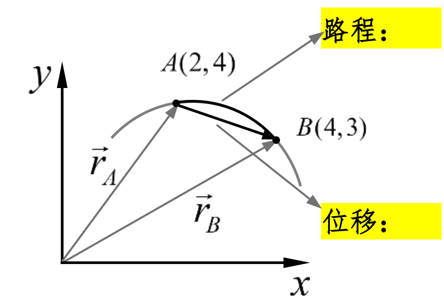
《力学》

课时一　质点运动学(一)

考点	重要程度	占 分	常见题型
1. 位移/速度/加速度	基础知识	0～3	选择
2. $\vec{r}\to\vec{v}\to\vec{a}$ 型	必考	5～10	大题
3. $\vec{a}\to\vec{v}\to\vec{r}$ 型			
4. 相对运动	★★	0～3	填空

1. 位移、速度、加速度



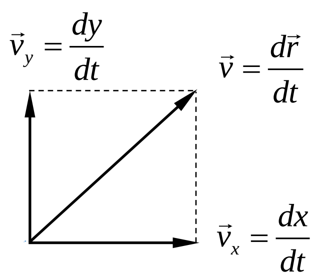
①位矢（位置矢量）：描述质点位置

$$\vec{r}_A=2\vec{i}+4\vec{j}\qquad \vec{r}_B=4\vec{i}+3\vec{j}$$

②位移：起点指向终点，矢量有大小，有方向

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=(4-2)\vec{i}+(3-4)\vec{j}=2\vec{i}-\vec{j}$$

③路程：AB（弧长）

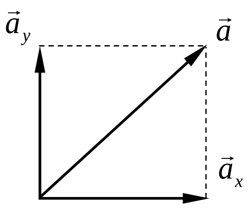


④速度（矢量有大小，有方向）

平均速度：$\bar{\vec{v}}=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{\vec{r}_B-\vec{r}_A}{t_2-t_1}$

速度（瞬时速度）：$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dfrac{dx}{dt}\vec{i}+\dfrac{dy}{dt}\vec{j}$

速度大小：$|\vec{v}|=\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\dfrac{ds}{dt}$

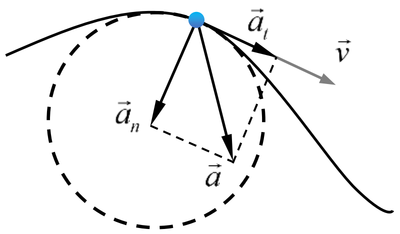


⑤加速度：

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}_x}{dt}\vec{i}+\frac{d\vec{v}_y}{dt}\vec{j}$$

$$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n=\frac{dv}{dt}\vec{t}+\frac{v^2}{R}\vec{n}$$

一个是速度大小对时间导数，表示切向加速度大小



大小：$|\vec{a}|=\left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{dv_x}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dv_y}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2}$

题 1. 一质点在 xoy 平面内运动，其运动学方程为 $x=3\cos4t$ ，$y=3\sin4t$ ，则 t 时刻质点的位矢 $\vec{r}(t)=$ ________

解：$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}=3\cos4t\ \vec{i}+3\sin4t\ \vec{j}$

题 2. 已知平面内运动方程为 $x=at^2, y=bt^2$（其中 a,b 为常量），则该质点运动轨迹为（ ）

$A.$ 双曲线　　$B.$ 抛物线　　$C.$ 圆周　　$D.$ 直线

解：$\begin{cases} x=at^2 \\ y=bt^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{a}{b} \Rightarrow y=\frac{b}{a}x$ 是直线方程，故选 D。

题 3. 一运动质点在某瞬间矢径 $\vec{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为（ ）

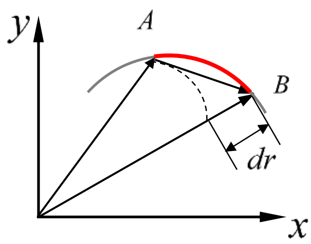
$A.\frac{dr}{dt}$　　$B.\frac{d\vec{r}}{dt}$　　$C.\frac{d|\vec{r}|}{dt}$　　$D.\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

解：$A.$ $\frac{dr}{dt}$ 表示 $|\vec{r}|$ 大小的变化量，为径向变化，故错误。

$B.$ $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}$，表示速度，即有大小又有方向，故错误。

$C.$ $d|\vec{r}|=dr$，和 A 一样，故错误。

$D.$ $v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$，故正确。



题 4. 质点作半径为 R 的变速圆周运动时的加速度大小为（v 表示任一时刻质点的速率）（ ）

$A.\frac{dv}{dt}$　　$B.\frac{v^2}{R}$　　$C.\frac{dv}{dt}+\frac{v^2}{R}$　　$D.\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$

解：质点作圆周运动，故有切向加速度和法向加速度

$A.$ $\frac{dv}{dt}=a_t$　　切向加速度大小

$B.$ $\frac{v^2}{R}=a_n$　　法向加速度大小

$C.$ a_t+a_n 为代数和，错误。

$$D.\ a=\sqrt{a_t^{\ 2}+a_n^{\ 2}}=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$，正确

2. $\vec{r}\to\vec{v}\to\vec{a}$ 型

题 1. 质点的运动方程为 $\vec{r}=\left(2+2t^2\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{3}t^3+2t\right)\vec{j}$，求 $t=2$ 时的速度和加速度。

解：$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=4t\vec{i}+\left(t^2+2\right)\vec{j}=8\vec{i}+6\vec{j}$

$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=4\vec{i}+2t\vec{j}=4\vec{i}+4\vec{j}$

题 2. 已知某质点的运动方程为 $x=2t$，$y=2-t^2$，式中 x 以 m 计，t 以 s 计，求：

1) 位置矢量表达式，速度和加速度表达式；
2) 前 $2s$ 内质点的平均速度和平均加速度；
3) 第 $2s$ 内质点的平均速度；
4) 计算 $1s$ 末和 $2s$ 末质点的加速度。

解：（1）$\vec{r}=2t\vec{i}+\left(2-t^2\right)\vec{j}$ $\quad\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=2\vec{i}-2t\vec{j}$ $\quad\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}-2\vec{j}$

（2）$t=0$ 时 $\vec{r}_0=2\vec{j}$，$\vec{v}_0=2\vec{i}$

$t=2$ 时 $\vec{r}_2=4\vec{i}-2\vec{j}$，$\vec{v}_2=2\vec{i}-4\vec{j}$

$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_0=\left(4\vec{i}-2\vec{j}\right)-2\vec{j}=4\vec{i}-4\vec{j}$

$\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{4\vec{i}-4\vec{j}}{2-0}=2\vec{i}-2\vec{j}$

$\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_0=\left(2\vec{i}-4\vec{j}\right)-2\vec{i}=-4\vec{j}$

$\bar{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{-4\vec{j}}{2-0}=-2\vec{j}$

（3） $t=1$ 时 $\vec{r}_1=2\vec{i}+\vec{j}$ $\quad t=2$ 时 $\vec{r}_2=4\vec{i}-2\vec{j}$

$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\left(4\vec{i}-2\vec{j}\right)-\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)=2\vec{i}-3\vec{j}$

$$\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{2\vec{i}-3\vec{j}}{2-1}=2\vec{i}-3\vec{j}$$

（4） $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=-2\vec{j}$　　故 1s 末和 2s 末质点的加速度 $\vec{a}=-2\vec{j}$

3. $\vec{a}\to\vec{v}\to\vec{r}$ 型　$a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow dv=adt\Rightarrow\int_{v_0}^{v}dv=\int_{t_0}^{t}adt$　$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=vdt\Rightarrow\int_{x_0}^{x}dx=\int_{t_0}^{t}vdt$

题 1. 设质点沿 x 轴作匀变速直线运动，加速度为 a 不随时间变化，初速度为 v_0，初位置为 x_0，试根据速度、加速度的定义求出该质点的速度公式和运动学方程。

解：$a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow dv=adt\Rightarrow\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t adt$

解得：$v-v_0=at\Rightarrow v=v_0+at$

$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=vdt=(v_0+at)dt\Rightarrow\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t(v_0+at)dt$

解得：$x-x_0=v_0t+\frac{1}{2}at^2\Rightarrow x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$

匀变速直线运动：

$v=v_0+at$

$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$

$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)$

题 2. 一质点做直线运动，加速度 $a=2m/s^2$，开始时 $v_1=2m/s$，一段时间后 $v_2=6m/s$，问质点在这段时间内的位移大小。

解：由 $v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)$　$6^2-2^2=2\times2\times(x_2-x_1)$　　$x_2-x_1=8m$

题 3. 质点沿直线运动，加速度 $a=4-t^2$，式中 a 的单位为 m/s^2，t 的单位为 s，如果当 $t=3s$ 时，$x=9m, v=2m/s$，求质点的运动方程。

解：$a=4-t^2=\frac{dv}{dt}\Rightarrow dv=(4-t^2)dt\Rightarrow\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t(4-t^2)dt$

解得：$\Rightarrow v=v_0+4t-\frac{1}{3}t^3$　　①

$v=v_0+4t-\frac{1}{3}t^3=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=\left(v_0+4t-\frac{1}{3}t^3\right)dt\Rightarrow\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t(v_0+4t-\frac{1}{3}t^3)dt$

解得：$x=x_0+v_0t+2t^2-\frac{1}{12}t^4$　　②

$t=3s$　$x=9m$　$v=2m/s$ 代入①②得：$v_0=-1m/s$　$x_0=0.75m$

所以质点的运动方程为：$x=0.75-t+2t^2-\frac{1}{12}t^4\ (m)$

题 4. 一质点沿一直线运动，其加速度为 $a=-2x$，式中 x 的单位为 m， a 的单位为 m/s^2。试求该质点的速度 v 与位置坐标 x 之间的关系。设当 $x_0=1$ 时， $v_0=4m/s$。

解： $a=-2x=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\cdot v$ $\qquad \dfrac{dv}{dx}\cdot v=-2x$

分离变量得： $vdv=-2xdx \qquad \Rightarrow \int_{v_0}^{v} vdv=\int_{x_0}^{x}-2xdx$

解得： $\dfrac{1}{2}v^2-\dfrac{1}{2}v_0^2=-x^2+x_0^2$

代入 $x_0=1 \quad v_0=4 \qquad \Rightarrow \dfrac{1}{2}v^2-8=-x^2+1 \qquad \Rightarrow v^2=-2x^2+18$

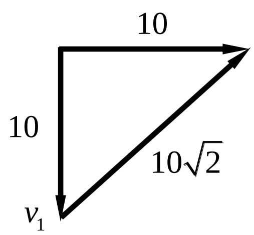
4. 相对运动

题 1. 甲船以 $v_1=10m/s$ 的速度向南航行，乙船以 $v_2=10m/s$ 的速度向东航行，则甲船上的人观察乙船的速度大小为________

解： v_1： 牵连速度； v_2： 绝对速度

$\vec{v}_2=\vec{v}_1+\vec{v}_{相对}$

$\vec{v}_{相对}=\vec{v}_2-\vec{v}_1=10\sqrt{2}m/s$



$\vec{v}_{绝对}=\vec{v}_{牵连}+\vec{v}_{相对}$

$\vec{a}_{绝对}=\vec{a}_{牵连}+\vec{a}_{相对}$

课时一　练习题答案

1. 一质点在平面内运动，其运动方程为 $x=2t, y=4t^2+4t+1$，则此运动的轨迹方程为（　）

$A.y=x^2+x+1 \qquad B.y=(x+1)^2 \qquad C.y=2(x+1) \qquad D.y=(x+2)^2$

2. 质点作曲线运动，$\vec{r}$ 表示位置矢量，$\vec{v}$ 表示速度，$\vec{a}$ 表示加速度，s 表示路程，a_t 表示切向加速度，下列表达式中正确的（ ）

① $\dfrac{dv}{dt}=\vec{a}$ ② $\dfrac{dr}{dt}=v$ ③ $\dfrac{ds}{dt}=v$ ④ $\left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|=a_t$

A.①④ B.②④ C.② D.③

3. 质点作曲线运动，$\vec{r}$ 表示位置矢量，s 表示路程，v 表示速率，a_t 表示切向加速度，下列表达式中（ ）

$A.\dfrac{dv}{dt}=a,\dfrac{d|\vec{r}|}{dt}=v \qquad B.\dfrac{d|\vec{v}|}{dt}=a_t,\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|=v \qquad C.\dfrac{ds}{dt}=v,\left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|=a_t \qquad D.\dfrac{d\vec{r}}{dt}=v,\dfrac{d|\vec{v}|}{dt}=a$

4. 一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表示式为 $\vec{r}=at^2\vec{i}+bt^2\vec{j}$（其中 a,b 为常量），则该质点做( )

$A.$ 匀速直线运动　　$B.$ 变速直线运动　　$C.$ 抛物线运动　　$D.$ 一般曲线运动

5. 某质点作直线运动的运动方程为 $x=3t-5t^3+6(SI)$，则该质点作(　)

$A.$ 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向
$B.$ 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向
$C.$ 变加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向
$D.$ 变加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

6. 已知质点的运动方程为 $\vec{r}=2t\vec{i}+(2-t^2)\vec{j}$，质点 $t=1s$ 到 $t=2s$ 内质点的平均速度 $\overline{\vec{v}}=$___ m/s，平均加速度 $\overline{\vec{a}}=$____ m/s^2

7. 已知质点沿 x 轴作直线运动，运动方程 $x=2+6t^2-2t^3$，x 的单位为 m，t 的单位为 s。求：

1）质点在运动开始后 4.0s 内的位移的大小；
2）质点在该时间内所通过的路程；
3）$t=4s$ 时质点的速度和加速度。

8. 一物体做直线运动，运动方程为 $x=6t^2-2t^3$，式中各量的单位均为 (SI) 制，求：

(1) 第二秒内的平均速度；
(2) 第三秒末的速度；
(3) 第一秒末的加速度。

9. 已知一质点做直线运动，其加速度 $a=2+t$，其中 a 的单位 m/s，t 的单位 s，求质点的运动方程（已知 $v_0=0,x_0=0$，v_0 为初始速度，x_0 为初始位移）

10. 一艘正在沿直线行驶的电艇，在发动机关闭后，其加速度方向与速度方向相反，大小与速度大小平方成正比，即 $dv/dt=-kv^2$，式中 k 为常量，求发动机关闭后又行驶的距离与速度大小的关系（v_0 为发动机关闭时速度，x 为行驶的距离）

11. 雨滴以速率 v 落到静止的车窗玻璃时，方向竖直向下，问当车相对于地面以速率 v_0 向西行驶，车上的人观测的雨的速度。

注：练习题答案在文档最后

课时二 质点运动学（二）

考点	重要程度	占 分	题型
1. 角位移/角速度/角加速度	基础知识	不单独出题	无
2. $\vec{\theta} \to \vec{\omega} \to \vec{\beta}$ 型	★★	3～10	选填为主 偶尔大题
3. $\vec{\beta} \to \vec{\omega} \to \vec{\theta}$ 型	★★★		
4. 角量与线量关系	必 考		

1. 角位移、角速度、角加速度

ω

2. $\vec{\theta} \to \vec{\omega} \to \vec{\beta}$ 型

$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ $\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

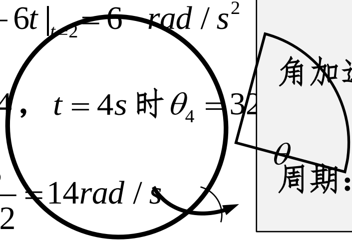
题 1. 某质点的角位置和时间关系为 $\theta = 4t - 3t^2 + t^3 (SI)$，则在 2 秒末的角速度大小 $\omega =$____，角加速度大小 $\beta =$______。在 2 秒末到 4 秒末这段时间内，平均角速度大小 $\bar{\omega} =$______.

解：$\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = 4 - 6t + 3t^2 |_{t=2} = 4 \quad rad /$

$\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = -6 + 6t |_{t=2} = 6 \quad rad / s^2$

$t = 2s$ 时 $\theta_2 = 4$，$t = 4s$ 时 $\theta_4 = 32$

$\bar{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{28}{4-2} = 14 rad / s$



角位移：θ 单位：rad（弧度） 转过的角度

角速度：$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ 单位：rad / s，单位时间内转过的角度

角加速度：$\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ 单位：rad / s^2 单位时间角速度的变化

周期：$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 单位：s 转一周所用的时间

3. $\vec{\beta} \to \vec{\omega} \to \vec{\theta}$ 型

$\beta = \dfrac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \beta dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \beta dt$ $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt$

题 1. 已知匀速圆周运动，角加速度为 β，$t = 0$ 时，角速度为 ω_0，角位移为 θ_0，试用定义公式，求角速度和角位移表达式。

解：$\beta=\dfrac{d\omega}{dt}$　　$d\omega=\beta dt$　　$\int_{\omega_0}^{\omega}d\omega=\int_0^t\beta dt$

解得：$\omega-\omega_0=\beta t$　　$\Rightarrow\omega=\omega_0+\beta t$

$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$　　$d\theta=\omega dt=(\omega_0+\beta t)dt$　　$\int_{\theta_0}^{\theta}d\theta=\int_0^t(\omega_0+\beta t)dt$

解得：$\theta-\theta_0=\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\beta t^2$　　$\Rightarrow\theta=\theta_0+\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\beta t^2$

题 2. 搅拌机叶片以恒定角加速度$1.50rad/s^2$转动，求：

(1) 从静止启动后经过多少时间角速度将达到$36.0rad/s$？

(2) 在此时间内共转过多少转？

匀变速圆周运动：

$\omega=\omega_0+\beta t$

$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\beta t^2$

$\omega_2^{\ 2}-\omega_1^{\ 2}=2\beta(\theta_2-\theta_1)$

解：（1）由$\omega=\omega_0+\beta t$得

$36=0+1.5t$　$\Rightarrow t=24s$

（2）由$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\beta t^2=0+0+\dfrac{1}{2}\times1.5\times24^2=432\ rad$

$n=\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{432}{2\times3.14}=68.8$　（转）

题 3. 绕定轴转动的飞轮，均匀减速，$t=0$时$\omega_0=5\ rad/s$，$t=20$时$\omega=0.8\omega_0$则飞轮的角加速度$\beta=$__________ rad/s^2，转过的角度$\theta=$________ rad。

解：依题意知$t=0$　$\omega_0=5$，$t=20$　$\omega=0.8\omega_0=4$

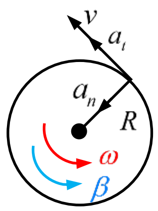
由$\omega=\omega_0+\beta t$　$\Rightarrow$　$4=5+\beta\times20$　　解得：$\beta=-0.05\ \ rad/s^2$

由$\omega^2-\omega_0^{\ 2}=2\cdot\beta\cdot\Delta\theta$　　$\Rightarrow$　$\Delta\theta=\dfrac{\omega^2-\omega_0^{\ 2}}{2\beta}=\dfrac{4^2-5^2}{-2\times0.05}=90\ \ rad$

4. 角量与线量关系

题 1. 质点在作半径为R的圆周运动，质点的线速度v与角速度ω的关系为_____，质点的切向加速度a_t与角加速度β的关系为____；质点的法向加速度a_n与角速度ω的关系为____。

解：$v=\omega R$　$a_t=\beta R$　$a_n=\omega^2 R$



$v=\omega R$

$a_t=\dfrac{dv}{dt}=\beta\cdot R$

$a_n=\dfrac{v^2}{R}=\omega^2 R$

题 2. 质点沿半径为 R 的圆周运动，运动学方程为 $\theta=3+2t^2(SI)$，则 t 时刻质点的法向加速度大小为 $a_n=$________；切向加速度 $a_t=$_____ .

