Τάξεις Συναρτήσεων

Δ. Μάγος

12 Φεβρουαρίου 2020

Προβλήματα

Πρόβλημα: ένα ερώτημα το οποίο πρέπει να απαντηθεί με την επεξεργασία κάποιων δεδομένων (παραμέτρων). Απαιτείται

- περιγραφή των δεδομένων - τι συμβολίζει η κάθε παράμετρος
- πρόταση που να περιγράφει τις ιδιότητες της απάντησης (λύσης) που πρέπει να ικανοποιούνται.

Στιγμιότυπο: Έκφραση ενός προβλήματος όταν οι παράμετροι έχουν πάρει συγκεκριμένες τιμές.

Παράδειγμα

Ταξινόμηση

Ταξινομήστε τους αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_n$ σε αύξουσα σειρά.

Στιγμιότυπο:

Ταξινομήστε τους αριθμούς $5, 2, 8, 1, 9$ σε αύξουσα σειρά.

Αλγόριθμος

- Ένας αλγόριθμος είναι μία *βηματική διαδικασία* για την επίλυση ενός προβλήματος.
- Ένας αλγόριθμος *επιλύει* ένα πρόβλημα Π αν απαντάει (λύνει) σωστά κάθε στιγμιότυπο του Π

Παράδειγμα 1 *Ο αλγόριθμος*

Γράψε με αντίστροφη σειρά τα δεδομένα.

δεν επιλύει το πρόβλημα της ταξινόμησης παρ΄όλο που για συγκεκριμένες σειρές δεδομένων (συγκεκριμένα στιγμιότυπα) επιστρέφει τη σωστή απάντηση - ένα τέτοιο στιγμιότυπο είναι η σειρά

$$9, 6, 4, 1$$

Αναγκαιότητα

Ερωτήματα

- Πως μπορεί να αξιολογηθεί ένας αλγόριθμος ;
- Υπάρχει μέτρο σύγκρισης ανάμεσα σε δύο αλγόριθμους οι οποίοι επιλύουν το ίδιο πρόβλημα ; Μπορούμε να πούμε ότι ο ένας είναι *καλύτερος* - *αποτελεσματικότερος* από τον άλλο ;

Απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα επιχειρεί να δώσει *η θεωρία πολυπλοκότητας*. Ο όρος 'Πολυπλοκότητα' υποδηλώνει όχι το πόσο πολύπλοκη - δύσκολη στην κατανόηση- είναι η σκέψη που υλοποιεί ένας αλγόριθμος. Αντίθετα υπονοεί τη χρήση *των πόρων* την οποία κάνει ένας αλγόριθμος. Προφανώς η μικρότερη χρήση πόρων υποδηλώνει την καλύτερη αξιολόγηση του αλγόριθμου.

Πόροι

Χώρος: Η μνήμη που χρησιμοποιεί ένας αλγόριθμος· αριθμός μεταβλητών, μέγεθος κάθε μεταβλητής, δυναμικές δομές μνήμης, κλπ.

Χρόνος: Αριθμός των στοιχειωδών πράξεων. Με μικρή βλάβη της γενικότητας, στοιχειώδης πράξη θεωρείται κάθε λογική και αριθμητική πράξη - για απλότητα, αγνοούμε εκχωρήσεις και κλήσεις σε υποπρογράμματα.

Στα παρακάτω θα επικεντρωθούμε στην ανάλυση των αλγορίθμων σε σχέση με το χρόνο.

Παράδειγμα

Ο παρακάτω αλγόριθμος υπολογίζει το άθροισμα n όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο το x και βήμα t. Ο αλγόριθμος θα δέχεται σαν είσοδο τιμές για n, x, t.

Αλγόριθμος Άθροισμα

Διάβασε n, x, t

$athroisma \leftarrow 0 : i \leftarrow 1$

Επανέλαβε

$athroisma \leftarrow athroisma + x$

$x \leftarrow x + t$

$i \leftarrow i + 1$

Μέχρις_ότου $i > n$

Αποτελέσματα // $athroisma$ //

Τέλος Άθροισμα

Αριθμός Στοιχειωδών Πράξεων

Αριθμός προσθέσεων σε κάθε επανάληψη: 3

Αριθμός συγκρίσεων: 1

Αριθμός επαναλήψεων: n

Συνολικός Αριθμός Στοιχ. Πράξεων:

$$T(n) = 4 \cdot n$$

Η παράμετρος n

Όπως φάνηκε και στο παράδειγμα, ο αριθμός των στοιχειωδών πράξεων $T(n)$ είναι *συνάρτηση* της παραμέτρου n. Η παράμετρος αυτή αντικατοπτρίζει το μέγεθος των δεδομένων. Αυτή είναι μία γενικότερη σύμβαση που θα χρησιμοποιείται στην ανάλυση των αλγορίθμων. Επιπλέον, λόγω της φύσεως του n μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτό παίρνει ακέραιες τιμές. Έτσι με μικρή βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $n \in \mathbb{N}$. Η παράμετρος n ονομάζεται και *μέγεθος εισόδου* του αλγόριθμου.

