Αναδρομικές Σχέσεις
Ασκήσεις

Δημήτριος Μάγος

27 Απριλίου 2020

Άσκηση 1 *Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των επαναληπτικών (διαδοχικών) αντικαταστάσεων να δώσετε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για την σχέση*

$$T(n) = \begin{cases} 3T(\frac{n}{2}) + \Theta(n), & n \geq 2, \\ 1 & n \leq 1. \end{cases}$$

Λύση Εξ' ορισμού $\Theta(n) = c \cdot n$ για κάποιο $c > 0$. Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(\frac{n}{2}) + cn = 3\left(3T(\frac{\frac{n}{2}}{2}) + c\frac{n}{2}\right) + cn \\ &= 3^2 T(\frac{n}{2^2}) + cn\left(1 + \frac{3}{2}\right) \\ &= 3^2\left(3T(\frac{\frac{n}{2^2}}{2}) + c\frac{n}{2^2}\right) + cn\left(1 + \frac{3}{2}\right) \\ &= 3^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + cn\left(1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) \\ &= \ldots \\ &= 3^k T(\frac{n}{2^k}) + cn\left(\left(\frac{3}{2}\right)^0 + \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\right) \\ &= 3^k T(\frac{n}{2^k}) + cn\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^j. \end{aligned}$$

Για $k = \lg n$, έχουμε $\frac{n}{2^k} = 1$. Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή του k στην παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3^{\lg n} + cn \sum_{j=0}^{\lg n - 1} \left(\frac{3}{2}\right)^j = n^{\lg 3} + cn \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n}}{1 - \frac{3}{2}} = n^{\lg 3} + cn \frac{1 - n^{\lg \frac{3}{2}}}{-\frac{1}{2}} \\
&= n^{\lg 3} - 2cn(1 - n^{\lg \frac{3}{2}}) = n^{\lg 3} - 2cn(1 - n^{\lg 3 - 1}) \\
&= n^{\lg 3} - 2cn(1 - \frac{n^{\lg 3}}{n}) \\
&= n^{\lg 3} - 2c(n - n^{\lg 3}) \Rightarrow \\
T(n) &= n^{\lg 3}(1 + 2c) - 2cn \qquad (1)
\end{aligned}$$

Από την (1) έχουμε ότι

$$T(n) = n^{\lg 3}(1 + 2c) - 2cn \Rightarrow T(n) \leq a \cdot n^{\lg 3}, \qquad (2)$$

όπου $\boxed{a = 1 + 2c.}$ Συνεπώς, $T(n) = O(n^{\lg 3})$.

Αντίστοιχα, για να είναι $T(n) = \Omega(n^{\lg 3})$ θα πρέπει να υπάρχει $b > 0$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}
n^{\lg 3}(1 + 2c) - 2cn &\geq b \cdot n^{\lg 3} \qquad (3) \\
\Rightarrow (1 + 2c - b)n^{\lg 3} &\geq 2cn.
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $n \geq 1$ αν

$$1 + 2c - b \geq 2c \Rightarrow \boxed{1 \geq b.}$$

Συνολικά, (2), (3) συνεπάγονται $T(n) = \Theta(n^{\lg 3})$.

Άσκηση 2 *Να δώσετε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για τη συνάρτηση*

$$T(n) = \begin{cases} 3T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + \Theta(n), & n \geq 4, \\ 1 & n \leq 3. \end{cases}$$

Λύση Αρχικά θα μελετήσουμε τη δοθείσα συνάρτηση χωρίς το 'πάτωμα', δηλαδή θα μελετήσουμε τη συνάρτηση:

$$\hat{T}(n) = \begin{cases} 3\hat{T}(\frac{n}{4}) + \Theta(n), & n \geq 4, \\ 1, & n \leq 3. \end{cases}$$

Για $n > 1$ και κάποιο $c > 0$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned}
\hat{T}(n) &= 3\hat{T}(\frac{n}{4}) + cn \\
&= 3\left(3\hat{T}(\frac{\frac{n}{4}}{4}) + c\frac{n}{4}\right) + cn \\
&= 3^2\hat{T}(\frac{n}{4^2}) + cn(1 + \frac{3}{4}) \\
&= \ldots \\
&= 3^k T(\frac{n}{4^k}) + cn\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{3}{4}\right)^i \qquad (4)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{n}{4^k} = 1$ για $k = \frac{\lg n}{2}$. Αντικαθιστώντας, με αυτή την τιμή του k στην (4) έχουμε

$$\begin{aligned}
\hat{T}(n) &= 3^{\frac{\lg n}{2}} + cn\sum_{i=0}^{\frac{\lg n}{2}-1}\left(\frac{3}{4}\right)^i \\
&\leq 3^{\lg n^{\frac{1}{2}}} + cn\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i \\
&\leq 4^{\lg n^{\frac{1}{2}}} + cn\frac{1}{1-\frac{3}{4}} \\
&= \left(n^{\frac{1}{2}}\right)^{\lg 4} + cn\frac{1}{\frac{1}{4}} \\
&= n + 4cn \Rightarrow \\
\hat{T}(n) &= O(n).
\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στην αρχικώς δοθείσα σχέση κάνουμε την εικασία ότι έχει αντίστοιχη πολυπλοκότητα. Η απόδειξη γίνεται με τη χρήση επαγωγής: θα δείξουμε ότι υπάρχει $a >$ τέτοιο ώστε $T(n) \leq a \cdot n$ για n αρκετά μεγάλο. Σαν επαγωγική υπόθεση θεωρούμε ότι κάτι τέτοιο ισχύει για $T(\lfloor\frac{n}{4}\rfloor)$, δηλαδή

