Αναδρομή
Αλγόριθμοι και Αναδρομικές Σχέσεις

Δ. Μάγος

12 Απριλίου 2020

Αναδρομή

Η *αναδρομή* είναι έννοια κλειδί στην θεωρία αλγορίθμων. Εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπου η λύση προκύπτει από την διαδοχική *(αναδρομική)* επίλυση στιγμιοτύπων μικρότερης διάστασης του ίδιου προβλήματος.

Παράδειγμα 1 *Δίνεται ο ακέραιος n. Να υπολογιστεί η παράσταση $n!$ (πρόβλημα n−παραγοντικό).*

Είναι γνωστό ότι,

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n, & \text{για } n > 0, \\ 1, & \text{για } n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Παραγοντικό

Θα μπορούσαμε να επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό με έναν αλγόριθμο βασισμένο στη δομή της επανάληψης. Όμως στο πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται εγγενώς η αναδρομή.

Παραγοντικό

Θα μπορούσαμε να επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό με έναν αλγόριθμο βασισμένο στη δομή της επανάληψης. Όμως στο πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται εγγενώς η αναδρομή.

Αν ξέρουμε την απάντηση για το στιγμιότυπο $(n-1)$*–παραγοντικό, μπορούμε να πολλαπλασιάζοντας τη με* n *να πάρουμε την απάντηση για το στιγμιότυπο* n*–παραγοντικό.* Δηλαδή, η έκφραση (1) γράφεται ως

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)!, & \text{για } n > 0, \\ 1 & \text{για } n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Παραγοντικό

Θα μπορούσαμε να επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό με έναν αλγόριθμο βασισμένο στη δομή της επανάληψης. Όμως στο πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται εγγενώς η αναδρομή.

Αν ξέρουμε την απάντηση για το στιγμιότυπο $(n-1)$*–παραγοντικό, μπορούμε να πολλαπλασιάζοντας τη με* n *να πάρουμε την απάντηση για το στιγμιότυπο* n*–παραγοντικό.* Δηλαδή, η έκφραση (1) γράφεται ως

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)!, & \text{για } n > 0, \\ 1 & \text{για } n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Προσοχή: Βασικό στοιχείο σε μία αναδρομική σχέση (και κατ' επέκταση σε έναν αναδρομικό αλγόριθμο) είναι ότι υπάρχει κάποιο μέγεθος για το οποίο η λύση του στιγμιότυπου είναι τετριμμένη - στην περίπτωση του παραγοντικού αυτή είναι η περίπτωση για $n = 0$.

Αλγόριθμος


```
int Factorial (int n)
{
if n = 0 then
    Return 1;
else
    Return n· Factorial(n − 1);
end if
}
```

Αναδρομή και Επανάληψη

- Η αναδρομή μπορεί να υποκαταστήσει τη δομή της επανάληψης. Το αντίθετο δεν είναι αληθές.
- Η έννοια της αναδρομής είναι πολύ ισχυρότερη από αυτή της επανάληψης (προγραμματιστικού βρόγχου).
- Αρκετά προβλήματα τα οποία επιλύονται με χρήση αναδρομής δεν έχουν προφανή αλγοριθμική επίλυση με τη χρήση μόνο δομών επανάληψης.

Αναδρομή και Αλγόριθμοι

Δυο βασικές προγραμματιστικές (αλγοριθμικές) τεχνικές βασίζονται στην αναδρομή:

- Διαίρει και Βασίλευε
- Δυναμικός Προγραμματισμός

Συνοπτικά θα αναφερθούμε στην πρώτη τεχνική προκειμένου να καταδειχθεί η δύναμη της αναδρομής.

Διαίρει και Βασίλευε

Η μέθοδος αυτή επιλύει ένα πρόβλημα διασπώντας το σε μικρότερα υποπροβλήματα, τις λύσεις των οποίων συνδυάζει για την επίτευξη της τελικής λύσης. Αναλυτικά, τα βήματα είναι:

- Διαίρει: το αρχικό πρόβλημα διασπάται σε απλούστερα υποπροβλήματα όσο το δυνατόν ίδιου μεγέθους.
- Βασίλευε: κάθε υποπρόβλημα επιλύεται με *αναδρομικό* τρόπο.
- Συνδύασε:οι επιμέρους λύσεις συνδυάζονται προκειμένου να δοθεί λύση στο αρχικό πρόβλημα.

Αλγόριθμοι αυτού του τύπου είναι η ταχυταξινόμηση (quicksort) συγχωνευτική ταξινόμηση (mergesort), κλπ.

Αναγκαιότητα

Η ανάλυση πολυπλοκότητας των αναδρομικών αλγορίθμων γίνεται με τη χρήση αναδρομικών εξισώσεων (μαθηματικών εκφράσεων). Αν θεωρήσουμε ότι στο αρχικό πρόβλημα ο αριθμός των στοιχειωδών πράξεων είναι $T(n)$ τότε αυτό μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με τον αριθμό των στοιχειωδών πράξεων των υποπροβλημάτων που δημιουργούνται από τον αναδρομικό αλγόριθμο.

