

**《现代控制理论》**

**课程设计报告**

**基于现代控制理论的直流电机  
位置伺服系统设计与仿真分析**

**学院：**交通运输工程学院

**班级：**交控 2202

**姓名：**甘宇铖

**学号：**8212220717

2025 年 6 月 23 日

## 摘要

本报告旨在系统性地应用现代控制理论，对直流电机位置伺服系统进行全面的设计、分析与仿真。研究内容涵盖了从理想模型下的控制器设计到更贴近实际的鲁棒性与随机噪声环境下的性能评估。本文首先基于电机的物理特性建立三阶 LTI 状态空间模型，并验证其能控性与能观性。随后，设计了极点配置与 LQR 两种状态反馈控制器，并对其理想性能进行对比。为模拟工程实际，本研究进一步拓展了两个核心方向：(1) 鲁棒性分析：评估了所设计控制器在模型参数存在偏差时的性能保持能力；(2) 最优状态估计：在引入随机过程噪声与测量噪声的环境下，设计了卡尔曼滤波器，并传统的 Luenberger 观测器进行性能对比。所有设计与仿真均在 MATLAB 环境中完成。研究结果表明，LQR 控制器展现出优于极点配置法的鲁棒性；而在随机噪声环境下，卡尔曼滤波器能够提供比 Luenberger 观测器精确得多的状态估计，从而显著改善了闭环系统的最终控制性能。

**关键词：**现代控制理论；状态空间；LQR；状态观测器；鲁棒性分析；卡尔曼滤波器

## Abstract

This report systematically applies modern control theory to the comprehensive design, analysis, and simulation of a DC motor position servo system. Two state-feedback controllers, Pole Placement and Linear Quadratic Regulator (LQR), are then designed and their ideal performances are compared. To simulate real-world engineering conditions, this study further explores two core extensions: (1) Robustness Analysis: evaluating the performance retention of the designed controllers under model parameter uncertainties; and (2) Optimal State Estimation: designing a Kalman filter in an environment with stochastic process and measurement noise, and comparing its performance against a traditional Luenberger observer. All designs and simulations were completed in the MATLAB environment. The results demonstrate that the LQR controller exhibits superior robustness compared to the Pole Placement method. Furthermore, in a noisy environment, the Kalman filter provides significantly more accurate state estimation than the Luenberger observer, thereby markedly improving the final control performance of the closed-loop system.

**Keywords:** Modern Control Theory; State-Space; LQR; State Observer; Robustness Analysis; Kalman Filter

# 目录

<b>1 引言 (Introduction)</b>	<b>3</b>
<b>2 理论与方法 (Methodology)</b>	<b>3</b>
2.1 系统建模与分析 . . . . .	3
2.2 状态反馈控制器设计 . . . . .	3
2.2.1 极点配置法 (Pole Placement) . . . . .	3
2.2.2 线性二次型调节器 (LQR) . . . . .	4
2.3 状态估计器设计 . . . . .	4
2.3.1 Luenberger 观测器 . . . . .	4
2.3.2 卡尔曼滤波器 (Kalman Filter) . . . . .	5
<b>3 实验设置 (Experimental Setup)</b>	<b>5</b>
<b>4 结果与讨论 (Results and Discussion)</b>	<b>6</b>
4.1 开环系统与理想控制器性能 . . . . .	6
4.2 控制器鲁棒性分析 . . . . .	6
4.3 噪声环境下的状态估计与控制性能 . . . . .	7
4.3.1 仿真结果的理想性分析 . . . . .	10
<b>5 结论 (Conclusion)</b>	<b>10</b>
<b>6 参考文献 (References)</b>	<b>10</b>
<b>A 附录 (Appendix)</b>	<b>11</b>
A.1 无噪声环境下 Luenberger 观测器性能 . . . . .	11
A.2 项目代码 . . . . .	11