解：$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=4t\quad \beta=\dfrac{d\omega}{dt}=4\quad \Rightarrow a_n=\omega^2R=(4t)^2R=16Rt^2\qquad a_t=\beta\cdot R=4R$

题 3. 一质点在半径为 $0.1m$ 的圆周上运动，其角位置变化关系为 $\theta=2+4t^3(rad)$。问：

(1) 在 $t=2s$ 时，质点的法向加速度和切向加速度大小各为多少？

(2) 当切向加速度大小恰等于总加速度大小的一半时，θ 值为多少？

(3) 在什么时刻，切向加速度和法向加速度恰好大小相等？

解：（1）$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=12t^2\quad \beta=\dfrac{d\omega}{dt}=24t$

法向加速度：$a_n=\omega^2R=(12t^2)^2\times0.1=14.4t^4\big|_{t=2}=230.4\ m/s^2$

切向加速度：$a_t=\beta R=24t\times0.1=2.4t\big|_{t=2}=4.8\ m/s^2$

（2）$a=\sqrt{a_t^{\,2}+a_n^{\,2}}=\sqrt{(14.4t^4)^2+(2.4t)^2}$

依题意：$a_t=\dfrac{1}{2}a\quad \Rightarrow 2.4t=\dfrac{1}{2}\sqrt{(14.4t^4)^2+(2.4t)^2}\Rightarrow t^3=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow\theta=2+4t^3=2+4\times\dfrac{\sqrt{3}}{6}=3.15(rad)$

(3) 依题意 $a_t=a_n\qquad \Rightarrow 2.4t=14.4t^4\qquad$ 解得 $t=0.55s$

课时二　练习题

1. 某转盘的角位置和时间关系为 $\theta=2t-t^2+2t^3(SI)$，则在 1 秒末的角速度大小 $\omega=$____，角加速度大小 $\beta=$_____。

2. 若飞轮的运动方程为 $\theta=2+4\pi t+2\pi^2t^2(SI)$，则其角加速度 β 为（ ）

$A.\beta=4\pi^2t+4\pi\qquad B.\beta=4\pi^2\qquad C.\beta=4\pi^2t\qquad D.\beta=4\pi t$

3. 物体做匀速圆周运动的半径为 r，线速度大小为 v，角速度为 ω，周期为 T，向心加速度为 a，关于这些物理量之间的关系，下列表示正确的是（ ）

A. $v=\frac{\omega}{r}$ B. $a=\frac{\omega^2}{r}$ C. $\omega=\frac{2\pi r}{T}$ D. $a=\frac{4\pi^2 r}{T^2}$

4. 一个转轮以恒定角加速度 $2rad/s^2$ 转动，从静止启动经过 $30s$ 角速度为_______，在此时间内共转过_______转。

5. 一质点沿半径 $R=0.01m$ 的圆周运动，其运动方程 $\theta=2+4t^3$，θ,t 分别以弧度和秒计，则当 t=2 秒时，其切向加速度量值 $a_t=0.48m/s^2$，法向加速度量值 $a_n=$________，当 $a_t=\frac{a}{2}$（a 为总加速度量值）时，$\theta=$_______

6. 质点沿半径为 r 的圆周运动，运动学方程为 $\theta=2+3t^2(SI)$，则 $t=2s$ 时质点的法向加速度 $a_n=$______，切向加速度 $a_t=$_______.

7. 质点沿半径为 $0.1m$ 的圆周运动，其角位移 θ 与时间 t 的关系为：$\theta=5+2t^3$，当 $t=1s$ 时，它的加速度大小为( )

$A.3.6m/s^2$ $B.3.8m/s^2$ $C.1.2m/s^2$ $D.2.4m/s^2$

8. 一飞轮转速 $n=1500$ 转每分钟 $(r/\min)$ 转动，受制动后均匀减速，经 $50s$ 后静止，求：

(1) 对角加速度 β 和从制动到静止飞轮的转数 N；

(2) 制动开发后 $t=25s$ 时飞轮角速度 ω；

(3) 设飞轮半径 R=1m，求 $t=25s$ 时飞轮边缘任一点的速度和加速度。

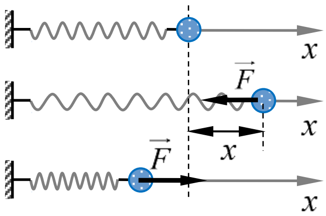
课时三　常见力和牛顿三定律

考点	重要程度	占分	常见题型
1. 常见力 2. 牛顿三定律	基础知识	5～10	选择、填空、大题

1. 常见力

1) 重力：$G = mg \quad g = 9.8N/kg$

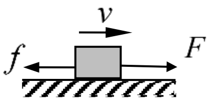
2) 弹力：$F = kx$　（k 为弹性系数）



3) 摩擦力：

①滑动摩擦 $f = \mu_k N$

u_k：滑动摩擦系数　N 为支持力

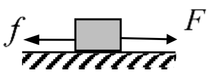


滑动摩擦

$f = \mu_k mg$

②静摩擦力　$0 \le f \le \mu_s N$

μ_s 为最大静摩擦系数



静摩擦

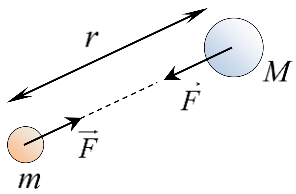
$f = F$　F 越大，f 越大

$f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg$

4) 万有引力

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$G = 6.67\times10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$$



2. 牛顿三定律

1)　不受力或合外力为 0，质点保持静止或匀速直线运动

2)　$F_{合} = ma$　（力是物体产生加速度的原因）

3)　$F_{作用} = F_{反作用}$　（作用力等于反作用力）

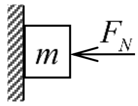
题 1. 关于摩擦力的说法，下列哪一种说法正确（　　）

A. 摩擦力总是阻碍物体运动　B. 摩擦力的方向总是与物体运动方向相反

C. 摩擦力总是对物体做负功　D. 以上说法都不对

解：答案：D（详解见视频课程）

题 2. 用水平力 F_N 把一个物体压着靠在粗糙的竖直墙面上保持静止，当 F_N 逐渐增大时，物体所受到的静摩擦力 F_f 的大小（　　）



A. 不为零，但保持不变　　　　B. 随 F_N 成正比增大

C. 开始随 F_N 增大，达到某一最大值后就保持不变　　　　D. 无法确定

答案：**A**（详解见视频课程）

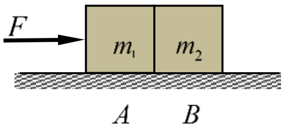
题 3. 两物体 A 和 B，质量分别是 m_1 和 m_2，互相接触放在光滑水平面上，如图所示。对物体 A 施以水平推力 F，则物体 A 对物体 B 的作用力等于_____。

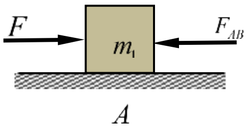
(1) 选物体

(2) 分析受力

(3) 列方程

(4) 求解

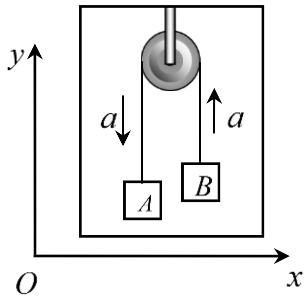


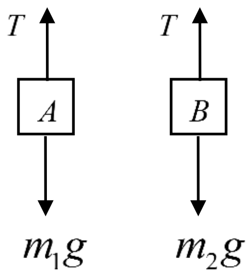


解：①$F=(m_1+m_2)a$

②$F-F_{AB}=m_1a$　　联立两式，解得 $F_{AB}=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}F$

题 4. 设电梯中有一质量可以忽略的滑轮，在滑轮两侧用轻绳悬挂着质量分别为 m_1 和 m_2 的重物 A 和 B，已知 $m_1>m_2$，当电梯匀速上升，求绳中的张力和物体 A 相对于电梯的加速度 a。





解：对 A 受力分析　　$m_1g-T=m_1a$

对 B 受力分析　　$T-m_2g=m_2a$

解得　　$a=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$　　　$T=\dfrac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$

题 5. 一艘行驶的质量为 m 的快艇，在发动机关闭后，受到一阻力作用，且 $f=-kv^2$，式中 k 为正常数，求快艇在关闭发动机后速度与行驶距离的关系。（已知发动机关闭时快艇速度为 v_0）

解：根据牛顿第二定律：

$$f=-kv^2=ma=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=mv\frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow -kv=m\frac{dv}{dx}$$

分离变量：$\frac{1}{v}dv=-\frac{k}{m}dx$

两边同时积分：$\int_{v_0}^{v}\frac{1}{v}dv=\int_0^x-\frac{k}{m}dx$

$$\ln v-\ln v_0=-\frac{k}{m}x \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{v}{v_0}=-\frac{k}{m}x$$

$$\Rightarrow \frac{v}{v_0}=e^{-\frac{k}{m}x} \quad \Rightarrow v=v_0e^{-\frac{k}{m}x}$$

题 6：简述牛顿定律的适用范围

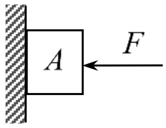
(1) 只适用于低速运动的物体(与光速比速度较低)。

(2) 只适用于宏观物体，不适用于微观原子。

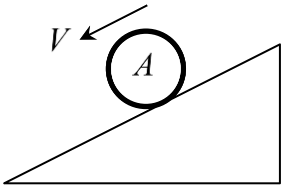
(3) 参照系应为惯性系。

课时三　练习题

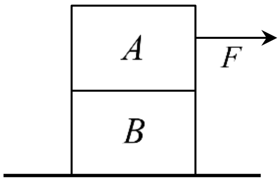
1. 沿水平方向的外力 F 将质量为 m 的物体 A 压在竖直墙上，由于物体与墙之间有摩擦力，物体保持静止，设摩擦力为 f_0，若外力增至 $2F$，则此时物体所受静摩擦力大小为________



2. 将下列各种情形下的物体 A 进行受力分析（在下列情况下接触面均不光滑）

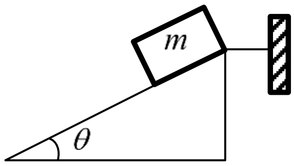


(1) 沿斜面下滚的小球



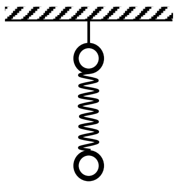
(2) A,B 同时同速度向右行驶

3. 如图所示，质量为 m 的物体用细绳水平拉住，静止在倾角为 θ 为的固定的光滑斜面上，则斜面给物体的支持力为（　　）



$A.\ mg\cos\theta$　　$B.\ mg\sin\theta$　　$C.\ \dfrac{mg}{\cos\theta}$　　$D.\ \dfrac{mg}{\sin\theta}$

4. 两个质量相等的小球由一轻弹簧相连接，再用一细绳悬挂于天花板上，处于静止状态，如图所示。将绳子剪断的瞬间，球 1 和球 2 的加速度分别为（　　）



$A.\ a_1=g, a_2=g$　　$B.\ a_1=0, a_2=g$

$C.\ a_1=g, a_2=0$　　$D.\ a_1=2g, a_2=0$

5. 已知一质量为 m 的质点在 x 轴上运动，质点只受到指向原点的引力的作用，引力大小与质点离原点的距离 x 的平方成反比，即 $f=-k/x^2$，k 是比例常数。设质点在 $x=A$ 时的速度为零，求质点在 $x=A/4$ 处的速度大小。

课时四 动量/冲量/动量守恒

考点	重要程度	占分	题型
1. 动量定理	必考	5～10	选/填 大题
2. 动量守恒			

1. 动量定理

动量: $\vec{p}=m\vec{v}$ 单位: $kg\cdot m/s$ （矢量，有大小，有方向）

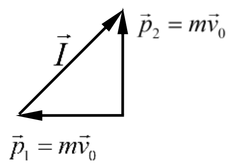
动量定理: $\vec{I}=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$ 单位 $N\cdot s$

① 冲量为矢量，等于动量的矢量差，也等于冲力对时间的积分

② $\vec{F}$ 为冲力，为合外力

③ F 若为常力，$\vec{I}=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\vec{F}\cdot\Delta t$

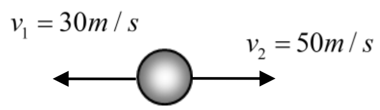
题 1. 一物体质量为 m，t_1 时刻速度大小为 v_0，方向沿 x 负方向，t_2 时刻速度大小仍为 v_0，方向沿 y 轴正方向，t_1 到 t_2 冲量大小为________.



解：$I=\sqrt{(mv_0)^2+(mv_0)^2}=\sqrt{2}mv_0$

题 2. 一垒球的质量 $m=0.20kg$，如果其投出时的速度为 $30m/s$，被棒击回的速度为 $50m/s$，方向相反，球的冲量大小为______，球与棒的接触时间为 $\Delta t=0.0020s$，则棒击打垒球的平均冲力 $F=$________.

解：$I=mv_2-mv_1=0.2\times50-0.2\times(-30)=16\ N\cdot s$



由 $I=F\cdot\Delta t\Rightarrow16=F\cdot0.002$

解得：$F=8000N$

题 3. 质量为 $3kg$ 的静止物体在水平力 $F=3t^2(N)$ 作用下，在光滑水平面上作直线运动，物体在 $0\sim3$ 秒内获得的冲量______$N\cdot s$，第 3 秒末物体的速度值_______m/s.

解：$I=\int_0^3 3t^2dt=t^3\Big|_0^3=27N\cdot s$ $\quad I=mv_2-mv_1=mv_2-0$ $\quad\Rightarrow v_2=\dfrac{I}{m}=\dfrac{27}{3}=9m/s$

题 4. 一静止的质点，在合力为 $\vec{F}=10t\vec{i}+2(2-t)\vec{j}$ 作用下，在 $2s$ 末的动量为________.

解：$F_x=10t \quad F_y=2(2-t)$

在 x 方向冲量：$mv_{x2}-0=\int_0^2 F_x dt=\int_0^2 10tdt=5t^2\Big|_0^2=20 \ \ N\cdot s$ $\qquad \Rightarrow \vec{p}_2=20\vec{i}+4\vec{j}$

在 y 方向冲量：$mv_{y2}-0=\int_0^2 F_y dt=\int_0^2 2(2-t)dt=\left(4t-t^2\right)\Big|_0^2=4 \ \ N\cdot s$

2. 动量守恒

若 $F_{合}=0$，则系统总动量守恒：$m_1\vec{v}_1=m_2\vec{v}_2$

(1) $F_{合}=0$，指不受外力或所受合外力为零

(2) 内力不改变系统的总动量

(3) 内力远大于外力时，也可认为 $F_{合}=0$

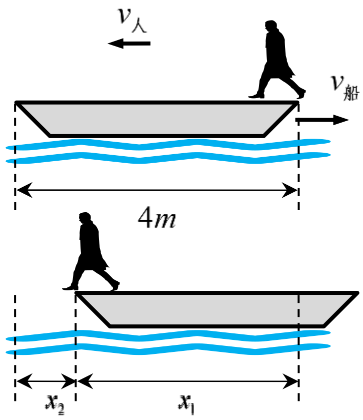
题 1. 粒子 B 的质量是粒子 A 的质量的 4 倍，开始时粒子 A 的速度为 $3\vec{i}$，粒子 B 的速度为 $2\vec{i}$，由于两者的相互作用，粒子 A 的速度变为 $7\vec{i}$，此时粒子 B 的速度为（　）

$A.\vec{i}$ $\qquad B.2\vec{i}$ $\qquad C.0$ $\qquad D.5\vec{i}$

答案：A. 水平方向不受外力，动量守恒

$$m\cdot 3+4m\cdot 2=m\cdot 7+4m\cdot v \quad \Rightarrow v=1$$

题 2. 一人站在长度为 $4m$ 的船一端，船漂浮于静止水面上。船的质量为 $600kg$，人的质量为 $80kg$，若此人从船头走到船尾，则船相对于水面移动了多少米？（忽略水对船的阻力）



解：水平方向动量守恒：$mv_{人}=Mv_{船} \quad \Rightarrow m\dfrac{dx_1}{dt}=M\dfrac{dx_2}{dt}$

整理得：$mdx_1=Mdx_2$

两边同时积分：$\int_0^{x_1} mdx_1=\int_0^{x_2} Mdx_2 \quad \Rightarrow mx_1=Mx_2$

即：$80x_1=600x_2$ 　又：$x_1+x_2=4$

联立两式解得：$\begin{cases} x_1=3.53m \\ x_2=0.47m \end{cases}$ 　故船移动了 $0.47m$

题 3. 下列几种说法正确的是（　　）

(1) 作用力的冲量与反作用力的冲量总是等值相反的

(2) 系统的内力不能改变系统的总动量

(3) 冲量的方向与物体动量的方向相同

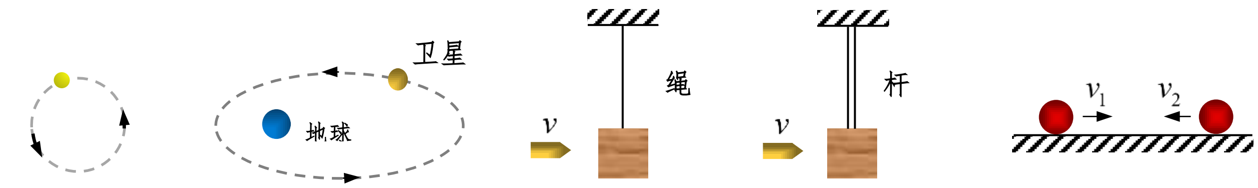
(4) 以恒力作用于物体，时间越长，物体的动量越大

A. 只有（1）是正确的　　　　*B.*（1）（2）是正确的

C.（1）（3）是正确的　　　　*D.*（2）（4）是正确的

答案：*B*.（详细解答见视频课程）

题 4. 判断下列运动是否动量守恒



弹性碰撞，系统动量______

非弹性碰撞，系统动量______

完全非弹性碰撞，系统动量______

匀速圆周运动 动量______

卫星绕地球 卫星动量______

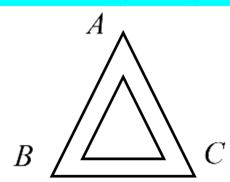
子弹打击木块 系统动量______

子弹打击木块 系统动量______

（详细解答见视频课程）

课时四 练习题

1. 质量为 m 的质点，以不变速率 V 沿图中正三角形 ABC 的水平光滑轨道运动，质点越过 A 角时，轨道作用于质点的冲量大小为（　　）



A. mV　　　*B.* $\sqrt{2}mV$　　　*C.* $\sqrt{3}mV$　　　*D.* $2mV$

2. 设作用于物体上的力 $F=6t+3(SI)$。如果物体在这力的作用下，由静止开始沿直线运动，在 0 到 2.0s 的时间间隔内，这个力作用在物体上的冲量大小________