Παράδειγμα 2 *Στην περίπτωση του Αλγόριθμου για τον υπολογισμό του παραγοντικού, ο αριθμός των στοιχειωδών πράξεων σε κάθε κλήση είναι μία σύγκριση και ένας πολλαπλασιασμός συν όσες στοιχειώδεις πράξεις χρειάζεται προκειμένου να λυθεί το υποπρόβλημα (υπολογισμός παραγοντικού) με διάσταση μειωμένη κατά ένα ($n-1$ αντί για n). Έτσι η έκφραση που περιγράφει τον αριθμό των στοιχειωδών πράξεων είναι*

$$T(n) = T(n-1) + 2.$$

Παραγοντικό

Η προηγούμενη έκφραση δεν είναι απολύτως σωστή: ισχύει για $n > 0$, ενώ για $n = 0$ έχουμε $T(0) = 1$ (γίνεται μόνο μία σύγκρισή). Επομένως ο αριθμός των στοιχειωδών πράξεων του Αλγόριθμου Factorial είναι

$$T(n) = \begin{cases} T(n-1) + 2, & \text{για } n > 0, \\ 1, & \text{για } n = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Παραστάσεις

Μαθηματικές εκφράσεις όπως η (3) συνοδεύουν τους αναδρομικούς αλγόριθμους. Η επίλυση τους συνίσταται στον υπολογισμό του αριθμού των στοιχειωδών πράξεων ($T(n)$) μόνο σε σχέση με το n (κλειστή μορφή) και συνεπώς η κατηγοριοποίηση τους στην ιεραρχία της πολυπλοκότητας. Στα επόμενα θα δούμε μεθόδους για τον υπολογισμό αυτό.

Μέθοδος Εικασίας

Αυτή ίσως είναι η πιο ‘αντιεπιστημονική’ μέθοδς. Δεδομένης μίας αναδρομικής συνάρτησης, εικάζουμε την πολυπλοκότητα της. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την επαγωγή προκειμένου να την αποδείξουμε.

Παράδειγμα 3 *Να δώσετε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για τη συνάρτηση*

$$T(n) = \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + 1, & \text{για } n > 2, \\ 1, & \text{για } 2 \geq n > 1. \end{cases}$$

Εικάζουμε ότι $T(n) = O(\lg n)$. Ισοδύναμα θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$T(n) \leq a \cdot \lg n, \forall n \geq n_0, \tag{4}$$

όπου $a > 0, n_0 \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα (συνεχ.)

Για να δείξουμε ότι ισχύει η (4) θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Η επαγωγική υπόθεση είναι ότι η (4) τέτοιο ισχύει για $T(\frac{n}{2})$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} T(\frac{n}{2}) &\leq a \cdot \lg \frac{n}{2} \Rightarrow \\ T(\frac{n}{2}) + 1 &\leq a \cdot \lg \frac{n}{2} + 1 \Rightarrow \\ T(n) &\leq a \cdot \lg \frac{n}{2} + 1 = a \cdot (\lg n - \lg 2) + 1 \\ &= a \lg n - a + 1 \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$T(n) \leq a \cdot \lg n$$

για $a \geq 1$.

Παράδειγμα (συνεχ.)

Από την οριακή τιμή $n = 2$, έχουμε

$$T(2) = 1 \leq a \cdot \lg 2 \Rightarrow a \geq 1.$$

Επομένως δείξαμε ότι η (4) ισχύει για $\boxed{a \geq 1}$ και για κάθε $\boxed{n \geq n_0 = 2.}$

Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $T(n) = \Omega(\lg n)$ και επομένως

$$T(n) = \Theta(\lg n).$$

Παρατηρήσεις

Μεγάλη προσοχή χρειάζεται στη μορφή του φράγματος που χρησιμοποιούμε στην επαγωγή.

Παράδειγμα 4 *Να μελετηθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης*

$$T(n) = \begin{cases} 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1, & n > 1, \\ 1, & n = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Είναι προφανές(;) ότι $T(n) = O(n)$. Όμως αν πάμε να το δείξουμε με επαγωγή χρησιμοποιώντας σαν πάνω φράγμα το $a \cdot n$ θα οδηγηθούμε σε λάθος!!! Για να δούμε γιατί.

Παρατηρήσεις (συνεχ.)

Θέλουμε λοιπόν να καταλήξουμε ότι $T(n) \leq a \cdot n$, κάνοντας την επαγωγική υπόθεση ότι αυτό ισχύει για $T(\lfloor n/2 \rfloor)$. Δηλαδή έστω ότι ισχύει

$$T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq a \cdot \lfloor n/2 \rfloor.$$

Αντικαθιστώντας στην (5) έχουμε

$$T(n) \leq 2 \cdot a \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1$$

Επειδή $\lfloor n/2 \rfloor \leq n/2$, η παραπάνω έκφραση συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2 \cdot a \cdot \frac{n}{2} + 1 \\ &= a \cdot n + 1. \end{aligned}$$

Όμως η τελευταία τιμή είναι μεγαλύτερη του $a \cdot n$ και όχι μικρότερη-ίση με αυτή (που είναι το ζητούμενο στο επαγωγικό βήμα).

