Ιεραρχία Συναρτήσεων
Ασκήσεις

Δημήτριος Μάγος

23 Μαρτίου 2022

Άσκηση 1. Έστω $f(n) = 3n^2 - 5n + 4$. Χωρίς τη χρήση ορίων να δείξετε ότι $f(n) = \Theta(n^2)$.

Λύση. Θα δείξουμε ότι $f(n) = O(n^2)$ και $f(n) = \Omega(n^2)$. Για το πρώτο θα πρέπει να υπολογίσουμε $\alpha, n_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(n) \leq \alpha \cdot n^2 \Rightarrow 3n^2 - 5n + 4 \leq \alpha \cdot n^2 \tag{1}$$

για κάθε $n \geq n_0$.
Παρατηρούμε ότι $3n^2 - 5n + 4 \leq 3n^2 + 4$, για κάθε $n \geq 0$. Επιπλέον για $n \geq 1$, έχουμε

$$3n^2 + 4 \leq 3n^2 + 4n^2 \leq 7n^2.$$

Άρα για $\alpha = 7, n_0 = 1$ ισχύει η (1).

Αντίστοιχα, θα πρέπει να υπάρχει $\beta, n_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(n) \geq \beta \cdot n^2 \Rightarrow 3n^2 - 5n + 4 \geq \beta \cdot n^2, \tag{2}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως θέλουμε να προσδιορίσουμε τιμή για το β τέτοια ώστε το πολυώνυμο

$$(3 - \beta)n^2 - 5n + 4$$

να παίρνει θετικές τιμές. Θα πρέπει

$$3 - \beta > 0 \Rightarrow 3 > \beta$$

και επιπλέον η διακρίνουσα του να είναι μικρότερη του μηδενός, δηλαδή

$$(-5)^2 - 4 \cdot (3 - \beta) \cdot 4 < 0 \Rightarrow \beta < \frac{23}{16}.$$

Επομένως για οποιαδήποτε τιμή $\beta < \min\{3, \frac{23}{16}\} = \frac{23}{16}$ ισχύει η (1) ανεξαρτήτως της τιμής του n - για παράδειγμα μπορούμε να θέσουμε $\beta = 1$.

Συνολικά για $\alpha = 7, \beta = 1, n_0 = 1$ ισχύουν η (1) και η (2) και άρα και το ζητούμενο. ■

Άσκηση 2. Χωρίς τη χρήση ορίων, να δείξετε ότι $n^2 \neq O(n)$.

Λύση. Έστω ότι ισχύει το αντίθετο: δηλαδή $n^2 = O(n)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $a > 0, n_0 > 0$ τέτοια ώστε

$$n^2 \leq a \cdot n \Rightarrow n \leq a \forall n \geq n0. \tag{3}$$

Θέτουμε $n_1 = \max\{a, n_0\} + 1$. Επομένως,

$$n_1 > n_0, \tag{4}$$
$$n_1 > a. \tag{5}$$

Από την (4) προκύτει ότι ισχύει η (3) για n_1, δηλαδή $n_1 \leq a$. Όμως αυτό έρχεται σε αντίφαση με την (5) ■

Άσκηση 3. Έστω $a > 1$. Να δείξετε ότι αν $f(n) = \Theta(\lg_a n)$ τότε $f(n) = \Theta(\lg n)$

Λύση. Εφόσον $f(n) = \Theta(\lg_a n)$ υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, n_0 τέτοιες ώστε για κάθε $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} c_2 \cdot \lg_a n \leq f(n) \leq c_1 \cdot \lg_a n &\Rightarrow c_2 \cdot \frac{\lg n}{\lg a} \leq f(n) \leq c_1 \cdot \frac{\lg n}{\lg a} \\ &\Rightarrow \frac{c_2}{\lg a} \lg n \leq f(n) \leq \frac{c_1}{\lg a} \lg n \end{aligned}$$

■

Άσκηση 4. Να δείξετε ότι $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 = \Theta(n^k)$, όπου $n, k \in \mathbb{N}$, και $a_i \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $i \in \{0, \ldots, k\}$.