3. 一质量为 m 的质点在 xoy 平面上运动，其速度矢量为 $\vec{V}=-a\omega\sin\omega t\vec{i}+b\omega\cos\omega t\vec{j}$，则 $t=0$ 到 $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 时间内质点所受的合力的冲量是________

4. 一质量为 m 的小球，从 h_1 高度处由静止下落到水平桌面上，反弹高度 h_2。设小球与桌面的接触时间为 τ，则小球对桌面的平均冲力的大小为________

5. 一人用恒力 $\vec{F}$ 推地上的木箱，经历时间 Δt 未能推动木箱，此推力的冲量等于多少？木箱既然受了力 $\vec{F}$ 的冲量，为什么它的动量没有改变？

6. 一质量为 $60kg$ 的人起初站在一条质量为 $300kg$，且正以 $2m/s$ 的速率向湖边驶近的小木船上，湖水是静止的，且阻力不计。现在人相对于船以一水平速率 V 沿船的前进方向向河岸跳去，该人起跳后，船速减为原来的一半，V 应为（ ）

$A.2m/s$ $B.3m/s$ $C.5m/s$ $D.6m/s$

7. 质量为 M 的木块静止在光滑的水平面桌面上，质量为 m，速度为 v_0 的子弹水平射入木块，并陷在木块内与木块一起运动，求：

(1) 子弹相对木块静止后，木块的速度和动量；

(2) 子弹相对木块静止后，子弹的动量；

(3) 在这个过程中，子弹施于木块的冲量；

8. 一小船质量为 $100kg$，船头到船尾共长 $3.6m$。现有一质量为 $50kg$ 的人从船尾走到船头时，船头移动多少距离？假定水的阻力不计。

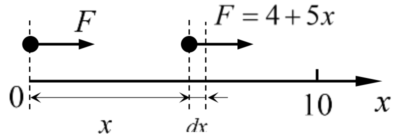
课时五　质点运动的功和能

考点	重要程度	占 分	题型
1. 做功	★★★	0～3	填空
2. 动能定理	★★★★★	5～10	大题
3. 保守力、势能			填空
4. 机械能守恒			大题

1. 做功 （恒力：$W=F\cdot s\cdot cos\theta$ 变力：$W=\int dW=\int Fds$）

题 1. 某质点在力 $\vec{F}=(4+5x)\ \vec{i}(SI)$ 的作用力下沿 x 轴做直线运动，在从 $x=0$ 移动到 $x=10m$ 的过程中，力 $\vec{F}$ 所做的功为_____ J

解：如图建立坐标



x 处：$F=(4+5x)$

$$dW=F\cdot dx=(4+5x)dx$$

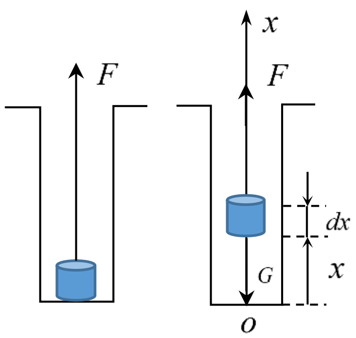
$$W=\int dW=\int_0^{10}(4+5x)dx=290\ \ J$$

题 2. 一质点在恒力为 $\vec{F}=4\vec{i}-5\vec{j}+1\vec{k}\ (SI)$ 的作用下产生位移为 $\Delta\vec{r}=2\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}\ (SI)$ 则此力在该位移过程中所做的功为______

解：$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=4\times2+(-5)\times(-4)+1\times(-3)=25\ J$

题 3. 一人从 $10m$ 深的井中提水，起始桶中装有 $10.0Kg$ 的水，由于水桶漏水，每升高 $1.00m$ 要漏去 $0.20Kg$ 的水，水桶被匀速地从井中提到井口，求人所做的功。

解：如图建立坐标



$$F=G=mg=(10-0.2x)g$$

$$dW=F\cdot dx=(10-0.2x)g\ dx$$

$$W=\int dW=\int_0^{10}(10-0.2x)g\ dx=882J$$

2. 动能定理 （动能：$E_k=\frac{1}{2}mv^2$ 单位：J 标量，有大小，没有方向）

题 1. 质量

为_______.

> 动能定理：$W=\frac{1}{2}m{v_2}^2-\frac{1}{2}m{v_1}^2$
>
> (1) 质点：合外力做功＝动能变化
>
> (2) 质点系：合外力做功＋非保守内力做功＝动能变化 （例如爆炸）

解；$W=\frac{1}{2}m{v_2}^2-\frac{1}{2}m{v_1}^2=\frac{1}{2}\times1\times4^2-\frac{1}{2}\times1\times2^2=6\ J$

题 2. 用铁锤把钉子敲入墙面木板，设木板对钉子的阻力与钉子进入木板的深度成正比，即 $F=kx$。若第一次打击时，能把钉子打入木板 $1cm$，第二次打击时，保持第一次打击的速度，第二次能把钉子打入的深度为______。

解：第一次打击：

$$\frac{1}{2}mv^2=\int_0^1 kxdx=\frac{1}{2}k$$

第二次打击：

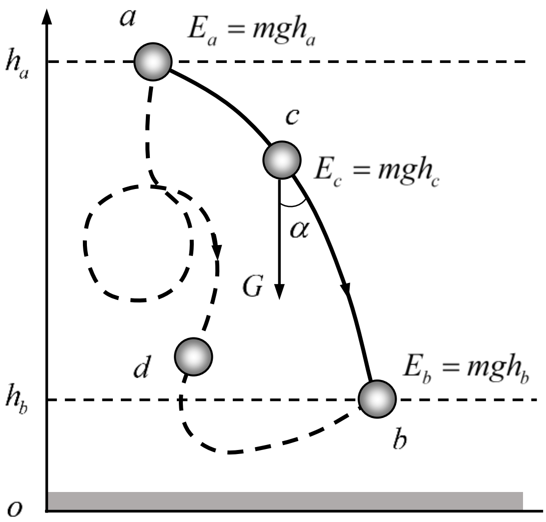
$$\frac{1}{2}mv^2=\int_1^x kxdx=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}k$$

解得 $x=\sqrt{2}cm$

故第二次打击深度为 $\left(\sqrt{2}-1\right)(cm)$

3. 保守力、势能

保守力	重力	弹力	万有引力	静电力
	$G=mg$	$F=kx$	$F=G\dfrac{Mm}{r^2}$	$F=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r^2}$
势能	$E_p=mgh$	$E_p=\dfrac{1}{2}kx^2$	$E_p=-G\dfrac{Mm}{r}$	$U_P=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r}$
常用零势能点	地面	平衡位置	无穷远处	无穷远处



4. 机械能守恒

$E_{k1}+E_{p1}=E_{k2}+E_{p2}$

1) 机械能只包含动能和势能

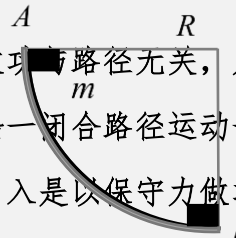
2) 系统内只有保守力做功，其他内力和一切外力都不做功

题 1. 如图所示，质量 $m=2Kg$ 的物体从静止开始，沿 $1/4$ 圆弧从 A 滑到 B，在 B 处的大小为 $v=6m/s$，已知圆的半径 $R=4m$，则物体从 A 到 B 的过程中摩擦力对它所做的功 $W=$________.

解：A 点机械能：$E_A=mgR=2\times9.8\times4=78.4\ J$

B 点机械能：$E_B=\dfrac{1}{2}mv_B^2=\dfrac{1}{2}\times2\times6^2=36\ \ J$

$W_f=E_B-E_A=36-78.4=-42.4\ \ J$



1) 保守力做功与路径无关，只与始末位置有关

2) 保守力沿一闭合路径运动一周，做功为零

3) 势能的引入是以保守力做功为前提

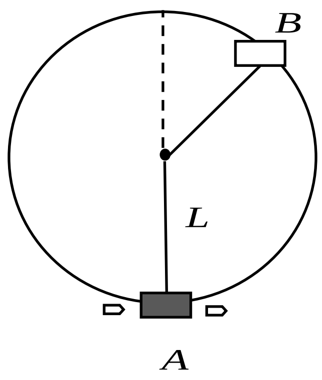
4) 不同的势能零点，对应的势能值不一样

5) 势能大小=保守力把物体移至势能零点所做的

6) 保守力做正功，对应势能减小

7) 功能计算时，保守力做功和势能只能计算一

题 2. 质量为 m 的子弹，穿过如图所示的摆锤后，速率由 v 变为 $v/2$。已知摆锤的质量为 M，摆线的长度为 L，如果摆锤能在垂直平面内完成一个完全的圆周运动，弹丸的速度最小值应为多大？



解：穿过的瞬间，动量守恒：$mv = m\cdot\frac{v}{2} + M\cdot V_A \quad \Rightarrow V_A = \frac{mv}{2M}$

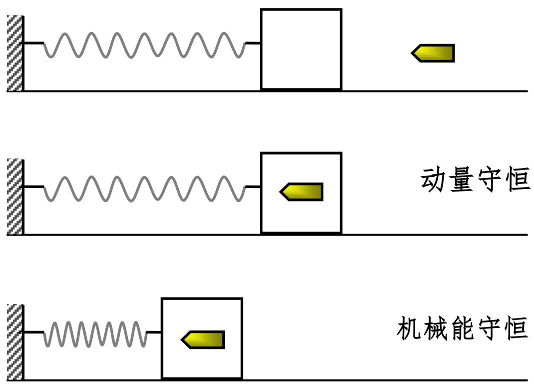
摆锤可以完成圆周运动，则在最高点满足

$$Mg = M\frac{V_B^2}{L} \quad \Rightarrow V_B^2 = gL$$

摆锤开始上扬，满足机械能守恒：$\frac{1}{2}MV_A^2 + 0 = \frac{1}{2}MV_B^2 + Mg\cdot 2L$

代入数据：$\frac{1}{2}M\cdot\left(\frac{mv}{2M}\right)^2 = \frac{1}{2}M\cdot gL + 2MgL \quad \Rightarrow v = \frac{2M\sqrt{5gL}}{m}$

题 3. 子弹水平地射入一端固定在弹簧上的木块内，由弹簧压缩的距离求出子弹的速度，已知子弹质量是 $0.02kg$，木块质量是 $8.98kg$。弹簧的劲度系数是 $100N/\mathrm{m}$，子弹射入木块后，弹簧被压缩 $10cm$。设木块与平面间的动摩擦因数为 0.2，求子弹的速度。



解：射入瞬间，动量守恒

$$mv = (m+M)v' \quad \Rightarrow v' = \frac{mv}{m+M} = \frac{0.02}{0.02+8.98}v = \frac{1}{450}v$$

弹簧开始压缩，满足机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2 - \mu(m+M)g\cdot x = \frac{1}{2}kx^2 + 0$$

$$\frac{1}{2}\times 9\times\left(\frac{v}{450}\right)^2 - 0.2\times 9\times 9.8\times 0.1 = \frac{1}{2}\times 100\times 0.1^2$$

解得 $v = 319.2m/s$

题 4. 对于一个物体来说，在下列的哪种情况下系统的机械能守恒（ ）

(A). 合外力为 0 　　(B). 合外力不做功

(C). 外力和非保守力都不做功 　　(D). 外力和保守内力都不做功

解：机械能守恒条件：外力和非保守力都不做功，故选 C

题 5. 对功的概念有以下几种说法

(1) 保守力作正功时，系统内相应的势能增加；

(2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点作的功为零；

(3) 作用力与反作用力大小相等，方向相反，所以两者所做功的代数和必为零。

以上说法正确的是（ ）

$A.$(1)(2)　　$B.$(2)(3)　　$C.$只有(2)　　$D.$只有(3)

答案：***C*** *(详细解答见视频课程)*

课时五 练习题

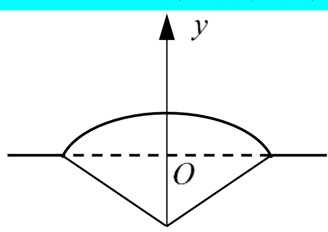
1. 用水平力 F 将置于水平面上的木箱向前拉动距离 S，力 F 对木箱所做的功为 W_1；第二次用相同的水平力 F 将置于粗糙水平面上的同一木箱向前拉动相同距离 S，力 F 对木箱所做的功为 W_2，则（　　）

$A.W_1=W_2$　　$B.W_1>W_2$　　$C.W_1<W_2$　　$D.$无法判断

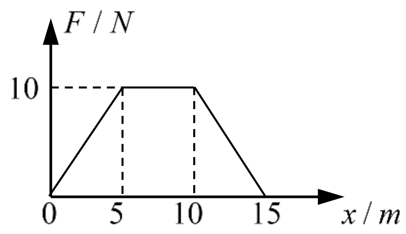
2. 某质点在力 $\vec{F}=(2+6x)\vec{i}\,(SI)$ 的作用下，沿 x 轴从原点移动到 $3m$ 处的过程中，则力 $\vec{F}$ 所做的功为：______ J

3. 一个在 xOy 平面内运动的质点，在力 $\vec{F}=(5\vec{i}+2\vec{j})N$ 的作用下移动一段位移 $\Delta\vec{r}=(2\vec{i}+3\vec{j})m$，则此过程中该恒力所做的功为______

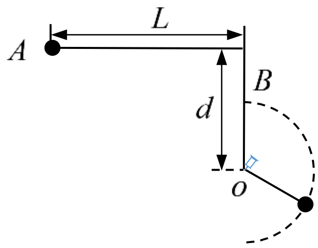
4. 如图，射箭运动员用力 $f=490N$ 使弓弦中点产生 $0.6m$ 的位移，然后把质量 $0.06kg$ 的箭竖直上射。设拉力和弓弦中点的位移成正比（准弹性力 $f=-k\Delta x$），试求箭离开弓弦时获得的动能。



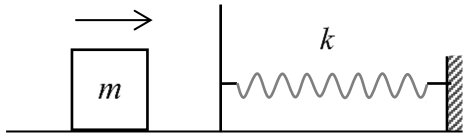
5. 质量为 $2kg$ 的物体，在沿 x 方向的变力作用下，在 $x=0$ 处由静止开始运动，设变力与 x 的关系如图所示，试由动能定理求物体在 $x=5,10,15m$ 处的速率。



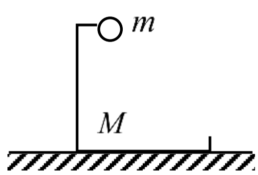
6. 如图所示，长度为 L 的轻绳一端固定，另一端有一个质量为 m 的小球，绳的悬挂点下方距悬挂点的距离为 d 处的 O 点有一钉子，小球从水平位置无初速释放，欲使球在以钉子 O 为中心的圆周上绕一圈，求最小的 d 为多少。



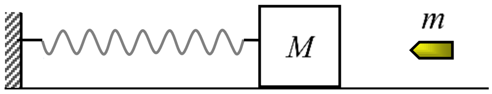
7. 如图所示，质量 m 为 $0.1kg$ 的木块，在一个水平面上和一个劲度系数 k 为 $20\,N/m$ 的轻弹簧碰撞，木块将弹簧由原长压缩了 $x=0.4m$。假设木块与水平面间的滑动摩擦系数 μ_k 为 0.25，问在将要发生碰撞时木块的速率 V 为多少？



8. 质量为 M 的大木块具有半径为 R 的四分之一弧形槽，如图所示。质量为 m 的小球从曲面的顶端滑下，大木块放在光滑水平面上，二者都作无摩擦的运动，而且都从静止开始，求小球脱离大木块时的速度。



9. 一弹簧振子置于光滑的水平面上，弹簧的进度系数 $k=900N\cdot m^{-1}$，振子质量 $M=0.99kg$，一质量 $m=0.01kg$ 的子弹水平射入振子内而不穿出，并一起向右压缩弹簧，已知弹簧的最大压缩量 $x_m=0.10m$，求子弹射入 M 前的速度 V_0。



10. 对质点系下列说法正确的是(　　)

A. 质点系总动量的改变和内力无关

B. 质点系总动能的改变和内力无关

C. 质点系机械能的改变与保守内力有关

D. 质点系内可选一点代表其转动规律

11. 质点系的内力可以改变(　)

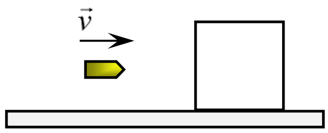
A. 系统的总质量

B. 系统的总动量

C. 系统的总动能

D. 系统的总角动量

12. 如图所示，子弹射入放在水平光滑地面上静止的木块后而穿出，以地面为参考系，下列说法中正确的是(　　)



A. 子弹减少的动能转变为木块的动能

B. 子弹—木块系统的机械能守恒

C. 子弹动能的减少等于子弹克服木块阻力所做的功

D. 子弹克服木块阻力所做的功等于这一过程中产生的热量

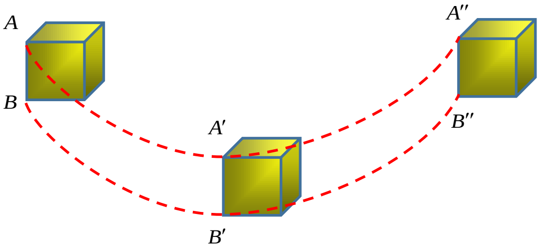
13. 在光滑的水平面内有两个物体 A 和 B，已知 $m_A=2m_B$，物体 A 以一定的动能 E_k 与静止的物体 B 发生完全弹性碰撞，则碰撞后两物体的总动能为________