Παρατηρήσεις (συνεχ.)

Για να άρουμε το αδιέξοδο, αλλάζουμε λίγο το ζητούμενο: αντί να προσπαθούμε να δείξουμε ότι $T(n) \leq a \cdot n$, θα δείξουμε ότι

$$T(n) \leq a \cdot n - b, \tag{6}$$

για $b > 0$.

Προσέξτε ότι και αυτό είναι αρκετό για να ισχύει ότι $T(n) = O(n)$ αφού για $b > 0$,

$$T(n) \leq a \cdot n - b \leq a \cdot n.$$

Κάνουμε την επαγωγική υπόθεση ότι η (6) ισχύει για $T(\lfloor n/2 \rfloor)$. Δηλαδή έστω ότι ισχύει

$$T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq a \cdot \lfloor n/2 \rfloor - b.$$

Παρατηρήσεις (συνεχ.)

Αντικαθιστώντας στην (5) έχουμε

$$\begin{aligned} T(n) &\le 2 \cdot (a \cdot \lfloor n/2 \rfloor - b) + 1 \\ &\le 2 \cdot a \cdot \frac{n}{2} - 2b + 1 \\ &= a \cdot n - b - b + 1 \Rightarrow \\ T(n) &\le a \cdot n - b, \end{aligned}$$

για $\boxed{b \ge 1.}$

Επίσης επειδή $T(n = 1) = 1$, από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$T(1) = 1 \le a \cdot 1 - b \Rightarrow \boxed{a \ge b + 1.}$$

Μέθοδος Επαναληπτικής Αντικατάστασης

- Αντικαθιστούμε το αριστερό μέλος της αναδρομικής έκφρασης διαδοχικά μέχρι να μπορούμε να γράψουμε την έκφραση σε γενική μορφή (σε σχέση με μία παράμετρο έστω k) που δηλώνει τον αριθμό των αντικαταστάσεων.
- Υπολογίζουμε την τιμή του k για την οποία η έκφραση παύει να είναι αναδρομική.
- Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στη γενική έκφραση και υπολογίζουμε την τελική (κλειστή) της μορφή.

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο για τη μελέτη της συνάρτησης (3) που συναντήσαμε νωρίτερα, ήτοι

$$T(n) = \begin{cases} T(n-1) + 2, & \text{για } n > 0, \\ 1, & \text{για } n = 0. \end{cases}$$

Παράδειγμα

Για την σχέση (3) έχουμε

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1)+2 \\ &= [T((n-1)-1)+2]+2 = T(n-2)+2\cdot 2 \\ &= [T((n-2)-1)+2]+2\cdot 2 = T(n-3)+3\cdot 2 \\ &= \cdots \\ &= T(n-k)+k\cdot 2. \end{aligned}$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε για ποια τιμή του k η σχέση παύει να είναι αναδρομική. Αυτό γίνεται όταν

$$n-k=0 \Rightarrow k=n.$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση, έχουμε την κλειστή μορφή

$$T(n)=T(0)+2n=2n+1 \Rightarrow T(n)=\Theta(n).$$

Παρατηρήσεις

Από την ανάλυση που κάνομε είναι φανερό ότι ο υπολογισμός του ακριβούς αριθμού των στοιχειωδών πράξεων σε κάθε κλήση του αναδρομικού αλγόριθμου δεν είναι απαραίτητος για την κατάταξη του αλγορίθμου στην ιεραρχία πολυπλοκότητας. Ακόμα και αν θεωρούσαμε ότι σε κάθε κλήση εκτελούνται ένας **σταθερός** αριθμός στοιχειωδών πράξεων, έστω c (χωρίς να προσδιορίζαμε την ακριβή τιμή του c), θα προέκυπτε ότι $T(n) = c \cdot n + 1$ και άρα πάλι $T(n) = \Theta(n)$.

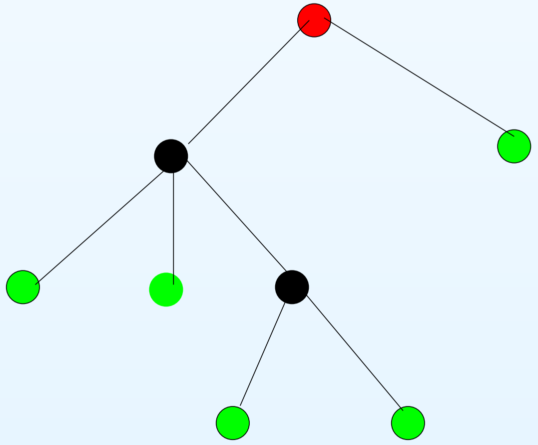
Με αντίστοιχο τρόπο παρατηρούμε ότι δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε επακριβώς τον αριθμό των στοιχειωδών πράξεων που εκτελεί ο αλγόριθμος όταν παύει να είναι αναδρομικός.

