Electromagnetismo II
Tarea 3

Gamucero Arana Juan Pablo

Octubre 2020

Problema 4

Dos cascarones esféricos concéntricos de radios a y b ($b > a$) son divididos en dos hemisferios por el mismo plano horizontal, el plano XY. El hemisferio de arriba de la esfera interior y el hemisferio de abajo de la esfera exterior se mantienen a un potencial ϕ_0. Los otros hemisferios se mantienen aterrizados (a potencial cero).

I) Calcula el potencial en la región $a \leq r \leq b$ como una serie en polinomios de Legendre.

II) Incluye términos hasta al menos $l = 4$ y coteja tu solución con la de los casos límite $b \to \infty$ y $a \to 0$.

III) Considera el plano $X = 0$ y grafica la solución que obtuviste en (I) incluyendo suficientes valores de l en la suma como para que la solución no cambie en las tres primeras cifras significativas. Para el cálculo numérico considerar $\phi_0 = 1, a = 2$ y $b = 3$.

Solución

En este problema se tiene simetría azimutal. Por lo tanto, el problema en ecuaciones diferenciales parciales con valores en la frontera que hay que resolver es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) &= 0, \quad (r,\theta) \in (a,b) \times (0,\pi), \\
\phi(a,\theta) &= \begin{cases} \phi_0, & \text{si} \quad \theta \in [0,\pi/2] \\ 0, & \text{si} \quad \theta \in (\pi/2,\pi], \end{cases} \\
\phi(b,\theta) &= \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \theta \in [0,\pi/2] \\ \phi_0, & \text{si} \quad \theta \in (\pi/2,\pi]. \end{cases}
\end{aligned}$$

I) A partir del método de separación de variables queremos encontrar una representación de la solución, en la región de interés, de la forma:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta). \tag{1}$$

Si evaluamos la Eq. (1) en $r = a$, multiplicamos por $P_m(\cos\theta)\sin(\theta)$ e integramos a lo largo de todo el dominio de θ:

$$\int_0^{\pi} \phi(a,\theta) P_m(\cos\theta)\sin(\theta) d\theta = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\int_0^{\pi} P_m(\cos\theta) P_l(\cos\theta)\sin(\theta) d\theta,$$

y además, recordamos la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre:

$$\int_0^\pi P_m(\cos\theta)P_l(\cos\theta)\sin(\theta)d\theta = \frac{2}{2m+1}\delta_{lm}, \tag{2}$$

entonces:

$$\int_0^\pi \phi(a,\theta)P_m(\cos\theta)\sin(\theta)d\theta \quad = \quad \left(A_m a^m + \frac{B_m}{a^{m+1}}\right)\frac{2}{2m+1}$$

Análogamente, si evaluamos la Eq. (1) en $r = b$, se obtiene que:

$$\int_0^\pi \phi(b,\theta)P_m(\cos\theta)\sin(\theta)d\theta \quad = \quad \left(A_m b^m + \frac{B_m}{b^{m+1}}\right)\frac{2}{2m+1}.$$

Usamos las condiciones de contorno para simplificar las expresiones:

$$\phi_0\int_0^{\pi/2} P_m(\cos\theta)\sin(\theta)d\theta \quad = \quad \left(A_m a^m + \frac{B_m}{a^{m+1}}\right)\frac{2}{2m+1}$$

$$\phi_0\int_{\pi/2}^{\pi} P_m(\cos\theta)\sin(\theta)d\theta \quad = \quad \left(A_m b^m + \frac{B_m}{b^{m+1}}\right)\frac{2}{2m+1},$$

Con el cambio de variable $x = \cos\theta$, reescribimos:

$$\frac{2m+1}{2}\phi_0\int_0^1 P_m(x)dx = \left(A_m a^m + \frac{B_m}{a^{m+1}}\right) \tag{3}$$

$$\frac{2m+1}{2}\phi_0\int_{-1}^0 P_m(x)dx = \left(A_m b^m + \frac{B_m}{b^{m+1}}\right). \tag{4}$$