$$\begin{aligned}
T(\lfloor\frac{n}{4}\rfloor) &\leq a \cdot \lfloor\frac{n}{4}\rfloor \Rightarrow \\
T(n) &\leq 3a \cdot \lfloor\frac{n}{4}\rfloor + cn \\
&\leq 3a \cdot \frac{n}{4} + cn \\
&\leq a \cdot n,
\end{aligned}$$

για $\boxed{a \geq 4c.}$ Επίσης από την οριακή συνθήκη έχουμε ότι

$$T(3) = 1 \leq a \cdot 3 \Rightarrow \boxed{a \geq 1/3}$$

Επειδή

$$T(n) = 3T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + c \cdot n \geq cn \Rightarrow \boxed{T(n) = \Omega(n).}$$

Συνεπώς, $T(n) = \Theta(n)$.

Άσκηση 3 *Θεωρώντας ότι $n = 2^t, t \geq 1$ και με τη χρήση του δένδρου αναδρομής να δώσετε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για τις σχέση*

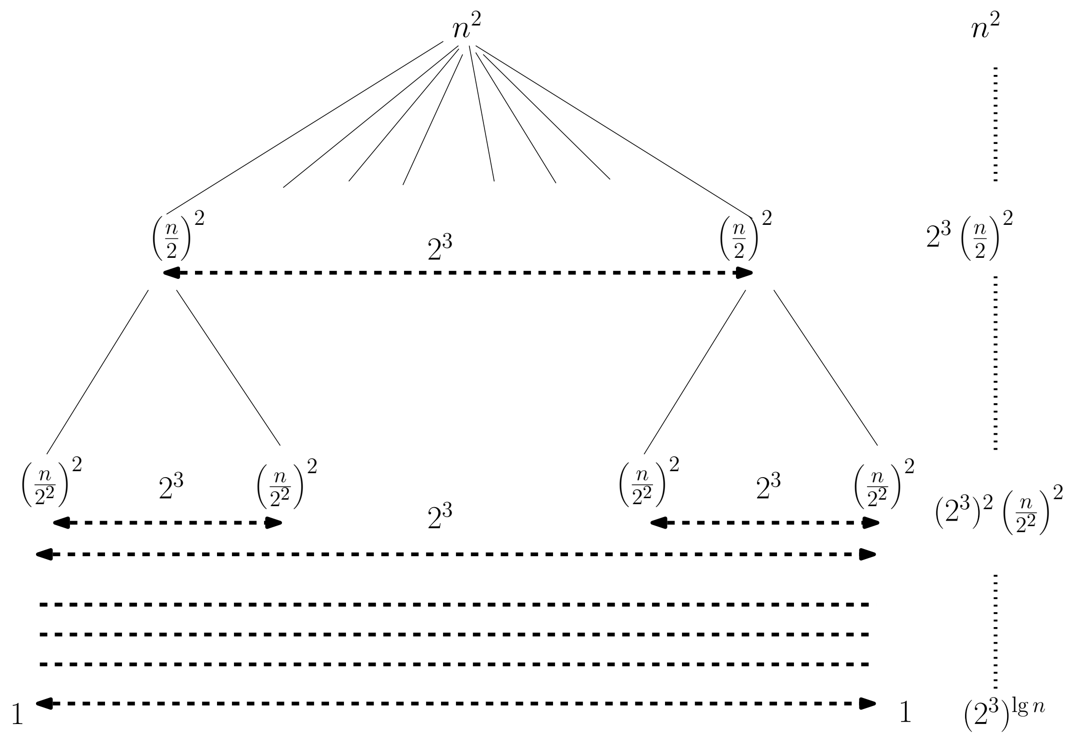
$$T(n) = \begin{cases} 8T(\frac{n}{2}) + n^2, & n \geq 2, \\ 1, & n = 1. \end{cases}$$

Λύση Εφόσον το n είναι δύναμη του 2, το $\lg n$ δίνει επακριβώς το ύψος του δένδρου αναδρομής αφού είναι ακέραιος: η ρίζα βρίσκεται σε επίπεδο 0 ενώ τα φύλλα σε επίπεδο $\lg n$. Το δένδρο αναδρομής απεικονίζεται στο Σχήμα 1. Παρατηρούμε ότι το η συνεισφορά του επιπέδου j στη συνάρτηση δίνεται από τον τύπο

$$\begin{array}{ll} (2^3)^j \left(\dfrac{n}{2^j}\right)^2, & 0 \leq j \leq \lg n - 1, \\ (2^3)^j, & j = \lg n. \end{array}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} T(n) &= (2^3)^{\lg n} + n^2 \sum_{j=0}^{\lg n - 1} \frac{(2^3)^j}{(2^j)^2} \\ &= n^{\lg 2^3} + n^2 \sum_{j=0}^{\lg n - 1} \frac{(2^3)^j}{(2^2)^j} \\ &= n^3 + n^2 \sum_{j=0}^{\lg n - 1} 2^j \\ &= n^3 + n^2(2^{\lg n} - 1) \\ &= n^3 + n^2(n - 1) \\ &= 2n^3 - n^2. \end{aligned}$$