Email:dmagos@uniwa.gr

Ορισμοί

Ορισμός 5 *Ένα δένδρο είναι ένα άκυκλο συνδεδεμένο γράφημα.*

Παράδειγμα 6 *Ένα δένδρο με 8 κόμβους απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.*



Ορισμοί (συνχ.)

- Ο κόκκινος κόμβος είναι η *ρίζα* του δένδρου. Οι πράσινοι κόμβοι ονομάζονται *φύλλα* ενώ οι υπόλοιποι εσωτερικοί. Κάθε εσωτερικός κόμβος έχει κόμβους απόγονους ενώ κάθε φύλλο όχι. Πρόγονος ενός κόμβου u είναι ο κόμβος w που βρίσκεται σε αμέσως προηγούμενο επίπεδο από τον u και υπάρχει η ακμή (u, w). Κάθε κόμβος έχει ένα ακριβώς πρόγονο εκτός από την ρίζα που δεν έχει κανένα.
- Το μήκος (αριθμός ακμών) από την κορυφή σε κάποιο κόμβο ονομάζεται *βάθος* του κόμβου.
- Όλες οι κορυφές με τό ίδιο βάθος ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Η ρίζα βρίσκεται σε επίπεδο 0.
- Ύψος δένδρου είναι το μέγιστο βάθος.

Δυαδικό δένδρο

Ένα δένδρο ονομάζεται (πλήρες) δυαδικό αν κάθε εσωτερικός κόμβος έχει το πολύ (ακριβώς) δύο απογόνους. Έστω d ο αριθμός των κόμβων ενός δυαδικού δένδρου και h το ύψος του.

- Το επίπεδο m έχει το πολύ 2^m κορυφές.
- $h + 1 \leq d \leq 2^{h+1} - 1$.
- $\lg(d + 1) - 1 \leq h \leq d - 1$.
- Ένα πλήρες δυαδικό δένδρο έχει $2^{h+1} - 1$ κορυφές.
- Ένα πλήρες δυαδικό δένδρο έχει 2^h φύλλα και $2^h - 1$ εσωτερικές κορυφές.

Παρατηρήστε ότι επειδή $\lg(d + 1) - 1$ βρίσκεται μεταξύ των διαδοχικών ακεραίων $\lfloor \lg d \rfloor$ και $\lfloor \lg d \rfloor - 1$ και επειδή το h είναι ακέραιος συνεπάγεται ότι

$$\lfloor \lg d \rfloor \leq h \leq d - 1.$$

Μέθοδος Δένδρου Αναδρομής

- Η μέθοδος αυτή αποτελεί εναλλακτική της επαναληπτικής αντικατάστασης.
- Υπολογίζεται συνολικά μία έκφραση που δίνει την τιμή της αναδρομικής συνάρτησης χωρίς διαδοχικές αντικαταστάσεις.
- Αναπαριστούμε τις αναδρομικές κλήσεις σαν μία δενδρική δομή όπου σε κάθε κόμβο του δένδρου (κλήση) μετράμε τον αριθμό των πράξεων. Οι κόμβοι του δένδρου είναι διατεταγμένοι σε επίπεδα: η ρίζα του δένδρου είναι σε επίπεδο 0. Για όλους τους κόμβους στο ίδιο επίπεδο αθροίζουμε τον αριθμό των πράξεων προκειμένου να προκύψει η συνεισφορά του επιπέδου (στον συνολικό αριθμό των πράξεων.) Στη συνέχεια αθροίζουμε τη συνεισφορά όλων των επιπέδων για να προκύψει ο συνολικός αριθμός των πράξεων.

Email:dmagos@uniwa.gr

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η τάξη της αναδρομικής σχέσης

$$T(n) = \begin{cases} 2T(\frac{n}{3}) + n, & \text{για } n > 1, \\ 1, & \text{για } n \leq 1. \end{cases} \tag{7}$$

