Εισαγωγή
Ασκήσεις

Δημήτριος Μάγος

28 Μαρτίου 2023

Άσκηση 1. Θεωρούμε τις παρακάτω εξειδικεύσεις της εντολής **for**:

1. **for** $i \leftarrow m; i \leq n; i++$ **do**
2. **for** $i \leftarrow m; i \leq n; i \leftarrow i + a$ **do**
3. **for** $i \leftarrow 1; i \leq n; i \leftarrow i \cdot a$ **do**

Έστω ότι τα m, n, a είναι φυσικοί αριθμοί μεγαλύτεροι της μονάδας και $n \geq a$. Για κάθε μία από τις παραπάνω εξειδικεύσεις, να υπολογίσετε τον αριθμό των επαναλήψεων που θα εκτελεστούν καθώς και τον αριθμό τον ΣΥΒ που αφορούν τον δείκτη i.

Λύση.

1. Στην περίπτωση όπου $m \leq n$ ο αριθμός των επαναλήψεων είναι ίσος με $n - m + 1$ (όσο και το πλήθος των φυσικών στο σύνολο $\{m \ldots n\}$). Επομένως αυτός είναι ο αριθμός των επαναλήψεων που θα εκτελεστεί το block <εντολές>.

   Για κάθε επανάληψη έχουμε μία πρόσθεση και μία εκχώρηση $(i++)$, μια σύγκριση $(i \leq n)$. Άρα σε κάθε επανάληψη για τη δομή **for** εκτελούνται τρία ΣΥΒ· συνολικά λοιπόν $3(n-m+1)$ ΣΥΒ. Επίσης εκτελείται επιπλέον σύγκριση για την πρώτη φορά που το δείκτης i θα πάρει τιμή $n + 1$ και μία εκχώρηση για την αρχικοποίηση του δείκτη i στην τιμή m.

   Για την περίπτωση όπου $m > n$ το block <εντολές> δεν εκτελείται: γίνεται μόνο η αρχικοποίηση του δείκτη i στην τιμή m και μία σύγκριση $(i \leq n)$.

   Τελικά ο αριθμός των ΣΥΒ που αφορούν τον δείκτη i είναι ίσος με

   $$\begin{cases} 3(n-m+1)+2, m \leq n, \\ 2, m > n. \end{cases}$$

   Για παράδειγμα, ο αριθμός των ΣΥΒ που αφορούν τον δείκτη i στο βρόχο
   for $i \leftarrow 1; i \leq 3; i++$ **do**
   $\ldots$
   end for
   είναι ίσος με $3(3-1+1)+2 = 11$.

2. Αρχικώς θα θεωρήσουμε ότι $m \leq n$. Παρατηρούμε ότι ο δείκτης i στο τέλος της πρώτης επανάληψης λαμβάνει την τιμή $m + a$, στο τέλος της δεύτερης επανάληψης την τιμή $m + 2a$, κοκ. Έστω k η επανάληψη στο τέλος της οποίας, ο δείκτης i θα πάρει τιμή για την οποία $i > n$. Προφανώς

αυτή θα είναι η τελευταία επανάληψη του βρόχου **for**. Θέλουμε δηλαδή να υπολογίσουμε για ποια **ακέραια** τιμή k ισχύει

$$i = m + k \cdot a > n \Rightarrow k > \frac{n-m}{a}.$$

Δηλαδή, θέλουμε την μικρότερη ακέραια τιμή k η οποία είναι μεγαλύτερη (αυστηρά) από την ποσότητα $\frac{n-m}{a}$. Η τιμή αυτή είναι $k = \lfloor \frac{n-m}{a} \rfloor + 1$. Επομένως η τιμή αυτή δίνει τον αριθμό των επαναλήψεων που θα εκτελεστεί το block <εντολές>. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, ο αριθμός των ΣΥΒ που αφορούν τον δείκτη i είναι ίσος με

$$\begin{cases} 3\left(\lfloor \frac{n-m}{a} \rfloor + 1\right) + 2, m \leq n, \\ 2, m > n. \end{cases}$$

3. Παρατηρούμε ότι στο τέλος της πρώτης επανάληψης ο δείκτης i θα πάρει τιμή ίση με a, στο τέλος της δεύτερης επανάληψης θα πάρει τιμή ίση με a^2, κοκ. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, θέλουμε να βρούμε την μικρότερη τιμή για την οποία θα έχουμε $i > n$. Δηλαδή, θέλουμε την μικρότερη ακέραια τιμή k για την οποία

   $$a^k > n \Rightarrow k \log a > \log n \Rightarrow k > \frac{\log n}{\log a} = \log_a n.$$

   Η τιμή αυτή είναι $k = \lfloor \log_a n \rfloor + 1$ και επομένως αυτός είναι ο αριθμός των επαναλήψεων που θα εκτελεστούν. Ο αριθμός των ΣΥΒ που αφορούν τον δείκτη i είναι $3\left(\lfloor \log_a n \rfloor + 1\right) + 2$.