Observemos que, de la Eq. (2) podemos calcular la integral de los polinomios de Legendre en el intervalo $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^1 P_m(x)dx = \int_{-1}^1 P_m(x)P_0(x)dx = \frac{2}{2m+1}\delta_{m0} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad m > 0, \\ 2, & \text{si} \quad m = 0. \end{cases}$$

Si $m = 0$, las Eqs. (3) y (4) son:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\phi_0\int_0^1 P_0(x)dx \quad &= \quad \frac{1}{2}\phi_0 = A_0 + \frac{B_0}{a} \\ \frac{1}{2}\phi_0\int_{-1}^0 P_0(x)dx \quad &= \quad \frac{1}{2}\phi_0 = A_0 + \frac{B_0}{b}. \end{aligned}$$

Resolvemos, y obtenemos que $A = \phi_0/2, \quad B_0 = 0$.

Si $m > 0$, al sumar las Eqs. (3) y (4):

$$0 = A_m(b^m + a^m) + B_m\left(\frac{1}{a^{m+1}} + \frac{1}{b^{m+1}}\right)$$

entonces:

$$B_m = -A_m(ab)^{m+1}\left(\frac{a^m + b^m}{a^{m+1} + b^{m+1}}\right).$$

Y sustituyendo en la Eq. (1):

$$\phi(r,\theta) = \frac{1}{2}\phi_0 + \sum_{l=1}^{\infty}\left(r^l - \frac{(ab)^{l+1}\left(\frac{a^l+b^l}{a^{l+1}+b^{l+1}}\right)}{r^{l+1}}\right)A_l P_l(\cos\theta).$$

Solo falta calcular expresiones explícitas para A_m. Esto se hace a partir de la Eq. (3) y la expresión que ya se tiene para B_m:

$$\begin{aligned}\frac{2m+1}{2}\phi_0\int_0^1 P_m(x)dx &= \left(A_m a^m + \frac{-A_m(ab)^{m+1}\left(\frac{a^m+b^m}{a^{m+1}+b^{m+1}}\right)}{a^{m+1}}\right) = A_m\left(a^m - b^{m+1}\frac{a^m+b^m}{a^{m+1}+b^{m+1}}\right)\\ &= A_m\left(\frac{a^{2m+1}+a^m b^{m+1} - b^{m+1}a^m - b^{2m+1}}{a^{m+1}+b^{m+1}}\right)\end{aligned}$$

Resolviendo para A_m:

$$A_m = \frac{a^{m+1}+b^{m+1}}{a^{2m+1}-b^{2m+1}}\frac{2m+1}{2}\phi_0\int_0^1 P_m(x)dx.$$

Por lo tanto, el potencial en la región de interés ($a \leq r \leq b$) está dado por:

$$\begin{aligned}\phi(r,\theta) &= \frac{1}{2}\phi_0 + \phi_0\sum_{l=1}^{\infty}\left(r^l - \frac{(ab)^{l+1}\left(\frac{a^l+b^l}{a^{l+1}+b^{l+1}}\right)}{r^{l+1}}\right)\frac{a^{l+1}+b^{l+1}}{a^{2l+1}-b^{2l+1}}\frac{2l+1}{2}\left(\int_0^1 P_l(x)dx\right)P_l(\cos\theta)\\ &= \frac{1}{2}\phi_0 + \phi_0\sum_{l=1}^{\infty}\left(\left(a^{l+1}+b^{l+1}\right)r^l - \frac{(ab)^{l+1}\left(a^l+b^l\right)}{r^{l+1}}\right)\frac{(2l+1)}{2(a^{2l+1}-b^{2l+1})}\left(\int_0^1 P_l(x)dx\right)P_l(\cos\theta).\end{aligned}$$

Los polinomios de Legendre tienen la propiedad de que:

$$\int_0^1 P_l(x)dx = 0$$

para $l > 0$ par. Ya que, para $l > 0$ par:

$$0 = \int_{-1}^1 P_l(x)dx = \int_{-1}^0 P_l(x)dx + \int_0^1 P_l(x)dx = 2\int_0^1 P_l(x)dx.$$