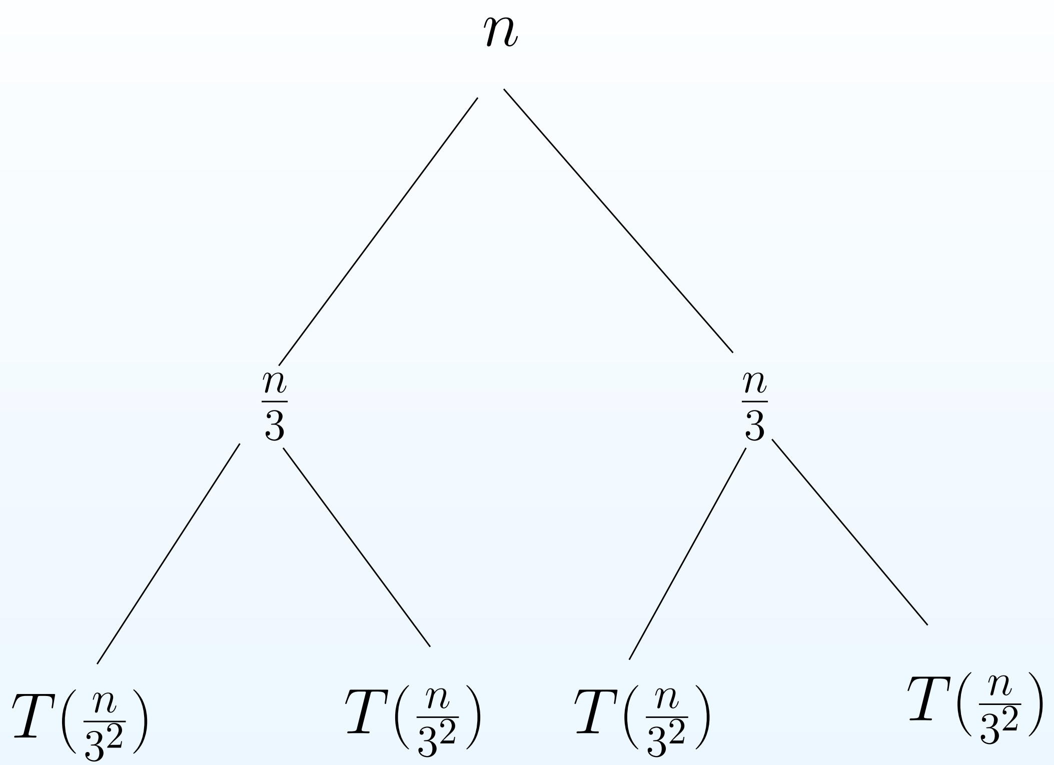
Για να διατυπώσουμε την εικασία αναπτύσσουμε το δένδρο της αναδρομής.