# 1 引言 (Introduction)

直流电机因其优良的调速性能、高启动转矩和简单的控制结构，被广泛应用于机器人、数控机床、航空航天等需要高精度运动控制的领域。现代控制理论以状态空间法为核心，为分析与设计复杂控制系统提供了系统而强大的数学工具。本实验报告的核心目标，正是系统性地应用现代控制理论中的核心方法，为一个直流电机位置伺服系统设计并实现高性能的控制器，并进一步探究在模型不确定和随机噪声等非理想条件下，控制系统的性能表现及改进策略。

## 2 理论与方法 (Methodology)

### 2.1 系统建模与分析

一个典型的电枢控制式直流电机的动态行为可由电气和机械两部分方程描述。定义状态向量为  $\mathbf{x}(t) = [\theta(t), \omega(t), i_a(t)]^T$ ，其中  $\theta$  为角度， $\omega$  为角速度， $i_a$  为电枢电流。输入为电枢电压  $u(t) = V_a(t)$ ，输出为电机角度  $y(t) = \theta(t)$ 。系统的状态空间模型  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$  和  $y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$  由以下矩阵定义：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b/J & K_t/J \\ 0 & -K_e/L_a & -R_a/L_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0], \quad \mathbf{D} = [0] \quad (1)$$

其中， $J, b, K_t, K_e, R_a, L_a$  分别为系统的物理参数。通过构建能控性矩阵  $\mathbf{C}$  和能观性矩阵  $\mathbf{O}$  并检验其秩，可以判断系统的能控性与能观性。

### 2.2 状态反馈控制器设计

状态反馈控制旨在通过一个控制律  $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$  将系统状态驱动到期望的目标。该控制律将系统所有状态变量的线性组合反馈至输入端，形成闭环。闭环系统的动态特性由矩阵  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$  的特征值（即闭环极点）决定。因此，控制器设计的核心任务便是求解一个合适的反馈增益矩阵  $\mathbf{K}$ ，以获得期望的系统性能。

#### 2.2.1 极点配置法 (Pole Placement)

极点配置是一种直接且直观的设计方法。其理论基础是：若一个线性系统是完全能控的，那么通过状态反馈，其闭环系统的极点可以被任意配置到复平面上的任何位置。

该方法的设计流程是“目标驱动”的：首先根据期望的动态性能指标（如调节时间、超调量等），利用二阶系统近似等理论，反推出一组期望的闭环极点位置  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 。随后，通过求解特征多项式等式  $\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = \prod_{i=1}^n (s - p_i)$ ，或利用更高效的数值算法，即可计算出能实现该极点配置的唯一增益矩阵  $\mathbf{K}$ 。这种方法的优点是思路清晰、目标明确，但其性能高度依赖于系统模型的精确性。

### 2.2.2 线性二次型调节器 (LQR)

与极点配置不同，LQR 是一种最优控制方法，它不直接指定极点位置，而是从“能量”和“性能”平衡的角度出发，寻找一个最优的控制策略。LQR 通过最小化一个二次型性能指标（代价函数） $J$  来寻找最优反馈增益  $\mathbf{K}$ ：

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + u^T(t)\mathbf{R}u(t)) dt \quad (2)$$

该代价函数由两部分组成：第一项  $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$  代表了在整个控制过程中状态偏差所累积的“代价”，第二项  $u^T\mathbf{R}u$  代表了控制输入（即控制能量）所累积的“代价”。权重矩阵  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  的选取，体现了设计者对“快速响应”（大  $\mathbf{Q}$ ）和“节省能量”（大  $\mathbf{R}$ ）之间的权衡。

最优反馈增益  $\mathbf{K}$  的求解不依赖于极点，而是通过求解 \*\* 连续时间代数 Riccati 方程 (ARE)\*\* 得到：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3)$$

求得此方程唯一的对称正定解  $\mathbf{P}$  后，最优增益矩阵即为  $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$ 。LQR 因其内含的优化思想，通常能获得更好的鲁棒性。