Λύση. Θέτουμε $\hat{a} = \max\{a_i : i = 0, \ldots k\}$. Έχουμε,

$$f(n) \leq (k+1) \cdot \hat{a} \cdot n^k \Rightarrow f(n) = O(n^k) \tag{6}$$

Επειδή $a_i \geq 0$, για κάθε $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, έχουμε ότι

$$a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \geq 0.$$

Προσθέτοντας και στα δύο μέρη τον όρο $a^k \cdot n^k$, έχουμε

$$f(n) \geq a^k \cdot n^k \Rightarrow f(n) = \Omega(n^k). \tag{7}$$

(6), (7) συνεπάγονται το αποτέλεσμα. ■

Άσκηση 5. Νσ δείξετε ότι

1. $\lg n = o(n)$.
2. $n = o(2^n)$

Λύση. 1. Υπολογίζουμε το όριο

$$\begin{aligned} \lim \frac{\lg n}{n} &= \lim \frac{(\lg n)'}{(n)'} && \text{(κανόνας L' Hôpital)} \\ &= \lim \frac{\frac{1}{n \cdot \ln 2}}{1} \\ &= \lim \frac{1}{n \cdot \ln 2} = 0. \end{aligned}$$

2. Κάνοντας και πάλι χρήση του κανόνα L' Hôpital) έχουμε [1]

$$\lim \frac{n}{2^n} = \lim \frac{(n)'}{(2^n)'} = \lim \frac{1}{2^n \cdot \ln 2} = 0$$

■

Άσκηση 6. Να δείξετε ότι

1. $n^2 = o(n^3)$,
2. $2n^2 \neq o(n^2)$,
3. $2^{2n} \neq o(2^n)$

Λύση. 1. $\lim \frac{n^2}{n^3} = \lim \frac{1}{n} = 0$.

2. $\lim \frac{2n^2}{n^2} = \lim 2 = 2 \neq 0$.
3. $\lim \frac{2^{2n}}{2^n} = \lim \frac{2^{n+n}}{2^n} = \lim \frac{2^n \cdot 2^n}{2^n} = \lim 2^n = \infty$.

■

Άσκηση 7. Να απαντήσετε αν η καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος αιτιολογώντας την απάντηση σας.

α) $o(g(n)) \cap \omega(g(n)) \neq \emptyset$

β) $2^{2n} = o(2^n)$

γ) $c^{\lg^2 n} = o(\lg^2 n)$, για $c > 1$,

δ) $2^{n^2} = O((2^n)^2)$

ε) $\Theta(2^{2+5n} + 1000 \cdot 3^{2(1+n)}) = \Theta(32^n)$

[1] Ο υπολογισμός της παραγώγου του $(2^n)'$ προκύπτει ως εξής.

$$2^n = e^{\ln 2^n} = e^{n \ln 2} = (e^n)^{\ln 2} \Rightarrow$$

$$(2^n)' = \left[(e^n)^{\ln 2}\right]' = \left[y^{\ln 2}\right]' \cdot \frac{dy}{dn}. \quad \text{(αλυσωτός κανόνας παραγ.)}$$

όπου $y = e^n$. Επειδή

$$\left[y^{\ln 2}\right]' = \ln 2 \cdot y^{-1+\ln 2} = \ln 2 \cdot (e^n)^{-1+\ln 2}$$

και $\frac{dy}{dn} = e^n$, έχουμε

$$(2^n)' = \ln 2 \cdot (e^n)^{-1+\ln 2} \cdot e^n = \ln 2 \cdot (e^n)^{\ln 2} = \ln 2 \cdot (e^{\ln 2})^n = \ln 2 \cdot 2^n.$$

Λύση. **α)** Αν ισχύει το δοθέν τότε υπάρχει συνάρτηση $f(n) = o(g(n))$ και $f(n) = \omega(g(n))$. $f(n) = o(g(n))$ σημαίνει ότι για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει $f(n) < \alpha \cdot g(n)$ για $n \geq n_0$. Έστω λοιπόν $\alpha = 3$ και επομένως έχουμε ότι

$$f(n) < 3 \cdot g(n), \forall n \geq n_0. \tag{8}$$

Ομοίως $f(n) = \omega(g(n))$ σημαίνει ότι για κάθε $\beta > 0$ ισχύει $f(n) > \beta \cdot g(n)$ για $n \geq n_0'$. Αυτό όμως ισχύει και για $\beta = 3$. Άρα για $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$ ισχύει ταυτόχρονα η (8) και ότι $f(n) > 3 \cdot g(n)$ (Άτοπο).

