Κεφάλαιο 2

Ιεραρχία συναρτήσεων

Βασικό μέτρο της αποτελεσματικότητας ενός αλγόριθμου είναι ο αριθμός των ΣΥΒ που εκτελεί προκειμένου να επιλύσει κάποιο στιγμιότυπο. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ο αριθμός αυτός αποτελεί (κυρίως) συνάρτηση του μεγέθους του στιγμιότυπου. Επομένως η ανάλυση τέτοιων συναρτήσεων και η κατάταξη τους σε κλάσεις αποτελεί βασική προϋπόθεση για την αξιολόγηση των αλγορίθμων. Αυτό είναι το θέμα που πραγματεύεται το παρόν κεφάλαιο.

2.1 Ασυμπτωτική εκτίμηση των ΣΥΒ

Στην Ενότητα 1.6 παρουσιάστηκαν παραδείγματα αλγορίθμων στα οποία ο αριθμός των ΣΥΒ δεν ήταν μόνο συνάρτηση του μεγέθους του στιγμιότυπου αλλά και των δομικών χαρακτηριστικών των δεδομένων εισόδου. Χωρίς να παραβλέπουμε ότι η παρατήρηση αυτή ισχύει σε αρκετές περιπτώσεις, θα αναφερόμαστε με γενικό τρόπο στο αριθμό των ΣΥΒ που εκτελεί ένας αλγόριθμος - ισοδύναμα, χρόνο εκτέλεσης του αλγόριθμου - για ένα στιγμιότυπο μεγέθους n ως $T(n)$. Η $T(n)$ είναι μία μαθηματική έκφραση η τιμή της οποίας θεωρούμε ότι μεταβάλλεται ομόρροπα με την παράμετρο n. Η $T(n)$ παίρνει τη μορφή συνάρτησης αν οι παράγοντες που επιδρούν στον αριθμό των ΣΥΒ, εκτός του μεγέθους του στιγμιότυπου, διαμορφώνονται με τον ίδιο «κακό» ή «καλό» τρόπο. Αν επιδρούν με τον πιο επιβαρυντικό τρόπο, η $T(n)$ θα εκφράζει το χρόνο εκτέλεσης της *χειρότερης περίπτωσης* ενώ στην διαμετρικά αντίθετη περίπτωση η $T(n)$ θα δίνει το χρόνο της *καλύτερης περίπτωσης*. Για παράδειγμα, στον Αλγόριθμο 5, η $T(n)$ ως χρόνος εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης δίνεται από την (1.2) ενώ ως χρόνος εκτέλεσης καλύτερης περίπτωσης από την (1.3).[1] Επιπλέον αν στην ανάλυση θεωρήσουμε στιγμιότυπα που διαμορφώνονται με «τυχαίο» τρόπο - πρέπει να είναι γνωστή η κατανομή πιθανότητας που διέπει τα δεδομένα εισόδου - τότε η $T(n)$ θα εκφράζει το χρόνο εκτέλεσης της *μέσης περίπτωσης*.
Στο παρόν και στα επόμενα κεφάλαια, αν δεν προσδιορίζεται κάτι διαφορετικό, θα θεωρούμε ότι η $T(n)$ εκφράζει το χρόνο εκτέλεσης (δηλαδή τον αριθμό των ΣΥΒ) της χειρότερης περίπτωσης. Ο κύριος λόγος για την επιλογή αυτή είναι ότι τότε η $T(n)$ θα δίνει ένα άνω φράγμα στον αριθμό των ΣΥΒ για οποιοδήποτε στιγμιότυπο.[2]

[1] Θυμηθείτε ότι η χειρότερη περίπτωση προκύπτει όταν κάθε ακέραιος στο σύνολο $\{1, \ldots, \lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$ είναι διαιρέτης του n (π.χ. $n = 12$) ενώ η καλύτερη περίπτωση όταν ο n είναι πρώτος.

[2] Μία πιο εμπεριστατωμένη αιτιολογία για την υιοθέτηση του χρόνου εκτέλεσης της χειρότερης περίπτωσης παρατίθεται στο [6, Κεφάλαιο 2].

Επιπλέον των απλουστευτικών υποθέσεων που υιοθετήθηκαν για τον χρόνο εκτέλεσης ενός αλγόριθμου στην Ενότητα 1.6, θα κάνουμε μία ακόμα. Αντί να προσδιορίζουμε την ακριβή μορφή της $T(n)$ κάποιου αλγόριθμου, θα εξετάζουμε τον *ρυθμό αύξησης* της. Δηλαδή δεν ενδιαφέρει το πως διαμορφώνεται ο χρόνος εκτέλεσης (ισοδύναμα, αριθμός των ΣΥΒ) σε απόλυτες τιμές αλλά η μεταβολή του καθώς αυξάνεται το μέγεθος του στιγμιότυπου (τιμή του n). Η μεταβολή αυτή αντικατοπτρίζεται στην *τάξη μεγέθους (κλάση)* της συνάρτησης $T(n)$. Για παράδειγμα, αν η $T(n)$ δίνεται από την (1.2) τότε η τάξη μεγέθους της είναι *υπογραμμική* ενώ αν $T(n) = 7n + 3$ (Αλγόριθμος 3) είναι γραμμική· είναι εμφανές ότι ο ρυθμός αύξησης (ως προς n) στην πρώτη περίπτωση είναι μικρότερος από ότι στη δεύτερη. Η τάξη μεγέθους αποτελεί την *ασυμπτωτική εκτίμηση* της συνάρτησης $T(n)$.

Η κλάση της συνάρτησης $T(n)$ καθορίζει την *ασυμπτωτική συμπεριφορά* ενός αλγόριθμου αφού απεικονίζει το πως διαμορφώνεται ο χρόνος εκτέλεσης για μεγάλες τιμές της παραμέτρου n. Συνεπώς, αποτελεί μέτρο σύγκρισης ανάμεσα σε δύο αλγόριθμους που επιλύουν το ίδιο πρόβλημα. Θεωρούμε ότι ένας αλγόριθμος Α με είναι πιο αποδοτικός (αποτελεσματικός) από έναν αλγόριθμο Β αν η ασυμπτωτική συμπεριφορά του Α στη χειρότερη περίπτωση είναι καλύτερη από αυτή του Β. Ο όρος «καλύτερη» αναφέρεται σε ασυμπτωτική εκτίμηση της $T(n)$ του Α χαμηλότερης τάξης από αυτής του Β.