Δένδρο Αναδρομής

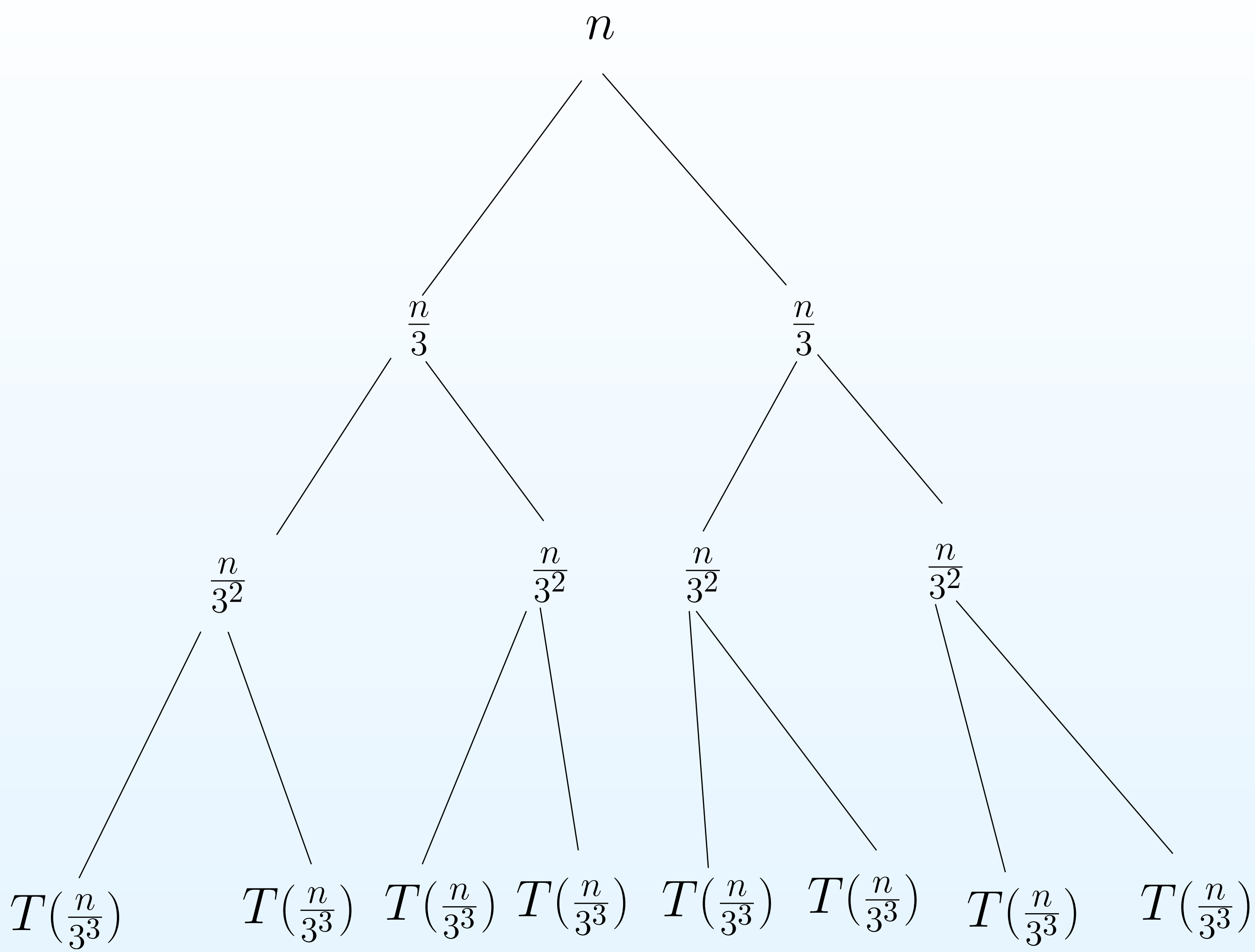
$$n$$

$$T\left(\frac{n}{3}\right) \qquad\qquad T\left(\frac{n}{3}\right)$$

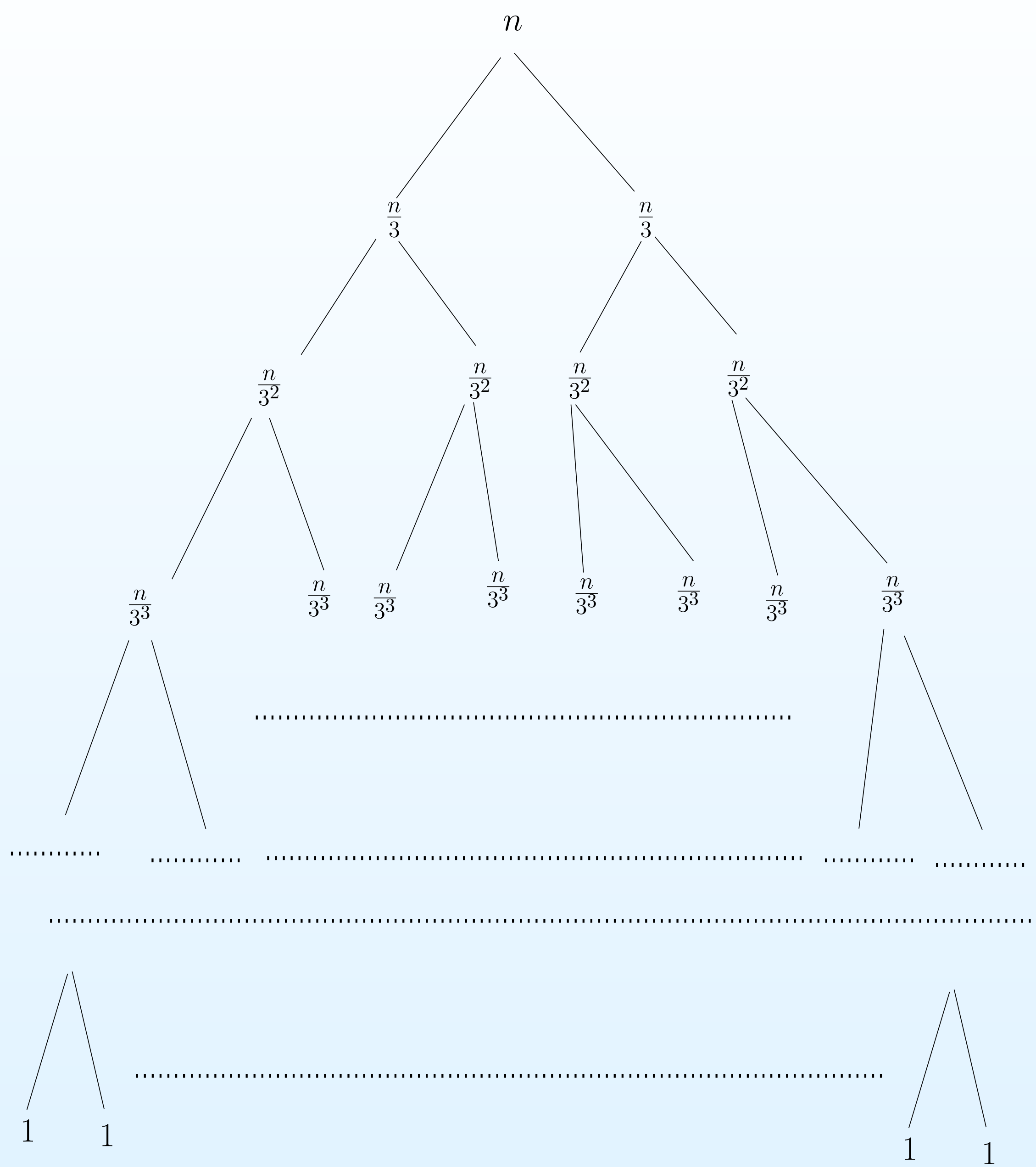
Δένδρο Αναδρομής



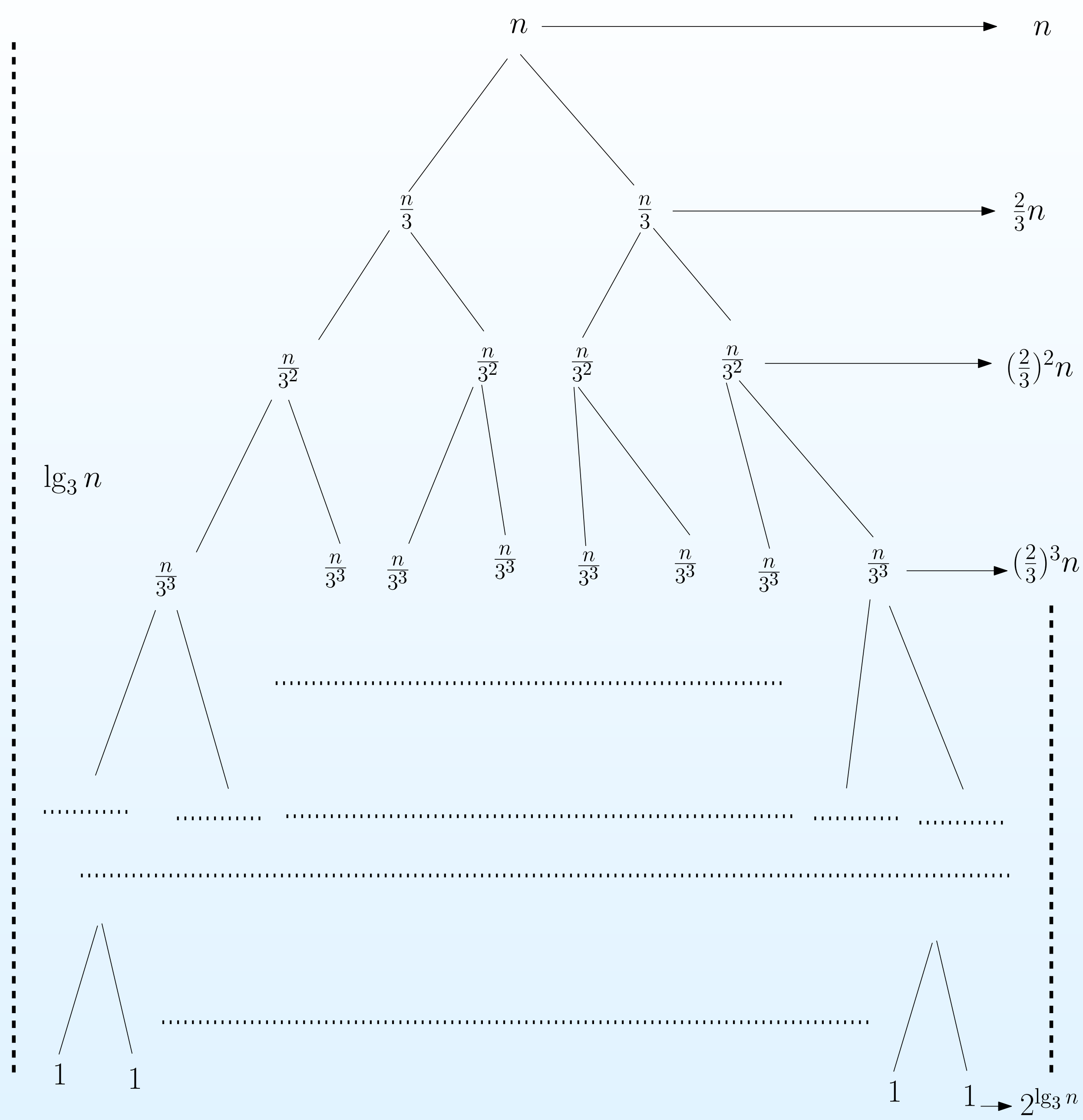
Δένδρο Αναδρομής



Δένδρο Αναδρομής



Δένδρο Αναδρομής



Παρατηρήσεις

- Το δένδρο είναι δυαδικό και πλήρες. Ο αριθμός των ακμών σε κάθε μονοπάτι από ένα φύλλο μέχρι την κορυφή (ύψος του δένδρου), έστω k είναι ίσο με τον αριθμό των διαιρέσεων του n με το 3 προκειμένου να φτάσουμε σε τιμή μικρότερη-ίση με 1, δηλαδή όταν

$$\frac{n}{3^k} \le 1 \Rightarrow n \le 3^k \Rightarrow k \ge \lg_3 n \Rightarrow$$
$$k = \lceil \lg_3 n \rceil, \tag{8}$$

  αφού k είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο σταματά η αναδρομική εκτέλεση
