随机过程大作业

Stochastic Process Assignment

1. (10 分) 设随机变量X服从λ的指数分布，求：

(1) X 的特征函数$\varphi_X(u)$ (4 分)

(2) 利用特征函数求$E(X)$和$D(X)$. (6 分)

解:

(1)

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$ .... 2 分

$$\varphi_X(u)=E\left(e^{iuX}\right)=\int_0^{+\infty} e^{iux}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx=\frac{\lambda}{\lambda-iu}$$ .... 2 分

(2)

$$\mathrm{E(X)}=(-\mathrm{i})\varphi_X'(0)=(-\mathrm{i})\cdot\left.\frac{+\mathrm{i}\lambda}{(\lambda-\mathrm{i}u)^2}\right|_{u=0}=\frac{1}{\lambda}$$ .... 2 分

$$E(\mathrm{X}^2)=(-\mathrm{i})^2\varphi_X''(0)=(-\mathrm{i})^2\left.\frac{+2\mathrm{i}^2\lambda}{(\lambda-\mathrm{i}u)^{-3}}\right|_{u=0}=\frac{2}{\lambda^2}$$ .... 2 分

$$\mathrm{D(X)}=\mathrm{E(X^2)}-\mathrm{E^2(X)}=\frac{1}{\lambda^2}$$ .... 2 分

2. (20 分) 设随机过程$\{X(t,\omega),-\infty<\mathrm{t}<+\infty\}$只有两条样本函数

$$X(t,\omega_1)=2cost,X(t,\omega_2)=-2cost,\quad -\infty<t<+\infty$$

且$P(\omega_1)=\frac{2}{3}$, $P(\omega_2)=\frac{1}{3}$, 分别求:

(1) 一维分布函数$F(0,x)$ 和 $F\left(\frac{\pi}{4},x\right)$; (8 分)

(2) 二维分布函数$F\left(0,\frac{\pi}{4};x,y\right)$; (6 分)

(3) 均值函数$m_x(t)$; (2 分)

(4) 协方差函数$B_x(s,t)$; (4 分)

解:

(1) $X(0)$ 的取值为-2, 2，分别算得

$PX(0)=-2=\frac{1}{3}$, $PX(0)=2=\frac{2}{3}$ .... (2 分)

故$X(0)$ 的分布律为

$\boldsymbol{X(0)}$	-2	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

.... (1 分)

$X(0)$的分布函数为

$$F(0,x)=\begin{cases}0, & -\infty < x \leqslant -2\\ \frac{1}{3}, & -2 < x \leqslant 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$ ……………………………………(2 分)

同理，$X\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的分布律为

$X\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

……………………………………………………………………(1 分)

故$X\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的分布函数为

$$F\left(\frac{\pi}{4},x\right)=\begin{cases}0, & x \leqslant -\sqrt{2}\\ \frac{1}{3}, & -\sqrt{2} < x \leqslant \sqrt{2}\\ 1, & x>\sqrt{2}\end{cases}$$ ……………………………………(2 分)

(2) 因为随机过程$\{X(t,\omega),-\infty < t < +\infty\}$只有两条样本函数，所以

$$P\left\{X\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2} \mid X(0)=-2\right\}=1,\ P\left\{X\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \mid X(0)=-2\right\}=0$$
$$P\left\{X\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2} \mid X(0)=2\right\}=0,\ P\left\{X\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \mid X(0)=2\right\}=1$$ …………(2 分)

故

$$P\left\{X(0)=-2,X\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\right\} \quad =P\{X(0)=-2\}\cdot P\left\{X\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2} \mid X(0)=-2\right\}$$
$$=P\{X(0)=-2\}=\frac{1}{3}$$ …… (2 分)

同理，有

$$P\left\{X(0)=2,X\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\right\}=\frac{2}{3}$$
$$P\left\{X(0)=-2,X\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\right\}$$
$$= \quad P\{X(0)=-2\}\cdot P\left\{X\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \mid X(0)=-2\right\}=0$$ ……………………………(2 分)
$$P\left\{X(0)=2,X\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\right\}=0$$

因而 $\left(X(0),X\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 的二维分布律为

$X(0)$ \ $X\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
-2	$\frac{1}{3}$	0
2	0	$\frac{2}{3}$

且 $\left(X(0), X\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 的二维分布函数为

$$F\left(0,\frac{\pi}{4};x,y\right)=\begin{cases}0, & x\leqslant -2 \text{ 或 } y\leqslant -\sqrt{2}\\ \frac{1}{3}, & x>-2,-\sqrt{2}<y\leqslant\sqrt{2} \text{ 或 } y>-\sqrt{2},-2<x\leqslant 2\\ 1, & x>2,y>\sqrt{2}\end{cases}$$ ……………（2 分）

(3)

$m_X(t)=E(X(t))=\frac{2}{3}\times 2\cos t+\frac{1}{3}(-2\cos t)=\frac{2}{3}\cos t$ ……………………（2 分）

(4)

$$\begin{aligned}R(s,t) &= E\big(X(s)X(t)\big)=\begin{cases}E\big(X^2(s)\big), & s=t\\ E\big(X(s)X(t)\big), & s\neq t\end{cases}\\ &=\begin{cases}4\cos^2 s, & s=t\\ 4\cos s\cos t, & s\neq t\end{cases}=4\cos s\cos t\end{aligned}$$ ……………………（2 分）

$B(s,t)=R(s,t)-E(X(s))E(X(t))=4\cos s\cos t-\frac{4}{9}\cos s\cos t=\frac{32}{9}\cos s\cos t$. . . .（2 分）

3. （10 分）已知寻呼台在时间区间$[0,t)$内收到的传呼次数$\{N(t),t\geqslant 0\}$是 *Poisson* 过程，平均每分钟收到 2 次呼唤.