## 2.3 状态估计器设计

在多数实际应用中，并非所有状态变量都可直接测量。状态估计器（或称观测器）的作用就是利用可测量的输入  $u(t)$  和输出  $y(t)$ ，来重构系统内部的全部状态  $\mathbf{x}(t)$ 。

### 2.3.1 Luenberger 观测器

Luenberger 观测器是一个确定性的观测器，它通过构建一个与被控对象具有相同模型的“虚拟系统”，并利用真实输出与虚拟输出之间的误差来修正估计状态。其动态方程为：

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{G}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) \quad (4)$$

其中  $\mathbf{G}$  是观测器增益矩阵。设计的核心在于配置观测器误差动态矩阵  $(\mathbf{A} - \mathbf{GC})$  的极点，使其响应速度远快于控制器，从而保证估计误差能够快速收敛。

### 2.3.2 卡尔曼滤波器 (Kalman Filter)

当系统存在随机噪声时, Luenberger 观测器的性能会严重下降。卡尔曼滤波器是专为随机系统设计的 \*\* 最优状态估计器 \*\*。它假设系统受到两种高斯白噪声的干扰:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d u[k] + \mathbf{w}[k] \quad (5)$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{v}[k] \quad (6)$$

其中  $\mathbf{w}[k]$  是过程噪声 (协方差为  $\mathbf{Q}_n$ ), 代表模型的不确定性;  $\mathbf{v}[k]$  是测量噪声 (协方差为  $\mathbf{R}_n$ ), 代表传感器的不精确性。

卡尔曼滤波器通过一个递归的 \*\* 预测-更新 \*\* 循环工作: 它首先根据系统模型预测下一时刻的状态, 然后利用带有噪声的测量值来修正这个预测, 从而给出在统计意义上误差最小的最优估计。其设计依赖于对噪声协方差  $\mathbf{Q}_n$  和  $\mathbf{R}_n$  的合理设定。

## 3 实验设置 (Experimental Setup)

本实验所有仿真均在 MATLAB R2022a 环境中完成。直流电机物理参数及控制器设计参数如下。

### 名义模型物理参数

转动惯量 $J$	$0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
粘性摩擦系数 $b$	$0.1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$
转矩常数 $K_t$	$0.01 \text{ N} \cdot \text{m/A}$
反电动势常数 $K_e$	$0.01 \text{ V}/(\text{rad/s})$
电枢电阻 $R_a$	$1.0 \Omega$
电枢电感 $L_a$	$0.5 \text{ H}$

### 控制器与观测器设计参数

极点配置控制器	期望闭环极点: $\{-4 \pm 4.0012i, -20\}$
LQR 控制器	权重矩阵: $\mathbf{Q} = \text{diag}(10, 1, 1)$ , $\mathbf{R} = [0.1]$
鲁棒性分析	参数摄动: $J_{real} = 1.5J$ , $R_{real} = 1.2R_a$
卡尔曼滤波器	采样周期 $T_s = 0.01\text{s}$ 过程噪声协方差 $\mathbf{Q}_n = \text{diag}(10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-2})$ 测量噪声协方差 $\mathbf{R}_n = [0.1]$

## 4 结果与讨论 (Results and Discussion)

### 4.1 开环系统与理想控制器性能

开环系统分析表明系统能控能观，但存在零极点而不稳定，其阶跃响应如图 1 所示。在理想模型下，极点配置与 LQR 控制器均能实现有效的稳定控制，但性能各有侧重，如图 2 和表 1 所示。极点配置法响应快速，但 LQR 法更平滑无超调。