Περαιτέρω, μέσω της ασυμπτωτικής ανάλυσης διαπιστώνεται ότι η (σωστή) υλοποίηση ενός αλγόριθμου σε κάποιο υπολογιστικό περιβάλλον δεν επηρεάζει την αποτελεσματικότητα του. Αυτό αποτελεί συνέπεια της *αρχής του αναλλοίωτου (principle of invariance)* [5] η οποία λέει ότι δυο διαφορετικές υλοποιήσεις ενός αλγόριθμου δεν θα διαφέρουν σε αποτελεσματικότητα παρά μόνο κατά μία σταθερή αναλογία που εξαρτάται από την τεχνολογία (λογισμικό, υλισμικό, κλπ). Ισοδύναμα, αν κάποια υλοποίηση ενός αλγόριθμου εκτελεί $T(n)$ ΣΥΒ για την επίλυση ενός στιγμιότυπου μεγέθους n τότε κάθε υλοποίηση του αλγόριθμου εκτελεί το πολύ $c \cdot T(n)$ βήματα, όπου c θετική σταθερά που εξαρτάται από την υλοποίηση.

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι η ασυμπτωτική ανάλυση της $T(n)$ είναι καθοριστική για την αξιολόγηση ενός αλγόριθμου σε σχέση με τον αριθμό των ΣΥΒ που εκτελεί. Στις επόμενες ενότητες θα παρουσιαστούν βασικές έννοιες και αποτελέσματα που αφορούν την *ασυμπτωτική συμπεριφορά* συναρτήσεων. Ο όρος υποδηλώνει την συμπεριφορά της συνάρτησης όταν η παράμετρος n λαμβάνει μεγάλες τιμές. Ως «μεγάλη τιμή» εκλαμβάνεται οποιαδήποτε τιμή είναι μεγαλύτερη(-ίση) μίας προσδιορισμένης, κατά περίπτωση, θετικής σταθεράς n_0.

2.2 Κλάσεις συναρτήσεων

Για να μπορέσουμε να διατυπώσουμε μία ασυμπτωτική εκτίμηση της συνάρτησης $T(n)$ θα χρησιμοποιήσουμε ορισμούς και ορολογία της ασυμπτωτικής ανάλυσης.

Ορισμός 2. Έστω συνάρτηση $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Οι (ασυμπτωτικές) τάξεις συναρτήσεων ορίζονται ως

$$O(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+, \exists a, n_0 \in \mathbb{R}_+, f(n) \leq a \cdot g(n), \forall n \geq n_0\}, \tag{2.1}$$
$$\Omega(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+, \exists b, n_0 \in \mathbb{R}_+, f(n) \geq b \cdot g(n), \forall n \geq n_0\}, \tag{2.2}$$
$$\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n)). \tag{2.3}$$

Η (2.1) ορίζει την κλάση $O(g(n))$ ως το σύνολο που περιέχει όλες τις συναρτήσεις $f(n)$ οι οποίες φράζονται από τα πάνω από ένα θετικό πολλαπλάσιο της $g(n)$,

με δεδομένο ότι η τιμή του n είναι *επαρκώς μεγάλη* (τουλάχιστον ίση με μία κριτική τιμή n_0). Αν $f(n)$ είναι μία από τις συναρτήσεις του συνόλου $O(g(n))$ θα γράφουμε $f(n) = O(g(n))$ αντί του ορθότερου $f(n) \in O(g(n))$ και θα διαβάζουμε «η $f(n)$ είναι τάξης (μεγέθους) $O(g(n))$ » ή «η $f(n)$ φράζεται ασυμπτωματικά εκ' των άνω από την $g(n)$».[3] Ο όρος «ασυμπτωτικά» υποδηλώνει ότι το φράγμα ισχύει όταν η τιμή της παραμέτρου n είναι επαρκώς μεγάλη.
Αντίστοιχα, η (2.2) ορίζει την κλάση $\Omega(g(n))$ που περιέχει τις συναρτήσεις οι οποίες φράζονται ασυμπτωματικά εκ' των κάτω από την $g(n)$. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η κλάση που ορίζεται από την (2.3): περιέχει τις συναρτήσεις οι οποίες φράζονται ασυμπτωτικά και εκ΄των άνω και εκ΄ των κάτω από την $g(n)$. Δηλαδή ένας ισοδύναμος ορισμός της κλάσης που ορίζει η (2.3) είναι

$$\Theta(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+, \exists a, b, n_0 \in \mathbb{R}_+, a \cdot g(n) \geq f(n) \geq b \cdot g(n), \forall n \geq n_0\}.$$

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία μία συνάρτηση $f(n)$ φράζεται ασυμπτωτικά εκ' των άνω από μία σταθερά γράφουμε $f(n) = O(1)$. Αντίστοιχες συμβάσεις ισχύουν για τις κλάσεις Ω και Θ. Για παράδειγμα, $e^{-n} + 1 = \Theta(1)$ εφόσον $2 \geq e^{-n} + 1 \geq 1$, για $n \geq 0$.

Μία βασική παρατήρηση είναι ότι για τυχαίες συναρτήσεις $f(n), g(n)$ μπορεί να μην ισχύει $f(n) = \theta(g(n))$, για οποιοδήποτε $\theta \in \{O, \Omega, \Theta\}$. Για παράδειγμα, θεωρήστε $f(n) = n, g(n) = n^{n \bmod 3}$. Στην περίπτωση αυτή η $f(n)$ φράζεται από τα κάτω από την $g(n)$ αν το n είναι πολλαπλάσιο του 3, $f(n) = g(n) = n$, για $n = 1 \pmod 3$ ενώ για $n = 2 \pmod 3$ έχουμε ότι $g(n) = n^2$ και άρα $f(n) \leq g(n)$. Επομένως, $f(n) \neq \theta(g(n))$ για οποιοδήποτε $\theta \in \{O, \Omega, \Theta\}$.[4]

Για συγκρίσιμες συναρτήσεις $f(n), g(n)$ για τις οποίες ισχύει ότι $f(n) \neq \Theta(g(n))$ θα λέμε ότι $g(n)$ *κυριαρχεί* πάνω στην $f(n)$ αν $f(n) = O(g(n))$. Μία (εμπειρική) διάταξη συγκρίσιμων συναρτήσεων απεικονίζεται στον Πίνακα 2.1 όπου η συνάρτηση κάθε γραμμής κυριαρχεί πάνω στις συναρτήσεις των προηγουμένων γραμμών. Για κάποιες από τις συναρτήσεις αυτές παρουσιάζονται οι τιμές τους, καθώς μεταβάλλεται η τιμή της παραμέτρου n, στον Πίνακα 2.2. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε το πόσο μεγάλη είναι η μεταβολή στην τιμή της εκθετικής, της παραγοντικής και της υπερεκθετικής συνάρτησης από τον διπλασιασμό της τιμής της παραμέτρου n. Σε σχέση με τις συναρτήσεις $\lg^2 n$ και $\sqrt{n}$ παρουσιάζεται μία εικόνα που έρχεται σε αντίφαση με την κατάταξη τους με βάση τον Πίνακα 2.1. Όμως αυτό δεν ισχύει ασυμπτωματικά αφού για $n \geq 2^{16}$ έχουμε $\lg^2 n \leq \sqrt{n}$.