(1) 求 2 分钟内收到 3 次呼唤的概率（3 分）

(2) 已知时间区间 [0,3) 内收到 5 次呼唤, 求时间区间 [0,2) 内收到 3 次呼唤的概率。（7 分）

解：

(1)

$P\{N(t+2)-N(t)=3\}=P\{N(2)=3\}=\frac{4^3}{3!}e^4=\frac{32}{3}e^{-4}$ ……………………（3 分）

(2)

$P\{N(2)-N(0)=3\mid N(3)-N(0)=5\}=P\{N(2)=3\mid N(3)=5\}$（2 分）

$$=\frac{P\{N(2)=3,N(3)=5\}}{P\{N(3)=5\}}=\frac{P\{N(2)=3,N(3)-N(2)=2\}}{P\{N(3)=5\}} \qquad (2\text{ 分})$$

$$=\frac{PN(2)=3\cdot PN(3)-N(2)=2}{PN(3)=5}=\frac{\frac{4^3}{3!}\mathrm{e}^{-4}\cdot\frac{2^2}{2!}\mathrm{e}^{-2}}{\frac{6^5}{5!}\mathrm{e}^{-6}} \qquad (2\text{ 分})$$

$$=\mathrm{C}_5^2\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{80}{243} \qquad (1\text{ 分})$$

4. (20 分) 已知$\{N(t),t\geqslant 0\}$是平均率为$\lambda=2$ 的 *Poisson* 过程, 分别求:

(1) $E(N(2)N(3))$; (7 分)

(2) $P\{N(2)=1,N(3)=2\}$; (6 分)

(3) $P\{N(3)=2\mid N(2)=1\}$; (7 分)

解:

(1) 方法一

$E(N(2)N(3))=E\left(N(2)(N(3)-N(2)+N(2))\right)$ .... (2 分)

$=E\left(N(2)(N(3)-N(2))+N^2(2)\right)$ .... (2 分)

$=E(N(2))E(N(3)-N(2))+E(N^2(2))$ .... (2 分)

$=2\times2\times2+(2\times2)^2+2\times2=28$ .... (1 分)

方法二

$E(N(2)N(3))\quad=R_N(2,3)=C_N(2,3)+m_N(2)m_N(3)$ .... (3 分)

$=\lambda min2,3+2\lambda\cdot3\lambda$ .... (3 分)

$=2\times2+2\times2\times3\times2=28$ .... (1 分)

(2)

$P\{N(2)=1,N(3)=2\}=P\{N(2)=1,N(3)-N(2)=1\}$ .... (3 分)

$=P\{N(2)=1\}\cdot P\{N(3)-N(2)=1\}=8\mathrm{e}^{-6}$ .... (3 分)

(3)

$P\{N(3)=2\mid N(2)=1\}=\frac{P\{N(2)=1,N(3)=2\}}{P\{N(2)=1\}}$ .... (3 分)

$$=\frac{P\{N(2)=1\}\cdot P\{N(3)-N(2)=1\}}{P\{N(2)=1\}} \qquad (3\text{ 分})$$

$=P\{N(3)-N(2)=1\}=2\mathrm{e}^{-2}$ .... (1 分)

5. (10 分) 设有 4 个人(标号为 1, 2, 3, 4)相互传球，每次有球的人等可能地把球传给其他 3 个人之一，以$X(0)$ 表示最初有球的人，$X(n)$表示传递 n 次后恰巧有球的人. $\{X(n),n=0,1,2,\dots\}$是一个其次 Markov 链.

(1) 写出状态转移矩阵；(2 分)

(2) 计算二步和三步转移矩阵；(4 分)

(3) 求经过 3 次传球后有球的人恰好是第 1 次传球后有球的人的概率；(2 分)

(4) 求经过 3 次传球后恰好是开始拿球的人有球的概率. (2 分)

解：

(1)

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$ ……………………………… (2 分)

(2)

$$\boldsymbol{P}^2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{pmatrix}$$ ……………………………… (2 分)

$$\boldsymbol{P}^3=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}6&7&7&7\\7&6&7&7\\7&7&6&7\\7&7&7&6\end{pmatrix}$$ ……………………………… (2 分)

(3) 经过 3 次传球后有球的人恰好是第 1 次传球后有球的人概率为：

$$p=\sum_{i=1}^{4} P\{X(0)=i\}\cdot P\{X(2)=i \mid X(0)=i\}=\frac{1}{3}$$ ……………………… (2 分)

(4) 经过 3 次传球后恰好是开始拿球的人有球的概率为：

$$p=\sum_{i=1}^{1} P\{X(0)=i\}\cdot P\{X(3)=i \mid X(0)=i\}=\frac{2}{9}$$ ……………………… (2 分)

参考文献：

[1] 刘次华.随机过程[M].武汉:华中科技大学出版社,2014.
[2] 张晓军,陈良军.随机过程习题集[M].北京:清华大学出版社,2011.