# Κεφάλαιο 13

# Παράρτημα

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται μία σύντομη παρουσίαση μαθηματικών εργαλείων που είναι χρήσιμα για την ανάλυση των αλγορίθμων. Η παράμετρος $n$ όπου εμφανίζεται στη συνέχεια συμβολίζει φυσικό αριθμό διάφορο του μηδενός.

## 13.1 Σύνολα

Ένα σύνολο είναι μία συλλογή στοιχείων. Έτσι αν $A$ είναι ένα σύνολο με στοιχεία τους αριθμούς 1,5, γράφουμε $A = \{1, 5\}$. Δεν υπάρχει συγκεκριμένη σειρά με την οποία παρατίθενται τα στοιχεία ενός συνόλου· στο παραπάνω παράδειγμα, το σύνολο $A$ μπορεί να αποτυπωθεί και σαν $\{5, 1\}$. Ο αριθμός των στοιχείων ενός συνόλου $X$ συμβολίζεται με $|X|$. Στο παραπάνω παράδειγμα, $|A| = 2$.

## 13.2 Συναρτήσεις

Μία συνάρτηση είναι μια αντιστοίχιση μεταξύ δύο συνόλων, που καλούνται σύνολο ορισμού και σύνολο τιμών, κατά την οποία ΚΑΘΕ ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού αντιστοιχίζεται σε ΕΝΑ ΚΑΙ ΜΟΝΟ στοιχείο του πεδίου τιμών. Αν $f$ είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $A$ και πεδίο τιμών το σύνολο $B$ γράφουμε

$$f : A \to B. \tag{13.1}$$

Έστω συνάρτηση $f$ όπως ορίστηκε στην (13.1) και $a_1, a_2 \in A$ με $a_1 > a_2$. Η συνάρτηση $f$ λέγεται *γνησίως* αύξουσα (φθίνουσα) αν $f(a_1) > f(a_2)$ ($f(a_1) < f(a_2)$). Αν στην προηγούμενη πρόταση περιλάβουμε σε όλους τους τελεστές και το $=$ τότε η $f$ ονομάζεται *μονότονα* αύξουσα (φθίνουσα)
Στα πλαίσια της ανάλυση, κατά περίπτωση θα χρησιμοποιηθούν όρια, παράγωγοι και ολοκληρώματα συναρτήσεων. Για καθένα από αυτά Θα υιοθετηθούν οι συνήθεις συμβολισμοί με μικρή παρέκκλιση για λόγους απλότητας: αντί του πληρέστερου $\lim_{x\to\infty} f(x)$ θα γράφουμε $\lim f(x)$.

## 13.3 Δυνάμεις

Για $x \neq 0$ και $x, y$ πραγματικούς ισχύουν οι βασικές ιδιότητες

$$x^0 = 1, \quad x^1 = x, \quad x^-1 = \frac{1}{x}, \quad x^y x^z = x^{y+z},$$
$$(x^y)^z = x^{yz} = (x^z)^y, \quad \sqrt[z]{x^y} = x^{\frac{y}{z}}.$$

Για πραγματικές σταθερές $x > 1, y$ ισχύει ότι

$$\lim \frac{n^y}{x^n} = 0. \tag{13.2}$$

Για τον αριθμό $\mathrm{e} = 2,71828\ldots$ και κάθε πραγματικό $x$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathrm{e}^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \tag{13.3}$$

$$\mathrm{e}^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x, \tag{13.4}$$

$$\mathrm{e}^x \leq 1 + x + x^2, \quad \text{για } |x| \leq 1. \tag{13.5}$$

## 13.4 Λογάριθμοι

Λογάριθμος ενός πραγματικού αριθμού $x > 0$ με βάση τον πραγματικό αριθμό $b > 0, b \neq 1$, συμβολικά $\log_b x$, είναι ο πραγματικός αριθμός $y$ τέτοιος ώστε $b^y = x$.

