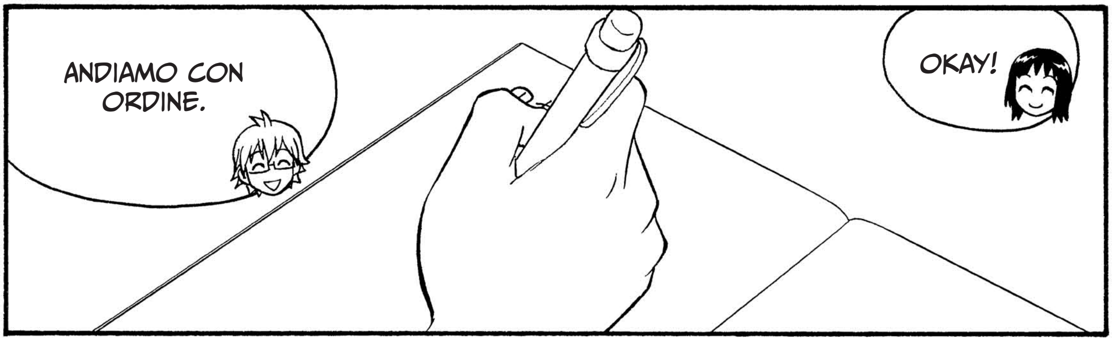
$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{p \text{ FATTORI}}$$


$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^p$
COSÌ.
AH, ALLORA...
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3$
COSÌ È GIUSTO?
SÌ.
UHM... MA COME FACCIO A MOLTIPLICARNE TRE IN FILA?
CHE CONFUSIONE
DUNQUE...
IL MODO PIÙ FACILE È MOLTIPLICARLE DA SINISTRA A DESTRA, COSÌ:
AH, MA CERTO!
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 10 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 10 \cdot 4 \\ 15 \cdot 1 + 22 \cdot 3 & 15 \cdot 2 + 22 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$

MATRICI SPECIALI







❶ MATRICI NULLE

Una matrice nulla è una matrice in cui tutti gli elementi sono uguali a zero.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

❷ MATRICI TRASPOSTE

Le matrici trasposte sono più facili da capire con un esempio concreto.

Se trasponiamo la matrice 2×3 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

otteniamo la matrice 3×2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Come si vede, l'operatore di trasposizione scambia le righe
e le colonne della matrice.

La trasposta della matrice $m \times n$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

è quindi $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

La maniera più comune di indicare le matrici trasposte è di aggiungere
una piccola *T* nell'angolo superiore destro della matrice.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T$$

Per esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

❸ MATRICI SIMMETRICHE

Le matrici simmetriche sono matrici quadrate simmetriche rispetto alla diagonale principale.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 10 \\ 7 & 9 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Per via di questa caratteristica, la matrice simmetrica è sempre uguale alla propria trasposta.

❹ MATRICI TRIANGOLARI SUPERIORI
❺ MATRICI TRIANGOLARI INFERIORI

Le matrici triangolari sono matrici quadrate in cui gli elementi sopra o sotto la diagonale principale sono tutti nulli.

Ecco una matrice triangolare superiore: tutti gli elementi *sotto* la diagonale principale sono nulli.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ecco una matrice triangolare inferiore: tutti gli elementi *sopra* la diagonale principale sono nulli.

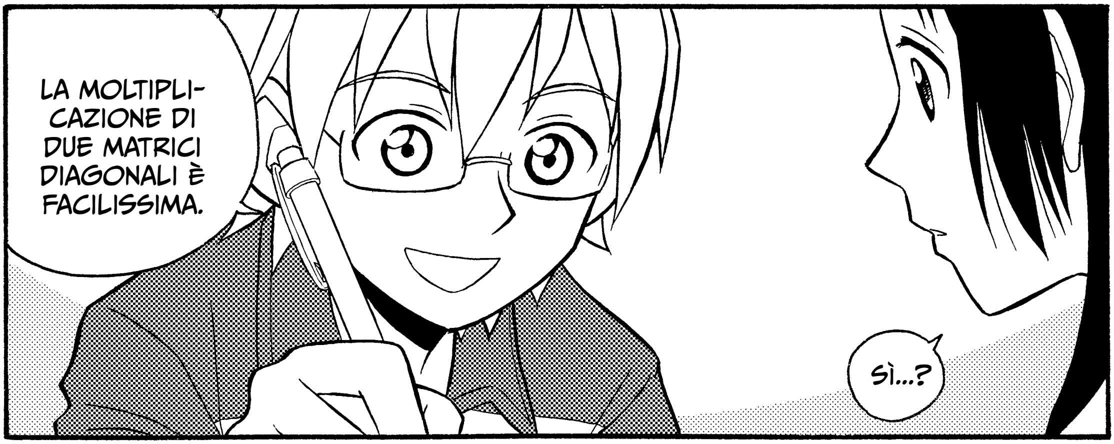
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

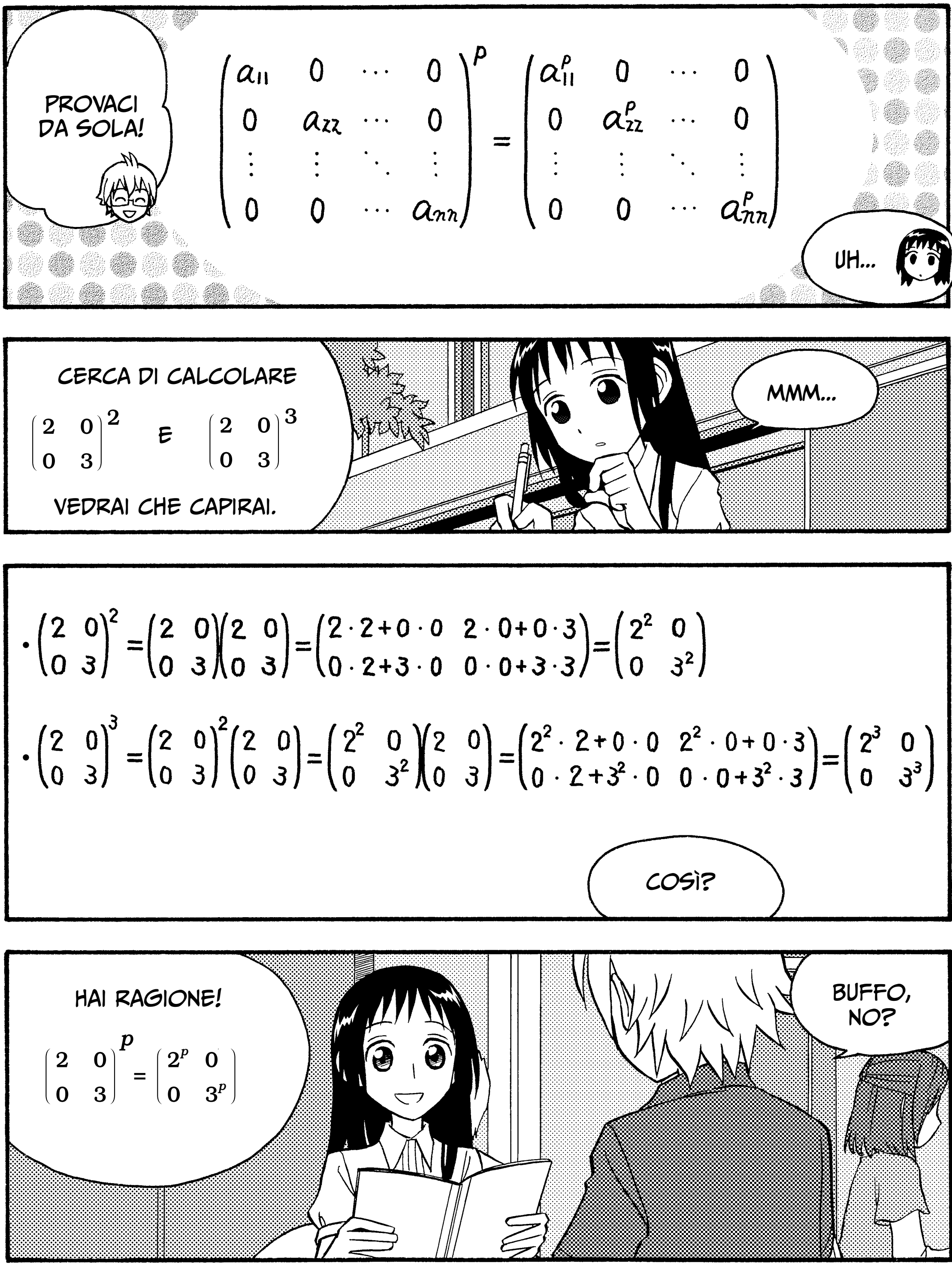
❻ MATRICI DIAGONALI

Le matrici diagonali sono matrici quadrate in cui tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale sono uguali a zero.

Per esempio, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale.

Questa matrice si può anche scrivere come diag(1, 2, 3, 4).



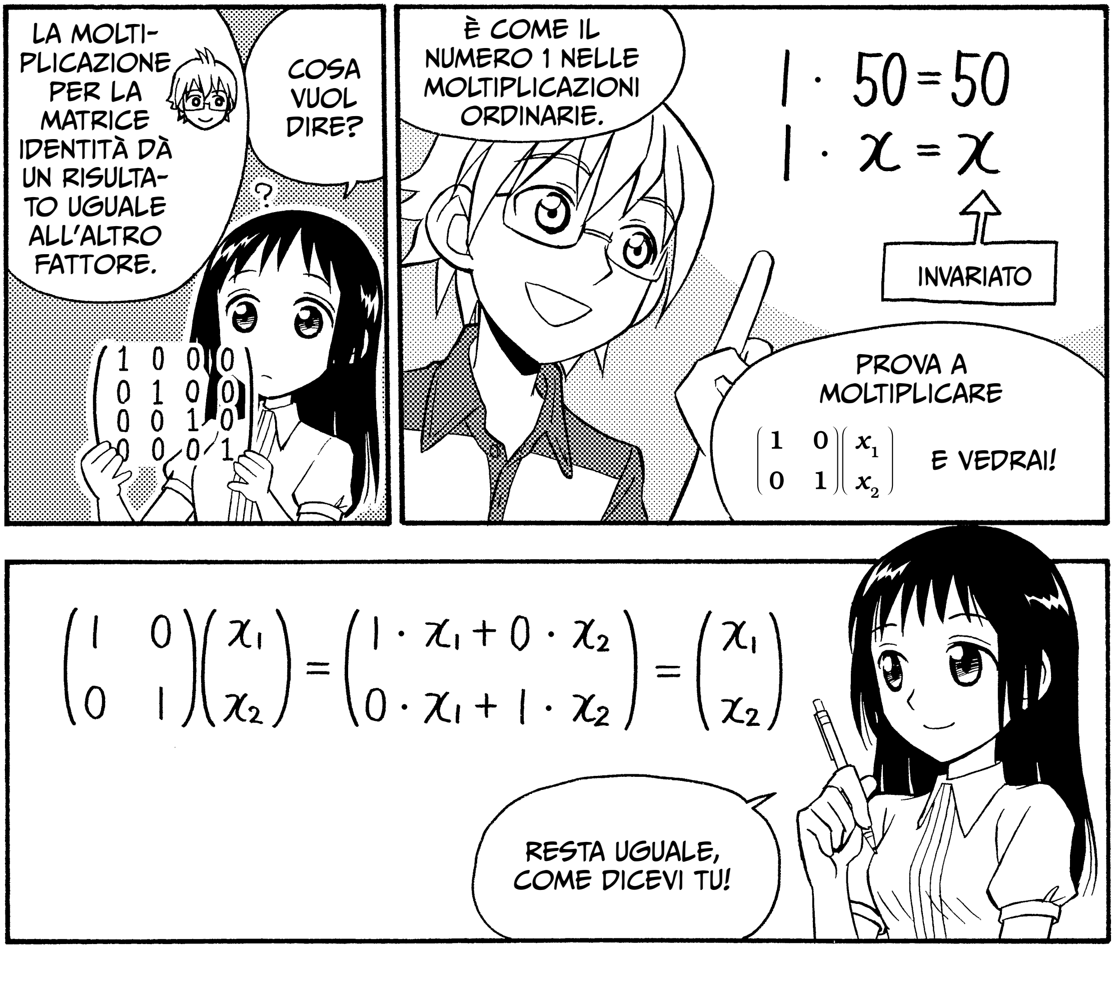

PROVACI DA SOLA!
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_{11}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^p \end{pmatrix}$$
UH...
CERCA DI CALCOLARE $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2$ E $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^3$ VEDRAI CHE CAPIRAI.
MMM...
$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 2^2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 3^2 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 3^2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$
COSÌ?
HAI RAGIONE! $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ 0 & 3^p \end{pmatrix}$
BUFFO, NO?

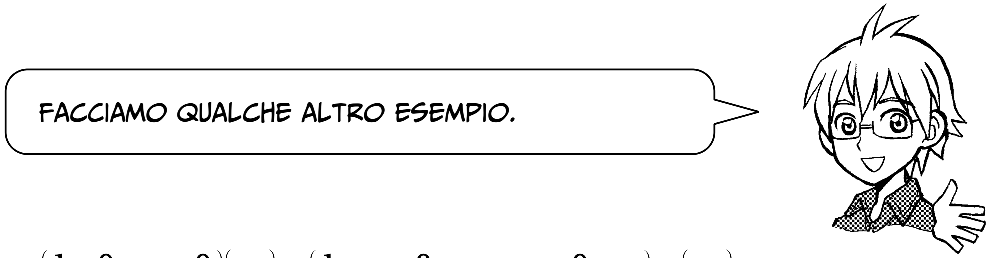
❼ MATRICI IDENTITÀ

Le matrici identità sono essenzialmente diag(1, 1, 1, ... , 1).
In altri termini, sono matrici quadrate con n righe in cui tutti gli elementi della diagonale principale sono pari a 1 e tutti gli altri elementi sono 0.

Per esempio, la matrice identità con n = 4 ha questa forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

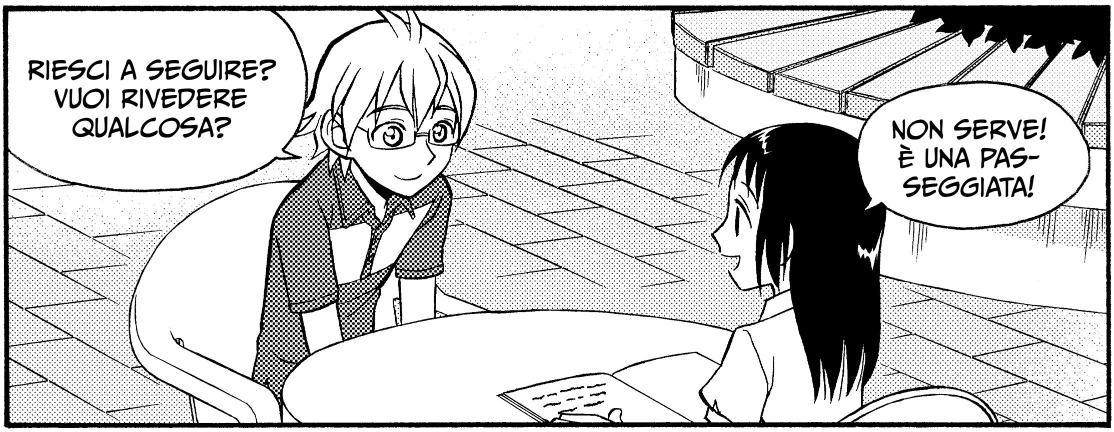




- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

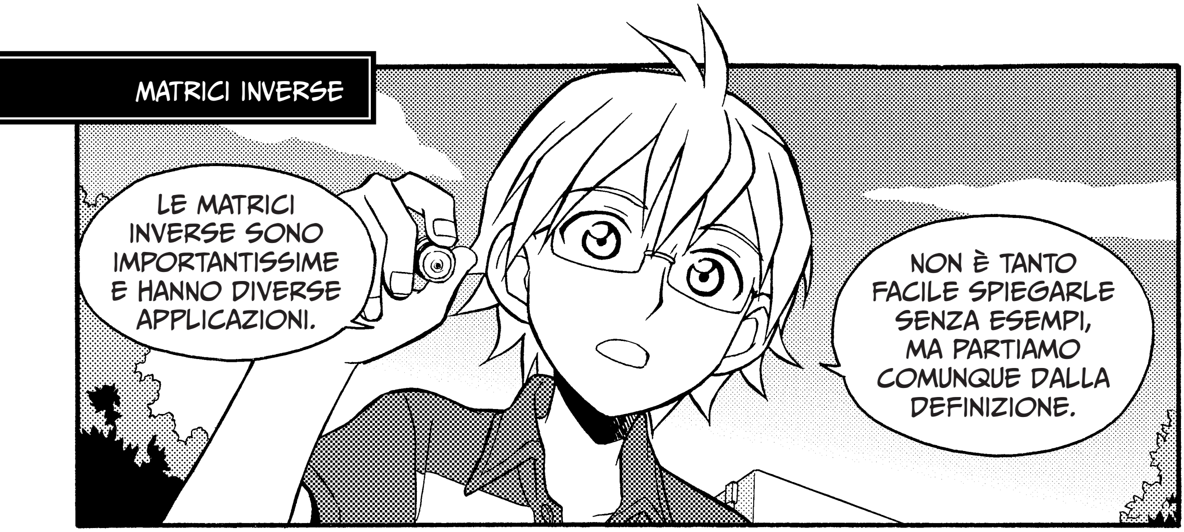
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} & 1 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{22} & \cdots & 1 \cdot x_{n1} + 0 \cdot x_{n2} \\ 0 \cdot x_{11} + 1 \cdot x_{12} & 0 \cdot x_{21} + 1 \cdot x_{22} & \cdots & 0 \cdot x_{n1} + 1 \cdot x_{n2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \cdot 1 + x_{12} \cdot 0 & x_{11} \cdot 0 + x_{12} \cdot 1 \\ x_{21} \cdot 1 + x_{22} \cdot 0 & x_{21} \cdot 0 + x_{22} \cdot 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} \cdot 1 + x_{n2} \cdot 0 & x_{n1} \cdot 0 + x_{n2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{pmatrix}$$




FACCIAMO UNA PAUSA. DOBBIAMO ANCORA VEDERE LE MATRICI INVERSE, MA SONO UN PO' PIÙ COMPLICATE.
PER ME VA BENE.
AH!
GRAZIE ANCORA PER IL PRANZO. NON SAPEVO PROPRIO CHE CUCINASSI COSÌ BENE.
DI NULLA!
SE VUOI TE LO PREPARO ANCHE DOMANI.
NO, NON STAVO CERCANDO DI...
NON PREOCCUPARTI. CUCINARE È ANCORA PIÙ BELLO SE QUALCUNO LO APPREZZA.
SARÀ UN PIACERE.
GR-GRAZIE...
ALLORA? PRONTA PER ALTRE MATRICI?
CERTO.

4
ANCORA MATRICI

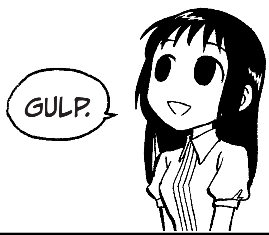


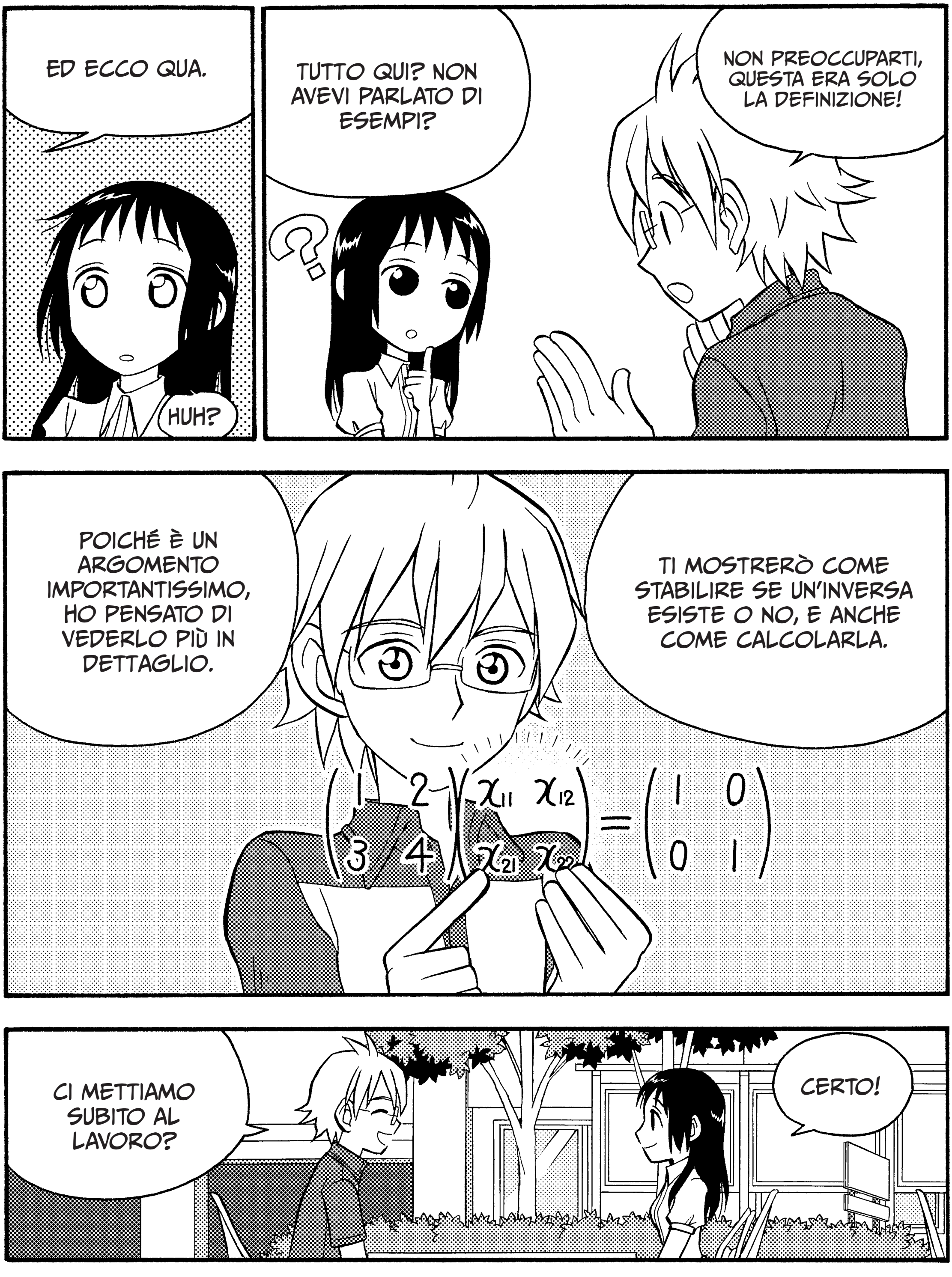
❽ MATRICI INVERSE

Se il prodotto di due matrici quadrate è la matrice identità, le due matrici fattori sono una *inversa* dell'altra.

Ciò significa che $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ è un'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ se

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$




ED ECCO QUA.
HUH?
TUTTO QUI? NON AVEVI PARLATO DI ESEMPI?
NON PREOCCUPARTI, QUESTA ERA SOLO LA DEFINIZIONE!
POICHÉ È UN ARGOMENTO IMPORTANTISSIMO, HO PENSATO DI VEDERLO PIÙ IN DETTAGLIO.
TI MOSTRERÒ COME STABILIRE SE UN'INVERSA ESISTE O NO, E ANCHE COME CALCOLARLA.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
CI METTIAMO SUBITO AL LAVORO?
CERTO!

*IL TERMINE GIAPPONESE PER L'ELIMINAZIONE GAUSSIANA È *HAKIDASHIHOU*, CHE SIGNIFICA PIÙ O MENO "IL METODO DELLA SPAZZATA". TENETELO PRESENTE NELLA LETTURA DI QUESTO CAPITOLO!

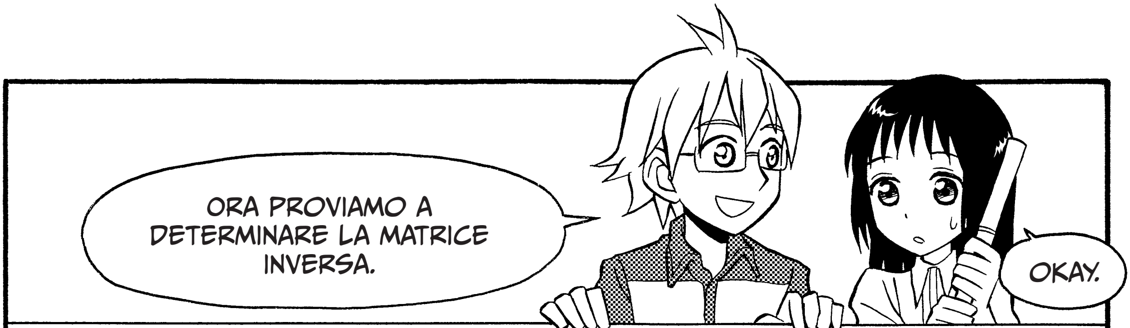
PROBLEMA

Risolvete il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

METODO ABITUALE	METODO ABITUALE IN FORMA MATRICIALE	ELIMINAZIONE GAUSSIANA
$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ **Iniziamo moltiplicando per 2 l'equazione in alto.**	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 2 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ **Sottraiamo l'equazione in basso da quella in alto.**	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 5x_1 + 0x_2 = 2 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ **Moltiplichiamo l'equazione in basso per 5.**	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 5x_1 + 0x_2 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 = 0 \end{cases}$ **Sottraiamo l'equazione in alto da quella in basso.**	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 5x_1 + 0x_2 = 2 \\ 0x_1 + 10x_2 = -2 \end{cases}$ **Dividiamo l'equazione in alto per 5 e quella in basso per 10.**	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & -2 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 = \frac{2}{5} \\ 0x_1 + 1x_2 = -\frac{1}{5} \end{cases}$ **Abbiamo finito!**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$



PROBLEMA

Trovare l'inversa della matrice 2×2 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Stiamo cercando l'inversa di $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

↓

Ci serve la matrice $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ **che soddisfa** $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

↓

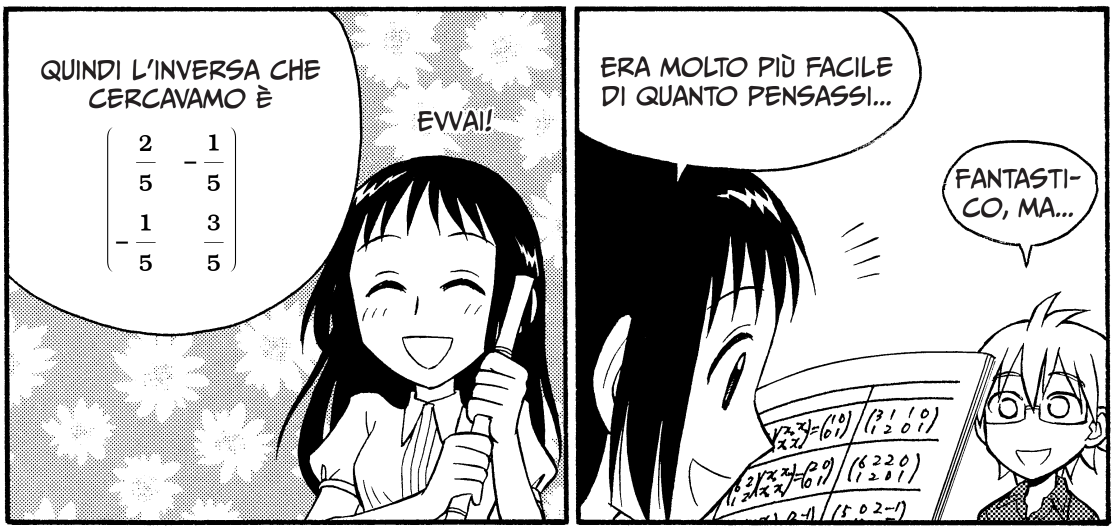
Cioè $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}$ **e** $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ **che soddisfano** $\begin{cases} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

↓

Dobbiamo risolvere i sistemi $\begin{cases} 3x_{11} + 1x_{21} = 1 \\ 1x_{11} + 2x_{21} = 0 \end{cases}$ **e** $\begin{cases} 3x_{12} + 1x_{22} = 0 \\ 1x_{12} + 2x_{22} = 1 \end{cases}$

SOLUZIONE

METODO ABITUALE	METODO ABITUALE IN FORMA MATRICIALE	ELIMINAZIONE GAUSSIANA
$\begin{cases} 3x_{11} + 1x_{21} = 1 \\ 1x_{11} + 2x_{21} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_{12} + 1x_{22} = 0 \\ 1x_{12} + 2x_{22} = 1 \end{cases}$ **Moltiplichiamo l'equazione qui sopra per 2.**	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 6x_{11} + 2x_{21} = 2 \\ 1x_{11} + 2x_{21} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 1x_{12} + 2x_{22} = 1 \end{cases}$ **Sottraiamo l'equazione in basso da quella in alto.**	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 5x_{11} + 0x_{21} = 2 \\ 1x_{11} + 2x_{21} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_{12} + 0x_{22} = -1 \\ 1x_{12} + 2x_{22} = 1 \end{cases}$ **Moltiplichiamo per 5 l'equazione in basso.**	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 5x_{11} + 0x_{21} = 2 \\ 5x_{11} + 10x_{21} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_{12} + 0x_{22} = -1 \\ 5x_{12} + 10x_{22} = 5 \end{cases}$ **Sottraiamo l'equazione in alto da quella in basso.**	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 5x_{11} + 0x_{21} = 2 \\ 0x_{11} + 10x_{21} = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_{12} + 0x_{22} = -1 \\ 0x_{12} + 10x_{22} = 6 \end{cases}$ **Dividiamo l'equazione in alto per 5 e quella in basso per 10.**	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & -2 & 6 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} 1x_{11} + 0x_{21} = \frac{2}{5} \\ 0x_{11} + 1x_{21} = -\frac{1}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} 1x_{12} + 0x_{22} = -\frac{1}{5} \\ 0x_{12} + 1x_{22} = \frac{3}{5} \end{cases}$ **Abbiamo finito: questa è la matrice inversa.**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

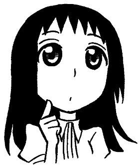


Il prodotto della matrice originaria e della matrice inversa è

- $$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) & 3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 1 \cdot \frac{3}{5} \\ 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) & 1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 2 \cdot \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il prodotto della matrice inversa e della matrice originaria è

- $$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \cdot 3 + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 1 & \frac{2}{5} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 2 \\ \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 3 + \frac{3}{5} \cdot 1 & \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



A PROPOSITO...

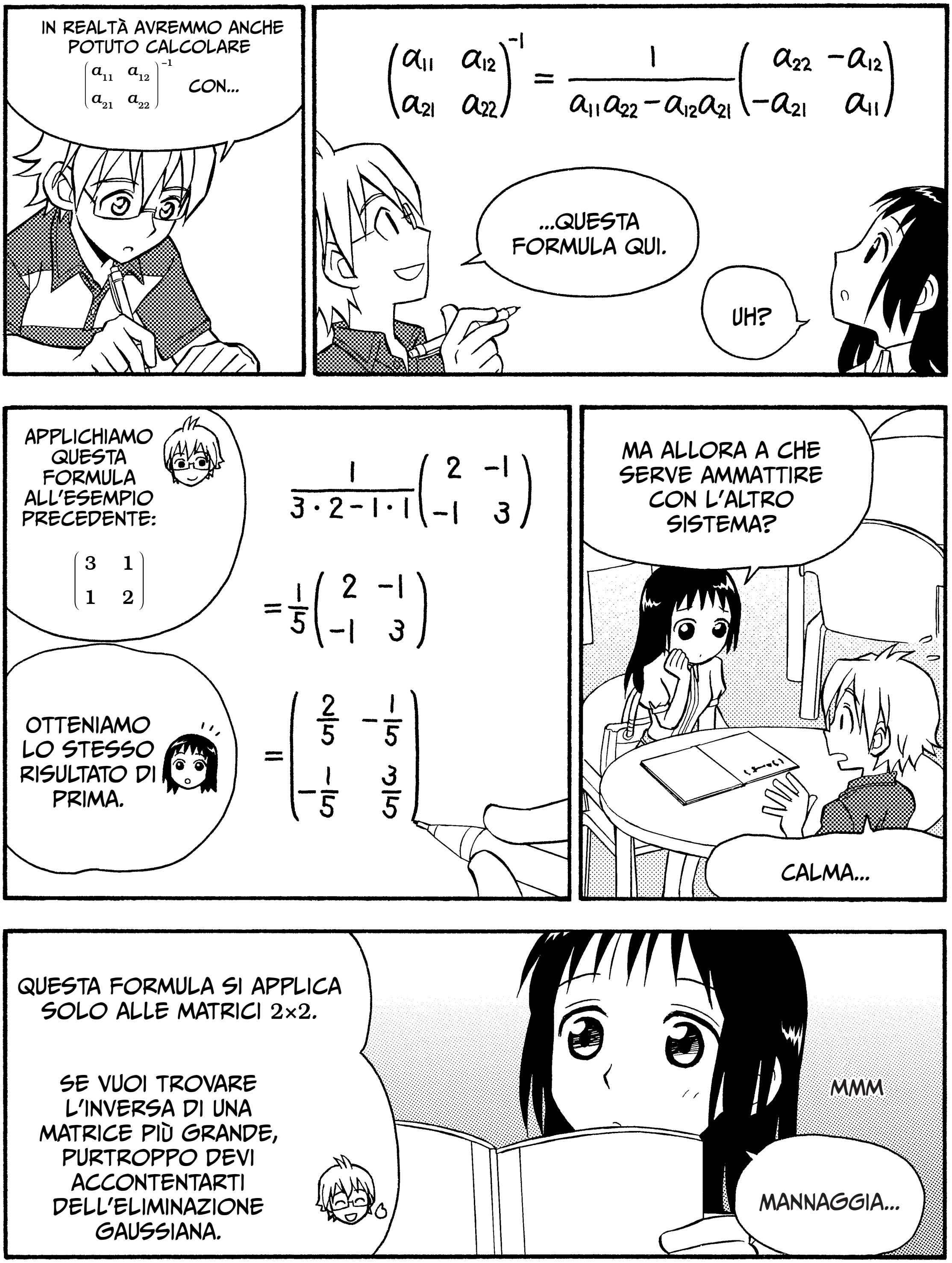
IL SIMBOLO USATO PER INDICARE LE MATRICI INVERSE È LO STESSO CHE DENOTA OGNI INVERSO IN MATEMATICA, QUINDI...

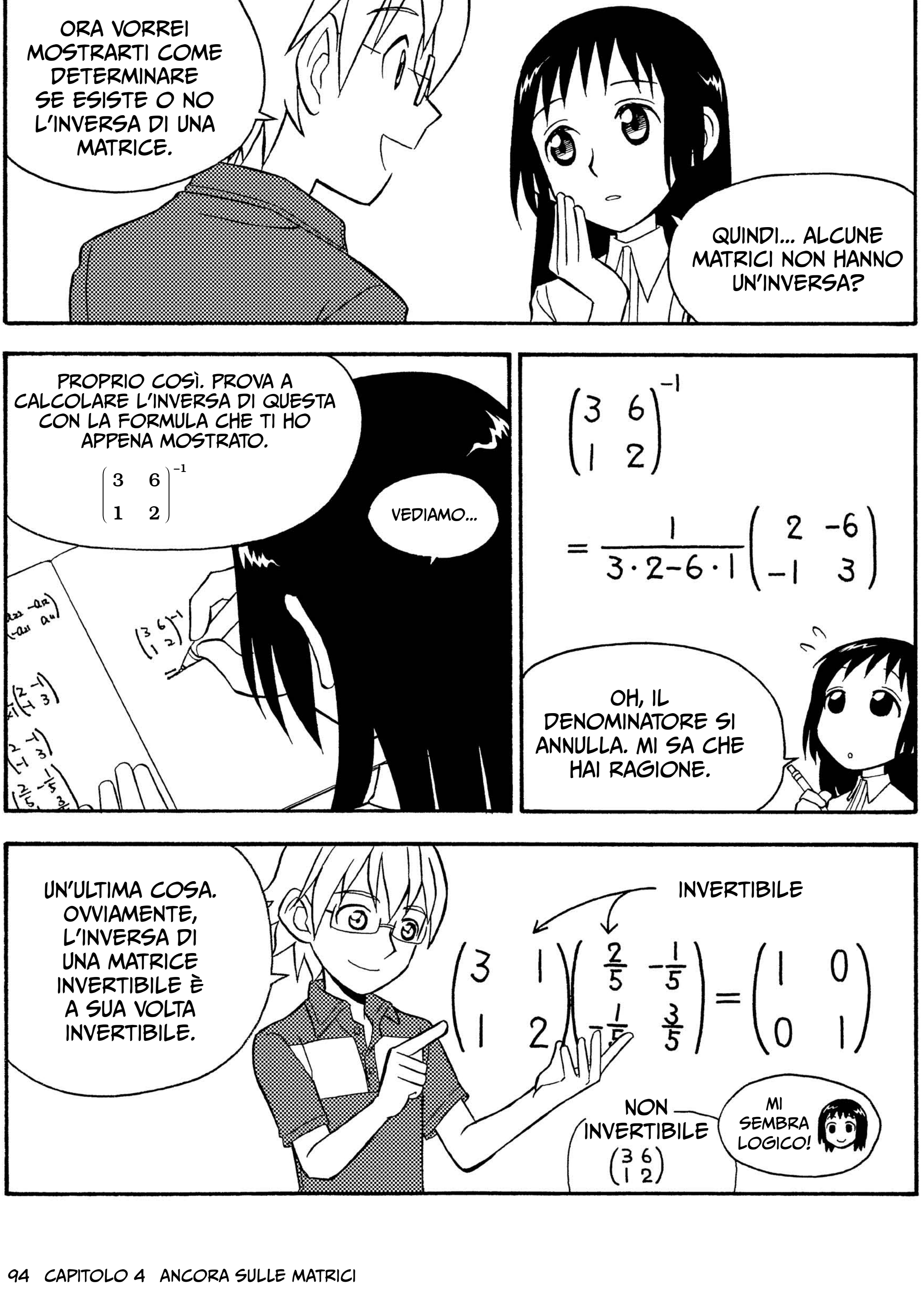
L' INVERSA DI

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

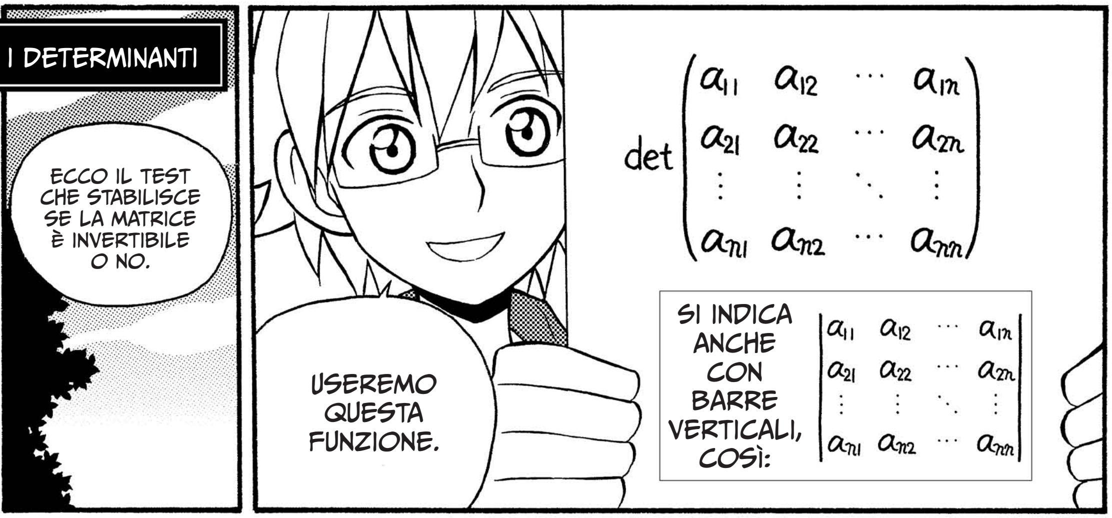
SI SCRIVE COSÌ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1}$$


IN REALTÀ AVREMMO ANCHE POTUTO CALCOLARE $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}$ CON...
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$
...QUESTA FORMULA QUI.
UH?
APPLICHIAMO QUESTA FORMULA ALL'ESEMPIO PRECEDENTE:
$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{3 \cdot 2 - 1 \cdot 1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$
OTTENIAMO LO STESSO RISULTATO DI PRIMA.
MA ALLORA A CHE SERVE AMMATTIRE CON L'ALTRO SISTEMA?
CALMA...
QUESTA FORMULA SI APPLICA SOLO ALLE MATRICI 2×2.
SE VUOI TROVARE L'INVERSA DI UNA MATRICE PIÙ GRANDE, PURTROPPO DEVI ACCONTENTARTI DELL'ELIMINAZIONE GAUSSIANA.
MMM
MANNAGGIA...

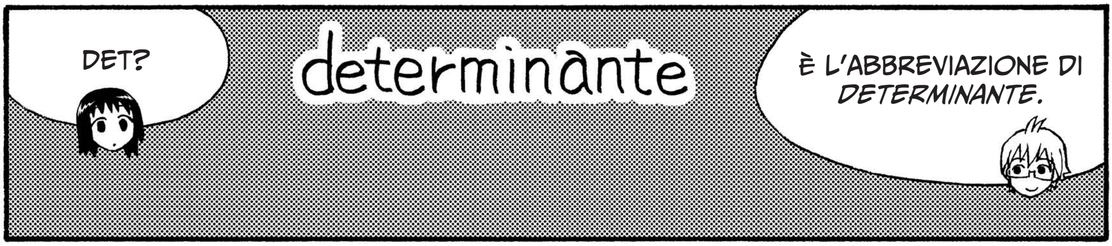

ORA VORREI MOSTRARTI COME DETERMINARE SE ESISTE O NO L'INVERSA DI UNA MATRICE.
QUINDI... ALCUNE MATRICI NON HANNO UN'INVERSA?
PROPRIO COSÌ. PROVA A CALCOLARE L'INVERSA DI QUESTA CON LA FORMULA CHE TI HO APPENA MOSTRATO.
$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$
VEDIAMO...
$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 2 - 6 \cdot 1}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
OH, IL DENOMINATORE SI ANNULLA. MI SA CHE HAI RAGIONE.
UN'ULTIMA COSA. OVVIAMENTE, L'INVERSA DI UNA MATRICE INVERTIBILE È A SUA VOLTA INVERTIBILE.
INVERTIBILE
$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
NON INVERTIBILE
$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
MI SEMBRA LOGICO!

I DETERMINANTI



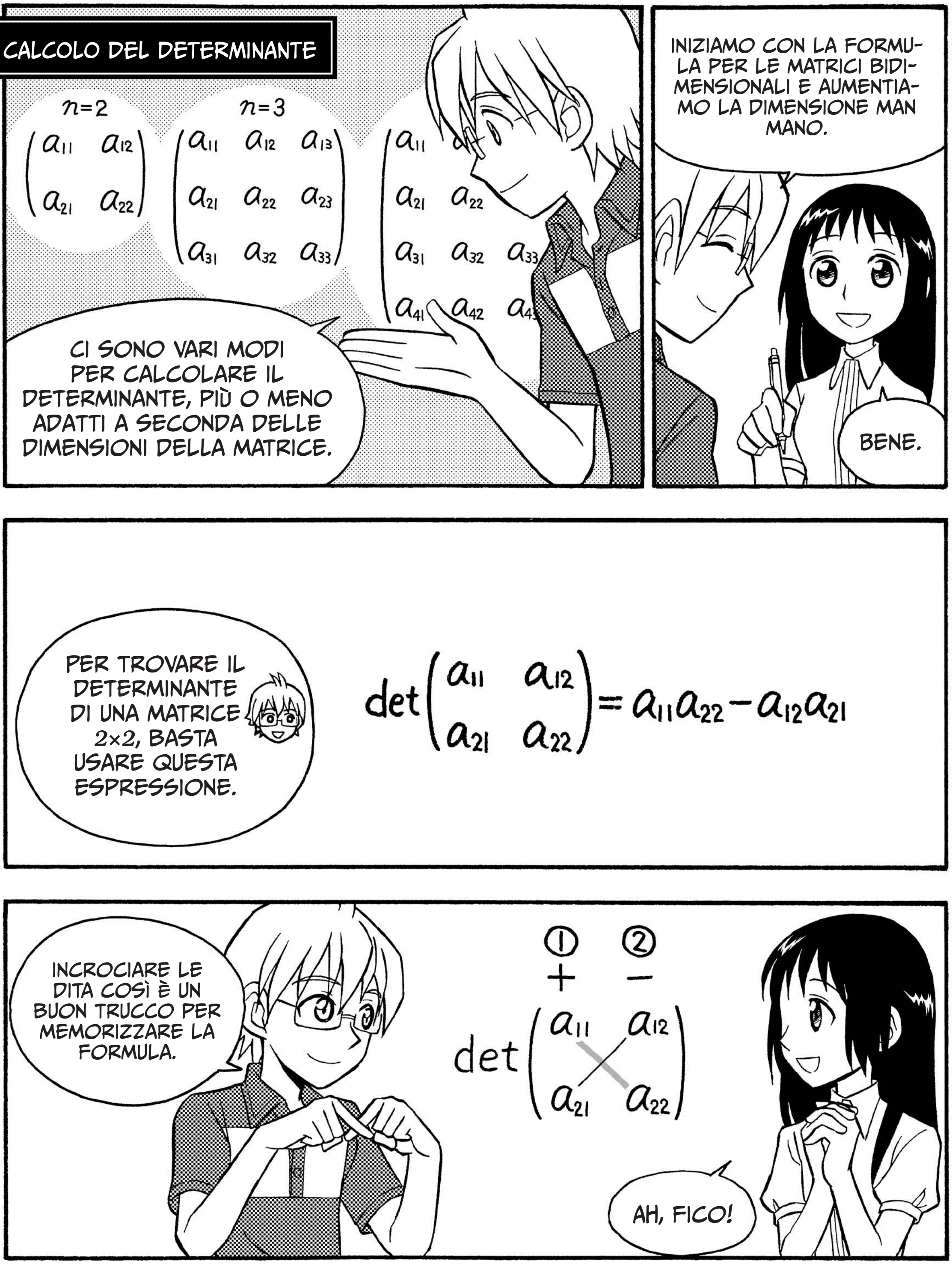
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

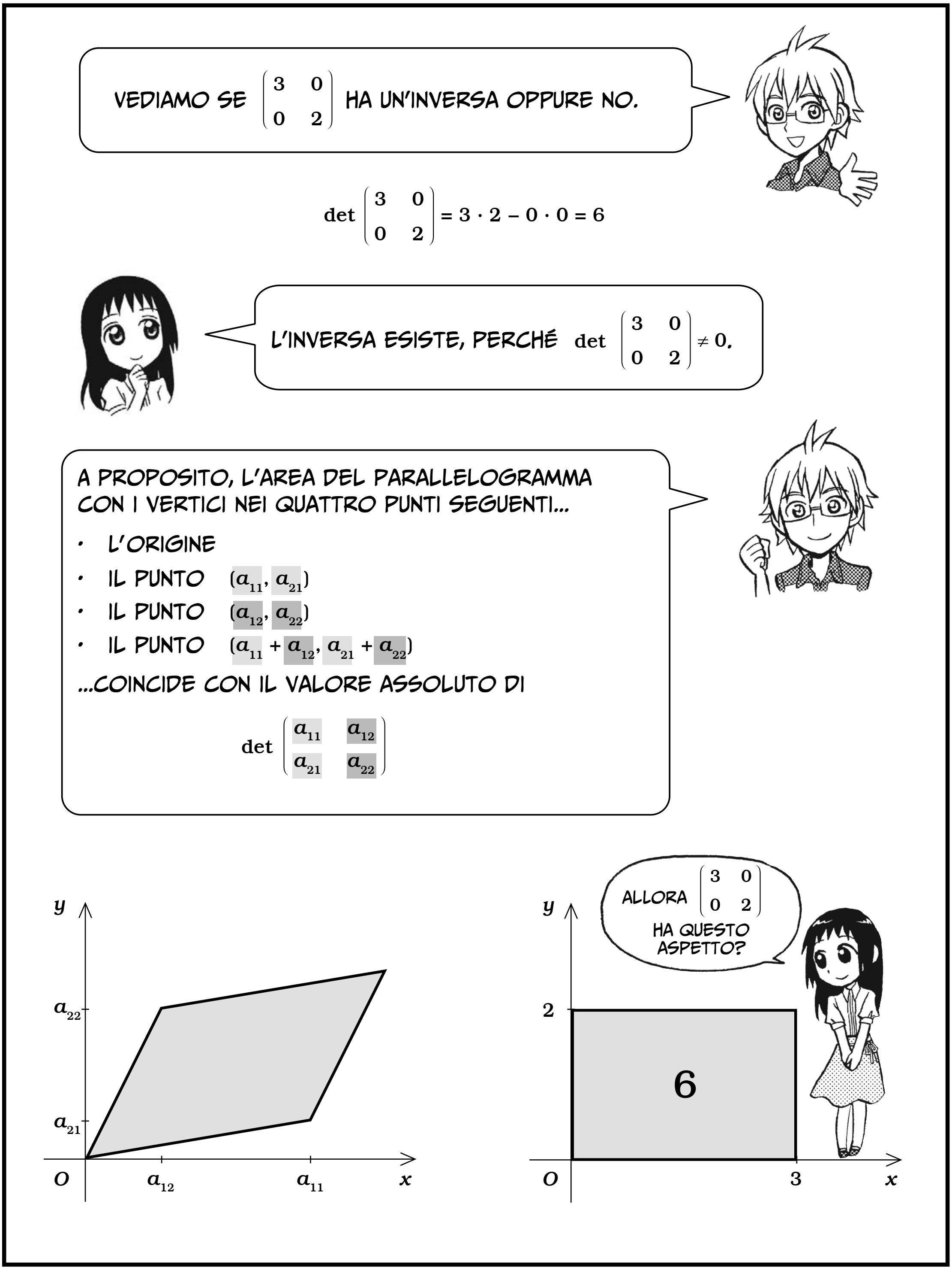
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



ESISTE L'INVERSA DI UNA MATRICE DATA?