Esto nos permite reescribir el potencial en términos, únicamente, de las contribuciones impares. Si hacemos $l = 2j-1, \quad j = 1,2,3,...$, entonces:

$$\begin{aligned}\phi(r,\theta) &= \frac{1}{2}\phi_0 + \phi_0\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{(ab)^{2j}\left(a^{2j-1}+b^{2j-1}\right)}{r^{2j}} - \left(a^{2j}+b^{2j}\right)r^{2j-1}\right)\frac{(4j-1)}{2(b^{4j-1}-a^{4j-1})}\left(\int_0^1 P_{2j-1}(x)dx\right)P_{2j-1}(\cos\theta)\\ &= \frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{2}\phi_0\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left(a^{2j-1}+b^{2j-1}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^{2j} - \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{2j}+1\right)r^{2j-1}\right)b^{2j}\frac{(4j-1)}{(b^{4j-1}-a^{4j-1})}\left(\int_0^1 P_{2j-1}(x)dx\right)P_{2j-1}(\cos\theta)\\ &= \frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{2}\phi_0\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{2j-1}+1\right)\left(\frac{a}{r}\right)^{2j} - \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{2j}+1\right)\left(\frac{r}{b}\right)^{2j-1}\right)b^{2j}b^{2j-1}\frac{(4j-1)}{(b^{4j-1}-a^{4j-1})}\left(\int_0^1 P_{2j-1}(x)dx\right)P_{2j-1}(\cos\theta).\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{2}\phi_0\sum_{j=1}^{\infty}\left[\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{2j-1}+1\right)\left(\frac{a}{r}\right)^{2j} - \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{2j}+1\right)\left(\frac{r}{b}\right)^{2j-1}\right]\frac{(4j-1)}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{4j-1}}\left(\int_0^1 P_{2j-1}(x)dx\right)P_{2j-1}(\cos\theta).}$$

II) Si truncamos la serie hasta $l = 4$, o equivalentemente $j = 2$, obtenemos la expresión:

$$\begin{aligned}
\phi(r,\theta) &\approx \frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{2}\phi_0\left[\left(\left(\frac{a}{b}\right)+1\right)\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \left(\left(\frac{a}{b}\right)^2+1\right)\left(\frac{r}{b}\right)\right]\frac{3}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^3}\left(\int_0^1 P_1(x)dx\right)P_1(\cos\theta) \\
&+ \frac{1}{2}\phi_0\left[\left(\left(\frac{a}{b}\right)^3+1\right)\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \left(\left(\frac{a}{b}\right)^4+1\right)\left(\frac{r}{b}\right)^3\right]\frac{7}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^7}\left(\int_0^1 P_3(x)dx\right)P_3(\cos\theta) \\
&= \frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{2}\phi_0\left[\left(\left(\frac{a}{b}\right)+1\right)\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \left(\left(\frac{a}{b}\right)^2+1\right)\left(\frac{r}{b}\right)\right]\frac{3/2}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^3}P_1(\cos\theta) \\
&- \frac{1}{2}\phi_0\left[\left(\left(\frac{a}{b}\right)^3+1\right)\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \left(\left(\frac{a}{b}\right)^4+1\right)\left(\frac{r}{b}\right)^3\right]\frac{7/8}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^7}P_3(\cos\theta)\,.
\end{aligned}$$

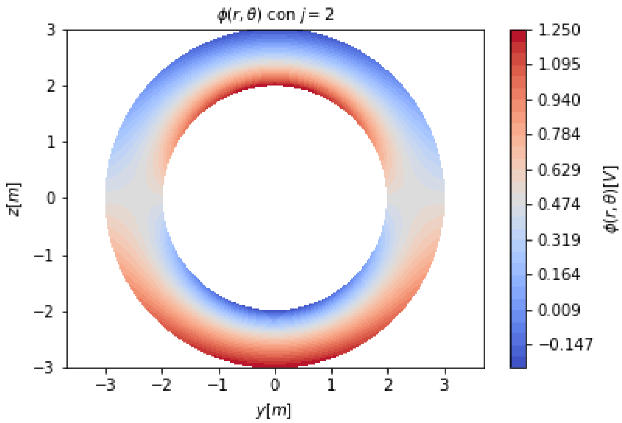
Si consideramos $a \to 0$:

$$\phi(r,\theta) \approx \frac{1}{2}\phi_0 - \frac{3}{4}\phi_0\left(\frac{r}{b}\right)P_1(\cos\theta) + \frac{7}{16}\left(\frac{r}{b}\right)^3 P_3(\cos\theta)\,,$$