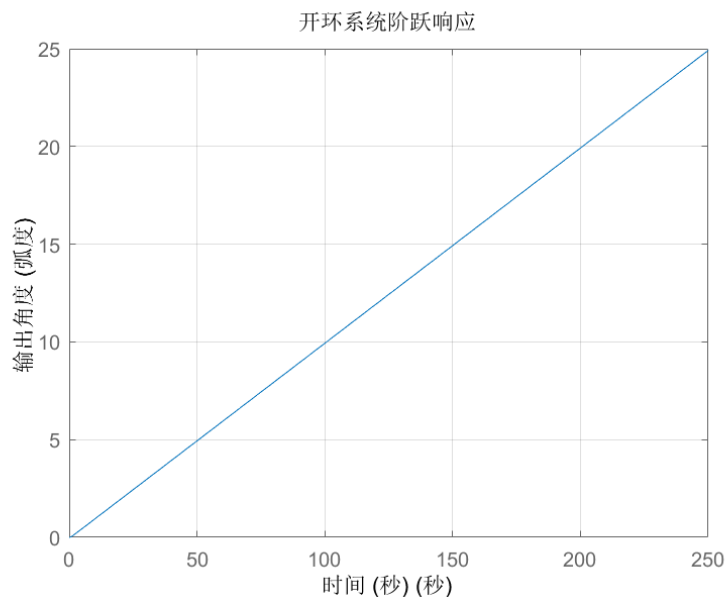


图 1. 开环系统单位阶跃响应。

表 1. 两种理想控制器的量化性能指标对比。

性能指标	极点配置法	LQR 法
调节时间 (s)	1.1050	13.2708
超调量 (%)	4.1037	0.0000

### 4.2 控制器鲁棒性分析

为检验控制器在模型参数失配时的性能，我们使用基于理想模型设计的控制器去控制参数发生变化的“真实”系统。如图 3 所示，极点配置控制器在参数失配时性能严重退化，超调显著增大并出现稳态误差。相比之下，如图 4 所示，LQR 控制器的响应曲

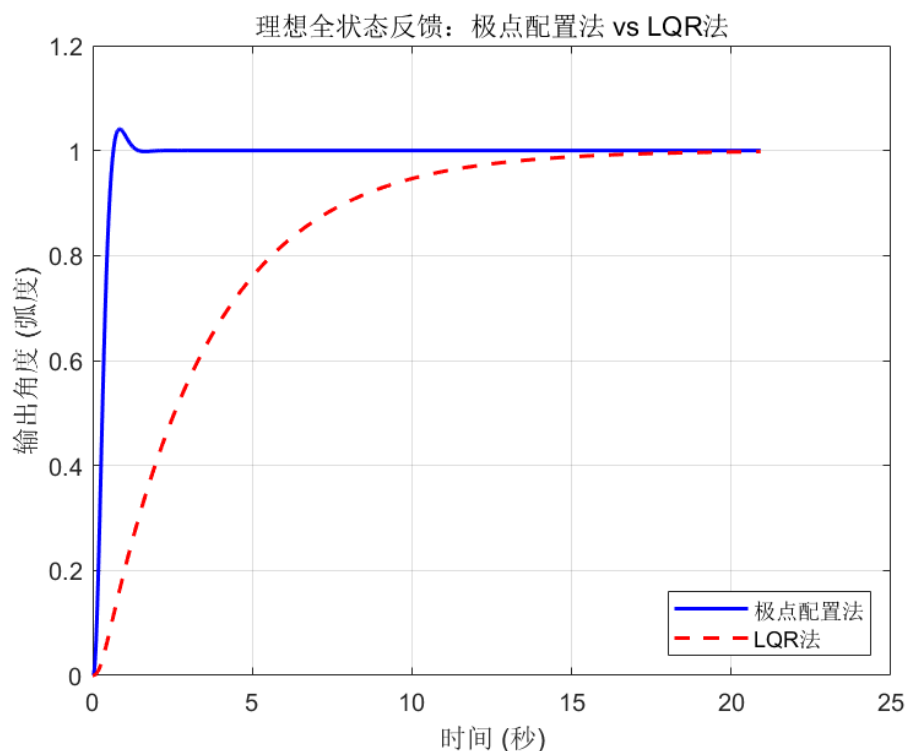


图 2. 理想全状态反馈下，极点配置法与 LQR 法的阶跃响应对比。

线与理想情况几乎完全重合。量化对比见表 2。这有力地证明了，LQR 控制器通过优化综合性能指标，获得了比极点配置法更强的鲁棒性。

表 2. 控制器在参数失配下的性能退化对比。

性能指标	理想 PP	失配 PP	理想 LQR	失配 LQR
超调量 (%)	4.10	11.02	0.00	0.00
稳态误差 (%)	0.00	2.57	0.07	0.17