Όταν εμφανίζεται ο λογάριθμος μέσα σε μία παράσταση τότε έχει σαν όρισμα τον πρώτο όρο που εμφανίζεται αμέσως μετά. Για παράδειγμα, ο συμβολισμός $\log_b x + z$ υποδηλώνει $(\log_b x) + z$. Περαιτέρω συμβάσεις που ακολουθούνται στο συμβολισμό δηλώνονται από τις ακόλουθες ισότητες

$$\lg n = \log_2 n \quad \text{(δυαδικός λογάριθμος)},$$
$$\ln n = \log_{\mathrm{e}} n \quad \text{(φυσικός λογάριθμος)},$$
$$\log n = \log_{10} n \quad \text{(δεκαδικός λογάριθμος)},$$
$$\lg^k n = (\lg n)^k \quad \text{(υψωση σε δύναμη)},$$
$$\lg \lg n = \lg(\lg n) \quad \text{(σύνθεση)}$$

Βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων απεικονίζονται στη συνέχεια.

$$a = b^{\log_b a}, \quad \log_b ac = \log_b a + \log_b c, \quad \log_b a^c = c \log_b a,$$
$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}, \quad \log_b a = \frac{1}{\log_b a}, \quad a^{\log_b c} = c^{\log_b a},$$

όπου $a, b, c$ θετικοί πραγματικοί αλλά και μεγαλύτεροι της μονάδας όταν χρησιμοποιούνται σαν βάσεις λογαρίθμων στις παραπάνω εκφράσεις. Επιπλέον για το νεπέριο λογάριθμο ισχύουν οι σχέσεις

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad \text{για } |x| < 1, \tag{13.6}$$

$$\frac{x}{1 - x} \leq \ln(1 + x) \leq x, \quad \text{για } x > -1. \tag{13.7}$$

Οι παράγωγοι ως προς μία πραγματική μεταβλητή $x$ όταν αυτή εμφανίζεται σαν όρισμα σε λογάριθμο ή εκθέτης με βάση μία σταθερά $a$ δίνεται από τους τύπους

$$\frac{\mathrm{d}\log_b x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x\ln b}, \qquad \frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = a^x \ln x.$$

Επίσης ισχύει για συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}\ln f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Οι συναρτήσεις $x^n$ και $\log_b n$ είναι μονότονα αύξουσες σε σχέση με το $n$.

Επίσης

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c, \qquad \int \ln x dx = x\ln x - x + c$$

όπου $c$ σταθερά.

## 13.5 Πολυώνυμα

Δοθέντος ενός ακεραίου $d$, μία συνάρτηση της μορφής

$$f(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

είναι ένα πολυώνυμο του $n$ βαθμού $d$, όπου $a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0$ σταθερές και $a_d \neq 0$. Ένα πολυώνυμο είναι *ασυμπτωτικά θετικό* όταν $a_d > 0$.

## 13.6 Ταβάνια και Πατώματα

Δεδομένου ενός πραγματικού αριθμού $x$, το *πάτωμα* του $x$, ονομαστικά $\lfloor x \rfloor$, ορίζεται σαν ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος-ίσος με τον $x$. Αντίστοιχα, το το *ταβάνι* του $x$, ονομαστικά $\lceil x \rceil$, ορίζεται σαν ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος-ίσος με τον $x$. Για τις συναρτήσεις αυτές ισχύουν οι εξής σχέσεις ($a, b$ θετικοί ακέραιοι):

$$x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil \leq x + 1, \tag{13.8}$$

$$\frac{a-b+1}{b} \leq \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \leq \frac{a}{b} \leq \lceil \frac{a}{b} \rceil \leq \frac{a+b-1}{b}, \tag{13.9}$$

$$\lfloor \lfloor n/a \rfloor / b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor, \tag{13.10}$$

$$\lceil \lceil n/a \rceil / b \rceil = \lceil n/ab \rceil, \tag{13.11}$$

$$\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n, \tag{13.12}$$

$$a \bmod n = a - n\lfloor \frac{a}{n} \rfloor. \tag{13.13}$$

## 13.7 Αναπαράσταση ακεραίων

Ο αριθμός των bits για να αναπαρασταθεί ένας ακέραιος $a \in \mathbb{Z}$ είναι

$$1 + \lceil \lg(|a| + 1) \rceil, \tag{13.14}$$

όπου ένα bit χρησιμοποιείται για το πρόσημο. Αν $a > 0$, μπορούμε να παραλείψουμε το bit του προσήμου και επομένως ο αριθμός των bits γίνεται

$$\lceil \lg(a+1) \rceil = \lfloor \lg a \rfloor + 1, \tag{13.15}$$

Η απόδειξη για την (13.15) είναι σχετικά απλή: θεωρούμε $m = \lg a$ και επομένως

$$m \le \lg a < m+1 \Leftrightarrow 2^m \le a < 2^{m+1} \Leftrightarrow 2^m < a+1 \le 2^{m+1}$$