β) Λάθος αφού

$$\lim \frac{2^{2n}}{2^n} = \lim \frac{2^{n+n}}{2^n} = \lim \frac{2^n \cdot 2^n}{2^n} = \lim 2^n = \infty$$

γ) Λάθος αφού θέτοντας $v = \lg^2 n$ το δοθέν γίνεται $c^v = o(v)$ το οποίο σημαίνει ότι για κάθε $c^{'}$

$$c^v < c' v, v \geq v_0.$$

Αυτό όμως δεν ισχύει για $c' = c = 2$.

δ) Λάθος αφού $\lg 2^{n^2} = n^2$ και $\lg(2^n)^2 = 2n \lg 2 = 2n$.

ε) Σωστό αφού

$$\begin{aligned} f(n) = 2^{2+5n} + 1000 \cdot 3^{2(1+n)} = 2^2 \cdot 2^{5n} + 1000 \cdot 9 \cdot 9^n, \Rightarrow \\ f(n) = 4 \cdot (2^5)^n + 9000 \cdot 9^n = 4 \cdot (32)^n + 9000 \cdot 9^n. \end{aligned} \tag{9}$$

Επειδή

$$4 \cdot (32)^n + 9000 \cdot 9^n \leq 4 \cdot (32)^n + 9000 \cdot 32^n = 9004 \cdot 32^n \Rightarrow f(n) = O(32^n).$$

Επίσης, επειδή

$$4 \cdot (32)^n + 9000 \cdot 9^n \geq 4 \cdot (32)^n \Rightarrow f(n) = \Omega(32^n).$$

Συνολικά, $f(n) = \Theta(32^n)$.

■

Άσκηση 8. Καθώς $n \to \infty$, να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τις συναρτήσεις

1. $f_1 = 2^{\lg \sqrt{n^n}}$
2. $f_2 = 3^{n^2}$
3. $f_3 = n^2 \cdot 2^{\lg \lg n^3}$

4. $f_4 = n^{\sqrt{n}}$

5. $f_5 = 2^{\sqrt{2\lg n}}$

Λύση.

$$f_5 = 2^{\sqrt{2\lg n}} = 2^{\sqrt{\lg n^2}} = 2^{(\lg n^2)^{1/2}}.$$

και

$$f_3 = n^2 \cdot 2^{\lg\lg n^3} = n^2 \cdot \lg n^3 > n^2 = 2^{\lg n^2}.$$

Επομένως

$$f_3 > f_5. \tag{10}$$

Επίσης,

$$f_1 = 2^{\lg\sqrt{n^n}} = \sqrt{n^n} = n^{\frac{n}{2}} \tag{11}$$

και επειδή $\frac{n}{2} > \sqrt{n}$, για κάθε $n > 4$,

$$f_1 = n^{\frac{n}{2}} > n^{\sqrt{n}} = f_4. \tag{12}$$

Επειδή,για $n > 10$, $\sqrt{n} > 3$,

$$f_4 = n^{\sqrt{n}} > n^3,$$

και

$$n^3 \geq n^2 \cdot \lg n^3 = f_3,$$

συνεπάγεται ότι

$$f_4 > f_3. \tag{13}$$

Τέλος, από την (11) έχουμε

$$f_1 = n^{\frac{n}{2}} = 3^{\lg_3 n^{\frac{n}{2}}} = 3^{\frac{n}{2}\lg_3 n}.$$

Γνωρίζοντας ότι $n > n/2$ και $n > \lg_3 n$, για $n \geq 3$, έχουμε ότι $n^2 > \frac{n}{2}\lg_3 n$. Επομένως,

$$f_2 = 3^{n^2} > 3^{\frac{n}{2}\lg_3 n} = f_1. \tag{14}$$

Συνολικά από (10), (12),(13),(14) έχουμε

$$f_2 > f_1 > f_4 > f_3 > f_5.$$

■

Άσκηση 9. Είναι $f(n) = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} i} =$