- Σε κάθε επίπεδο αθροίζουμε την τιμή των κόμβων. Στο τελευταίο επίπεδο ο αριθμός των φύλλων (άρα και ο αριθμός των 1) είναι $2^{\lceil \lg_3 n \rceil}$ αφού το δένδρο είναι δυαδικό ύψους $\lceil \lg_3 n \rceil$

Δένδρο Αναδρομής (συνέχ.)

Αθροίζοντας σε κάθε επίπεδο j έχουμε

$$
\begin{array}{ll}
(\frac{2}{3})^j \cdot n, & j = 0, \ldots, \lceil \lg_3 n \rceil - 1, \\
2^j, & j = \lceil \lg_3 n \rceil .
\end{array}
$$

Αθροίζοντας, για κάθε τιμη του δείκτη j, έχουμε

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n \sum_{k=0}^{\lceil \lg_3 n \rceil - 1} \left(\frac{2}{3}\right)^k + 2^{\lceil \lg_3 n \rceil} \\
&\leq n \sum_{k=0}^{(\lg_3 n + 1) - 1} \left(\frac{2}{3}\right)^k + 2^{(\lg_3 n + 1)} \\
&= n \sum_{k=0}^{\lg_3 n} \left(\frac{2}{3}\right)^k + 2 \cdot 2^{\lg_3 n}
\end{aligned}
$$

Email:dmagos@uniwa.gr

Δένδρο Αναδρομής (συνέχ.)