### 4.3 噪声环境下的状态估计与控制性能

在引入随机噪声的离散时间仿真环境中，我们对比了 Luenberger 观测器与卡尔曼滤波器的性能。如图 5 所示，Luenberger 观测器的估计值（青色）因噪声产生剧烈振荡，而卡尔曼滤波器（洋红色）则能给出平滑且紧密跟踪真实值（黑色）的估计。从均方根误差（RMSE）来看，卡尔曼滤波器的估计误差（0.0455）比 Luenberger 观测器（5.3688）小了两个数量级。更优的估计带来了更好的控制效果，如图 6 所示，基于卡尔曼滤波器的控制系统输出更平稳，更接近参考目标。



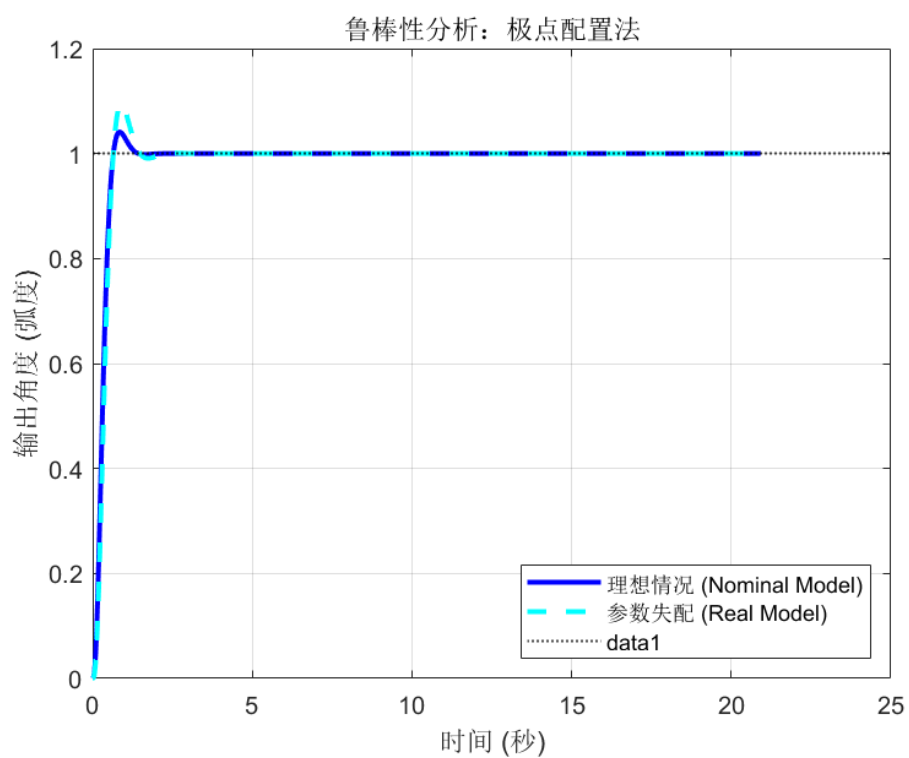