α) $O(n)$;

β) $\omega(n \lg n)$;

γ) $\Omega(\sqrt[n]{n})$;

δ) $\Omega(n^{-1})$;

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση. α) Επειδή

$$\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} i} \leq \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} n} = \sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt{n^2} = n,$$

έχουμε ότι $f(n) = O(n)$.

β) Πριν δείξαμε ότι $f(n) \leq c \cdot n$. Επειδή $n = o(n \lg n)$ συνεπάγεται ότι $f(n) < \alpha \cdot n \lg n$, για κάθε $\alpha > 0$. Άρα $f(n) = o(n \lg n)$ και επειδή $o(n \lg n) \cap \omega(n \lg n) = \emptyset$ (Άσκηση 7α) συνεπάγεται $f(n) \neq \omega(n \lg n)$.

γ)

$$\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} i} \geq \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} 1} \geq \sqrt[n]{n}$$

και επομένως $f(n) = \Omega(\sqrt[n]{n})$.

δ)

$$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} \geq n^{-1}$$

και επειδή $f(n) = \Omega(\sqrt[n]{n})$ συνεπάγεται ότι $f(n) = \Omega(n^{-1})$.

Άσκηση 10. Να δείξετε ότι $\lg n! = \Theta(n \lg n)$.

Λύση

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n \Rightarrow$$

$$\lg n! = \sum_{i=1}^{n} \lg i$$

Παρατηρήστε ότι κάθε όρος του παραπάνω αθροίσματος είναι μικρότερος-ίσος του $\lg n$. Επομένως,

$$\lg n! = \sum_{i=1}^{n} \lg i \leq \sum_{i=1}^{n} \lg n = n \cdot \lg n$$

$$\Rightarrow \lg n! = O(n \cdot \lg n)$$

Επίσης,

$$\lg n! = \sum_{i=1}^{n} \lg i \geq \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \lg i$$

Κάθε όρος του παραπάνω αθροίσματος είναι μικρότερος του $\lg \frac{n}{2}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \lg n! &\geq \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \lg i \geq \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \lg \frac{n}{2} \\ &= \frac{n}{2} \cdot \lg \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \cdot (\lg n - \lg 2) = \frac{n}{2} \cdot (\lg n - 1) \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι $\lg n! = \Omega(n \cdot \lg n)$ θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{n}{2} \cdot (\lg n - 1) \geq c \cdot n \lg n \tag{15}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lg n}\right) \geq c.. \tag{16}$$

Επειδή $c > 0$ θα πρέπει

$$\left(1 - \frac{1}{\lg n}\right) > 0$$

και επομένως $n > 2$. Αν για παράδειγμα $n = 4$, μία παραδεκτή τιμή, που προκύπτει από την (16), είναι $c = 1/4$. Άρα η (15) ισχύει για $c = 1/4, n \geq 4$ και επομένως $\lg n! = \Omega(n \cdot \lg n)$. Συνολικά, $\lg n! = \Theta(n \cdot \lg n)$.

■

Άσκηση 11. Για $a > 1$ να δείξετε ότι $a^{n^{-1}} = \Theta(1)$.

Λύση. Το ζητούμενο ισοδυναμεί με το να δείξουμε ότι $\lim \frac{a^{n^{-1}}}{1} = c$ όπου $0 < c < \infty$. Θα δείξουμε ότι η σχέση αυτή ισχύει για $c = 1$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμητής του παραπάνω κλάσματος είναι ίσος με 1. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει (από τον ορισμό του ορίου) για κάθε $\epsilon > 0$ να προσδιορίσουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left|a^{n^{-1}} - 1\right| < \epsilon \text{ όποτε } n > \delta.$$