Παράδειγμα 4. Για τον Αλγόριθμο 3 υπολογίσαμε ότι ο αριθμός των ΣΥΒ δίνεται από τη συνάρτηση $T(n) = 7n + 3$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 2, για να δείξουμε ότι $T(n) = \Theta(n)$ αρκεί να βρούμε θετικές σταθερές a, b, n_0 τέτοιες ώστε

$$b \cdot n \leq 7n + 3 \leq a \cdot n, \ \forall n \geq n_0. \tag{2.4}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} 7n + 3 &\geq 7n, && \forall n \geq 0, \\ 7n + 3 &\leq 7n \ + n = 8n, && \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

[3]Με μικρή παραβίαση της μαθηματικής ορθότητας θα γράφουμε $f(n) = O(g(n))$ αν αυτό ισχύει ασυμπτωματικά παρόλο που μπορεί η $f(n)$ να παίρνει αρνητική τιμή ή και να μην ορίζεται για κάποιες μικρές τιμές της παραμέτρου n. Για παράδειγμα θα γράφουμε $f(n) = 2n - 8 = O(n)$ ή $\hat{f}(n) = \lg n^2 = O(\lg n)$ παρόλο που $f(n) < 0$, για $0 \leq n \leq 3$ και η $\hat{f}(n)$ δεν ορίζεται για $n = 0$ ή $n = 1$.

[4]Δηλαδή η $f(n) = n$ δεν ανήκει σε καμία από τις κλάσεις $O(g(n)), \Omega(g(n)), \Theta(g(n))$ για $g(n) = n^{n \bmod 3}$.

$f(n)$	Περιγραφή τύπου
1	Σταθερή
$\lg n$	Λογαριθμική
$\lg^b n, b > 1$	Πολυλογαριθμική
$n^\epsilon, 1 > \epsilon > 0$	Υπογραμμική
n	Γραμμική
$n \lg n$	Υπεργραμμική
n^k	Πολυωνυμική
$n^k \lg^b n, k, b > 1$	Υπερπολυωνυμική
c^n με $c > 1$	Εκθετική
$n!$	Παραγοντική
n^n	Υπερεκθετική

Πίνακας 2.1: Ιεραρχία συναρτήσεων

n	$\lg n$	$\lg^2 n$	$\sqrt{n}$	$n \lg n$	n^2	2^n	$n!$	n^n
2	1	1	$< 1,5$	2	4	4	2	4
4	2	4	2	8	16	16	24	256
8	3	9	< 3	24	64	256	40320	16777216
16	4	16	4	64	256	65536	$> 2 \cdot 10^{13}$	$> 1{,}18 \cdot 10^{19}$
32	5	25	< 6	160	1024	4294967296	$> 2{,}63 \cdot 10^{35}$	$> 1{,}16 \cdot 10^{48}$

Πίνακας 2.2: Ρυθμός αύξησης διαφόρων συναρτήσεων

Επομένως για $a = 8, b = 7, n_0 = 3$ οι παραπάνω ανισότητες συναληθεύουν. Άρα ισχύει η (2.4) και συνεπώς $T(n) = \Theta(n)$. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι ο Αλγόριθμος 3 εκτελεί $\Theta(n)$ βήματα, ή, ισοδύναμα, ότι είναι τάξης $\Theta(n)$.

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα ακολουθεί.

Παράδειγμα 5. Έστω ότι θέλουμε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για τη συνάρτηση $T(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$. Προφανώς,

$$\frac{1}{2}n^2 - 3n \leq \frac{1}{2}n^2, \forall n \geq 0 \Rightarrow T(n) = O(n^2). \tag{2.5}$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι υπάρχουν θετικοί b, n_0 τέτοιοι ώστε

$$\frac{1}{2}n^2 - 3n \geq bn^2, \quad \forall n \geq n_0. \tag{2.6}$$

Ισοδύναμα, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \geq b \tag{2.7}$$

και επειδή $b > 0$ θα πρέπει

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{n} > 0 \Rightarrow n > 6.$$

Άρα εφόσον $n \in \mathbb{N}$, η μικρότερη έγκυρη τιμή είναι $n = 7$. Για να αποδείξουμε ότι η τιμή αυτή ελαχιστοποιεί την $T(n)$ αρκεί να δείξουμε ότι αυτή είναι αύξουσα για $n \geq 7$.

Ισοδύναμα, θα πρέπει να ισχύει ότι $T(n_1) > T(n_2)$ για $n_1 > n_2 \geq 7$. Όντως

$$n_1 > n_2 \Rightarrow \frac{1}{2}n_1 - 3 > \frac{1}{2}n_2 - 3.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη την παραπάνω ανισότητα με την $n_1 > n_2$ έχουμε

$$\frac{1}{2}n_1^2 - 3n_1 > \frac{1}{2}n_2^2 - 3n_2 \Rightarrow T(n_1) > T(n_2).$$

Επομένως για $n = 7$, η $T(n)$ ελαχιστοποιείται. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην (2.7) παίρνουμε

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{7} \geq b \Rightarrow \frac{1}{14} > b.$$

Άρα μία κατάλληλη τιμή για b θα μπορούσε να είναι το $1/15$. Δηλαδή για $b = 1/15, n_0 = 7$, ισχύει η 2.6 και επομένως $T(n) = \Omega(n^2)$. Αυτό σε συνδυασμό με την (2.5) συνεπάγεται ότι $T(n) = \Theta(n^2)$.

Στην επόμενη ενότητα θα εξετάσουμε ιδιότητες που αφορούν την ασυμπτωτική συμπεριφορά συναρτήσεων.

2.3 Ιδιότητες κλάσεων

Είναι διαισθητικά εμφανές ότι δύο συγκρίσιμες συναρτήσεις $f(n), g(n)$, συνδέονται σε σε εναλλασσόμενους ρόλους στις (2.1) και (2.2) . Τυπικά, έχουμε την επόμενη πρόταση.

Λήμμα 1. $f(n) = O(g(n))$ αν και μόνο αν $g(n) = \Omega(f(n))$.

Απόδειξη. Αν $f(n) = O(g(n))$ τότε σύμφωνα με την (2.1) υπάρχουν θετικές σταθερές a, n_0 για τις οποίες ισχύει

$$f(n) \leq a \cdot g(n), \forall n \geq n_0.$$

Από την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι

$$\frac{1}{a} \cdot f(n) \leq g(n), \forall n \geq n_0$$

και επομένως $g(n) = \Omega(f(n))$ αφού θεωρούμε την (2.2) όπου οι συναρτήσεις $f(n), g(n)$ είναι σε εναλλασσόμενους ρόλους και $b = \frac{1}{a}$.
Η απόδειξη της αντίστροφης περίπτωσης γίνεται με αντίστοιχο τρόπο. □

Εφόσον οι συναρτήσεις του Πίνακα 2.1 εμπεριέχονται η μία στην άλλη με τη σειρά που εμφανίζονται από επάνω προς τα κάτω, δηλαδή

$$O(1) \subset O(\lg n) \subset \cdots \subset O(n^n),$$

με άμεση εφαρμογή του Λήμματος 1, έχουμε

$$\Omega(1) \supset \Omega(\lg n) \supset \cdots \supset \Omega(n^n).$$

Είναι προφανές ότι για τις κλάσεις O και Ω ισχύει η αντισυμμετρική ιδιότητα: αν $f(n) = O(g(n))$ $(f(n) = \Omega(g(n)))$ τότε $g(n) \neq O(f(n))$ $(g(n) \neq \Omega(f(n)))$. Στην επόμενη πρόταση εξετάζεται η κλάση Θ.