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{significa che} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{esiste.}$$


CALCOLO DEL DETERMINANTE
$n=2$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
$n=3$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
CI SONO VARI MODI PER CALCOLARE IL DETERMINANTE, PIÙ O MENO ADATTI A SECONDA DELLE DIMENSIONI DELLA MATRICE.
INIZIAMO CON LA FORMULA PER LE MATRICI BIDIMENSIONALI E AUMENTIAMO LA DIMENSIONE MAN MANO.
BENE.
PER TROVARE IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE 2×2, BASTA USARE QUESTA ESPRESSIONE.
$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
INCROCIARE LE DITA COSÌ È UN BUON TRUCCO PER MEMORIZZARE LA FORMULA.
① + ② −
$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
AH, FICO!


VEDIAMO SE $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ HA UN'INVERSA OPPURE NO.
$\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 6$
L'INVERSA ESISTE, PERCHÉ $\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$.
A PROPOSITO, L'AREA DEL PARALLELOGRAMMA CON I VERTICI NEI QUATTRO PUNTI SEGUENTI...
• L'ORIGINE
• IL PUNTO (a_{11}, a_{21})
• IL PUNTO (a_{12}, a_{22})
• IL PUNTO $(a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22})$
...COINCIDE CON IL VALORE ASSOLUTO DI
$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
y
a_{22}
a_{21}
O
a_{12}
a_{11}
x
ALLORA $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ HA QUESTO ASPETTO?
y
2
6
O
3
x

PER TROVARE IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE 3×3 BASTA USARE LA FORMULA SEGUENTE.

QUALCUNO LA CHIAMA *REGOLA DI SARRUS.*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

REGOLA DI SARRUS

Scrivete la matrice, poi ripetete le prime due colonne dopo la terza, ottenendo in totale cinque colonne. Sommate i prodotti delle diagonali che scendono verso destra (indicate dalle linee continue) e sottraete i prodotti delle diagonali che scendono verso sinistra (indicate dalle linee tratteggiate). Questo sistema ricrea la regola di Sarrus, ed è molto più facile da ricordare!

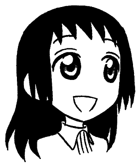
$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

VEDIAMO SE $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ HA UN'INVERSA.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot (-2) - 0 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot 0$$

$$= 3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$$

$$= 3$$



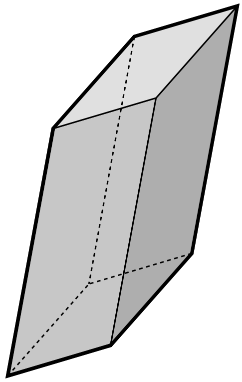
$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$ PERCIÒ ANCHE QUESTA HA UN'INVERSA!

E DI NUOVO, IL VOLUME DEL PARALLELEPIPEDO* CON I VERTICI NEGLI OTTO PUNTI SEGUENTI...

- L'ORIGINE
- IL PUNTO (a_{11}, a_{21}, a_{31})
- IL PUNTO (a_{12}, a_{22}, a_{32})
- IL PUNTO (a_{13}, a_{23}, a_{33})
- IL PUNTO $(a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22}, a_{31} + a_{32})$
- IL PUNTO $(a_{11} + a_{13}, a_{21} + a_{23}, a_{31} + a_{33})$
- IL PUNTO $(a_{12} + a_{13}, a_{22} + a_{23}, a_{32} + a_{33})$
- IL PUNTO $(a_{11} + a_{12} + a_{13}, a_{21} + a_{22} + a_{23}, a_{31} + a_{32} + a_{33})$

...COINCIDE CON IL VALORE ASSOLUTO DI

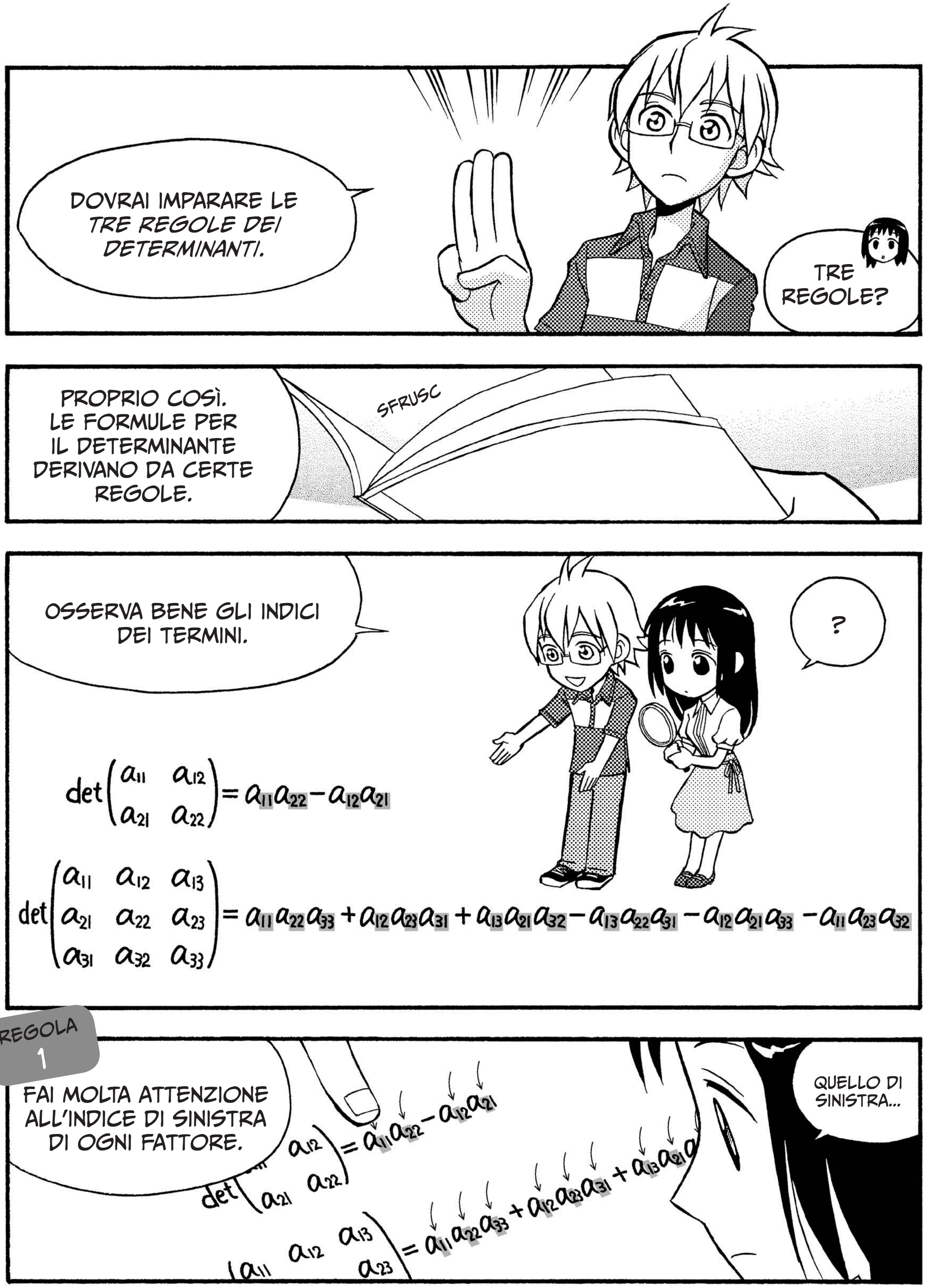
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

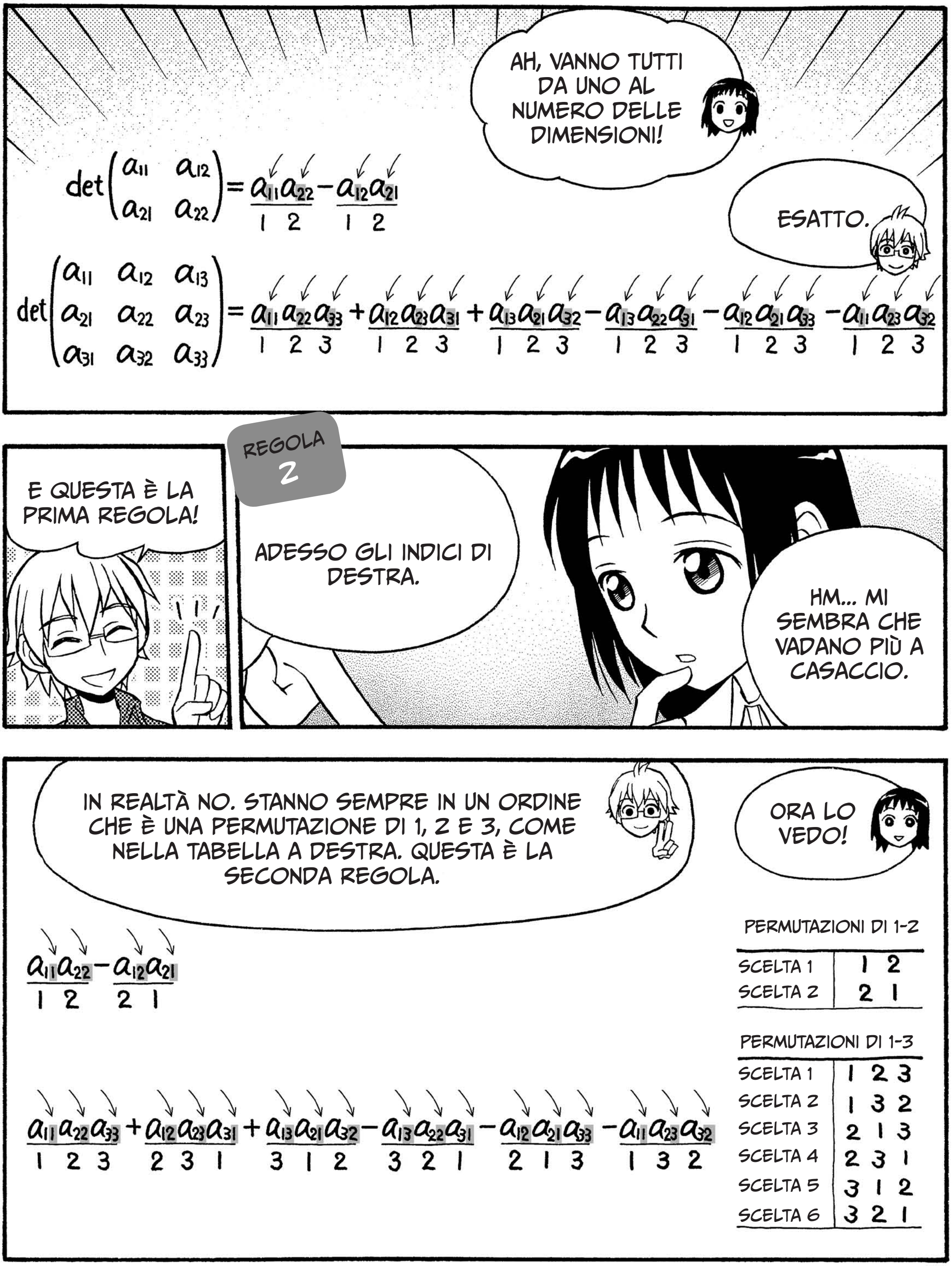


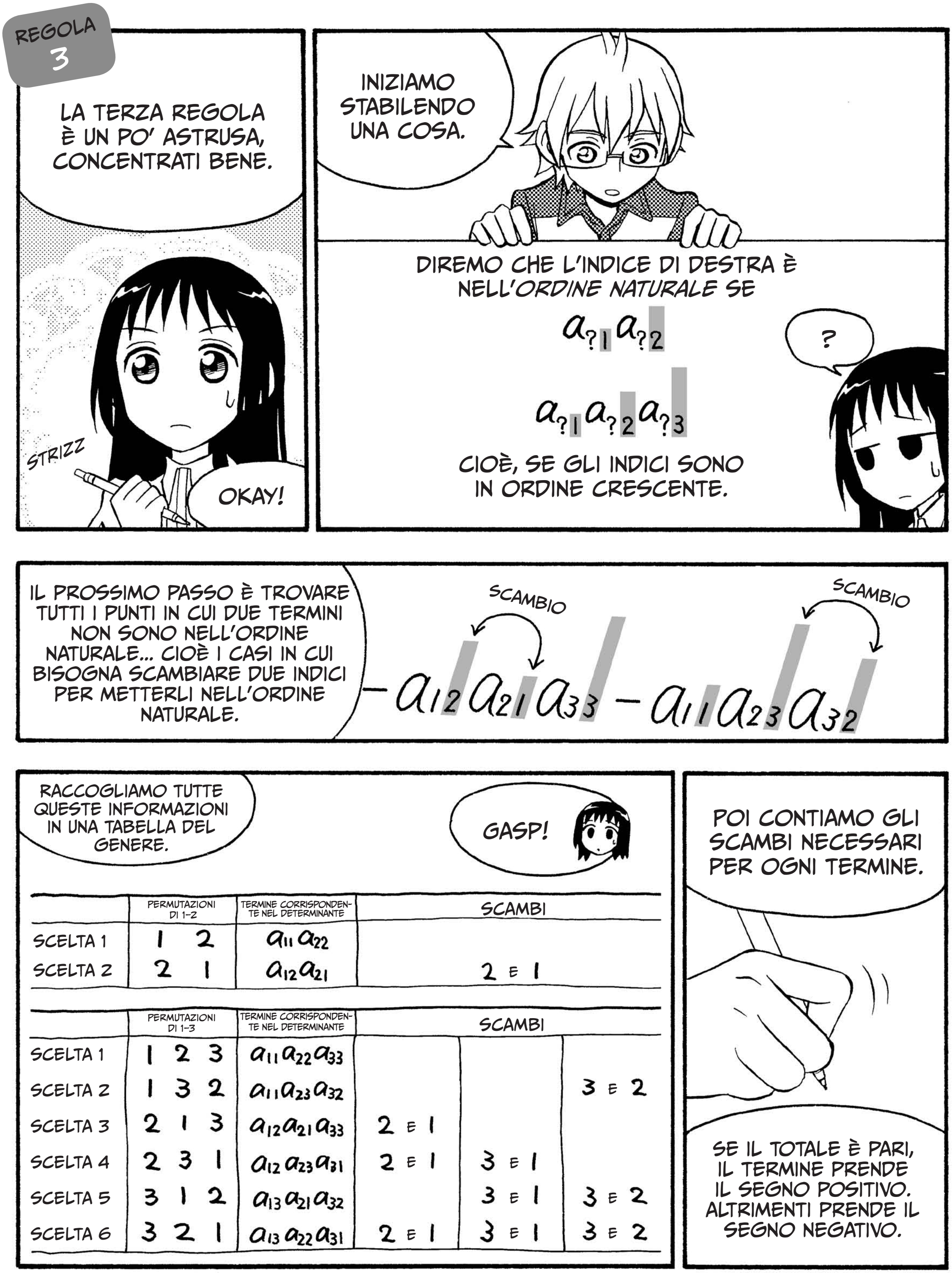
LE FACCE OPPOSTE SONO PARALLELE E HANNO LA STESSA AREA.

*IL *PARALLELEPIPEDO* È LA FIGURA TRIDIMENSIONALE DELIMITATA DA SEI PARALLELOGRAMMI.


IMMAGINO CHE ORA VENGANO LE MATRICI 4×4...
ESATTO.
IH IH
ALTRA ROBA DEL GENERE?
PURTROPPO NO... LA DURA VERITÀ È CHE LE FORMULE DI CALCOLO DEL DETERMINANTE SI COMPLICANO MOLTO IN QUATTRO DIMENSIONI E OLTRE.
NIENTE AFFATTO!
MA ALLORA COME SI FA?
?
PER RIUSCIRCI...


DOVRAI IMPARARE LE *TRE REGOLE DEI DETERMINANTI*.
TRE REGOLE?
PROPRIO COSÌ. LE FORMULE PER IL DETERMINANTE DERIVANO DA CERTE REGOLE.
SFRUSC
OSSERVA BENE GLI INDICI DEI TERMINI.
?
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
REGOLA 1
FAI MOLTA ATTENZIONE ALL'INDICE DI SINISTRA DI OGNI FATTORE.
QUELLO DI SINISTRA...


AH, VANNO TUTTI DA UNO AL NUMERO DELLE DIMENSIONI!
ESATTO.
$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \underset{1\ 2}{a_{11}a_{22}} - \underset{1\ 2}{a_{12}a_{21}}$
$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underset{1\ 2\ 3}{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underset{1\ 2\ 3}{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underset{1\ 2\ 3}{a_{13}a_{21}a_{32}} - \underset{1\ 2\ 3}{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underset{1\ 2\ 3}{a_{12}a_{21}a_{33}} - \underset{1\ 2\ 3}{a_{11}a_{23}a_{32}}$
E QUESTA È LA PRIMA REGOLA!
REGOLA 2
ADESSO GLI INDICI DI DESTRA.
HM... MI SEMBRA CHE VADANO PIÙ A CASACCIO.
IN REALTÀ NO. STANNO SEMPRE IN UN ORDINE CHE È UNA PERMUTAZIONE DI 1, 2 E 3, COME NELLA TABELLA A DESTRA. QUESTA È LA SECONDA REGOLA.
ORA LO VEDO!
$\underset{1\ 2}{a_{11}a_{22}} - \underset{2\ 1}{a_{12}a_{21}}$
$\underset{1\ 2\ 3}{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underset{2\ 3\ 1}{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underset{3\ 1\ 2}{a_{13}a_{21}a_{32}} - \underset{3\ 2\ 1}{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underset{2\ 1\ 3}{a_{12}a_{21}a_{33}} - \underset{1\ 3\ 2}{a_{11}a_{23}a_{32}}$
PERMUTAZIONI DI 1-2
SCELTA 1 | 1 2
SCELTA 2 | 2 1
PERMUTAZIONI DI 1-3
SCELTA 1 | 1 2 3
SCELTA 2 | 1 3 2
SCELTA 3 | 2 1 3
SCELTA 4 | 2 3 1
SCELTA 5 | 3 1 2
SCELTA 6 | 3 2 1



	PERMUTAZIONI DI 1–2	TERMINE CORRISPONDENTE NEL DETERMINANTE	SCAMBI
SCELTA 1	1 2	$a_{11}a_{22}$	
SCELTA 2	2 1	$a_{12}a_{21}$	2 E 1

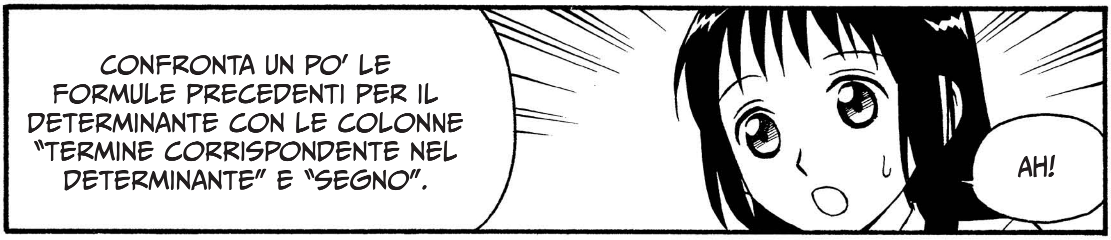
	PERMUTAZIONI DI 1–3	TERMINE CORRISPONDENTE NEL DETERMINANTE	SCAMBI		
SCELTA 1	1 2 3	$a_{11}a_{22}a_{33}$			
SCELTA 2	1 3 2	$a_{11}a_{23}a_{32}$			3 E 2
SCELTA 3	2 1 3	$a_{12}a_{21}a_{33}$	2 E 1		
SCELTA 4	2 3 1	$a_{12}a_{23}a_{31}$	2 E 1	3 E 1	
SCELTA 5	3 1 2	$a_{13}a_{21}a_{32}$		3 E 1	3 E 2
SCELTA 6	3 2 1	$a_{13}a_{22}a_{31}$	2 E 1	3 E 1	3 E 2

	PERMUTAZIONI DI 1–2	TERMINE CORRISPONDENTE NEL DETERMINANTE	SCAMBI	NUMERO DI SCAMBI	SEGNO
SCELTA 1	1 2	$a_{11}a_{22}$		0	+
SCELTA 2	2 1	$a_{12}a_{21}$	2 E 1	1	−

	PERMUTAZIONI DI 1–3	TERMINE CORRISPONDENTE NEL DETERMINANTE	SCAMBI			NUMERO DI SCAMBI	SEGNO
SCELTA 1	1 2 3	$a_{11}a_{22}a_{33}$				0	+
SCELTA 2	1 3 2	$a_{11}a_{23}a_{32}$			3 E 2	1	−
SCELTA 3	2 1 3	$a_{12}a_{21}a_{33}$	2 E 1			1	−
SCELTA 4	2 3 1	$a_{12}a_{23}a_{31}$	2 E 1	3 E 1		2	+
SCELTA 5	3 1 2	$a_{13}a_{21}a_{32}$		3 E 1	3 E 2	2	+
SCELTA 6	3 2 1	$a_{13}a_{22}a_{31}$	2 E 1	3 E 1	3 E 2	3	−

FUNZIONA COSÌ.

HM...



$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

TERMINE CORRISPONDENTE NEL DETERMINANTE	SEGNO
$a_{11}a_{22}$	+
$a_{12}a_{21}$	−

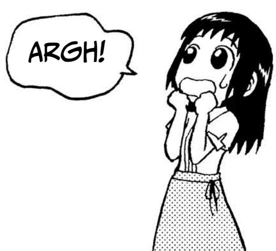
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

TERMINE CORRISPONDENTE NEL DETERMINANTE	SEGNO
$a_{11}a_{22}a_{33}$	+
$a_{11}a_{23}a_{32}$	−
$a_{12}a_{21}a_{33}$	−
$a_{12}a_{23}a_{31}$	+
$a_{13}a_{21}a_{32}$	+
$a_{13}a_{22}a_{31}$	−

WOW, COINCIDONO!

ESATTO, E QUESTA È LA TERZA REGOLA.

	PERMUTAZIONI DI 1-4				TERMINE CORRISPONDENTE NEL DETERMINANTE	SCAMBI						NUM. DI SCAMBI	SEGNO
SCELTA 1	1	2	3	4	$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}$							0	+
SCELTA 2	1	2	4	3	$a_{11}\ a_{22}\ a_{34}\ a_{43}$						4 & 3	1	–
SCELTA 3	1	3	2	4	$a_{11}\ a_{23}\ a_{32}\ a_{44}$			3 & 2				1	–
SCELTA 4	1	3	4	2	$a_{11}\ a_{23}\ a_{34}\ a_{42}$			3 & 2		4 & 2		2	+
SCELTA 5	1	4	2	3	$a_{11}\ a_{24}\ a_{32}\ a_{43}$					4 & 2	4 & 3	2	+
SCELTA 6	1	4	3	2	$a_{11}\ a_{24}\ a_{33}\ a_{42}$			3 & 2		4 & 2	4 & 3	3	–
SCELTA 7	2	1	3	4	$a_{12}\ a_{21}\ a_{33}\ a_{44}$	2 & 1						1	–
SCELTA 8	2	1	4	3	$a_{12}\ a_{21}\ a_{34}\ a_{43}$	2 & 1					4 & 3	2	+
SCELTA 9	2	3	1	4	$a_{12}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{44}$	2 & 1	3 & 1					2	+
SCELTA 10	2	3	4	1	$a_{12}\ a_{23}\ a_{34}\ a_{41}$	2 & 1	3 & 1		4 & 1			3	–
SCELTA 11	2	4	1	3	$a_{12}\ a_{24}\ a_{31}\ a_{43}$	2 & 1			4 & 1		4 & 3	3	–
SCELTA 12	2	4	3	1	$a_{12}\ a_{24}\ a_{33}\ a_{41}$	2 & 1	3 & 1		4 & 1		4 & 3	4	+
SCELTA 13	3	1	2	4	$a_{13}\ a_{21}\ a_{32}\ a_{44}$		3 & 1	3 & 2				2	+
SCELTA 14	3	1	4	2	$a_{13}\ a_{21}\ a_{34}\ a_{42}$		3 & 1	3 & 2		4 & 2		3	–
SCELTA 15	3	2	1	4	$a_{13}\ a_{22}\ a_{31}\ a_{44}$	2 & 1	3 & 1	3 & 2				3	–
SCELTA 16	3	2	4	1	$a_{13}\ a_{22}\ a_{34}\ a_{41}$	2 & 1	3 & 1	3 & 2	4 & 1			4	+
SCELTA 17	3	4	1	2	$a_{13}\ a_{24}\ a_{31}\ a_{42}$		3 & 1	3 & 2	4 & 1	4 & 2		4	+
SCELTA 18	3	4	2	1	$a_{13}\ a_{24}\ a_{32}\ a_{41}$	2 & 1	3 & 1	3 & 2	4 & 1	4 & 2		5	–
SCELTA 19	4	1	2	3	$a_{14}\ a_{21}\ a_{32}\ a_{43}$				4 & 1	4 & 2	4 & 3	3	–
SCELTA 20	4	1	3	2	$a_{14}\ a_{21}\ a_{33}\ a_{42}$			3 & 2	4 & 1	4 & 2	4 & 3	4	+
SCELTA 21	4	2	1	3	$a_{14}\ a_{22}\ a_{31}\ a_{43}$	2 & 1			4 & 1	4 & 2	4 & 3	4	+
SCELTA 22	4	2	3	1	$a_{14}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{41}$	2 & 1	3 & 1		4 & 1	4 & 2	4 & 3	5	–
SCELTA 23	4	3	1	2	$a_{14}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{42}$		3 & 1	3 & 2	4 & 1	4 & 2	4 & 3	5	–
SCELTA 24	4	3	2	1	$a_{14}\ a_{23}\ a_{32}\ a_{41}$	2 & 1	3 & 1	3 & 2	4 & 1	4 & 2	4 & 3	6	+




SE C'È QUESTA ROBA ALL'ESAME, SONO FINITA...
NON PRE-OCCUPARTI, IN GENERE DANNO SOLO PROBLEMI CON LE MATRICI 2×2 E 3×3.
FIUU
LO SPERO PROPRIO...
PENSO CHE PER OGGI BASTA. ABBIAMO VISTO UN SACCO DI COSE NUOVE.
GRAZIE, REIJI. SEI GRANDE!
CERTO CHE IL TEMPO È DAVVERO VOLATO...
...
FORSE POTREI...

LE SERVE UNA BUSTA?
CAVOLO, È TARDISSIMO...
SOCK!
A QUEST'ORA NON DOVREBBE ESSERCI PIÙ NESSUNO.
ガン
SPACK!
ガン
BAM!

CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA TRAMITE I COFATTORI

Come accennato a pagina 88, esistono due metodi pratici per calcolare l'inversa di una matrice data:

- metodo dei cofattori;
- metodo dell'eliminazione gaussiana.

In questo capitolo abbiamo lasciato da parte il metodo dei cofattori, perché richiede molti calcoli macchinosi. Ma visto che molti libri ne parlano, ecco una spiegazione rapida.

Per usare questo metodo occorre prima di tutto introdurre due concetti:

- il minore (i, j), indicato da M_{ij};
- il cofattore (i, j), indicato da C_{ij}.

Quindi prima di tutto, daremo un'occhiata a questi due oggetti.

M_{IJ}

Il minore (*i*, *j*) di una matrice *nxm* è il determinante calcolato dopo l'eliminazione della riga *i* e della colonna *j* della matrice *A*:

$$M_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tutti i minori della matrice 3×3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sono elencati nella pagina seguente.

M_{11} (1, 1) $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$	M_{12} (1, 2) $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 1$	M_{13} (1, 3) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2$
M_{21} (2, 1) $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0$	M_{22} (2, 2) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 3$	M_{23} (2, 3) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 0$
M_{31} (3, 1) $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$	M_{32} (3, 2) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1$	M_{33} (3, 3) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$

C_{ij}

Se moltiplichiamo il minore (i, j) per $(-1)^{i+j}$ otteniamo il cofattore (i, j), solitamente indicato da C_{ij}. La tabella qui sotto riporta tutti i cofattori della matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

C_{11} (1, 1) $= (-1)^{1+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $= 1 \cdot 3$ $= 3$	C_{12} (1, 2) $= (-1)^{1+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $= (-1) \cdot 1$ $= -1$	C_{13} (1, 3) $= (-1)^{1+3} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $= 1 \cdot 2$ $= 2$
C_{21} (2, 1) $= (-1)^{2+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $= (-1) \cdot 0$ $= 0$	C_{22} (2, 2) $= (-1)^{2+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $= 1 \cdot 3$ $= 3$	C_{23} (2, 3) $= (-1)^{2+3} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $= (-1) \cdot 0$ $= 0$
C_{31} (3, 1) $= (-1)^{3+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $= 1 \cdot 0$ $= 0$	C_{32} (3, 2) $= (-1)^{3+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $= (-1) \cdot (-1)$ $= 1$	C_{33} (3, 3) $= (-1)^{3+3} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $= 1 \cdot 1$ $= 1$

La matrice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

che nella posizione (i, j) riporta il cofattore (j, i)* della matrice originale è detta *matrice dei cofattori*.

La somma di una qualsiasi delle righe o delle colonne di questa matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11}C_{11} & a_{21}C_{21} & \cdots & a_{n1}C_{n1} \\ a_{12}C_{12} & a_{22}C_{22} & \cdots & a_{n2}C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}C_{1n} & a_{2n}C_{2n} & \cdots & a_{nn}C_{nn} \end{pmatrix}$$

è pari al determinante della matrice $n \times n$ originaria

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA

Per ottenere l'inversa della matrice si può usare la formula seguente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

*Non si tratta di un errore di stampa: l'ordine degli indici deve essere proprio (j, i). Questa è la trasposta della matrice con i cofattori nelle posizioni che ci si aspetterebbe.

Per esempio, l'inversa della matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

COME USARE IL DETERMINANTE

Il metodo presentato in questo capitolo si limita a definire il determinante e non spiega affatto che utilità abbia. Nelle applicazioni pratiche (per esempio nel trattamento informatico delle immagini), tipicamente, la dimensione del determinante può arrivare all'ordine di $n = 100$; con il metodo dei cofattori i calcoli sarebbero troppo complessi.

Per questo motivo, nel calcolo dei determinanti in genere si comincia semplificandoli con metodi simili all'eliminazione gaussiana, dopodiché si usano le tre proprietà seguenti, ricavabili dalla definizione fornita in questo libro:

- sostituendo una riga (o una colonna) con la somma della riga (o colonna) e del multiplo di un'altra riga (o colonna), il determinante non cambia;
- scambiando due righe (o colonne), il determinante viene moltiplicato per –1;
- il determinante di una matrice triangolare superiore o inferiore è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

Questo sistema è notevolmente più efficace: permette di risolvere in un batter d'occhio determinanti che con i cofattori sarebbero praticamente impossibili da calcolare (anche usando computer moderni).

RISOLUZIONE DEI SISTEMI LINEARI CON LA REGOLA DI CRAMER

L'eliminazione gaussiana, presentata a pagina 89, è solo uno dei tanti metodi utilizzabili nella risoluzione dei sistemi lineari. Benché sia uno dei migliori nei calcoli a mano, è sempre bene conoscere qualche alternativa; per questo, ora vedremo il metodo che sfrutta la *regola di Cramer*.

PROBLEMA

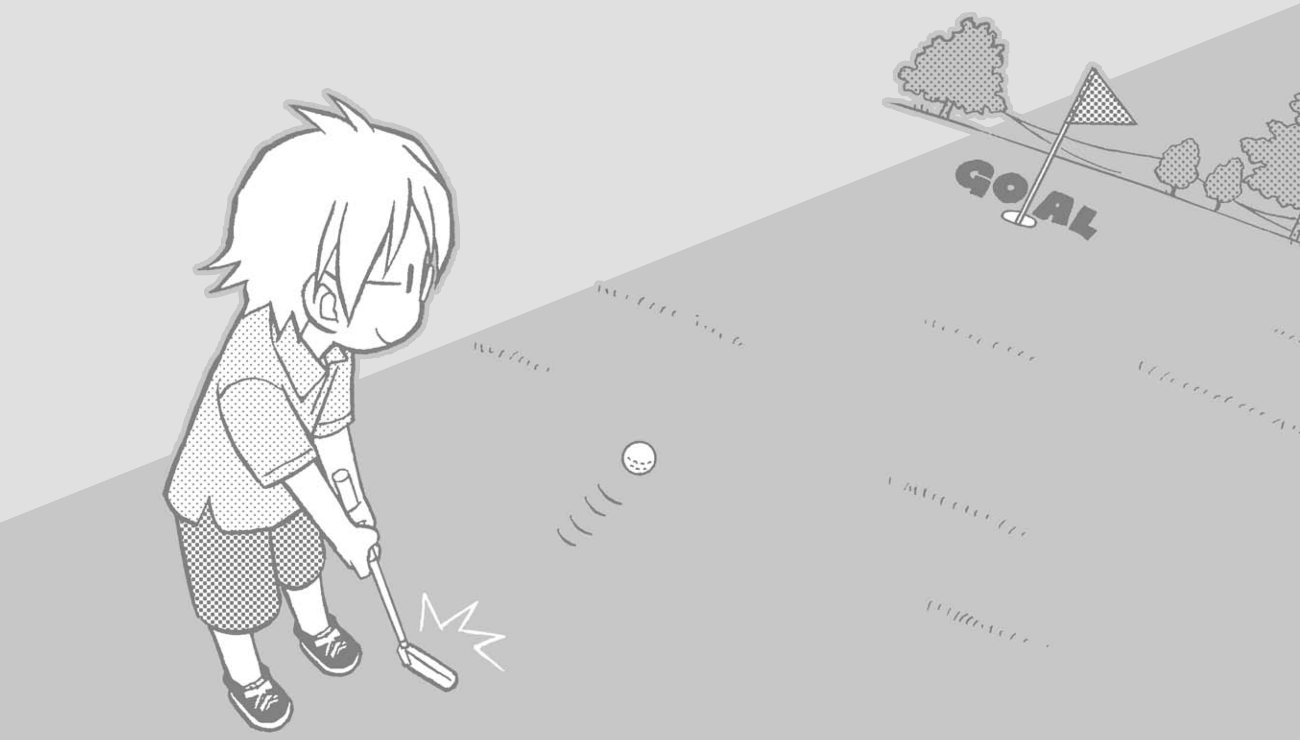
Risolvete il seguente sistema lineare con la regola di Cramer:

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

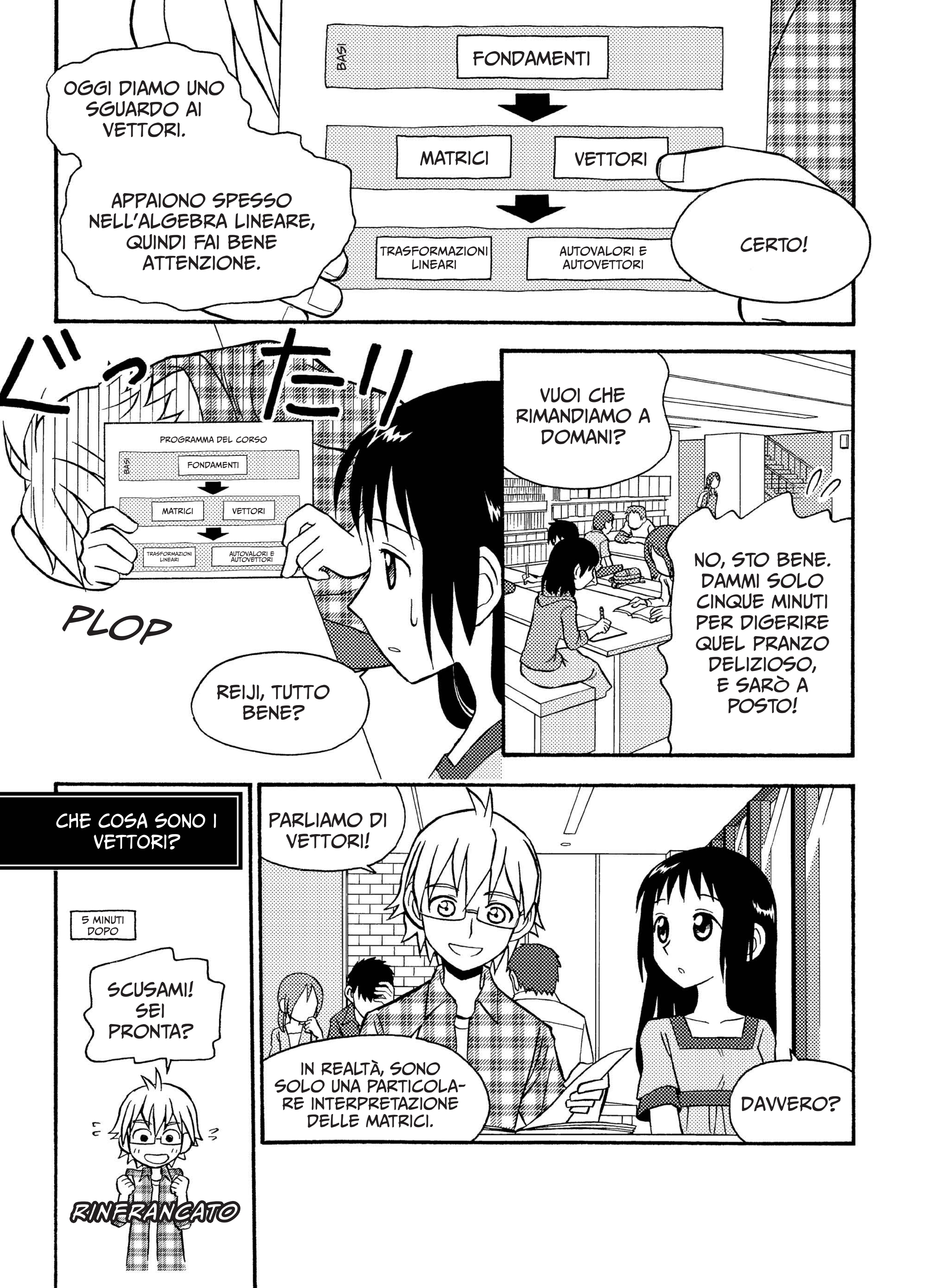
PASSO 1	**Riscrivete il sistema** $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$ **così:** $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$	**Se riscriviamo** $$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$ **otteniamo** $$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
PASSO 2	**Assicuratevi che** $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$$	**Abbiamo** $$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \neq 0$$
PASSO 3	**Sostituite ogni colonna con il vettore delle soluzioni per arrivare alla soluzione corrispondente** $$x_i = \frac{\det \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \text{Colonna } i \\ \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}$$	• $$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{1 \cdot 2 - 1 \cdot 0}{5} = \frac{2}{5}$$ • $$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{3 \cdot 0 - 1 \cdot 1}{5} = -\frac{1}{5}$$

5
INTRODUZIONE AI VETTORI

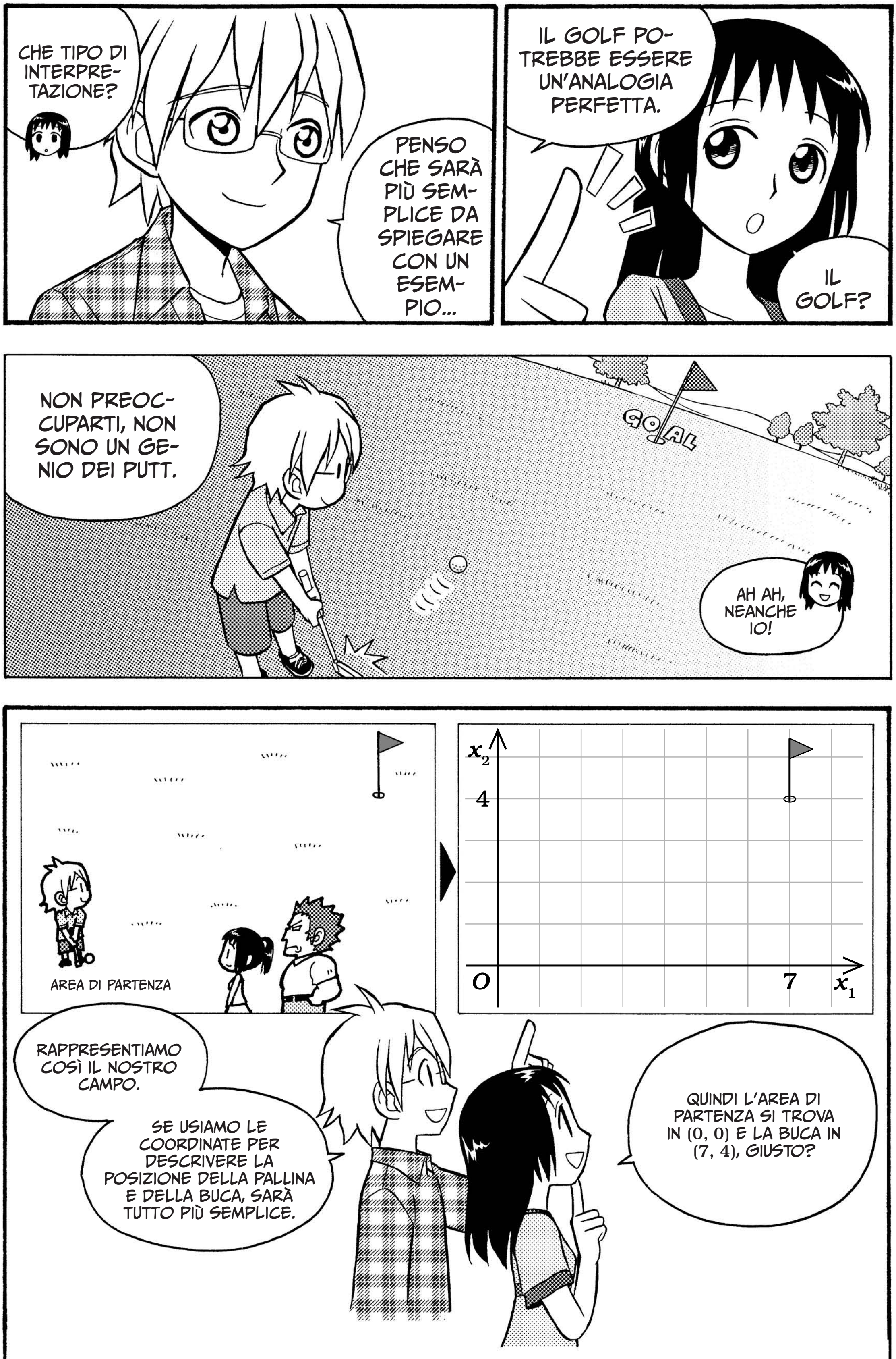



ANCORA UN MINUTO!
BAM
PANT
PANT
OSSU!
PUOI FARE DI MEGLIO!
SBANG
USA LA SCHIENA!
OSSU!
BAM
BRAVO!
PER OGGI FERMIAMOCI QUI.
ANF
PANT
PANT
A-ANCORA!


CE LA FACCIO ANCORA!
MA SE NEANCHE TI REGGI IN PIEDI!
PUM
ACC!!
SOLO UN ALTRO GIRO!
NON MI SONO ANCORA RAFFORZATO PER NIENTE!
EH EH, PER ME VA BENE!
OSSU!



OGGI DIAMO UNO SGUARDO AI VETTORI.
BASI
FONDAMENTI
MATRICI
VETTORI
TRASFORMAZIONI LINEARI
AUTOVALORI E AUTOVETTORI
APPAIONO SPESSO NELL'ALGEBRA LINEARE, QUINDI FAI BENE ATTENZIONE.
CERTO!
ぐったり!!
PROGRAMMA DEL CORSO
BASI
FONDAMENTI
MATRICI
VETTORI
TRASFORMAZIONI LINEARI
AUTOVALORI E AUTOVETTORI
PLOP
REIJI, TUTTO BENE?
VUOI CHE RIMANDIAMO A DOMANI?
NO, STO BENE. DAMMI SOLO CINQUE MINUTI PER DIGERIRE QUEL PRANZO DELIZIOSO, E SARÒ A POSTO!
CHE COSA SONO I VETTORI?
5 MINUTI DOPO
SCUSAMI! SEI PRONTA?
RINFRANCATO
PARLIAMO DI VETTORI!
IN REALTÀ, SONO SOLO UNA PARTICOLARE INTERPRETAZIONE DELLE MATRICI.
DAVVERO?


CHE TIPO DI INTERPRETAZIONE?
PENSO CHE SARÀ PIÙ SEMPLICE DA SPIEGARE CON UN ESEMPIO...
IL GOLF POTREBBE ESSERE UN'ANALOGIA PERFETTA.
IL GOLF?
NON PREOCCUPARTI, NON SONO UN GENIO DEI PUTT.
GOAL
AH AH, NEANCHE IO!
AREA DI PARTENZA
x_2
4
O
7
x_1
RAPPRESENTIAMO COSÌ IL NOSTRO CAMPO.
SE USIAMO LE COORDINATE PER DESCRIVERE LA POSIZIONE DELLA PALLINA E DELLA BUCA, SARÀ TUTTO PIÙ SEMPLICE.
QUINDI L'AREA DI PARTENZA SI TROVA IN (0, 0) E LA BUCA IN (7, 4), GIUSTO?

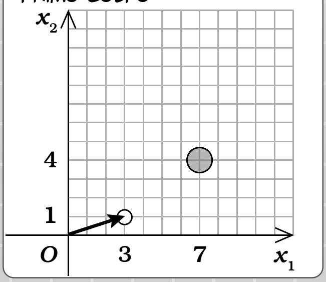
GIOCATORE 1

REIJI YURINO

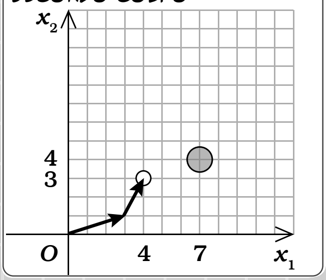
INIZIO IO.
TIRO CON CAUTELA E
MANDO LA PALLA IN BUCA
IN TRE COLPI.

REPLAY

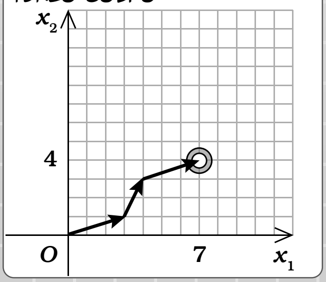
PRIMO COLPO



SECONDO COLPO



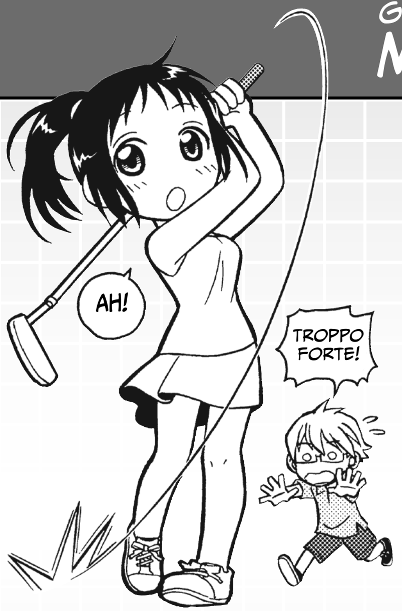
TERZO COLPO



DATI SUI COLPI

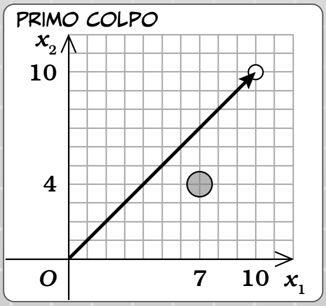
	Primo colpo	Secondo colpo	Terzo colpo
Posizione della palla	Punto (3, 1)	Punto (4, 3)	Punto (7, 4)
Spostamento della palla rispetto alla posizione precedente	3 a destra e 1 in alto rispetto a (0, 0)	1 a destra e 2 in alto rispetto a (3, 1)	3 a destra e 1 in alto rispetto a (4, 3)
Movimento della palla espresso nella forma (verso destra, verso l'alto)	(3, 1)	(3, 1) + (1, 2) = (4, 3)	(3, 1) + (1, 2) + (3, 1) = (7, 4)

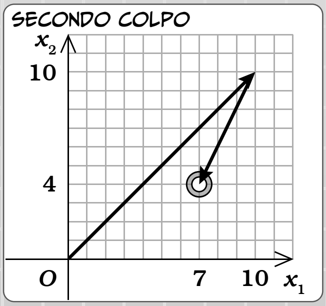
GIOCATORE 2
MISA ICHINOSE



TU DAI UNO SBERLONE ALLA PALLINA, E LA METTI IN BUCA IN DUE COLPI.