Παρατηρούμε ότι επειδή $a > 1 \Rightarrow a^{n^{-1}} - 1 > 0$ και επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται

$$a^{n^{-1}} - 1 < \epsilon \Rightarrow a^{n^{-1}} < 1 + \epsilon \Rightarrow n^{-1} < \log_a(1+\epsilon) \Rightarrow n > \frac{1}{\log_a(1+\epsilon)}.$$

Επομένως θέτοντας δ ίσο με το δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας έχουμε το ζητούμενο. ■

Άσκηση 12. Να δείξετε ότι
$$\binom{2n}{n} = \Omega(2^n)$$

Λύση. Έχουμε,
$$\begin{aligned}
T(n) = \binom{2n}{n} &= \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdots(2n-1)\cdot 2n}{n!\cdot n!}\\
&= \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot 2n}{n!\cdot n!}\\
&= \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdots 2(n-1)\cdot 2n}{n!\cdot n!}\\
&= \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot 2^n\cdot n!}{n!\cdot n!}\\
&= 2^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}
\end{aligned}$$

Ο αριθμητής του κλάσματος που εμφανίζεται στην παραπάνω παράσταση περιέχει n όρους. Επιπλέον, για κάθε όρο του γινομένου του παρανομαστή υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος στο γινόμενο του αριθμητή που είναι μεγαλύτερος-ίσος από αυτόν. Δηλαδή,
$$\begin{aligned}
1 &\leq 1\\
2 &\leq 3\\
3 &\leq 5\\
&\cdots\\
n &\leq 2n-1.
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά όρους στις παραπάνω ανισότητες έχουμε
$$n! \leq 1\cdot 3\cdots 2n-1.$$

Επομένως
$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!} > 1$$

και άρα
$$T(n) = \binom{2n}{n} = 2^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!} \geq 2^n.$$

■

Άσκηση 13. Χωρίς τη χρήση ορίων να δείξετε ότι αν $p(n)$ είναι ασυμπτωματικά θετικό πολυώνυμο βαθμού d τότε $p(n) = \Theta(n^d)$.

Λύση. Θα πρέπει να δείξουμε ότι $p(n) = O(n^d)$ και $p(n) = \Omega(n^d)$. Το $p(n)$ γράφεται ως

$$p(n) = a_d n^d + \sum_{k \in K} a_k n^k,$$

όπου $K = \{0, \ldots, d-1\}$. Μπορούμε να διαμερίσουμε στο σύνολο K στα σύνολα K^+, K^- ως εξής.

$$K^+ = \{k \in K : a_k \geq 0\}, \quad K^- = \{k \in K : a_k < 0\}.$$

Το $p(n)$ γράφεται ως

$$p(n) = a_d n^d + \sum_{k \in K^+} a_k n^k + \sum_{k \in K^-} a_k n^k. \tag{17}$$

Έστω $k_1 =\mid K^+ \mid$ και $k_2 =\mid K^- \mid$. Εξ'ορισμού $k_1 + k_2 \leq d$.

Θεωρούμε $\lambda = \max\{a_k : k \in K^+ \cup \{d\}\}$. Από την (17) έχουμε,

$$\begin{aligned} p(n) \leq & a_d n^d + \sum_{k \in K^+} a_k n^k \leq \lambda \cdot n^d + \sum_{k \in K^+} \lambda n^k \leq (k_1 + 1) \cdot \lambda \cdot n^d \\ \Rightarrow p(n) \leq & a \cdot n^d, \end{aligned}$$

όπου $a = (k_1 + 1) \cdot \lambda$. Επομένως $p(n) = O(n^d)$.