Πρόταση 1. Η κλάση Θ ορίζει στο σύνολο των συναρτήσεων μία σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ανακλαστική, η συμμετρική και η μεταβατική ιδιότητα.

Ανακλαστική: Θα πρέπει να δείξουμε ότι $g(n) = \Theta(g(n))$. Αυτό ισχύει τετριμμένα από τον Ορισμό 2· θεωρούμε $a = b = 1$ και g στη θέση της f.

Συμμετρική: Θα πρέπει να δείξουμε ότι αν $f(n) = \Theta(g(n))$ τότε $g(n) = \Theta(f(n))$. Από την υπόθεση ισχύει ότι

$$b \cdot g(n) \leq f(n) \leq a \cdot g(n),\ a, b, n_0 > 0.$$

Επομένως,

$$\frac{1}{a} \cdot f(n) \leq g(n) \leq \frac{1}{b} \cdot f(n)$$

και άρα ισχύει το ζητούμενο.

Μεταβατική: Έστω συναρτήσεις f, g, h τέτοιες ώστε $f(n) = \Theta(g(n))$ και $g(n) = \Theta(h(n))$. Άρα υπάρχουν σταθερές a_1, a_2 τέτοιες ώστε, για κάποιο $n_0 > 0$, ισχύει ότι

$$f(n) \leq a_1 \cdot g(n),\ \forall n \geq n_0,$$
$$g(n) \leq a_2 \cdot h(n),\ \forall n \geq n_0.$$

Συνολικά, έχουμε

$$f(n) \leq a \cdot h(n), \quad \forall n \geq n_0,$$

όπου $a = a_1 \cdot a_2$ και άρα $a > 0$. Επομένως $f(n) = O(h(n))$. Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι $f(n) = \Omega(h(n))$. Δηλαδή ισχύει το ζητούμενο:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ και } g(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n).$$

□

Πόρισμα 1. Αν $f(n) = \Theta(g(n))$ τότε $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$ και αντίστροφα.

Πόρισμα 2. Ισχύει αποκλειστικά ένα από τα παρακάτω.

1. $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$.
2. $\Theta(f(n)) \cap \Theta(g(n)) = \emptyset$.

Η παρακάτω πρόταση προσφέρει ένα κριτήριο με βάση το οποίο μπορούμε να καθορίσουμε ποια από τις δύο περιπτώσεις του Πορίσματος 2 ισχύει.[5]

Λήμμα 2. Έστω συναρτήσεις f, g και $\lim \frac{f(n)}{g(n)} = c$. Αν $0 < c < \infty$ τότε ισχύει η Περίπτωση 1 του Πορίσματος 2. Αν $c = 0$ ή $c = \infty$ τότε ισχύει η Περίπτωση 2.

[5] Για απλότητα ο συμβολισμός του ορίου (lim) θα χρησιμοποιείται χωρίς την αναφορά στη «ανεξάρτητη» μεταβλητή n· εφόσον η ανάλυση αφορά μεγάλες τιμές του n, το αντίστοιχο όριο οποιασδήποτε παράστασης αφορά την περίπτωση κατά την οποία «n τείνει στο άπειρο».

Απόδειξη. Από τον ορισμό του ορίου (Ορισμός 7, Ενότητα 13.10) έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, ισχύει

$$\left|\frac{f(n)}{g(n)} - c\right| < \epsilon \Rightarrow$$
$$c - \epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < c + \epsilon. \tag{2.8}$$

Αν $c = 0$ τότε από αριστερό μέλος της (2.8) θα πρέπει να ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$ ότι

$$\frac{f(n)}{g(n)} > -\epsilon \Rightarrow f(n) > -\epsilon \cdot g(n).$$

Άρα δεν υπάρχει θετική σταθερά που πολλαπλασιαζόμενη με την $g(n)$ να φράζει την $f(n)$ από τα κάτω· δηλαδή $f(n) \neq \Omega(g(n))$.
Αν $c = \infty$ τότε από το δεξί μέλος της (2.8) προκύπτει με αντίστοιχο τρόπο ότι $f(n) \neq O(g(n))$.
Στην περίπτωση όπου $0 < c < \infty$ μπορούμε να επιλέξουμε ϵ τέτοιο ώστε $c - \epsilon > 0$ και θέτοντας

$$a = \max\{c + \epsilon, \max\{\frac{f(n)}{g(n)}, 1 \leq n \leq n_0\}\}, \tag{2.9}$$
$$b = \min\{c - \epsilon, \min\{\frac{f(n)}{g(n)}, 1 \leq n \leq n_0\}\}, \tag{2.10}$$

έχουμε $a, b > 0$. Από την (2.9), (2.10) και (2.8)

$$b \cdot g(n) \leq f(n) \leq a \cdot g(n)$$

η οποία ολοκληρώνει το ζητούμενο. □

Ένα πολυώνυμο $p(n)$ ονομάζεται ασυμπτωματικά θετικό αν παίρνει θετικές τιμές για μεγάλες τιμές του n.

Πόρισμα 3. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $p(n)$ ασυμπτωματικά θετικό πολυώνυμο βαθμού d. Τότε, $p(n) = \Theta(n^d)$.