REPLAY



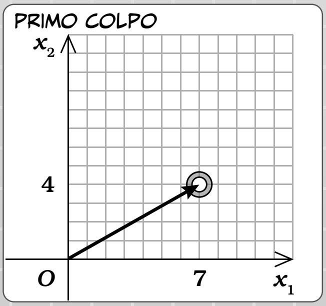


DATI SUI COLPI

	Primo colpo	Secondo colpo
Posizione della palla	Punto (10, 10)	Punto (7, 4)
Spostamento della palla rispetto alla posizione precedente	10 a destra e 10 in alto rispetto a (0, 0)	-3 a destra e -6 in alto rispetto a (10, 10)
Movimento della palla espresso nella forma (verso destra, verso l'alto)	(10, 10)	(10, 10) + (−3, −6) = (7, 4)

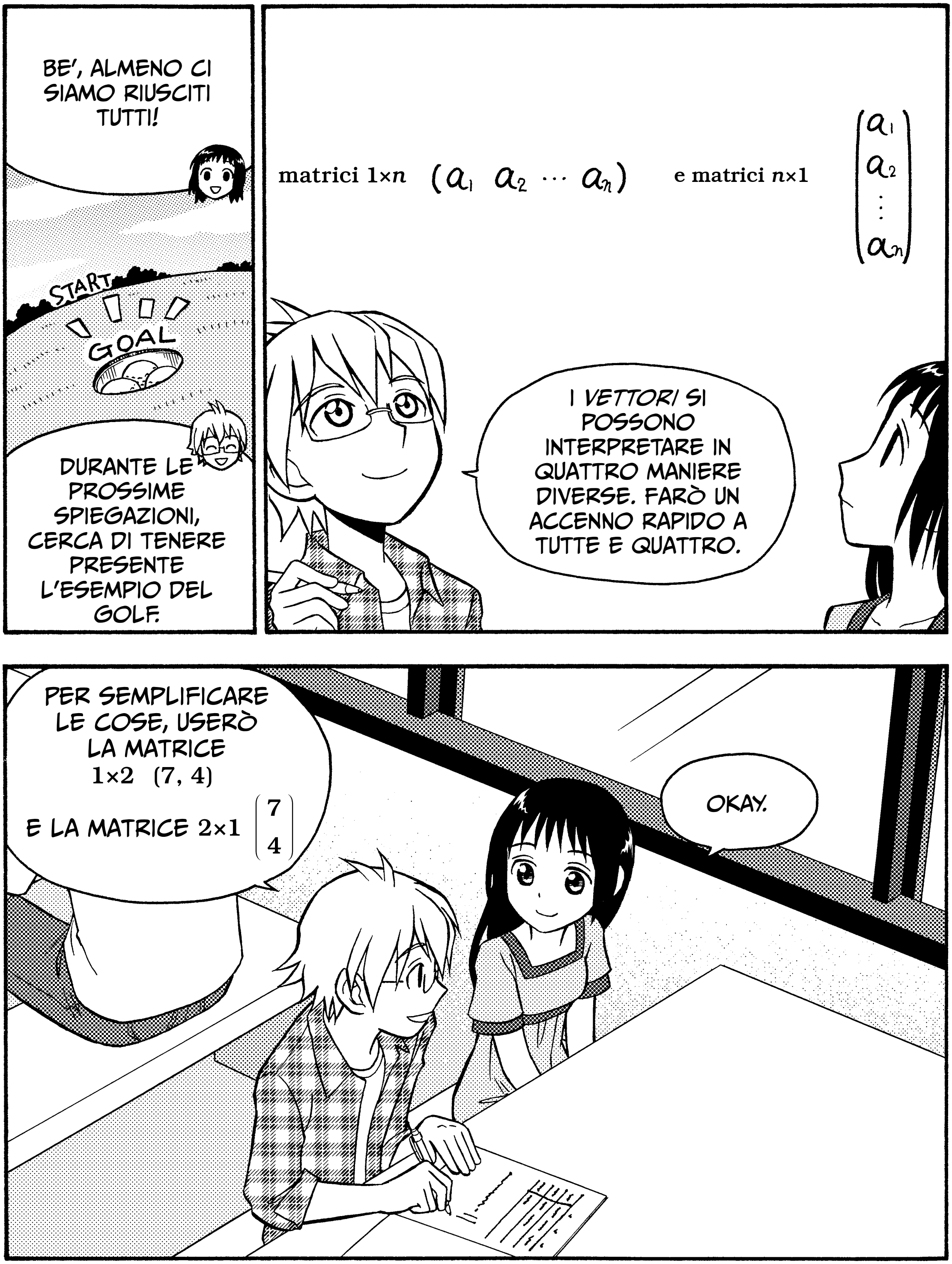
GIOCATORE 3
TETSUO ICHINOSE

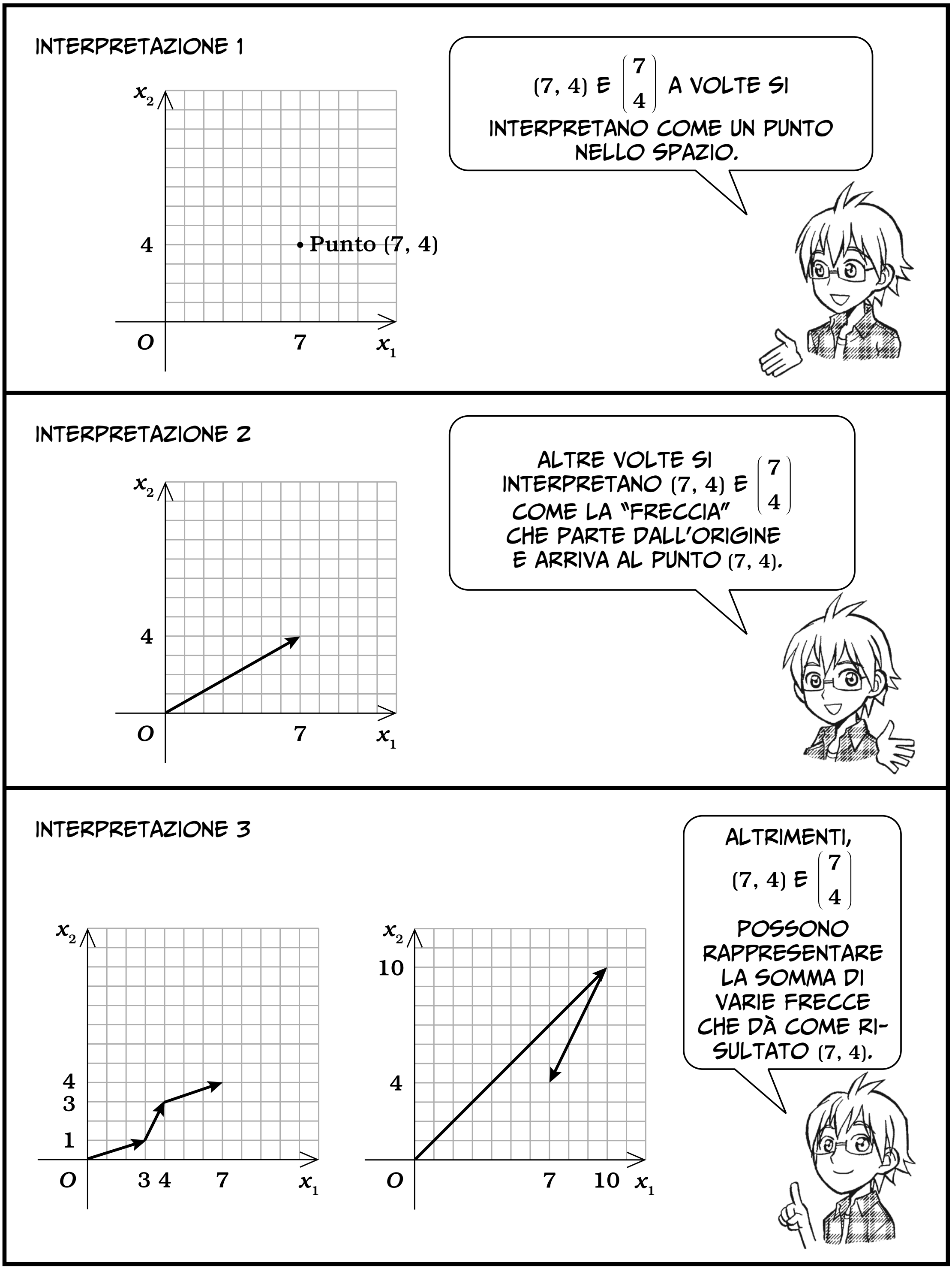
REPLAY

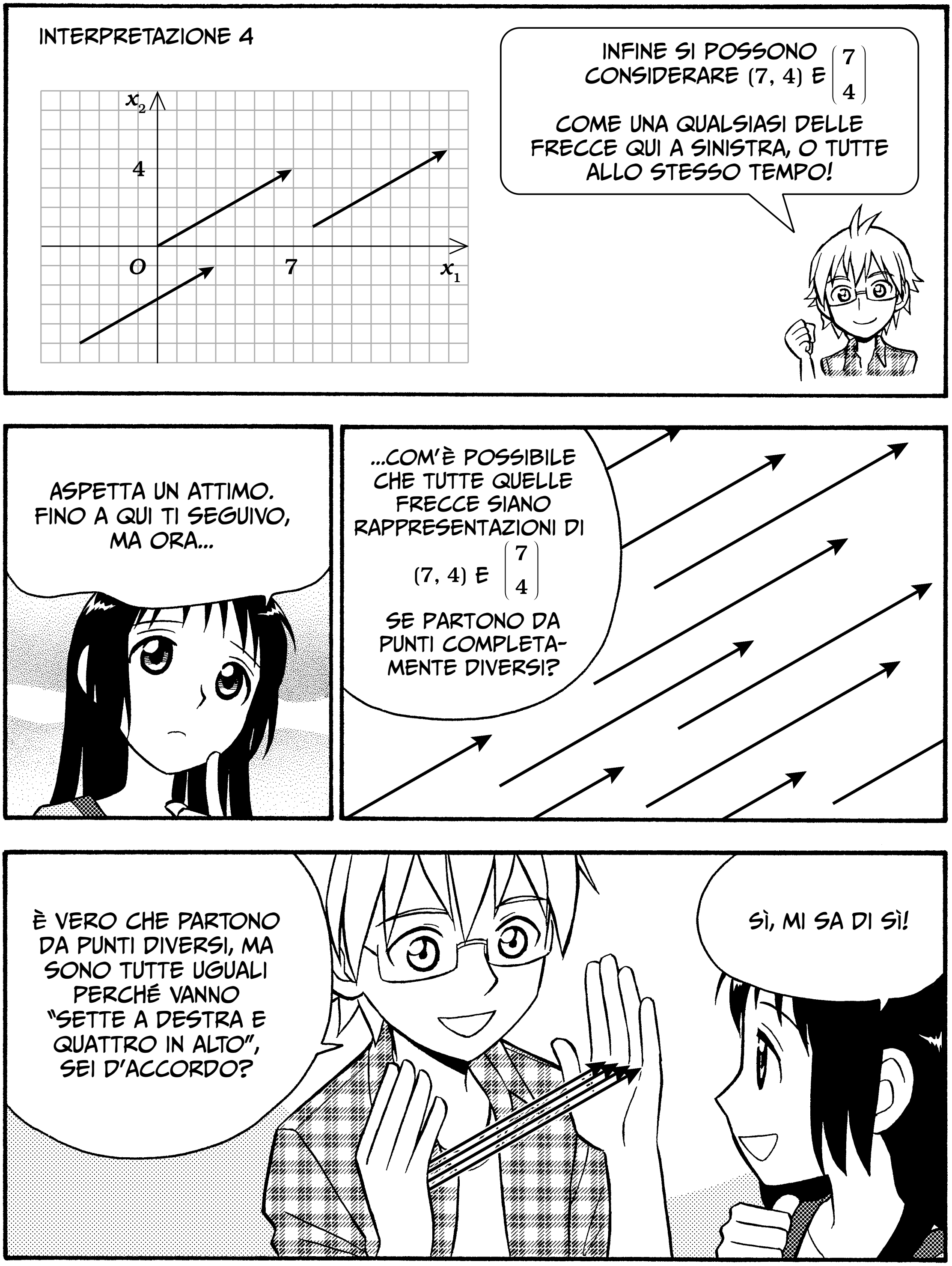


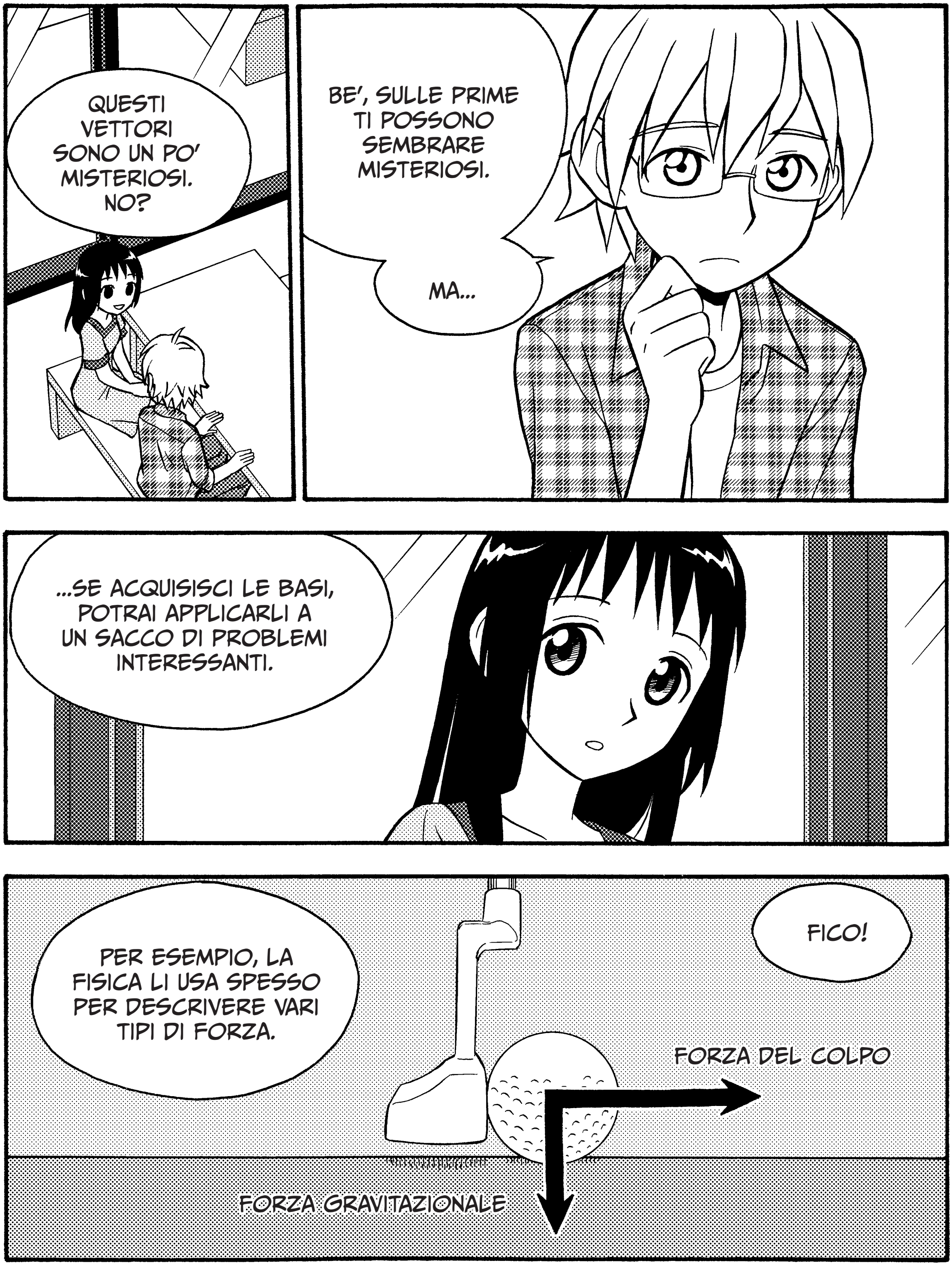
DATI SUI COLPI

	Primo colpo
Posizione della palla	Punto (7, 4)
Spostamento della palla rispetto alla posizione precedente	Punto (7, 4) 7 a destra e 4 in alto rispetto a (0, 0)
Movimento della palla espresso nella forma (verso destra, verso l'alto)	(7, 4)


BE', ALMENO CI SIAMO RIUSCITI TUTTI!
START
GOAL
DURANTE LE PROSSIME SPIEGAZIONI, CERCA DI TENERE PRESENTE L'ESEMPIO DEL GOLF.
matrici $1 \times n$ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ e matrici $n \times 1$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
I *VETTORI* SI POSSONO INTERPRETARE IN QUATTRO MANIERE DIVERSE. FARÒ UN ACCENNO RAPIDO A TUTTE E QUATTRO.
PER SEMPLIFICARE LE COSE, USERÒ LA MATRICE 1×2 $(7, 4)$ E LA MATRICE 2×1 $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$
OKAY.


INTERPRETAZIONE 1
x_2
4
• Punto (7, 4)
O
7
x_1
(7, 4) E $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ A VOLTE SI INTERPRETANO COME UN PUNTO NELLO SPAZIO.
INTERPRETAZIONE 2
x_2
4
O
7
x_1
ALTRE VOLTE SI INTERPRETANO (7, 4) E $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ COME LA "FRECCIA" CHE PARTE DALL'ORIGINE E ARRIVA AL PUNTO (7, 4).
INTERPRETAZIONE 3
x_2
4
3
1
O
3 4
7
x_1
x_2
10
4
O
7
10
x_1
ALTRIMENTI, (7, 4) E $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ POSSONO RAPPRESENTARE LA SOMMA DI VARIE FRECCE CHE DÀ COME RISULTATO (7, 4).


INTERPRETAZIONE 4
x_2
4
O
7
x_1
INFINE SI POSSONO CONSIDERARE (7, 4) E $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ COME UNA QUALSIASI DELLE FRECCE QUI A SINISTRA, O TUTTE ALLO STESSO TEMPO!
ASPETTA UN ATTIMO. FINO A QUI TI SEGUIVO, MA ORA...
...COM'È POSSIBILE CHE TUTTE QUELLE FRECCE SIANO RAPPRESENTAZIONI DI (7, 4) E $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ SE PARTONO DA PUNTI COMPLETAMENTE DIVERSI?
È VERO CHE PARTONO DA PUNTI DIVERSI, MA SONO TUTTE UGUALI PERCHÉ VANNO "SETTE A DESTRA E QUATTRO IN ALTO", SEI D'ACCORDO?
SÌ, MI SA DI SÌ!


QUESTI VETTORI SONO UN PO' MISTERIOSI. NO?
BE', SULLE PRIME TI POSSONO SEMBRARE MISTERIOSI.
MA...
...SE ACQUISISCI LE BASI, POTRAI APPLICARLI A UN SACCO DI PROBLEMI INTERESSANTI.
PER ESEMPIO, LA FISICA LI USA SPESSO PER DESCRIVERE VARI TIPI DI FORZA.
FICO!
FORZA DEL COLPO
FORZA GRAVITAZIONALE

CALCOLI VETTORIALI

ADDIZIONE

- $(10, 10) + (-3, -6) = (10 + (-3), 10 + (-6)) = (7, 4)$
- $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + (-3) \\ 10 + (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

SOTTRAZIONE

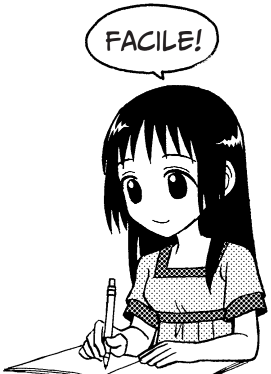
- $(10, 10) - (3, 6) = (10 - 3, 10 - 6) = (7, 4)$
- $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 3 \\ 10 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

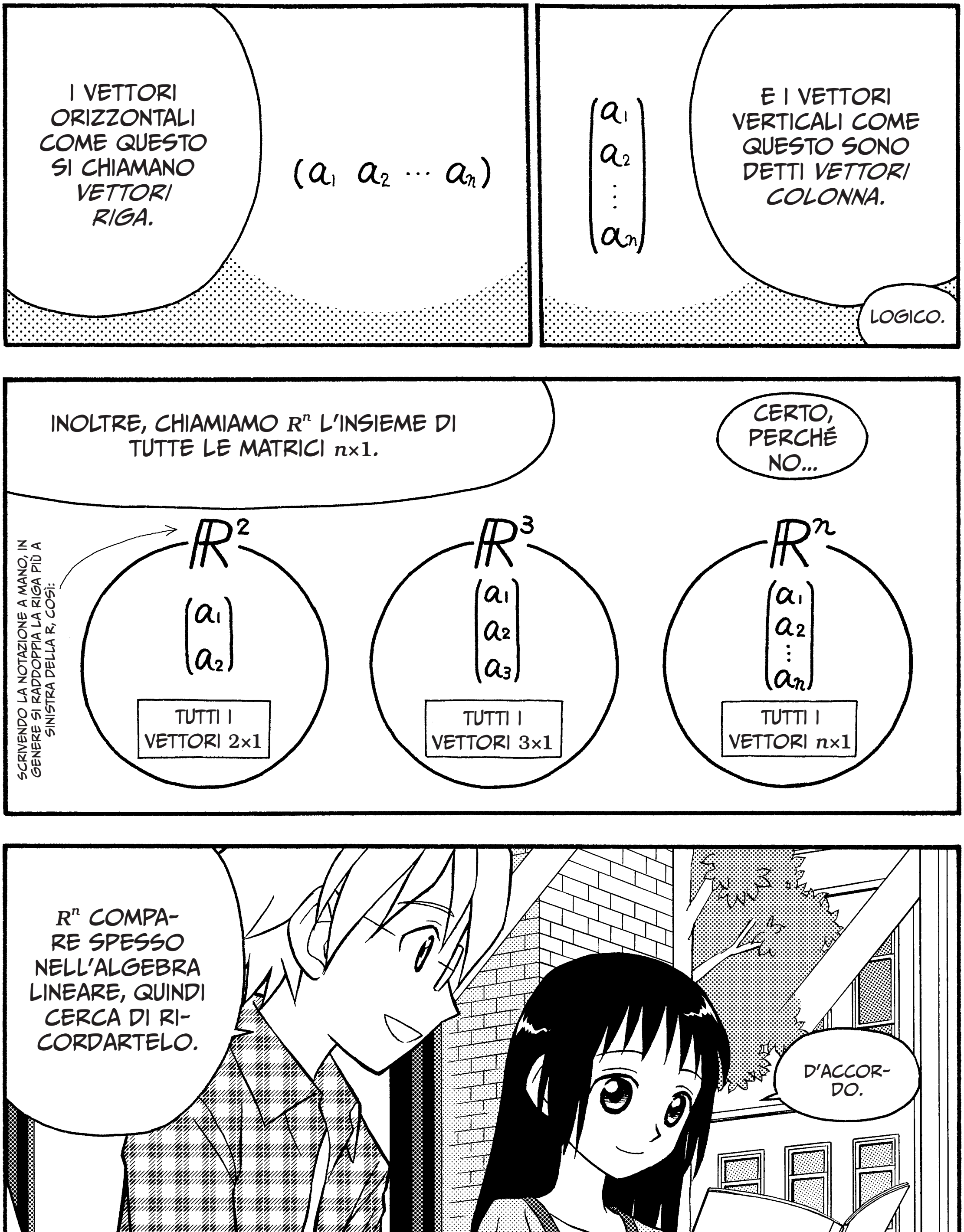
MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE

- $2(3, 1) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 1) = (6, 2)$
- $2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

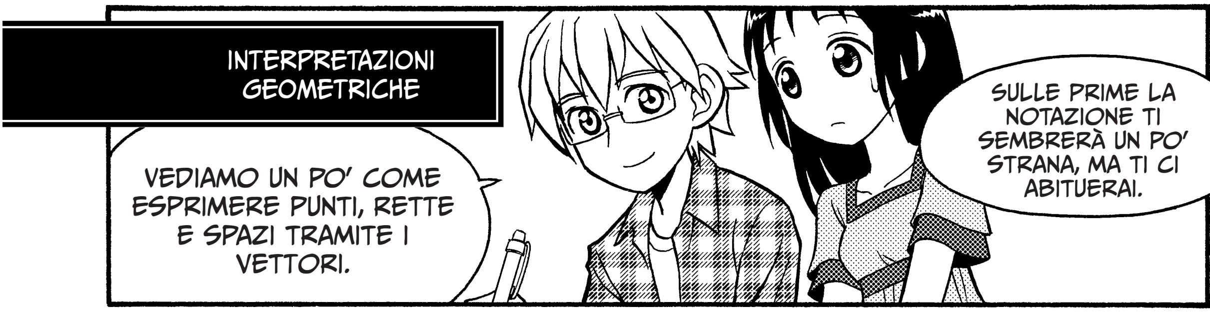
MOLTIPLICAZIONE MATRICIALE

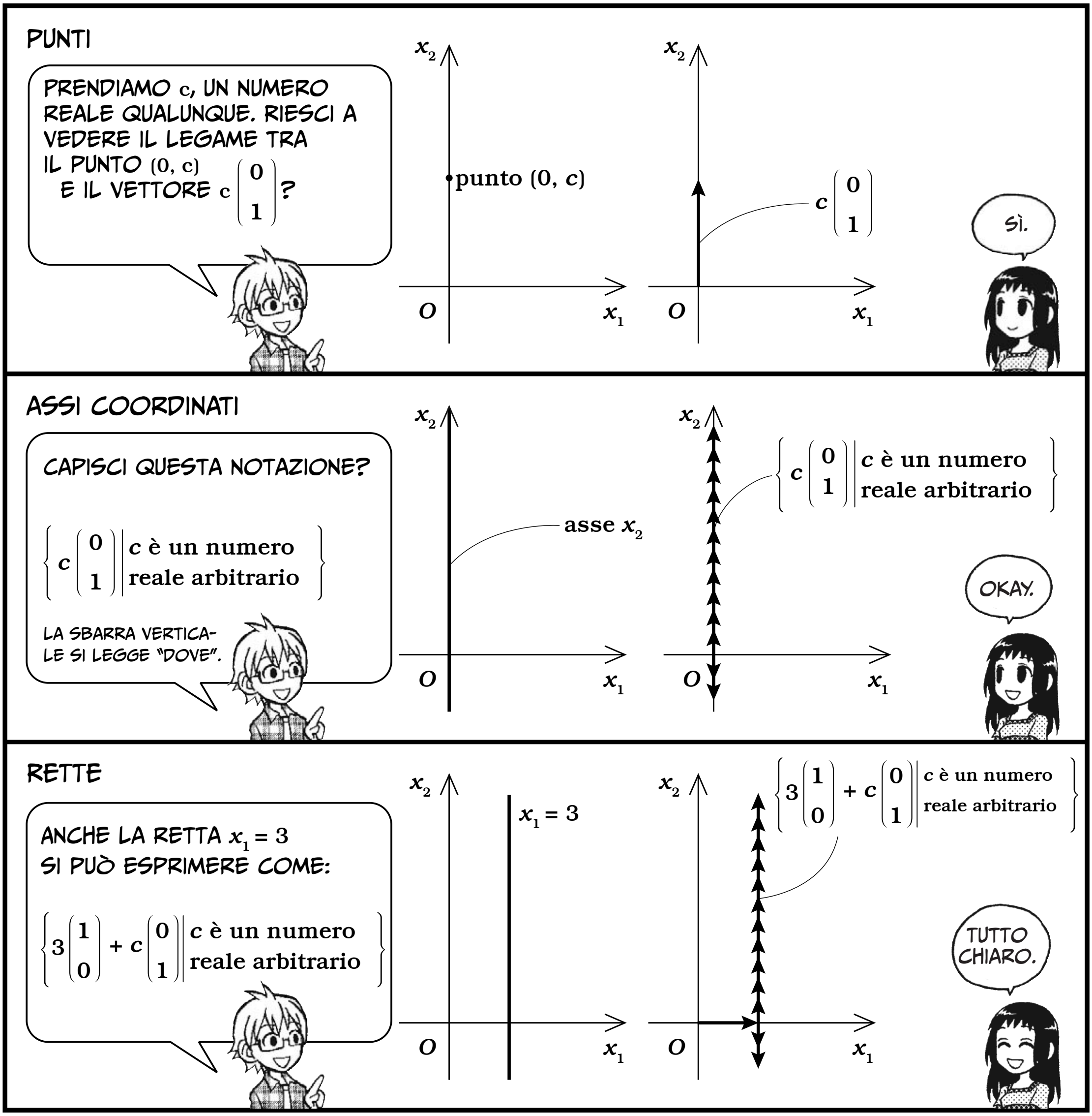
- $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}(1, 2) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $(3, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (3 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = 5$
- $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$





I VETTORI ORIZZONTALI COME QUESTO SI CHIAMANO *VETTORI RIGA*.
$(a_1 \ a_2 \cdots a_n)$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
E I VETTORI VERTICALI COME QUESTO SONO DETTI *VETTORI COLONNA*.
LOGICO.
INOLTRE, CHIAMIAMO R^n L'INSIEME DI TUTTE LE MATRICI $n\times1$.
CERTO, PERCHÉ NO...
SCRIVENDO LA NOTAZIONE A MANO, IN GENERE SI RADDOPPIA LA RIGA PIÙ A SINISTRA DELLA R, COSÌ:
$\mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
TUTTI I VETTORI 2×1
$\mathbb{R}^3$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
TUTTI I VETTORI 3×1
$\mathbb{R}^n$
$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
TUTTI I VETTORI $n\times1$
R^n COMPARE SPESSO NELL'ALGEBRA LINEARE, QUINDI CERCA DI RICORDARTELO.
D'ACCORDO.

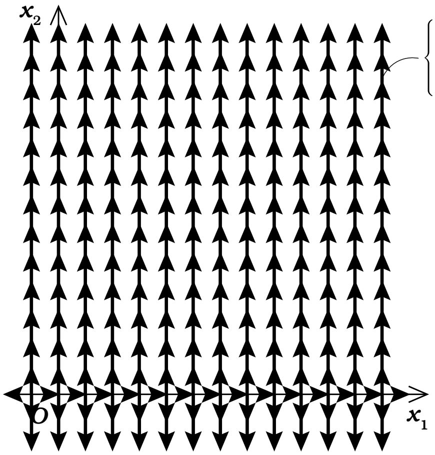

INTERPRETAZIONI GEOMETRICHE
VEDIAMO UN PO' COME ESPRIMERE PUNTI, RETTE E SPAZI TRAMITE I VETTORI.
SULLE PRIME LA NOTAZIONE TI SEMBRERÀ UN PO' STRANA, MA TI CI ABITUERAI.

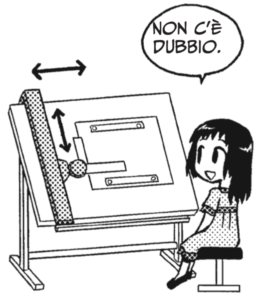

PUNTI
PRENDIAMO c, UN NUMERO REALE QUALUNQUE. RIESCI A VEDERE IL LEGAME TRA IL PUNTO (0, c) E IL VETTORE $c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$?
x_2
punto $(0, c)$
O
x_1
x_2
$c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
O
x_1
SÌ.
ASSI COORDINATI
CAPISCI QUESTA NOTAZIONE?
$\left\{ c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{matrix}c \text{ è un numero}\\ \text{reale arbitrario}\end{matrix} \right\}$
LA SBARRA VERTICALE SI LEGGE "DOVE".
x_2
asse x_2
O
x_1
x_2
$\left\{ c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{matrix}c \text{ è un numero}\\ \text{reale arbitrario}\end{matrix} \right\}$
O
x_1
OKAY.
RETTE
ANCHE LA RETTA $x_1 = 3$ SI PUÒ ESPRIMERE COME:
$\left\{ 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{matrix}c \text{ è un numero}\\ \text{reale arbitrario}\end{matrix} \right\}$
x_2
$x_1 = 3$
O
x_1
x_2
$\left\{ 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \middle| \begin{matrix}c \text{ è un numero}\\ \text{reale arbitrario}\end{matrix} \right\}$
O
x_1
TUTTO CHIARO.

PIANI

E IL PIANO (x_1, x_2), CIOÈ R^2, SI PUÒ ESPRIMERE COSÌ:

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c_1, c_2 \text{ sono numeri} \\ \text{reali arbitrari} \end{array} \right\}$$

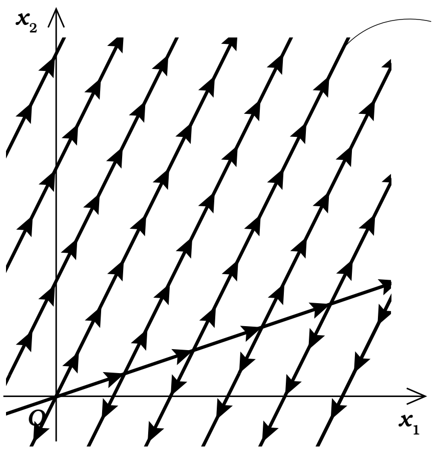


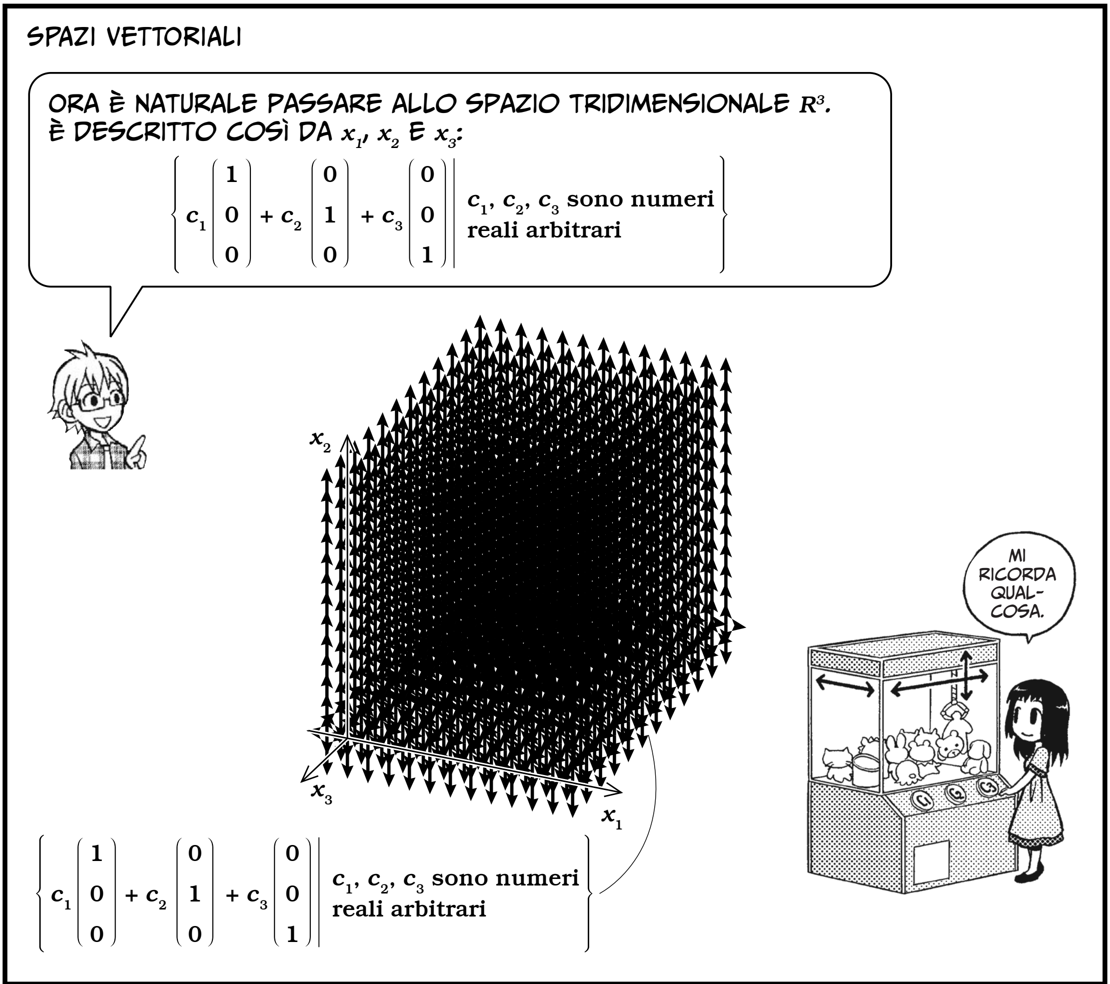


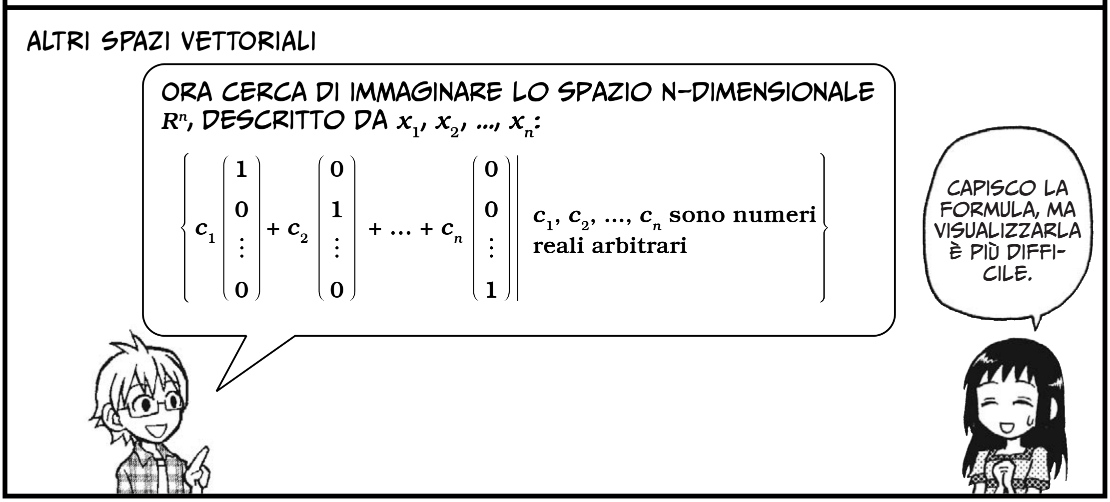
ALTRI PIANI

POSSIAMO SCRIVERLO ANCHE IN UN ALTRO MODO:

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c_1, c_2 \text{ sono numeri} \\ \text{reali arbitrari} \end{array} \right\}$$

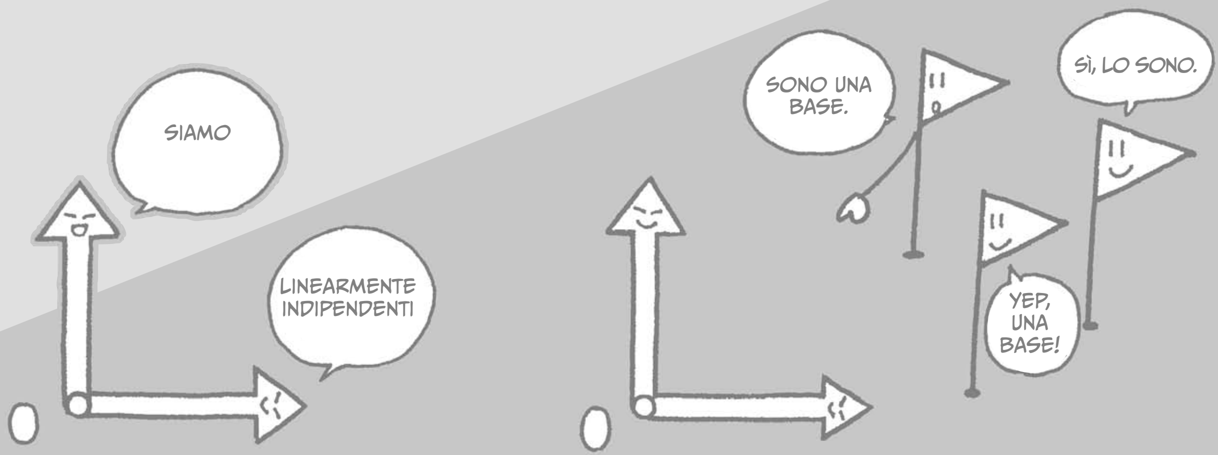


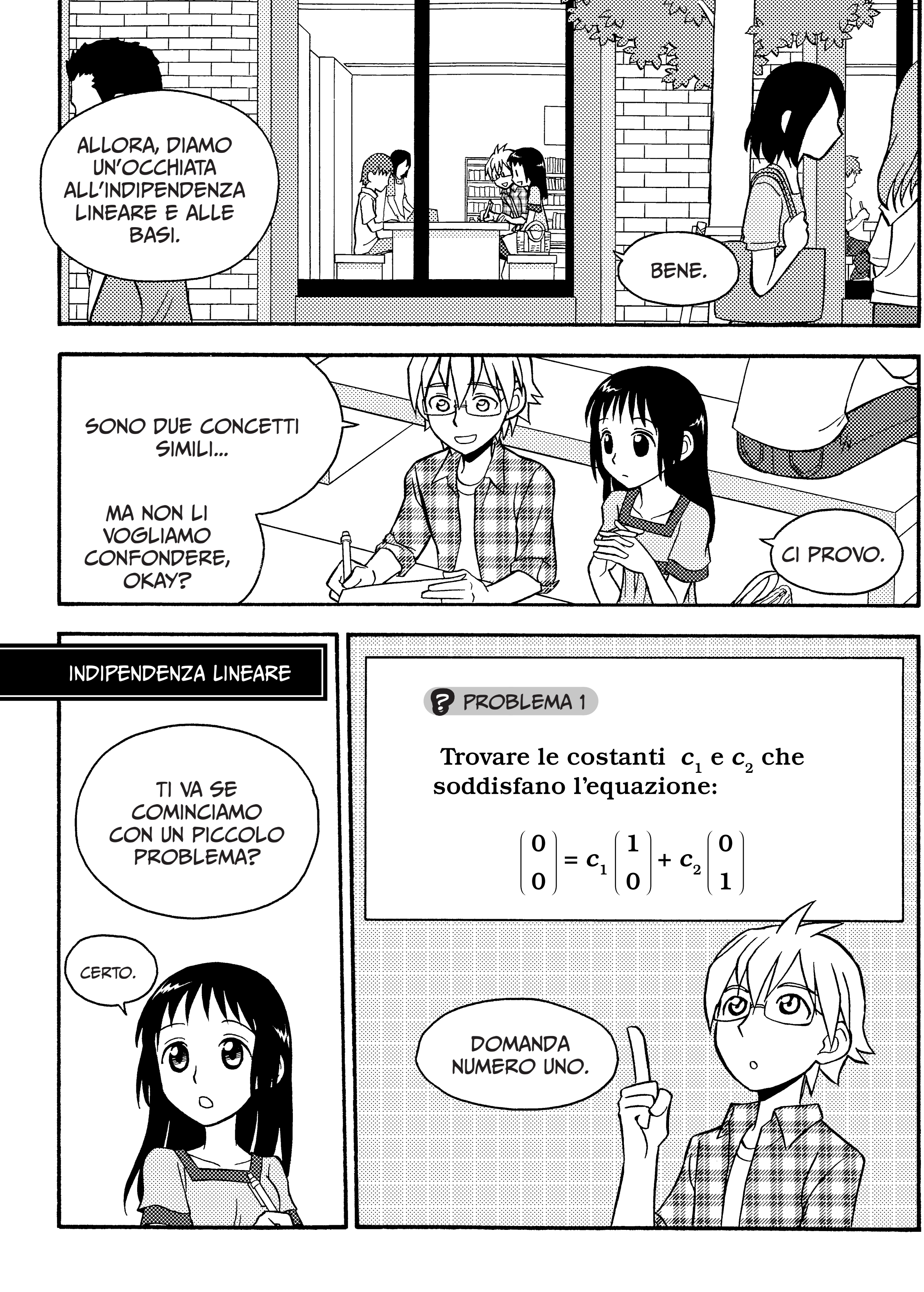

SPAZI VETTORIALI
ORA È NATURALE PASSARE ALLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE R^3. È DESCRITTO COSÌ DA x_1, x_2 E x_3:
$$\left\{ c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \middle| \; c_1, c_2, c_3 \text{ sono numeri reali arbitrari} \right\}$$
x_2
x_3
x_1
$$\left\{ c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \middle| \; c_1, c_2, c_3 \text{ sono numeri reali arbitrari} \right\}$$
MI RICORDA QUALCOSA.

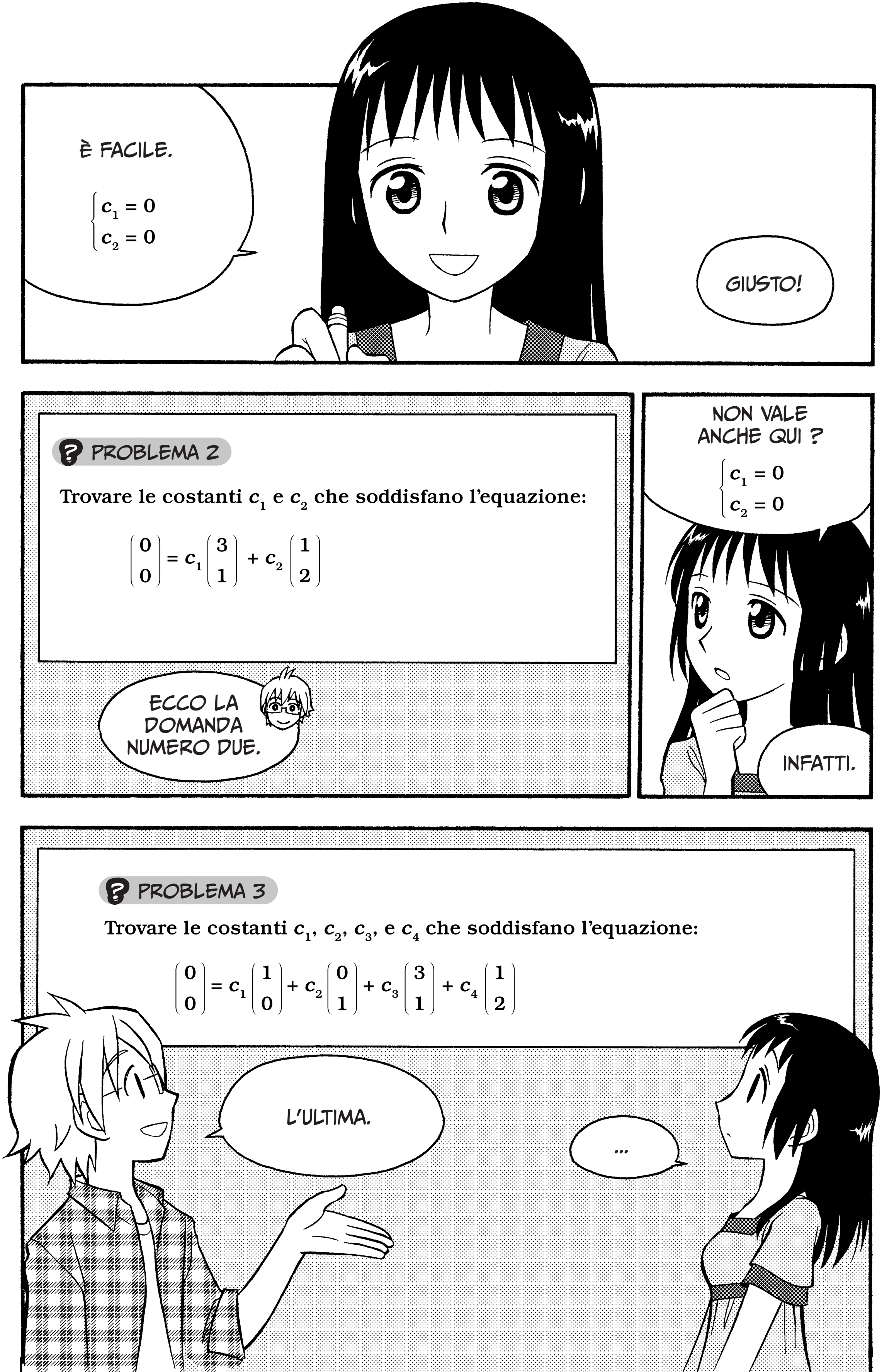

ALTRI SPAZI VETTORIALI
ORA CERCA DI IMMAGINARE LO SPAZIO N-DIMENSIONALE R^n, DESCRITTO DA x_1, x_2, ..., x_n:
$$\left\{ c_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + c_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \middle| \; c_1, c_2, \dots, c_n \text{ sono numeri reali arbitrari} \right\}$$
CAPISCO LA FORMULA, MA VISUALIZZARLA È PIÙ DIFFICILE.


UFF, SONO COTTA!
FACCIAMO UNA PAUSA, DAI.
OTTIMA IDEA!
A PROPOSITO, REIJI...
COME MAI HAI DECISO DI ENTRARE NEL CLUB DI KARATE?
EH?
EHM, IO...
NON C'ERA UN MOTIVO PARTICOLARE...
?
EHI!
SARÀ MEGLIO RIMETTERSI AL LAVORO!