图 3. 鲁棒性分析：极点配置法。

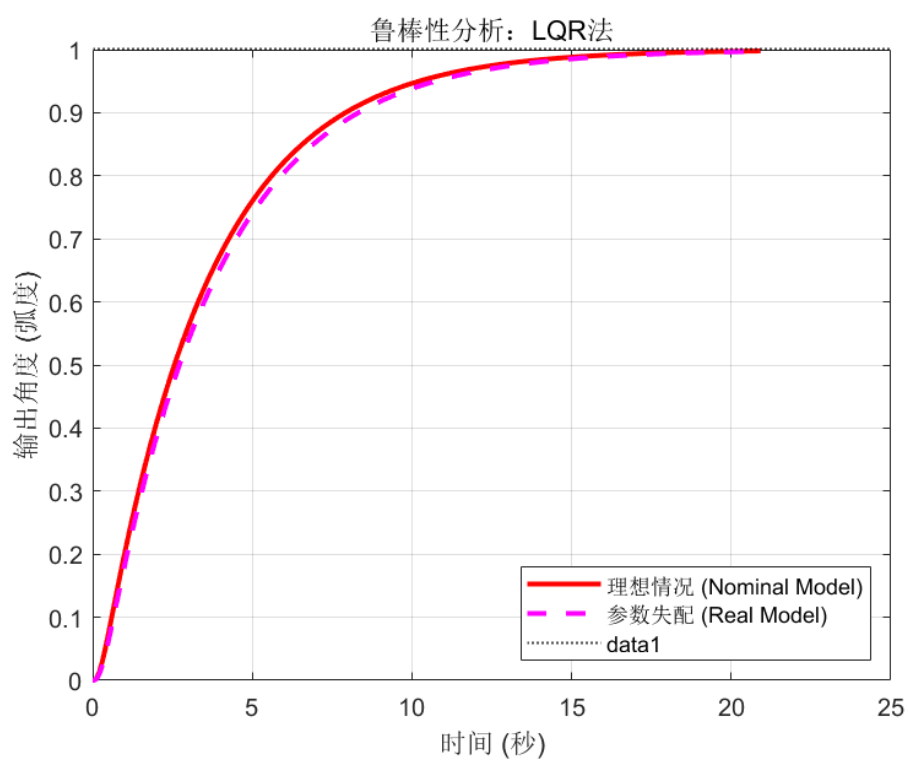


图 4. 鲁棒性分析：LQR 法。

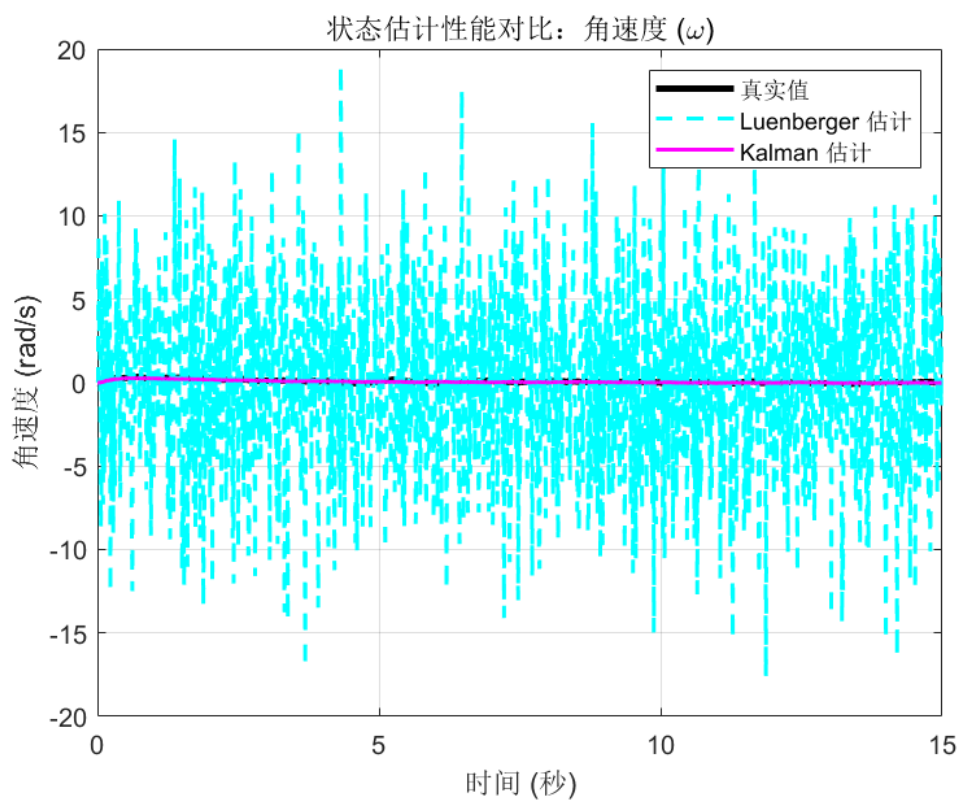


图 5. 状态估计性能对比（噪声环境）。

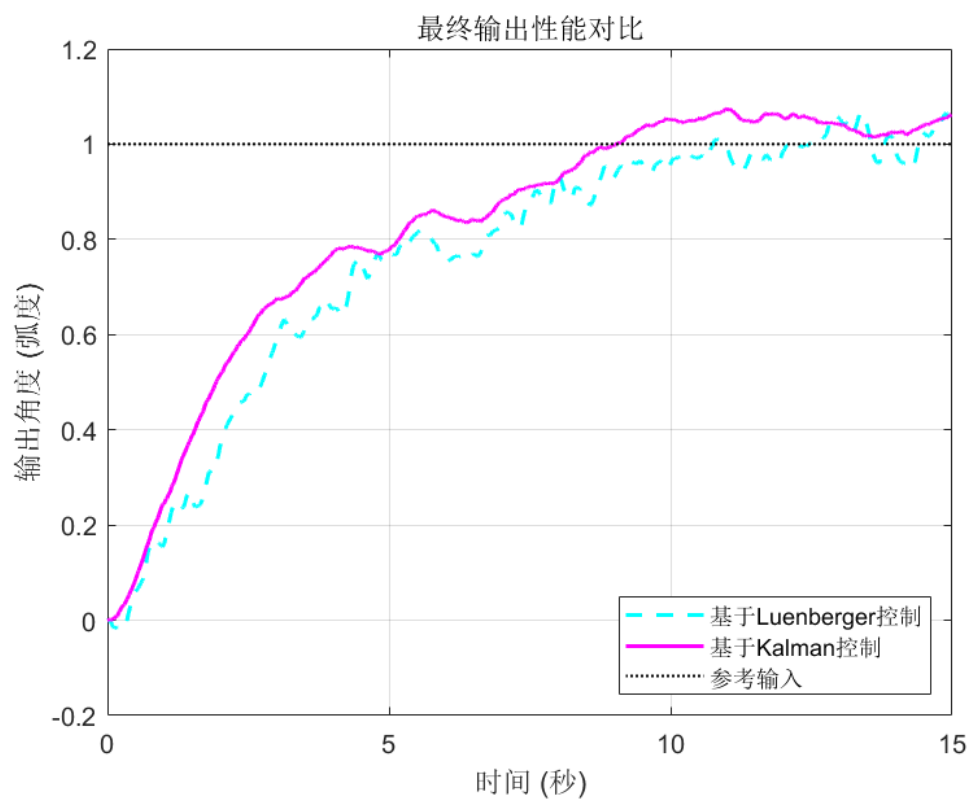


图 6. 最终输出性能对比（噪声环境）。

#### 4.3.1 仿真结果的理想性分析

如图 7 所示，在理想无噪声环境下，Luenberger 观测器的性能近乎完美。然而，这种完美性揭示了理论仿真与工程实践的关键差异。其主要原因有三：

1. **模型选择：**用于设计观测器的数学模型（矩阵  $A, B, C$ ）与用于模拟“真实”被控对象的模型完全相同。在实际工程中，模型总是存在不确定性，这种模型失配是产生估计误差的主要来源。
2. **无噪声干扰：**理想仿真环境中不存在测量噪声（如传感器读数抖动）和过程噪声（如未建模的负载扰动）。这些随机噪声在现实中会持续干扰观测器的估计精度。
3. **极快的纠错动态：**我们遵循设计准则，将观测器的极点配置在远快于控制器极点的位置。这使得初始的估计误差能够以极快的指数速度衰减，在宏观时间尺度上几乎不可见。