Απόδειξη. Το $p(n)$ γράφεται ως

$$p(n) = a_d n^d + \sum_{k \in K} a_k n^k,$$

όπου $K = \{0, \ldots, d-1\}$. Συνεπώς,

$$\lim \frac{p(n)}{n^d} = \lim \frac{a_d n^d}{n^d} + \sum_{k \in K} \lim \frac{a_k n^k}{n^d} = a_d.$$

Εξ' ορισμού $\infty > a_d > 0$, και επομένως σύμφωνα με το Λήμμα 2 έχουμε ότι $\Theta(p(n)) = \Theta(n^d)$. Οπότε άμεσα από το Πόρισμα 1, προκύπτει ότι $p(n) = \Theta(n^d)$. □

2.4 Ασυμπτωματική κατάταξη συναρτήσεων

Στον Ορισμό 2 αν αντικαταστήσουμε στις (2.1), (2.2) τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $(\exists)$ για τις παραμέτρους a, b, αντίστοιχα, με καθολικό $(\forall)$ έχουμε τις κλάσεις

$$o(g(n)) = \{f : \forall a \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 > 0, a \cdot g(n) > f(n) \geq 0, \forall n \geq n_0\}, \tag{2.11}$$
$$\omega(g(n)) = \{f : \forall b \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 > 0, f(n) > b \cdot g(n) \geq 0, \forall n \geq n_0\}. \tag{2.12}$$

Παρατηρούμε ότι η συνθήκη που συνδέει τις $f(n), g(n)$ στην (2.11) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 > 0, a > \frac{f(n)}{g(n)}, \forall n \geq n_0.$$

Όμως αυτός είναι ο Ορισμός 7 (Ενότητα 13.10) όταν το όριο του λόγου $\frac{f(n)}{g(n)}$ είναι ίσο με μηδέν του n τείνοντος στο άπειρο.[6] Αντίστοιχα η συνθήκη που συνδέει τις $f(n), g(n)$ στην (2.11) ισοδυναμεί με τον Ορισμό 9 (Ενότητα 13.10) όταν το όριο του λόγου $\frac{f(n)}{g(n)}$ είναι ίσο με άπειρο για n τείνοντος στο άπειρο. Επομένως οι (2.11), (2.12) είναι ισοδύναμες με την

$$f(n) = \begin{cases} o(g(n)) \text{ αν και μόνο αν } \lim \frac{f(n)}{g(n)} = 0, \\ \omega(g(n)) \text{ αν και μόνο αν } \lim \frac{f(n)}{g(n)} = \infty. \end{cases} \tag{2.13}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κάποιος ότι το Λήμμα 1 ισχύει με την κλάση o στη θέση της O και την ω στη θέση της Ω.

Παράδειγμα 6. Χρησιμοποιώντας την (2.13) μπορούμε να δείξουμε ότι $n^2 = o(n^3)$ και ότι $n^2 = \omega(n)$. Για την πρώτη περίπτωση έχουμε

$$\lim \frac{n^2}{n^3} = \lim \frac{1}{n} = 0,$$

ενώ για τη δεύτερη

$$\lim \frac{n^2}{n} = \lim n = \infty.$$

Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $\lg n = o(n)$. Έχουμε

$$\lim \frac{\lg n}{n} = \lim \frac{\lg n}{2^{\lg n}} = \lim \frac{u}{2^u}, \tag{2.14}$$

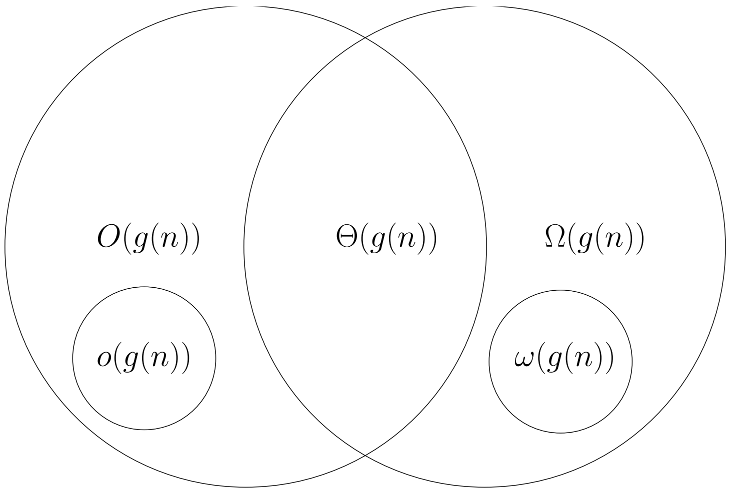
όπου $u = \lg n$. Από την (13.2) (Ενότητα 13.3) προκύπτει ότι το παραπάνω όριο είναι ίσο με 0 και άρα σύμφωνα με την (2.13) ισχύει το ζητούμενο.

Οι σχέσεις ανάμεσα στις κλάσεις των συναρτήσεων που έχουμε δει μέχρι τώρα απεικονίζονται στο Σχήμα 2.1.

Η χρήση ορίων μπορεί να υιοθετηθεί για την ασυμπτωτική κατάταξη συναρτήσεων, δηλαδή για την αύξουσα διάταξη συναρτήσεων για μεγάλες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής n. Συγκεκριμένα, μπορούμε να συγκρίνουμε ασυμπτωματικά συναρτήσεις $f(n), g(n)$ με το ορίου του λόγου της f με τη g ως εξής

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} \begin{cases} = 1, \text{ τότε } f(n) = g(n), \\ > 1, \text{ τότε } f(n) > g(n), \\ < 1, \text{ τότε } f(n) < g(n). \end{cases} \tag{2.15}$$

[6] Στον ορισμό αυτό θεωρείστε a στη θέση του ϵ και n_0 στη θέση του δ.



Σχήμα 2.1: Σχέσεις ανάμεσα στις κλάσεις συναρτήσεων

Η κατάταξη συναρτήσεων με βάση την (2.15) μας επιτρέπει να διατάξουμε περαιτέρω συναρτήσεις που διέπονται από τη σχέση ισοδυναμίας που προσδιορίζει η κλάση Θ. Μία τέτοια περίπτωση θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7. Έστω ότι θέλουμε να ταξινομήσουμε τις συναρτήσεις

$$f_1(n) = 3^n, f_2(n) = \lg^2 n, f_3(n) = \lg\lg n^2, f_4(n) = 4^{\lg n}, f_5(n) = 2n^2.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim \frac{f_5(n)}{f_1(n)} = \lim \frac{2n^2}{3^n} = 2\lim \frac{n^2}{3^n} = 0$$

όπως προκύπτει άμεσα από την (13.2) (Ενότητα 13.3). Επειδή το παραπάνω όριο είναι μικρότερο της μονάδας έχουμε ότι

$$f_1(n) > f_5(n). \tag{2.16}$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$f_4(n) = 4^{\lg n} = (2^2)^{\lg n} = 2^{2\lg n} = 2^{\lg n^2} = n^2 < 2n^2 = f_5(n), \tag{2.17}$$

αφού $\lim \frac{2n^2}{n^2} = 2 > 1$.
Επίσης

$$\lim \frac{f_2(n)}{f_4(n)} = \lim \frac{\lg^2 n}{n^2} = \lim \left(\frac{\lg n}{n}\right)^2 = 0,$$

αφού το όριο του λόγου $\frac{\lg n}{n}$, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 6, είναι ίσο με μηδέν. Επομένως,

$$f_4(n) > f_2(n). \tag{2.18}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} f_3(n) &= \lg\lg n^2 = \lg(2\cdot\lg n) = \lg 2 + \lg\lg n \\ &= 1 + \lg\lg n < 2\lg\lg n = \lg\lg^2 n. \end{aligned}$$

Θέτοντας $v = \lg^2 n$ έχουμε $f_3(n) = f(v) = \lg v$. Στο Παράδειγμα 6 δείξαμε ότι $\lim \frac{\lg v}{v} = 0$ (θεωρείστε v στη θέση του n στην (2.6)). Επομένως, ασυμπτωτικά ισχύει η ανισότητα

$$\lg v < v \Rightarrow f_3(n) = \lg \lg^2 n < \lg^2 n = f_2(n). \tag{2.19}$$

Συνδυάζοντας τις (2.16),..., (2.19) έχουμε την κατάταξη

$$f_3(n) < f_2(n) < f_4(n) < f_5(n) < f_1(n).$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι παρόλο που $\Theta(f_4(n)) = \Theta(f_5(n))$ αφού οι συναρτήσεις $f_4(n), f_5(n)$ είναι αμφότερες πολυωνυμικές συναρτήσεις με ίδιο μεγιστοβάθμιο όρο, μπορούμε να τις διατάξουμε με βάση την (2.15).