Σχήμα 1: Δένδρο αναδρομής, άσκηση 3

Επειδή $2n^3 - n^2 \leq 2n^3$, έχουμε ότι $T(n) = O(n^3)$. Για να δείξουμε ότι $T(n) = \Omega(n^3)$ θα πρέπει να βρούμε $b, n_0 > 0$ τέτοια ώστε

$$2n^3 - n^2 \geq bn^3, \forall n \geq n_0. \tag{5}$$

Ισοδύναμα,

$$2 - \frac{1}{n} \geq b > 0 \Rightarrow n > 1/2 \Rightarrow n \geq 1, \tag{6}$$

αφού $n \in \mathbb{N}$.
Το δεξί μέλος της (6) είναι αύξουσα συνάρτηση με ελάχιστη τιμή για $n = 1$. Άρα για $b \leq 1, n_0 = 1$ ισχύει η (5). Συνεπώς $T(n) = \Omega(n^3)$.

Συνολικά δείξαμε ότι $T(n) = \Theta(n^3)$.

Άσκηση 4 *Να δώσετε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για τη σχέση*

$$T(n) = \begin{cases} 4T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \Theta(n), & n \geq 2, \\ 1, & n \leq 1. \end{cases}$$

Λύση Όπως και στην Άσκηση 2 αρχικώς θα μελετήσουμε την παρεμφερή συνάρτηση

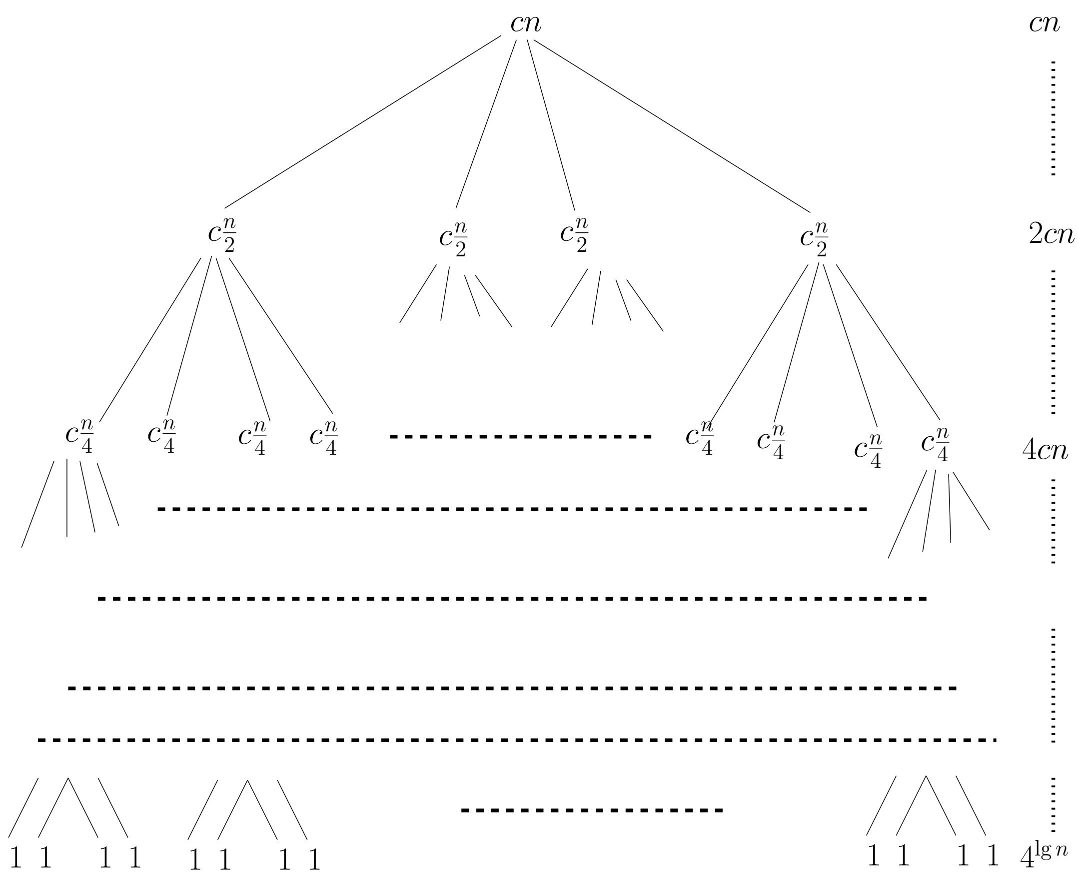
$$\hat{T}(n) = 4\hat{T}(\frac{n}{2}) + cn.$$