Για να υπολογίσουμε ένα κάτω φράγμα για το $p(n)$, θεωρούμε $\delta = \min\{\mid a_k \mid : k \in K^-\}$. Από την (17) έχουμε,

$$\begin{aligned} p(n) \geq & a_d n^d + \sum_{k \in K^-} a_k n^k \\ = & a_d n^d - \sum_{k \in K^-} \mid a_k \mid n^k \geq a_d n^d - k_2 \cdot \delta \cdot n^{d-1} \end{aligned} \tag{18}$$

Για να δείξουμε ότι $p(n) = \Omega(n^d)$ αρκεί να βρούμε $b, n_0 > 0$ με την ιδιότητα ότι το δεξί μέλος της (18) να είναι μεγαλύτερο-ίσο με bn^d, για κάθε $n \geq n_0$. Θεωρούμε $b = a_d/2$. Προφανώς $b > 0$ αφού $a_d > 0$. Άρα για αυτή την τιμή του b θα πρέπει να προσδιορίσουμε αν υπάρχει n_0 θετικό με την παραπάνω ιδιότητα. Έχουμε

$$a_d n^d - k_2 \cdot \delta \cdot n^{d-1} \geq \frac{a_d}{2} n^d \Rightarrow n \geq \frac{2 \cdot k_2 \cdot \delta}{a_d}.$$

Όλοι οι όροι στο δεξί μέλος της τελευταίας ανισότητας είναι θετικοί και άρα η τιμή του κλάσματος είναι θετικός. Επομένως θέτοντας

$$b = \frac{a_d}{2}, \quad n_0 = \lceil \frac{2 \cdot k_2 \cdot \delta}{a_d} \rceil$$

έχουμε το ζητούμενο. ■

Άσκηση 14. Ισχύει ότι $2^{(1+O(\frac{1}{n}))^2} = 2 + O(1/n)$;

Λύση. Ο όρος $O(1/n)$ αντιπροσωπεύει γενικώς συναρτήσεις $f(1/n)$ οι οποίες ανήκουν στην κλάση $O(1/n)$. Άρα τα δύο μέλη της προς απόδειξη ισότητας γράφονται ως

$$g_1(n) = 2 + O(1/n) = 2 + f_1(1/n), \text{ με } f_1(1/n) = O(1/n), \tag{19}$$

$$g_2(n) = 2^{(1+O(\frac{1}{n}))^2} = 2^{(1+f_2(\frac{1}{n}))^2} \text{ με } f_2(1/n) = O(1/n). \tag{20}$$

Επομένως υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ τέτοια ώστε

$$g_1(n) \leq 2 + c_1 \cdot (1/n), \tag{21}$$

$$g_2(n) \leq 2^{(1+c_2\cdot\frac{1}{n}))^2}, \tag{22}$$

για n μεγαλύτερο-ίσο μίας θετικής σταθεράς n_0.

Για το άνω φράγμα της $g_1(n)$ έχουμε ότι

$$\lim 2 + c_1 \cdot (1/n) = 2 + c_1 \lim n^{-1} = 2 + c_1 \cdot 0 = 2. \tag{23}$$

Για το άνω φράγμα της $g_2(n)$ έχουμε ότι

$$\lim 2^{(1+c_2\cdot\frac{1}{n}))^2} = \lim 2 \cdot (2^{2c_2})^{n^{-1}} \cdot (2^{c_2^2})^{n^{-2}}.$$

Επειδή $c_2 > 0$, έχουμε ότι $2^{2c_2}, 2^{c_2^2} > 1$. Επομένως,

$$\lim(2^{2c_2})^{1/n} = 1 \text{ και } \lim(2^{c_2^2})^{1/n^2} = 1.$$

Συνεπώς,

$$\lim 2^{(1+c_2\cdot\frac{1}{n}))^2} = \lim 2 \cdot \lim(2^{2c_2})^{n^{-1}} \cdot \lim(2^{c_2^2})^{n^{-2}} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2. \tag{24}$$

Επίσης από (19), (20) αγνοώντας τον μη-αρνητικό όρο $O(1/n)$ ισχύει $g_1(n), g_2(n) \geq 2$. Αυτό σε συνδυασμό με (23), (24) δίνει

$$2 \leq \lim g_i(n) \leq 2 \Rightarrow \lim g_i(n) = 2, i = 1, 2. \tag{25}$$

Άρα

$$\lim \frac{g_1(n)}{g_2(n)} = \frac{\lim g_1(n)}{\lim g_2(n)} = \frac{2}{2} = 1$$

και επομένως από την ασυμπτωτική κατάταξη συναρτήσεων ισχύει ότι $g_1(n) = g_2(n)$.

■