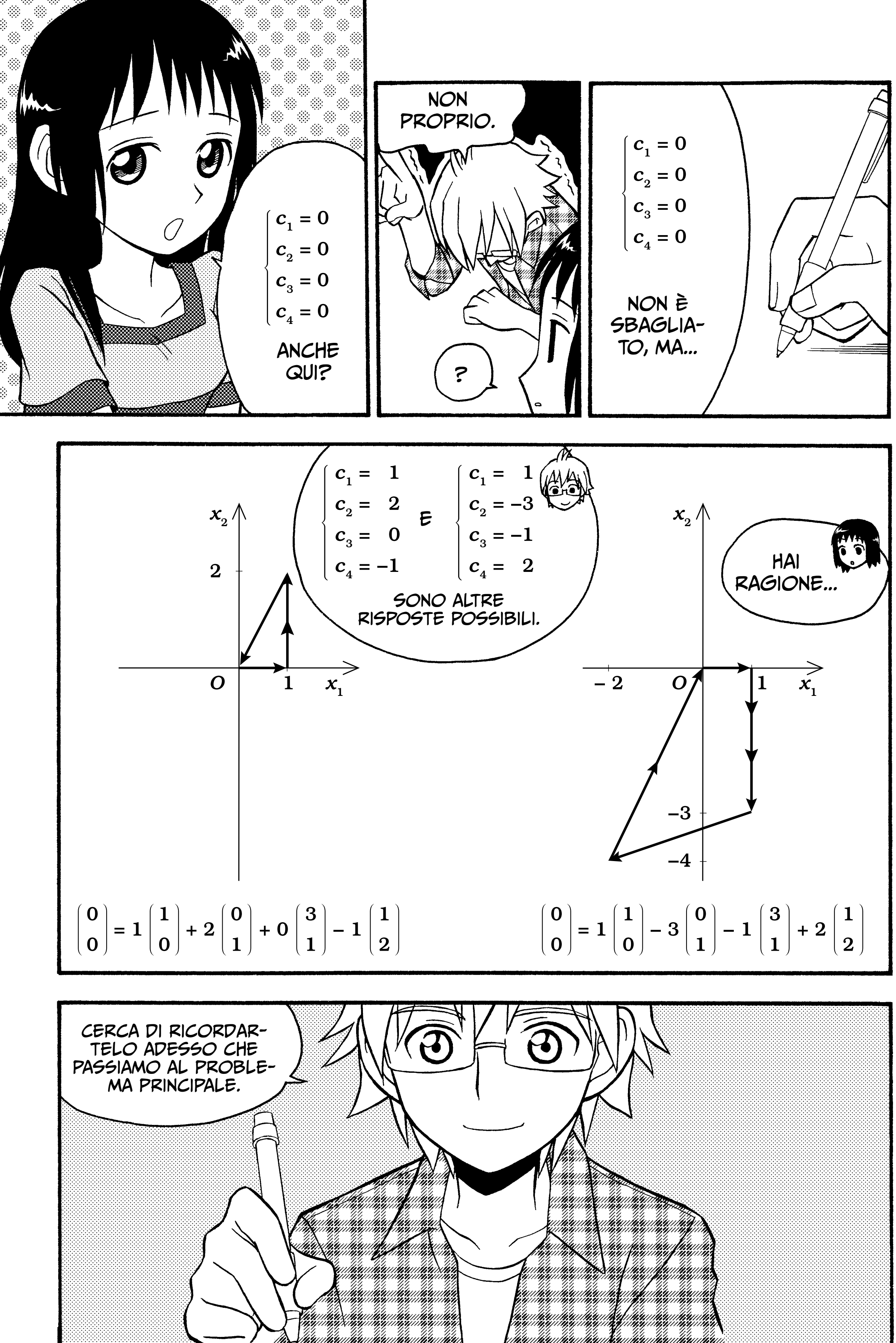
6
ANCORA VETTORI



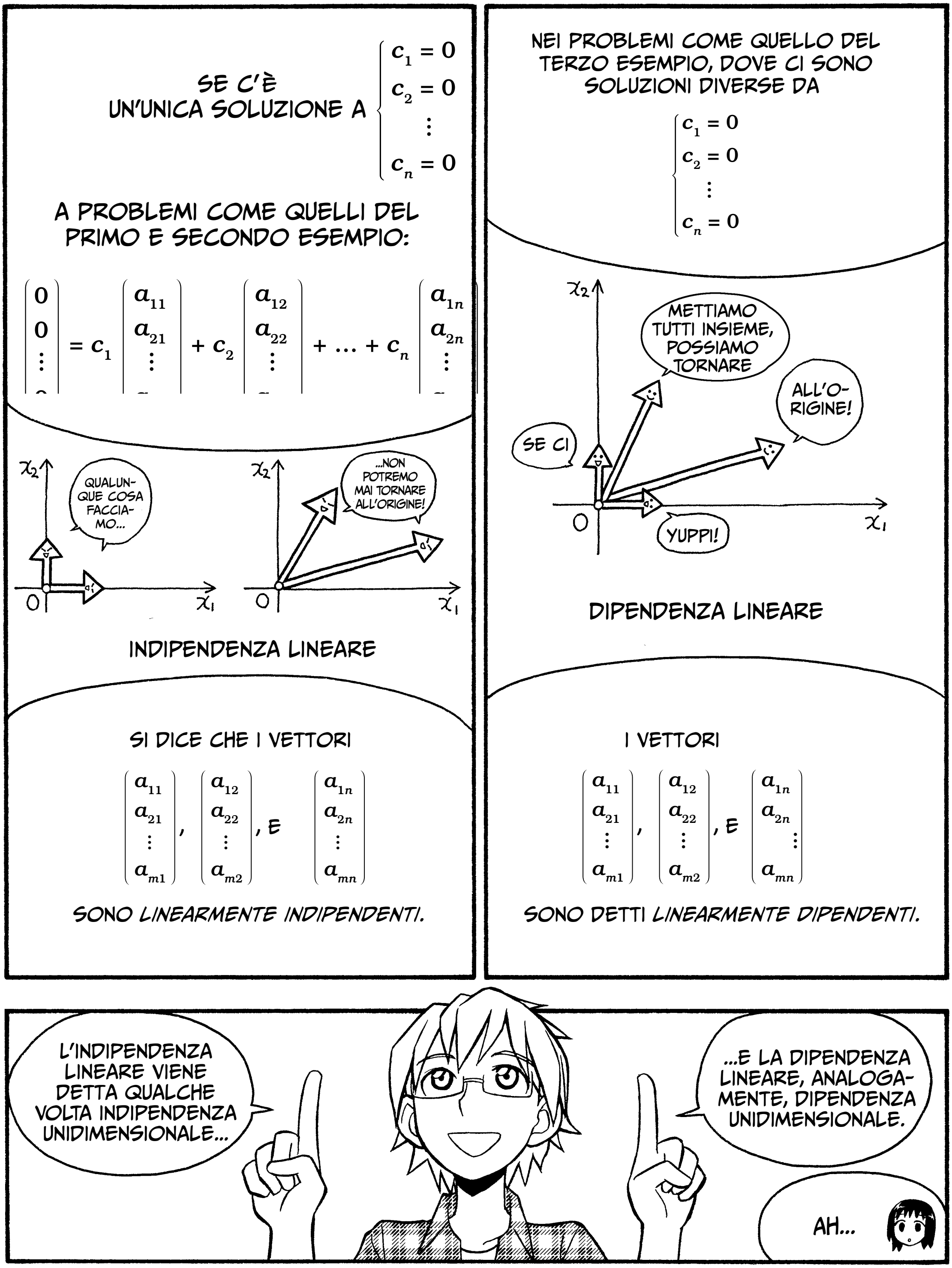

ALLORA, DIAMO UN'OCCHIATA ALL'INDIPENDENZA LINEARE E ALLE BASI.
BENE.
SONO DUE CONCETTI SIMILI...
MA NON LI VOGLIAMO CONFONDERE, OKAY?
CI PROVO.
INDIPENDENZA LINEARE
TI VA SE COMINCIAMO CON UN PICCOLO PROBLEMA?
CERTO.
PROBLEMA 1
Trovare le costanti c_1 e c_2 che soddisfano l'equazione:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
DOMANDA NUMERO UNO.



È FACILE.
$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$
GIUSTO!
PROBLEMA 2
Trovare le costanti c_1 e c_2 che soddisfano l'equazione:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
ECCO LA DOMANDA NUMERO DUE.
NON VALE ANCHE QUI ?
$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$
INFATTI.
PROBLEMA 3
Trovare le costanti c_1, c_2, c_3, e c_4 che soddisfano l'equazione:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
L'ULTIMA.
...

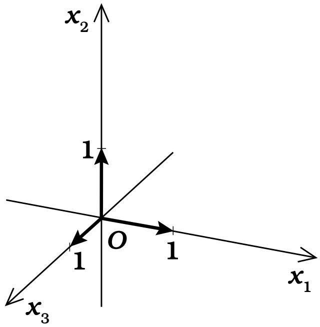


$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}$
ANCHE QUI?
NON PROPRIO.
?
$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}$
NON È SBAGLIATO, MA...
$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = -1 \end{cases}$ E $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -3 \\ c_3 = -1 \\ c_4 = 2 \end{cases}$
SONO ALTRE RISPOSTE POSSIBILI.
HAI RAGIONE...
x_2
2
O
1
x_1
x_2
-2
O
1
x_1
-3
-4
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
CERCA DI RICORDARTELO ADESSO CHE PASSIAMO AL PROBLEMA PRINCIPALE.


SE C'È UN'UNICA SOLUZIONE A $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \vdots \\ c_n = 0 \end{cases}$
A PROBLEMI COME QUELLI DEL PRIMO E SECONDO ESEMPIO:
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \end{pmatrix}$
x_2
QUALUNQUE COSA FACCIAMO...
0
x_1
x_2
...NON POTREMO MAI TORNARE ALL'ORIGINE!
0
x_1
INDIPENDENZA LINEARE
SI DICE CHE I VETTORI
$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \text{E} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$
SONO *LINEARMENTE INDIPENDENTI*.
NEI PROBLEMI COME QUELLO DEL TERZO ESEMPIO, DOVE CI SONO SOLUZIONI DIVERSE DA $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \vdots \\ c_n = 0 \end{cases}$
x_2
SE CI
METTIAMO TUTTI INSIEME, POSSIAMO TORNARE
ALL'ORIGINE!
YUPPI!
0
x_1
DIPENDENZA LINEARE
I VETTORI
$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \text{E} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$
SONO DETTI *LINEARMENTE DIPENDENTI*.
L'INDIPENDENZA LINEARE VIENE DETTA QUALCHE VOLTA INDIPENDENZA UNIDIMENSIONALE...
...E LA DIPENDENZA LINEARE, ANALOGAMENTE, DIPENDENZA UNIDIMENSIONALE.
AH...

ESEMPIO 1

I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **e** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



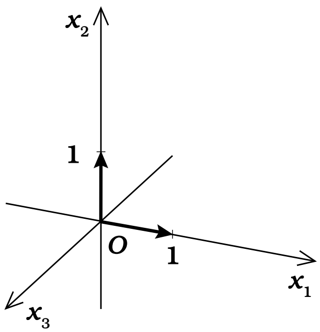
ci danno l'equazione $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

che ha l'unica soluzione $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$

Quindi i vettori sono linearmente indipendenti.

ESEMPIO 2

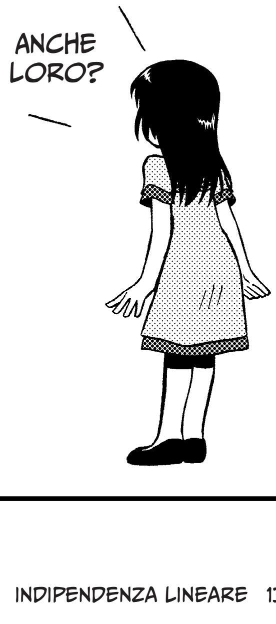
I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



ci danno l'equazione $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

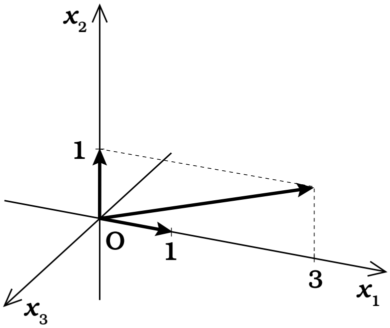
che ha l'unica soluzione $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$

Quindi anche questi vettori sono linearmente indipendenti.



ESEMPIO 1

I vettori $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, **e** $\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$



ci danno l'equazione $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

che ha varie soluzioni, per esempio $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$ **e** $\begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = -1 \end{cases}$

E così i vettori sono linearmente dipendenti.

ESEMPIO 2

Supponiamo di avere i vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

e l'equazione $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

I vettori sono linearmente dipendenti perché il sistema ha varie soluzioni...

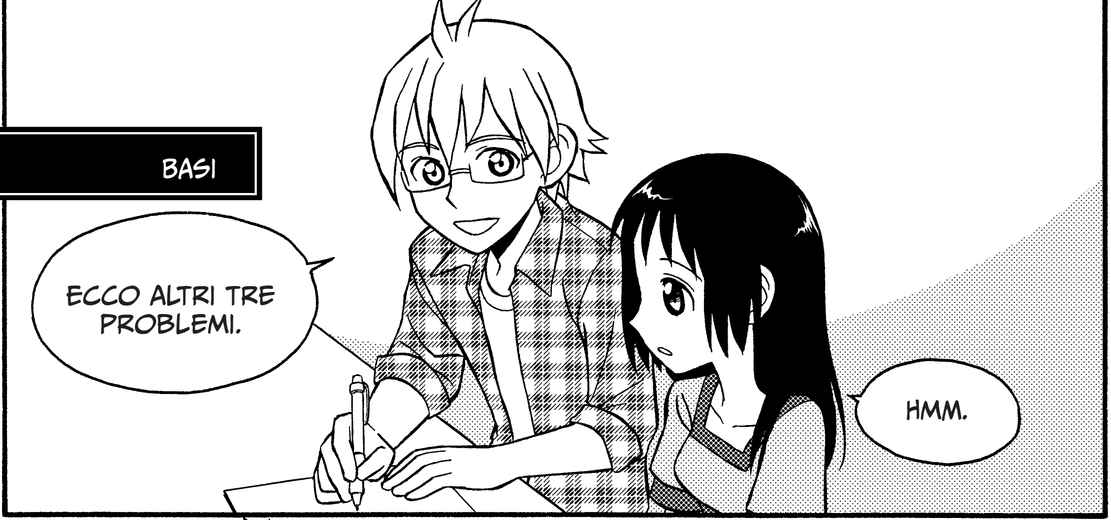
Per esempio, $\begin{cases} c_1 = 0\\ c_2 = 0\\ c_3 = 0\\ c_4 = 0\end{cases}$ e $\begin{cases} c_1 = a_1\\ c_2 = a_2\\ c_3 = a_3\\ c_4 = -1\end{cases}$

I vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}$

sono linearmente dipendenti perché esistono varie soluzioni dell'equazione.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + c_m\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} + c_{m+1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}$$

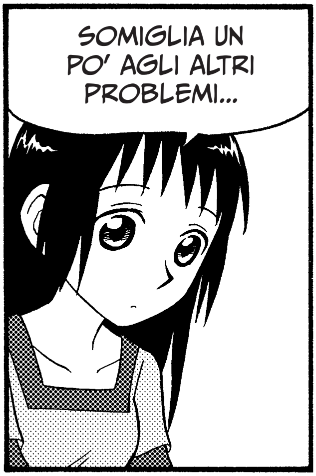
Fra esse c'è $\begin{cases} c_1 = 0\\ c_2 = 0\\ \quad\vdots\\ c_m = 0\\ c_{m+1} = 0\end{cases}$ ma anche $\begin{cases} c_1 = a_1\\ c_2 = a_2\\ \quad\vdots\\ c_m = a_m\\ c_{m+1} = -1\end{cases}$

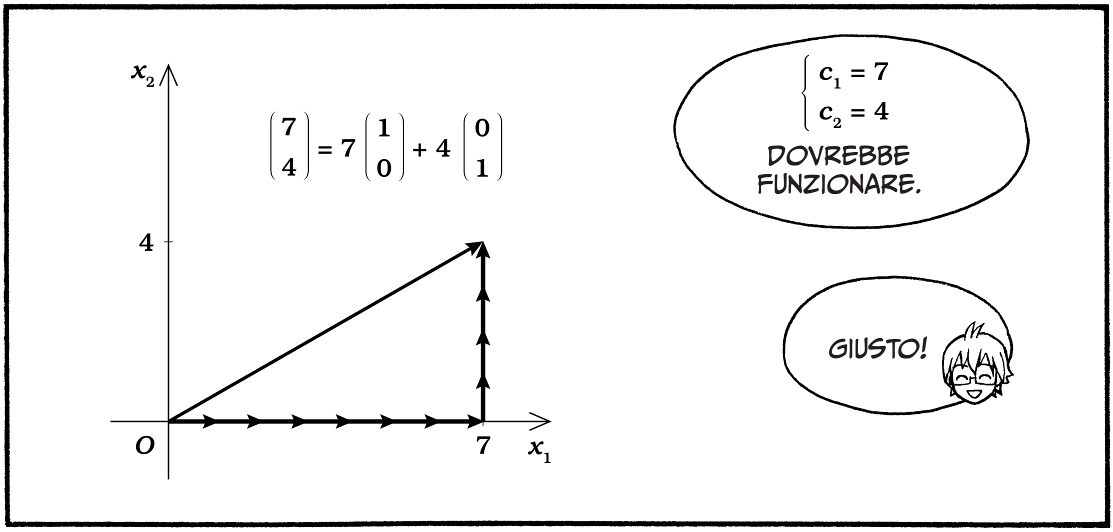


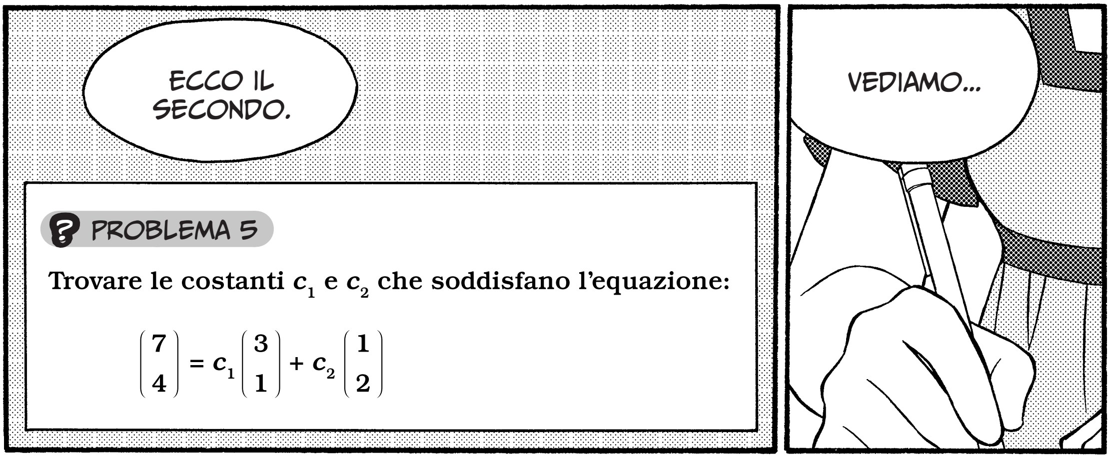
PROBLEMA 4

Trovare le costanti c_1 e c_2 che soddisfano l'equazione:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



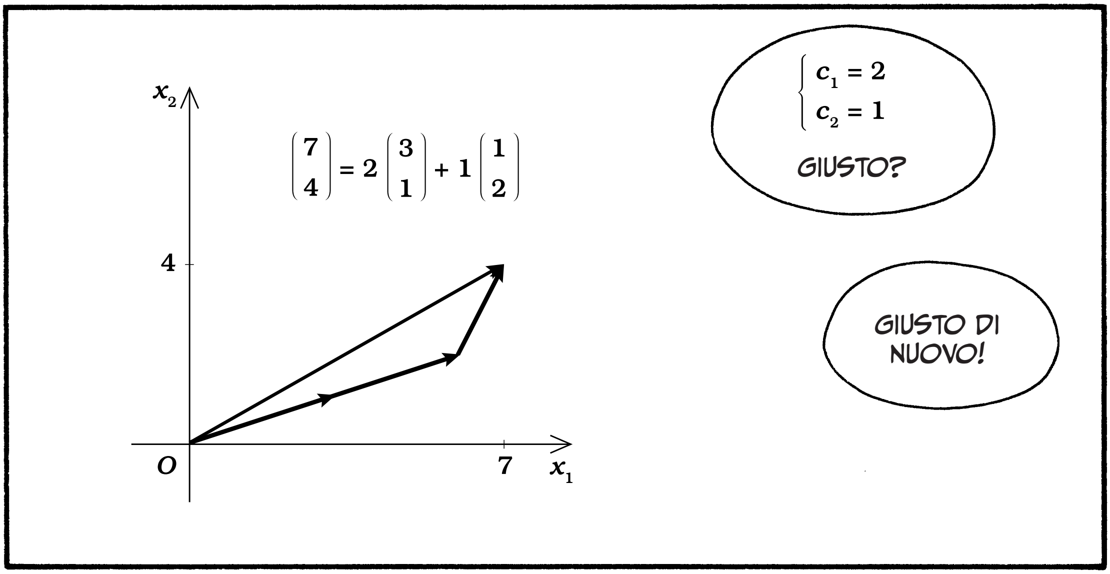


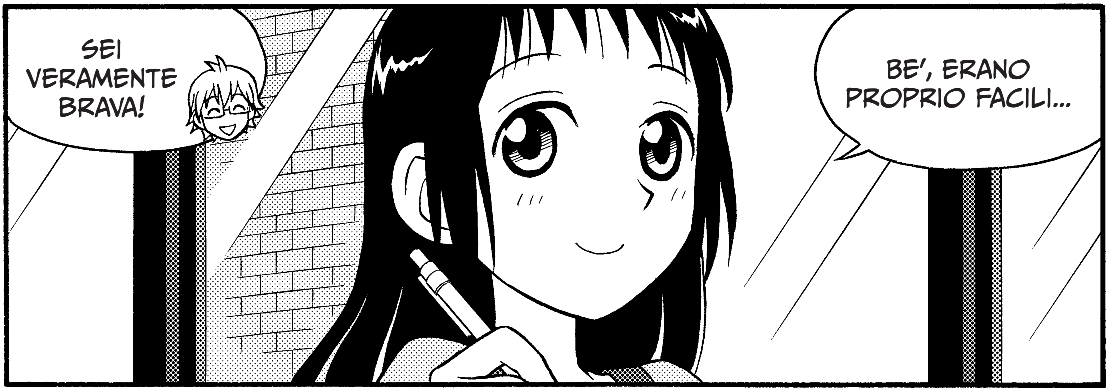


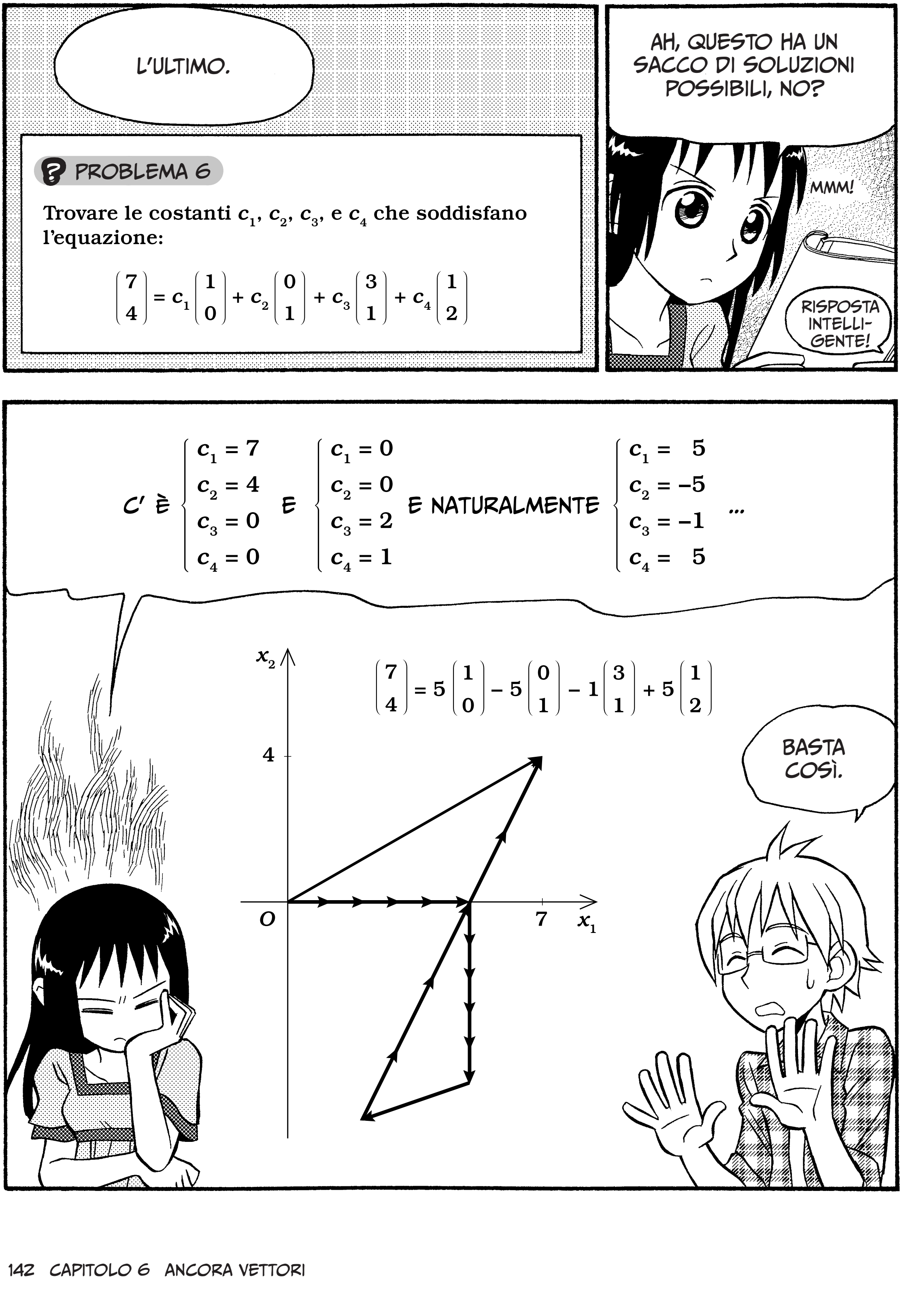
PROBLEMA 5

Trovare le costanti c_1 e c_2 che soddisfano l'equazione:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$






L'ULTIMO.
PROBLEMA 6
Trovare le costanti c_1, c_2, c_3, e c_4 che soddisfano l'equazione:
$$\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$
AH, QUESTO HA UN SACCO DI SOLUZIONI POSSIBILI, NO?
MMM!
RISPOSTA INTELLIGENTE!
C' È $\begin{cases} c_1 = 7 \\ c_2 = 4 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}$ E $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 2 \\ c_4 = 1 \end{cases}$ E NATURALMENTE $\begin{cases} c_1 = 5 \\ c_2 = -5 \\ c_3 = -1 \\ c_4 = 5 \end{cases}$ ...
$$\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$
x_2
4
O
7
x_1
BASTA COSÌ.

LA DIPENDENZA E L'INDIPENDENZA LINEARE HANNO STRETTAMENTE A CHE FARE CON IL CONCETTO DI *BASE*. GUARDIAMO QUESTA EQUAZIONE:

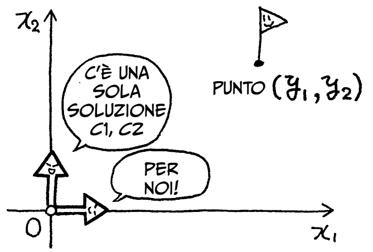
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix}$$

IN CUI IL PRIMO MEMBRO È UN VETTORE QUALSIASI DI R^m E IL SECONDO È COMPOSTO DA n VETTORI TUTTI DELLA STESSA DIMENSIONE m, CON I LORO COEFFICIENTI.

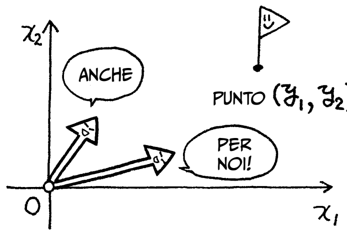
SE L'EQUAZIONE HA UNA SOLA SOLUZIONE
$c_1 = c_2 = \dots = c_m$
ALLORA I NOSTRI VETTORI

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} \right\}$$

FORMANO UNA BASE PER R^n.



BASI



VUOL DIRE CHE I VETTORI

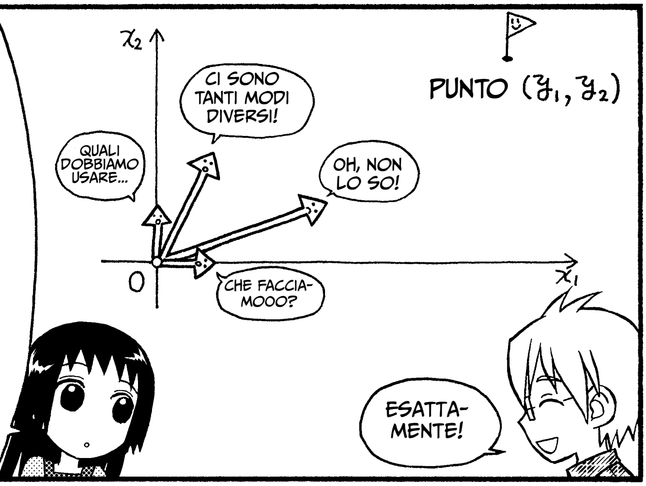
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ DEL PROBLEMA 4

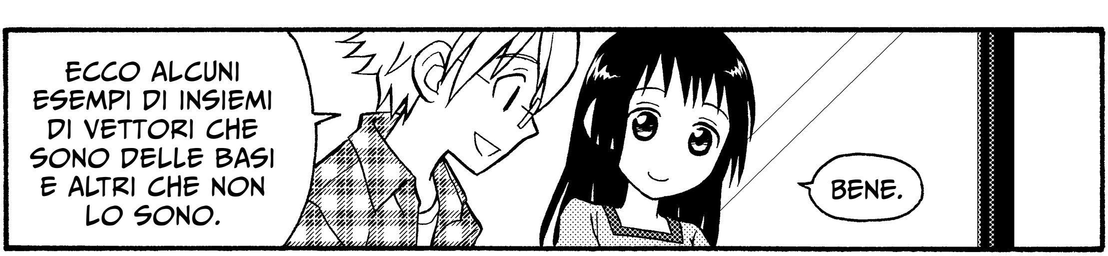
E I VETTORI $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

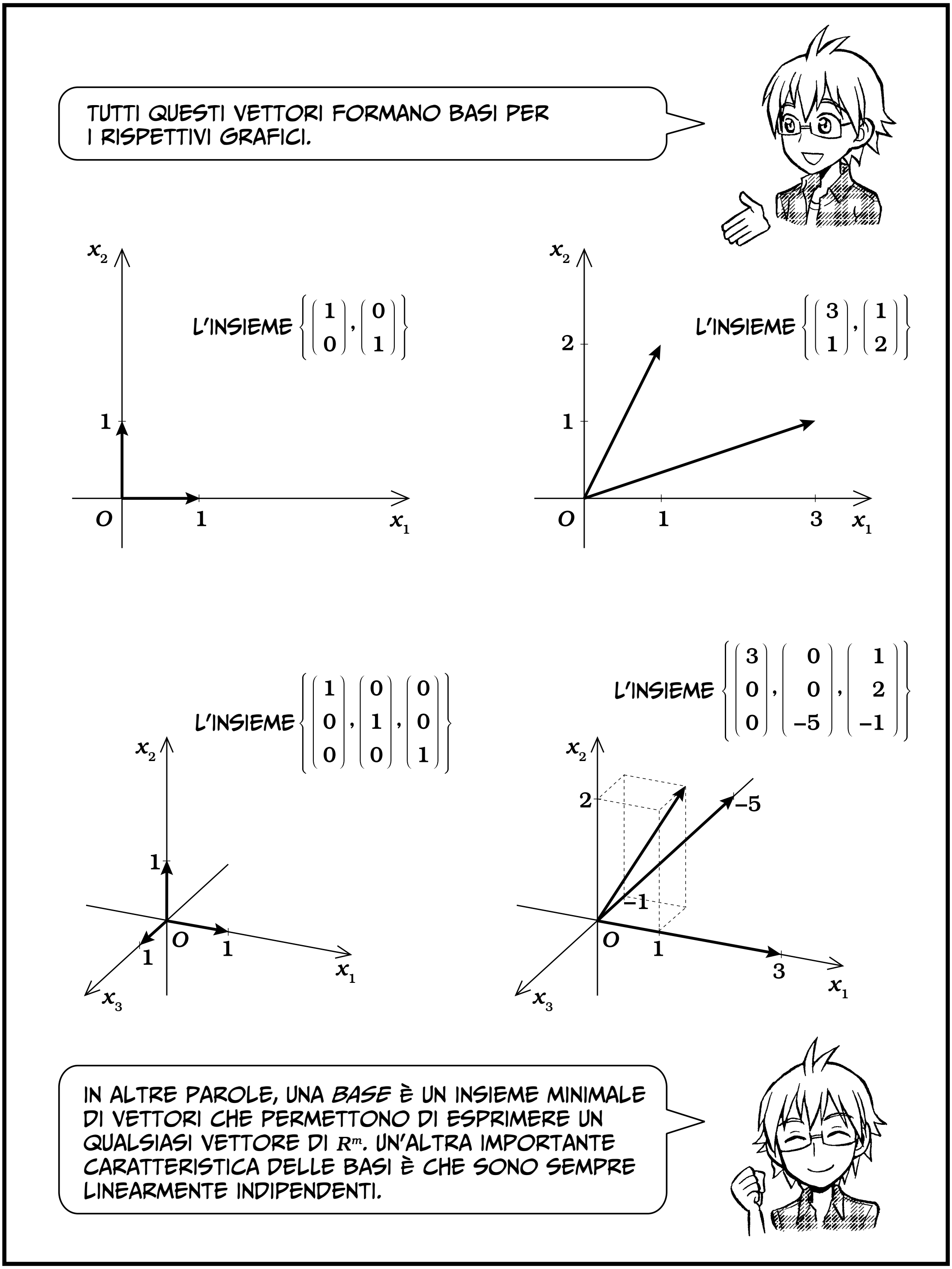
DEL PROBLEMA 5 ERANO BASI, MENTRE I VETTORI

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

DEL PROBLEMA 6 NO?

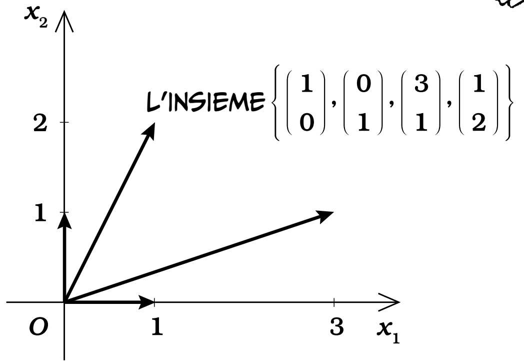






TUTTI QUESTI VETTORI FORMANO BASI PER I RISPETTIVI GRAFICI.
L'INSIEME $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$
L'INSIEME $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$
L'INSIEME $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$
L'INSIEME $\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$
x_1 x_2 x_3 O
IN ALTRE PAROLE, UNA *BASE* È UN INSIEME MINIMALE DI VETTORI CHE PERMETTONO DI ESPRIMERE UN QUALSIASI VETTORE DI R^m. UN'ALTRA IMPORTANTE CARATTERISTICA DELLE BASI È CHE SONO SEMPRE LINEARMENTE INDIPENDENTI.

I VETTORI DI QUESTO INSIEME NON FORMANO UNA BASE.



PER CAPIRE PERCHÉ NON FORMANO UNA BASE, GUARDIAMO LA SEGUENTE EQUAZIONE:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

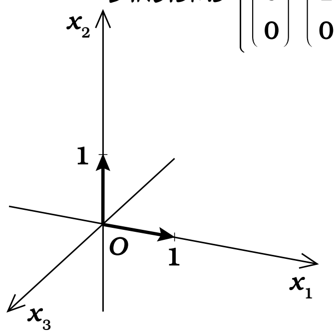
DOVE $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ È UN VETTORE ARBITRARIO DI R^2.

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ SI PUÒ FORMARE IN MOLTI MODI DIVERSI (USANDO SCELTE DIVERSE PER c_1, c_2, c_3, E c_4).

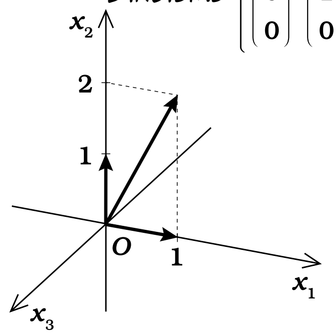
QUINDI QUESTO INSIEME NON È "UN INSIEME MINIMALE DI VETTORI CHE PERMETTONO DI ESPRIMERE UN QUALSIASI VETTORE DI R^m."

NESSUNO DEI DUE INSIEMI DI VETTORI QUI SOTTO È IN GRADO DI DESCRIVERE IL VETTORE $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, E SE NON NE POSSONO DESCRIVERE UNO, SICURAMENTE NON POSSONO DESCRIVERE "UN QUALSIASI VETTORE DI R^3." QUINDI NON SONO BASI.

L'INSIEME $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$



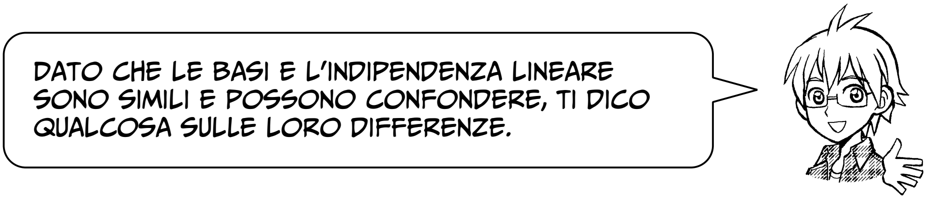
L'INSIEME $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$



IL SOLO FATTO CHE UN INSIEME DI VETTORI SIA LINEARMENTE INDIPENDENTE NON VUOL DIRE CHE FORMI UNA BASE.

PER ESEMPIO, L'INSIEME $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ È UNA BASE,

MENTRE L'INSIEME $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ NO, NONOSTANTE SIANO ENTRAMBI LINEARMENTE INDIPENDENTI.



INDIPENDENZA LINEARE

Definiamo un insieme di vettori $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}$ linearmente indipendente

se c'è un'unica soluzione $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \quad\vdots \\ c_n = 0 \end{cases}$

all'equazione $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

in cui il primo membro è il vettore nullo di R^m.

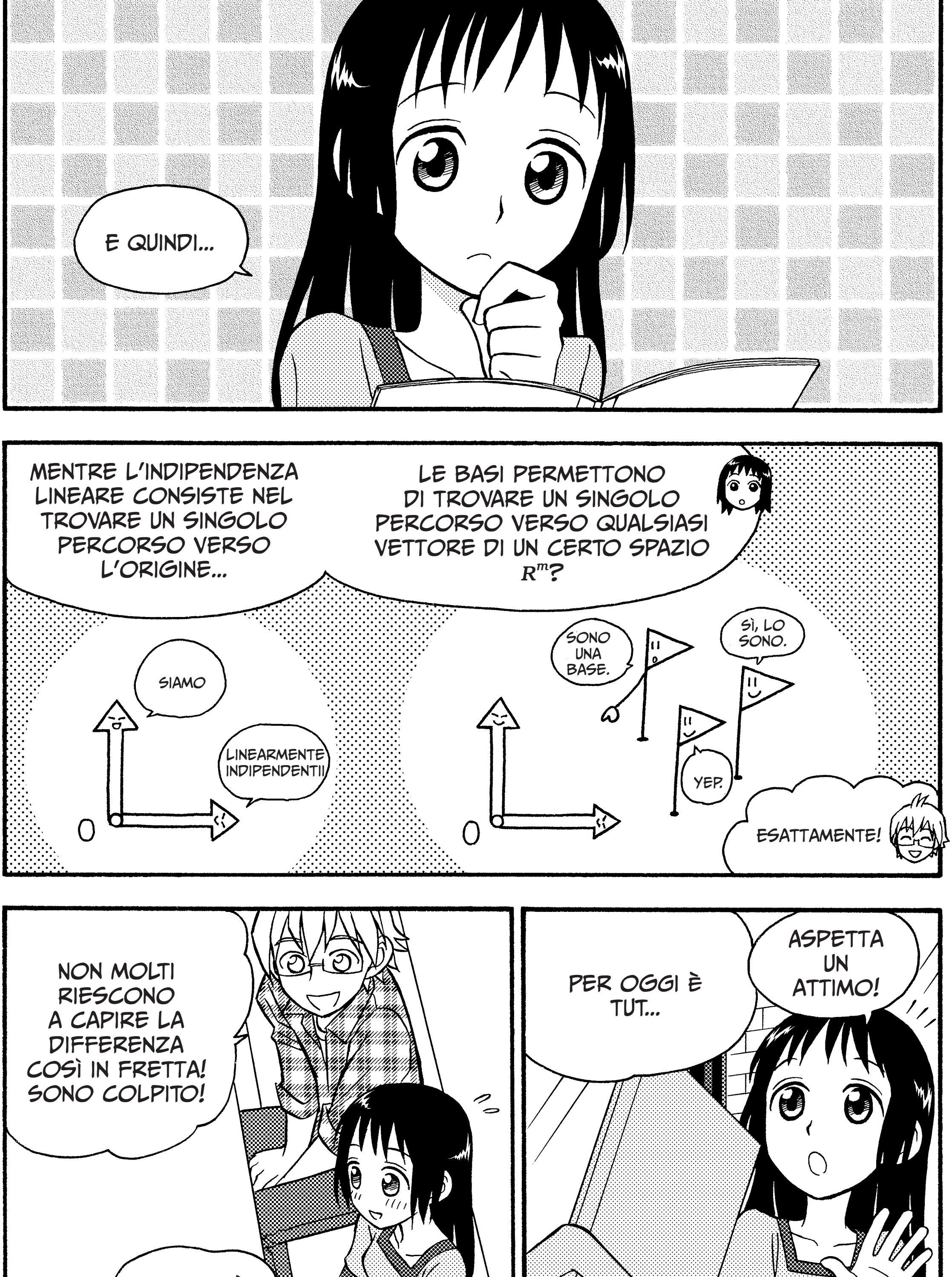
BASI

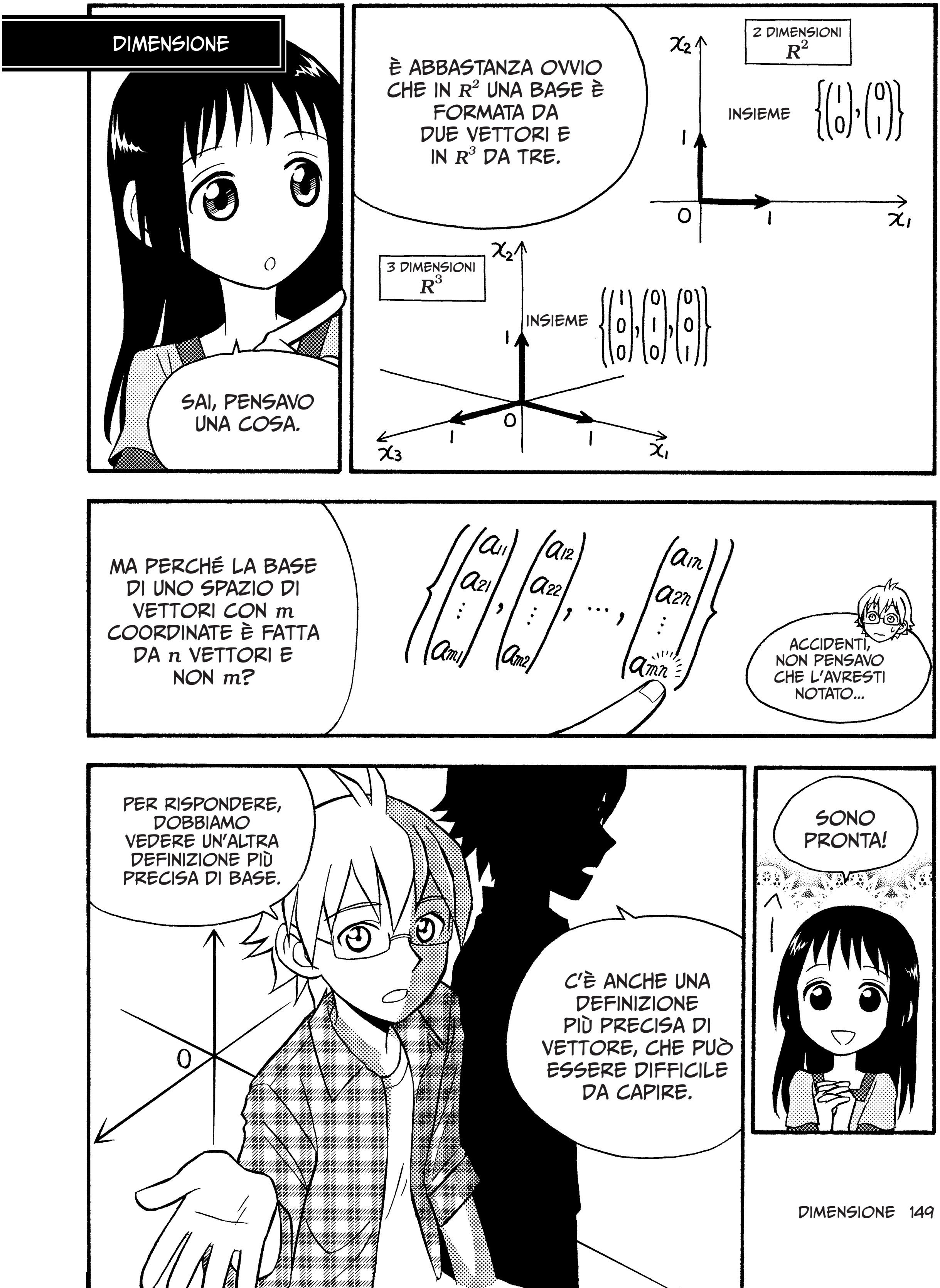
Un insieme di vettori $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}$ forma una base se c'è

un'unica soluzione all'equazione $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

in cui il primo membro è un vettore arbitrario $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ di R^m. E, di nuovo, una base

è un insieme minimale di vettori che permettono di esprimere un qualsiasi vettore di R^m.


E QUINDI...
MENTRE L'INDIPENDENZA LINEARE CONSISTE NEL TROVARE UN SINGOLO PERCORSO VERSO L'ORIGINE...
LE BASI PERMETTONO DI TROVARE UN SINGOLO PERCORSO VERSO QUALSIASI VETTORE DI UN CERTO SPAZIO R^m?
SIAMO
LINEARMENTE INDIPENDENTI!
O
SONO UNA BASE.
SÌ, LO SONO.
YEP.
O
ESATTAMENTE!
NON MOLTI RIESCONO A CAPIRE LA DIFFERENZA COSÌ IN FRETTA! SONO COLPITO!
CHE SARÀ MAI!
PER OGGI È TUT...
ASPETTA UN ATTIMO!



DIMENSIONE
SAI, PENSAVO UNA COSA.
È ABBASTANZA OVVIO CHE IN R^2 UNA BASE È FORMATA DA DUE VETTORI E IN R^3 DA TRE.
2 DIMENSIONI R^2
INSIEME $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$
x_2 1 0 1 x_1
3 DIMENSIONI R^3
INSIEME $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$
x_2 1 0 1 1 x_3 x_1
MA PERCHÉ LA BASE DI UNO SPAZIO DI VETTORI CON m COORDINATE È FATTA DA n VETTORI E NON m?
$\left\{\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}\right\}$
ACCIDENTI, NON PENSAVO CHE L'AVRESTI NOTATO...
PER RISPONDERE, DOBBIAMO VEDERE UN'ALTRA DEFINIZIONE PIÙ PRECISA DI BASE.
C'È ANCHE UNA DEFINIZIONE PIÙ PRECISA DI VETTORE, CHE PUÒ ESSERE DIFFICILE DA CAPIRE.
0
SONO PRONTA!


SICURA?
P-PENSO DI SÌ.
IN REALTÀ NON È POI *TANTO* DIFFICILE. È SOLO UN PO' ASTRATTA.
VEDIAMOLA, VISTO CHE LA VUOI PROPRIO SAPERE.
O-OKAY...
MA PRIMA DOBBIAMO AFFRONTARE UN ALTRO CONCETTO NUOVO: I SOTTOSPAZI.
SOTTOSPAZIO
VEDIAMO COSA SONO.
SOTTOSPAZI
SONO FATTI UN PO' COSÌ.
R^m
W
QUINDI È UN SINONIMO DI SOTTOINSIEME?
?
NON PROPRIO. ASPETTA, TE LO SPIEGO MEGLIO.

CHE COS'È UN SOTTOSPAZIO?

Sia c un numero reale qualsiasi e W un sottoinsieme non vuoto di R^m che soddisfa queste due condizioni:

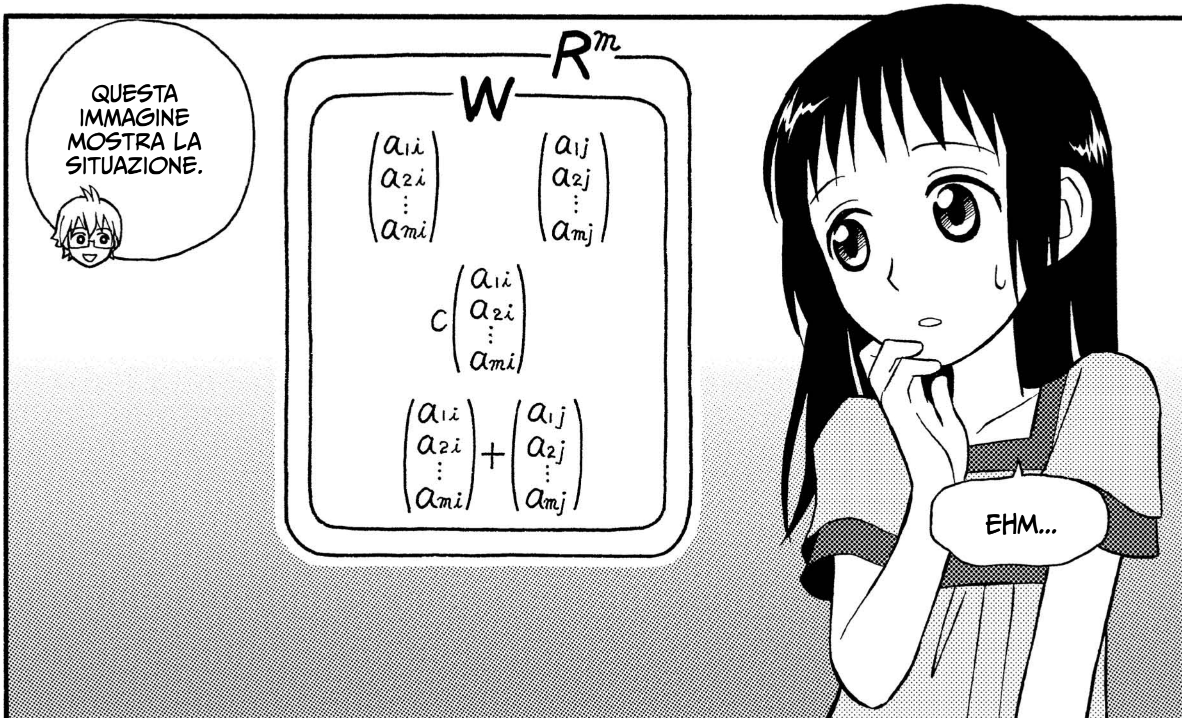
❶ un elemento di W moltiplicato per c è ancora un elemento di W. (chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalari).

$$\text{Se} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in W, \text{ allora } c \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in W$$

❷ la somma di due elementi arbitrari di W è ancora un elemento di W (Chiusura rispetto alla somma).

$$\text{Se} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in W \text{ e } \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in W, \text{ allora } \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in W$$

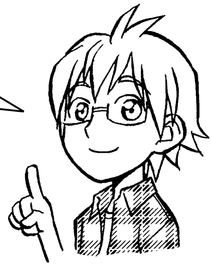
Se valgono entrambe queste condizioni, allora W è un sottospazio di R^m.



È PIUTTOSTO ASTRATTO: FORSE LO DEVI LEGGERE UN PAIO DI VOLTE PRIMA CHE SIA CHIARO.

UN ALTRO MODO PIÙ CONCRETO PER CONSIDERARE I SOTTOSPAZI DI DIMENSIONE 1 È VEDERLI COME RETTE CHE PASSANO PER L'ORIGINE. QUELLI DI DIMENSIONE 2 SONO PIANI PER L'ORIGINE. È POSSIBILE VISUALIZZARE ANCHE ALTRI SOTTOSPAZI, MA NON È ALTRETTANTO FACILE.