Το δένδρο αναδρομής έχει ύψος $\lceil \lg n \rceil$ με αριθμό φύλλων $4^{\lceil \lg n \rceil}$. Το δένδρο μαζί με την συνεισφορά του κάθε επιπέδου απεικονίζεται στο Σχήμα 2. Αθροίζοντας,

$$\begin{aligned} \hat{T}(n) &= 4^{\lceil \lg n \rceil} + cn \sum_{j=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 2^j \\ &\leq 4^{\lg n + 1} + cn \sum_{j=0}^{\lg n} 2^j \\ &= 4 \cdot 4^{\lg n} + cn(2^{\lg n + 1} - 1) \\ &= 4 \cdot n^{\lg 4} + cn \cdot (2 \cdot 2^{\lg n} - 1) = 4n^2 + cn(2n - 1) \Rightarrow \\ \hat{T}(n) &\leq (4 + 2c)n^2 - cn \Rightarrow \hat{T}(n) = O(n^2). \end{aligned} \tag{7}$$

Η (7) μας οδηγεί στην εικασία ότι και η $T(n)$ είναι τάξης $O(n^2)$. Θα δείξουμε ότι κάτι τέτοιο ισχύει με τη χρήση επαγωγής. Δηλαδή θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$T(n) \leq dn^2, \tag{8}$$



Σχήμα 2: Δένδρο αναδρομής, άσκηση 4

για κάποιο $d > 0$.

Έστω λοιπόν ότι κάτι τέτοιο ισχύει για $n/2$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} T(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor) &\le d \cdot \lfloor\frac{n}{2}\rfloor^2 \Rightarrow \\ T(n) &\le 4d \cdot \lfloor\frac{n}{2}\rfloor^2 + cn \\ &\le 4d \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + cn \\ &= dn^2 + cn \Rightarrow T(n) = O(n^2). \end{aligned}$$

Η παραπάνω απόδειξη ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΟΡΘΗ: δεν αποδείξαμε την (8). Το αποτέλεσμα διαφέρει του ορθού κατά τον όρο cn.
Για να διορθώσουμε την απόδειξη, θα τροποποιήσουμε την αρχική υπόθεση αφαιρώντας ένα όρο ανάλογο του cn. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι

$$T(n) \le dn^2 - 2bn, \tag{9}$$

για κάθε $n \ge n_0$, όπου $d, b, n_0 > 0$.[1] Έστω λοιπόν ότι ισχύει η σχέση αυτή για $T(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} T(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor) &\le d \cdot \lfloor\frac{n}{2}\rfloor^2 - 2b(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor) \Rightarrow \\ T(n) &\le 4 \cdot (d \cdot \lfloor\frac{n}{2}\rfloor^2 - 2b(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)) + cn \\ &\le 4 \cdot (d \cdot ((\frac{n}{2})^2 - 2b(\frac{n}{2} - 1) + cn \\ &= dn^2 - 4bn + 8b + cn = dn^2 - 3bn + cn + 8b - bn \\ &= dn^2 - (3b - c)n + b(8 - n). \end{aligned}$$

Επειδή $b > 0$, για $n \ge n_0 = 8$, έχουμε $b(8 - n) \le 0$. Άρα για $\boxed{n \ge n_0 = 8}$

$$\begin{aligned} T(n) &\le dn^2 - (3b - c)n \Rightarrow \\ &\le dn^2 - 2bn \end{aligned}$$

για $\boxed{b \ge c.}$ Επίσης από την οριακή συνθήκη για $n = 1$, έχουμε

$$d \cdot 1^2 - 2b \cdot 1 \ge T(1) = 1 \Rightarrow \boxed{d \ge 2b + 1}$$

[1]Προσέξτε ότι αν ισχύει η (9) τότε συνεπάγεται ότι $T(n) = O(n^2)$, αφού $dn^2 - 2bn \le dn^2$.

Συνολικά, δείξαμε ότι

$$T(n) = O(n^2).$$

Για να δείξουμε ότι $T(n) = \Omega(n^2)$ χρησιμοποιούμε και πάλι επαγωγή. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι $T(n) \geq a \cdot n^2$, για κάποιο $a > 0$. Υποθέτουμε ότι αυτό ισχύει για $T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) &\geq a \cdot (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)^2 \Rightarrow \\
T(n) &\geq 4a(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)^2 + cn \\
&\geq 4a(\frac{n}{2} - 1)^2 + cn = an^2 - 4an + 4a + cn \\
&\geq an^2 - 4an + cn \\
&\geq an^2
\end{aligned}$$

για $\boxed{a \geq \frac{c}{4}.}$

Επίσης από την οριακή συνθήκη ($T(n = 1) = 1$) έχουμε $\boxed{1 \geq a.}$ Άρα δείξαμε ότι $T(n) = \Omega(n^2)$. Σε συνδυασμό με το πάνω φράγμα για την $T(n)$, δείξαμε ότι

$$T(n) = \Theta(n^2).$$

Άσκηση 5 *Με τη χρήση του κεντρικού θεωρήματος να δώσετε ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τις συναρτήσεις*

1. $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$
2. $T(n) = T(\frac{2n}{3}) + 1$
3. $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n \lg n$