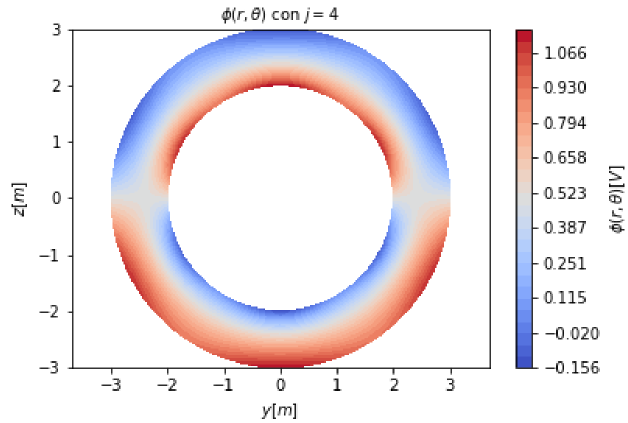
de manera similar, al tomar $b \to \infty$:

$$\phi(r,\theta) \approx \frac{1}{2}\phi_0 + \frac{3}{4}\phi_0\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_1(\cos\theta) - \frac{7}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_3(\cos\theta)\,.$$

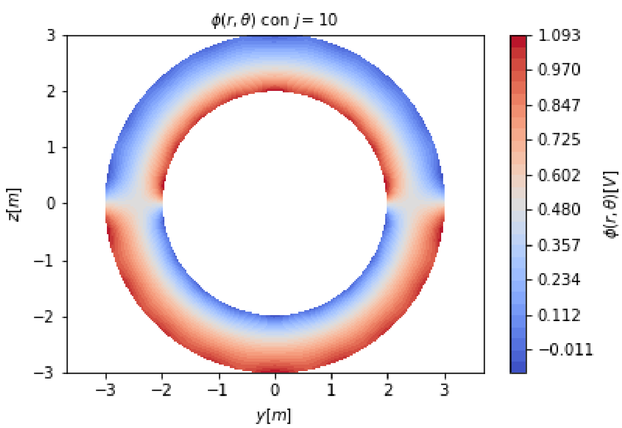
III) Como hay simetría azimutal, la solución es la misma para cualquier ángulo φ. En el plano $X = 0$ basta con calcular para $\varphi = 0$, y luego reflejamos respecto al eje Z.



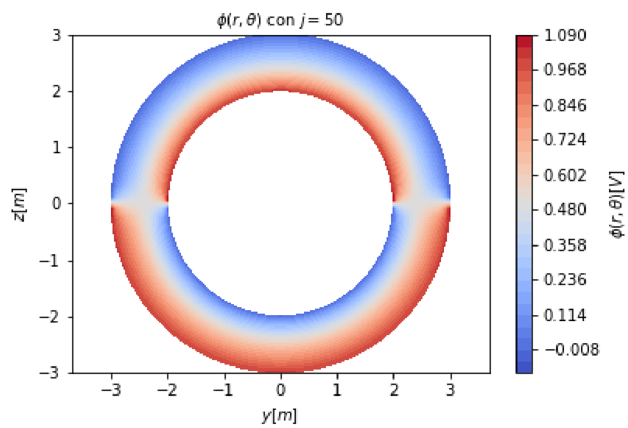
(a) $j = 2, \quad l = 3$



(b) $j = 4, \quad l = 7$



(c) $j = 10, \quad l = 19$



(d) $j = 50, \quad l = 99$

Figura 1: Estas gráficas corresponden a una aproximación del potencial $\phi(r, \theta)$ sobre el plano $X = 0$, con los parámetros $\phi_0 = 1$ V, $a = 2$ m, $b = 3$ m. El parámetro j corresponde al valor j de la Eq. obtenida en el inciso (ɪ), es decir $l = 2j - 1$, con l el índice que identifica a los polinomios de Legendre. Se puede observar que conforme se toman más términos de la serie, se aproxima mejor el potencial cerca de los puntos de discontinuidad.