14. 物体的动量发生变化，它的动能是否一定发生变化？为什么？

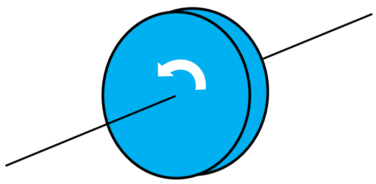
课时六 刚体转动惯量

考点	重要程度	占分	题型
1. 认识刚体	基础知识	不单独考	无
2. 转动惯量	★★★★★	0～3	填空、大题
3. 平行轴定理	★★	0～3	填空

1. 认识刚体



(a) 刚体的平动



(b) 刚体的转动

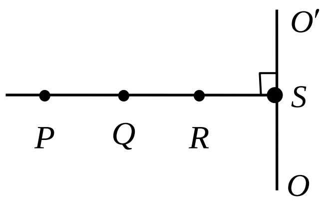
① 刚体具有一定形状和大小，并且在外力作用下，形变并不显著。

② 刚体分为平动和转动，若可以忽略形状和大小，刚体平动即质点运动，1～5 课时所讲

③ 6～9 课时，只研究刚体转动

2. 转动惯量 （离散型：$J=\sum r_i^2\cdot m_i$ 连续型：$dJ=r^2dm$ $J=\int dJ$ 单位：$kg\cdot m^2$）

题 1. 如图所示，P、Q、R 和 S 是附于刚性轻质细杆上的质量分别为 $4m,3m,2m$ 和 m 的四个质点，$PQ=QR=RS=d$，则系统对 OO' 轴的转动惯量为______。

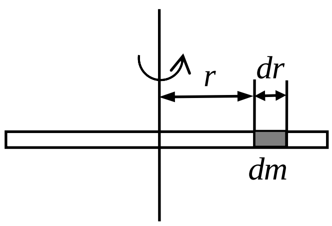


解：$J=\sum r_i^2 m_i$

$=4m\cdot(3d)^2+3m\cdot(2d)^2+2m\cdot d^2+m\cdot 0^2$

$=50md^2$

题 2. 一根均质细棒长度为 l，质量为 m，绕着与棒垂直且通过中心的转轴转动，则其转动惯量为______。

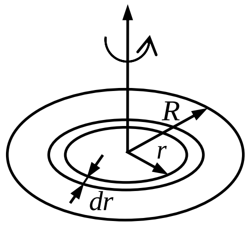


解：$dm=\lambda\cdot dr=\dfrac{m}{l}\cdot dr$ $\quad dJ=r^2\cdot dm=r^2\cdot\dfrac{m}{l}dr$

$J=\int r^2dm=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2\cdot\dfrac{m}{l}\,dr=\dfrac{1}{12}ml^2$

题 3.一均质圆盘，质量为 m，半径为 R，绕着通过圆盘中心且与盘面垂直的转轴转动，则其转动惯量_______。

解：面密度 $\lambda=\dfrac{m}{\pi R^2}$



取宽度为 dr 的圆环

$$dm=\lambda\cdot dS=\frac{m}{\pi R^2}\cdot 2\pi r\cdot dr=\frac{2m}{R^2}\cdot rdr$$

$$dJ=r^2\cdot dm==\frac{2m}{R^2}\cdot r^3dr$$

$$J=\int r^2dm=\int_0^R\frac{2m}{R^2}\cdot r^3dr=\frac{1}{2}mR^2$$

题 4.某一刚体作定轴转动时，其转动惯量与下列因素无关的是（ ）

A.刚体的总质量大小　　　　B.刚体的转轴的位置

C.刚体所受合外力矩的大小　　　　D.刚体质量的分布情况

解：由定义 $J=\sum m_ir_i^2$ 知：

决定转动惯量大小的因素：

1） 刚体的总质量

2） 质量的分布

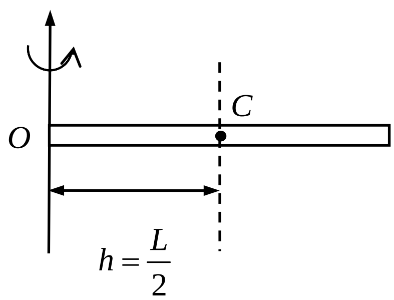
3） 给定转轴的位置

故本题答案：C

3. 平行轴定理 $J=J_C+mh^2$

题 1.一质量为 m 的均质杆长为 L，绕通过其一端且垂直于杆的轴转动，其转动惯量为______。

解：已知绕 C 点轴：$J_C=\dfrac{1}{12}mL^2$

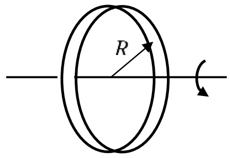
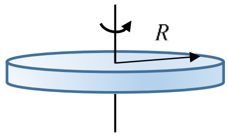
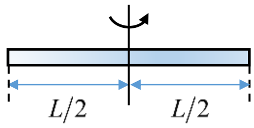
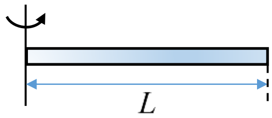
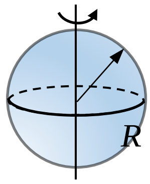
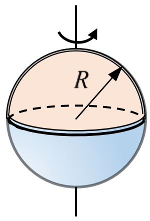
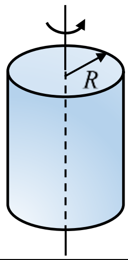


将转轴从 C 点移动到 O 点

根据平行轴定理：

$$J=J_C+mh^2=\frac{1}{12}mL^2+m\cdot(\frac{L}{2})^2=\frac{1}{3}mL^2$$

常用刚体的转动惯量

刚体	转轴	转动惯量	图
均质圆环 （质量为 M，半径为 R）	通过圆环中 心与环面垂直	MR^2	
均质圆盘 （质量为 M，半径为 R）	通过圆盘中 心与盘面垂直	$\frac{1}{2}MR^2$	
均质细杆 （质量为 M，长为 L）	通过中心 与杆垂直	$\frac{1}{12}ML^2$	
均质细杆 （质量为 M，长为 L）	沿细棒一 端与棒垂直	$\frac{1}{3}ML^2$	
均质球体 （质量为 M，半径为 R）	沿直径	$\frac{2}{5}MR^2$	
均质球壳 （质量为 M，半径为 R）	沿直径	$\frac{2}{3}MR^2$	
均质柱体 （质量为 M，半径为 R）	沿几何轴	$\frac{1}{2}MR^2$	

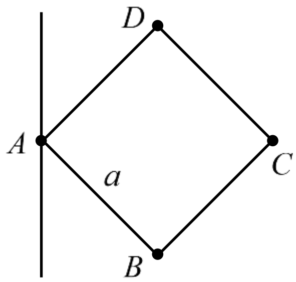
课时六 练习题

1. 刚体作定轴转动时，刚体上各点具有相同的_____(填“速度”，“加速度”，“角速度”，“角加速度”)

2. 如图所示，在边长为 a 的正方形的顶点上，分别有质量为 m 的 4 个质点，质点之间用轻质杆连接，求此系统绕下列转轴的转动惯量：

(1) 通过其中一个质点 A，并平行于对角线 BD 的转轴；

(2) 通过质点 A 并垂直于质点所在平面的转轴。



3. 半径为 R，质量为 M 的圆轮(当作均匀原盘)可绕通过其中心的水平光滑固定轴自由旋转。一质量为 m 的杂技演员(当作质点)抓住圆轮水平半径的末端，与圆轮一起从静止开始自由旋转。杂技演员和圆轮整体对固定轴的转动惯量 $J=$______

4. 有两个半径相同，质量相等的细圆环 A 和 B， A 环的质量分布均匀， B 环的质量分布不均匀。它们与通过环心并与环面垂直的轴的转动惯量分别为 J_A 和 J_B， 则 J_A 和 J_B 的大小关系为

5. 关于刚体对轴的转动惯量，下列说法正确的是(　　)

A. 只取决于刚体的质量，与质量的空间分布和轴的位置无关

B. 取决于刚体的质量和质量的空间分布，与轴的位置无关

C. 取决于刚体的质量，质量的空间分布和轴的位置

D. 只取决于转轴的位置，与刚体的质量和空间分布无关

6. 某一刚体作定轴转动时，其转动惯量与下列因素无关的是(　　)

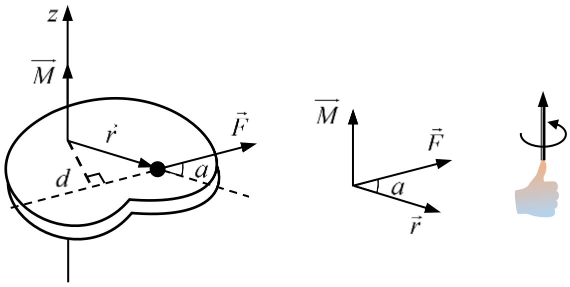
A. 刚体的总质量大小　　*B.* 刚体的转轴的位置

C. 刚体所含外力矩的大小　　*D.* 刚体质量的分布情况

课时七　力矩 转动定理

考点	重要程度	占分	题型
1. 力矩	★★	0～3	选择填空
2. 转动定理	必考	5～10	大题

1. 力矩



2. 转动定理

题 1. 几个力同时作用在一个具有光滑固定轴的刚体上，如果这几个
体（ ）

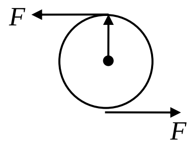
矢量：$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

大小：$M=F\cdot r\sin\alpha=F\cdot d$

单位：$N\cdot m$

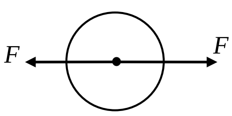
(A) 必然不会转动　　　　(B) 转速必然不变

(C) 转速必然改变　　　　(D) 转速可能不变，也可能改变



$F_{合}=0$，但不在一条直线上。

合外力矩：$M=F\cdot R+F\cdot R=2FR \quad \Rightarrow \beta\neq0$　　转速改变



$F_{合}=0$，合外力矩：$M=0 \quad \Rightarrow \beta=0$　　转速不变

题 2. 电动机带 …… 开始最后达到
120 $r/\min$ 的转 …… 加速度为____，
电动机对转动系统施加的力矩为_____。

转动定理：$M=J\cdot\beta$　（力矩等于转动惯量乘角加速度）

对比：$F=ma$　　牛二定理：合外力 使物体运动

$M=J\cdot\beta$　　转动定理：合外力矩 使刚体转动

解：角速度：$\omega=\dfrac{n\cdot2\pi}{60}=\dfrac{120\times2\pi}{60}=4\pi\ \ rad/s$

由 $\omega=\beta\cdot t \quad\Rightarrow \beta=\dfrac{\omega}{t}=\dfrac{4\pi}{0.5}=8\pi\ \ rad/s^2$

$M=J\cdot\beta=50\times8\pi=1256\ N\cdot m$

匀变速转动

$\omega=\omega_0+\beta t$

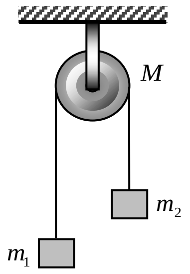
$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\beta t^2$

$\omega_2^{\ 2}-\omega_1^{\ 2}=2\beta(\theta_2-\theta_1)$

题 3. 定滑轮质量 $M=4.0kg$，可看成均质圆盘，一条不可伸长的轻绳绕过定滑轮，绳的两端分别悬挂两物块，$m_1=10kg, m_2=8.0kg$，忽略滑轮与轴间的摩擦，g 取 $10 m/s^2$，求：

（1）两物块的加速度。

（2）滑轮两边绳中张力。



(1) 选物体

(2) 分析受力

(3) 列方程

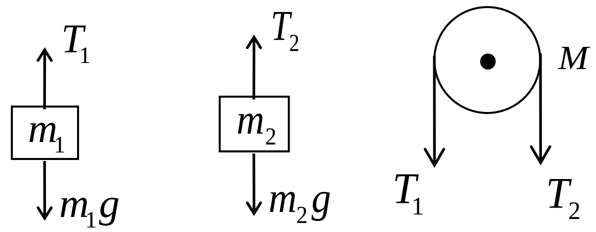
(4) 求解

解：$m_1 g - T_1 = m_1 a$

$T_2 - m_2 g = m_2 a$

$T_1 R - T_2 R = J\cdot\beta$

角量和线量关系：$a=\beta\cdot R$



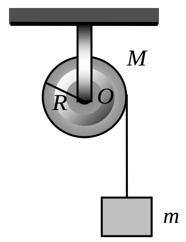
联立方程可得

$$a=\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}=\frac{(10-8)\times 10}{10+8+\frac{1}{2}\times 4}=1\ m/s^2$$

$T_1=m_1 g-m_1 a=10\times 10-10\times 1=90\ N$

$T_2=m_2 g+m_2 a=8\times 10+8\times 1=88N$

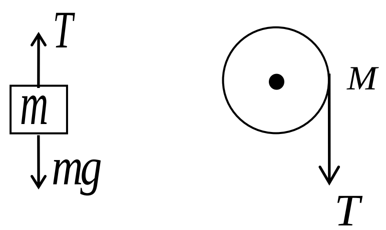
题 4. 如图，有一半径为 R，质量为 M 的匀质圆盘，可绕通过盘心 O 垂直盘面的水平轴无摩擦转动，转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$，圆盘上绕轻绳，绳的一端固定在圆盘上，另一端系质量为 m 的物体，物体从静止开始下落，试求物块下落速度随时间的变化关系。



解：$mg-T=ma$

$T\cdot R=J\cdot\beta=\frac{1}{2}MR^2\cdot\beta$

$a=\beta\cdot R$

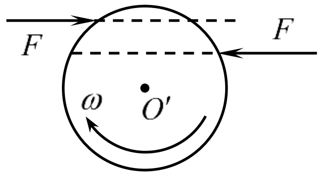


联立解得 $a=\dfrac{2mg}{2m+M}$

$v=v_o+at\ =0+at=\dfrac{2mg}{2m+M}\cdot t$

课时七 练习题

1. 一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的轴O'以角速度ω按图示方向转动，如图所示，若将两个大小相等，方向相反但不在同一条直线的力F沿盘面同时作用到圆盘上，则圆盘的角速度ω（ ）

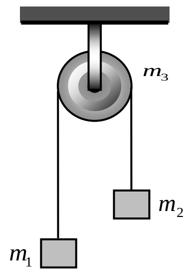


A. 必然增大　　B. 必然减少

C. 不会改变　　D. 如何变化，不能确定

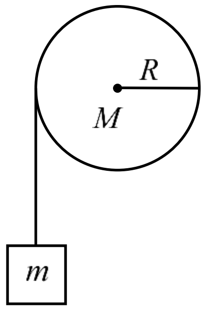
2. 一定轴转动的飞轮转动惯量$J=10kg\cdot m^2$，其转速在5秒内由$900\,rev/\min$（转/分）均匀减至$600\,rev/\min$，则飞轮所受的外力矩$M=$______Nm，这5秒内飞轮的角位移$\Delta\theta=$______rad

3. 一轻绳跨过定滑轮C，滑轮视为均匀质圆盘，绳的两端分别悬挂有质量为m_1和m_2的物体A和物体B，其中$m_1<m_2$，如图所示。设滑轮的质量为m_3，半径为R，其转动惯量为$m_3R^2/2$，滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计。绳与滑轮之间无相对滑动，试求物体的加速度和绳中的张力。



4. 如图所示，一个质量为m的物体与绕在定滑轮上的绳子相连，绳子质量可以忽略，它与定滑轮之间无滑动，假设定滑轮质量为M，半径为R，其转动惯量为$MR^2/2$，滑轮轴光滑，试求：求两滑块系统的加速度大小

(1) 该物体由静止开始下落的过程中，物体的加速度和滑轮的角加速度；
(2) 绳子的张力。

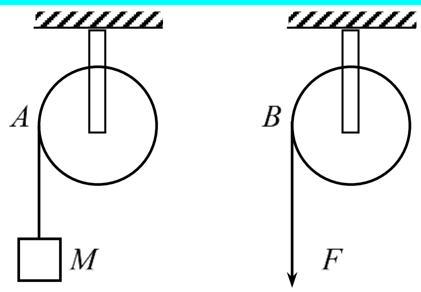


5. 一匀质圆盘对某轴的转动惯量 $J=50kg\cdot m^2$，若它受到对于该轴的合外力矩 $M=100N\cdot m$，则圆盘的角加速度 $\beta=$ ______ rad/s^2

6. 如图所示，A,B 两个相同的绕着轻绳的定滑轮，A 滑轮挂一质量为的 M 物体，B 滑轮受拉力 F，而且 $F=Mg$。设 A,B 两滑轮的角加速度分别为 β_A 和 β_B，不计滑轮轴的摩擦，则有（　　）

A. $\beta_A=\beta_B$　　　B. $\beta_A>\beta_B$

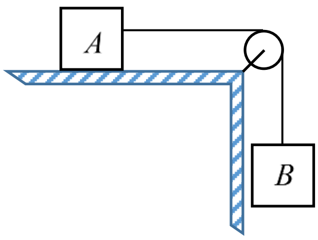
C. $\beta_A<\beta_B$　　　D. 开始时 $\beta_A=\beta_B$，以后 $\beta_A<\beta_B$



7. 质量分别为 m_A 和 m_B 的 A,B 两滑块，通过一理想的细线相连接。细线穿过一不计摩擦的滑轮，其中滑块 A 放在光滑的水平桌面上，如图所示。

(1) 不计滑轮的质量，计算两滑块的加速度和绳子张力的大小；

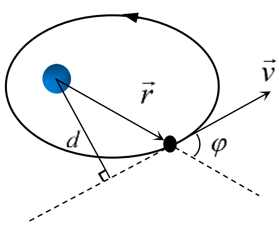
(2) 假若滑轮为一质量为 m，半径为 R 的圆盘(圆盘的转动惯量为 $J=mR^2/2$)