Λύση

1. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $a = 9, b = 3, f(n) = n$. Επειδή $n^{\lg_3 9} = n^{\lg_3 3^2} = n^2$, $f(n) = n = O(n^{2-\epsilon})$, για $1 \geq \epsilon \geq 0$, είμαστε στην πρώτη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος και άρα

   $$T(n) = \Theta(n^{\lg_3 3^2}) = \Theta(n^2).$$

2. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $a = 1, b = 3/2, f(n) = 1 = \Theta(1)$. Επειδή $\lg_{\frac{3}{2}} 1 = 0$, $f(n) = 1 = \Theta(n^{\lg_{\frac{3}{2}} 1}) = \Theta(n^0) = \Theta(1)$. Είμαστε στη δεύτερη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος και επομένως

$$T(n) = \Theta(n^{\lg_{\frac{3}{2}} 1} \lg n) = \Theta(\lg n).$$

3. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $a = 3, b = 4, f(n) = n \lg n$. Υπάρχουν $d, \epsilon > 0$, τέτοια ώστε

$$n \lg n \geq d \cdot n^{\lg_4 3+\epsilon.}$$

Για παράδειγμα, αν θεωρήσετε $d = 1, \epsilon = 1 - \lg_4 3 = \lg_4 4 - \lg_4 3 = -\lg_4 \frac{4}{3}$ η παραπάνω ανισότητα γίνεται $[n \lg n \geq n$, η οποία είναι αληθής για $n \geq 2$. Στη συνέχεια εξετάζουμε αν υπάρχει $c < 1$ για το οποίο να ισχύει ότι

$$3\frac{n}{4} \lg \frac{n}{4} \leq cn \lg n.$$

Μια προφανής τιμή για την οποία ισχύει είναι $c = 3/4$. Επομένως, είμαστε στην τρίτη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος και άρα

$$T(n) = \Theta(n \lg n).$$

Άσκηση 6 *Μπορείτε με τη χρήση του κεντρικού θεωρήματος να δώσετε μια ασυμπτωτική εκτίμηση για τη σχέση*

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \lg n;$$

Αν ναι να την διατυπώσετε. Αν όχι να χρησιμοποιείστε άλλη μέθοδο.

Λύση Έχουμε $a = 2, b = 2, f(n) = n \lg n$, και άρα $n^{\lg_a b} = n^{\lg 2} = n$ Προφανώς δεν είμαστε στην πρώτη και δεύτερη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος αφού για κανένα $\epsilon > 0$ ισχύει ότι $n \lg n = O(n^{-\epsilon}$ και $n \lg n \neq \Theta(n)$. Όσο για την τρίτη περίπτωση, θα πρέπει να υπάρχει $d > 0$ τέτοιο ώστε

$$n \lg n \geq dn^{1+\epsilon} \Rightarrow \lg n \geq dn^{\epsilon}.$$

Όμως η ανισότητα αυτή δεν ισχύει ασυμτωτικά αφού οι πολυωνυμικές συναρτήσεις κυριαρχούν στις λογαριθμικές. Άρα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κεντρικό θεώρημα και για να απαντήσουμε στο ζητούμενο θα καταφύγουμε στη μέθοδο της διαδοχικής αντικατάστασης. Έχουμε

$$\begin{aligned}
T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n\lg n &= 2(2T\left(\frac{\frac{n}{2}}{2}\right) + \frac{n}{2}\lg\frac{n}{2}) + n\lg n \\
&= 2^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + n(\lg n + \lg\frac{n}{2}) \\
&= \ldots \\
&= 2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + n\sum_{j=0}^{k-1}\lg\left(\frac{n}{2^j}\right) \\
&= 2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + n\sum_{j=0}^{k-1}(\lg n - \lg 2^j) \\
&= 2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + n\cdot k\lg n - n\sum_{j=0}^{k-1}j \\
&= 2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + n\cdot k\lg n - n\frac{k(k-1)}{2}
\end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι $T(1) = 1$ και άρα $k = \lg n$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση, έχουμε

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2^{\lg n} + +n\lg^2 n - \frac{n}{2}\lg^2 n + \frac{n}{2}\lg n \\
&= n + \frac{n}{2}\lg^2 n + \frac{n}{2}\lg n \\
&\Rightarrow \\
T(n) &= \Theta(n\lg^2 n).
\end{aligned}$$

Άσκηση 7 *Να δώσετε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για τη συνάρτηση*

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{5}\right) + n.$$

Λύση Παρατηρούμε ότι

$$2T\left(\frac{n}{5}\right) + n \leq T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n. \tag{10}$$

Ισοδύναμα,

$$T'(n) \leq T(n) \leq T''(n), \text{ όπου,}$$
$$T'(n) = 2T'\left(\frac{n}{5}\right) + n, T''(n) = 2T''\left(\frac{n}{3}\right) + n.$$

Ήδη έχουμε δείξει [2] ότι

$$T''(n) = \Theta(n). \tag{11}$$

Για την περίπτωση της $T'(n)$ έχουμε $a = 2, b = 5, f(n) = n$. Επειδή $n > n^{\lg_5 2+\epsilon}$ για $\epsilon > 0$ και αρκετά μικρό ($\epsilon \leq \lg_5 \frac{5}{2}$), έχουμε ότι $n = \Omega(n^{\lg_5 2+\epsilon})$. Επιπλέον

$$2f(n/5) = 2n/5 \leq cn,$$

για $1 > c \geq 2/5$. Επομένως σύμφωνα με την τρίτη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος έχουμε

$$T'(n) = \Theta(n). \tag{12}$$

Η (10) σε συνδυασμό με (11), (12) συνεπάγεται

$$T(n) = \Theta(n).$$

Άσκηση 8 *Να δώσετε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για τη συνάρτηση*