και επειδή $a$ είναι ακέραιος, η παραπάνω σχέση συνεπάγεται

$$m < \lg(a+1) \le m+1 \Rightarrow \lceil \lg(a+1) \rceil = m+1 = \lfloor a \rfloor + 1.$$

## 13.8 Αθροίσματα

Βασικές ισότητες αθροισμάτων είναι οι ακόλουθες

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{13.16}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \tag{13.17}$$

Όταν ο δείκτης ως προς τον οποίο αθροίζουμε εμφανίζεται στον εκθέτη και η βάση $x$ είναι πραγματικός με $x \neq 1$, έχουμε

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{1-x^n}{1-x}, \quad n > 0, \tag{13.18}$$

$$\sum_{i=m}^{n-1} x^i = \frac{x^m - x^n}{1-x}, \quad 0 \le m < n, \tag{13.19}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1, \tag{13.20}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1. \tag{13.21}$$

Μια γεωμετρική σειρά με λόγο $r \neq 0$, αποτελείται από τους όρους $a$, $ar$, $ar^2$, $ar^3, \ldots$, όπου $a$ είναι ο πρώτος όρος της σειράς. (Παρατηρήστε ότι ο λόγος δυο διαδοχικών όρων της σειράς είναι $r$). Για $r \neq 1$, έχουμε τα αθροίσματα

$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \tag{13.22}$$

$$\sum_{i=m}^{n} ar^{i-1} = \frac{a(r^m - r^{n-1})}{1-r}, \tag{13.23}$$

$$\sum_{i=0}^{n} ar^{2i} = \frac{a(1-r^{2n+2})}{1-r^2}, \tag{13.24}$$

$$\sum_{i=0}^{n} ar^{2i+1} = \frac{ar(1-r^{2n+1})}{1-r^2}. \tag{13.25}$$

Δεδομένου ενός αθροίσματος $\sum_{i=0}^{n} a_i$, αν ισχύει, για κάποιο $r < 1$, ότι

$$a_{k+1}/a_k \leq r, \quad \text{για } k \in \{0, \ldots, n-1\},$$

τότε επίσης ισχύει

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} a_0 r^i = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} r^i = a_0 \frac{1}{1-r}. \tag{13.26}$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων μπορούμε να φράξουμε αθροίσματα σειρών.

**Παράδειγμα 42.** Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα στο άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}.$$

Το άθροισμα αποτελείται από τους όρους

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{3}{8}, \quad a_4 = \frac{4}{16}, \quad \cdots$$

Υπολογίζουμε το λόγο δυο διαδοχικών όρων $a_{i+1}/a_i$, δηλαδή

$$r_i = \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{i+1}{2i}.$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω λόγος είναι φθίνουσα συνάρτηση της μεταβλητής $i$, δηλαδή $r_i > r_{i+1}$. Ο λόγος αυτός παίρνει τιμή μικρότερη του $1$, για πρώτη φορά, για $i = 2$. Συγκεκριμένα, για $i = 2$ η τιμή του λόγου γίνεται $r_2 = r = 3/4$. Άρα

$$\begin{aligned}
&a_3 = r_2 a_2 = \frac{3}{4} a_2,\\
&a_4 = r_3 a_3 = r_3 r_2 a_2 < (r_2)^2 a_2 = (3/4)^2 a_2,\\
&a_5 = r_4 a_4 = r_4 r_3 r_2 a_2 < (r_2)^3 a_2 = (3/4)^3 a_2,\\
&\cdots
\end{aligned}$$

Επομένως, αφού $a_2 = 1/2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} =& 1 + \sum_{i=3}^{n} \frac{i}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^i\\
&\leq 1 + 1/2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 1 + 2 = 3.
\end{aligned}$$

Με διαφορετικό τρόπο μπορούμε να βρούμε ακριβώς την τιμή του παραπάνω αθροίσματος. Όμως εκεί που αυτό δεν είναι δυνατό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω μέθοδο για να υπολογίσουμε ένα φράγμα πάνω σε αυτή την τιμή.