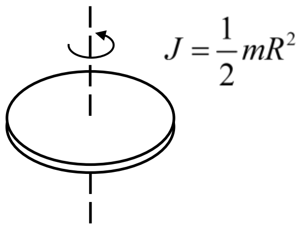


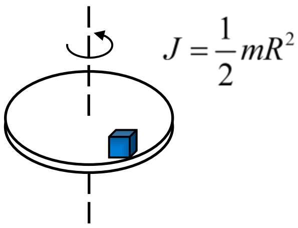
课时八　角动量、角动量守恒

考点	重要程度	占分	题型
1. 认识角动量	基础知识	不单独出题	无
2. 角动量守恒	必考	5～10	选择、填空、大题

1. 认识角动量







2. 角动量守恒(若合外力矩：$M=F\cdot d=0$，则角动量守恒：$J_1\omega_1=J_2\omega_2$)

题 1. 花样滑冰运动员绕自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为 J_0，角速度为 ω_0，然后她将两臂收回，使转动惯量减少为 $\frac{1}{3}J_0$，此时它转动的角速度变为（ ）

$A.3\omega_0$　　$B.4\omega_0$　　$C.\frac{\omega_0}{3}$　　$D.\frac{\omega_0}{4}$

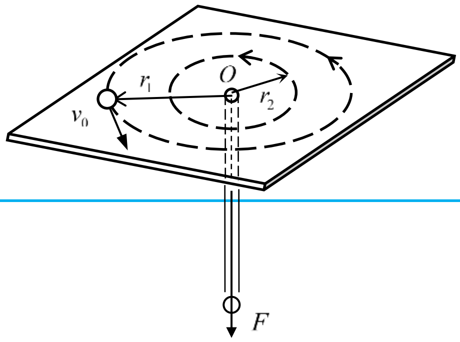
答案：*A.*　力矩 $M=0$，角动量守恒：$J_1\omega_1=J_2\omega_2$ 即：$J_0\omega_0=\frac{1}{3}J_0\cdot\omega$　$\Rightarrow\omega=3\omega$

刚体角动量
$L=J\cdot\omega$

质点角动量
$L=mv\cdot d$

题 2. 质量为 $0.05kg$ 的小块物体，置于一光滑水平面上，有一绳一端连接此物，面中心的小孔（如图所示）。该物体原以 $3rad/s$ 的角速度在距孔 $0.2m$ 的圆周上转动，今将绳从小孔缓慢往下拉，使该物体的转动半径减为 $0.1m$，则该物体的角速度 $\omega=$__________

解：物块受力沿绳子通过转轴中心，故 $M=0$，角动量守恒



$r_1=0.2$ 时，$L_1=mv_1\cdot r_1=m\omega_1 r_1\cdot r_1=0.05\times3\times0.2^2=6\times10^{-3}$

$r_2=0.1$ 时，$L_2=mv_2\cdot r_2=m\omega_2 r_2\cdot r_2=0.05\times0.1^2\omega_2=0.5\times10^{-3}\omega_2$

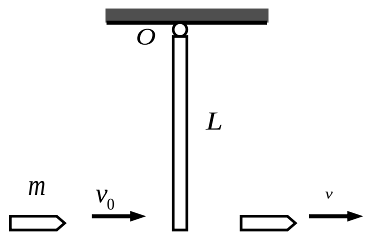
角动量守恒：$L_1=L_2$　　解得：$\omega_2=12rad/s$

题 3. 如图，杆的长度为 L，它的上端悬挂在水平轴 O 上，杆对 O 的转动惯量为 J，起初杆处于静止状态，现有一质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 击中杆的端点并以速度 v 穿出，则动量____（守恒，不守恒），角动量______（守恒，不守恒），此杆的角速度为________

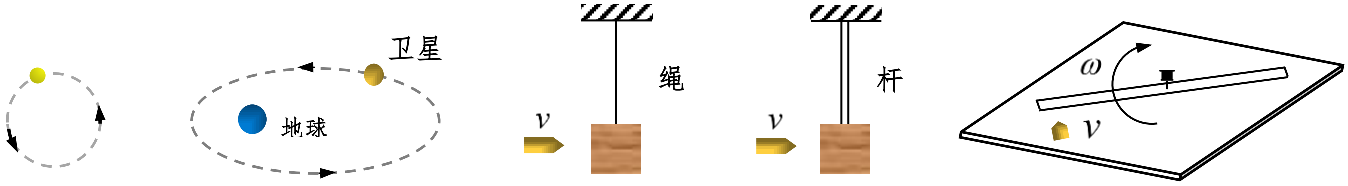
解：动量不守恒，角动量守恒

$$mv_0 \cdot L = mv \cdot L + J \cdot \omega$$

解得 $\omega = \dfrac{mv_0L - mvL}{J}$



题 4. 判断下列运动角动量是否守恒



匀速圆周运动 角动量______

卫星绕地球 卫星角动量______

子弹打击木块 系统角动量______

子弹打击木块 系统角动量______

水平面内物块打击杆 系统角动量______

解：守恒；守恒；守恒；守恒；守恒（详细解答见视频课程）

课时八 练习题

1. 有一半径为 R 的水平圆转台，可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为 J，开始时转台以匀角速度 ω_0 转动，此时有一质量为 m 的人站在转台中心，随后人沿半径向外跑去，当人到达转台边缘时，转台的角速度为(　　)

A. $\dfrac{J}{J+mR^2}\omega_0$　　B. $\dfrac{J}{(J+m)R^2}\omega_0$

C. $\dfrac{J}{mR^2}\omega_0$　　D. ω_0

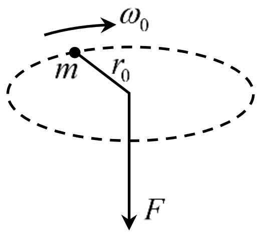
2. 一人站在无摩擦的转动平台上，双臂水平地举着二哑铃，当他把二哑铃水平地收缩到胸前的过程中，人与哑铃组成的系统应满足(　　)

A. 机械能守恒，角动量守恒　　B. 机械能守恒，角动量不守恒

C. 机械能不守恒，角动量守恒　　D. 机械能不守恒，角动量不守恒

3. 一质点的角动量守恒的条件是外力对 O 点的________为零

4. 如图所示，一质量为 $m=0.5kg$ 的小球由一绳索系着，以角速度 $\omega_0=5rad/s$ 在无摩擦的水平面上，作半径为 $r_0=0.4m$ 的圆周运动。如果在绳的另一端作用一竖直向下的拉力，使小球作半径 $r=0.2m$ 的圆周运动。则小球新的角速度 $\omega=$________rad/s；拉力所作的功为 $W=$________J



5. 人造卫星绕地球作椭圆轨道运动，地球在椭圆的一个焦点上，则卫星的(　　)

A. 动量不守恒，动能守恒

B. 动量守恒，动能不守恒

C. 角动量守恒，动能不守恒

D. 角动量不守恒，动能守恒

6. 地球卫星以地球中心为焦点做椭圆运动，则地球与卫星组成的系统(　　)

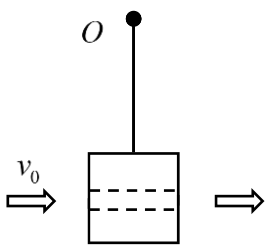
A. 引力势能变化，卫星对地心的角动量不变

B. 引力势能不变，卫星对地心的角动量不变

C. 引力势能变化，卫星对地心的角动量变化

D. 引力势能不变，卫星对地心的角动量变化

7. 一个子弹以 v_0 射入一冲击摆(如图)，假若子弹非常迅速地穿过该摆，该过程中子弹和冲击摆所构成的系统(　　)



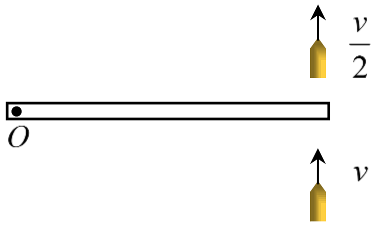
A. 动量守恒；关于 O 点的角动量守恒

B. 动量不守恒；关于 O 点的角动量守恒

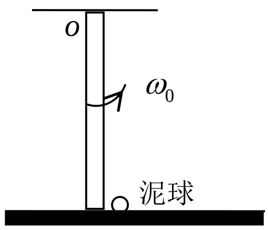
C. 动量守恒；关于 O 点的角动量不守恒

D. 动量不守恒；关于 O 点的角动量不守恒

8. 如图所示，一静止的均匀细棒，长为 L，质量为 M，可绕通过棒的端点且垂直于棒长的光滑固定轴 O 在水平面内转动，转动惯量为 $ML^2/3$。一质量为 m，速率为 v 的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射入并穿过棒的自由端，设穿过棒后子弹的速率为 $v/2$，则此时棒的角速度应为________



9. 一根长度为 $L=0.60m$ 的均匀棒，绕其端点 O 转动时的转动惯量为 $J=0.12kg\cdot m^2$。当棒摆到竖直位置时，其角速度为 $\omega=2.4rad\cdot s^{-1}$。此时棒的下端和一质量为 $m=0.20kg$ 的泥球相碰并粘在一起，问棒粘有泥球后的角速度是多少？



课时九　刚体转动的功和能

考点	重要程度	分值	常见题型
1. 力矩做功	★	0～3	选择、填空
2. 刚体动能定理	必 考	10～15	大 题
3. 刚体机械能守恒			

1. 力矩做功 $W = M\theta$

题 1. 一个滑轮半径为 $0.5m$，质量为 $5kg$，边缘绕有绳子，用恒力 $T = 20N$ 拉绳子一端，一段时间后滑轮转过的角度为 $15.7rad$ 求：拉力所做的功。

解：力矩：$M = TR = 20 \times 0.5 = 10$

力矩做功：$W = M\theta = 10 \times 15.7 = 157(J)$

2. 动能定理

题 1. 某冲床上飞轮的转动惯量为 $4.00 \times 10^3 kg \cdot m^2$，当它的转速到 $30 \ r/\min$ 时，它的转动动能是多少？冲击一次，其转速降到 $10r/\min$。求每冲一次飞轮对外所作的功。

解：（1）$n_1 = 30r/\min \quad \Rightarrow \omega_1 = \dfrac{30 \times 2\pi}{60} = \pi \ \ rad/s$

$$E_{k1} = \frac{1}{2}J\omega_1^2 = \frac{1}{2} \times 4.00 \times 10^3 \times \pi^2 = 1.97 \times 10^4 \ \ J$$

（2）$n_2 = 10 \ \ r/\min \quad \Rightarrow \omega_2 = \dfrac{10 \times 2\pi}{60} = \dfrac{\pi}{3} \ \ rad/s$

$$E_{k2} = \frac{1}{2}J\omega_2^2 = \frac{1}{2} \times 4.00 \times 10^3 \times \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = 2.19 \times 10^3 \ \ J$$

由转动动能定理，得外力矩对飞轮作功为：$A = E_{k2} - E_{k1} = -1.75 \times 10^4 J$

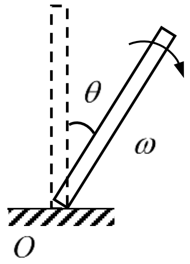
飞轮对外所作的功为：$A' = -A = 1.75 \times 10^4 J$

> 刚体动能：
>
> $E_k = \dfrac{1}{2}J \cdot \omega^2$
>
> 刚体动能定理：
>
> $A = \dfrac{1}{2}J\omega_2^2 - \dfrac{1}{2}J\omega_1^2$

3. 刚体机械能守恒：

> $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$
>
> ①刚体机械能只包含刚体动能和刚体势能
>
> ②系统内只有保守力做功，其他内力和一切外力都不做功

题 1. 长为 L、质量为 m 的匀质细棒，如图所示，可绕水平轴 O 在竖直面内旋转，若轴光滑，今使棒从竖直位置自由下摆（设转轴位于棒的一端时，棒的转动惯量为 $J=\frac{1}{3}mL^2$），求：棒转过 θ 角时的角速度。



解：由机械能守恒得

$$0+mg\frac{L}{2}=\frac{1}{2}J\omega^2+mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

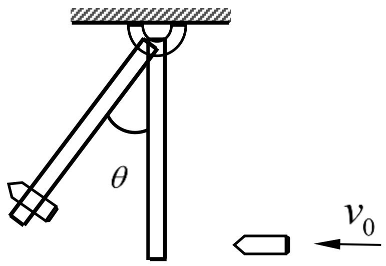
又 $J=\frac{1}{3}mL^2$

解得 $\omega=\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}}$

题 2. 一长为 L 的均质细杆如图悬挂，O 为水平光滑固定转轴，平衡时杆铅直下垂，一速度为 v_0 的子弹水平射入杆的最下端并与杆一起摆动，设杆和子弹的质量均为 m，求：

(1) 杆开始摆动时角速度的大小；

(2) 杆和子弹一起摆动时的最大摆角 θ



解：（1）系统角动量守恒

$$mv_0L=mvL+J\omega=m\omega L\cdot L+\frac{1}{3}mL^2\omega$$

解得：$\omega=\frac{3v_0}{4L}$

（2）机械能守恒 $E_{k1}+E_{p1}=E_{k2}+E_{p2}$

$$\frac{1}{2}m(\omega L)^2+\frac{1}{2}J\omega^2+mg\frac{L}{2}=mg(L-L\cos\theta)+mg(L-\frac{L}{2}\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2L^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}mL^2\omega^2+\frac{1}{2}mgL=2mgL-\frac{3}{2}mgL\cos\theta$$

$$\frac{2}{3}\omega^2L-\frac{3}{2}g=-\frac{3}{2}g\cos\theta$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{3v_0}{4L}\right)^2L-\frac{3}{2}g=-\frac{3}{2}g\cos\theta$$

$$\cos\theta=1-\frac{v_0^2}{4gL}\qquad\Rightarrow\theta=arc\cos\left(1-\frac{v_0^2}{4gL}\right)$$

刚体的平动和定轴转动中的一些重要公式

质点的直线运动（刚体的平动）	刚体的定轴转动
速度：$v=\frac{ds}{dt}$	角速度：$\omega=\frac{d\theta}{dt}$
加速度：$a=\frac{dv}{dt}$	角加速度：$\alpha=\frac{d\omega}{dt}$
匀速直线运动：$s=vt$	匀角速转动：$\theta=\omega t$
匀变速直线运动 $v=v_0+at$ $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ $v^2-v_0^2=2as$	匀变速转动 $\omega=\omega_0+at$ $\theta=\omega_0t+\frac{1}{2}at^2$ $\omega^2-\omega_0^2=2\alpha\theta$
力 F，质量 m 牛顿第二定律：$F=ma$	力矩 M，转动惯量 J 转动定律：$M=J\alpha$
动量 mv，冲量 Ft（常力） 动量定理：$Ft=mv-mv_0$	角动量 $J\omega$，冲量 Mt（常力矩） 角动量定理：$Mt=J\omega-J_0\omega_0$（常力矩）
动量守恒定律：$\sum mv=$常量	角动量守恒定律：$\sum J\omega=$常量
平动动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 常力的功 $A=Fs$ 动能定理（常力）：$Fs=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$	转动动能 $\frac{1}{2}J\omega^2$ 常力矩的功 $A=M\theta$ 动能定理：$M\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$（常力矩）

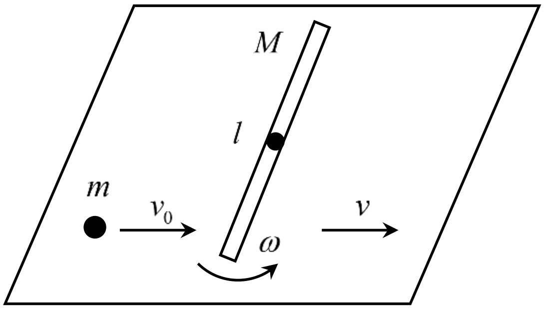
课时九 练习题

1. 在光滑水平桌面上放置一个静止的质量为m'，长为$2l$，可绕过与杆垂直的光滑轴中心转动的细杆，有一质量为m的小球以沿水平方向与杆垂直的速度$\vec{V}_0$与杆的一端发生完全弹性碰撞，求小球的反弹速度$\vec{V}$及杆的转动角速度ω。

2. 长为l，质量为M的均匀直棒静止在一光滑水平面上。它的中点有一竖直光滑固定轴，质量为m的小球以水平速度$\vec{v}_0$垂直于棒冲击其一端而粘上。已知棒绕O点的转动惯量$J = Ml^2/12, M = 3m$，求：

(1) 碰撞后棒的角速度ω和球的速率V；

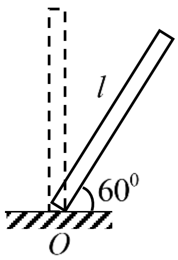
(2) 由此而损失的机械能ΔE



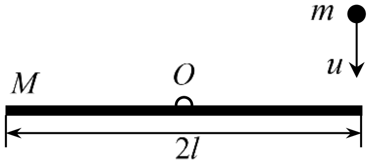
3. 一长为$l = 1m$的均匀直棒可绕过其一端且与棒垂直的水平光滑固定轴转动。抬起另一端使棒向上与水平面成60°，然后无初转速地将棒释放。已知棒对轴的转动惯量为$ml^2/3$，其中m和l分别为棒的质量和长度。$(g = 10m/s^2)$求：

(1) 放手时棒的角加速度；

(2) 棒转到水平位置时的角速度



4. 如题图所示，一根长为$2l$，质量为M的匀质细棒，可绕棒中点的水平轴O在竖直面内转动，开始时棒静止在水平位置，质量为m的小球以速度u垂直下落在棒的端点，设小球与棒作弹性碰撞，问碰撞后小球的反弹速度v及棒转动的角速度ω各为多少？



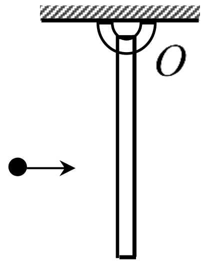
5. 如图所示，一匀质细杆可绕通过上端与杆垂直的水平光滑固定轴O旋转，初始状态为静止悬挂，现有一个小球自左方打击细杆，设小球与细杆之间为非弹性碰撞，则在碰撞过程中对细杆与小球这一系统(　　)

A. 只有机械能守恒

B. 只有动量守恒

C. 只有对转轴O的角动量守恒

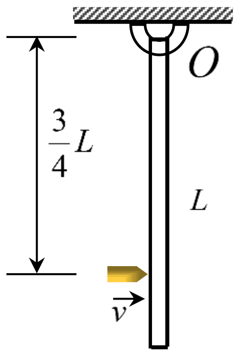
D. 机械能，动量和角动量均守恒



6. 一均质细杆，长$L=1m$，可绕通过一端的水平光滑轴O在铅垂面内自由转动，如题图所示。开始时杆处于铅垂位置，今有一子弹沿水平方向以$v=10m\cdot s^{-1}$的速度射入细杆。设入射点离O点的距离为$\frac{3}{4}L$，子弹的质量是杆质量的$\frac{1}{9}$，试求：