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k + 2 \cdot n^{\lg_3 2} \\
&= \frac{1}{1-\frac{2}{3}} n + 2n^{\lg_3 2} = 3n + 2n^{\lg_3 2} \\
&\leq 3n + 2n \Rightarrow \\
T(n) &\leq 5n. \Rightarrow \\
T(n) &= O(n).
\end{aligned}
$$

Παρατηρήσεις

Η χρήση του δένδρου αναδρομής αν και διαισθητική είναι κάπως δύσκολη στον υπολογισμό του συνολικού αριθμού των στοιχειωδών πράξεων. Στη συνέχεια θα δούμε ένα θεώρημα με τη βοήθεια του οποίου μπορούμε σε πολλές περιπτώσεις (ΟΧΙ ΣΕ ΟΛΕΣ) να υπολογίσουμε απευθείας τη μορφή της ασυμπτωτικής συνάρτησης που ακολουθεί ο αριθμός των στοιχειωδών πράξεων.

Θεώρημα

Έστω

$$T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n)$$

όπου $a \geq 1, b > 1, f(n)$ ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση. Τότε

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\lg_b a}), \text{ αν } f(n) = O(n^{\lg_b a - \epsilon}), \epsilon > 0, \\ \Theta(n^{\lg_b a} \lg n), \text{ αν } f(n) = \Theta(n^{\lg_b a}), \\ \Theta(f(n)), \text{ αν } f(n) = \Omega(n^{\lg_b a + \epsilon}), \epsilon > 0, \\ \qquad\qquad af(n/b) \leq cf(n), c < 1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 7 *Να δώσετε ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τις σχέσεις*

α) $T(n) = 8T(n/2) + n^2$,
β) $T(n) = 2T(n/4) + n^{1/2}$,
γ) $T(n) = 2T(n/3) + n$.

Παράδειγμα

α) $a = 8 = 2^3, b = 2, f(n) = n^2$. Είναι τετριμμένο ότι $n^2 = O(n^{3-\epsilon}), 1 \geq \epsilon \geq 0$ και $3 = \lg 2^3$. Επομένως,

$$f(n) = n^2 = O(n^{\lg 2^3 - \epsilon})$$

και άρα σύμφωνα με την πρώτη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος

$$T(n) = \Theta(n^3).$$

β) $a = 2, b = 4, f(n) = n^{1/2} = \Theta(n^{\lg_4 2})$. Άρα σύμφωνα με τη δεύτερη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος

$$T(n) = \Theta(n^{1/2} \lg n)$$

Παράδειγμα (συνεχ.)

γ) $a = 2, b = 3, f(n) = n$. Επειδή

$$n \geq n^{\lg_3 2+\epsilon}$$

όταν

$$1 \geq \lg_3 2 + \epsilon \Rightarrow 1 - \lg_3 2 \geq \epsilon \Rightarrow \lg_3 3 - \lg_3 2 \geq \epsilon \Rightarrow \lg_3 \frac{3}{2} \geq \epsilon.$$

Άρα

$$f(n) = \Omega(n^{\lg_3 2+\epsilon}) \text{ όταν } \lg_3 \frac{3}{2} \geq \epsilon \geq 0.$$

Επίσης

$$2 \cdot n/3 \leq c \cdot n \text{ για } 1 > c \geq 2/3.$$

Από τα παραπάνω και σύμφωνα με την τρίτη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος έχουμε

$$T(n) = \Theta(n).$$

Παρατηρήσεις

- Πολλές φορές είμαστε αναγκασμένοι να συμπληρώσουμε κάποια από τις τελευταίες τρεις μεθόδους που είδαμε με τη επαγωγή. Αυτό συμβαίνει, αν δεν μπορούμε να χειριστούμε με ακριβή τρόπο τη δοθείσα αναδρομική συνάρτηση: για παράδειγμα αν η συνάρτηση αναδρομικά εφαρμόζεται σε 'πάτωμα' (ή 'ταβάνι') κάποιας έκφρασης του n.
- Στις περιπτώσεις αυτές απλοποιούμε τις αναδρομικές συναρτήσεις απαλείφοντας τις εκφράσεις αυτές και χρησιμοποιώντας μία από τις τελευταίες τρεις μεθόδους καταλήγουμε στην ασυμπτωτική συμπεριφορά της απλοποιημένης συνάρτησης. Στη συνέχεια εικάζουμε ότι και η αρχικώς δοθείσα συνάρτηση έχει αντίστοιχη ασυμπτωτική συμπεριφορά και προσπαθούμε να το αποδείξουμε με τη χρήση επαγωγής.