■

Άσκηση 2. Να εκπονήσετε έναν αλγόριθμο που να δέχεται σαν είσοδο έναν μηαρνητικό ακέραιο n και υπολογίζει τον μικρότερο ακέραιο k για τον οποίο ισχύει ότι $n \leq 2^k$. Να υπολογίσετε τον αριθμό των επαναλήψεων που εκτελεί ο αλγόριθμος.

Λύση. Ο Αλγόριθμος 1 είναι ο ζητούμενος. Παρατηρούμε ότι ο βρόχος εκτελείται μέχρι $r = 2^k \geq n$. Δηλαδή ο k είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο πρέπει να αληθεύει αυτή η ανισότητα. Έχουμε,

$$r = 2^k \geq n \Rightarrow \begin{cases} k \geq \lg n \Rightarrow k = \lceil \lg n \rceil & \text{αν } n > 1, \\ 0, & \text{αν } n \leq 1. \end{cases}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι το k είναι ακέραιος. ■

Αλγόριθμος 1 Μικρότερο k που ικανοποιεί τη σχέση $n \leq 2^k$.

Απαιτείται: Μη-αρνητικός ακέραιος n

Επιστρέφεται: Μικρότερος ακέραιος k για τον οποίο $n \leq 2^k$.

```
function Small_k(int n)
    k ← 0;
    r ← 1;
    while r < n do
        r ← 2r;
        k++;
    end while
    return k;
end function
```

Αλγόριθμος 2 Διψήφιοι ακέραιοι με κανένα ίδιο ψηφίο

Απαιτείται:

Επιστρέφεται: Ακέραιοι από 10 ως 99 με διαφορετικά ψηφία

```
1:  function NeqDigits
2:      for i ← 1; i ≤ 9; i++ do
3:          for j ← 0; j ≤ 9; j++ do
4:              if i ≠ j then
5:                  num ← 10 · i + j;
6:                  Output num;
7:              end if
8:          end for
9:      end for
10: end function
```

Άσκηση 3. Να εκπονήσετε έναν αλγόριθμο που να τυπώνει τους διψήφιους ακεραίους με κανένα ίδιο ψηφίο. Να υπολογίσετε τον αριθμό των ΣΥΒ που εκτελεί ο αλγόριθμος.

Λύση. Ο Αλγόριθμος 2 είναι ο ζητούμενος. Σε κάθε επανάληψη των γραμμών 4-6 εκτελούνται 4 ΣΥΒ αν τα ψηφία διαφέρουν και 1 ΣΥΒ αν τα ψηφία είναι ίδια. Ο αριθμός των επαναλήψεων για τον εσωτερικό βρόχο είναι ίσος με 10. Από τις επαναλήψεις αυτές σε μία μόνο έχουμε ίδια ψηφία. Επομένως ο συνολικός αριθμός των ΣΥΒ για τις 10 επαναλήψεις που εκτελούνται στις γραμμές 4 ως 6 είναι ίσος με $9 \cdot 4 + 1 = 37$.
Ο αριθμός των ΣΥΒ της δομής **for** που αφορούν τον δείκτη j είναι $3 \cdot 10 + 2 = 32$. Επομένως ο αριθμός των ΣΥΒ που εκτελούνται από τη γραμμή 3 έως την 7 είναι $32 + 37 = 69$.
Επομένως 69είναι ο αριθμός των ΣΥΒ που εκτελούνται για κάθε επανάληψη του

εξωτερικού βρόχου. Ο αριθμός των επαναλήψεων του εξωτερικού βρόχου είναι ίσος με $9 - 1 + 1 = 9$ (Άσκηση 1). Επίσης αριθμός των ΣΥΒ της δομής **for** που αφορούν τον δείκτη i είναι $3 \cdot 9 + 2 = 29$. Ο συνολικός αριθμός των ΣΥΒ του Αλγόριθμου 2 είναι $9 \cdot 69 + 29 = 650$. ■

Άσκηση 4. Να εκπονήσετε έναν αλγόριθμο οποίος να δέχεται σαν είσοδο μη αρνητικούς ακέραιους n, m, όπου $n \geq m > 0$, και να υπολογίζει το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του n με το m εκτελώντας μόνο προσθέσεις και αφαιρέσεις. Πόσα ΣΥΒ εκτελεί ο αλγόριθμος σας;

Λύση. Ο Αλγόριθμος 3 είναι ο ζητούμενος.