(1) 子弹和杆开始共同运动的角速度；

(2) 子弹和杆共同摆动能达到的最大角度



课时一　练习题答案

1. 一质点在平面内运动，其运动方程为 $x=2t, y=4t^2+4t+1$，则此运动的轨迹方程为（　）

$A. y=x^2+x+1$　　$B. y=(x+1)^2$　　$C. y=2(x+1)$　　$D. y=(x+2)^2$

答案：B。　$x=2t \Rightarrow t=\dfrac{x}{2}$　代入 $y=4t^2+4t+1$ 得：$y=x^2+2x+1=(x+1)^2$

2. 质点作曲线运动，$\vec{r}$ 表示位置矢量，$\vec{v}$ 表示速度，$\vec{a}$ 表示加速度，s 表示路程，a_t 表示切向加速度，下列表达式中正确的（）

①$\dfrac{dv}{dt}=\vec{a}$　②$\dfrac{dr}{dt}=v$　③$\dfrac{ds}{dt}=v$　④$\left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|=a_t$

$A.$①④　$B.$②④　$C.$②　$D.$③

答案：D。①$\dfrac{dv}{dt}=a\neq\vec{a}$，②$\dfrac{dr}{dt}$ 表示径向矢径变化，④$\left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|=|\vec{a}|=a$

3. 质点作曲线运动，$\vec{r}$ 表示位置矢量，s 表示路程，v 表示速率，a_t 表示切向加速度，下列表达式中（ ）

$A. \dfrac{dv}{dt}=a, \dfrac{d|\vec{r}|}{dt}=v$　$B. \dfrac{d|\vec{v}|}{dt}=a_t, \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|=v$　$C. \dfrac{ds}{dt}=v, \left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|=a_t$　$D. \dfrac{d\vec{r}}{dt}=v, \dfrac{d|\vec{v}|}{dt}=a$

答案：B.　$A. \dfrac{dv}{dt}=a_t$ 表示切向加速度大小，$\dfrac{d|\vec{r}|}{dt}$ 表示径向矢径变化，故 A 错误

$B. \dfrac{d|\vec{v}|}{dt}=\dfrac{dv}{dt}=a_t$ 表示切向加速度大小，$\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|=|\vec{v}|=v$　故 B 正确。

$C. \dfrac{ds}{dt}=v$ 表示速度大小，$\left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|=|\vec{a}|=a\neq a_t$　故 C 错误；

$D. \dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}\neq v$，$\dfrac{d|\vec{v}|}{dt}=\dfrac{dv}{dt}=a_t\neq a$　故 D 错误

4. 一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表示式为 $\vec{r}=at^2\vec{i}+bt^2\vec{j}$（其中 a,b 为常量），则该质点做 (B)

$A.$ 匀速直线运动　$B.$ 变速直线运动　$C.$ 抛物线运动　$D.$ 一般曲线运动

答案：B.　$x=at^2, y=bt^2$　消去 t 得：$y=\dfrac{b}{a}x\Rightarrow$ 物体做直线运动

$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=2at\vec{i}+2bt\vec{j}$　　$a=\dfrac{dv}{dt}=2a\vec{i}+2b\vec{j}\neq 0$　加速度不等于零，故变速直线运动

5. 某质点作直线运动的运动方程为 $x=3t-5t^3+6(SI)$，则该质点作（ ）

$A.$ 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向

$B.$ 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

$C.$ 变加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向

$D.$ 变加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

答案：$\boldsymbol{D.}$ $v=\dfrac{dx}{dt}=3-15t^2$ $a=\dfrac{dv}{dt}=-30t$ 变加速，方向 x 轴负方向

6. 已知质点的运动方程为 $\vec{r}=2t\vec{i}+(2-t^2)\vec{j}$，质点 $t=1s$ 到 $t=2s$ 内质点的平均速度 $\bar{\vec{v}}=$ $\underline{2\vec{i}-3\vec{j}}$ m/s，平均加速度 $\bar{\vec{a}}=$ _$\underline{-2\vec{j}}$_ m/s^2

解：$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=2\vec{i}-2t\vec{j}$ $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-2\vec{j}$

$t=1$ 时 $\vec{r}_1=2\vec{i}+\vec{j}$ $t=2$ 时 $\vec{r}_2=4\vec{i}-2\vec{j}$

$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\left(4\vec{i}-2\vec{j}\right)-\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)=2\vec{i}-3\vec{j}$ $\bar{\vec{v}}=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{2\vec{i}-3\vec{j}}{2-1}=2\vec{i}-3\vec{j}$

$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-2\vec{j}$ 为常数，故平均加速度也是 $\bar{\vec{a}}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-2\vec{j}$

7. 已知质点沿 x 轴作直线运动，运动方程 $x=2+6t^2-2t^3$，x 的单位为 m，t 的单位为 s。求：

4）质点在运动开始后 $4.0s$ 内的位移的大小；

5）质点在该时间内所通过的路程；

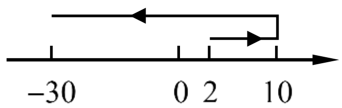
6）$t=4s$ 时质点的速度和加速度。

解：（1）$x_0=2+6t^2-2t^3\Big|_{t=0}=2m$ $x_4=2+6t^2-2t^3\Big|_{t=4}=-30m$

$\Delta x=x_4-x_0=-30-2=-32m$ 位移大小为 $32m$

（2）$v=\dfrac{dx}{dt}=12t-6t^2=0$ $\Rightarrow t=2$，$t=0$（舍去）

故 $0\sim 2s$ 内，朝正方向，在 $2\sim 4s$ 内朝负方向



$x_0=2m$ $x_2=10m$ $x_4=-30m$

$S=|x_2-x_0|+|x_4-x_2|=|10-2|+|-30-10|=8+40=48m$

(3) $v=\left(12t-6t^2\right)\Big|_{t=4}=-48m/s$ $a=\dfrac{dv}{dt}=\left(12-12t\right)\Big|_{t=4}=-36m/s^2$

8. 一物体做直线运动，运动方程为 $x=6t^2-2t^3$，式中各量的单位均为 (SI) 制，求：

(4) 第二秒内的平均速度；

(5) 第三秒末的速度；

(6) 第一秒末的加速度。

解：$x=6t^2-2t^3 \qquad v=\dfrac{dx}{dt}=12t-6t^2 \qquad a=\dfrac{dv}{dt}=12-12t$

（1）第二秒内的平均速度：$v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\dfrac{(6t^2-2t^3)\big|_{t=2}-(6t^2-2t^3)\big|_{t=1}}{2-1}=4m/s$

（2）第三秒末的速度：$v_3=(12t-6t^2)\big|_{t=3}=-18m/s$

（3）第一秒末的加速度：$a_1=(12-12t)\big|_{t=1}=0$

9. 已知一质点做直线运动，其加速度 $a=2+t$，其中 a 的单位 m/s，t 的单位 s，如果当 t=1 时，求质点的运动方程（已知 $v_0=0, x_0=0$，v_0 为初始速度，x_0 为初始位移）

解：由题可知 $\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t adt=\int_0^t(2+t)dt \Rightarrow v=v_0+2t+\dfrac{1}{2}t^2$

由 $\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t vdt=\int_0^t(v_0+2t+\dfrac{1}{2}t^2)dt \Rightarrow x=x_0+v_0t+t^2+\dfrac{1}{6}t^3$

代入 $x_0=0, v_0=0$ 　　得 $x=t^2+\dfrac{1}{6}t^3$

10. 一艘正在沿直线行驶的电艇，在发动机关闭后，其加速度方向与速度方向相反，大小与速度大小平方成正比，即 $dv/dt=-kv^2$，式中 k 为常量，求发动机关闭后又行驶的距离与速度大小的关系（v_0 为发动机关闭时速度，x 为行驶的距离）

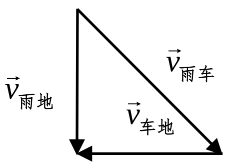
解：$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=v\cdot\dfrac{dv}{dx}=-kv^2 \qquad \Rightarrow \dfrac{dv}{v}=-kdx$

两边积分 $\int_{v_0}^{v}\dfrac{1}{v}dv=-\int_0^x kdx \qquad \Rightarrow \ln\dfrac{v}{v_0}=-kx \Rightarrow v=v_0e^{-kx}$

11. 雨滴以速率 v 落到静止的车窗玻璃时，方向竖直向下，问当车相对于地面以速率 v_0 向西行驶，车上的人观测的雨的速度。

解：由题可知：

$\vec{v}_{雨地}=\vec{v}_{绝对}=\vec{v} \qquad \vec{v}_{车地}=\vec{v}_{牵连}=\vec{v}_0 \qquad \therefore \vec{v}_{雨车}=\vec{v}_{相对}=\vec{v}'$



$\vec{v}_{绝对}=\vec{v}_{相对}+\vec{v}_{牵连} \Rightarrow \left|\vec{v}_{雨车}\right|=\sqrt{v_{雨地}^2+v_{车地}^2}=\sqrt{v^2+v_0^2}$

课时二　练习题答案

1. 某转盘的角位置和时间关系为 $\theta = 2t - t^2 + 2t^3(SI)$，则在 1 秒末的角速度大小 $\omega =$____，角加速度大小 $\beta =$_____.

解：$\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = 2 - 2t + 6t^2\Big|_{t=1} = 6rad/s$

$\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = -2 + 12t\Big|_{t=1} = 10rad/s^2$

2. 若飞轮的运动方程为 $\theta = 2 + 4\pi t + 2\pi^2 t^2(SI)$，则其角加速度 β 为（ ）

$A. \beta = 4\pi^2 t + 4\pi$　　$B. \beta = 4\pi^2$　　$C. \beta = 4\pi^2 t$　　$D. \beta = 4\pi t$

答案：***B.***　$\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = 4\pi + 4\pi^2 t$　　$\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = 4\pi^2$

3. 物体做匀速圆周运动的半径为 r，线速度大小为 v，角速度为 ω，周期为 T，向心加速度为 a，关于这些物理量之间的关系，下列表示正确的是（ ）

A. $v = \dfrac{\omega}{r}$　　B. $a = \dfrac{\omega^2}{r}$　　C. $\omega = \dfrac{2\pi r}{T}$　　D. $a = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$

答案：***D.***　$v = \omega r$；$a = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r$　　$T = \dfrac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T}$　所以 ***A***、***B***、***C*** 都不对

$$a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$　故 ***D*** 正确

4. 一个转轮以恒定角加速度 $2rad/s^2$ 转动，从静止启动经过 $30s$ 角速度为_______，在此时间内共转过_______转。

解：由　$\omega = \omega_0 + \beta t = 0 + 2 \times 30 = 60\ rad/s$

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\beta t^2 = 0 + 0 + \dfrac{1}{2} \times 2 \times 30^2 = 900\ \ rad$

$n = \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{900}{2 \times 3.14} = 143.3$（转）

5. 一质点沿半径 $R=0.01m$ 的圆周运动，其运动方程 $\theta=2+4t^3$，θ,t 分别以弧度和秒计，则当 $t=2$ 秒时，其切向加速度量值 $a_t=0.48m/s^2$，法向加速度量值 $a_n=$________，当 $a_t=\frac{a}{2}$（a 为总加速度量值）时，$\theta=$________

解：$\omega=\frac{d\theta}{dt}=12t^2$　　$\beta=\frac{d\omega}{dt}=24t$

法向加速度：$a_n=\omega^2R=\left(12t^2\right)^2\times0.01=1.44t^4\big|_{t=2}=23.04\ \ m/s^2$

切向加速度：$a_t=\beta R=24t\times0.01=0.24t$

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(0.24t\right)^2+\left(1.44t^4\right)^2}$$

由 $a_t=\frac{a}{2}$ 得 $0.24t=\frac{1}{2}\sqrt{\left(0.24t\right)^2+\left(1.44t^4\right)^2}$　　解得：$t^3=\frac{\sqrt{3}}{6}$

$$\theta=2+4t^3=2+4\times\frac{\sqrt{3}}{6}=3.15rad$$

6. 质点沿半径为 r 的圆周运动，运动学方程为 $\theta=2+3t^2(SI)$，则 $t=2s$ 时质点的法向加速度 $a_n=$______，切向加速度 $a_t=$_______.

解：$\omega=\frac{d\theta}{dt}=6t$　　$\beta=\frac{d\omega}{dt}=6$

$a_n=\omega^2R=\left(6t\right)^2r=36t^2r\big|_{t=2}=144r$　　$a_t=\beta\cdot R=6r$

7. 质点沿半径为 $0.1m$ 的圆周运动，其角位移 θ 与时间 t 的关系为：$\theta=5+2t^3$，当 $t=1s$ 时，它的加速度大小为( )

A. $3.6m/s^2$　　B. $3.8m/s^2$　　C. $1.2m/s^2$　　D. $2.4m/s^2$

解：$\omega=\frac{d\theta}{dt}=6t^2$　　$\beta=\frac{d\omega}{dt}=12t$

$a_n=\omega^2R=\left(6t^2\right)^2\times0.1=3.6t^4\big|_{t=1}=3.6$

$a_t=\beta\cdot R=12t\times0.1=1.2t\big|_{t=1}=1.2$

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{3.6^2+1.2^2}=3.8\ \ m/s^2$$

8. 一飞轮转速 $n=1500$ 转每分钟 $(r/\min)$ 转动，受制动后均匀减速，经 $50s$ 后静止，求：

(5) 对角加速度 β 和从制动到静止飞轮的转数 N；

(6) 制动开发后 $t=25s$ 时飞轮角速度 ω；

(7) 设飞轮半径 R=1m，求 $t=25s$ 时飞轮边缘任一点的速度和加速度。

解：（1） $\omega_0=\dfrac{2\pi\times1500}{60}=50\pi\ \ rad/s$

由 $\omega=\omega_0+\beta t\Rightarrow0=50\pi+\beta\times50$ 解得 $\beta=-\pi\quad(rad/s)$

由 $\theta=\omega_0t+\dfrac{1}{2}\beta t^2=50\pi\times50+\dfrac{1}{2}\times(-\pi)\times50^2=1250\pi\ \ (rad)$

$N=\dfrac{1250\pi}{2\pi}=625(rev)$

（2） $t=25s$ 时 ω=$\omega_0+\beta t=50\pi-\pi\times25=25\pi(rad/s)$

（3） $t=25s$ 时 $v=\omega R=25\pi\times1=78.5(m/s)$

切向加速度 $a_t=\beta R=-\pi\quad(m/s^2)$

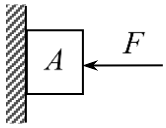
法向加速度 $a_n=\omega^2R=(25\pi)^2\times1=625\pi^2\quad(m/s^2)$

$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{(-\pi)^2+(625\pi^2)^2}=6.16\times10^3\ \ m/s^2$

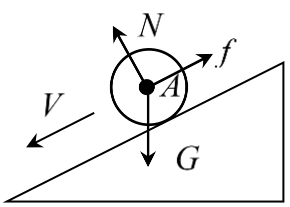
课时三 练习题

1.沿水平方向的外力 F 将质量为 m 的物体 A 压在竖直墙上，由于物体与墙之间有摩擦力，物体保持静止，设摩擦力为 f_0，若外力增至 $2F$，则此时物体所受静摩擦力大小为________

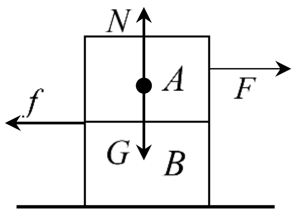
解： $f_0 = mg$



2. 将下列各种情形下的物体 A 进行受力分析（在下列情况下接触面均不光滑）



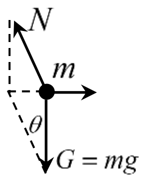
(1)沿斜面下滚的小球

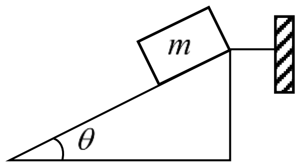


(2) A,B 同时同速度向右行驶

3.如图所示，质量为 m 的物体用细绳水平拉住，静止在倾角为 θ 为的固定的光滑斜面上，则斜面给物体的支持力为（　　）

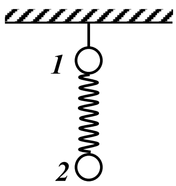
$A.\ mg\cos\theta$　　$B.\ mg\sin\theta$　　$C.\ \dfrac{mg}{\cos\theta}$　　$D.\ \dfrac{mg}{\sin\theta}$





答案：C　　$N = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

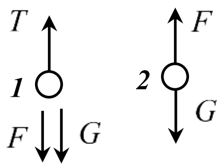
4.两个质量相等的小球由一轻弹簧相连接，再用一细绳悬挂于天花板上，处于静止状态，如图所示。将绳子剪断的瞬间，球 1 和球 2 的加速度分别为（　　）



$A.\ a_1 = g, a_2 = g$　　$B.\ a_1 = 0, a_2 = g$

$C.\ a_1 = g, a_2 = 0$　　$D.\ a_1 = 2g, a_2 = 0$

答案：D　　静止: $\begin{cases} 1球：T = F + mg \\ 2球：F = mg \end{cases}$



剪断：$T = 0$，$\begin{cases} 1球：F_{合} = mg + F = 2mg \\ 2球：F_{合} = mg - F = 0 \end{cases}$

$a_1 = \dfrac{F_{合}}{m} = 2g$　　$a_2 = 0$

5. 已知一质量为 m 的质点在 x 轴上运动，质点只受到指向原点的引力的作用，引力大小与质点离原点的距离 x 的平方成反比，即 $f=-k/x^2$，k 是比例常数。设质点在 $x=A$ 时的速度为零，求质点在 $x=A/4$ 处的速度大小。

解：$f=-\dfrac{k}{x^2}=ma=m\dfrac{dv}{dt}=m\dfrac{dv}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=m\dfrac{dv}{dx}\cdot v$

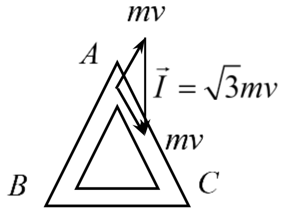
分离变量：$-\dfrac{k}{x^2}=mv\dfrac{dv}{dx}\quad\Rightarrow vdv=-\dfrac{k}{m}\dfrac{1}{x^2}dx$