Γενικότερα μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της συνάρτησης $T(n)$ καθώς η παράμετρος n τείνει στο άπειρο. Δηλαδή μας ενδιαφέρει η *ασυμπτωτική συμπεριφορά* της $T(n)$.

Ορισμός 2 *Η συνάρτηση πολυπλοκότητας χρόνου ενός αλγόριθμου εκφράζει τις απαιτήσεις του ως προς τον αριθμό των στοιχειωδών πράξεων που εκτελεί ο αλγόριθμος για κάθε πιθανό μέγεθος εισόδου.*

Τάξεις Συναρτήσεων

Θεωρούμε συναρτήσεις $g, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Μας ενδιαφέρει πως συγκρίνονται οι συναρτήσεις καθώς το $n \to \infty$.

Ορισμός 3

$$O(g(n)) = \{f(n) : \exists a, n_0 > 0, \quad a \cdot g(n) \geq f(n) \geq 0, \forall n \geq n_0\}$$
$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \exists \beta, n_0 > 0, \quad f(n) \geq \beta \cdot g(n) \geq 0, \forall n \geq n_0\}$$

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(n)$ είναι $O(g(n))$ και θα γράφουμε $f(n) = O(g(n))$ αν $f(n) \in O(g(n))$. Ανάλογες συμβάσεις ισχύουν και για το σύνολο $\Omega(g(n))$. Μία συνάρτηση $f(n)$ είναι $\Theta(g(n))$ ($f(n) = \Theta(g(n))$) αν ισχύει ταυτόχρονα ότι $f(n) = O(g(n))$ και $f(n) = \Omega(g(n))$.

Παράδειγμα 4 *Η συνάρτηση $T(n) = 4n$ που υπολογίσαμε προηγουμένως είναι $\Theta(n)$ αφού για κάθε $n \geq 0$, $4n \leq 5n$ (άρα $T(n) = O(n)$) και $4n \geq 3n$ (άρα $T(n) = \Omega(n)$).*

Email:dmagos@uniwa.gr

Συμβολισμοί

- $\lg x$: λογάριθμος του x με βάση το 2,
- $\lg^k x : (\lg x)^k$,
- $\lg \lg x : \lg(\lg x)$,

Έστω c θετική σταθερά. Τότε $\Theta(1) = c$, και $\Theta(n) = cn$. Γενικότερα, $\Theta(f(n)) = c \cdot f(n)$. Αντίστοιχοι ορισμοί ισχύουν για τα σύνολα O, Ω.

Παράδειγμα

Παράδειγμα 5 *Θεωρήστε*

$$T(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n.$$

Να δείξετε ότι

$$T(n) = \Theta(n^2).$$

Επίλυση

Θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί a, β, n_0 τέτοιοι ώστε

$$\beta \cdot n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq a \cdot n^2, \forall n \geq n_0. \tag{1}$$

Διαιρώντας όλους τους όρους με n^2 έχουμε

$$\beta \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq a, \forall n \geq n_0.$$

Το δεξί μέλος είναι αληθές για $a \geq \frac{1}{2}, n \geq 1$. Έτσι

$$T(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n = O(n^2).$$

Επίλυση (συνέχεια)

Για το αριστερό μέλος της (1) επειδή

$$0 < \beta \le f(n) = \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \tag{2}$$

έχουμε

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{n} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{3}{n} \Rightarrow n > 6. \tag{3}$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(n)$ είναι αύξουσα. Δηλαδή,

$$f(n'') > f(n'), n'' > n' \tag{4}$$

Επίλυση (συνέχεια)

Πράγματι για $n'', n' \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε

$$n'' > n' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n''} < \frac{1}{n'} \Rightarrow -3 \cdot \frac{1}{n''} > -3 \cdot \frac{1}{n'}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{n''} > \frac{1}{2} - \frac{3}{n'}$$

$$\Rightarrow f(n'') > f(n').$$

Επίλυση (συνέχεια)

Από (3), (4) συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $f(n)$ ελαχιστοποιείται για $n = 7$.