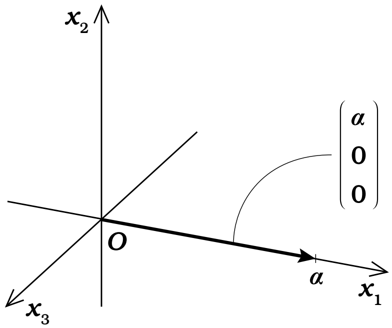
ECCO QUALCHE ESEMPIO DI SPAZIO CHE È UN SOTTOSPAZIO... E ANCHE QUALCUNO CHE NON LO È. DA' UN'OCCHIATA!



QUESTO È UN SOTTOSPAZIO

Guardiamo il sottospazio di R^3 definito dall'insieme

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha \text{ è un} \\ \text{numero reale} \\ \text{arbitrario} \end{array} \right\} \text{ e cioè}$$



Se è veramente un sottospazio, deve soddisfare le due condizioni di cui abbiamo parlato prima.

❶ $$c\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha \text{ è un} \\ \text{numero reale} \\ \text{arbitrario} \end{array} \right\}$$

❷ $$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha \text{ è un} \\ \text{numero reale} \\ \text{arbitrario} \end{array} \right\}$$

Sembra proprio che le soddisfi! Quindi è davvero un sottospazio.

QUESTO NON È UN SOTTOSPAZIO

L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a \text{ è un} \\ \text{numero reale} \\ \text{arbitrario} \end{array} \right\}$ non è un sottospazio di R^3.

Usiamo le nostre condizioni per vedere perché:

❶ $$c\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1{}^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_1{}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ca_1 \\ (ca_1)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a \text{ è un} \\ \text{numero reale} \\ \text{arbitrario} \end{array} \right\}$$

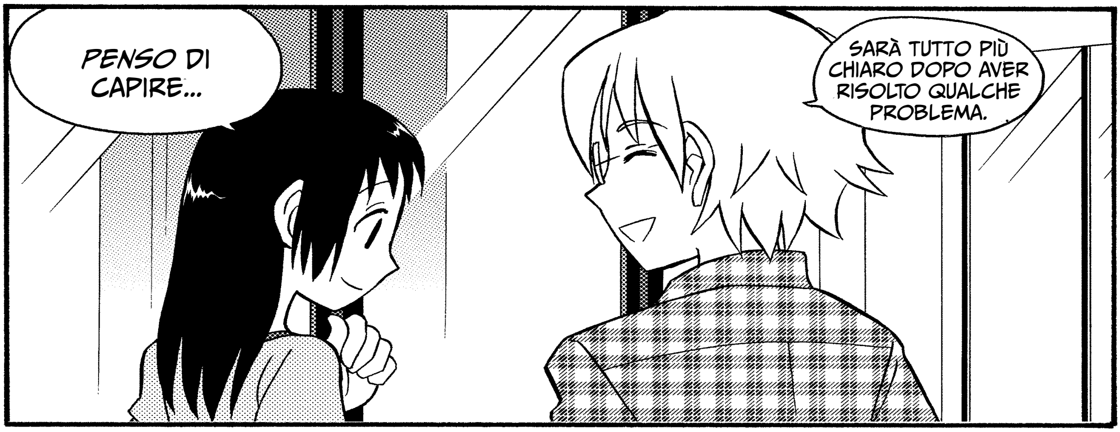
❷ $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1{}^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2{}^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ a_1{}^2+a_2{}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ (a_1+a_2)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a \text{ è un} \\ \text{numero reale} \\ \text{arbitrario} \end{array} \right\}$$

L'insieme non soddisfa nessuna delle due condizioni, e quindi non è un sottospazio!

POTRESTI PENSARE "MA SE USIAMO $a_1 = a_2 = 0$ VALGONO SIA LA ❶ CHE LA ❷ E ALLORA NON DOVREBBE ESSERE UN SOTTOSPAZIO?"

È VERO CHE LE CONDIZIONI VALGONO PER QUESTI VALORI, MA DEVONO VALERE PER VALORI REALI ARBITRARI – CIOÈ PER *TUTTI* I VALORI REALI – E QUINDI NON BASTA VERIFICARLE PER QUALCHE NUMERO SPECIFICO. UN INSIEME DI VETTORI È UN SOTTOSPAZIO SOLO SE ENTRAMBE LE CONDIZIONI VALGONO PER OGNI POSSIBILE VETTORE.

SE ANCORA NON TI È CHIARO, NON TI ARRENDERE! NON È FACILE!



CHE COS'È UNO "SPAN"?

Diciamo che un insieme di vettori di dimensione m

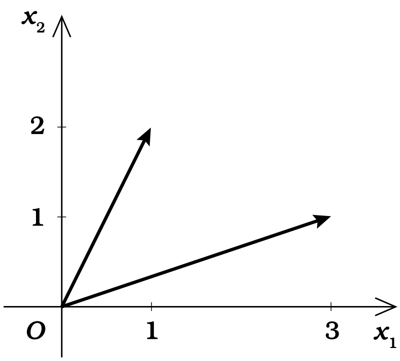
$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ genera il seguente sottoinsieme di } R^m:$$

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c_1, c_2, \text{ e } c_n \text{ sono} \\ \text{numeri arbitrari} \end{array} \right\}$$

Questo insieme è l'insieme delle combinazioni lineari degli n vettori di partenza, è un sottospazio di R^m e viene detto "*span*" lineare degli n vettori.

ESEMPIO 1

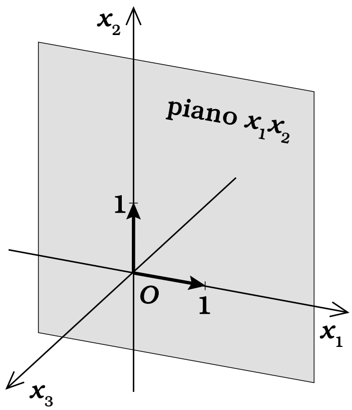
Il piano x_1x_2 è un sottospazio di R^2 e si può generare, per esempio, usando i due vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ così: $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c_1 \text{ e } c_2 \text{ sono} \\ \text{numeri arbitrari} \end{array} \right\}$



ESEMPIO 2

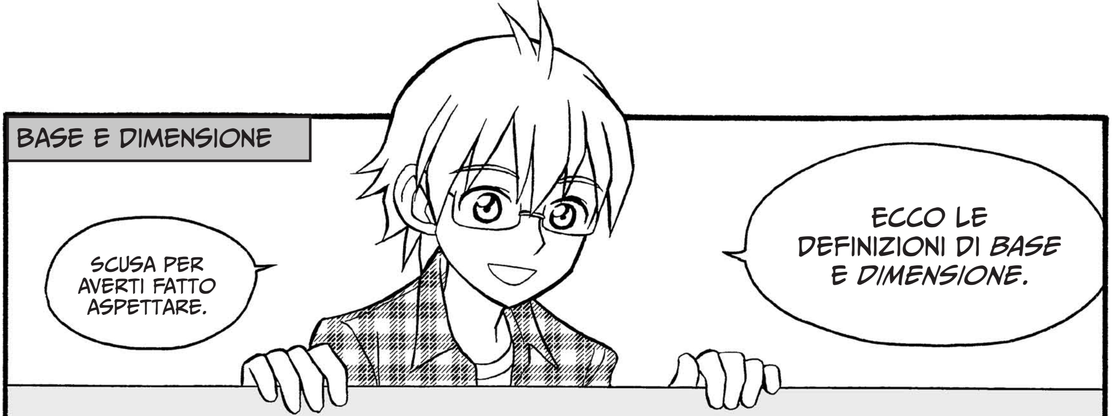
Il piano x_1x_2 si può vedere anche come sottospazio di R^3, e lo possiamo generare usando i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ottenendo questo insieme:

$$\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c_1 \text{ e } c_2 \text{ sono} \\ \text{numeri arbitrari} \end{array} \right\}$$



ANCHE TUTTO R^m È UN SOTTOSPAZIO DI SE STESSO, COME AVRAI INTUITO DALL'ESEMPIO 1.

QUALSIASI SOTTOSPAZIO CONTIENE IL VETTORE NULLO: L'AVRAI CAPITO VEDENDO L'ESEMPIO A PAGINA 152. RICORDA: DEVONO PASSARE PER L'ORIGINE! $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$



CHE COSA SONO LE BASI E LA DIMENSIONE?

Supponiamo che W sia un sottospazio di R^m e che sia generato dai vettori

linearmente indipendenti $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$.

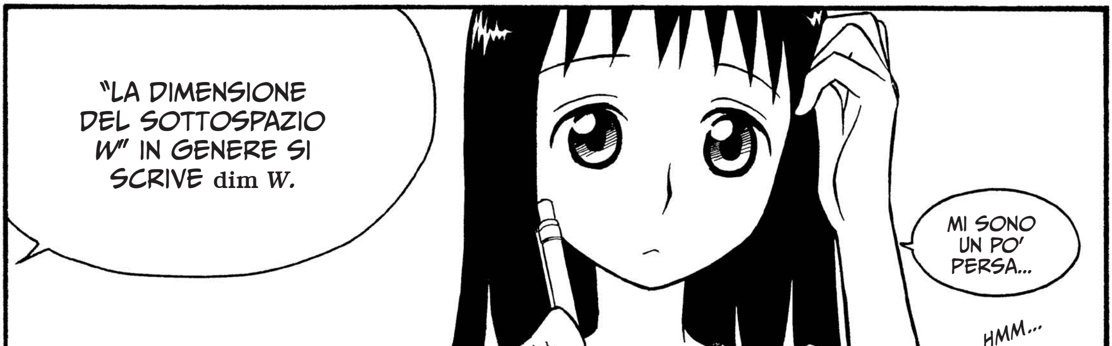
Lo possiamo anche scrivere così:

$$W = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} c_1, c_2, \text{ e } c_n \text{ sono} \\ \text{numeri arbitrari} \end{array} \right\}$$

Quando vale questa uguaglianza, diciamo che l'insieme è una base per il sottospazio W.

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ 21 \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}$$

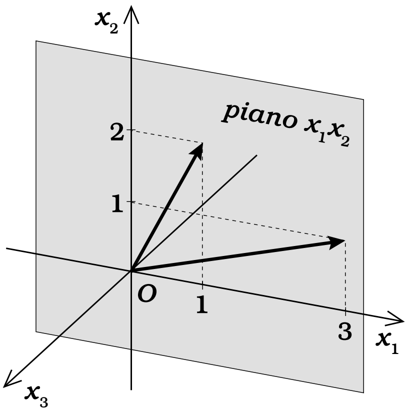
La *dimensione* del sottospazio W è uguale al numero di vettori in una qualsiasi base di W.



ESEMPIO

Chiamiamo W, per comodità, il piano x_1x_2. Consideriamo allora W come un sottospazio di R^3, generato dai vettori linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

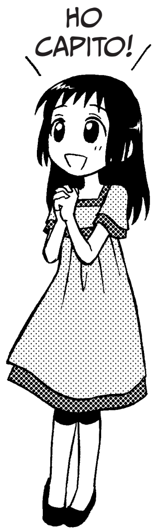


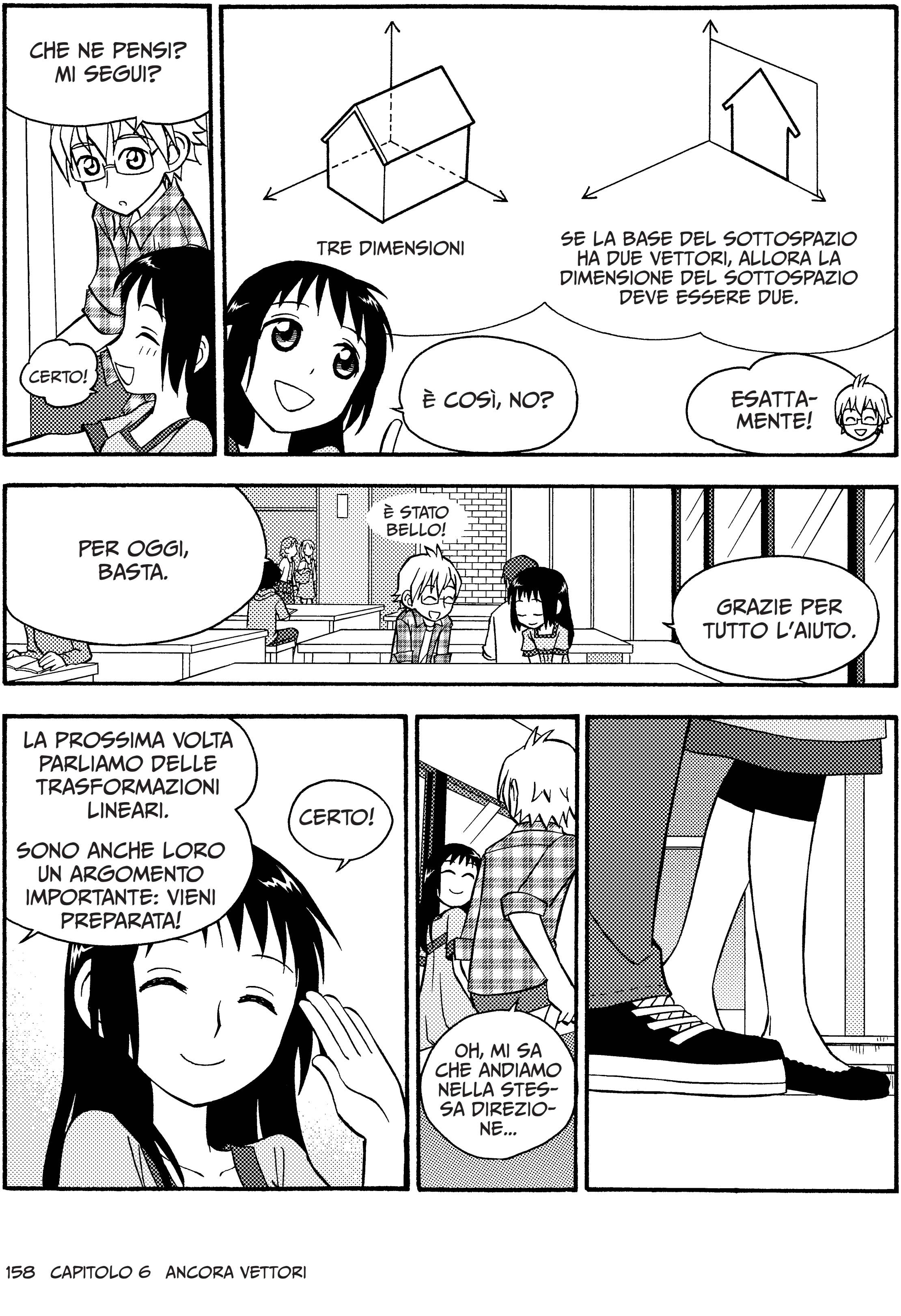
Abbiamo quindi:

$$W = \left\{ c_1\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix}c_1 \text{ e } c_2 \text{ sono}\\ \text{numeri arbitrari}\end{matrix} \right\}$$

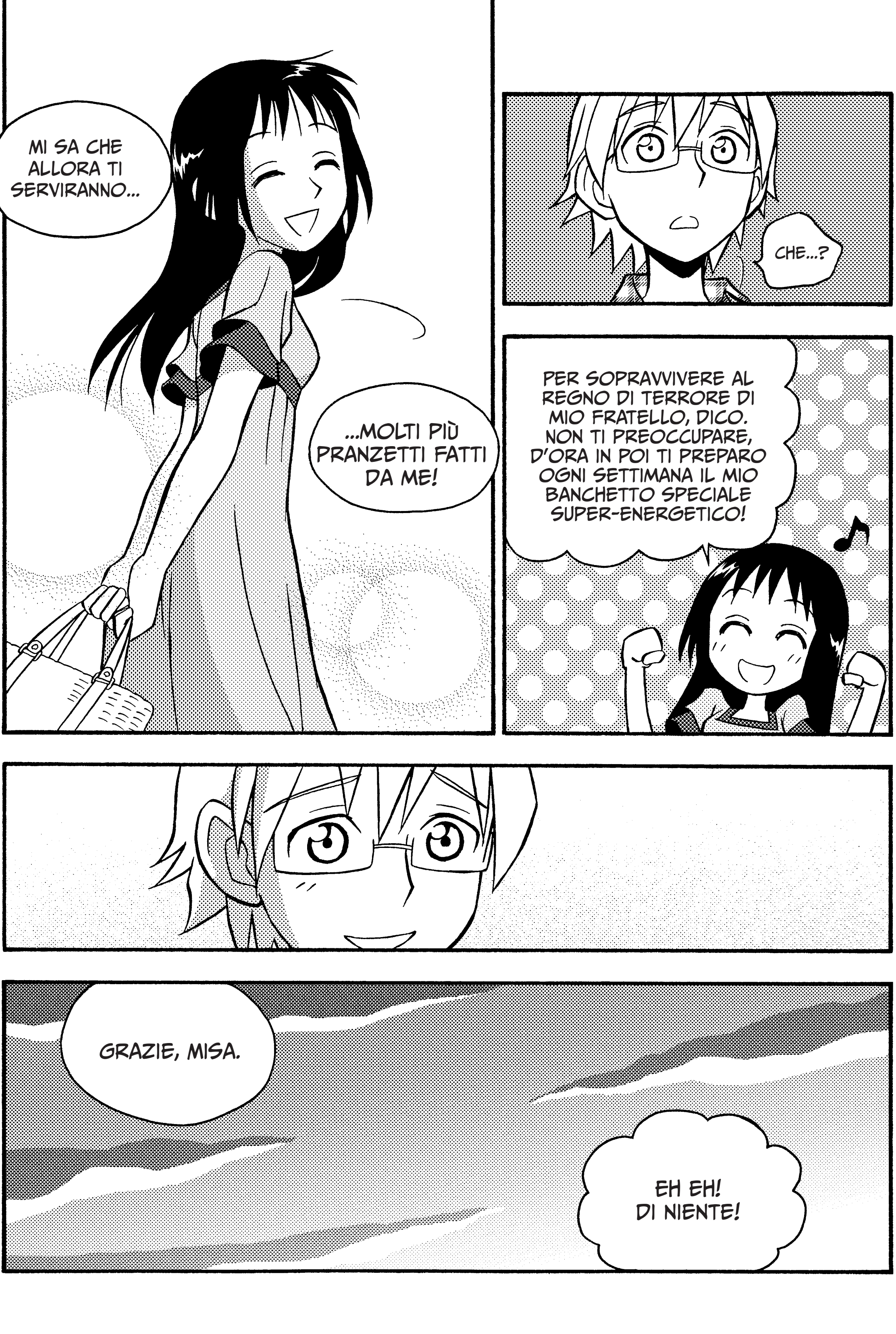
Il fatto che valga questa uguaglianza significa che l'insieme di vettori $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$

è una base del sottospazio W.
Dato che è formata da due vettori, dim $W = 2$.



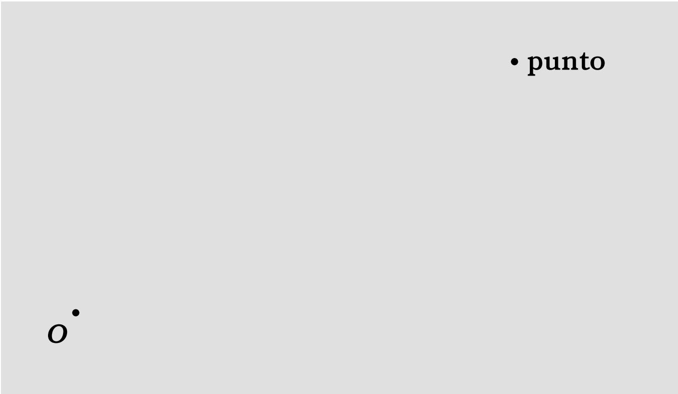

CHE NE PENSI? MI SEGUI?
CERTO!
TRE DIMENSIONI
SE LA BASE DEL SOTTOSPAZIO HA DUE VETTORI, ALLORA LA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO DEVE ESSERE DUE.
È COSÌ, NO?
ESATTAMENTE!
PER OGGI, BASTA.
È STATO BELLO!
GRAZIE PER TUTTO L'AIUTO.
LA PROSSIMA VOLTA PARLIAMO DELLE TRASFORMAZIONI LINEARI.
SONO ANCHE LORO UN ARGOMENTO IMPORTANTE: VIENI PREPARATA!
CERTO!
OH, MI SA CHE ANDIAMO NELLA STESSA DIREZIONE...


...
EHM, PRIMA NON HO VERAMENTE RISPOSTO ALLA TUA DOMANDA...
?
MI SONO ISCRITTO AL CLUB DI KARATE PERCHÉ...
SONO STUFO DI ESSERE UN RAMMOLLITO.
VOGLIO DIVENTARE PIÙ FORTE.
COSÌ POSSO...
BE'...


MI SA CHE ALLORA TI SERVIRANNO...
...MOLTI PIÙ PRANZETTI FATTI DA ME!
CHE...?
PER SOPRAVVIVERE AL REGNO DI TERRORE DI MIO FRATELLO, DICO. NON TI PREOCCUPARE, D'ORA IN POI TI PREPARO OGNI SETTIMANA IL MIO BANCHETTO SPECIALE SUPER-ENERGETICO!
GRAZIE, MISA.
EH EH! DI NIENTE!

COORDINATE

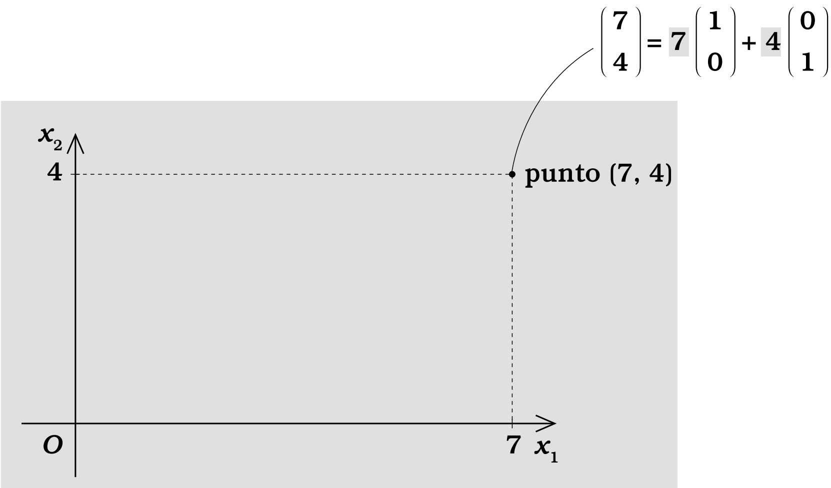
In algebra lineare le coordinate sono un po’ diverse da come le avete viste alle superiori. Cerchiamo di capire la differenza usando questa immagine.



Quando si lavora con le coordinate e i sistemi di coordinate al livello di scuola superiore, è molto più facile usare solo la base banale:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

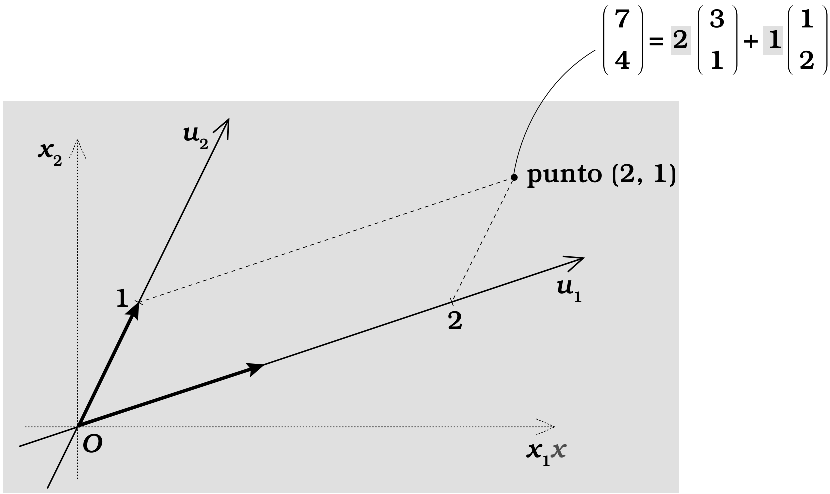
In questo tipo di sistema, interpretiamo così la relazione fra l’origine e il punto in alto a destra:



È importante capire che, passando all'algebra lineare, la base banale è solo una fra tantissime basi possibili, e che usando le altre troviamo relazioni diverse fra l'origine e un dato punto. L'immagine qui sotto mostra il punto (2, 1) in un sistema che usa la base non banale formata dai due vettori

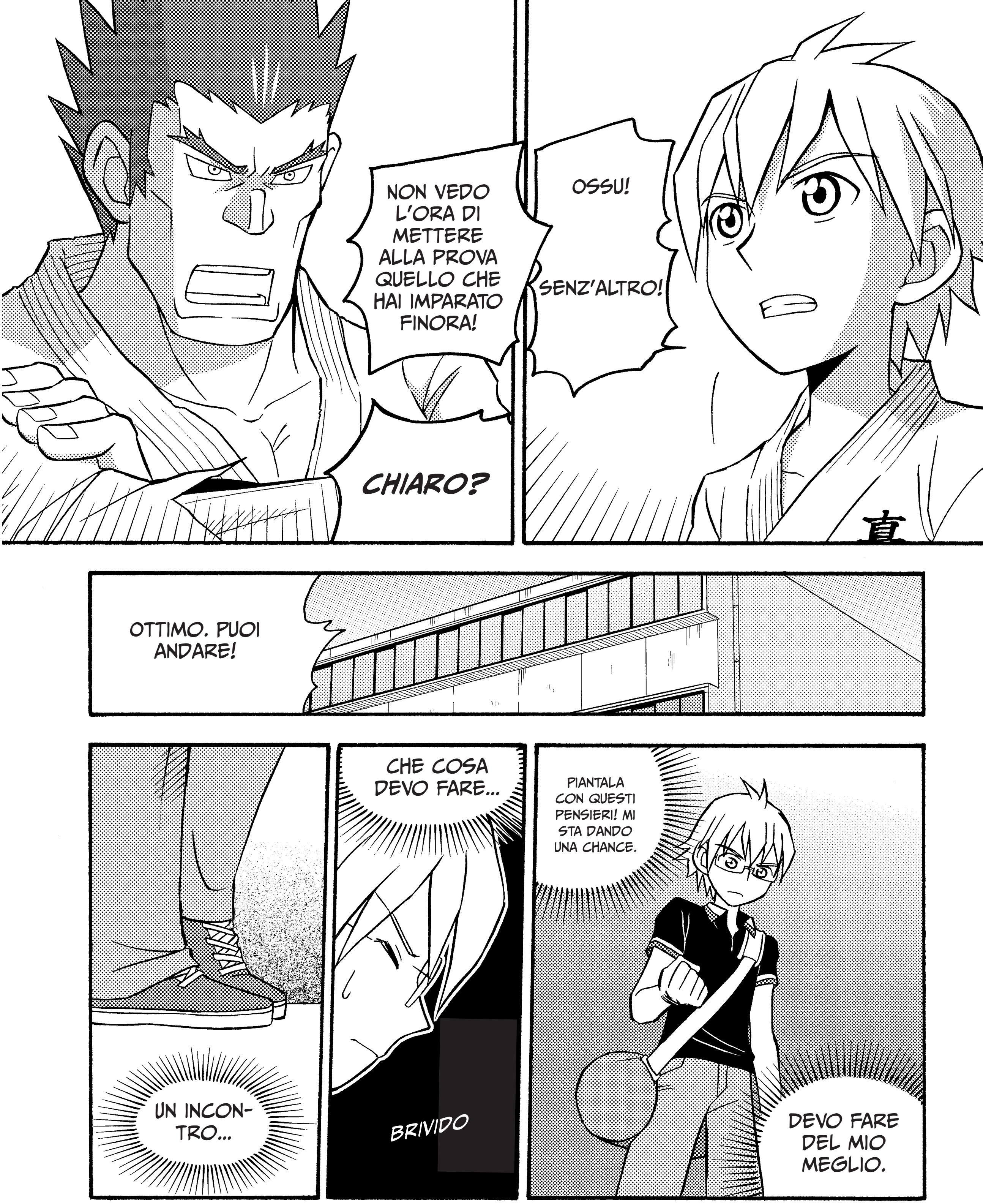
$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

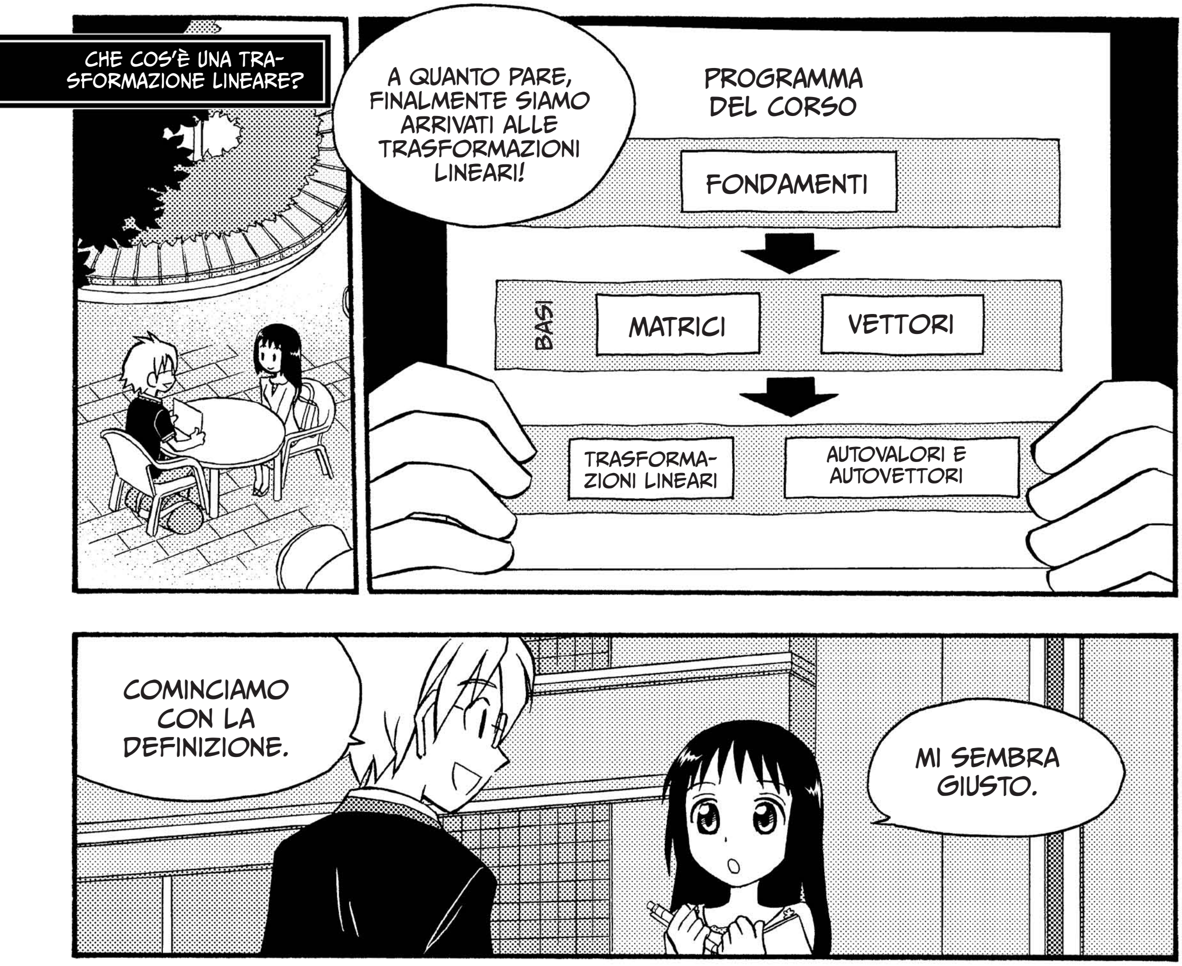
Questo modo alternativo per pensare alle coordinate è utilissimo per esempio in statistica, nell'analisi fattoriale.



7
TRASFORMAZIONI LINEARI


UN INCONTRO AMICHEVOLE CON L'UNIVERSITÀ NANHOU?
PROPRIO COSÌ! LI AFFRONTEREMO FRA DUE SETTIMANE.
UN INCONTRO, EH? MI SA CHE NON MI VORRANNO.
YURINO!
CI SARAI ANCHE TU.
COSA?!
SUL SERIO?
EHM, SENSEI... NON È UN PO' PRESTO PER...
MI STAI DICENDO CHE COSA DEVO FARE?
OH, NO! CERTO CHE NO!
SLAM


NON VEDO L'ORA DI METTERE ALLA PROVA QUELLO CHE HAI IMPARATO FINORA!
CHIARO?
OSSU!
SENZ'ALTRO!
OTTIMO. PUOI ANDARE!
UN INCON-TRO...
CHE COSA DEVO FARE...
BRIVIDO
PIANTALA CON QUESTI PENSIERI! MI STA DANDO UNA CHANCE.
DEVO FARE DEL MIO MEGLIO.



TRASFORMAZIONI LINEARI

Siano x_i e x_j due elementi arbitrari, c un numero reale arbitrario e f una funzione da X a Y.

f è detta *trasformazione lineare* da X a Y se soddisfa le due condizioni seguenti:

❶ **$f(x_i) + f(x_j)$ e $f(x_i + x_j)$ sono uguali**

❷ **$cf(x_i)$ e $f(cx_i)$ sono uguali.**

TRASFORMAZIONI LINEARI

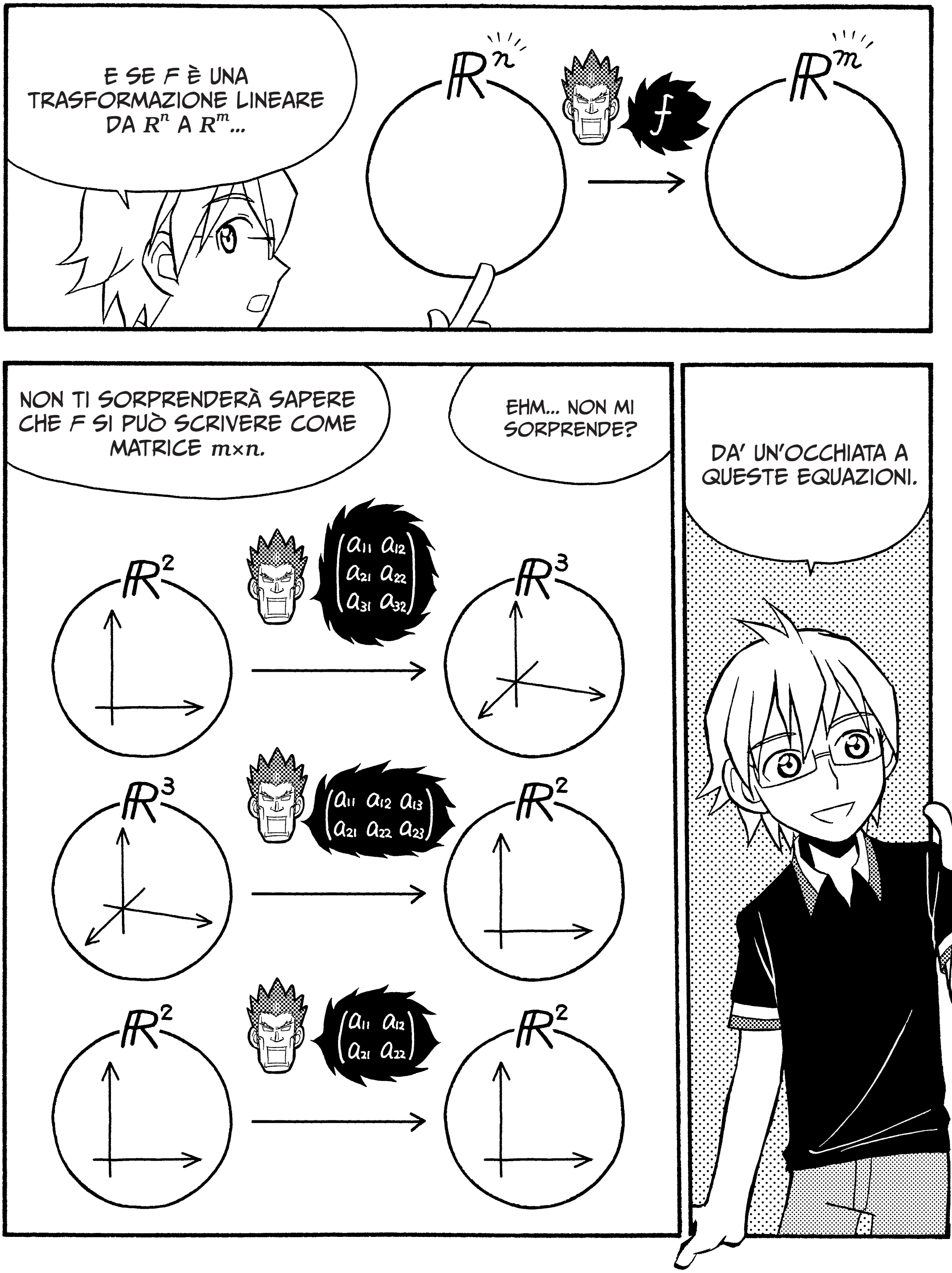
Siano $\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ due elementi arbitrari di R^n, c un numero reale arbitrario e f una funzione da R^n a R^m.

Diciamo che f è una trasformazione lineare da R^n a R^m se soddisfa le seguenti due condizioni:

❶ $f\left(\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}\right)$ **e** $f\left(\begin{pmatrix} x_{1i} + x_{1j} \\ x_{2i} + x_{2j} \\ \vdots \\ x_{ni} + x_{nj} \end{pmatrix}\right)$ **sono uguali.**

❷ $cf\left(\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}\right)$ **e** $f\left(c\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}\right)$ **sono uguali.**

Una trasformazione lineare da R^n a R^m è detta a volte *applicazione lineare* o *mappa lineare*.


E SE F È UNA TRASFORMAZIONE LINEARE DA R^n A R^m...
$\mathbb{R}^n$
f
$\mathbb{R}^m$
NON TI SORPRENDERÀ SAPERE CHE F SI PUÒ SCRIVERE COME MATRICE $m\times n$.
EHM... NON MI SORPRENDE?
DA' UN'OCCHIATA A QUESTE EQUAZIONI.
$\mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^3$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2$

❶ Prima verifichiamo la prima regola: $f\left(\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_{1i} + x_{1j} \\ x_{2i} + x_{2j} \\ \vdots \\ x_{ni} + x_{nj} \end{pmatrix}\right)$

Basta sostituire f con una matrice e poi svolgere i calcoli:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_{1i} + a_{12}x_{2i} + \ldots + a_{1n}x_{ni} \\ a_{21}x_{1i} + a_{22}x_{2i} + \ldots + a_{2n}x_{ni} \\ \vdots \\ a_{m1}x_{1i} + a_{m2}x_{2i} + \ldots + a_{mn}x_{ni} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \ldots + a_{1n}x_{nj} \\ a_{21}x_{1j} + a_{22}x_{2j} + \ldots + a_{2n}x_{nj} \\ \vdots \\ a_{m1}x_{1j} + a_{m2}x_{2j} + \ldots + a_{mn}x_{nj} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(x_{1i} + x_{1j}) + a_{12}(x_{2i} + x_{2j}) + \ldots + a_{1n}(x_{ni} + x_{nj}) \\ a_{21}(x_{1i} + x_{1j}) + a_{22}(x_{2i} + x_{2j}) + \ldots + a_{2n}(x_{ni} + x_{nj}) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_{1i} + x_{1j}) + a_{m2}(x_{2i} + x_{2j}) + \ldots + a_{mn}(x_{ni} + x_{nj}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1i} + x_{1j} \\ x_{2i} + x_{2j} \\ \vdots \\ x_{ni} + x_{nj} \end{pmatrix}$$

❷ Per quanto riguarda la seconda regola: $cf\left(\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}\right) = f\left(c\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}\right)$

Anche qui, sostituiamo f con una matrice e svolgiamo i calcoli:

$$c\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$$

$$= c\begin{pmatrix} a_{11}x_{1i} + a_{12}x_{2i} + \ldots + a_{1n}x_{ni} \\ a_{21}x_{1i} + a_{22}x_{2i} + \ldots + a_{2n}x_{ni} \\ \vdots \\ a_{m1}x_{1i} + a_{m2}x_{2i} + \ldots + a_{mn}x_{ni} \end{pmatrix}$$

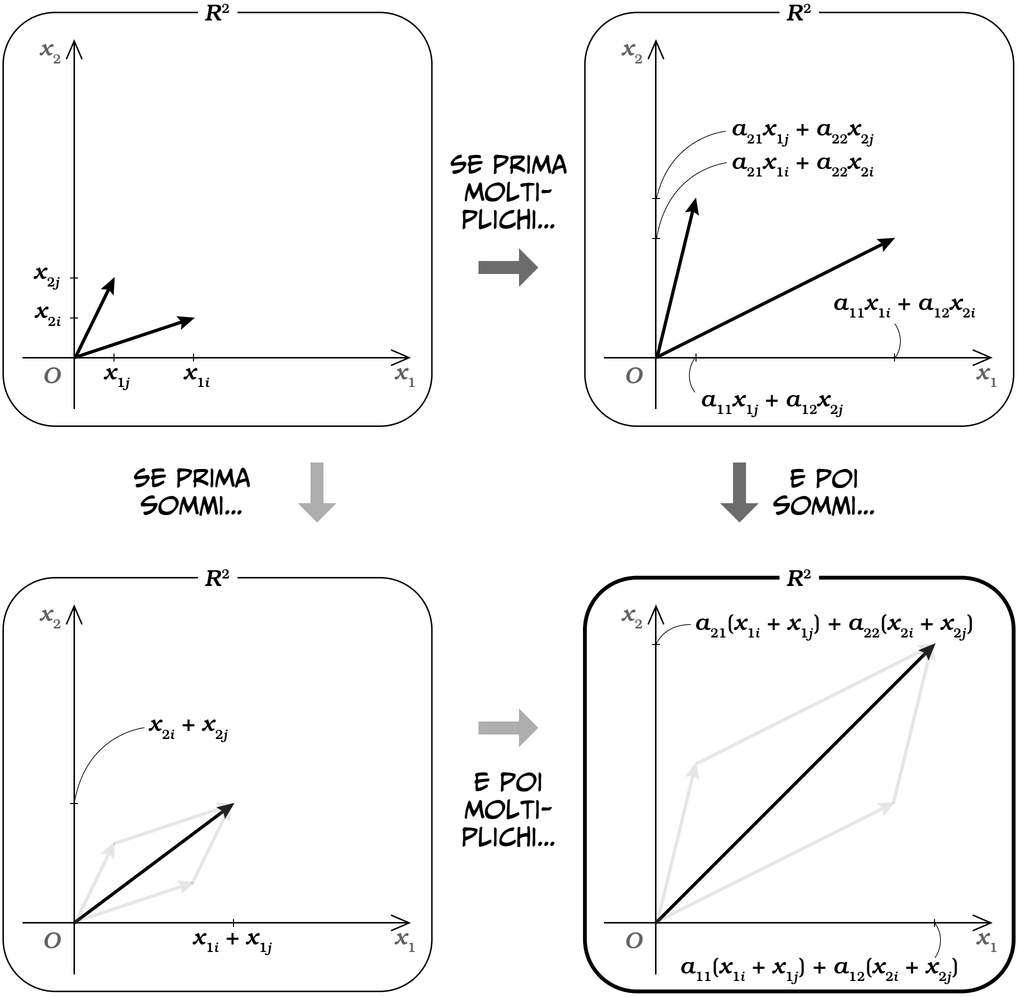
$$= \begin{pmatrix} a_{11}(cx_{1i}) + a_{12}(cx_{2i}) + \ldots + a_{1n}(cx_{ni}) \\ a_{21}(cx_{1i}) + a_{22}(cx_{2i}) + \ldots + a_{2n}(cx_{ni}) \\ \vdots \\ a_{m1}(cx_{1i}) + a_{m2}(cx_{2i}) + \ldots + a_{mn}(cx_{ni}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cx_{1i} \\ cx_{2i} \\ \vdots \\ cx_{ni} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\left[c\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}\right]$$

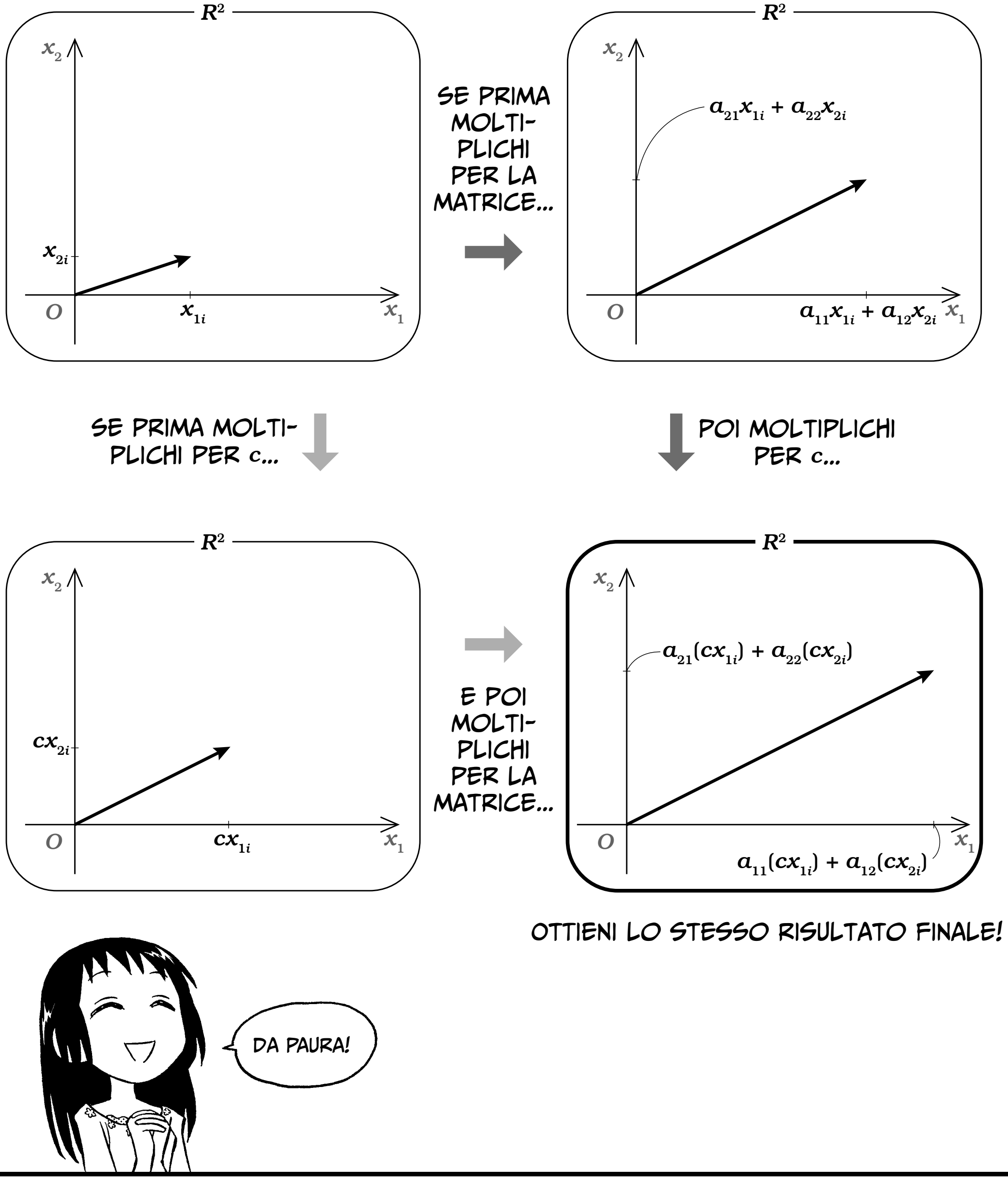
❶ **Mostriamo che vale la prima regola:**

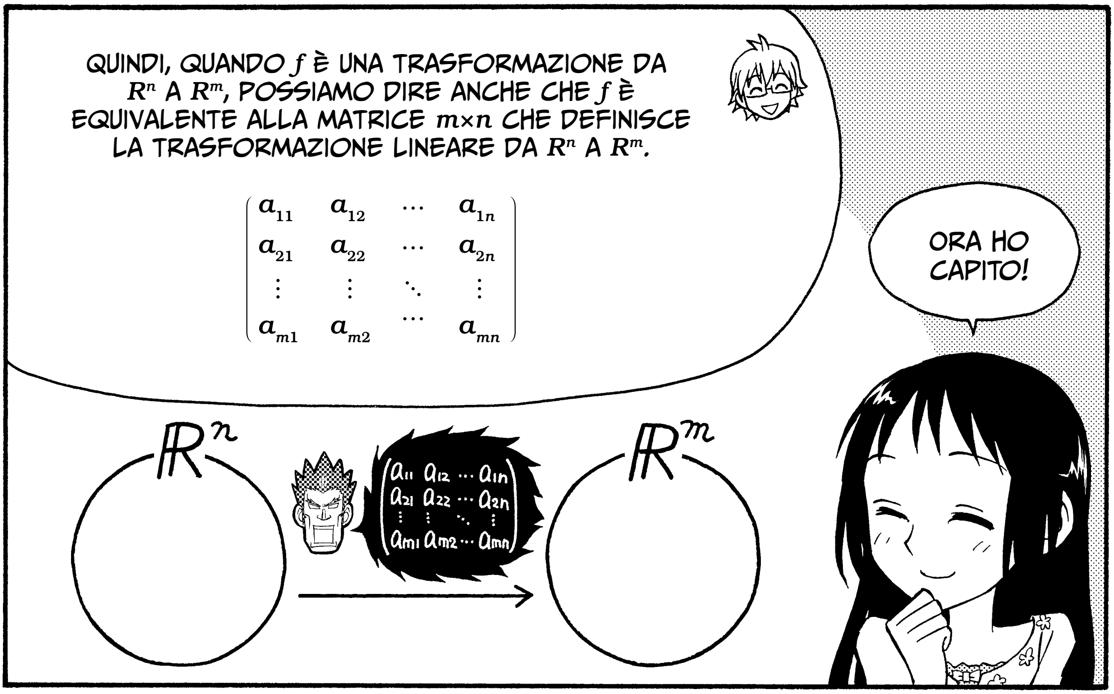
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1i} + x_{1j} \\ x_{2i} + x_{2j} \end{pmatrix}$$



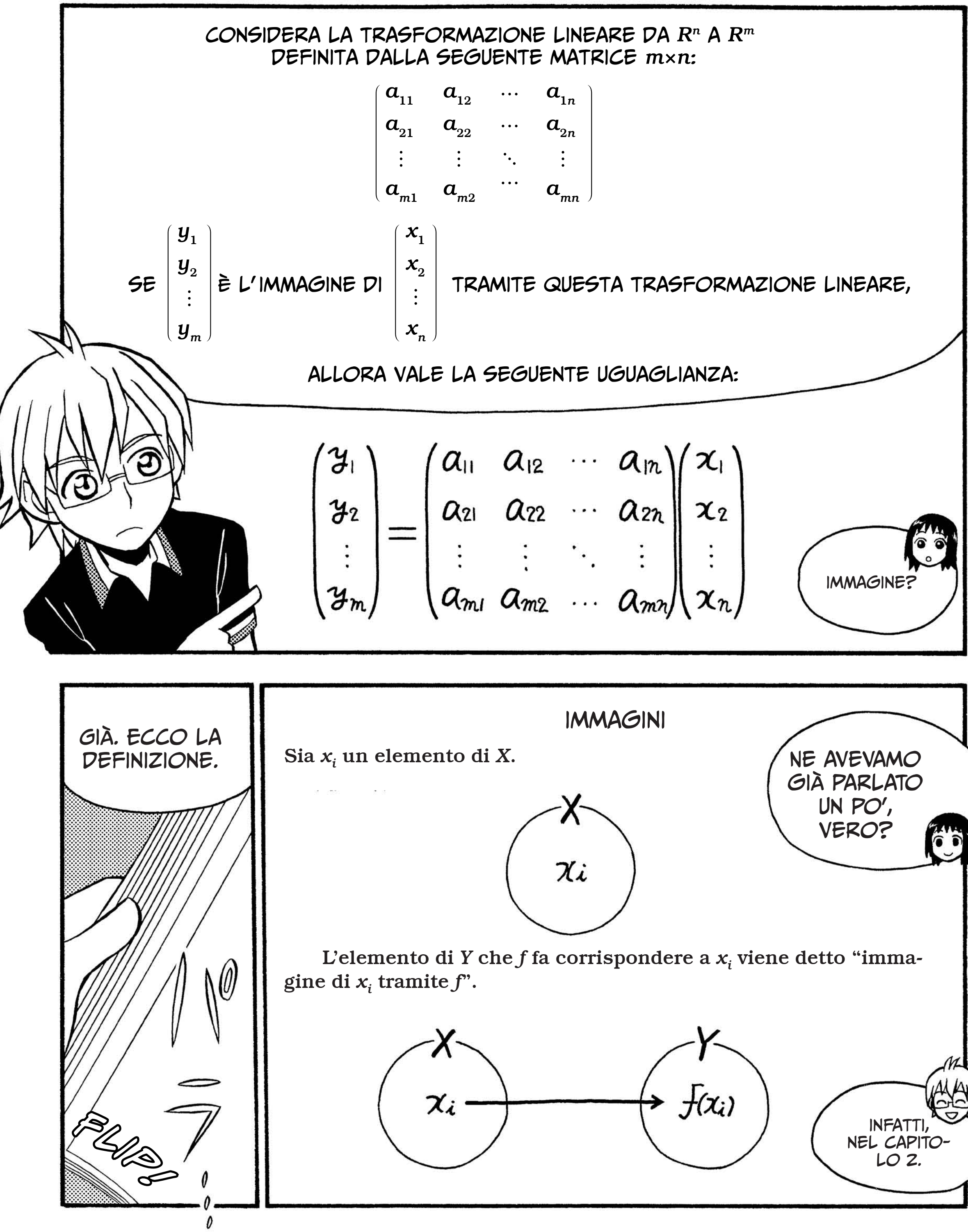
OTTIENI LO STESSO RISULTATO FINALE!