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \lg n.$$

Λύση Θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική της *αλλαγής μεταβλητών*. Συγκεκριμένα θέτοντας

$$m = \lg n \tag{13}$$

στην παραπάνω έκφραση παίρνουμε

$$T(2^m) = 2T(2^{\frac{m}{2}}) + m.$$

Αν θέσουμε στην παραπάνω $S(m) = T(2^m)$ έχουμε

$$S(m) = 2S(\frac{m}{2}) + m.$$

η οποία έχει λύση $S(m) = \Theta(m \lg m)$ (κεντρικό θεώρημα, δεύτερη περίπτωση). Αντικαθιστώντας από (13), έχουμε

$$T(n) = T(2^m) = S(m) = \Theta(m \lg m) = \Theta(\lg n \lg \lg n)$$

Άσκηση 9 *Για την επίλυση ενός υπολογιστικού προβλήματος έχουμε να επιλέξουμε μεταξύ τεσσάρων διαφορετικών αλγορίθμων τύπου 'διαίρει και βασίλευε'. Έτσι για το αρχικό πρόβλημα μεγέθους n*

[2] Δες διαφάνειες περί αναδρομικών σχέσεων - παράδειγμα 3γ

- *ο αλγόριθμος Α διασπά το αρχικό πρόβλημα σε 8 υποπροβλήματα μεγέθους $n/3$ τα επιλύει και στη συνέχεια συνθέτει τις λύσεις τους σε χρόνο $n/2$,*

- *ο αλγόριθμος Β διασπά το αρχικό πρόβλημα σε 3 υποπροβλήματα μεγέθους $n/7$ τα επιλύει και στη συνέχεια συνθέτει τις λύσεις τους σε χρόνο n^2,*

- *ο αλγόριθμος Γ διασπά το αρχικό πρόβλημα σε 8 υποπροβλήματα μεγέθους $n/32$ τα επιλύει και στη συνέχεια συνθέτει τις λύσεις τους σε χρόνο $n^{\frac{3}{5}}$,*

- *ο αλγόριθμος Δ διασπά το αρχικό πρόβλημα σε 1 υποπροβλήματα μεγέθους $n/3$ και σε ένα υποπρόβλημα μεγέθους $n/4$ τα επιλύει και στη συνέχεια συνθέτει τις λύσεις τους σε χρόνο n.*

Ποιόν αλγόριθμο θα προτείνατε για τη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος και γιατί·

Λύση Για τις τρεις πρώτες περιπτώσεις θα χρησιμοποιήσουμε το κεντρικό θεώρημα το οποίο υποθέτει τη γενική μορφή

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$$

Αλγ. Α:

$$T(n) = 8T(\frac{n}{3}) + \frac{n}{2}.$$

Άρα, $a = 8, b = 3, f(n) = \frac{n}{2}$. Επειδή, $\lg_b a = \lg_3 8 > 1$, έχουμε $f(n) = \frac{1}{2}n^1 = O(n^{\lg_3 8-\epsilon})$, π.χ. για $\epsilon = 0,1$. Συνεπώς, σύμφωνα με την 1η περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος η λύση της αναδρομικής εξίσωσης είναι $T(n) = \Theta(n^{\lg_3 8})$.

Αλγ. Β:

$$T(n) = 3T(\frac{n}{7}) + n^2.$$

Άρα, $a = 3, b = 7, f(n) = n^2$. Επειδή, $\lg_b a = \lg_7 3 < 1$, έχουμε $f(n) = n^2 = \Omega(n^{\lg_7 3+\epsilon})$, π.χ. για $\epsilon = 0,1$. Επίσης $af(\frac{n}{b}) = 3\left(\frac{n}{7}\right)^2 = \frac{3}{49}n^2 < cf(n)$, για κάθε $1 > c > \frac{3}{49}$. Συνεπώς, σύμφωνα με την 3η περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος η λύση της αναδρομικής εξίσωσης είναι $T(n) = \Theta(n^2)$.