Αλγόριθμος 3 $n \operatorname{div} m, n \bmod m$ μόνο με προθέσεις και αφαιρέσεις

Απαιτείται: Μη-αρνητικοί ακέραιοι n, m με $n \geq m > 0$.
Επιστρέφεται: $k = n \operatorname{div} m, d = n \bmod m$ μόνο με προθέσεις και αφαιρέσεις.

```
1: function Division_n_m(int n, int m)
2:     d ← n;
3:     k ← 0;
4:     while d ≥ m do
5:         k++;
6:         d ← d − m;
7:     end while
8:     Output k, d;
9: end function
```

Όπως είναι γνωστό αν $k, d \in$ είναι το πηλίκο και το υπόλοιπο, αντίστοιχα, της διαίρεσης του n με τον m τότε

$$n = k \cdot m + d \Rightarrow \frac{n}{m} = k + \frac{d}{m}.$$

Επειδή $m - 1 \geq d \geq 0 \Rightarrow 1 > \frac{d}{m} \geq 0$ και k ακέραιος, η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι $k = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$. Επομένως αυτός είναι ο αριθμός των επαναλήψεων του βρόχου στον Αλγόριθμο 3. Σε κάθε επανάληψη εκτελούνται 4 ΣΥΒ. Επίσης στον έλεγχο του βρόχου εκτελούνται συνολικά $k + 1$ συγκρίσεις. Προσθέτοντας και τις δύο εκχωρήσεις που γίνεται για την αρχικοποίηση των μεταβλητών στις γραμμές 2 και 3, έχουμε ότι ο συνολικός αριθμός των ΣΥΒ του αλγόριθμου είναι ίσος με

$$4\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + \lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1 + 2 = 5\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 3.$$

■

Αλγόριθμος 4

Απαιτείται: ακέραιος n
Επιστρέφεται: ακέραιος r

function Guess01(`int` n)
  $r \leftarrow 0;$
  for $i \leftarrow 1; i \leq n-1; i++$ **do**
    for $j \leftarrow i+1; j \leq n; j++$ **do**
      for $k \leftarrow 1; k \leq j; k++$ **do**
        $r++;$
      end for
    end for
  end for
  return $r;$
end function

Αλγόριθμος 5

Απαιτείται: ακέραιος n
Επιστρέφεται: ακέραιος r

function Guess02(`int` n)
  $r \leftarrow 0;$
  for $i \leftarrow 1; i \leq n; i++$ **do**
    for $j \leftarrow 1; j \leq i; j++$ **do**
      for $k \leftarrow j; k \leq i+j; k++$ **do**
        $r++;$
      end for
    end for
  end for
  return $r;$
end function

Άσκηση 5. Να υπολογίσετε την τιμή που επιστρέφει η συνάρτηση που περιγράφεται στον Αλγόριθμο 4 και στον Αλγόριθμο 5.

Λύση. Η τιμή της μεταβλητής r στον Αλγόριθμο 4 δίνεται από την έκφραση

$$\begin{aligned}
r &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=1}^{j} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} j \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{i} j) = \sum_{i=1}^{n-1} (\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{2} - \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i) \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)}{2} - \frac{1}{2}(\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}) \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}(\frac{2n-1}{6} + \frac{1}{2}) \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n+1)}{6} = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1).
\end{aligned}$$

Η τιμή της μεταβλητής r στον Αλγόριθμο 4 δίνεται από την έκφραση

$$\begin{aligned}
r &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=j}^{i+j} 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} [(i+j) - j + 1] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} (i+1) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{j=1}^{i} 1) = \sum_{i=1}^{n} (i^2 + i) \\
&= (\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}) + (\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}) \\
&= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 2n).
\end{aligned}$$

∎

Άσκηση 6. Να υπολογίσετε τον αριθμό των ΣΥΒ που εκτελούνται από τον Αλγόριθμο 4.