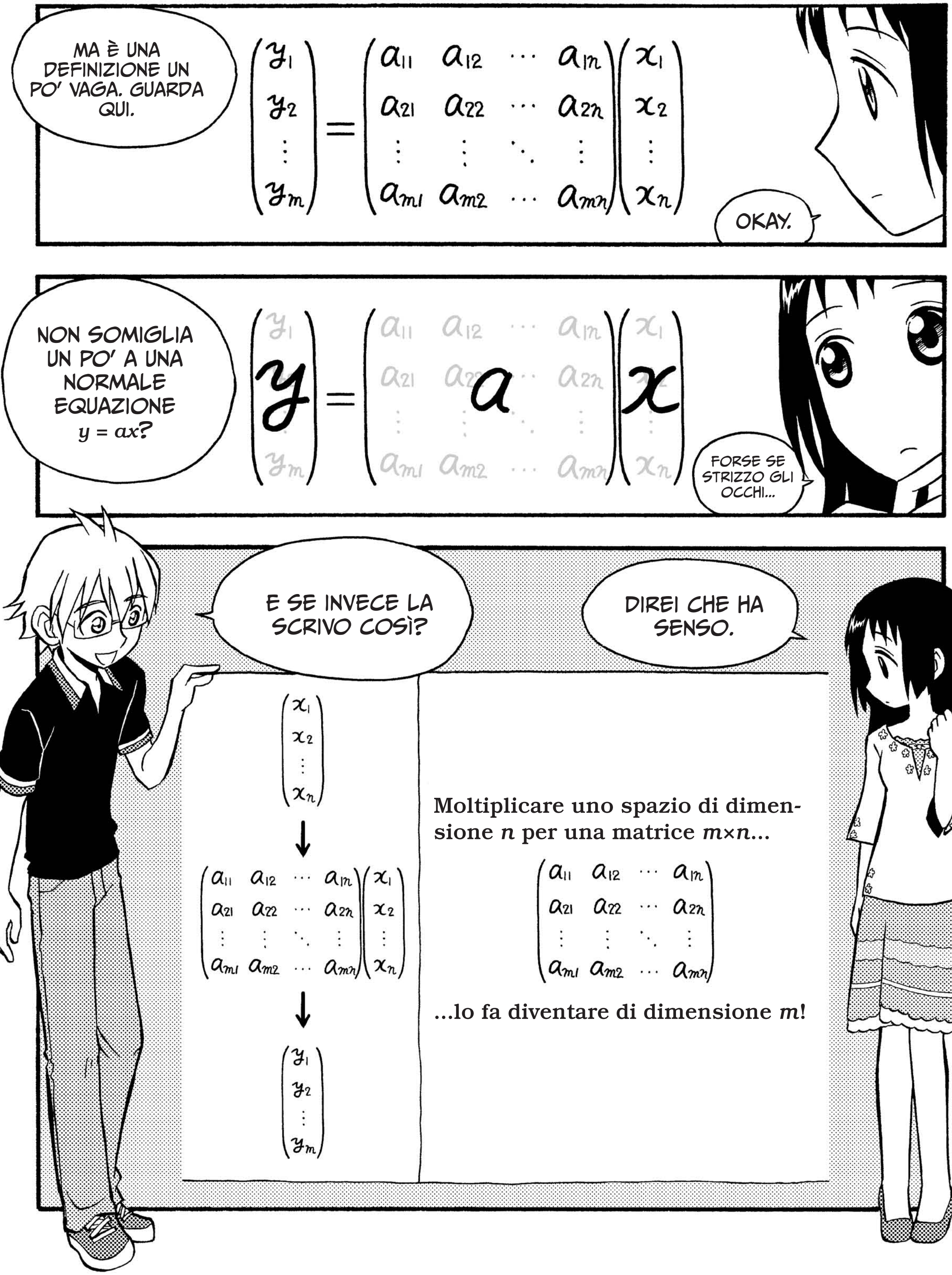
❷ E anche la seconda regola: $c\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\left[c\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{pmatrix}\right]$

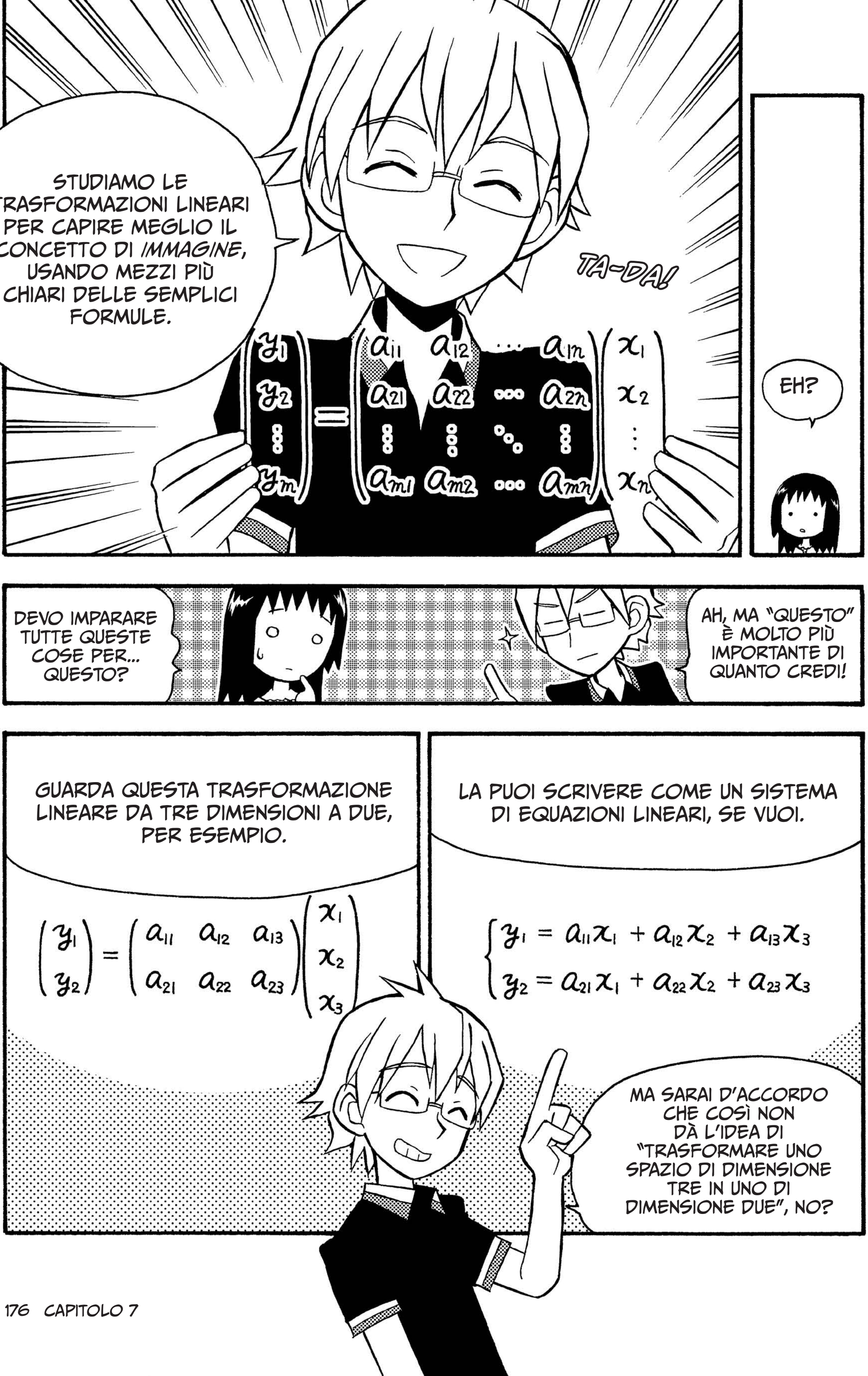


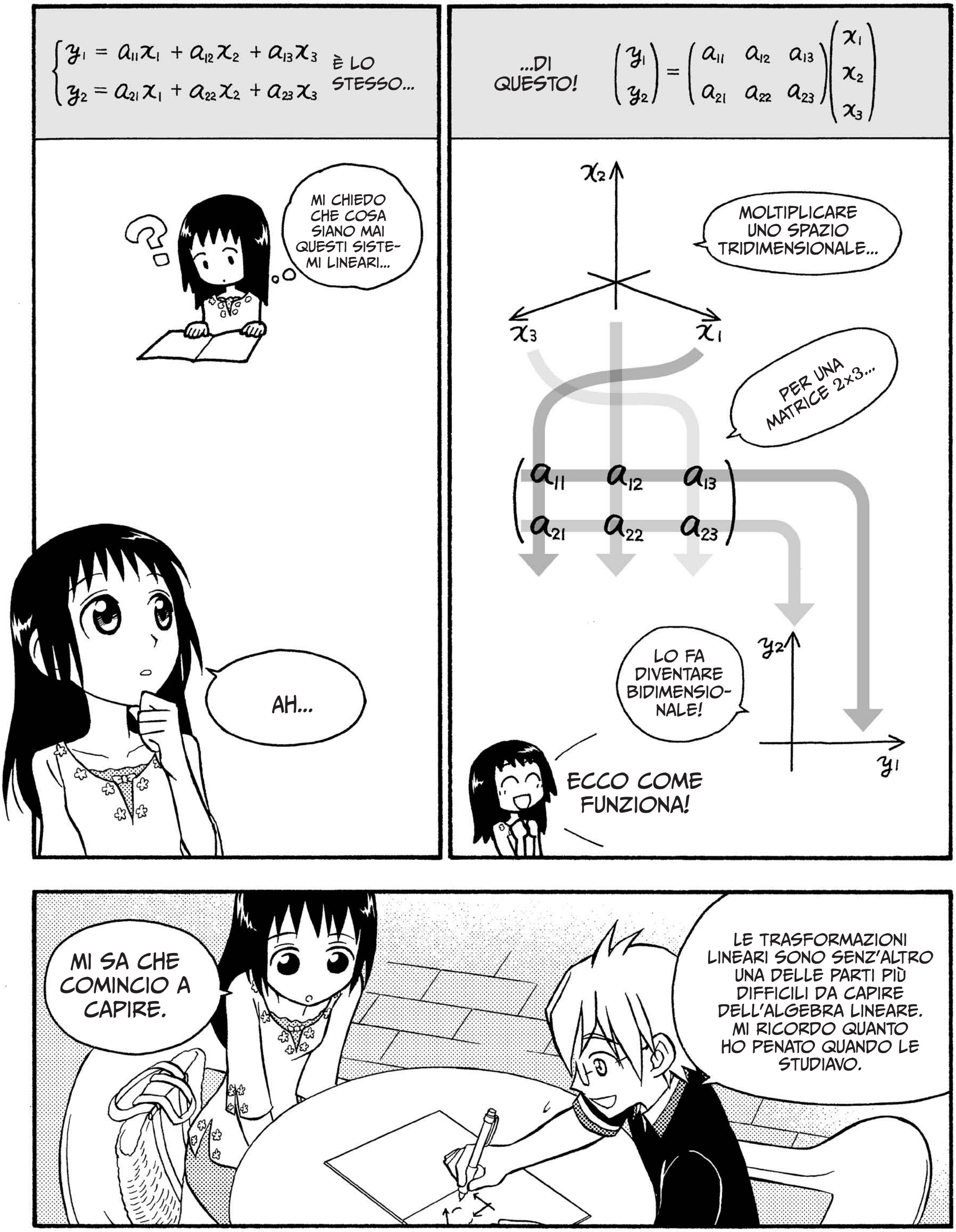


PERCHÉ STUDIAMO LE TRASFORMAZIONI LINEARI

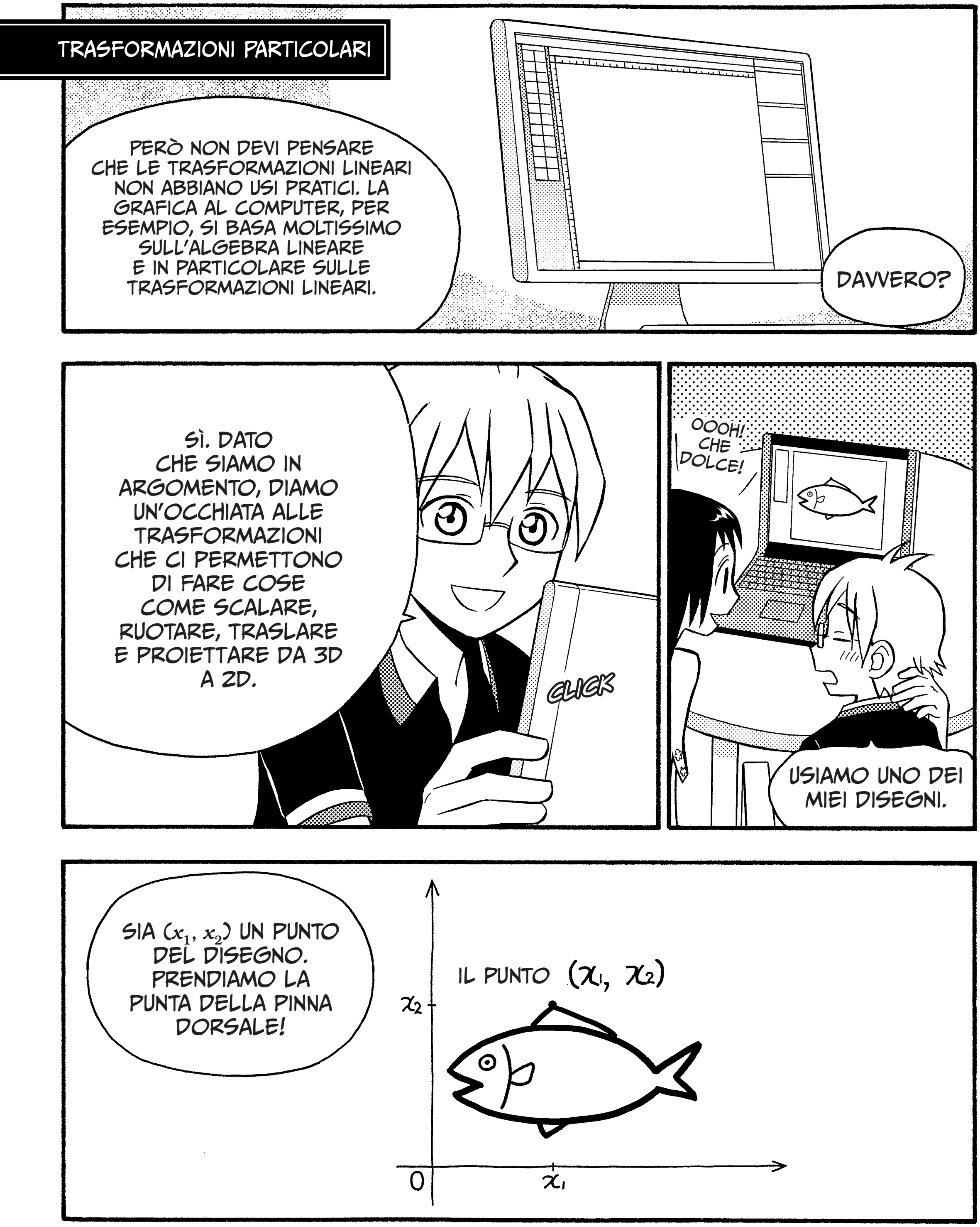

CONSIDERA LA TRASFORMAZIONE LINEARE DA R^n A R^m DEFINITA DALLA SEGUENTE MATRICE $m \times n$:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
SE $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ È L'IMMAGINE DI $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ TRAMITE QUESTA TRASFORMAZIONE LINEARE,
ALLORA VALE LA SEGUENTE UGUAGLIANZA:
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
IMMAGINE?
GIÀ. ECCO LA DEFINIZIONE.
FLIP!
IMMAGINI
Sia x_i un elemento di X.
X
x_i
NE AVEVAMO GIÀ PARLATO UN PO', VERO?
L'elemento di Y che f fa corrispondere a x_i viene detto "immagine di x_i tramite f".
X
Y
x_i
$f(x_i)$
INFATTI, NEL CAPITOLO 2.

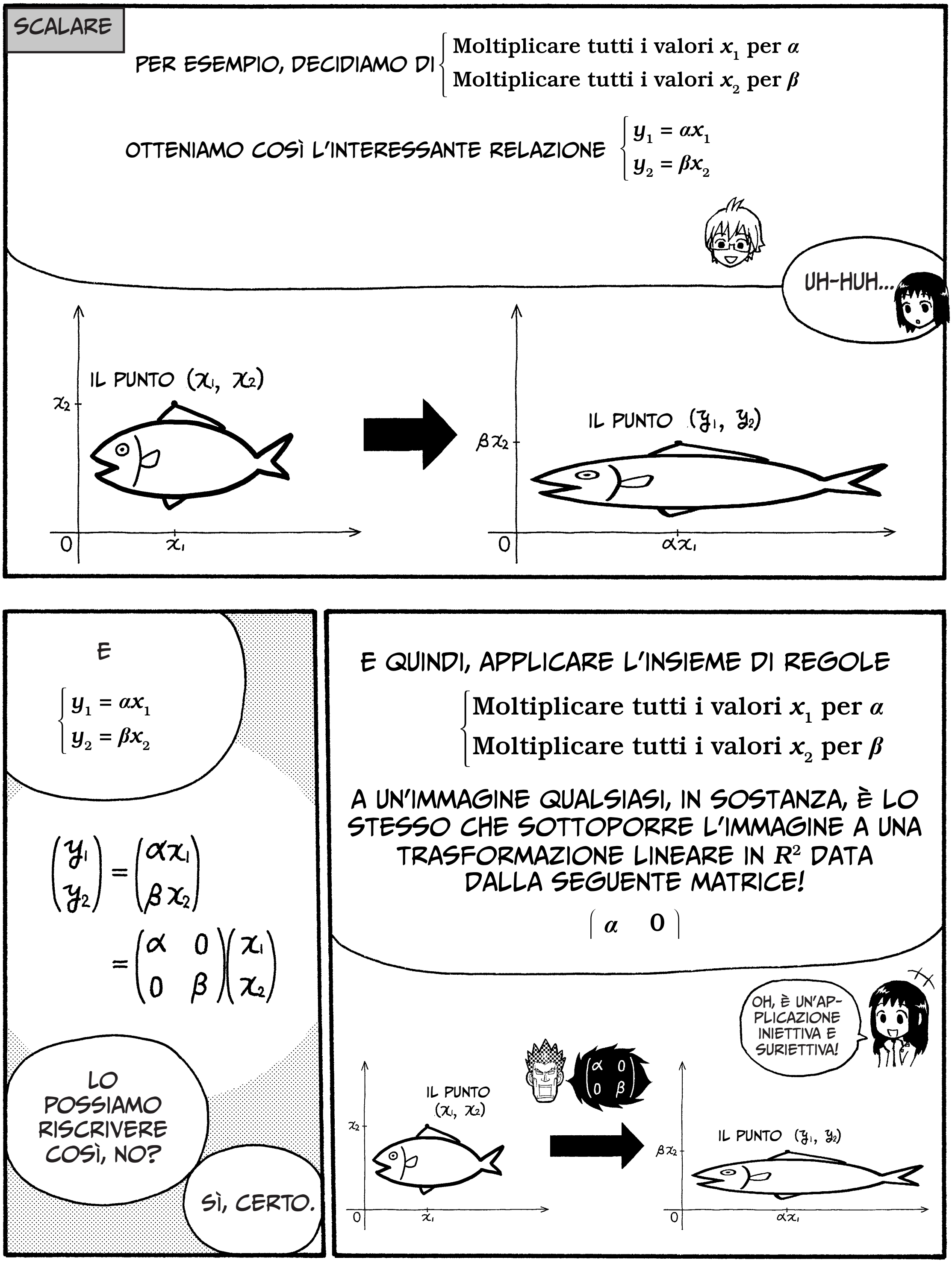

MA È UNA DEFINIZIONE UN PO' VAGA. GUARDA QUI.
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
OKAY.
NON SOMIGLIA UN PO' A UNA NORMALE EQUAZIONE $y = ax$?
$y = a x$
FORSE SE STRIZZO GLI OCCHI...
E SE INVECE LA SCRIVO COSÌ?
DIREI CHE HA SENSO.
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \downarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \downarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$
Moltiplicare uno spazio di dimensione n per una matrice $m \times n$...
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
...lo fa diventare di dimensione m!


STUDIAMO LE TRASFORMAZIONI LINEARI PER CAPIRE MEGLIO IL CONCETTO DI *IMMAGINE*, USANDO MEZZI PIÙ CHIARI DELLE SEMPLICI FORMULE.
TA-DA!
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
EH?
DEVO IMPARARE TUTTE QUESTE COSE PER... QUESTO?
AH, MA "QUESTO" È MOLTO PIÙ IMPORTANTE DI QUANTO CREDI!
GUARDA QUESTA TRASFORMAZIONE LINEARE DA TRE DIMENSIONI A DUE, PER ESEMPIO.
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
LA PUOI SCRIVERE COME UN SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI, SE VUOI.
$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$$
MA SARAI D'ACCORDO CHE COSÌ NON DÀ L'IDEA DI "TRASFORMARE UNO SPAZIO DI DIMENSIONE TRE IN UNO DI DIMENSIONE DUE", NO?



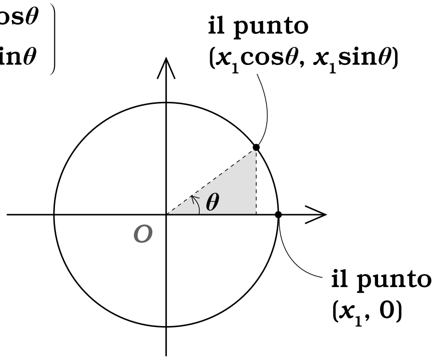
$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$
È LO STESSO...
MI CHIEDO CHE COSA SIANO MAI QUESTI SISTE-MI LINEARI...
AH...
...DI QUESTO!
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
x_2
x_3
x_1
MOLTIPLICARE UNO SPAZIO TRIDIMENSIONALE...
PER UNA MATRICE 2×3...
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$
LO FA DIVENTARE BIDIMENSIO-NALE!
y_2
y_1
ECCO COME FUNZIONA!
MI SA CHE COMINCIO A CAPIRE.
LE TRASFORMAZIONI LINEARI SONO SENZ'ALTRO UNA DELLE PARTI PIÙ DIFFICILI DA CAPIRE DELL'ALGEBRA LINEARE. MI RICORDO QUANTO HO PENATO QUANDO LE STUDIAVO.


TRASFORMAZIONI PARTICOLARI
PERÒ NON DEVI PENSARE CHE LE TRASFORMAZIONI LINEARI NON ABBIANO USI PRATICI. LA GRAFICA AL COMPUTER, PER ESEMPIO, SI BASA MOLTISSIMO SULL'ALGEBRA LINEARE E IN PARTICOLARE SULLE TRASFORMAZIONI LINEARI.
DAVVERO?
SÌ. DATO CHE SIAMO IN ARGOMENTO, DIAMO UN'OCCHIATA ALLE TRASFORMAZIONI CHE CI PERMETTONO DI FARE COSE COME SCALARE, RUOTARE, TRASLARE E PROIETTARE DA 3D A 2D.
CLICK
OOOH! CHE DOLCE!
USIAMO UNO DEI MIEI DISEGNI.
SIA (x_1, x_2) UN PUNTO DEL DISEGNO. PRENDIAMO LA PUNTA DELLA PINNA DORSALE!
IL PUNTO (x_1, x_2)
x_2
0
x_1

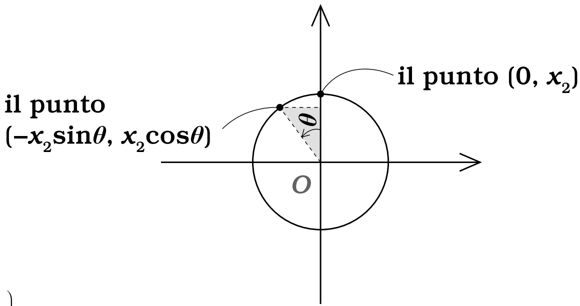

SCALARE
PER ESEMPIO, DECIDIAMO DI
Moltiplicare tutti i valori x_1 per α
Moltiplicare tutti i valori x_2 per β
OTTENIAMO COSÌ L'INTERESSANTE RELAZIONE
$y_1 = \alpha x_1$
$y_2 = \beta x_2$
UH-HUH...
IL PUNTO (x_1, x_2)
x_2
0
x_1
IL PUNTO (y_1, y_2)
βx_2
0
αx_1
E
$y_1 = \alpha x_1$
$y_2 = \beta x_2$
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \beta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
LO POSSIAMO RISCRIVERE COSÌ, NO?
SÌ, CERTO.
E QUINDI, APPLICARE L'INSIEME DI REGOLE
Moltiplicare tutti i valori x_1 per α
Moltiplicare tutti i valori x_2 per β
A UN'IMMAGINE QUALSIASI, IN SOSTANZA, È LO STESSO CHE SOTTOPORRE L'IMMAGINE A UNA TRASFORMAZIONE LINEARE IN R^2 DATA DALLA SEGUENTE MATRICE!
α 0
OH, È UN'APPLICAZIONE INIETTIVA E SURIETTIVA!
$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$
IL PUNTO (x_1, x_2)
x_2
0
x_1
IL PUNTO (y_1, y_2)
βx_2
0
αx_1

ROTAZIONE

- **Ruotando** $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **di** θ* **gradi otteniamo** $\begin{pmatrix} x_1\cos\theta \\ x_1\sin\theta \end{pmatrix}$



- **Ruotando** $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ **di** θ **gradi otteniamo** $\begin{pmatrix} -x_2\sin\theta \\ x_2\cos\theta \end{pmatrix}$

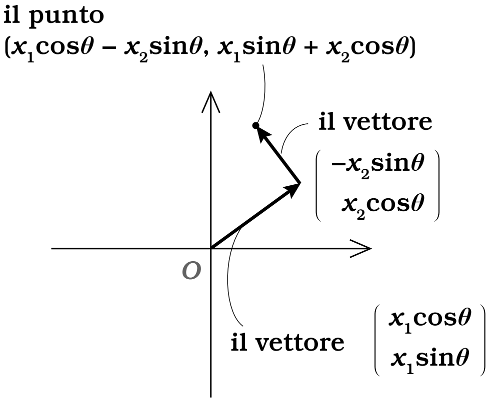


- **Ruotando** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$**, cioè** $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

  di θ **gradi otteniamo**

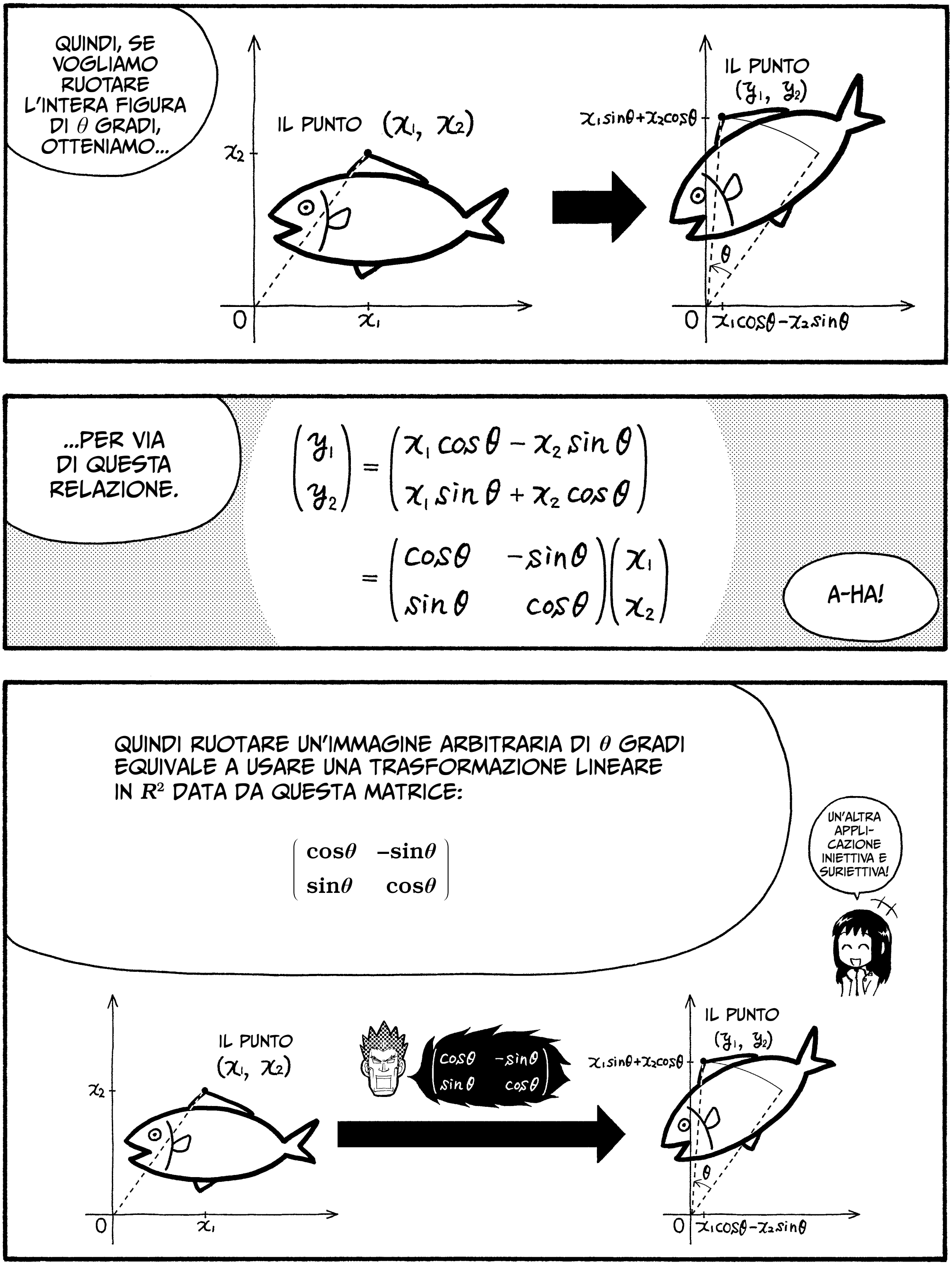
$$\begin{pmatrix} x_1\cos\theta \\ x_1\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2\sin\theta \\ x_2\cos\theta \end{pmatrix}$$

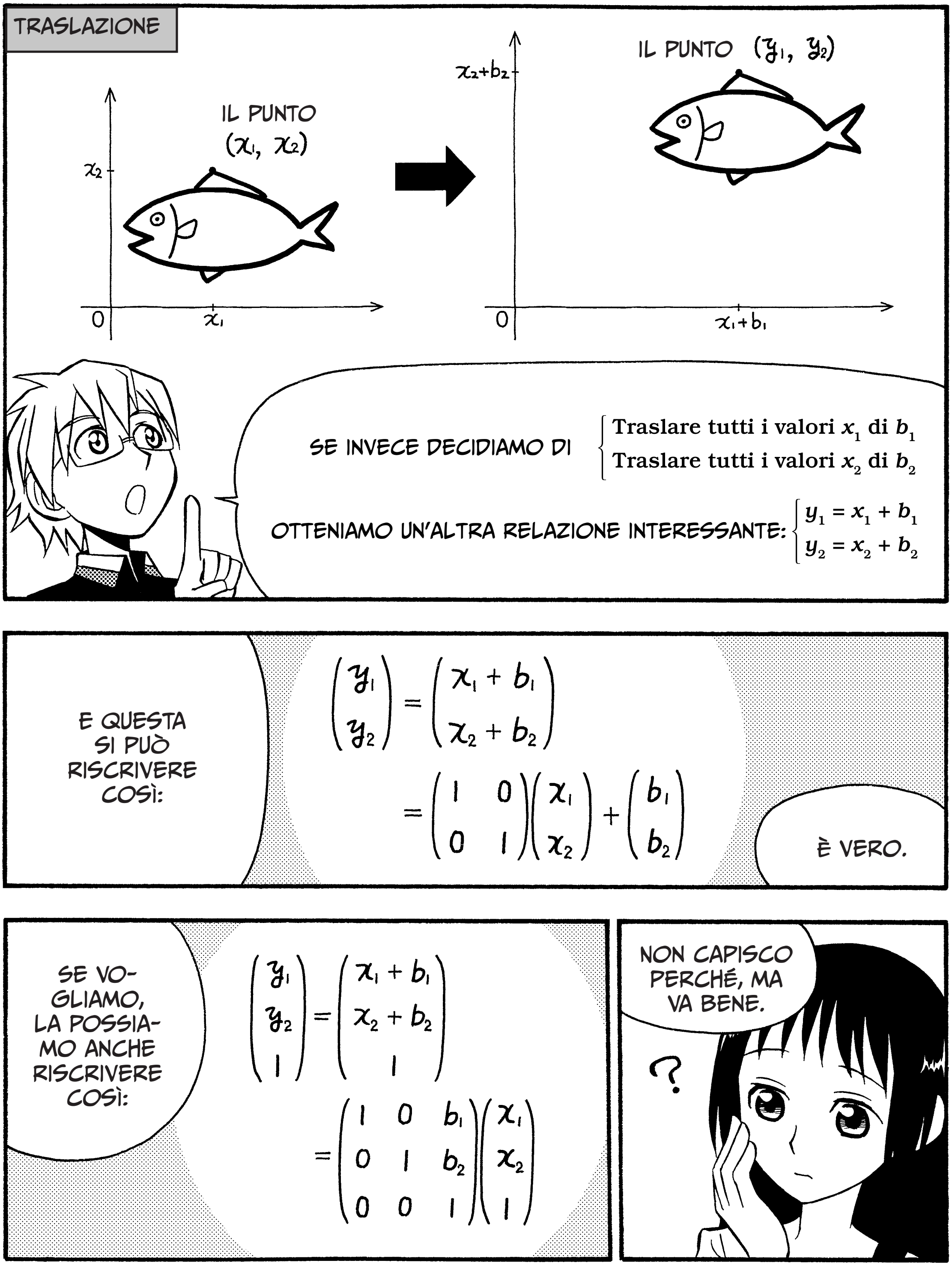
$$= \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix}$$

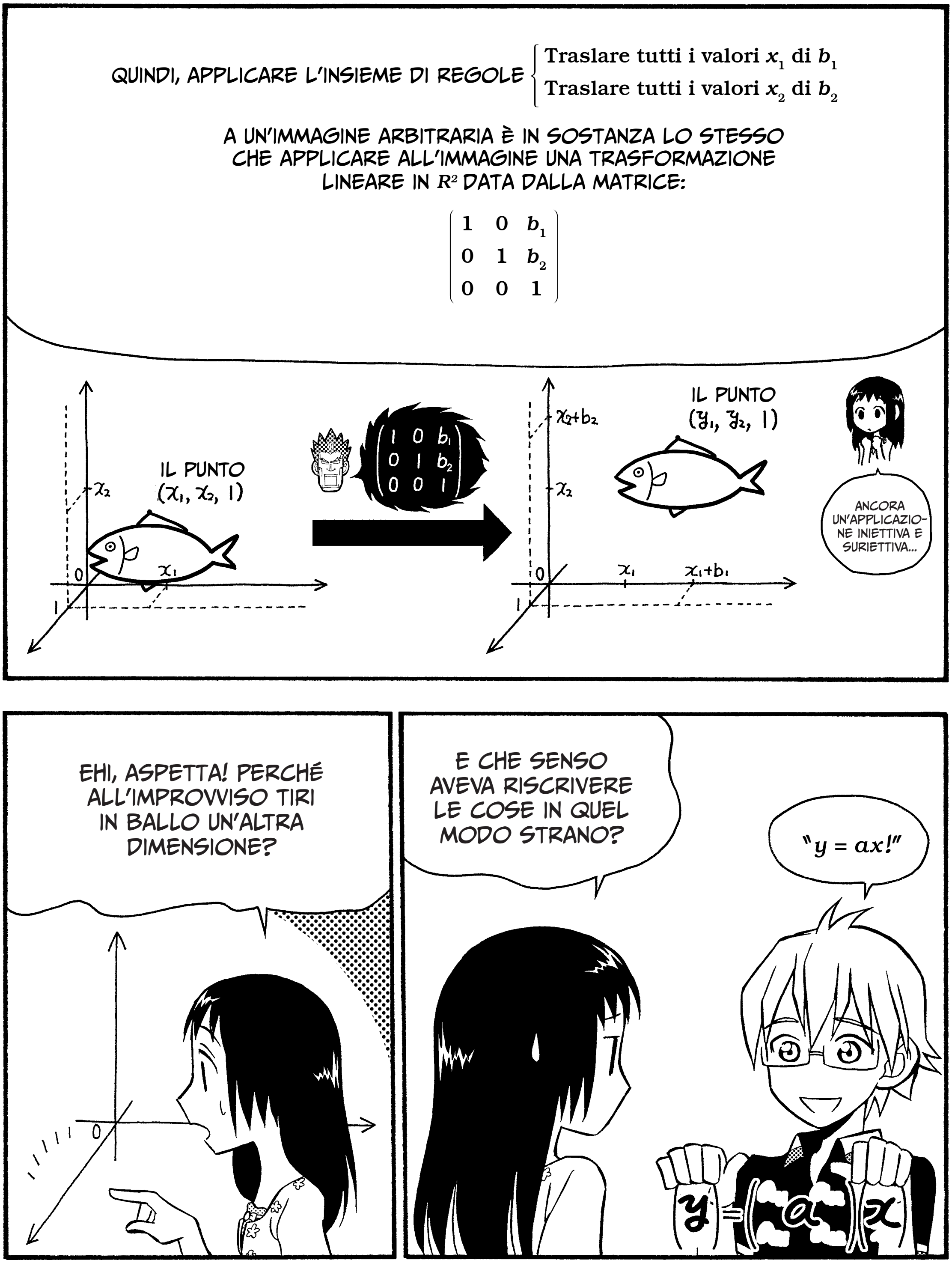


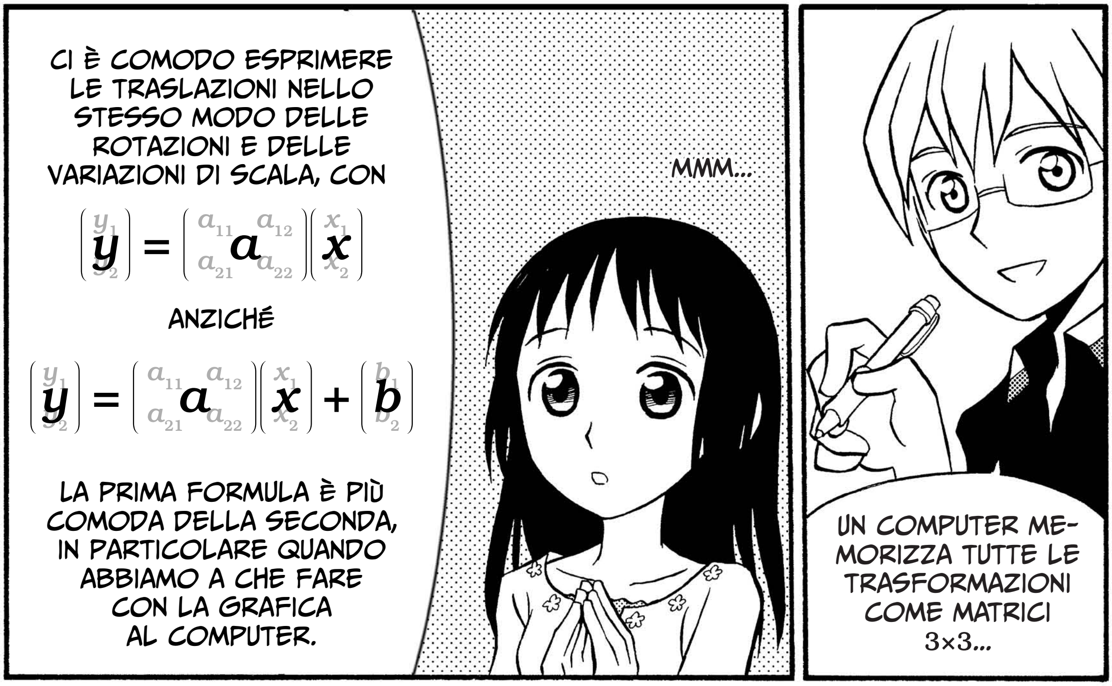
---

* θ è la lettera greca *theta*.


QUINDI, SE VOGLIAMO RUOTARE L'INTERA FIGURA DI θ GRADI, OTTENIAMO...
IL PUNTO (x_1, x_2)
x_2
0
x_1
IL PUNTO (y_1, y_2)
$x_1\sin\theta + x_2\cos\theta$
θ
0
$x_1\cos\theta - x_2\sin\theta$
...PER VIA DI QUESTA RELAZIONE.
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
A-HA!
QUINDI RUOTARE UN'IMMAGINE ARBITRARIA DI θ GRADI EQUIVALE A USARE UNA TRASFORMAZIONE LINEARE IN R^2 DATA DA QUESTA MATRICE:
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
UN'ALTRA APPLICAZIONE INIETTIVA E SURIETTIVA!
IL PUNTO (x_1, x_2)
x_2
0
x_1
$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
IL PUNTO (y_1, y_2)
$x_1\sin\theta + x_2\cos\theta$
θ
0
$x_1\cos\theta - x_2\sin\theta$


TRASLAZIONE
IL PUNTO (x_1, x_2)
x_2
0
x_1
IL PUNTO (y_1, y_2)
x_2+b_2
0
x_1+b_1
SE INVECE DECIDIAMO DI
Traslare tutti i valori x_1 di b_1
Traslare tutti i valori x_2 di b_2
OTTENIAMO UN'ALTRA RELAZIONE INTERESSANTE: $\begin{cases} y_1 = x_1 + b_1 \\ y_2 = x_2 + b_2 \end{cases}$
E QUESTA SI PUÒ RISCRIVERE COSÌ:
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ x_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$
È VERO.
SE VOGLIAMO, LA POSSIAMO ANCHE RISCRIVERE COSÌ:
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + b_1 \\ x_2 + b_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$
NON CAPISCO PERCHÉ, MA VA BENE.
?

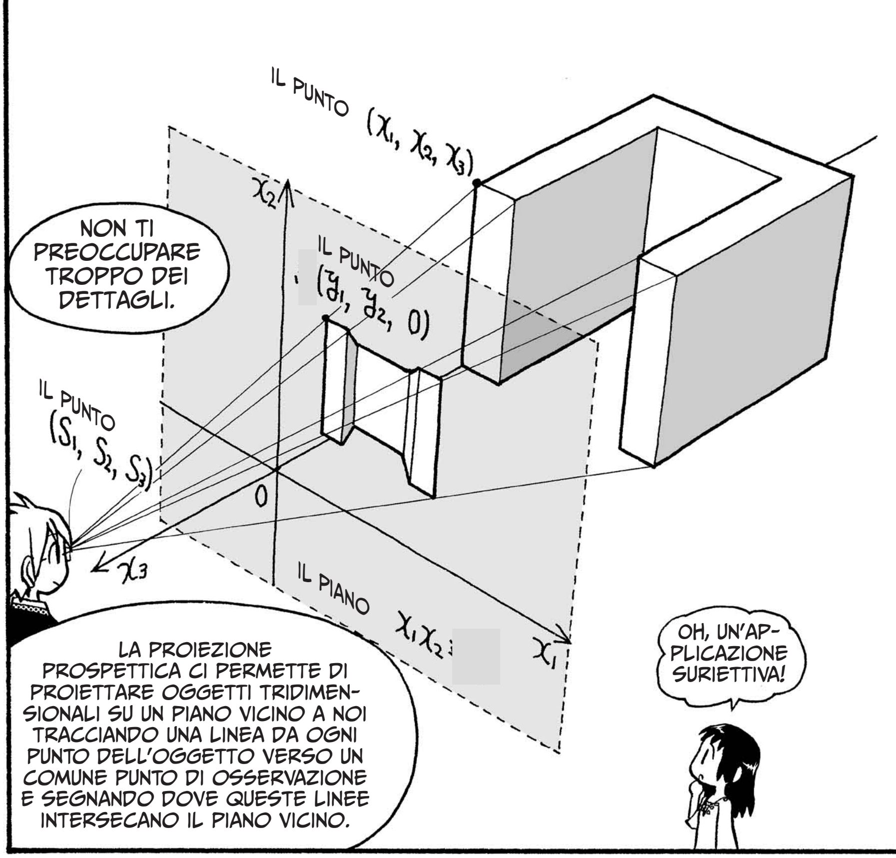

QUINDI, APPLICARE L'INSIEME DI REGOLE $\begin{cases} \text{Traslare tutti i valori } x_1 \text{ di } b_1 \\ \text{Traslare tutti i valori } x_2 \text{ di } b_2 \end{cases}$
A UN'IMMAGINE ARBITRARIA È IN SOSTANZA LO STESSO CHE APPLICARE ALL'IMMAGINE UNA TRASFORMAZIONE LINEARE IN R^2 DATA DALLA MATRICE:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
IL PUNTO $(x_1, x_2, 1)$
x_2
x_1
0
1
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
IL PUNTO $(y_1, y_2, 1)$
x_2+b_2
x_2
x_1
x_1+b_1
0
1
ANCORA UN'APPLICAZIONE INIETTIVA E SURIETTIVA...
EHI, ASPETTA! PERCHÉ ALL'IMPROVVISO TIRI IN BALLO UN'ALTRA DIMENSIONE?
0
E CHE SENSO AVEVA RISCRIVERE LE COSE IN QUEL MODO STRANO?
"$y = ax$!"
$y = a\ x$

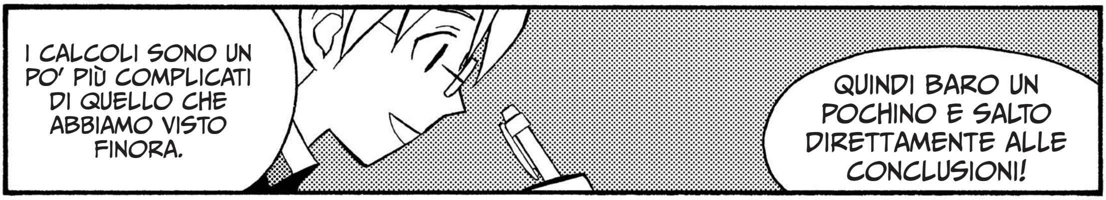


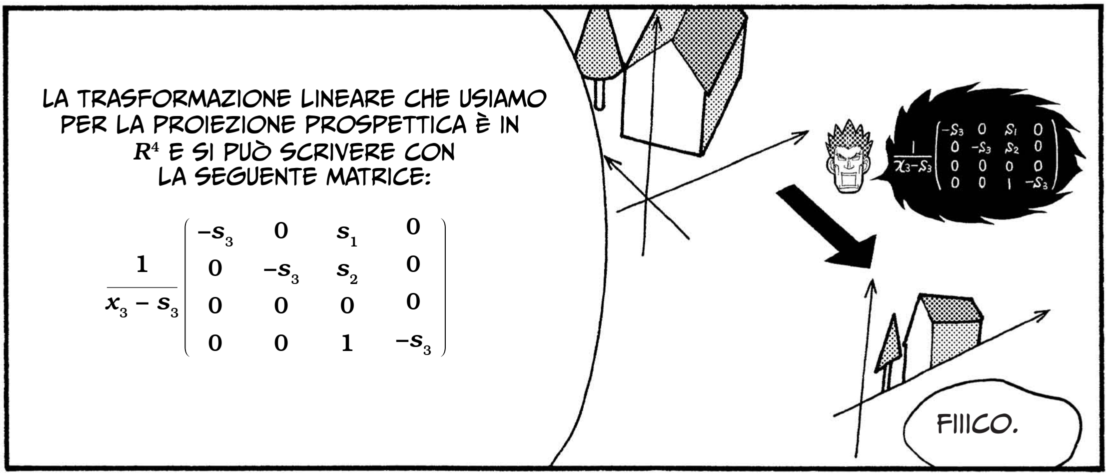
	TRASFORMAZIONI LINEARI USUALI	TRASFORMAZIONI LINEARI COME LE USANO I COMPUTER
VARIAZIONI DI SCALA	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$
ROTAZIONE	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$
TRASLAZIONI	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^*$	$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

* NOTA: QUESTA IN REALTÀ NON È UNA TRASFORMAZIONE LINEARE. LO SI PUÒ VERIFICARE PONENDO b_1 E b_2 ENTRAMBE PARI A 1 E OSSERVANDO CHE NON VALGONO LE CONDIZIONI DELLE TRASFORMAZIONI LINEARI.