Αλγ. Γ:

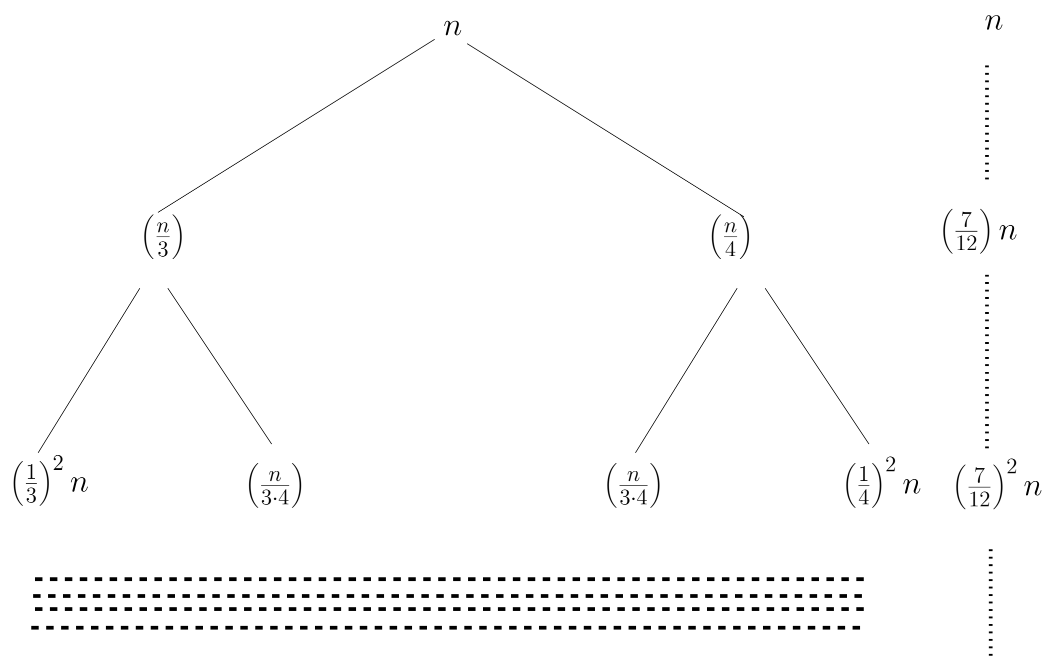
$$T(n) = 8T(\frac{n}{32}) + n^{\frac{3}{5}}.$$

Άρα, $a = 8, b = 32, f(n) = n^{\frac{3}{5}}$. Επειδή, $\lg_b a = \lg_{32} 8 = \frac{\lg 8}{\lg 32} = \frac{3}{5}$, έχουμε $f(n) = \Theta(n^{\frac{3}{5}})$. Συνεπώς, σύμφωνα με την 2η περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος η λύση της αναδρομικής εξίσωσης είναι $T(n) = \Theta(n^{\frac{3}{5}} \lg n)$.

Για τον αλγόριθμο Δ η αναδρομική σχέση είναι

$$T(n) = T(\frac{n}{3}) + T(\frac{n}{4}) + n$$

Το δένδρο της αναδρομής σχέση απεικονίζεται στο Σχήμα 3. Το μακρύτερο



Σχήμα 3: Δένδρο αναδρομής, άσκηση 7

μονοπάτι από τη ρίζα του δένδρου έχει $\lg_3 n$ ακμές ενώ το συντομότερο έχει $\lg_4 n$ ακμές. Επομένως,

$$T(n) \leq \sum_{j=0}^{\lg_3 n} \left(\frac{7}{12}\right)^j n \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{7}{12}\right)^j n = n\frac{1}{1 - \frac{7}{12}} = \frac{12}{5}n$$

Επομένως, $T(n) = O(n)$ και επειδή $T(n) \geq n$, συνεπάγεται ότι $T(n) = \Theta(n)$.

Οι συναρτήσεις που υπολογίστηκαν ταξινομούνται κατά αύξουσα σειρά ως

$$n^{\frac{3}{5}} \lg n < n < n^{\lg_3 8} < n^2$$

και επομένως συστήνεται η χρήση του αλγόριθμου Γ για την επίλυση του προβλήματος.

Άσκηση 10 *Δίνεται η αναδρομική σχέση*

$$T(n) = T(n/a) + T(n/b) + \Theta(n),$$

όπου $a, b > 1$. *Θεωρείστε ότι* $T(n) = 0$, *για* $n \leq 1$. *Να δείξετε ότι αν* $a^{-1} + b^{-1} < 1$, *τότε* $T(n) = \Theta(n)$. *Τι συμβαίνει αν* $a^{-1} + b^{-1} = 1$;

Λύση Το δένδρο αναδρομής απεικονίζεται στο Σχήμα 4. Παρατηρούμε ότι το δένδρο δεν είναι ισοζυγισμένο: ο αριθμός των ακμών σε κάθε μονοπάτι από την ρίζα σε ένα φύλο δεν είναι ίδιος. Αν υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $a < b$ ο αριθμός αυτός κυμαίνεται από $\lceil \lg_b n \rceil$ μέχρι $\lceil \lg_a n \rceil$.[3]

Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 4 η συνεισφορά του επιπέδου $k < \lceil \lg_b n \rceil$ στην συνάρτηση $T(n)$ είναι [4]

$$cn \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^k. \tag{14}$$

Επομένως αν πάρουμε και μεγαλύτερες τιμές για το k (π.χ. $k \geq \lceil \lg_a n \rceil$) η (14) παρέχει ένα πάνω φράγμα στο $T(n)$. Για απλοποίηση, θεωρούμε ότι $k = \max\{\lceil \lg_a n \rceil, \lceil \lg_b n \rceil\} = \lceil \lg_a n \rceil$ και επομένως

$$T(n) \leq \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^j cn \tag{15}$$