2.5 Ασυμπτωτική συμπεριφορά αλγόριθμου

Ασυμπτωτική εκτίμηση της συνάρτησης $T(n)$ ενός αλγόριθμου αποτελεί η αναγνώριση της συνάρτησης $g(n)$ για την οποία ισχύει ότι $T(n) = \theta(g(n))$, όπου $\theta \in \{O, \Omega, \Theta, o, \omega\}$. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι ο αλγόριθμος είναι τάξης (ισοδύναμα, *πολυπλοκότητας*) $\theta(g(n))$. Ομοίως λέμε ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά του αλγόριθμου είναι $\theta(g(n))$. Εστιάζοντας στις κλάσεις, αν ένας αλγόριθμος είναι τάξης $O(g(n))$ αυτό σημαίνει ότι η τιμή της συνάρτησης $T(n)$ για *οποιοδήποτε* στιγμιότυπο μεγέθους n *αρκετά μεγάλο,* δεν μπορεί να ξεπερνά την τιμή της συνάρτησης $g(n)$ πολλαπλασιασμένη με μία θετική σταθερά c. Για το λόγο αυτό η $g(n)$ ονομάζεται ασυμπτωτική εκτίμηση *εκ' των άνω.* Αντίστοιχα αν $T(n) = \Omega(g(n))$ τότε η $g(n)$ ονομάζεται ασυμπτωτική εκτίμηση *εκ' των κάτω.* Ένας αλγόριθμος ονομάζεται *ομογενής* αν υπάρχει συνάρτηση $g(n)$ τέτοια ώστε ο αριθμός των ΣΥΒ του αλγόριθμου είναι τάξης $\Theta(g(n))$. Για παράδειγμα, ο Αλγόριθμος 3 είναι ομογενής. Όμως δεν ισχύει αυτή η ιδιότητα για κάθε αλγόριθμο.

Τα θεωρητικά αποτελέσματα των Ενοτήτων 2.2, 2.4 διευκολύνουν την εκτίμηση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς ενός αλγόριθμου. Για παράδειγμα, είδαμε ότι η συνάρτηση που δίνει τον αριθμό των ΣΥΒ του Αλγορίθμου 3 είναι $T(n) = 7n + 3$ (Ενότητα 1.6). Στην Ενότητα 2.2 χρειάστηκε να κάνουμε χρήση του Ορισμού 2, δηλαδή να υπολογίσουμε $a, b, n_0 > 0$, που να ικανοποιούν τις (2.1), (2.2), (2.3), προκειμένου να δείξουμε ότι $7n + 3 = \Theta(n)$. Παρατηρούμε όμως ότι κάτι τέτοιο προκύπτει σαν άμεση εφαρμογή του Πορίσματος 3 αφού από το Λήμμα 2 έχουμε ότι $\lim \frac{7n+3}{n} = 7$.

Ο Αλγόριθμος 9, υπολογίζει ότι και ο Αλγόριθμος 3, δηλαδή το άθροισμα n όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο το a και βήμα t (δες (1.1)), αλλά με διαφορετικό τρόπο. Συγκεκριμένα, ο Αλγόριθμος 9 χρησιμοποιεί δύο *φωλιασμένους* βρόχους. Ο εσωτερικός βρόχος υπολογίζει το γινόμενο $j \cdot t$ (μεταβλητή $multiple\_t$) όπου ο δείκτης j αναφέρεται στον $(j + 1)-$οστο όρο της προόδου. Ο δείκτης j μεταβάλλεται στον εξωτερικό βρόχο· σε κάθε επανάληψη του βρόχου αυτού υπολογίζεται η τιμή του $(j + 1)-$οστου όρου της προόδου (μεταβλητή $oros$) καθώς και το άθροισμα των πρώτων $j + 1$ όρων της προόδου (μεταβλητή sum).

Ο αριθμός των ΣΥΒ του Αλγορίθμου 9 υπολογίζεται ως εξής. Στη Γραμμή 7 εκτελείται μία πρόσθεση και μία εκχώρηση ενώ ο αριθμός των επαναλήψεων που εκτελούνται τα δύο αυτά ΣΥΒ είναι ίσος με την τιμή του δείκτη j. Επίσης για την υλοποίηση του εσωτερικού βρόχου (Γραμμή 6) εκτελούνται σε κάθε επανάληψη τρία ΣΥΒ: μία σύγκριση $(j \leq n)$, μία πρόσθεση και μία εκχώρηση (εντολή $j++$). Επομένως ο αριθμός

Αλγόριθμος 9 Υπολογισμός αθροίσματος $\sum_{j=0}^{n-1}(a + j \cdot t)$

Απαιτείται: θετικοί ακέραιοι n, a, t;
Επιστρέφεται: άθροισμα n όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο το a και βήμα t

1: **function** Sum_of_Terms02(`int` n, `int` a, `int` t)
2: $\quad sum \leftarrow 0;$
3: $\quad$ **for** $j \leftarrow 0; j < n; j++$ **do**
4: $\qquad oros \leftarrow 0;$
5: $\qquad multiple\_t \leftarrow 0;$
6: $\qquad$ **for** $i \leftarrow 1; i \leq j; i++$ **do**
7: $\qquad\quad multiple\_t \leftarrow multiple\_t + t;$
8: $\qquad$ **end for**
9: $\qquad oros \leftarrow a + multiple\_t;$
10: $\qquad sum \leftarrow sum + oros;$
11: $\quad$ **end for**
12: $\quad$ **return** sum;
13: **end function**