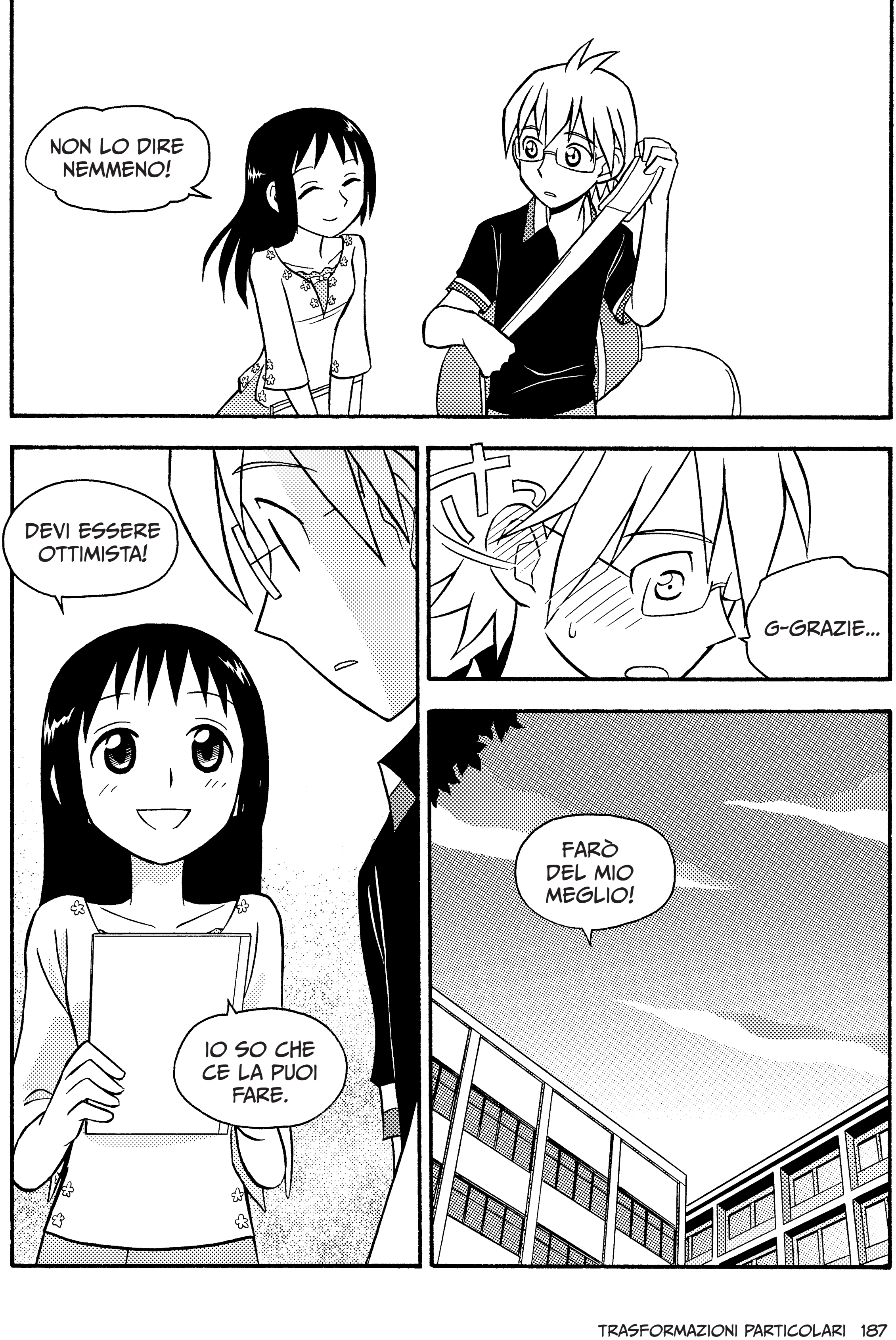

PROIEZIONE DA 3D
TI PARLO BREVEMENTE DI UNA TECNICA DI PROIEZIONE DETTA *PROIEZIONE PROSPETTICA.*


IL PUNTO (x_1, x_2, x_3)
NON TI PREOCCUPARE TROPPO DEI DETTAGLI.
IL PUNTO $(y_1, y_2, 0)$
x_2
IL PUNTO (s_1, s_2, s_3)
0
x_3
IL PIANO x_1x_2
x_1
LA PROIEZIONE PROSPETTICA CI PERMETTE DI PROIETTARE OGGETTI TRIDIMENSIONALI SU UN PIANO VICINO A NOI TRACCIANDO UNA LINEA DA OGNI PUNTO DELL'OGGETTO VERSO UN COMUNE PUNTO DI OSSERVAZIONE E SEGNANDO DOVE QUESTE LINEE INTERSECANO IL PIANO VICINO.
OH, UN'APPLICAZIONE SURIETTIVA!


I CALCOLI SONO UN PO' PIÙ COMPLICATI DI QUELLO CHE ABBIAMO VISTO FINORA.
QUINDI BARO UN POCHINO E SALTO DIRETTAMENTE ALLE CONCLUSIONI!


LA TRASFORMAZIONE LINEARE CHE USIAMO PER LA PROIEZIONE PROSPETTICA È IN R^4 E SI PUÒ SCRIVERE CON LA SEGUENTE MATRICE:
$$\frac{1}{x_3 - s_3}\begin{pmatrix} -s_3 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -s_3 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s_3 \end{pmatrix}$$
$$\frac{1}{x_3 - s_3}\begin{pmatrix} -s_3 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -s_3 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s_3 \end{pmatrix}$$
FIIICO.


ECCO COME FUNZIONANO LE TRASFORMA-ZIONI.
C'È TANTO DA IMPA-RARE...
GIÀ... MA PER OGGI BASTA, DIREI.
NELLA PROSSIMA LE-ZIONE, L'ULTIMA, PARLE-REMO DI AUTOVETTORI E AUTOVALORI.
L'ULTIMA LEZIONE? DI GIÀ?
NON TI PREOCCU-PARE, LE COSE IMPORTANTI LE VEDIAMO TUTTE.
EH EH, PERCHÉ MI DOVREI PREOCCUPARE? SEI COSÌ BRAVO A INSEGNARE.
SORRISONE
NON TI DEVI PREOCCUPARE NEMMENO TU, SAI?
EH?
PER L'IN-CONTRO.
AH, L'HAI SAPUTO?
SÌ, ME L'HA DETTO MIO FRATELLO.
ZZZZZIP
AH. GRAZIE. ANZI, STO ANDANDO ADESSO IN PALESTRA. SPERO DI NON PERDERE PROPRIO MALE...


NON LO DIRE NEMMENO!
DEVI ESSERE OTTIMISTA!
IO SO CHE CE LA PUOI FARE.
さっ
G-GRAZIE...
FARÒ DEL MIO MEGLIO!

CONSIGLI PRELIMINARI

Prima di lanciarci sui concetti di nucleo e rango in algebra lineare e altri concetti avanzati di cui parleremo nel resto di questo capitolo, c'è un piccolo trucco matematico che troverete utile nella risoluzione di alcuni di questi problemi.

L'equazione

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

si può riscrivere come:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \left[x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Come vedete, il prodotto della matrice M e del vettore x si può considerare come combinazione lineare delle colonne di M con le componenti di x come coefficienti.

Osserviamo anche che la funzione f che menzioniamo sempre in questo capitolo è la trasformazione lineare da R^n a R^m corrispondente alla seguente matrice $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

IL NUCLEO, L'IMMAGINE E IL TEOREMA DELLA DIMENSIONE PER LE TRASFORMAZIONI LINEARI

L'insieme dei vettori la cui immagine è il vettore nullo, cioè

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$$

è detto *nucleo* della trasformazione lineare f e si indica con Ker f.**

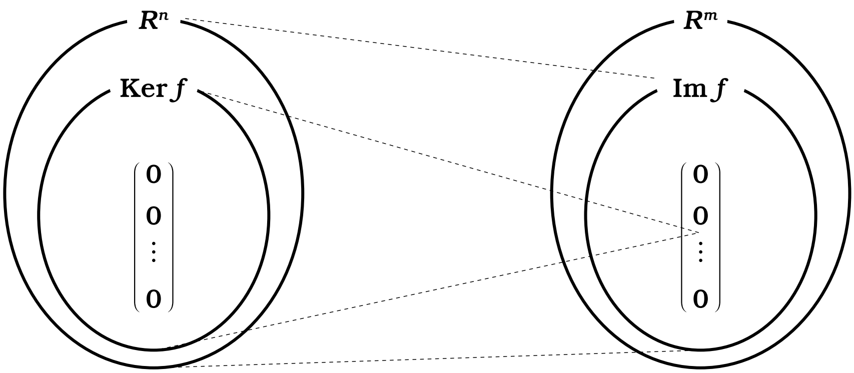
$$\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$$

(Questa è una definizione di immagine più formale di quella che abbiamo visto nel Capitolo 2, ma il concetto è lo stesso.)

Un'osservazione importante è che Ker f è un sottospazio di R^n e Im f è un sottospazio di R^m. Il *teorema della dimensione* per le trasformazioni lineari approfondisce questa osservazione mostrando un nesso fra i due sottospazi:

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$$

Notiamo che questa n è uguale alla dimensione del primo spazio vettoriale ($\dim R^n$)*.



*Se serve un ripasso sul concetto di dimensione, vedi "Base e dimensione" a pagina 156.
**Ker sta per kernel che in inglese vuol dire "nucleo".

ESEMPIO 1

Supponiamo che f sia una trasformazione lineare da R^2 a R^2 data dalla matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
Allora:

$$\begin{cases} \operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = R^2 \end{cases}$$

$$\text{E:} \begin{cases} n & = 2 \\ \dim \operatorname{Ker} f & = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO 2

Supponiamo che f sia una trasformazione lineare da R^2 a R^2 data dalla matrice $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
Allora:

$$\begin{cases} \operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [x_1 + 2x_2] \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \qquad = \left\{ c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \text{ è un numero arbitrario} \right\} \\ \operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = [x_1 + 2x_2] \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \qquad = \left\{ c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \text{ è un numero arbitrario} \right\} \end{cases}$$

$$\text{E:} \begin{cases} n & = 2 \\ \dim \operatorname{Ker} f & = 1 \\ \dim \operatorname{Im} f & = 1 \end{cases}$$

ESEMPIO 3

Supponiamo che f sia una trasformazione lineare da R^2 a R^3 data dalla matrice 3×2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Allora:

$$\begin{cases} \text{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \text{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \qquad = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} c_1 \text{ e } c_2 \text{ sono} \\ \text{numeri arbitrari} \end{matrix} \right\} \end{cases}$$

$$\text{E:} \begin{cases} n & = 2 \\ \dim \text{Ker} f & = 0 \\ \dim \text{Im} f & = 2 \end{cases}$$

ESEMPIO 4

Supponiamo che f sia una trasformazione lineare da R^4 a R^2 data dalla matrice 2×4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Allora:

$$
\begin{cases}
\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\} \\
= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\
= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_1 + 3x_3 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \right\} \\
= \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} c_1 \text{ e } c_2 \text{ sono} \\ \text{numeri arbitrari} \end{matrix} \right\} \\
\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\} \\
= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = R^2
\end{cases}
$$

$$
\text{E:} \quad \begin{cases} n & = 4 \\ \dim \operatorname{Ker} f & = 2 \\ \dim \operatorname{Im} f & = 2 \end{cases}
$$

RANGO

Il numero di vettori linearmente indipendenti fra le colonne della matrice M (che è anche la dimensione del sottospazio di R^m Im f) è detto *rango* di M e si indica così: rk M.

ESEMPIO 1

Il sistema di equazioni lineari $\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = y_1 \\ 1x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases}$, cioè $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 1x_2 \\ 1x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$,

si può riscrivere come segue: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 1x_2 \\ 1x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

I due vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, come si può vedere alle pagine 133 e 135, e quindi il rango di $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è 2.

Notiamo inoltre che $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5 \neq 0$.

ESEMPIO 2

Il sistema di equazioni lineari $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = y_1 \\ 1x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases}$, cioè $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 6x_2 \\ 1x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$,

si può riscrivere come segue:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 6x_2 \\ 1x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= [x_1 + 2x_2] \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi il rango di $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è 1.

Notiamo anche che $\det \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 0$.

ESEMPIO 3

Il sistema di equazioni lineari $\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 = y_1 \\ 0x_1 + 1x_2 = y_2 \\ 0x_1 + 0x_2 = y_3 \end{cases}$, cioè $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 0x_2 \\ 0x_1 + 1x_2 \\ 0x_1 + 0x_2 \end{pmatrix}$,

si può riscrivere come: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 0x_2 \\ 0x_1 + 1x_2 \\ 0x_1 + 0x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

I due vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, come abbiamo scoperto a pagina 137, e quindi il rango di $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è 2.

Il sistema si può anche riscrivere così:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 0x_2 \\ 0x_1 + 1x_2 \\ 0x_1 + 0x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

ESEMPIO 4

Il sistema di equazioni lineari $\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 1x_4 = y_1 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 = y_2 \end{cases}$, cioè

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 1x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$, si può riscrivere come segue:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 1x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Il rango di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è 2, come vedremo a pagina 203.

Il sistema si può anche riscrivere così:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 1x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

I quattro esempi ci fanno pensare che

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0$ equivale a dire che $\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq n$.

Le cose stanno proprio così, ma non lo dimostreremo formalmente.

CALCOLARE IL RANGO DI UNA MATRICE

Finora abbiamo avuto a che fare solo con matrici il cui rango era ovvio, oppure per le quali avevamo trovato in precedenza quanti vettori linearmente indipendenti formavano le colonne della matrice. Anche se lì per lì può sembrare che "bariamo", in realtà queste tecniche possono essere molto utili per calcolare concretamente il rango.

Per esempio, diamo un'occhiata alla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che la terza colonna di questa matrice è uguale alla prima moltiplicata per 4. Rimangono quindi due vettori linearmente indipendenti (le prime due colonne), e così la matrice ha rango 2.

Diamo ora un'occhiata a questa matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Dovrebbe essere immediatamente ovvio che questi vettori formano un insieme linearmente indipendente, e quindi sappiamo che anche questa matrice ha rango 2.

Ovviamente a volte questo metodo fallirà e non riusciremo a capire il rango di una matrice solo "a occhio". In questi casi bisogna mettersi d'impegno e calcolare materialmente il rango. Ma non vi preoccupate, non è difficile!

Vediamo prima il PROBLEMA, poi pensiamo a un buon RAGIONAMENTO, e infine troviamo la SOLUZIONE.

PROBLEMA

Calcolare il rango della seguente matrice 2×4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

RAGIONAMENTO

Prima di poter risolvere questo problema, dobbiamo capire qualcosa sulle matrici elementari. Una *matrice elementare* si ottiene partendo da una matrice identità e svolgendovi esattamente una delle operazioni elementari sulle righe usate nell'eliminazione gaussiana (vedi Capitolo 4). Le matrici risultanti si possono quindi moltiplicare per una matrice arbitraria in un modo che rende ovvio il numero di colonne linearmente indipendenti.

Sapendo ciò, possiamo enunciare questi quattro fatti utili su una matrice A arbitraria:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

FATTO 1

Moltiplicare la matrice elementare

$$\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \text{Riga } i \\ \\ \text{Riga } j \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} \text{Colonna } i & \text{Colonna } j \end{matrix} &
\end{array}$$

a sinistra di una matrice arbitraria A scambia tra loro le righe i e j di A.

Se la moltiplichiamo a destra di A, sono le corrispondenti colonne a scambiarsi di posto.

- Esempio 1 (Vengono scambiate le righe 1 e 4.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}
0{\cdot}a_{11} + 0{\cdot}a_{21} + 0{\cdot}a_{31} + 1{\cdot}a_{41} & 0{\cdot}a_{12} + 0{\cdot}a_{22} + 0{\cdot}a_{32} + 1{\cdot}a_{42} & 0{\cdot}a_{13} + 0{\cdot}a_{23} + 0{\cdot}a_{33} + 1{\cdot}a_{43} \\
0{\cdot}a_{11} + 1{\cdot}a_{21} + 0{\cdot}a_{31} + 0{\cdot}a_{41} & 0{\cdot}a_{12} + 1{\cdot}a_{22} + 0{\cdot}a_{32} + 0{\cdot}a_{42} & 0{\cdot}a_{13} + 1{\cdot}a_{23} + 0{\cdot}a_{33} + 0{\cdot}a_{43} \\
0{\cdot}a_{11} + 0{\cdot}a_{21} + 1{\cdot}a_{31} + 0{\cdot}a_{41} & 0{\cdot}a_{12} + 0{\cdot}a_{22} + 1{\cdot}a_{32} + 0{\cdot}a_{42} & 0{\cdot}a_{13} + 0{\cdot}a_{23} + 1{\cdot}a_{33} + 0{\cdot}a_{43} \\
1{\cdot}a_{11} + 0{\cdot}a_{21} + 0{\cdot}a_{31} + 0{\cdot}a_{41} & 1{\cdot}a_{12} + 0{\cdot}a_{22} + 0{\cdot}a_{32} + 0{\cdot}a_{42} & 1{\cdot}a_{13} + 0{\cdot}a_{23} + 0{\cdot}a_{33} + 0{\cdot}a_{43}
\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

- Esempio 2 (Vengono scambiate le colonne 1 e 3.)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 1 & a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 1 + a_{13}\cdot 0 & a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 0 \\ a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 0 + a_{23}\cdot 1 & a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 1 + a_{23}\cdot 0 & a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 0 + a_{23}\cdot 0 \\ a_{31}\cdot 0 + a_{32}\cdot 0 + a_{33}\cdot 1 & a_{31}\cdot 0 + a_{32}\cdot 1 + a_{33}\cdot 0 & a_{31}\cdot 1 + a_{32}\cdot 0 + a_{33}\cdot 0 \\ a_{41}\cdot 0 + a_{42}\cdot 0 + a_{43}\cdot 1 & a_{41}\cdot 0 + a_{42}\cdot 1 + a_{43}\cdot 0 & a_{41}\cdot 1 + a_{42}\cdot 0 + a_{43}\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$$

FATTO 2

Moltiplicare la matrice elementare

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \text{Riga } i \\ \quad\quad\quad\quad \text{Colonna } i & \end{array}$$

a sinistra di una matrice arbitraria A moltiplica la i-esima riga di A per k.

Se la moltiplichiamo a destra di A, moltiplichiamo invece la *i-esima* colonna di A, sempre per k.

- Esempio 1 (la riga 3 viene moltiplicata per k):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot a_{11} + 0\cdot a_{21} + 0\cdot a_{31} + 0\cdot a_{41} & 1\cdot a_{12} + 0\cdot a_{22} + 0\cdot a_{32} + 0\cdot a_{42} & 1\cdot a_{13} + 0\cdot a_{23} + 0\cdot a_{33} + 0\cdot a_{43} \\ 0\cdot a_{11} + 1\cdot a_{21} + 0\cdot a_{31} + 0\cdot a_{41} & 0\cdot a_{12} + 1\cdot a_{22} + 0\cdot a_{32} + 0\cdot a_{42} & 0\cdot a_{13} + 1\cdot a_{23} + 0\cdot a_{33} + 0\cdot a_{43} \\ 0\cdot a_{11} + 0\cdot a_{21} + k\cdot a_{31} + 0\cdot a_{41} & 0\cdot a_{12} + 0\cdot a_{22} + k\cdot a_{32} + 0\cdot a_{42} & 0\cdot a_{13} + 0\cdot a_{23} + k\cdot a_{33} + 0\cdot a_{43} \\ 0\cdot a_{11} + 0\cdot a_{21} + 0\cdot a_{31} + 1\cdot a_{41} & 0\cdot a_{12} + 0\cdot a_{22} + 0\cdot a_{32} + 1\cdot a_{42} & 0\cdot a_{13} + 0\cdot a_{23} + 0\cdot a_{33} + 1\cdot a_{43} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

- Esempio 2 (la colonna 2 viene moltiplicata per k):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot k + a_{13}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 1 \\ a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 0 + a_{23}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot k + a_{23}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 0 + a_{23}\cdot 1 \\ a_{31}\cdot 1 + a_{32}\cdot 0 + a_{33}\cdot 0 & a_{31}\cdot 0 + a_{32}\cdot k + a_{33}\cdot 0 & a_{31}\cdot 0 + a_{32}\cdot 0 + a_{33}\cdot 1 \\ a_{41}\cdot 1 + a_{42}\cdot 0 + a_{43}\cdot 0 & a_{41}\cdot 0 + a_{42}\cdot k + a_{43}\cdot 0 & a_{41}\cdot 0 + a_{42}\cdot 0 + a_{43}\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \\ a_{41} & ka_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

FATTO 3

Moltiplicare la matrice elementare

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & k & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \text{Riga } i \\ \\ \text{Riga } j \\ \\
\end{array}
\end{array}
\\
\text{Colonnna } i \qquad \text{Colonna } j
\end{array}
$$

a sinistra di una matrice arbitraria A somma alla riga j di A la riga i moltiplicata per k.
Se la moltiplichiamo a destra di A, sarà invece la colonna j, moltiplicata per k, a essere sommata alla colonna i.

- Esempio 1 (la riga 2 moltiplicata per k viene sommata alla riga 4):

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & k & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31} + 0 \cdot a_{41} & 1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32} + 0 \cdot a_{42} & 1 \cdot a_{13} + 0 \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33} + 0 \cdot a_{43} \\
0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31} + 0 \cdot a_{41} & 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32} + 0 \cdot a_{42} & 0 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33} + 0 \cdot a_{43} \\
0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31} + 0 \cdot a_{41} & 0 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32} + 0 \cdot a_{42} & 0 \cdot a_{13} + 0 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33} + 0 \cdot a_{43} \\
0 \cdot a_{11} + k \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31} + 1 \cdot a_{41} & 0 \cdot a_{12} + \mathrm{k} \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32} + 1 \cdot a_{42} & 0 \cdot a_{13} + \mathrm{k} \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33} + 1 \cdot a_{43}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
a_{41} + k a_{21} & a_{42} + k a_{22} & a_{43} + k a_{23}
\end{pmatrix}
$$

- Esempio 2 (la colonna 3 moltiplicata per *k* viene sommata alla colonna 1):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot k & a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 1 + a_{13}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 1 \\ a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 0 + a_{23}\cdot k & a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 1 + a_{23}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 0 + a_{23}\cdot 1 \\ a_{31}\cdot 1 + a_{32}\cdot 0 + a_{33}\cdot k & a_{31}\cdot 0 + a_{32}\cdot 1 + a_{33}\cdot 0 & a_{31}\cdot 0 + a_{32}\cdot 0 + a_{33}\cdot 1 \\ a_{41}\cdot 1 + a_{42}\cdot 0 + a_{43}\cdot k & a_{41}\cdot 0 + a_{42}\cdot 1 + a_{43}\cdot 0 & a_{41}\cdot 0 + a_{42}\cdot 0 + a_{43}\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{33} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} + ka_{43} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

FATTO 4

Le seguenti tre matrici $m \times n$ hanno tutte lo stesso rango:

1. La matrice:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Il prodotto a sinistra per una matrice invertibile $m \times m$:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. Il prodotto a destra per una matrice invertibile $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

In altre parole, moltiplicare A per una matrice elementare – a destra o a sinistra – non modifica il rango di A, dato che le matrici elementari sono invertibili.

SOLUZIONE

La tabella che segue mostra come calcolare il rango della matrice 2×4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partiamo da $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Sommiamo (–1 · colonna 2) alla colonna 3 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Sommiamo (–1 · colonna 1) alla colonna 4 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Sommiamo (-3 · colonna 1) alla colonna 3 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Sommiamo (-2 · colonna 2) alla colonna 4 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per via del Fatto 4, sappiamo che $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hanno lo stesso rango.

Basta dare uno sguardo alla matrice semplificata per vedere che tra le sue colonne solo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

Quindi ha rango 2, e così anche la matrice da cui siamo partiti.

Il rapporto tra matrici e trasformazioni lineari

A pagina 168 abbiamo parlato un po' del rapporto fra trasformazioni lineari e matrici. Abbiamo detto che una trasformazione lineare da R^n a R^m si può scrivere come matrice $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Come avrete notato, è una spiegazione un po' vaga. Il rapporto preciso è quello che segue:

Il rapporto tra matrici e trasformazioni lineari

Se $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è un elemento arbitrario di R^n e f è una funzione da R^n a R^m,

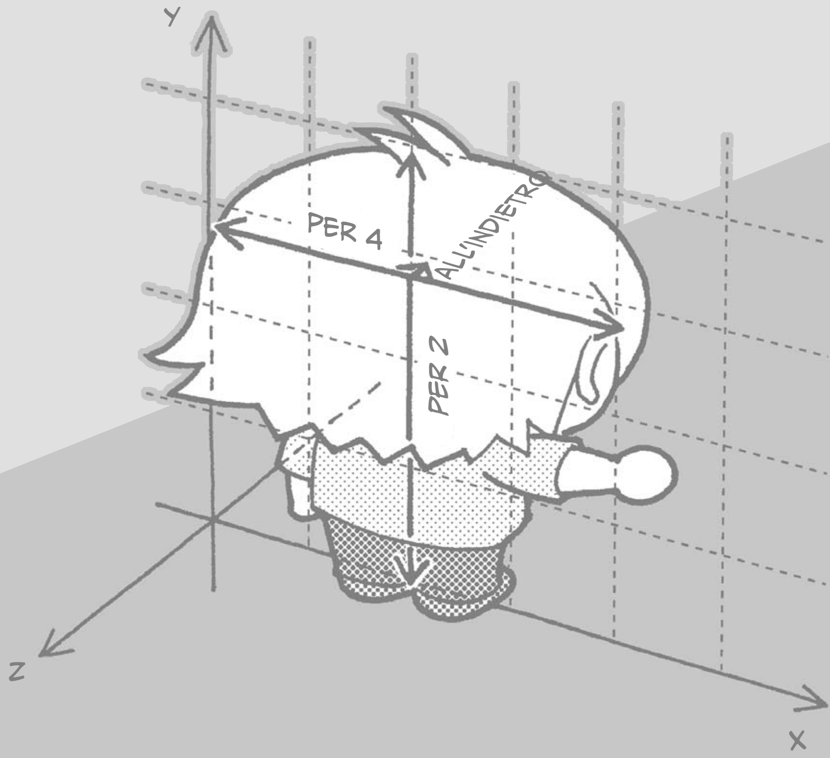
allora f è una trasformazione lineare da R^n a R^m se e solo se

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

per qualche matrice A.

8

GLI AUTOVALORI E GLI AUTOVETTORI

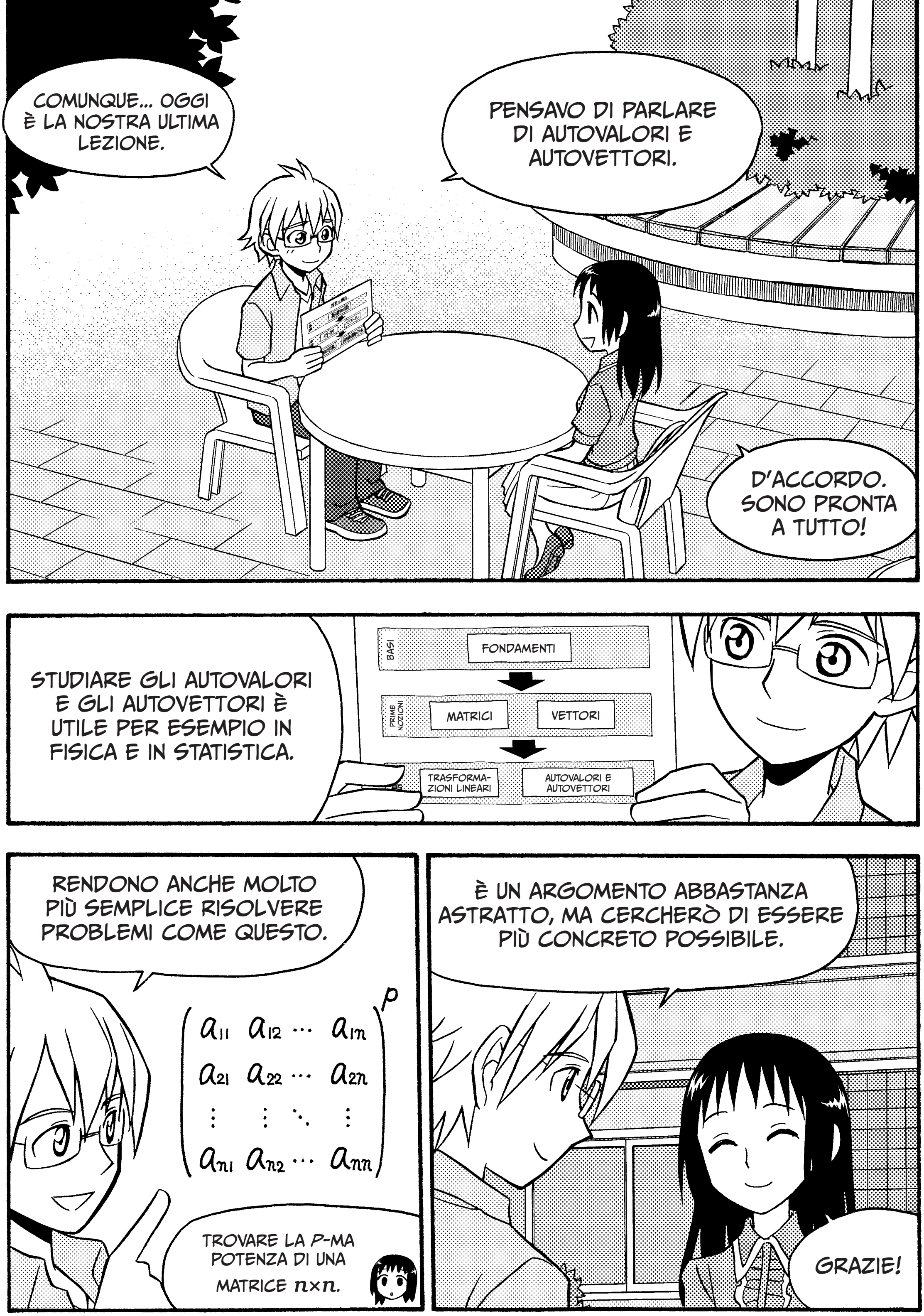


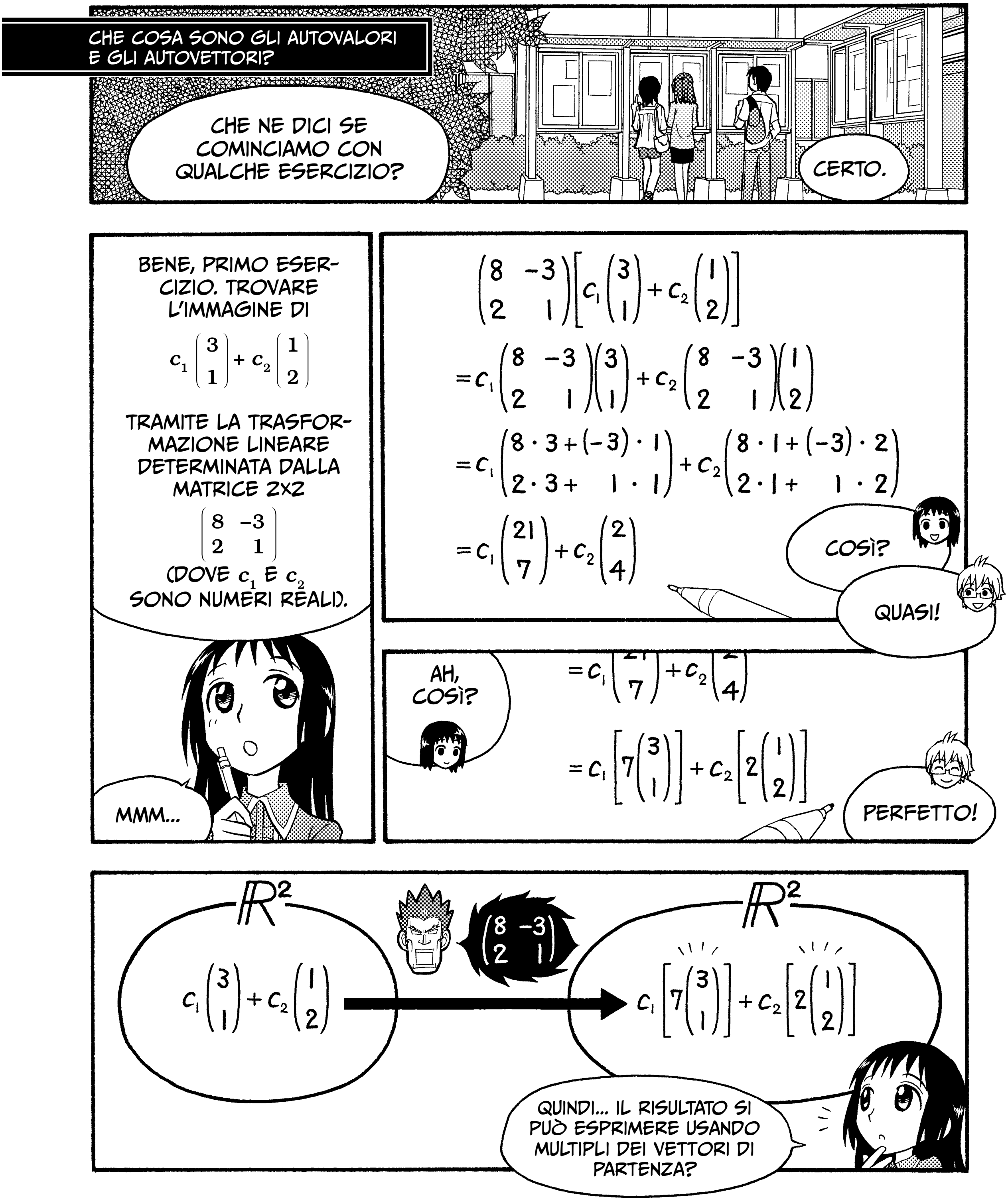

YURINO DELL'UNIVERSITÀ HANAMICHI!
E JUMONJI DELL'UNIVERSITÀ NANHOU!
PRONTI!
SGUARDO
SEMBRA UN DURO.
DEVO METTERCELA TUTTA.
INIZIATE!

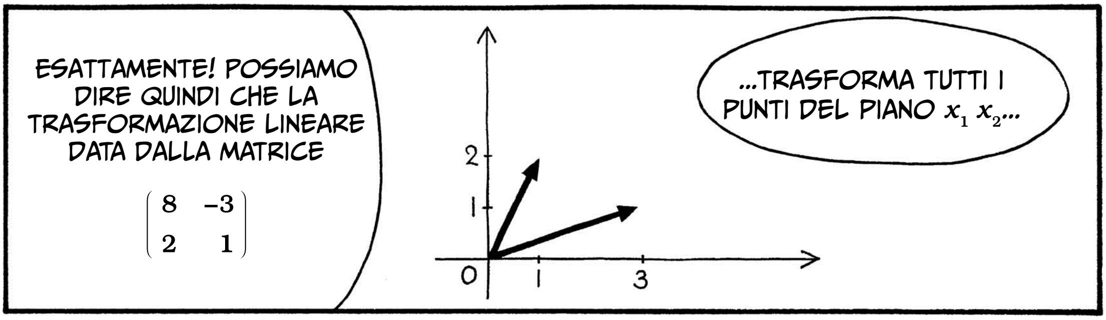

SEYAAAAA
BAFF
SOCK
BRIVIDO
UGH...
NGH...
POW
SNUH
DEVO VINCERE!
DEVO DIMOSTRARE QUANTO POSSO ESSERE FORTE!
YAAAAAA
FERMI!

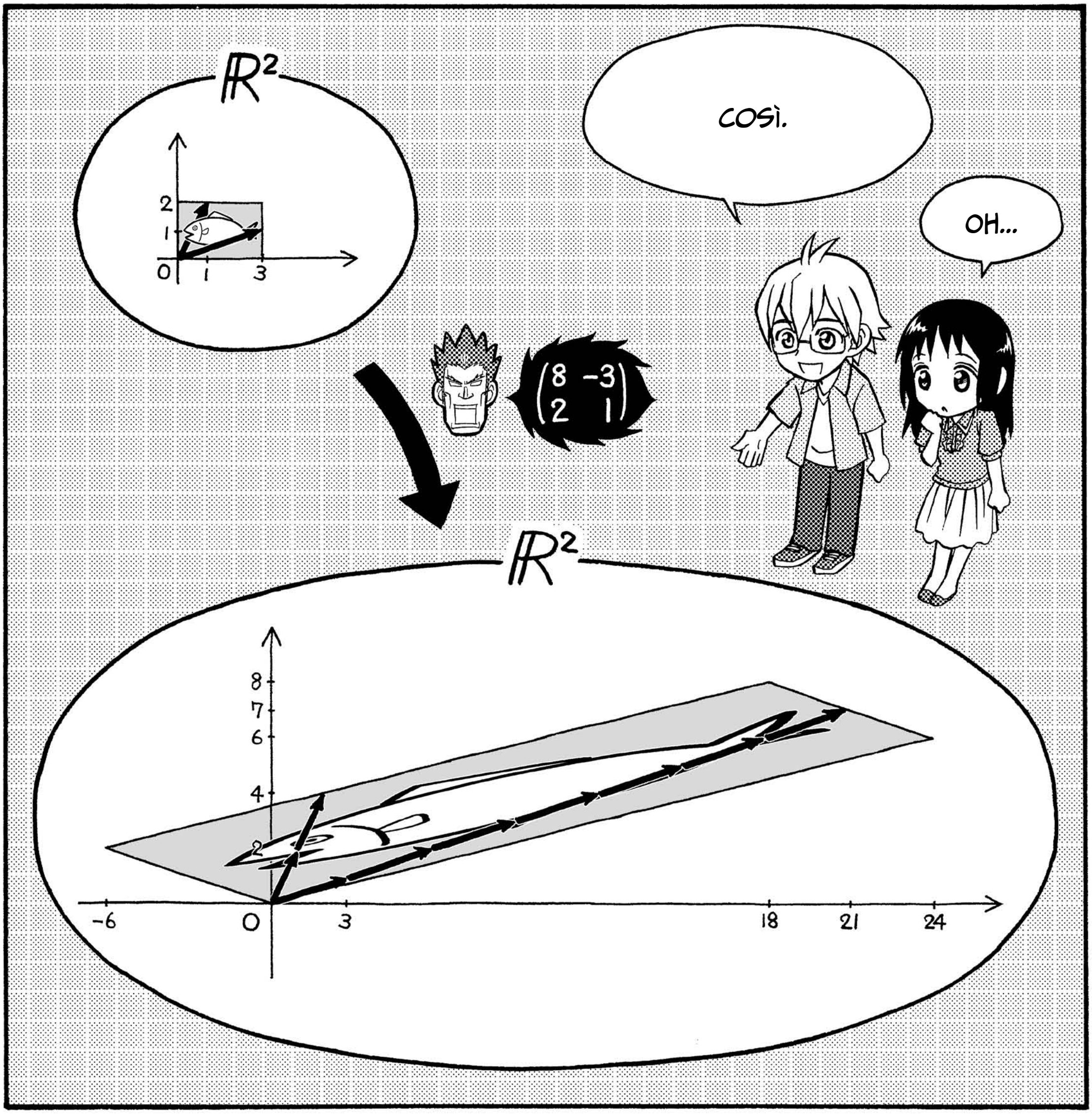

UNIVERSITÀ NANHOU!
MOLTISSIME... GRAZIE...
ACCIDENTI...
BELL'INCONTRO.


MI DISPIACE PER L'IN- CONTRO...
GIÀ...
PERÒ MIO FRATELLO DICE CHE HAI COMBATTUTO BENE.
SUL SERIO?
NON TI PREOCCUPARE.
LA PROSSIMA VOLTA ANDRÀ MEGLIO.
LO SO!
MI DISPIACE! HAI PROPRIO RAGIONE!
TENERE IL BRONCIO NON SERVE A NIENTE.


COMUNQUE... OGGI È LA NOSTRA ULTIMA LEZIONE.
PENSAVO DI PARLARE DI AUTOVALORI E AUTOVETTORI.
D'ACCORDO. SONO PRONTA A TUTTO!
STUDIARE GLI AUTOVALORI E GLI AUTOVETTORI È UTILE PER ESEMPIO IN FISICA E IN STATISTICA.
BASI
FONDAMENTI
PRIME NOZIONI
MATRICI
VETTORI
TRASFORMAZIONI LINEARI
AUTOVALORI E AUTOVETTORI
RENDONO ANCHE MOLTO PIÙ SEMPLICE RISOLVERE PROBLEMI COME QUESTO.
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^p$
TROVARE LA p-MA POTENZA DI UNA MATRICE $n \times n$.
È UN ARGOMENTO ABBASTANZA ASTRATTO, MA CERCHERÒ DI ESSERE PIÙ CONCRETO POSSIBILE.
GRAZIE!


CHE COSA SONO GLI AUTOVALORI E GLI AUTOVETTORI?
CHE NE DICI SE COMINCIAMO CON QUALCHE ESERCIZIO?
CERTO.
BENE, PRIMO ESERCIZIO. TROVARE L'IMMAGINE DI $c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ TRAMITE LA TRASFORMAZIONE LINEARE DETERMINATA DALLA MATRICE 2X2 $\begin{pmatrix}8&-3\\2&1\end{pmatrix}$ (DOVE c_1 E c_2 SONO NUMERI REALI).
MMM...
$\begin{pmatrix}8&-3\\2&1\end{pmatrix}\left[c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]$
$=c_1\begin{pmatrix}8&-3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}8&-3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
$=c_1\begin{pmatrix}8\cdot3+(-3)\cdot1\\2\cdot3+1\cdot1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}8\cdot1+(-3)\cdot2\\2\cdot1+1\cdot2\end{pmatrix}$
$=c_1\begin{pmatrix}21\\7\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$
COSÌ?
QUASI!
AH, COSÌ?
$=c_1\begin{pmatrix}21\\7\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$
$=c_1\left[7\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right]+c_2\left[2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]$
PERFETTO!
$\mathbb{R}^2$
$c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}8&-3\\2&1\end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2$
$c_1\left[7\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right]+c_2\left[2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]$
QUINDI... IL RISULTATO SI PUÒ ESPRIMERE USANDO MULTIPLI DEI VETTORI DI PARTENZA?


ESATTAMENTE! POSSIAMO DIRE QUINDI CHE LA TRASFORMAZIONE LINEARE DATA DALLA MATRICE
$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
...TRASFORMA TUTTI I PUNTI DEL PIANO $x_1\,x_2$...
2
1
0
1
3


$\mathbb{R}^2$
2
1
0
1
3
COSÌ.
OH...
$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2$
8
7
6
4
2
−6
0
3
18
21
24

PASSIAMO A UN ALTRO PROBLEMA.

TROVARE L' IMMAGINE DI $c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ USANDO

LA TRASFORMAZIONE LINEARE DETERMINATA DALLA MATRICE 3×3 $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

(DOVE c_1, c_2, E c_3 SONO NUMERI REALI).

MMM

$$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\left[c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

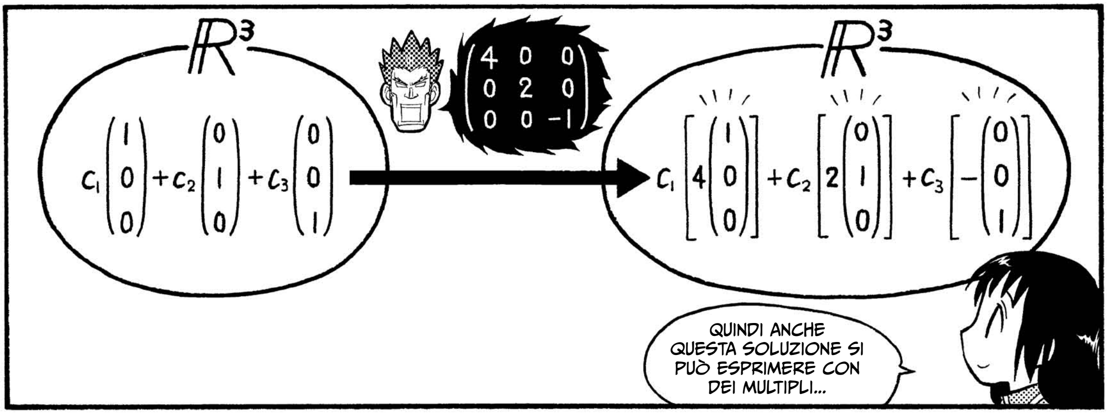
$$=c_1\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

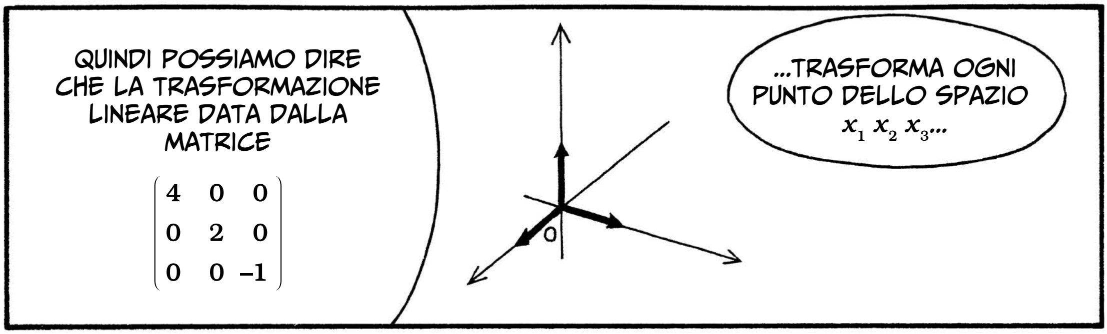
$$=c_1\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

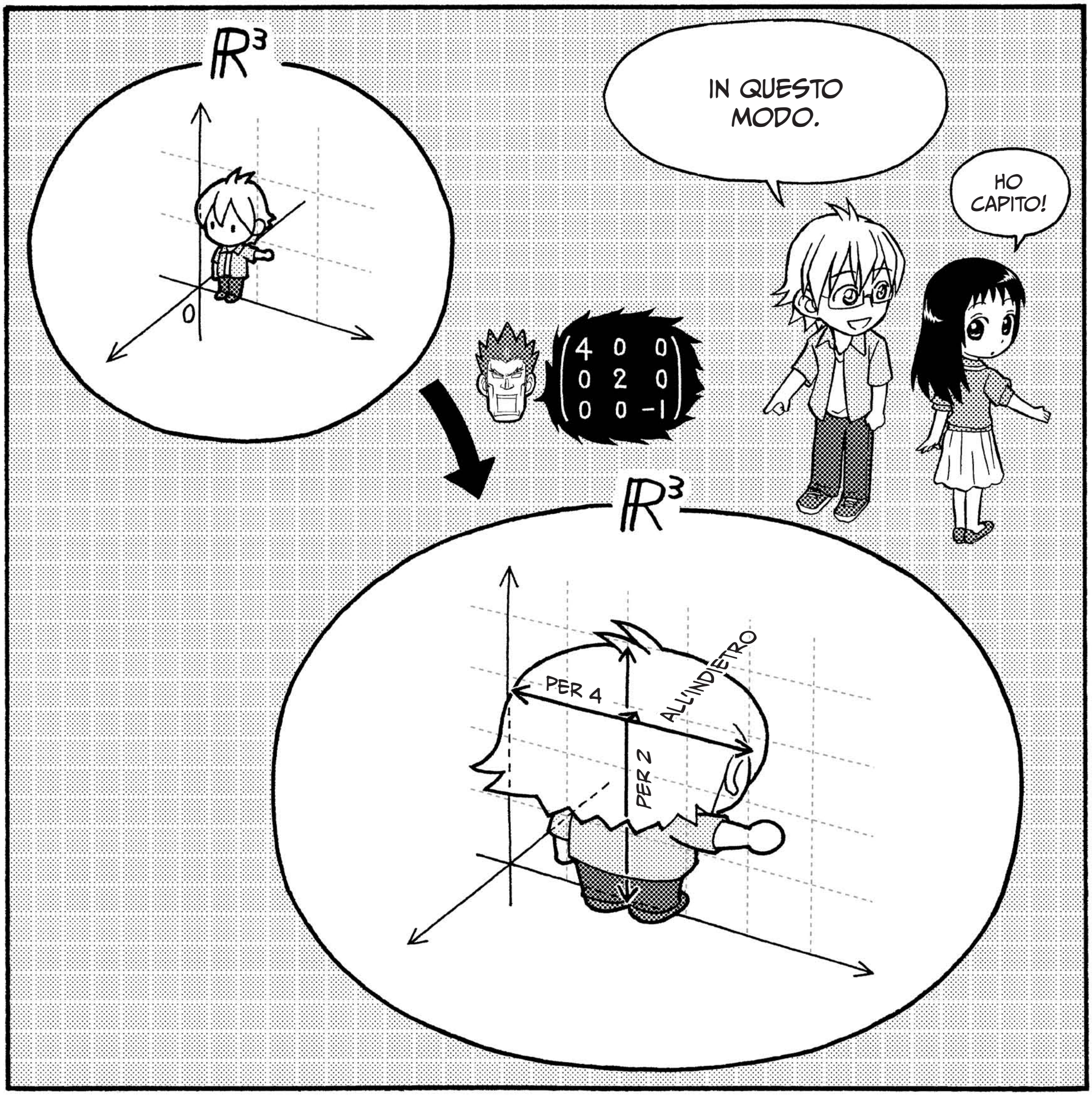
$$=c_1\left[4\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]+c_2\left[2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]+c_3\left[-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

COSÌ?