Επίσης παρατηρούμε ότι αν $r < 1$ οι όροι της σειράς $\sum_{i=0}^{\infty} ar^i$ γίνονται όλο και μικρότεροι· από την (13.20) έχουμε

$$\sum_{i=0}^{\infty} ar^i = \frac{a}{1-r}, |r| < 1. \tag{13.27}$$

Για $r \geq 1$, η παραπάνω σειρά δεν συγκλίνει ενώ για $r = -1$ η σειρά ταλαντώνεται ανάμεσα σε δύο τιμές.

Για τον αρμονικό αριθμό $H_n$ ισχύει ότι

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + c, \tag{13.28}$$

όπου $c > 0$.

## 13.9 Δυωνυμικοί Συντελεστές

Μία άλλη κατηγορία αθροισμάτων είναι αυτή που περιλαμβάνει τους *δυωνυμικούς* συντελεστές. Συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε $n$ διακριτά αντικείμενα. Ο αριθμός των διαφορετικών *διατάξεων* τους (σε μία ευθεία) είναι $n!$. Ο αριθμός των διαφορετικών διατάξεων επιλέγοντας $k$ από τα $n$ είναι

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

ενώ ο αριθμός των *συνδυασμών* των $n$ ανά $k$ είναι

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (1)}.$$

Οι συνδυασμοί που δίνονται από τον τελευταίο τύπο για κάθε τιμή του $k$ από 1 έως $n$ ονομάζονται δυωνυμικοί συντελεστές. Ισχύουν τα παρακάτω όρια

$$\binom{n}{k} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k, \tag{13.29}$$

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \left(\frac{\mathrm{e}n}{k}\right)^k. \tag{13.30}$$

Οι κυριότερες ταυτότητες αθροισμάτων που περιλαμβάνουν δυωνυμικούς συντελεστές είναι

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \tag{13.31}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \tag{13.32}$$

όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Από την τελευταία σχέση, αν θέσουμε x=y=1, έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \tag{13.33}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k. \tag{13.34}$$

## 13.10 Όρια

Στους επόμενους ορισμούς θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**Ορισμός 6.** Το όριο της συνάρτησης $f(x)$ καθώς η μεταβλητή $x$ τείνει σε μία τιμή $a$ είναι μία τιμή $L$, αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - L| < \epsilon$ όποτε $0 < |x - a| < \delta$.

Το παραπάνω όριο γράφεται ως

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Ο Ορισμός 6 εξειδικεύεται παρακάτω στις περιπτώσεις όπου είτε η μεταβλητή $x$ τείνει σε μία πολύ μεγάλη τιμή ή το όριο της συνάρτησης είναι ίσο με μια πολύ μεγάλη τιμή.[1]

**Ορισμός 7.** Το όριο μίας συνάρτησης $f(x)$ καθώς η μεταβλητή $x$ τείνει στο άπειρο είναι μία τιμή τιμή $L$, αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $|f(x) - L| < \epsilon$ όποτε $x > \delta$.

Το παραπάνω όριο γράφεται ως

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Ο παραπάνω ορισμός δεν πρέπει να συγχέεται με τον παρακάτω.

**Ορισμός 8.** Το όριο της συνάρτησης $f(x)$ είναι άπειρο όταν η μεταβλητή $x$ τείνει σε μία τιμή $a$, αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > \epsilon$ όποτε $0 < |x - a| < \delta$.

Το παραπάνω όριο γράφεται ως

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Ο επόμενος ορισμός προκύπτει από συνδυασμό των δύο προηγουμένων.

**Ορισμός 9.** Το όριο μίας συνάρτησης $f(x)$ είναι άπειρο καθώς η μεταβλητή $x$ τείνει στο άπειρο αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) > \epsilon$ όποτε $x > \delta$.