## 5 结论 (Conclusion)

本报告通过对直流电机位置伺服系统的多层次设计与仿真，系统地验证了现代控制理论的核心方法。研究结论如下：(1) LQR 控制器在面对模型参数不确定性时，展现出远优于极点配置法的鲁棒性；(2) 在存在随机过程与测量噪声的现实环境下，卡尔曼滤波器能够提供比传统 Luenberger 观测器精确得多的状态估计，其均方根误差减小了超过 99

## 6 参考文献 (References)

### 参考文献

- [1] 王俊杰, 陈之浩, 方保龙, 等. 基于 LQR 控制算法的动量轮倒立摆设计 [J]. 数字技术与应用, 2024, 42(09): 213-216.
- [2] 石惠文. 基于 LQR 的动量轮单摆起摆及平衡控制仿真研究 [J]. 科技创新与应用, 2023, 13(33): 65-68.
- [3] 刘豹, 唐万生. 现代控制理论 [M]. 第 3 版. 北京: 机械工业出版社, 2012.

## A 附录 (Appendix)

### A.1 无噪声环境下 Luenberger 观测器性能

为与噪声环境形成对比，图 7 展示了在理想无噪声环境下，Luenberger 观测器的状态估计效果。可见其能实现快速且精确的跟踪。

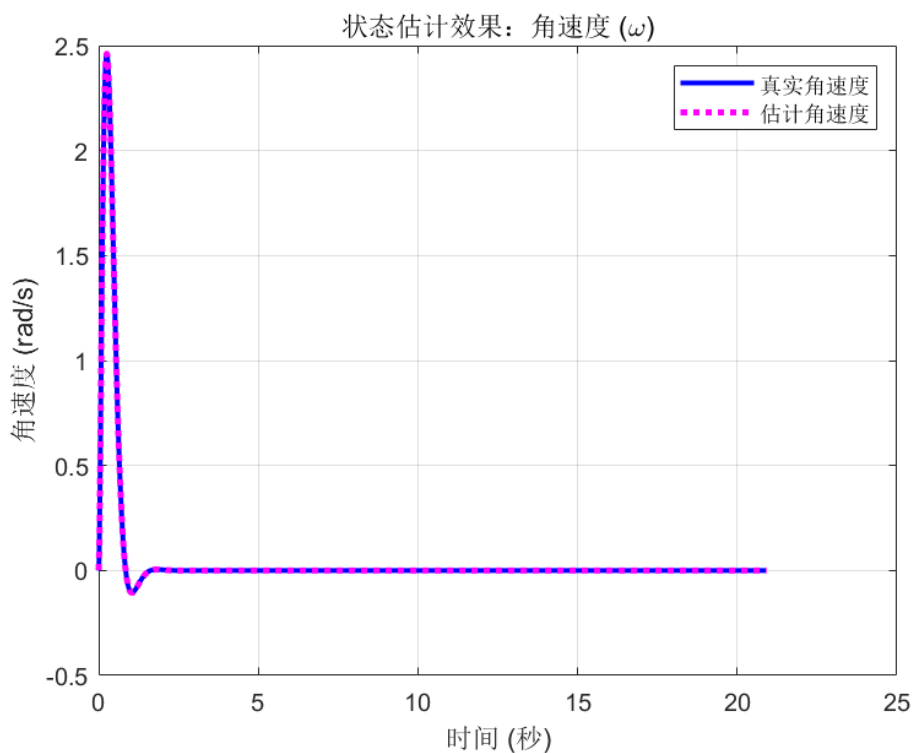


图 7. 无噪声环境下 Luenberger 观测器状态估计效果。

### A.2 项目代码

本项目完整的 MATLAB 仿真代码已上传至 GitHub 仓库，可通过以下链接访问：  
[https://github.com/Gan0819Han/Modern\\_Control\\_with\\_LQR](https://github.com/Gan0819Han/Modern_Control_with_LQR)