PERFETTO.




QUINDI POSSIAMO DIRE CHE LA TRASFORMAZIONE LINEARE DATA DALLA MATRICE
$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
0
...TRASFORMA OGNI PUNTO DELLO SPAZIO $x_1\ x_2\ x_3$...


$\mathbb{R}^3$
0
IN QUESTO MODO.
HO CAPITO!
$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^3$
PER 4
ALL'INDIETRO
PER 2

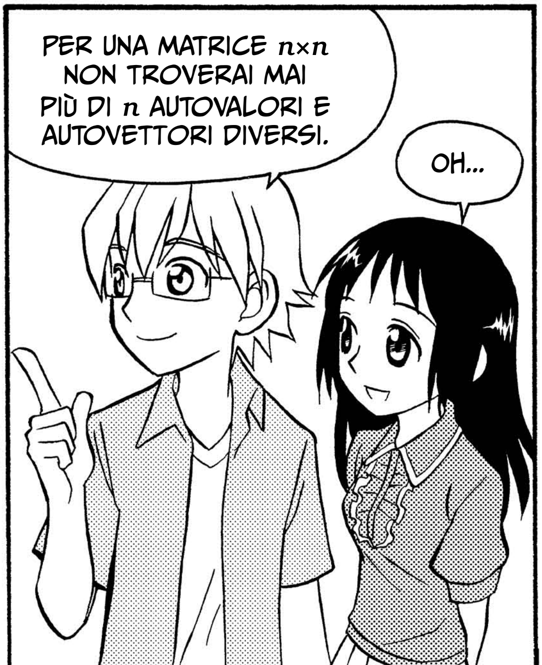
AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Se l' immagine di un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tramite la trasformazione lineare data dalla matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ è uguale a $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, diciamo che λ è un *autovalore* della matrice, e che $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è un *autovettore* corrispondente all' autovalore λ.

Il vettore nullo non può mai essere un autovettore.

$$\underset{R^n}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \longrightarrow \underset{R^n}{\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

MATRICE	$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
AUTOVALORE	$\lambda = 7, 2$	$\lambda = 4, 2, -1$
AUTOVETTORE	IL VETTORE CORRISPONDENTE A $\lambda = 7$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ IL VETTORE CORRISPONDENTE A $\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	IL VETTORE CORRISPONDENTE A $\lambda = 4$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ IL VETTORE CORRISPONDENTE A $\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ IL VETTORE CORRISPONDENTE A $\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

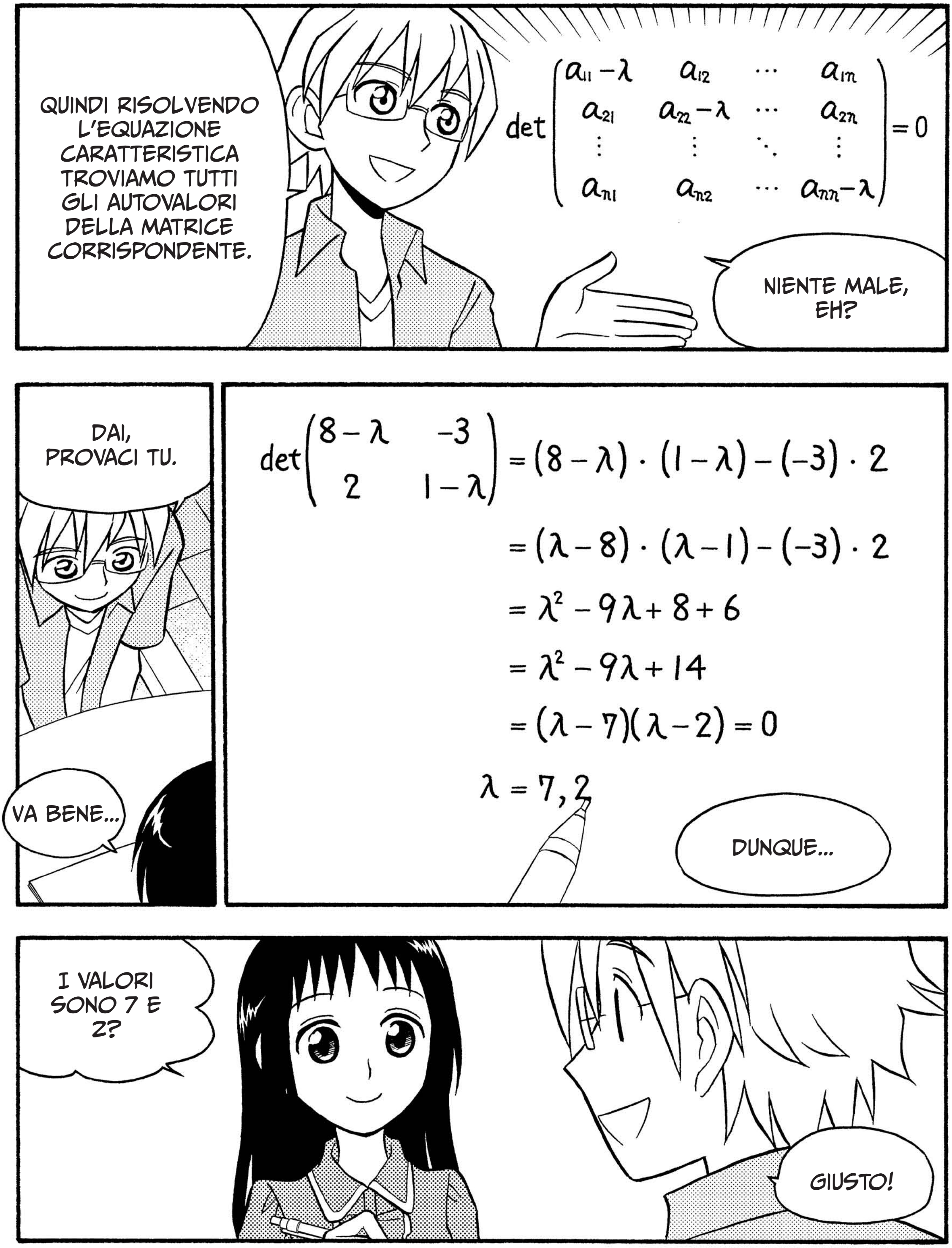


CALCOLARE AUTOVALORI E AUTOVETTORI

LA RELAZIONE FRA IL DETERMINANTE E GLI AUTOVALORI DI UNA MATRICE

λ è un autovalore della matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ se e solo se } \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$


QUINDI RISOLVENDO L'EQUAZIONE CARATTERISTICA TROVIAMO TUTTI GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE CORRISPONDENTE.
$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$
NIENTE MALE, EH?
DAI, PROVACI TU.
VA BENE...
$\det\begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (8-\lambda)\cdot(1-\lambda)-(-3)\cdot 2$
$= (\lambda-8)\cdot(\lambda-1)-(-3)\cdot 2$
$= \lambda^2-9\lambda+8+6$
$= \lambda^2-9\lambda+14$
$= (\lambda-7)(\lambda-2) = 0$
$\lambda = 7, 2$
DUNQUE...
I VALORI SONO 7 E 2?
GIUSTO!

ANCHE TROVARE GLI AUTOVETTORI È PIUTTOSTO FACILE.

PER ESEMPIO, USIAMO IN QUESTA FORMULA GLI AUTOVALORI CHE ABBIAMO GIÀ TROVATO:

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ CIOÈ } \begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 1

Trovare un autovettore corrispondente a $\lambda = 7$.

Inseriamo il nostro valore nella formula:

$$\begin{pmatrix} 8-7 & -3 \\ 2 & 1-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 - 6x_2 \end{pmatrix} = [x_1 - 3x_2]\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo cioè che $x_1 = 3x_2$, il che ci porta al nostro autovettore

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove c_1 è un numero reale arbitrario diverso da zero.

PROBLEMA 2

Trovare un autovettore corrispondente a $\lambda = 2$.

Inseriamo il nostro valore nella formula:

$$\begin{pmatrix} 8-2 & -3 \\ 2 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} = [2x_1 - x_2]\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo cioè che $x_2 = 2x_1$, il che ci porta al nostro autovettore

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix} = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dove c_2 è un numero reale arbitrario diverso da zero.

LA POTENZA P-ESIMA DI UNA MATRICE $n \times n$

ECCOCI ARRIVATI FINALMENTE AD AFFRONTARE IL VERO PROBLEMA DI OGGI! TROVARE LA *P*-ESIMA POTENZA DI UNA MATRICE $n \times n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^p$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 7 \\ 1 \cdot 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

PER SEMPLICITÀ, SCEGLIAMO $c_1 = c_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 7 & 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 7 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

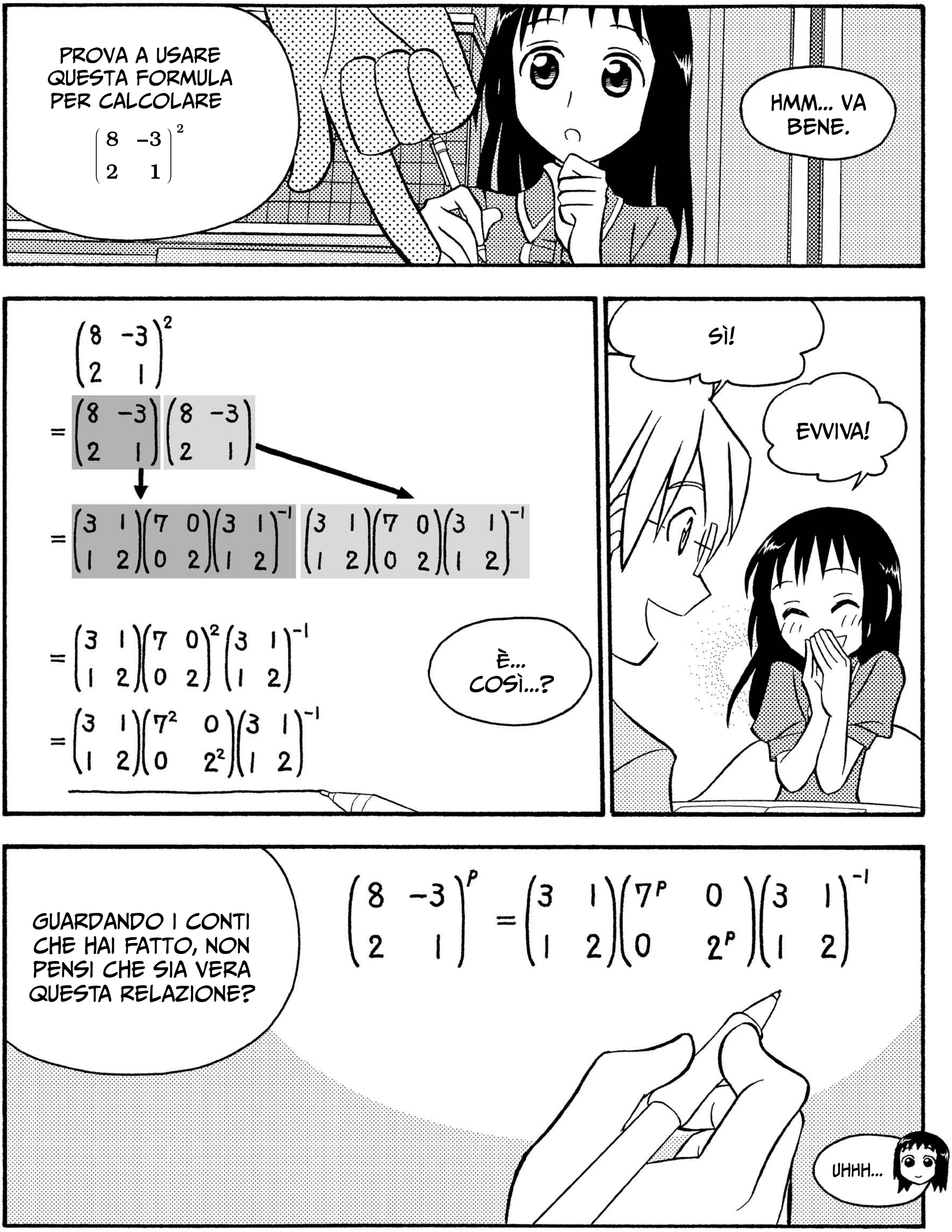
USANDO GLI ULTIMI DUE CALCOLI...

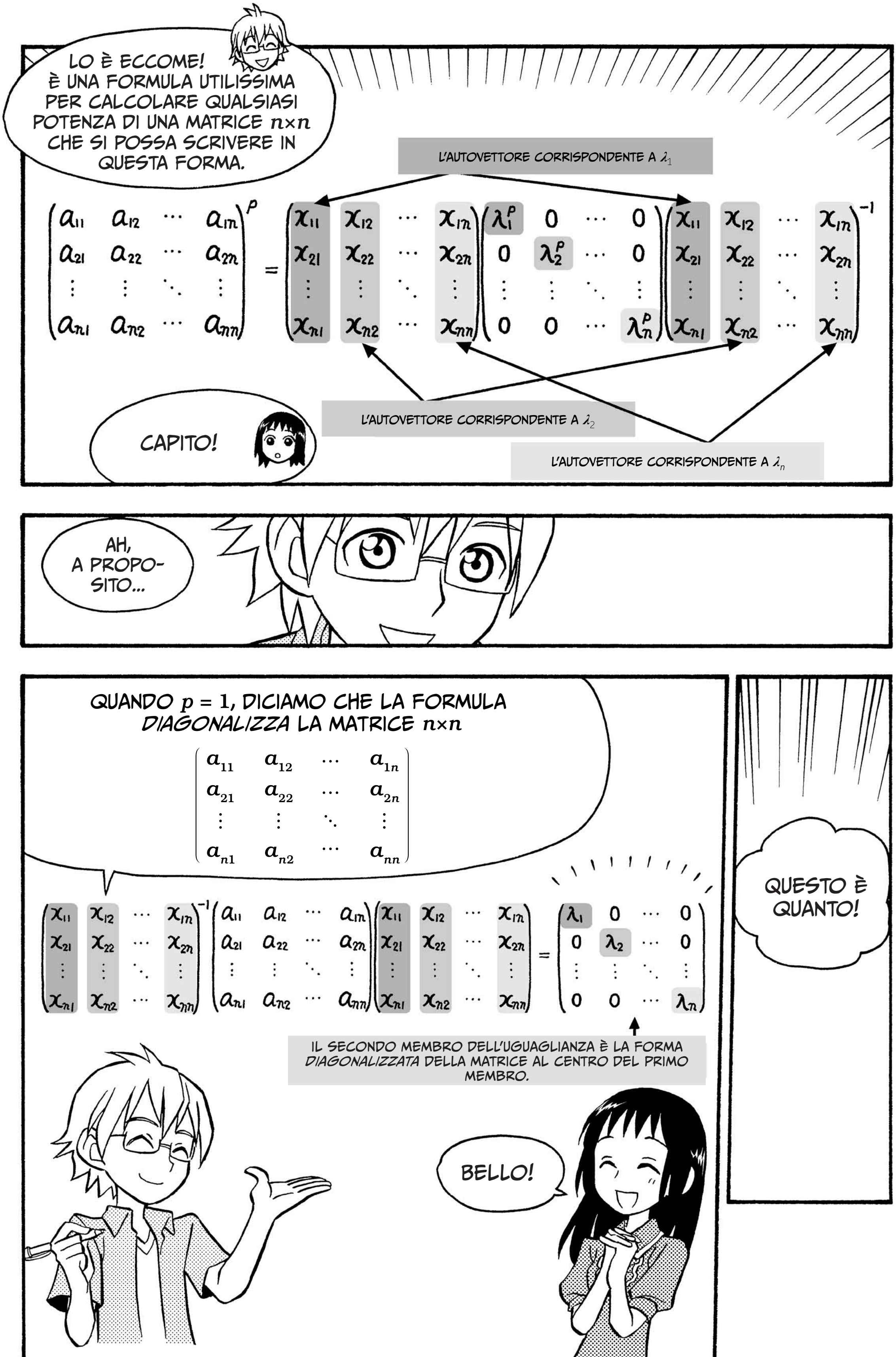
$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

MOLTIPLICHIAMO AMBO I MEMBRI PER $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ A DESTRA. TORNIAMO A PAGINA 91 PER VEDERE PERCHÉ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ ESISTE.

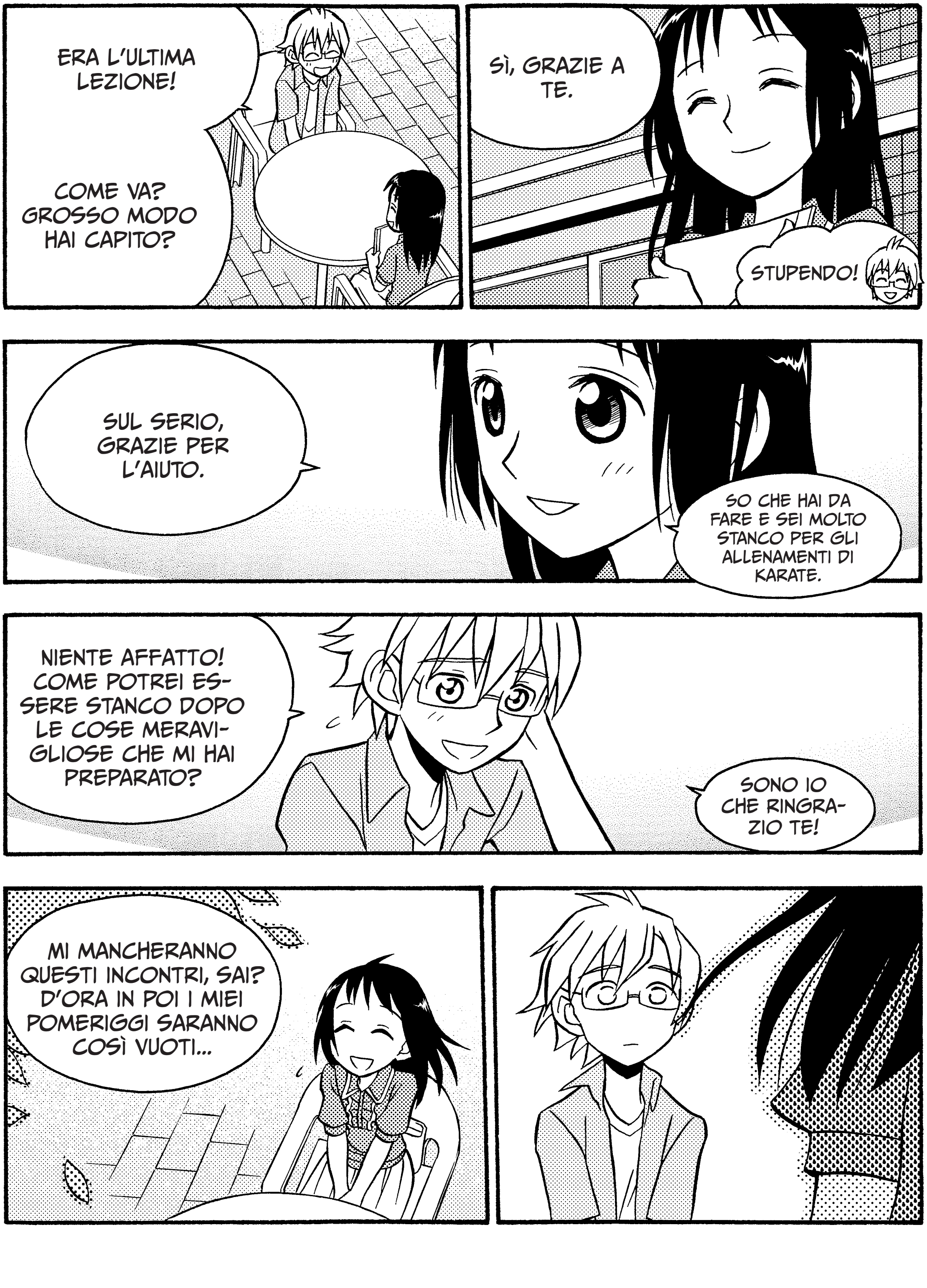
$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

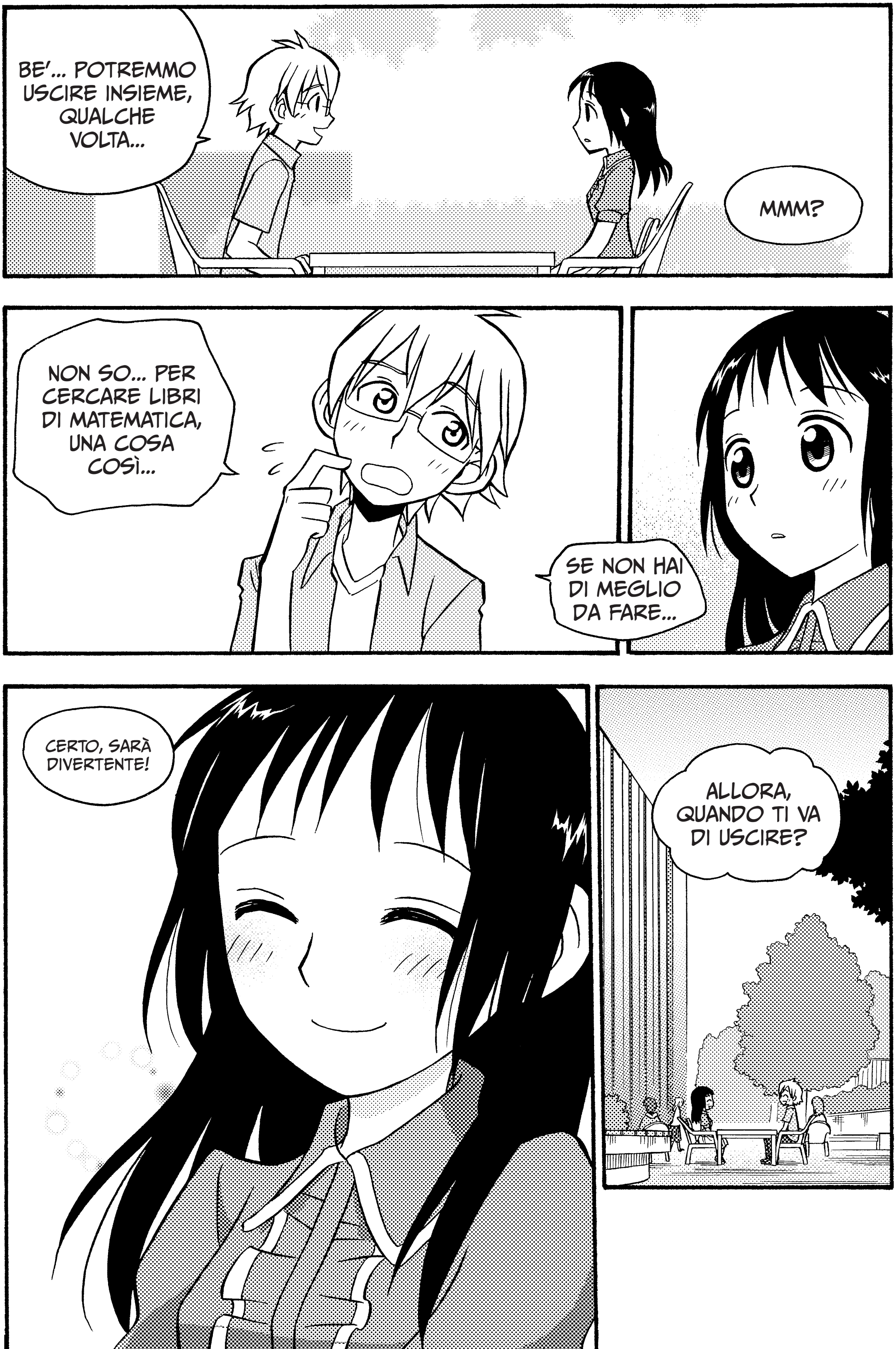
$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$


PROVA A USARE QUESTA FORMULA PER CALCOLARE $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2$
HMM... VA BENE.
$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2$
$= \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$
$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$
$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$
È... COSÌ...?
SÌ!
EVVIVA!
GUARDANDO I CONTI CHE HAI FATTO, NON PENSI CHE SIA VERA QUESTA RELAZIONE?
$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7^p & 0 \\ 0 & 2^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$
UHHH...



LO È ECCOME! È UNA FORMULA UTILISSIMA PER CALCOLARE QUALSIASI POTENZA DI UNA MATRICE $n \times n$ CHE SI POSSA SCRIVERE IN QUESTA FORMA.
L'AUTOVETTORE CORRISPONDENTE A λ_1
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1}$$
L'AUTOVETTORE CORRISPONDENTE A λ_2
L'AUTOVETTORE CORRISPONDENTE A λ_n
CAPITO!
AH, A PROPOSITO...
QUANDO $p = 1$, DICIAMO CHE LA FORMULA *DIAGONALIZZA* LA MATRICE $n \times n$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
IL SECONDO MEMBRO DELL'UGUAGLIANZA È LA FORMA *DIAGONALIZZATA* DELLA MATRICE AL CENTRO DEL PRIMO MEMBRO.
QUESTO È QUANTO!
BELLO!


ERA L'ULTIMA LEZIONE!
COME VA? GROSSO MODO HAI CAPITO?
SÌ, GRAZIE A TE.
STUPENDO!
SUL SERIO, GRAZIE PER L'AIUTO.
SO CHE HAI DA FARE E SEI MOLTO STANCO PER GLI ALLENAMENTI DI KARATE.
NIENTE AFFATTO! COME POTREI ESSERE STANCO DOPO LE COSE MERAVIGLIOSE CHE MI HAI PREPARATO?
SONO IO CHE RINGRAZIO TE!
MI MANCHERANNO QUESTI INCONTRI, SAI? D'ORA IN POI I MIEI POMERIGGI SARANNO COSÌ VUOTI...


BE'... POTREMMO USCIRE INSIEME, QUALCHE VOLTA...
MMM?
NON SO... PER CERCARE LIBRI DI MATEMATICA, UNA COSA COSÌ...
SE NON HAI DI MEGLIO DA FARE...
CERTO, SARÀ DIVERTENTE!
ALLORA, QUANDO TI VA DI USCIRE?

MOLTEPLICITÀ E DIAGONALIZZAZIONE

A pagina 221 abbiamo detto che ogni matrice $n \times n$ si può esprimere in questa forma:

L'autovettore corrispondente a λ_1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1}$$

L'autovettore corrispondente a λ_2

L'autovettore corrispondente a λ_n

In realtà non è del tutto vero, perché il fatto che una matrice (quadrata) possa essere diagonalizzata oppure no dipende dal concetto di *molteplicità*[1]. Per esempio, se tutte le n soluzioni della seguente equazione

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

sono reali e hanno molteplicità 1, la diagonalizzazione è possibile. La situazione diventa più complicata quando abbiamo a che fare con autovalori con molteplicità maggiore di 1. Consideriamo quindi alcuni esempi con:

- matrici con autovalori con molteplicità maggiore di 1 che si possono diagonalizzare;
- matrici con autovalori con molteplicità maggiore di 1 che non si possono diagonalizzare.

1. La molteplicità di una radice di un polinomio dice quante volte quel numero è radice del polinomio, cioè quante volte lo annulla. Per esempio, nel polinomio $f(x) = (x-1)^4(x+2)^2x$, il fattore $(x-1)$ ha molteplicità 4, $(x+2)$ ha molteplicità 2 e x ha molteplicità 1

UNA MATRICE DIAGONALIZZABILE CON UN AUTOVALORE CON MOLTEPLICITÀ 2

PROBLEMA

Usiamo la seguente matrice in entrambi i problemi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Trovare tutti gli autovalori e autovettori della matrice.
2. Esprimere la matrice nella seguente forma:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}^{-1}$$

SOLUZIONE

1. Gli autovalori λ della matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sono le radici dell'equazione caratteristica: $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0.$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + 0 \cdot (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \cdot 0 \\ &\quad - 0 \cdot (1-\lambda) \cdot (-2) - 0 \cdot 1 \cdot (3-\lambda) - (1-\lambda) \cdot (-1) \cdot 0 \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = 3,\ 1$$

Notiamo che l'autovalore 1 ha molteplicità 2.

A. Autovettori corrispondenti a $\lambda = 3$

Inseriamo il nostro autovalore nella seguente formula:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ cioè } \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo così:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 0 \\ 1 & 1-3 & -1 \\ -2 & 0 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases} \quad \text{e l'autovettore} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ -2c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

dove *c1* è un numero reale diverso da zero.

B. Autovettori corrispondenti a $\lambda = 1$

Ripetendo gli stessi passaggi, troviamo

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & -1 \\ -2 & 0 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_3 \\ -2x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e osserviamo che $x_3 = x_1$ mentre x_2 può essere un qualsiasi numero reale. Quindi gli autovettori sono

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove *c1* e *c2* sono numeri reali arbitrari che non possono essere entrambi zero.

3. A questo punto applichiamo la formula di pagina 221:

L'autovettore corrispondente a 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Gli autovettori linearmente indipendenti corrispondenti a 1

UNA MATRICE NON DIAGONALIZZABILE CON UN AUTOVALORE CON MOLTEPLICITÀ 2

PROBLEMA

Usiamo questa matrice per entrambi i problemi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Trovare tutti gli autovalori e autovettori della matrice.
2. Esprimere la matrice nella seguente forma:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}^{-1}$$

SOLUZIONE

1. Gli autovalori λ della matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sono le radici dell'equazione caratteristica: $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -7 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0.$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -7 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + 0\cdot(-1)\cdot 4 + 0\cdot(-7)\cdot 0 \\
&\quad - 0\cdot(1-\lambda)\cdot 4 - 0\cdot(-7)\cdot(3-\lambda) - (1-\lambda)\cdot(-1)\cdot 0 \\
&= (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0
\end{aligned}$$

$$\lambda = 3,\ 1$$

Anche qui l'autovalore 1 ha molteplicità 2.

A. Autovettori corrispondenti a $\lambda = 3$
Inseriamo il nostro autovalore nella seguente formula:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ cioè } \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -7 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo così:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 0 \\ -7 & 1-3 & -1 \\ 4 & 0 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -7 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -7x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 4x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono come segue:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases} \text{ e l'autovettore } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ -2c_1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

dove c1 è un numero reale diverso da zero.

B. Autovettori corrispondenti a $\lambda = 1$

Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ -7 & 1-1 & -1 \\ 4 & 0 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7x_1 - x_3 \\ 4x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e osserviamo che $\begin{cases} x_3 = -7x_1 \\ x_3 = -2x_1 \end{cases}$

Ma questo può valere solo se $x_1 = x_3 = 0$. Quindi l'autovettore deve essere

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove c_2 è un numero reale arbitrario diverso da zero.

3. Dato che non c'erano autovettori della forma

$$c_2\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}$$

per $\lambda = 1$, non ci sono abbastanza autovettori linearmente indipendenti per esprimere

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ nella forma } \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}^{-1}$$

È importante osservare che tutte le matrici $n \times n$ diagonalizzabili hanno *sempre n* autovettori linearmente indipendenti. In altre parole, c'è sempre una base di R^n composta completamente da autovettori di quella matrice, detta base degli autovettori.


MI SA CHE SONO ARRIVATA UN PO' PRESTO...
EHI, È MOLTO CHE ASPETTI?
ポー
REIJ...
AAAH!
ドキッ
È LA SUA VOCE!
SU, NON FARE COSÌ!
SMETTILA! LASCIAMI!
VOGLIAMO SOLO CONOSCERTI UN PO' MEGLIO.
MISA!


DEVO FARE QUALCOSA...
E IN FRETTA!
FARABUTTI...
!
ガタ
ガタ
TREMITO
MA...
STA SUCCEDENDO DI NUOVO?
AL PRIMO APPUNTAMENTO CON YUKI, LA MIA FIDANZATINA ALLE MEDIE...
EHI, LASCIATEMI STARE!
VOGLIAMO SOLO DIVERTIRCI UN PO'...
HO GIÀ UN IMPEGNO.
YUKI!


QUEGLI IDIOTI...
DEVO FARE QUALCOSA!
VOI... PIANTATELA!
E TU CHI SARESTI!
CALCIO
UH?
ドサッ
CRASH
AH AH
MA DAVVERO? CON UN CALCIO SOLO? CHE PAPPAMOLLE...
VIENI, ANDIAMO.
LASCIAMI!
EHI, VOI!

FERMI. NON VEDETE CHE NON VUOLE VENIRE CON VOI?
E ORA CHI CACCHIO È?
OH, NO!
T-TU SEI...
IL LEGGENDARIO CAPO DEL CLUB DI KARATE DI HANAMICHI.
IL RANDELLO DI HANAMICHI?
IN CARNE E OSSA.
AGH...
DISCUTERE CON QUEL TIZIO È UN SUICIDIO!
TOGLIAMOCI DI QUI!
G-GRAZIE!
DI NIENTE... MA PENSO CHE IL TUO RAGAZZO ABBIA BISOGNO DI SOCCORSO...
UNGH


ASCOLTA... MI FA PIACERE CHE HAI CERCATO DI FARE QUALCOSA PER ME, MA...
NON È BASTATO.
IO...
...CREDO CHE NON POSSIAMO PIÙ VEDERCI.
...
MI DISPIACE TANTO... NON HO POTUTO FARE NIENTE...
QUESTA VOLTA NO.
ORA VE-DRANNO.
ADESSO SONO MOLTO PIÙ FORTE.
VIENI, TESO-RUCCIO.
STRAP
AIUTO!
QUESTA VOLTA SARÀ DIVERSO!
LASCIATELA!

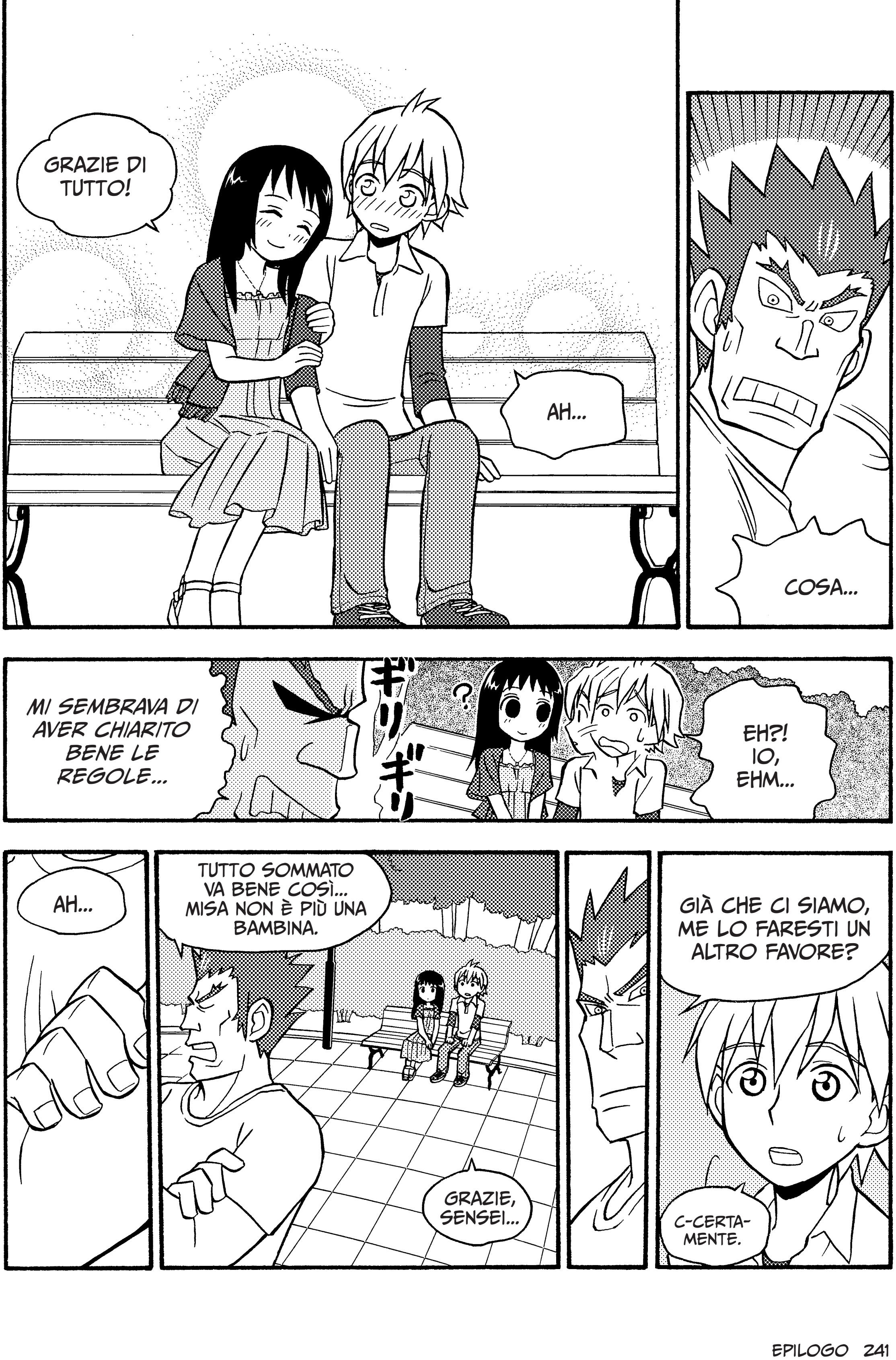

CIAF
CO...?
FORZA, ANDIAMO.
REIJI!
EHI, TU! FERMO LÌ.
CHI CAVOLO CREDI DI ESSERE?!
BAFF
!
STATELE LONTANI, TUTTI QUANTI!
AH, AH... MA GUARDA! VUOLE PROPRIO FARE L'EROE!
ADDOSSO!

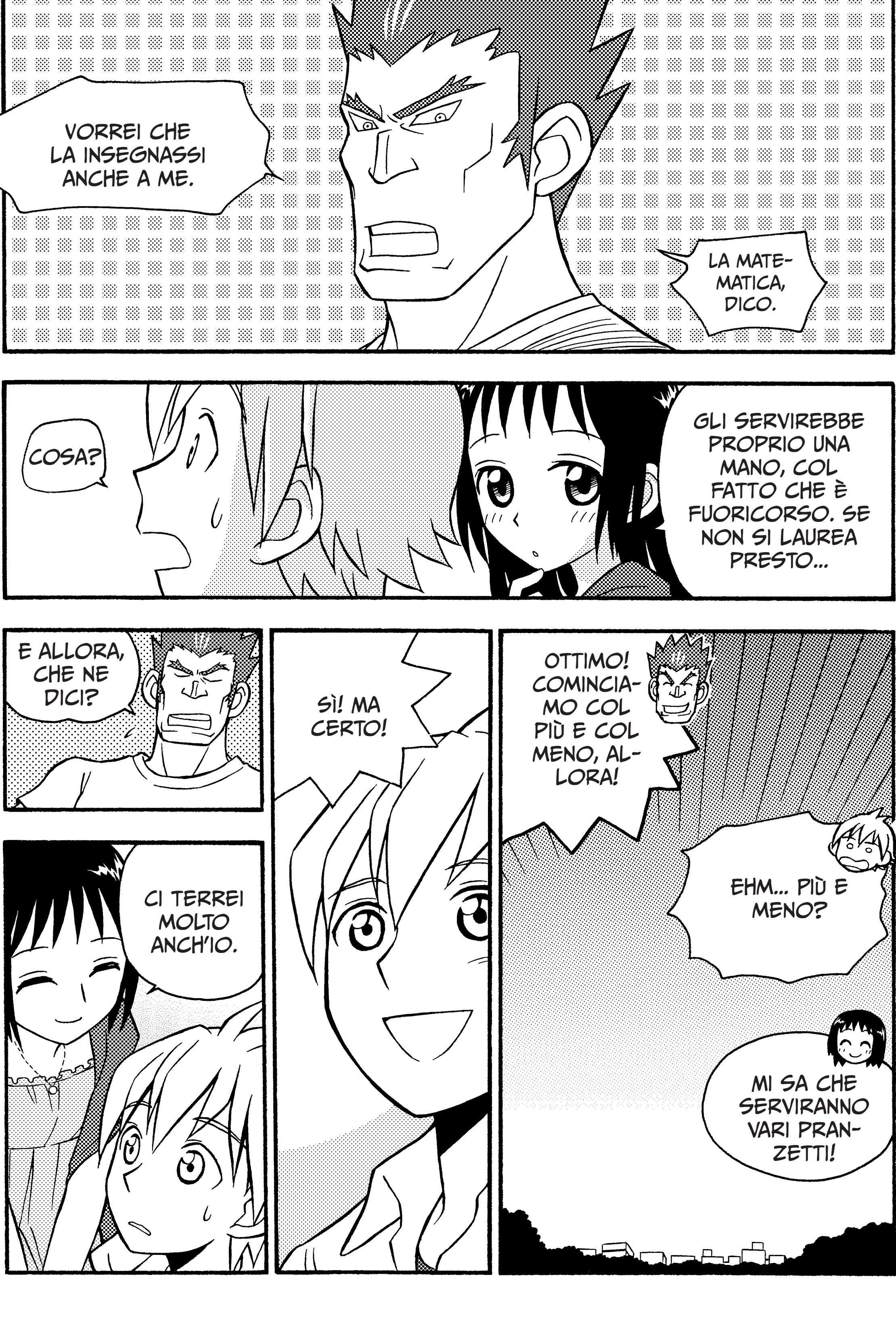

SCAPPA!
ATTENTO, REIJI!
UMF!
SMACK
RAZZA DI...
THUMP
FERMATEVI!
PER FAVORE!
LA-SCIAMI!
TESTARDO, EH?
BASTA!
AFFERRA


AGGREDITE LA MIA SORELLINA, EH?
TETSUO!
NON MI PIACE ESSERE TROPPO VIOLENTO... MA AGGREDENDO MISA, NON MI LASCIATE SCELTA...
CRACK
È ICHINOSE!
IL RANDELLO DI HANAMICHI!
MAMMA!
SCAPPIAMO!
SENSEI?
È SVENUTO.


REIJI?
REIJI, SVEGLIATI.
REIJI!
STAI BENE!
OUCH!
YURINO... MISA MI HA RACCONTATO COS'È SUCCESSO.
GRAZIE.
MMM... DI NIENTE.
MA NON MI MERITO IL TUO RINGRAZIAMEN-TO...


NON SONO RIUSCITO AD AIUTARE MISA... E NEPPURE ME STESSO...
NON SONO CAMBIATO PER NIENTE! SONO ANCORA UN DEBOLE!
BE', NON SARAI ANCORA UNA CINTURA NERA...
MA CERTAMENTE NON SEI UN DEBOLE.
HAI MOSTRATO GRANDE CORAGGIO PENSANDO ALL'INCOLUMITÀ DI MISA PRIMA CHE A TE. QUESTO CORAGGIO È AMMIREVOLE,
NON È UNA QUESTIONE DI FORZA.
DEVI ESSERE ORGOGLIOSO.
MA...
REIJI!
HA RAGIONE.
NON SO CHE DIRTI... GRAZIE.
MISA...


GRAZIE DI TUTTO!
AH...
COSA...
MI SEMBRAVA DI AVER CHIARITO BENE LE REGOLE...
ギリギリ
EH?! IO, EHM...
AH...
TUTTO SOMMATO VA BENE COSÌ... MISA NON È PIÙ UNA BAMBINA.
GRAZIE, SENSEI...
GIÀ CHE CI SIAMO, ME LO FARESTI UN ALTRO FAVORE?
C-CERTAMENTE.

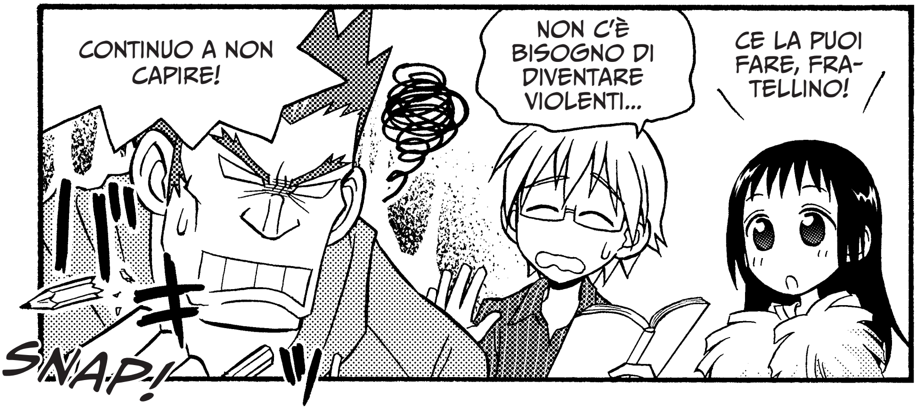

VORREI CHE LA INSEGNASSI ANCHE A ME.
LA MATE-MATICA, DICO.
GLI SERVIREBBE PROPRIO UNA MANO, COL FATTO CHE È FUORICORSO. SE NON SI LAUREA PRESTO...
COSA?
E ALLORA, CHE NE DICI?
CI TERREI MOLTO ANCH'IO.
SÌ! MA CERTO!
OTTIMO! COMINCIA-MO COL PIÙ E COL MENO, AL-LORA!
EHM... PIÙ E MENO?
MI SA CHE SERVIRANNO VARI PRAN-ZETTI!

INDICE

NOTE

NOTE

NOTE

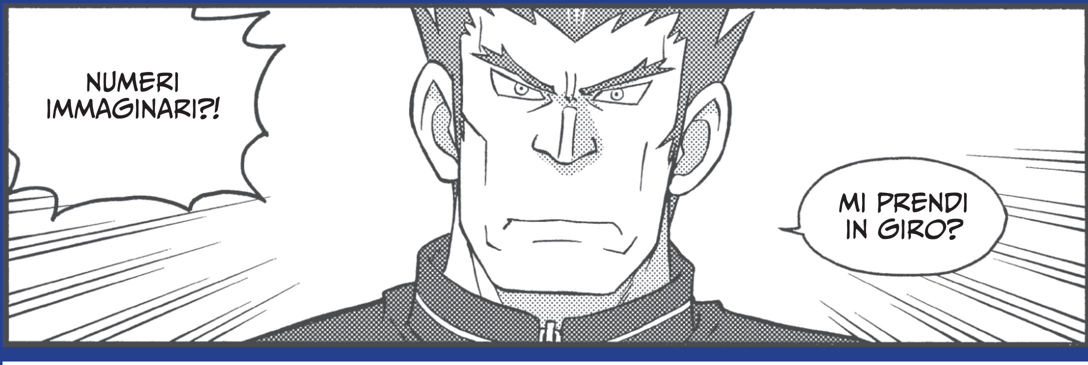

CONTINUO A NON CAPIRE!
SNAP!
NON C'È BISOGNO DI DIVENTARE VIOLENTI...
CE LA PUOI FARE, FRA-TELLINO!

L'AUTORE

Shin Takahashi è nato nel 1972 a Niigata. Si è laureato al Kyushu Institute of Design (oggi Kyushu University). Ha lavorato come analista ed è ora autore di testi tecnici.

Homepage: *http://www.takahashishin.jp/*

UN'AFFASCINANTE GUIDA ALL'ALGEBRA LINEARE. A FUMETTI!



DALLA VITA REIJI DESIDERA DUE COSE: UNA CINTURA NERA DI KARATE E MISA, LA RAGAZZA DEI SUOI SOGNI. PER FORTUNA, IL FRATELLO MAGGIORE DI MISA È IL CAPITANO DELLA SQUADRA DI KARATE DELL'UNIVERSITÀ ED È DISPOSTO A STRINGERE UN PATTO: REIJI POTRÀ ENTRARE NELLA SQUADRA SE DARÀ LEZIONI DI ALGEBRA LINEARE A MISA. ENTRATE ANCHE VOI NEL MONDO DE *I MANGA DELLE SCIENZE – ALGEBRA LINEARE*, DOVE REIJI CERCA DI ESPORRE A MISA LE BASI DI QUESTO ARGOMENTO DELICATO E SFUGGENTE, DESCRIVENDOLE OPERAZIONI DA CAPOGIRO COME LE TRASFORMAZIONI LINEARI, IL CALCOLO DEI DETERMINANTI E LA DETERMINAZIONE DI AUTOVALORI E AUTOVETTORI. CON L'AIUTO DI ESEMPI DAVVERO INCREDIBILI, COME IL MINIGOLF E GLI INCONTRI DI KARATE, REIJI TRASFORMA CONCETTI ASTRATTI IN FATTI CONCRETI, COMPRENSIBILI E PERSINO DIVERTENTI.

INSIEME A MISA, NEL SUO CORSO ACCELERATO DI ALGEBRA LINEARE CAPIRETE E APPLICHERETE NOZIONI COME:

- OPERAZIONI DI BASE TRA VETTORI E MATRICI, COME ADDIZIONE E MOLTIPLICAZIONE;
- DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE;
- BASI DI SPAZI VETTORIALI;
- ELIMINAZIONE DI GAUSS PER IL CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA;
- SOTTOSPAZIO, DIMENSIONE E "SPAN" LINEARE;
- APPLICAZIONI PRATICHE DELL'ALGEBRA LINEARE IN CAMPI COME LA GRAFICA COMPUTERIZZATA E LA CRITTOGRAFIA.

NE *I MANGA DELLE SCIENZE – ALGEBRA LINEARE* TROVERETE VERA MATEMATICA, VERA AZIONE E VERO AMORE COME MAI PRIMA D'ORA!

Ohmsha
no starch press

la Repubblica Le Scienze

60010
9 771128 609475

Pubblicazione settimanale da vendersi esclusivamente in abbinamento a la Repubblica oppure a Le Scienze.
Supplemento al numero in edicola.
9,90 euro + il prezzo di Repubblica oppure de Le Scienze.