两边同时积分：$\int_0^v vdv=\int_A^x-\dfrac{k}{m}\dfrac{1}{x^2}dx\qquad\Rightarrow\dfrac{1}{2}v^2-0=\dfrac{k}{m}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{A}\right)$

当 $x=\dfrac{A}{4}$ 时，代入上式可得：$\dfrac{1}{2}v^2=\dfrac{k}{m}\left[\dfrac{4}{A}-\dfrac{1}{A}\right]\ \Rightarrow v=\sqrt{\dfrac{6k}{mA}}$

课时四 练习题

1. 质量为 m 的质点，以不变速率 V 沿图中正三角形 ABC 的水平光滑轨道运动，质点越过 A 角时，轨道作用于质点的冲量大小为(　　)



$A.\ mV$　　$B.\ \sqrt{2}mV$　　$C.\ \sqrt{3}mV$　　$D.\ 2mV$

答案：C

2. 设作用于物体上的力 $F=6t+3(SI)$。如果物体在这力的作用下，由静止开始沿直线运动，在 0 到 $2.0s$ 的时间间隔内，这个力作用在物体上的冲量大小______

解：$I=\int_0^2(6t+3)dt=(3t^2+3t)\Big|_0^2=18\ \ kg\cdot m/s$

3. 一质量为 m 的质点在 xoy 平面上运动，其速度矢量为 $\vec{V}=-a\omega\sin\omega t\vec{i}+b\omega\cos\omega t\vec{j}$，则 $t=0$ 到 $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 时间内质点所受的合力的冲量是_______

解：$t=0$ 时 $\vec{V}_1=b\omega\vec{j}$　　$t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 时 $\vec{V}_2=-a\omega\vec{i}$　　$\vec{I}=m\vec{V}_2-m\vec{V}_1=-ma\omega\vec{i}-mb\omega\vec{j}$

4. 一质量为 m 的小球，从 h_1 高度处由静止下落到水平桌面上，反弹高度 h_2。设小球与桌面的接触时间为 τ，则小球对桌面的平均冲力的大小为_______

解：下落到桌面时 $\vec{V}_1=\sqrt{2gh_1}$ 向下

反弹刚离开桌面时 $\vec{V}_2=\sqrt{2gh_2}$ 向上

$$\vec{I}=m\vec{V}_2-m\vec{V}_1=m(\sqrt{2gh_2}+\sqrt{2gh_1})=m\sqrt{2g}(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2})$$

设小球与桌面接触时，桌面对小球的平均支持力为 $\vec{F}_N$

则 $\vec{I}=\left(\vec{F}_N-mg\right)\Delta t$　　$\Rightarrow m\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right)=\left(\vec{F}_N-mg\right)\cdot\tau$

$$\vec{F}_N=\frac{m\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right)}{\tau}+mg$$

故小球对桌面的平均冲力大小为 $F=F_N=\dfrac{m\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right)}{\tau}+mg$

5. 一人用恒力 $\vec{F}$ 推地上的木箱，经历时间 Δt 未能推动木箱，此推力的冲量等于多少？木箱既然受了力 $\vec{F}$ 的冲量，为什么它的动量没有改变？

解：$I=F\cdot\Delta t$。因为 F 不是合外力，此木箱还受到摩擦力冲量

6. 一质量为 $60kg$ 的人起初站在一条质量为 $300kg$，且正以 $2m/s$ 的速率向湖边驶近的小木船上，湖水是静止的，且阻力不计。现在人相对于船以一水平速率 V 沿船的前进方向向河岸跳去，该人起跳后，船速减为原来的一半，V 应为（　　）

$A.2m/s$　　　　$B.3m/s$　　　　$C.5m/s$　　　　$D.6m/s$

答案：C

由动量守恒：$(M+m)\cdot V_0=m\cdot(2+V)+M\cdot\dfrac{V_0}{2}$

$(300+60)\times 2=60\times(2+V)+300\times\dfrac{2}{2}\qquad \Rightarrow V=5\ \ m/s$

7. 质量为 M 的木块静止在光滑的水平面桌面上，质量为 m，速度为 v_0 的子弹水平射入木块，并陷在木块内与木块一起运动，求：

(4) 子弹相对木块静止后，木块的速度和动量；

(5) 子弹相对木块静止后，子弹的动量；

(6) 在这个过程中，子弹施于木块的冲量；

解：（1）系统水平方向不受外力，动量守恒：$mv_0=(m+M)v$

所以木块的速度为：$v=\dfrac{mv_0}{m+M}$　　动量为：$Mv=M\dfrac{mv_0}{m+M}$

（2）子弹的动量为：$mv=\dfrac{m^2v_0}{m+M}$

（3）对木块，由动量定理得：$I=Mv-0=M\dfrac{mv_0}{m+M}$

8. 一小船质量为$100kg$，船头到船尾共长$3.6m$。现有一质量为$50kg$的人从船尾走到船头时，船头移动多少距离？假定水的阻力不计。

解：水平方向动量守恒

$$mV_{人}=MV_{船}\Rightarrow m\frac{dx_1}{dt}=M\frac{dx_2}{dt}$$

$$mdx_1=Mdx_2$$

两边同时积分$\int_0^{x_1}mdx_1=\int_0^{x_2}mdx_2\Rightarrow mx_1=Mx_2$

即$50x_1=100x_2$ 又$x_1+x_2=3.6$

可得$\begin{cases}x_1=2.4\\x_2=1.2\end{cases}$ 船头移动了$1.2m$

课时五 练习题

1. 用水平力 F 将置于水平面上的木箱向前拉动距离 S，力 F 对木箱所做的功为 W_1；第二次用相同的水平力 F 将置于粗糙水平面上的同一木箱向前拉动相同距离 S，力 F 对木箱所做的功为 W_2，则（　　）

$A.W_1=W_2$　　$B.W_1>W_2$　　$C.W_1<W_2$　　$D.$无法判断

答案：A　$W=F\cdot S$　F 和 S 都一样，故做功相等，F 做的功和摩擦力无关

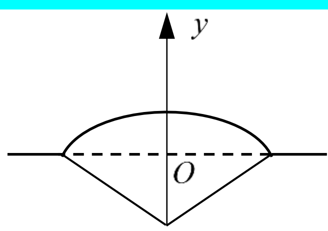
2. 某质点在力 $\vec{F}=(2+6x)\vec{i}\,(SI)$ 的作用下，沿 x 轴从原点移动到 $3m$ 处的过程中，则力 $\vec{F}$ 所做的功为：______J

解：$W=\int_0^3 Fdx=\int_0^3(2+6x)dx=(2x+3x^2)\big|_0^3=33J$

3. 一个在 xOy 平面内运动的质点，在力 $\vec{F}=(5\vec{i}+2\vec{j})N$ 的作用下移动一段位移 $\Delta\vec{r}=(2\vec{i}+3\vec{j})m$，则此过程中该恒力所做的功为______

解：$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=(5\vec{i}+2\vec{j})\cdot(2\vec{i}+3\vec{j})=5\times2+2\times3=16J$

4. 如图，射箭运动员用力 $f=490N$ 使弓弦中点产生 $0.6m$ 的位移，然后把质量 $0.06kg$ 的箭竖直上射。设拉力和弓弦中点的位移成正比（准弹性力 $f=-k\Delta x$），试求箭离开弓弦时获得的动能?



解：由 $f=k\Delta x$

$$490=k\times0.6\Rightarrow k=\frac{2450}{3}$$

在合力作用的路径上任取线元 dy

合力 $F_{合}=f-mg=-ky-mg$

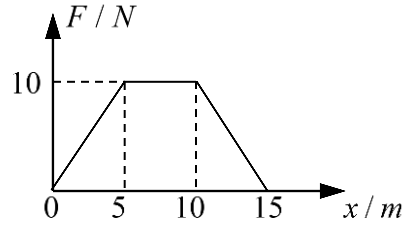
$$dA=F_{合}\cdot dy=(-ky-mg)dy$$

$$A=\int dA=\int_{-0.6}^{0}(-ky-mg)dy$$

$$=(-\frac{1}{2}ky^2-mgy)\Big|_{-0.6}^{0}=146.6J$$

5. 质量为 $2kg$ 的物体，在沿 x 方向的变力作用下，在 $x=0$ 处由静止开始运动，设变力与 x 的关系如图所示，试由动能定理求物体在 $x=5,10,15m$ 处的速率。

解：由图形知，面积代表合力做功



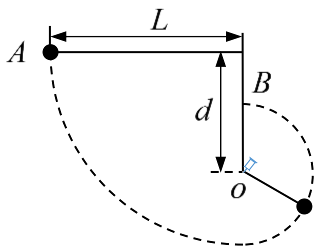
由动能定理知 $E_{k_2}-E_{k_1}=A$

$$\frac{1}{2}mV_5^2-0=\frac{1}{2}\times10\times5=25 \quad \Rightarrow V_5=\sqrt{\frac{2\times25}{m}}=\sqrt{\frac{50}{2}}=5m/s$$

$$\frac{1}{2}mV_{10}^2-0=25+5\times10=75 \quad \Rightarrow V_{10}=\sqrt{\frac{2\times75}{m}}=\sqrt{\frac{150}{2}}=5\sqrt{3}m/s$$

$$\frac{1}{2}mV_{15}^2-0=25\times2+5\times10=100 \quad \Rightarrow V_{15}=\sqrt{\frac{2\times100}{m}}=\sqrt{\frac{200}{2}}=10m/s$$

6. 如图所示，长度为 L 的轻绳一端固定，另一端有一个质量为 m 的小球，绳的悬挂点下方距悬挂点的距离为 d 处的 O 点有一钉子，小球从水平位置无初速释放，欲使球在以钉子 O 为中心的圆周上绕一圈，求最小的 d 为多少。



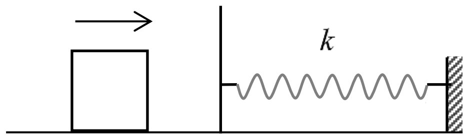
解：欲使球绕 O 点绕一圈，则在最高点 B 处，重力完全提供向心力。

即：$mg=m\dfrac{v_B^2}{r}=m\dfrac{v_B^2}{L-d} \quad \Rightarrow v_B^2=g(L-d)$

由机械能守恒 $0+mgl=\dfrac{1}{2}mv_B^2+mg\cdot2(L-d)$

联立两式解得 $d=0.6L$

7. 如图所示，质量 m 为 $0.1kg$ 的木块，在一个水平面上和一个劲度系数 k 为 $20N/m$ 的轻弹簧碰撞，木块将弹簧由原长压缩了 $x=0.4m$。假设木块与水平面间的滑动摩擦系数 μ_k 为 0.25，问在将要发生碰撞时木块的速率 V 为多少？



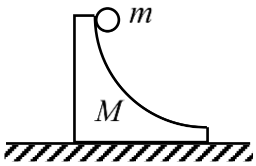
解：由机械能守恒可得

$$\frac{1}{2}mV^2=\mu_k mg\cdot x+\frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}\times0.1\times V^2=0.25\times0.1\times9.8\times0.4+\frac{1}{2}\times20\times0.4^2$$

可得 $V=5.83m/s$

8. 质量为 M 的大木块具有半径为 R 的四分之一弧形槽，如图所示。质量为 m 的小球从曲面的顶端滑下，大木块放在光滑水平面上，二者都作无摩擦的运动，而且都从静止开始，求小球脱离大木块时的速度。



解：水平方向不受外力，故动量守恒

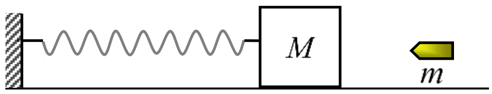
$$mV_1 = MV_2$$

由机械能守恒

$$mgR = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2$$

联立可得 $V_1 = \sqrt{\dfrac{2mgR}{M+m}}$

9. 一弹簧振子置于光滑的水平面上，弹簧的进度系数 $k = 900N \cdot m^{-1}$，振子质量 $M = 0.99kg$，一质量 $m = 0.01kg$ 的子弹水平射入振子内而不穿出，并一起向右压缩弹簧，已知弹簧的最大压缩量 $x_m = 0.10m$，求子弹射入 M 前的速度 V_0。



解：子弹打入木块瞬间，水平方向不受力

由动量守恒 $mV_0 = (M+m)V$

由机械能守恒

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}kx_m^2$$

联立可得 $V_0 = \dfrac{\sqrt{(M+m)}x_m}{m} = \dfrac{\sqrt{(0.99+0.01)\times 900} \times 0.1}{0.01} = 300m/s$

10. 对质点系下列说法正确的是（　　）

A. 质点系总动量的改变和内力无关　　B. 质点系总动能的改变和内力无关

C. 质点系机械能的改变与保守内力有关　　D. 质点系内可选一点代表其转动规律

答案：A

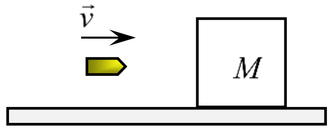
11. 质点系的内力可以改变（　）

A. 系统的总质量　　B. 系统的总动量

C. 系统的总动能　　D. 系统的总角动量

答案：C　例如爆炸

12. 如图所示，子弹射入放在水平光滑地面上静止的木块后而穿出，以地面为参考系，下列说法中正确的是(　　)



A. 子弹减少的动能转变为木块的动能

B. 子弹—木块系统的机械能守恒

C. 子弹动能的减少等于子弹克服木块阻力所做的功

D. 子弹克服木块阻力所做的功等于这一过程中产生的热量

答案：C

13. 在光滑的水平面内有两个物体 A 和 B，已知 $m_A = 2m_B$，物体 A 以一定的动能 E_k 与静止的物体 B 发生完全弹性碰撞，则碰撞后两物体的总动能为________

解：完全弹性碰撞，机械能守恒，势能始终为零，故动能不变，仍为 E_k

14. 物体的动量发生变化，它的动能是否一定发生变化？为什么？

解：动量变化，动能不一定变化，例如匀速圆周运动，V 大小不变，方向时刻改变

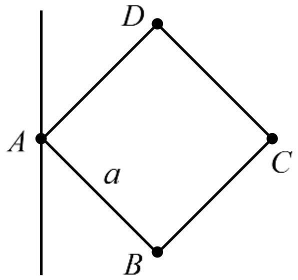
动量 $\vec{P} = m\vec{V}$ 因方向时刻改变而变化，动能 $E_k = \frac{1}{2}mV^2$,V 大小不变，动能始终不变

课时六 练习题

1. 刚体作定轴转动时，刚体上各点具有相同的_____(填“速度”，“加速度”，“角速度”，“角加速度”)

解：角速度和角加速度

2. 如图所示，在边长为 a 的正方形的顶点上，分别有质量为 m 的 **4** 个质点，质点之间用轻质杆连接，求此系统绕下列转轴的转动惯量：



(1) 通过其中一个质点 A，并平行于对角线 BD 的转轴；

(2) 通过质点 A 并垂直于质点所在平面的转轴。

解：(1) B,D 两质点到轴的垂直距离为 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

C 处质点到轴的垂直距离为 $r'=\sqrt{2}a$，则

$$J=2m(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2+m(\sqrt{2}a)^2=3ma^2$$

(2) B,D 两质点到此轴的垂直距离为 a， C 处质点到此轴的距离为 $\sqrt{2}a$，则

$$J=2ma^2+m(\sqrt{2}a)^2=4ma^2$$

3. 半径为 R，质量为 M 的圆轮(当作均匀原盘)可绕通过其中心的水平光滑固定轴自由旋转。一质量为 m 的杂技演员(当作质点)抓住圆轮水平半径的末端，与圆轮一起从静止开始自由旋转。杂技演员和圆轮整体对固定轴的转动惯量 $J=$______

解： $J=J_{盘}+J_{人}=\dfrac{1}{2}MR^2+mR^2$

4. 有两个半径相同，质量相等的细圆环 A 和 B， A 环的质量分布均匀， B 环的质量分布不均匀。它们与通过环心并与环面垂直的轴的转动惯量分别为 J_A 和 J_B， 则 J_A 和 J_B 的大小关系为

解：由 $J=\int r^2dm$　　A 和 B 对应的 r 都为常数

故 $J_A=\int r^2dm=r^2\int dm=mr^2$

$J_B=\int r^2dm=r^2\int dm=mr^2$

故 $J_A=J_B$

5. 关于刚体对轴的转动惯量，下列说法正确的是(　　)

A. 只取决于刚体的质量，与质量的空间分布和轴的位置无关

B. 取决于刚体的质量和质量的空间分布，与轴的位置无关

C. 取决于刚体的质量，质量的空间分布和轴的位置

D. 只取决于转轴的位置，与刚体的质量和空间分布无关

答案：*C*

6. 某一刚体作定轴转动时，其转动惯量与下列因素无关的是(　　)

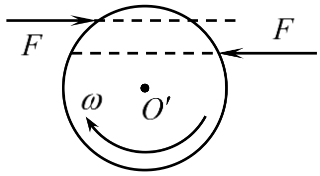
A. 刚体的总质量大小　　*B.* 刚体的转轴的位置

C. 刚体所含外力矩的大小　　*D.* 刚体质量的分布情况

答案：*C*

课时七 练习题

1. 一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的轴O'以角速度ω按图示方向转动，如图所示，若将两个大小相等，方向相反但不在同一条直线的力F沿盘面同时作用到圆盘上，则圆盘的角速度ω（ ）



A. 必然增大　　B. 必然减少

C. 不会改变　　D. 如何变化，不能确定

答案：A

2. 一定轴转动的飞轮转动惯量$J=10kg\cdot m^2$，其转速在5秒内由$900\,rev/\min$(转/分)均匀减至$600\,rev/\min$，则飞轮所受的外力矩$M=$______Nm，这5秒内飞轮的角位移$\Delta\theta=$______rad

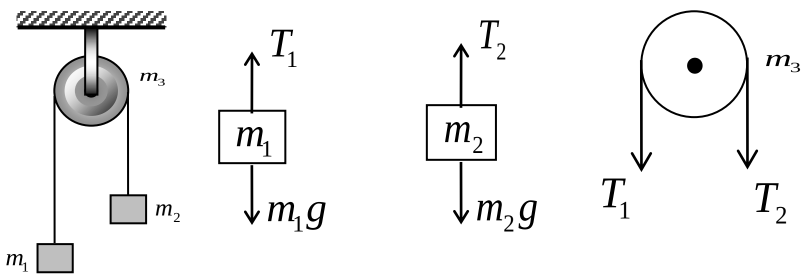
解：$\omega_0=\dfrac{900\times2\pi}{60}=30\pi$　　$\omega=\dfrac{600\times2\pi}{60}=20\pi$