[1] Ως πολύ μεγάλη τιμή νοείται μία τιμή μεγαλύτερη από οποιαδήποτε άλλη. Συνήθως η τιμή αυτή καλείται «άπειρο» και συμβολίζεται με $\infty$

## 13.11 Ασυμπτωτικές ταυτότητες

Ισχύουν οι παρακάτω ασυμπτωτικές ταυτότητες

$$\sum_{i=1}^{n} i^c = \Theta(n^{c+1}), c > -1, \tag{13.35}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Theta(\ln n), \tag{13.36}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c^i = \Theta(c^n), c > 1, \tag{13.37}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \log i^c = \Theta(n \cdot \log n^c), c \geq 0, \tag{13.38}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^d \cdot \log i^c = \Theta(n^{d+1} \cdot \log n^c), c, d \geq 0, \tag{13.39}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b^i \cdot i^d \cdot \log i^c = \Theta(n^d \cdot b^n \cdot \log n^c), c, d \geq 0, b > 1. \tag{13.40}$$

## 13.12 Επαγωγή

Μία αποδεικτική διαδικασία που χρησιμοποιείται αρκετά συχνά στην ανάλυση των αλγορίθμων είναι η μέθοδος της *επαγωγής*. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μία πρόταση $P(n)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό $n$. Η απόδειξη με τη χρήση επαγωγής μπορεί να γίνει ώς εξής.

- *Βάση Επαγωγής:* Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για μία 'μικρή' τιμή, έστω $a$, της $n$ (π.χ. $n = 0$ ή $n = 1$ ή $n = 2$, ...)
- *Επαγωγική υπόθεση:* Θεωρούμε ότι ισχύει για μία τιμή $n = k(k > a)$. Δηλαδή θεωρούμε ότι ισχύει η $P(k)$.
- *Επαγωγικό Βήμα:* Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει $P$ για μία τιμή $n = k+1$. Δηλαδή θα πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει $P(k+1)$ χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση και τη Βάση της επαγωγής.

**Παράδειγμα 43.** Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε την ισότητα που αποτυπώσαμε προηγουμένως

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- *Βάση Επαγωγής:* Η πρόταση ισχύει για $n = 1$, αφού

$$0 + 1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

- *Επαγωγική Υπόθεση:* Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = k, (k > 1)$. Δηλαδή,

$$\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}. \tag{13.41}$$

- *Επαγωγικό Βήμα:* Θα πρέπει να δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k + 1$. Όντως,

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \sum_{i=0}^{k} i + k + 1$$

Χρησιμοποιώντας την (13.41) έχουμε

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Η μέθοδος όπως περιγράφηκε προηγουμένως ονομάζεται μέθοδος της *ασθενούς* επαγωγής. Μια ισοδύναμη παραλλαγή της μεθόδου αποτελεί η μέθοδος της ισχυρής επαγωγής. Η διαφορά βρίσκεται στη διατύπωση της επαγωγικής υπόθεσης. Στο σημείο αυτό θεωρούμε ότι υπάρχει τιμή $k$ για την οποία η πρόταση $P$ ισχύει για ΚΑΘΕ $n \leq k$.

**Παράδειγμα 44.** Ένας ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας καλείται *πρώτος* αν διαιρείται αποκλειστικά και μόνο με τον εαυτό του και τη μονάδα. Θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε ακέραιος $n > 1$ μπορεί να γραφτεί σαν γινόμενο πρώτων αριθμών. Αυτό γίνεται με τη χρήση ισχυρής επαγωγής ως εξής.

- *Βάση Επαγωγής:* Η πρόταση ισχύει για $n = 2$, αφού το 2 είναι πρώτος.

- *Επαγωγική Υπόθεση:* Θεωρούμε ότι για κάποιον αριθμό $k$ κάθε αριθμός $n \leq k$ και $n > 2$ γράφεται σαν γινόμενο πρώτων.

- *Επαγωγικό Βήμα:* Θα πρέπει να δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k + 1$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: α) ο αριθμός $k+1$ είναι πρώτος, β) ο αριθμός $k+1$ δεν είναι πρώτος. Η πρώτη περίπτωση συνεπάγεται απευθείας το ζητούμενο. Στη δεύτερη περίπτωση, υπάρχουν αριθμοί $a, b$ τέτοιοι ώστε

$$k + 1 = a \cdot b,$$

όπου $2 \leq a, b \leq k$. Από την επαγωγική υπόθεση τόσο ο $a$ όσο και ο $b$ μπορούν να γραφτούν σαν γινόμενο πρώτων και άρα από την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι το ίδιο ισχύει και για τον $k + 1$.