των ΣΥΒ που εκτελείται στις Γραμμές 6-8 είναι ίσος με

$$A(j) = 2j + 3j + 2 = 5j + 2, \tag{2.20}$$

όπου τα δύο επιπλέον ΣΥΒ προκύπτουν από την αρχικοποίηση του δείκτη i και τη σύγκριση που θα οδηγήσει σε τερματισμό του εσωτερικού βρόχου.
Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζουμε τον αριθμό των ΣΥΒ του εξωτερικού βρόχου: σε κάθε επανάληψη έχουμε τα έξι ΣΥΒ που εκτελούνται στις Γραμμές 4-5, 9-10, τα ΣΥΒ που δίνονται από την (2.20) και τρία ΣΥΒ που αφορούν τον δείκτη j στη Γραμμή 3. Ο αριθμός των επαναλήψεων του εξωτερικού βρόχου είναι n και εκτελούνται επιπλέον τρία ΣΥΒ: μία εκχώρηση στη Γραμμή 2, η αρχικοποίηση του δείκτη j και η σύγκριση που οδηγεί στον τερματισμό του εξωτερικού βρόχου. Επομένως ο συνολικός αριθμός των ΣΥΒ είναι

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} A(j) + 6n + 3n + 3 = \sum_{j=0}^{n-1}(5j + 2) + 9n + 3 \\ \Rightarrow T(n) &= \frac{1}{2}(5n^2 + 17n + 6). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Από το Πόρισμα 3 προκύπτει άμεσα ότι ο Αλγόριθμος 9 είναι πολυπλοκότητας $\Theta(n^2)$. Άρα ο Αλγόριθμος 3 είναι σαφώς αποτελεσματικότερος αφού ο αριθμός των ΣΥΒ που εκτελούνται από αυτόν είναι τάξης $\Theta(n)$.
Η αξιολόγηση αυτή προκύπτει και από το όριο του λόγου των δύο συναρτήσεων που δίνουν τον αριθμό των ΣΥΒ για τους δύο αλγόριθμους. Από τη (2.13) έχουμε

$$\lim \frac{7n + 3}{\frac{1}{2}(5n^2 + 17n + 6)} = 0 \Rightarrow 7n + 3 = o(\frac{1}{2}(5n^2 + 17n + 6)).$$

Εφόσον η κλάση Θ ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας (Πρόταση 1), το όριο του παραπάνω λόγου μπορεί να αντικατασταθεί από το όριο των λόγων των ισοδυνάμων συναρτήσεων μέσω της Θ. Δηλαδή,

$$\lim \frac{7n+3}{\frac{1}{2}(5n^2+17n+6)} = \lim \frac{n}{n^2} = 0.$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της συγκριτικής αξιολόγησης είναι τό ίδιο: ο Αλγόριθμος 3 είναι καλύτερος από τον Αλγόριθμο 9 αφού από την (2.13) έχουμε $n = o(n^2)$.

2.5.1 Βρόχοι και πολυπλοκότητα

Στον Αλγόριθμο 9 παρατηρούμε ότι μπορούμε να απαλείψουμε τη μεταβλητή $oros$ αφού αυτή χρησιμοποιείται μόνο για να αποθηκεύσει ενδιάμεσα αποτελέσματα. Η απαλοιφή αυτή συνεπάγεται την διαγραφή της Γραμμής 4 και την αντικατάσταση των εντολών των Γραμμών 9-10 με την

$$sum \leftarrow sum + a + multiple\_t;$$

Με την αλλαγή αυτή «γλιτώσαμε» την εκτέλεση δύο ΣΥΒ σε κάθε επανάληψη του εξωτερικού βρόχου· αποφύγαμε τις εκχωρήσεις στις Γραμμές 4 και 9. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των ΣΥΒ σε κάθε επανάληψη μειώνεται από 6 σε 4. Η επίπτωση στο συνολικό αριθμό των ΣΥΒ του αλγόριθμου αφορά τον πολλαπλασιαστή του όρου n οποίος μειώνεται κατά 2. Δηλαδή, με την αλλαγή αυτή ο συνολικός αριθμός των ΣΥΒ διαμορφώνεται σε

$$T'(n) = \frac{1}{2}(5n^2 + 15n + 6). \tag{2.22}$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $T(n), T'(n)$ ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας αφού αμφότερες είναι τάξης $\Theta(n^2)$ (Πόρισμα 3). Επομένως παρόλο που η αλλαγή που πραγματοποιήσαμε μείωσε τα ΣΥΒ σε απόλυτο αριθμό, ασυμπτωτικά δεν επέφερε διαφορά. Για να ανιχνεύσουμε μέχρι ποιου σημείου αλλαγές στον κώδικα δεν επιφέρουν αλλαγές στην ασυμπτωτική συμπεριφορά του αλγόριθμου, ας θεωρήσουμε ότι ο συνολικός αριθμός των ΣΥΒ που εκτελούνται σε κάθε επανάληψη του εσωτερικού βρόχο είναι c_1 ενώ σε κάθε επανάληψη του εξωτερικού βρόχου c_2. Χωρίς να προσδιορίσουμε επακριβώς τα c_1, c_2 - γνωρίζουμε μόνο ότι είναι αριθμοί μεγαλύτεροι του μηδενός - μπορούμε να γράψουμε τον συνολικός αριθμό των ΣΥΒ του αλγόριθμου ως

$$T''(n) = \sum_{j=0}^{n-1}(c_1 \cdot j) + c_2(n-1) + c3 = c_1\frac{n(n-1)}{2} + c_2(n-1) + c_3,$$

όπου $c_3 > 0$. Από το Πόρισμα 3 άμεσα έχουμε ότι $T''(n) = \Theta(n^2)$ και άρα η συνάρτηση $T''(n)$ ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με τις $T(n), T'(n)$.

Το παραπάνω παράδειγμα είναι αποκαλυπτικό: η ασυμπτωτική συμπεριφορά ενός αλγόριθμου δεν επηρεάζεται από τον αριθμό των ΣΥΒ εφόσον ο αριθμός αυτός είναι σταθερός, δηλαδή, δεν εξαρτάται από την παράμετρο n που αντικατοπτρίζει το μέγεθος του στιγμιότυπου. Εξαρτάται από τον αριθμό των ΣΥΒ όταν αυτός αποτελεί συνάρτηση του n. Στον Αλγόριθμο 9 σε κάθε επανάληψη του εσωτερικού βρόχου ο αριθμός των ΣΥΒ είναι σταθερός. Όμως επειδή ο αριθμός των επαναλήψεων είναι συνάρτηση της τιμής του δείκτη j, ο συνολικός αριθμός των ΣΥΒ του εσωτερικού βρόχου, που δίνεται από το γινόμενο των επαναλήψεων επί το σταθερό αριθμό των πράξεων που εκτελείται σε κάθε επανάληψη, αποτελεί επίσης συνάρτηση του j. Ως προς των εξωτερικό βρόχο παρατηρούμε ότι κάθε επανάληψη αντιστοιχεί σε μία τιμή του δείκτη j και για αυτή την τιμή εκτελείται σταθερός αριθμός ΣΥΒ εκτός από τα ΣΥΒ που αφορούν τον εσωτερικό βρόχο τα οποία αυξάνουν ευθέως ανάλογα με την τιμή του δείκτη j. Έτσι διαμορφώνεται η τάξη μεγέθους των ΣΥΒ του αλγόριθμου: ο δείκτης j παίρνει n διαφορετικές τιμές και για κάθε τέτοια τιμή εκτελούνται $\Theta(j)$ ΣΥΒ από τον εσωτερικό βρόχο. Άρα ο αριθμός των ΣΥΒ που εκτελούνται από τον εσωτερικό βρόχο συνολικά (κατά την εκτέλεση του αλγόριθμου) δίνεται από το άθροισμα των ΣΥΒ αυτών για κάθε τιμή $j \in \{0, \dots, n-1\}$· με μαθηματικούς όρους, έχουμε