由$\omega=\omega_0+\beta t$　$\Rightarrow 20\pi=30\pi+\beta\times5$　$\Rightarrow \beta=-2\pi\,rad/s^2$

$M=J\beta=10\times(-2\pi)=-20\pi Nm$

$\Delta\theta=\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\beta t^2=30\pi\times5+\dfrac{1}{2}\times(-2\pi)\times5^2=125\pi\ rad$

3. 一轻绳跨过定滑轮C，滑轮视为均匀质圆盘，绳的两端分别悬挂有质量为m_1和m_2的物体A和物体B，其中$m_1<m_2$，如图所示。设滑轮的质量为m_3，半径为R，其转动惯量为$m_3R^2/2$，滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计。绳与滑轮之间无相对滑动，试求物体的加速度和绳中的张力。



解：$m_2g-T_2=m_2a$

$T_1-m_1g=m_1a$

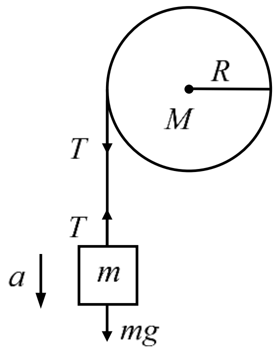
$T_2R-T_1R=J\cdot\beta$

角量和线量关系：$a=\beta\cdot R$

联立方程可得 $a=\dfrac{(m_2-m_1)g}{m_1+m_2+\dfrac{1}{2}m_3}$ $\quad T_1=\dfrac{4m_2+m_3}{2m_1+2m_2+m_3}m_1g$ $\quad T_2=\dfrac{4m_1+m_3}{2m_1+2m_2+m_3}m_2g$

4. 如图所示，一个质量为 m 的物体与绕在定滑轮上的绳子相连，绳子质量可以忽略，它与定滑轮之间无滑动，假设定滑轮质量为 M，半径为 R，其转动惯量为 $MR^2/2$，滑轮轴光滑，试求：(1) 该物体由静止开始下落的过程中，物体的加速度和滑轮的角加速度；

(2) 绳子的张力。



解：$mg-T=ma$

$T\cdot R=J\cdot\beta$

$a=\beta\cdot R$

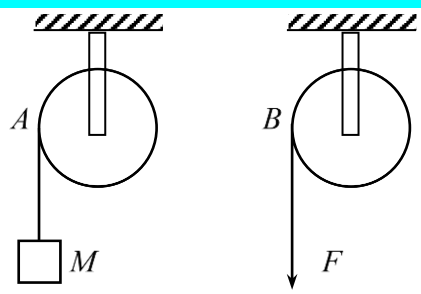
联立可得：$\beta=\dfrac{2mg}{MR+2mR}$ $\quad a=\dfrac{2mg}{M+2m}$ $\quad T=\dfrac{Mmg}{M+2m}$

5. 一匀质圆盘对某轴的转动惯量 $J=50kg\cdot m^2$，若它受到对于该轴的合外力矩 $M=100N\cdot m$，则圆盘的角加速度 $\beta=$______ rad/s^2

解：由 $M=J\cdot\beta$ 可得

$$\beta=\frac{M}{J}=\frac{100}{50}=2\,rad/s^2$$

6. 如图所示，A,B 两个相同的绕着轻绳的定滑轮，A 滑轮挂一质量为的 M 物体，B 滑轮受拉力 F，而且 $F=Mg$。设 A,B 两滑轮的角加速度分别为 β_A 和 β_B，不计滑轮轴的摩擦，则有 (　　)



A. $\beta_A=\beta_B$ $\qquad$ B. $\beta_A>\beta_B$

C. $\beta_A<\beta_B$ $\qquad$ D. 开始时 $\beta_A=\beta_B$，以后 $\beta_A<\beta_B$

答案：**C.** 设滑轮质量为 m

滑轮 **A**: 由练习题 1 结论可知：$\beta_A=\dfrac{2Mg}{mR+2MR}$

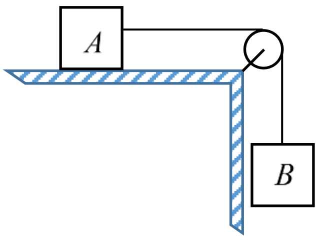
滑轮 **B**:力矩： $M=F\cdot R=Mg\cdot R$ $\beta_B=\dfrac{M}{J}=\dfrac{Mg\cdot R}{\frac{1}{2}mR^2}=\dfrac{2Mg}{mR}$

故 $\beta_A<\beta_B$

7. 质量分别为 m_A 和 m_B 的 A,B 两滑块，通过一理想的细线相连接。细线穿过一不计摩擦的滑轮，其中滑块 A 放在光滑的水平桌面上，如图所示。

(1) 不计滑轮的质量，计算两滑块的加速度和绳子张力的大小；

(2) 假若滑轮为一质量为 m，半径为 R 的圆盘(圆盘的转动惯量为 $J=mR^2/2$)



(1) 对 A 受力分析： $T=m_Aa$

对 B 受力分析： $m_Bg-T=m_Ba$

联立两式可得： $a=\dfrac{m_Bg}{m_A+m_B}$ $T=\dfrac{m_Am_Bg}{m_A+m_B}$

(2) 对 A 受力分析： $T_1=m_Aa$

对 B 受力分析： $m_Bg-T_2=m_Ba$

对滑轮受力分析： $T_2R-T_1R=J\beta$

角量与线量关系： $a=\beta R$

联立上式可得： $\beta=\dfrac{m_Bg}{(m_A+m_B+\frac{1}{2}m)R}$ $a=\beta R=\dfrac{m_Bg}{m_A+m_B+\frac{1}{2}m}$

$$T_1=\frac{m_Am_Bg}{m_A+m_B+\frac{1}{2}m} \qquad T_2=\frac{m_A+\frac{1}{2}m}{m_A+m_B+\frac{1}{2}m}m_Bg$$

课时八 练习题

1. 有一半径为 R 的水平圆转台，可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为 J，开始时转台以匀角速度 ω_0 转动，此时有一质量为 m 的人站在转台中心，随后人沿半径向外跑去，当人到达转台边缘时，转台的角速度为（ ）

$A.\dfrac{J}{J+mR^2}\omega_0$ $B.\dfrac{J}{(J+m)R^2}\omega_0$ $C.\dfrac{J}{mR^2}\omega_0$ $D.\omega_0$

答案：A

由角动量守恒：$J\omega_0=J\omega+mv\cdot R=J\omega+m\omega R\cdot R \quad \Rightarrow \omega=\dfrac{J\omega_0}{J+mR^2}$

2. 一人站在无摩擦的转动平台上，双臂水平地举着二哑铃，当他把二哑铃水平地收缩到胸前的过程中，人与哑铃组成的系统应满足（ ）

$A.$ 机械能守恒，角动量守恒　　$B.$ 机械能守恒，角动量不守恒

$C.$ 机械能不守恒，角动量守恒　　$D.$ 机械能不守恒，角动量不守恒

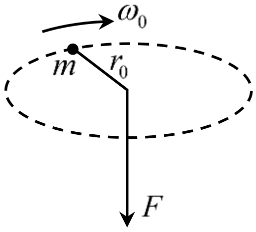
答案：C　合外力矩为零，角动量守恒

人把哑铃收缩到胸前的过程，非保守内力做功不为零，因此机械能不守恒

3. 一质点的角动量守恒的条件是外力对 O 点的________为零

合外力矩

4. 如图所示，一质量为 $m=0.5kg$ 的小球由一绳索系着，以角速度 $\omega_0=5rad/s$ 在无摩擦的水平面上，作半径为 $r_0=0.4m$ 的圆周运动。如果在绳的另一端作用一竖直向下的拉力，使小球作半径 $r=0.2m$ 的圆周运动。则小球新的角速度 $\omega=$________rad/s；拉力所作的功为 $W=$________J



解：合外力矩为零，角动量守恒

$$m\cdot r_0^{\,2}\cdot\omega_0=m\cdot r^2\cdot\omega \quad \Rightarrow \omega=\frac{r_0^{\,2}\omega_0}{r^2}=\frac{0.4^2\times 5}{0.2^2}=20\,rad/s$$

$$W=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J_0\omega^2=\frac{1}{2}mr^2\omega^2-\frac{1}{2}mr_0^{\,2}\omega^2$$
$$=\frac{1}{2}\times 0.5\times 0.2^2\times 20^2-\frac{1}{2}\times 0.5\times 0.4^2\times 5^2=3J$$

5. 人造卫星绕地球作椭圆轨道运动，地球在椭圆的一个焦点上，则卫星的(　　)

A. 动量不守恒，动能守恒　　*B.* 动量守恒，动能不守恒

C. 角动量守恒，动能不守恒　　*D.* 角动量不守恒，动能守恒

答案：*C*

6. 地球卫星以地球中心为焦点做椭圆运动，则地球与卫星组成的系统(　　)

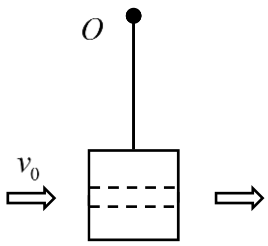
A. 引力势能变化，卫星对地心的角动量不变

B. 引力势能不变，卫星对地心的角动量不变

C. 引力势能变化，卫星对地心的角动量变化

D. 引力势能不变，卫星对地心的角动量变化

7. 一个子弹以v_0射入一冲击摆(如图)，假若子弹非常迅速地穿过该摆，该过程中子弹和冲击摆所构成的系统(　　)



A. 动量守恒；关于O点的角动量守恒

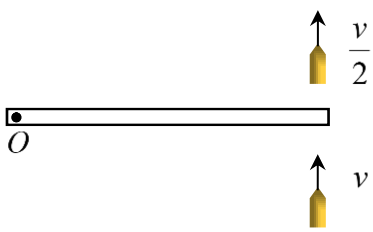
B. 动量不守恒；关于O点的角动量守恒

C. 动量守恒；关于O点的角动量不守恒

D. 动量不守恒；关于O点的角动量不守恒

答案：*A*

8. 如图所示，一静止的均匀细棒，长为L，质量为M，可绕通过棒的端点且垂直于棒长的光滑固定轴O在水平面内转动，转动惯量为$ML^2/3$。一质量为m，速率为v的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射入并穿过棒的自由端，设穿过棒后子弹的速率为$v/2$，则此时棒的角速度应为________



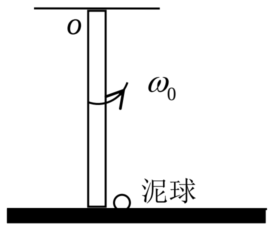
解：系统合外力矩为零由角动量守恒

$$m\cdot v\cdot L=J_{杆}\cdot\omega+m\cdot\frac{v}{2}\cdot L$$

$$mvL=\frac{1}{3}ML^2\omega+\frac{1}{2}mvL$$

$$\omega=\frac{3mv}{2ML}$$

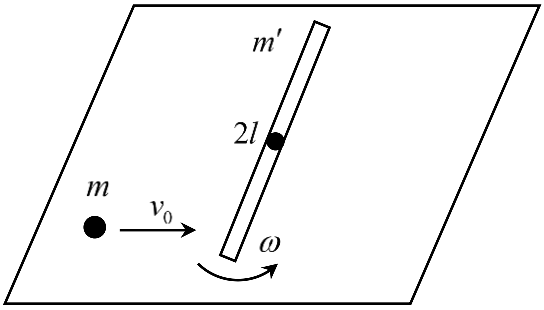
9. 一根长度为 $L=0.60m$ 的均匀棒，绕其端点 O 转动时的转动惯量为 $J=0.12kg\cdot m^2$。当棒摆到竖直位置时，其角速度为 $\omega=2.4rad\cdot s^{-1}$。此时棒的下端和一质量为 $m=0.20kg$ 的泥球相碰并粘在一起，问棒粘有泥球后的角速度是多少？



解：$J\omega_0=(J+mL^2)\omega \Rightarrow \omega=\dfrac{J}{J+mL^2}\omega_0=1.5rad/s$

课时九 练习题

1. 在光滑水平桌面上放置一个静止的质量为m'，长为$2l$，可绕过与杆垂直的光滑轴中心转动的细杆，有一质量为m的小球以沿水平方向与杆垂直的速度v_0与杆的一端发生完全弹性碰撞，求小球的反弹速度v及杆的转动角速度ω。



解：角动量守恒

$$mv_0 l = J\omega - mvl$$

完全弹性碰撞，机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

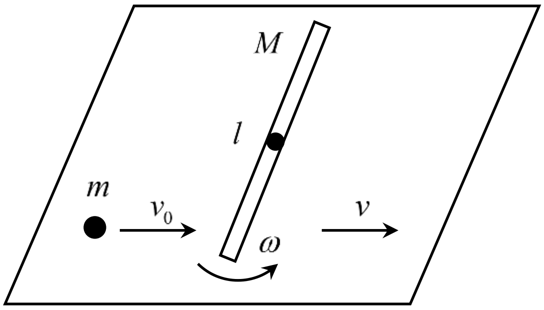
又 $J = \frac{1}{12}m'(2l)^2$

联立方程可得：$v = \frac{m'-3m}{3m+m'}v_0 \qquad \omega = \frac{6mv_0}{l}$

2. 长为l，质量为M的均匀直棒静止在一光滑水平面上。它的中点有一竖直光滑固定轴，质量为m的小球以水平速度$\vec{v}_0$垂直于棒冲击其一端而粘上。已知棒绕O点的转动惯量$J = Ml^2/12, M = 3m$，求：

(1) 碰撞后棒的角速度ω和球的速率v；

(2) 由此而损失的机械能ΔE



解：(1) 角动量守恒：

$$mv_0\frac{l}{2} = mv\frac{l}{2} + J\omega = m\omega\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2} + \frac{1}{12}Ml^2\omega$$

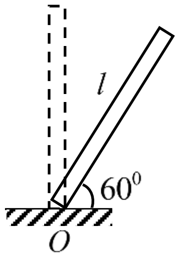
$$\Rightarrow \omega = \frac{v_0}{l} \qquad v = \omega R = \frac{v_0}{l}\cdot\frac{l}{2} = \frac{v_0}{2}$$

碰撞前机械能：$E_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$

碰撞后机械能：$E_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{12}3ml^2\left(\frac{v_0}{l}\right)^2 = \frac{1}{4}mv_0^2$

机械能损失：$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{4}mv_0^2 = \frac{1}{4}mv_0^2$

3. 一长为$l=1m$的均匀直棒可绕过其一端且与棒垂直的水平光滑固定轴转动。抬起另一端使棒向上与水平面成60°，然后无初转速地将棒释放。已知棒对轴的转动惯量为$ml^2/3$，其中m和l分别为棒的质量和长度。$(g=10\,m/s^2)$求：



(1) 放手时棒的角加速度；

(2) 棒转到水平位置时的角速度

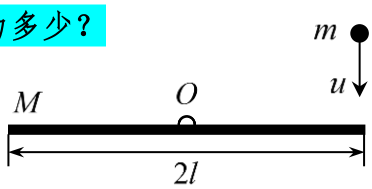
解：(1) 力矩 $M=mg\cdot\frac{l}{2}\cos60^0=\frac{1}{4}mgl$

由$M=J\cdot\beta$得：$\beta=\frac{M}{J}=\frac{\frac{1}{4}mgl}{\frac{1}{3}ml^2}=\frac{3g}{4l}$

（2）机械能守恒：

$$mg\frac{l}{2}\sin60^0=\frac{1}{2}J\omega^2 \quad\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{2l}}$$

4. 如题图所示，一根长为$2l$，质量为M的匀质细棒，可绕棒中点的水平轴O在竖直面内转动，开始时棒静止在水平位置，质量为m的小球以速度u垂直下落在棒的端点，设小球与棒作弹性碰撞，问碰撞后小球的反弹速度v及棒转动的角速度ω各为多少？



解：角动量守恒：$mul=J\omega-mvl$ ①

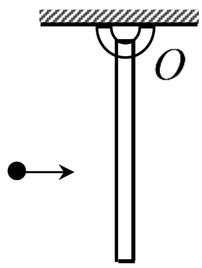
因为是弹性碰撞，系统机械能守恒

$\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2$ ②

又 $J=\frac{1}{12}M(2l)^2=\frac{1}{3}Ml^2$ ③

联立式①~式③解得 $v=\frac{M-3m}{M+3m}u$ $\omega=\frac{6mu}{(M+3m)l}$

5. 如图所示，一匀质细杆可绕通过上端与杆垂直的水平光滑固定轴O旋转，初始状态为静止悬挂，现有一个小球自左方打击细杆，设小球与细杆之间为非弹性碰撞，则在碰撞过程中对细杆与小球这一系统(　　)

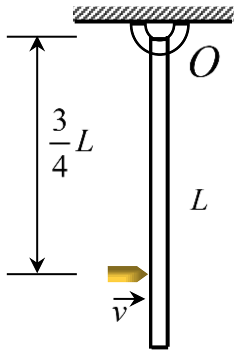


A. 只有机械能守恒　　B. 只有动量守恒

C. 只有对转轴O的角动量守恒　　D. 机械能，动量和角动量均守恒

答案：*C*

6. 一均质细杆，长 $L=1m$，可绕通过一端的水平光滑轴 O 在铅垂面内自由转动，如题图所示。开始时杆处于铅垂位置，今有一子弹沿水平方向以 $v=10m\cdot s^{-1}$ 的速度射入细杆。设入射点离 O 点的距离为 $\frac{3}{4}L$，子弹的质量是杆质量的 $\frac{1}{9}$，试求：



(1) 子弹和杆开始共同运动的角速度；

(2) 子弹和杆共同摆动能达到的最大角度

解：角动量守恒： $M=9m$ $J=\frac{1}{3}ML^2=\frac{1}{3}\cdot 9mL^2$

$$mv\frac{3}{4}L=mv'\frac{3}{4}L+J\omega=m\omega\frac{3}{4}L\cdot\frac{3}{4}L+\frac{1}{3}9mL^2\omega$$

解得：$\omega=\frac{40}{19}\ rad/s$

开始摆动，机械能守恒：

$$\frac{1}{2}m\left(\omega\frac{3}{4}L\right)^2+mg\frac{3}{4}L+\frac{1}{2}J\omega^2+9mg\frac{L}{2}=mg(\frac{3}{4}L-\frac{3}{4}L\cos\theta)+9mg(\frac{1}{2}L-\frac{1}{2}L\cos\theta)$$

代入 $\omega=\frac{40}{19}\ rad/s$ 解得 $\cos\theta=0.8496$

即 $\theta=0.56rad$