Λύση. Στη Γραμμή 6 του αλγόριθμου εκτελούνται 2 ΣΥΒ. Ο αριθμός των επαναλήψεων του βρόχου των γραμμών 5-7 είναι ίσος με j - επομένως ο συνολικός αριθμός των ΣΥΒ που εκτελείται εσωτερικά του βρόχου είναι $2j$ (δες Άσκηση 1). Στον έλεγχο του βρόχου, σε σχέση με τον δείκτη k, εκτελούνται $3j + 2$ ΣΥΒ (δες Άσκηση 1). Επομένως ο συνολικός αριθμός των ΣΥΒ του εσωτερικού βρόχου είναι

$$A(j) = 2j + 3j + 2 = 5j + 2.$$

Ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτελούνται από το βρόχο των γραμμών 4-8 είναι ίσος με $n - i$. Ο συνολικός αριθμός των ΣΥΒ που εκτελούνται εσωτερικά του βρόχου είναι ίσος με $\sum_{j=1}^{n-i} A(j)$. Επίσης σε σχέση με τον δείκτη j στον έλεγχο του βρόχου εκτελούνται $3(n - i) + 2$ ΣΥΒ. Ο συνολικός αριθμός των ΣΥΒ του βρόχου είναι

$$B(i) = \sum_{j=1}^{n-i} A(j) + 3(n-i) + 2 = \sum_{j=1}^{n-i} (5j + 2) + 3(n-i) + 2.$$

Ο αριθμός των επαναλήψεων του εξωτερικού βρόχου είναι ίσος με $n - 1$. Άρα ο συνολικός αριθμός των ΣΥΒ που εκτελούνται εσωτερικά του βρόχου είναι ίσος με $\sum_{i=1}^{n-1} B(i)$. Σε σχέση με τον δείκτη i στον έλεγχο του βρόχου εκτελούνται $3(n - 1) + 2$ ΣΥΒ. Επίσης εκτελείται μία εκχώρηση στη γραμμή 2. Ο συνολικός αριθμός των ΣΥΒ του αλγόριθμου είναι ίσος με

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} B(i) + 3(n-1) + 2 + 1 &= \\
\sum_{i=1}^{n-1}(\sum_{j=1}^{n-i}(5j+2) + 3(n-i) + 2) + 3n &= \\
\sum_{i=1}^{n-1}(5\sum_{j=1}^{n-i} j + 2(n-i) + 3(n-i) + 2) + 3n &= \\
\sum_{i=1}^{n-1}(5\frac{(n-i+1)(n-i)}{2} + 5(n-i) + 2) + 3n &= \\
\sum_{i=1}^{n-1}(\frac{5(n-i)^2}{2} + \frac{5(n-i)}{2} + 5(n-i) + 2) + 3n &= \\
\frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 + \frac{15}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) + 2(n-1) + 3n &= \\
\frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(n^2 - 2ni + i^2) + \frac{15}{2}(n(n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} i) + 5n - 2 &= \\
\frac{5}{2}(n^2(n-1) - 2n\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}) + \frac{15n(n-1)}{4} + 5n - 2 &= \\
\frac{5(n-1)n(2n-1)}{12} + \frac{15n(n-1)}{4} + 5n - 2 &= \\
5n(n-1)(\frac{2n-1}{12} + \frac{3}{4}) + 5n - 2 = \frac{5n(n-1)(n+4)}{6} &+ 5n - 2
\end{aligned}
$$

■

Άσκηση 7. Έστω n, a φυσικοί αριθμοί μεγαλύτεροι της μονάδας. Να υπολογίσετε το πλήθος των επαναλήψεων του βρόχου

for $t \leftarrow n; t \geq 1; t \leftarrow \lfloor \frac{t}{a} \rfloor$ **do**
…
end for

Λύση. Παρατηρούμε ότι στο τέλος της πρώτης επανάληψης η τιμή του δείκτη t γίνεται $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor$, στο τέλος της δεύτερης επανάληψης γίνεται $\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor}{a} \rfloor = \lfloor \frac{n}{a^2} \rfloor$, κοκ. Άρα στην τελευταία επανάληψη, έστω k, θα πρέπει η τιμή του δείκτη t να είναι μηδέν. Άρα θα πρέπει να βρούμε τη μικρότερη ακέραια τιμή k για την οποία

$$\frac{n}{a^k} < 1 \Rightarrow n < a^k \Rightarrow \lg n < k \lg a \Rightarrow \log_a n < k.$$

Η τιμή που αναζητείται είναι $k = \lfloor \log_a n \rfloor + 1$. ■

Άσκηση 8. Έστω φυσικοί n, m με $n \geq m > 1$. Να υλοποιήσετε σε ψευδοκώδικα τον αλγόριθμο του Ευκλείδη ο οποίος υπολογίζει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών αυτών. Να βρείτε ένα άνω φράγμα στον αριθμό των επαναλήψεων που εκτελεί ο αλγόριθμος.