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του n στην (2) έχουμε ότι

$$\beta \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{7} \Rightarrow \beta \leq \frac{1}{14}$$

Επομένως, το δεξί μέλος της (2) είναι αληθές για $\beta \leq \frac{1}{14}, n \geq 7$. Ακολούθως, το αριστερό μέλος της (1) ισχύει για $\beta = \frac{1}{14}, n \geq 7$. Δηλαδή,

$$T(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n \geq \frac{1}{14} \cdot n^2, \forall n \geq 7$$

και άρα

$$T(n) = \Omega(n^2).$$

Επίλυση (συνέχεια)

Συνολικά, δείξαμε ότι

$$\beta \cdot n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq \alpha \cdot n^2,$$

ισχύει για $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{14}, n \geq 7$ και άρα

$$T(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2).$$

Τάξεις Συναρτήσεων (συνεχ.)

Πιο ‘αυστηρές’ τάξεις συναρτήσεων δίνονται παρακάτω.

Ορισμός 6

$$o(g(n)) = \{f(n) : \forall a > 0, \exists n_0 > 0, \quad a \cdot g(n) > f(n) \geq 0, \forall n \geq n_0\}$$

$$\omega(g(n)) = \{f(n) : \forall \beta > 0, \exists n_0 > 0, \quad f(n) > \beta \cdot g(n) \geq 0, \forall n \geq n_0\}$$

Ισοδύναμα,

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Τάξεις Συναρτήσεων (συνεχ.)

Παράδειγμα 7 *Η συνάρτηση* $T(n) = 4n$ *είναι* $o(n^2)$ *αφού*

$$\lim \frac{4n}{n^2} = 4 \lim \frac{1}{n} = 0$$

και είναι $\omega(n^{\frac{1}{2}})$ *αφού*

$$\lim \frac{4n}{n^{\frac{1}{2}}} = 4 \lim n^{\frac{1}{2}} = \infty$$

Ασυμπτωτική ταξινόμηση συναρτήσεων

Εμπειρικός Κανόνας

- Οι λογαριθμικές συναρτήσεις είναι μικρότερης τάξης από τις πολυωνυμικές.
- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι μικρότερης τάξης από τις εκθετικές.

Ασυμπτωτική ταξινόμηση συναρτήσεων

Έκφραση	Πολυπλοκότητα
1	Σταθερή
$\lg n$	Λογαριθμική
$\lg^k n$	Πολυλογαριθμική
n	Γραμμική
$n \lg n$	
n^k	Πολυωνυμική
2^n	Εκθετική
$n!$	Παραγοντική
n^n	Υπερεκθετική

Πίνακας 1: Τάξεις Πολυπλοκότητας

Για το σύνολο $O()$, οι τάξεις εμπεριέχονται η μία στην άλλη με τη σειρά που εμφανίζονται στον πίνακα (από επάνω προς τα κάτω). Δηλαδή:

$$O(1) \subset O(\lg n) \subset \cdots \subset O(n^n)$$

Email:dmagos@uniwa.gr

Χρήση ορίων

Μπορούμε να ταξινομήσουμε τις συναρτήσεις με τη χρήση ορίων:

1. αν $\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1$ τότε $f(n) = g(n)$
2. αν $\lim \frac{f(n)}{g(n)} > 1$ τότε $f(n) > g(n)$
3. αν $\lim \frac{f(n)}{g(n)} < 1$ τότε $f(n) < g(n)$

Ασυμπτωτική ταξινόμηση συναρτήσεων (συνεχ.)

Παράδειγμα 8 *Να ταξινομηθούν κατά αύξουσα σειρά οι συναρτήσεις*

$$3^n, \lg^2 n, \lg\lg n^2, 4^{\lg n}, 2n^2$$

Λύση Παρατείρουμε ότι

$$4^{\lg n} = (2^2)^{\lg n} = 2^{2\lg n} = 2^{\lg n^2} = n^2. \tag{5}$$

Εχουμε

$$\lim \frac{2n^2}{4^{\lg n}} = \lim \frac{2n^2}{n^2} = 2 \Rightarrow 2n^2 > 4^{\lg n}. \tag{6}$$

Ασυμπτωτική ταξινόμηση συναρτήσεων (συνεχ.)

Επίσης,

$$\lg\lg n^2 = \lg(2 \cdot \lg n) = \lg 2 + \lg\lg n = 1 + \lg\lg n \tag{7}$$

Από (5), (6), (7) και σύμφωνα με τον εμπειρικό κανόνα

$$3^n > 2n^2 > n^2 > \lg^2 n > 1 + \lg\lg n \Rightarrow$$
$$3^n > 2n^2 > 4^{\lg n} > \lg^2 n > \lg\lg n^2$$

Παρατήρηση: Παρ'όλο που οι συναρτήσεις $2n^2, 4^{\lg n}$ ανήκουν στην ίδια ταξη - είναι αμφότερες $\Theta(n^2)$- ισχύει η παραπάνω κατάταξη.