## 13.13 Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε με επαγωγή στο $n \geq 0$ ότι

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. Να αποδείξετε με επαγωγή στο $n \geq 0$ ότι

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

3. Να αποδείξετε με επαγωγή στο $n \geq 0$ ότι

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1.$$

4. Να αποδείξετε με επαγωγή στο $n \geq 1$ ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

5. Να αποδείξετε με επαγωγή στο $n \geq 1$ ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

6. Να αποδείξετε με επαγωγή στο $n \geq 1$ ότι αν $x \geq -1$ τότε

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

7. Να αποδείξετε με επαγωγή στο $n \geq 1$ ότι για κάθε θετικό ακέραιο $m$ ισχύει ότι

$$\lceil \frac{n}{m} \rceil = \lfloor \frac{n+m-1}{m} \rfloor.$$

8. Να αποδείξετε με επαγωγή ότι για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ όπου $m \bmod 2 = 0$, μία σκακιέρα $n \times m$ έχει τον ίδιο αριθμό άσπρων και μαύρων τετραγώνων.

9. Να αποδείξετε με επαγωγή ότι $n$ κύκλοι χωρίζουν το επίπεδο σε $n^2 - n + 1$ περιοχές αν κάθε ζευγάρι κύκλων τέμνονται σε δύο σημεία και κάθε τριάδα δεν τέμνεται σε κοινό σημείο.

# Bibliography


[1] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Dover Publications, 1957.

[2] J. L. Bentley and M. I. Shamos. "Divide-and-Conquer in Multidimensional Space". In: *Proceedings of the Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '76. Hershey, Pennsylvania, USA: ACM, 1976, pp. 220–230.

[3] J.L. Bentley, D. Haken, and J.B. Saxe. "A General Method for Solving Divide-and-Conquer Recurrences". In: *SIGACT News* 12.3 (1980), pp. 36–44.

[4] M. Blum et al. "Time bounds for selection". In: *Journal of Computer and System Sciences* 7.4 (1973), pp. 448–461.

[5] G. Brassard and P. Bratley. *Algorithmics: Theory & Practice*. USA: Prentice-Hall, Inc., 1988.

[6] T.H. Cormen et al. *Introduction to Algorithms*. 3rd. MIT Press, 2009.

[7] S. Dasgupta, C.H. Papadimitriou, and U. V. Vazirani. *Algorithms*. McGraw-Hill, 2008.

[8] E. W. Dijkstra. "A note on two problems in connexion with graphs". In: *Numerische Mathematik* 1.1 (1959), pp. 269–271.

[9] A. S Fraenkel and D. Lichtenstein. "Computing a perfect strategy for n × n chess requires time exponential in n". In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 31.2 (1981), pp. 199–214.

[10] J. E. Hopcroft, R. Motwani, and J. D. Ullman. *Introduction to automata theory, languages and computation*. Addison-Welsey, 2001.

[11] David A Huffman. "A method for the construction of minimum-redundancy codes". In: *Proceedings of the IRE* 40.9 (1952), pp. 1098–1101.

[12] J. Kleinberg and E. Tardos. *Algorithm Design*. Addison Wesley, 2006.

[13] D. Knuth. *Η τέχνη του προγραμματισμού, 3η Έκδοση*. Εκδόσεις Τζιόλα, 2009.

[14] W. Kuszmaul and C. Leiserson. "Floors and Ceilings in Divide-and-Conquer Recurrences". In: *Symposium on Simplicity in Algorithms (SOSA)*. SIAM, Jan. 2021, pp. 133–141.

[15] E.L. Lawler. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*. Holt, Rinehart and Winston, 1976.

[16] C.H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1995.

[17] J. M. Robson. "N by N Checkers is Exptime Complete". In: *SIAM Journal on Computing* 13.2 (1984), pp. 252–267.

[18] V. Strassen. "Gaussian elimination is not optimal". In: *Numerische Mathematik* 13.4 (1969), pp. 354–356.

[19] N. Wirth. *Algorithms and Data Structures*. Prentice-Hall, 1985.