Λύση. Η ζητούμενη κωδικοποίηση παρουσιάζεται στον Αλγόριθμο 6. Παρατη-

Αλγόριθμος 6 n div m, n mod m μόνο με προθέσεις και αφαιρέσεις

Απαιτείται: Μη-αρνητικοί ακέραιοι n, m με $n \geq m > 1$.
Επιστρέφεται: Μέγιστος κοινός διαιρέτης των n, m.

1: **function** ΜΚΔ(`int` n, `int` m)
2:     $a \leftarrow n$;
3:     $b \leftarrow m$;
4:     **while** $b > 0$ **do**
5:         $r \leftarrow a$ mod b;
6:         $a \leftarrow b$;
7:         $b \leftarrow r$;
8:     **end while**
9:     **return** a;
10: **end function**

ρούμε ότι

$$r < \frac{a}{2}. \tag{1}$$

Για να το δείξουμε αυτό θεωρούμε τις περιπτώσεις (α) $b \leq \frac{a}{2}$ και (β) $b > \frac{a}{2}$. Στην περίπτωση (α) επειδή $0 < r \leq b - 1$ το ζητούμενο ισχύει. Στην περίπτωση (β) $r = a - b < \frac{a}{2}$ άρα πάλι το ζητούμενο ισχύει.
Παρατηρούμε ότι η η συνθήκη του βρόχου στη Γραμμή 4 μπορεί να γραφτεί λιγότερο αυστηρά ως $a \cdot b > 0$. Δηλαδή αντί να εξετάσουμε πως διαμορφώνεται η τιμή της μεταβλητής b σε κάθε επανάληψη - κάτι που δεν είναι τόσο προφανέςθα διερευνήσουμε το πως διαμορφώνεται η τιμή του γινομένου $a \cdot b$.

Παρατήρηση 1. Από τον Αλγόριθμο 6 παρατηρούμε ότι σε κάθε επανάληψη η τιμή της μεταβλητής b (της προηγούμενης επανάληψης) εκχωρείται στην a και η τιμή της r (που υπολογίστηκε από τις τιμές των a, b της προηγούμενης επανάληψης) στη b.

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (1) με b έχουμε

$$b \cdot r < \frac{1}{2}(a \cdot b).$$

Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με την Παρατήρηση 1 μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το γινόμενο $a \cdot b$ μειώνεται σε λιγότερο από το μισό σε κάθε επανάληψη. Μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε την επανάληψη, έστω k, κατά την οποία το γινόμενο ab γίνεται ίσο με μηδέν - αυτή θα είναι η τελευταία επανάληψη του βρόχου της Γραμμής 4. Επειδή οι μεταβλητές a, b αρχικοποιούνται στις τιμές των n, m, αντίστοιχα, η τιμή k είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει

$$\lfloor\frac{n \cdot m}{2^k}\rfloor = 0 \Rightarrow \frac{n \cdot m}{2^k} < 1 \Rightarrow n \cdot m < 2^k \Rightarrow$$
$$\lg n + \lg m < k \Rightarrow k = \lfloor \lg n + \lg m \rfloor + 1.$$

Επομένως η τιμή αυτή μας δίνει ένα άνω φράγμα στον αριθμό των επαναλήψεων του βρόχου της Γραμμής 4. Αυτή η τιμή του k αποτελεί φράγμα γιατί

- η τιμή του γινομένου $a \cdot b$ αποτελεί προσέγγιση (από τα επάνω) της τιμής της μεταβλητής b βάσει της οποίας γίνεται ο έλεγχος του βρόχου στη Γραμμή 4,
- η τιμή του γινομένου $a \cdot b$ σε κάποια επανάληψη μπορεί να μειώνεται (από την τιμή του γινομένου στην προηγούμενη επανάληψη) αρκετά περισσότερο από το μισό.

■