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Theta(j) = \sum_{j=0}^{n-1} c_1 \cdot j = c_1 \sum_{j=0}^{n-1} j = c_1 \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2). \tag{2.23}$$

Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να αναλύσουμε τον Αλγόριθμο 3. Στον αλγόριθμο αυτό υπάρχει μόνο ένας βρόχος. Ο αριθμός των ΣΥΒ σε κάθε επανάληψη είναι σταθερός, έστω $c > 0$, ενώ ο αριθμός των επαναλήψεων είναι ακριβώς n. Άρα ο συνολικός αριθμός των ΣΥΒ είναι $c \cdot n = \Theta(n)$.

Η παραπάνω ανάλυση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο μεγαλύτερος αριθμός των βρόχων που είναι διαδοχικά φωλιασμένοι καθορίζει την ασυμπτωτική συμπεριφορά ενός αλγόριθμου. Θα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί με το συμπέρασμα αυτό αφού δεν ισχύει ως γενικός κανόνας. Για να ισχύει θα πρέπει ο αριθμός των επαναλήψεων του κάθε βρόχου να είναι συνάρτηση - έστω και έμμεσα - της παραμέτρου n που αντανακλά το μέγεθος του στιγμιότυπου και επιπλέον ο αριθμός των ΣΥΒ σε κάθε επανάληψη - εκτός των ΣΥΒ που εκτελούνται από τους εμπεριεχόμενους βρόχους - να είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος της παραμέτρου n. Επιπλέον θα πρέπει να διασαφηνίσουμε ότι οι παραπάνω παρατηρήσεις δεν αφορούν *αναδρομικούς* αλγόριθμους.

2.6 Ασκήσεις

1. Έστω $f(n) = 3n^2 - 5n + 4$. Χωρίς τη χρήση ορίων να δείξετε ότι $f(n) = \Theta(n^2)$.
2. Έστω $a > 1$. Να δείξετε ότι αν $f(n) = \Theta(\lg_a n)$ τότε $f(n) = \Theta(\lg n)$
3. Να δείξετε ότι $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 = \Theta(n^k)$, όπου $n, k \in \mathbb{N}$, και $a_i \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $i \in \{0, \ldots, k\}$.
4. Να δείξετε ότι $\Theta(\lg(n-1)) = \Theta(\lg n) = \Theta(\lg(n+1))$.
5. Να δείξετε ότι $(n+a)^b = \Theta(n^b)$, όπου $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+$.
6. Χωρίς τη χρήση ορίων, να δείξετε ότι $n^2 \neq O(n)$.
7. Για καθένα από τα παρακάτω ζευγάρια $f(n), g(n)$ να δείξετε για ποια(ες) τιμή(ές) $\theta \in \{O, \Omega, \Theta\}$ ισχύει ότι $f(n) = \theta(g(n))$.

   (α΄) $f(n) = n^2 + 3n + 4, g(n) = 6n + 7$

   (β΄) $f(n) = \sqrt{n}, g(n) = \sqrt[3]{n^2}$

   (γ΄) $f(n) = \sqrt{n}, g(n) = \log(n+3)$

   (δ΄) $f(n) = 10 \log n, g(n) = \log n^2$

   (ε΄) $f(n) = n^{1,02}, g(n) = n \lg n$

   (στ΄) $f(n) = n + \sqrt{n}, g(n) = 4n \log(n+1)$

(ζ′) $f(n) = \frac{n^2}{\lg n}, g(n) = n \lg^2 n$
(η′) $f(n) = n2^n, g(n) = 3^n$
(θ′) $f(n) = \lg^{\lg n} n, g(n) = \frac{n}{\lg n}$
(ι′) $f(n) = \log^{10^6} n, g(n) = n^{10^{-6}}$
(ια′) $f(n) = \sqrt{n}, g(n) = \lg^3 n$
(ιβ′) $f(n) = \lg^{\lg n} n, g(n) = 2^{\lg^2 n}$
(ιγ′) $f(n) = 5\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1, g(n) = n - \lceil\sqrt{n}\rceil$

8. Να δείξετε ότι
   (α′) $n^2 = o(n^3)$,
   (β′) $2n^2 \neq o(n^2)$,
   (γ′) $2^{2n} \neq o(2^n)$,
   (δ′) $\lg n = o(n)$,
   (ε′) $n = o(2^n)$.

9. Να απαντήσετε αν η καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος αιτιολογώντας την απάντηση σας.
   (α′) $o(g(n)) \cap \omega(g(n)) \neq \emptyset$
   (β′) $2^{2n} = o(2^n)$
   (γ′) $c^{\lg^2 n} = o(\lg^2 n)$, για $c > 1$,
   (δ′) $2^{n^2} = O((2^n)^2)$
   (ε′) $\Theta(2^{2+5n} + 1000 \cdot 3^{2(1+n)}) = \Theta(32^n)$

10. Είναι $f(n) = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} i} =$
   (α′) $O(n)$;
   (β′) $\omega(n \lg n)$;
   (γ′) $\Omega(\sqrt[n]{n})$;
   (δ′) $\Omega(n^{-1})$;

   Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

11. Να δείξετε ότι $\lg n! = \Theta(n \lg n)$.

12. Να δείξετε ότι $\binom{2n}{n} = \Omega(2^n)$.

13. Έστω k, n θετικοί ακέραιοι. Να δείξετε ότι $\sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta(n^{k+1})$.

14. Έστω a θετικός πραγματικός αριθμός και $f(n) = \sum_{j=0}^{n} a^j$. Να δείξετε ότι
$$f(n) = \begin{cases} \Theta(1), & \text{αν } a < 1, \\ \Theta(n), & \text{αν } a = 1, \\ \Theta(a^n), & \text{αν } a > 1. \end{cases}$$

15. Για $a > 1$ να δείξετε ότι $a^{n^{-1}} = \Theta(1)$.

16. Χωρίς τη χρήση ορίων να δείξετε ότι αν $p(n)$ είναι ασυμπτωματικά θετικό πολυώνυμο βαθμού d τότε $p(n) = \Theta(n^d)$.

17. Ισχύει ότι $2^{(1+O(\frac{1}{n}))^2} = 2 + O(1/n)$;