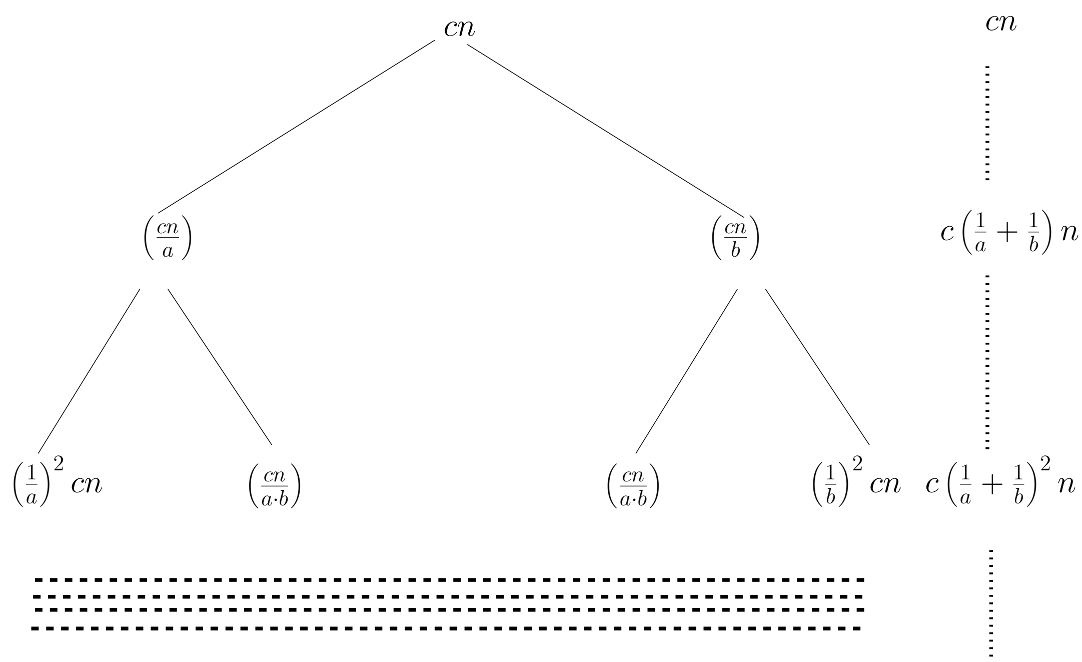
Από την (15) έχουμε ότι

$$T(n) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^j cn = cn \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}$$

[3] Προσέξτε ότι

$$a < b \Rightarrow \lg_b n < \lg_a n.$$

[4] Δες Παράρτημα για μια αυστηρή απόδειξη της (14)



Σχήμα 4: Δένδρο αναδρομής, άσκηση 10

με τον παρανομαστή θετικό αφού $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$. Επομένως και η ποσότητα

$$\frac{c}{1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

είναι θετική, και άρα $T(n) = O(n)$. Περαιτέρω επειδή $T(n) \geq n \Rightarrow T(n) = \Omega(n)$, έχουμε ότι

$$T(n) = \Theta(n).$$

Στην περίπτωση που $a^{-}1 + b^{-}1 = 1$, η (15) συνεπάγεται ότι

$$T(n) \leq \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^j cn = cn \sum_{j=0}^{k-1} 1 = cn \cdot k. \tag{16}$$

Επειδή $k = \lceil \lg_a n \rceil$ και έχουμε δείξει σε προηγούμενη άσκηση ότι για οποιοδήποτε ακέραιο $a > 1$ ισχύει ότι $\lg_a n = \Theta(\lg n)$, ή ισοδύναμα ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί p, q, n_0, τέτοιοι ώστε

$$p * \lg n \leq \lg_a n \leq q \lg n, \forall n \geq n_0, \tag{17}$$

η (16) συνεπάγεται ότι

$$T(n) \leq a \cdot q \cdot n \lg n$$

και άρα $T(n) = O(n \lg n)$. Με αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύεται ότι $T(n) = \Omega(n \lg n)$ και άρα

$$T(n) = \Theta(n \lg n).$$

Άσκηση 11 *Σε μία ζούγκλα της Αφρικής συνολικής έκτασης n τ.μ., επιστήμονες θέλουν να μελετήσουν τον πληθυσμό κουνουπιών. Ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία.*

- *Ο υπεύθυνος μίας έκτασης την χωρίζει (χρόνος 1′ λεπτό) σε δύο ίσες εκτάσεις και θέτει ως υπεύθυνους δύο βοηθούς του, έναν σε κάθε έκταση. Ο υπεύθυνος για όλη τη ζούγκλα (έκταση n τ.μ.), αποκαλείται και Αρχηγός,*
- *Αν ένας βοηθός γίνει υπεύθυνος μίας έκτασης μικρότερης-ίσης 1 τ.μ. τότε μελετά ο ίδιος τα κουνούπια στην έκταση αυτή (χρόνος 10′) αλλιώς την αναθέτει σε δύο βοηθούς όπως περιγράφεται παραπάνω.*
- *Κάθε υπεύθυνος μίας περιοχής αναφέρει (χρόνος 2′) στον ανώτερο του τα νούμερα που του έχουν ήδη αναφέρει (με ταυτόχρονο τρόπο οι δύο βοηθοί του) για τα κουνούπια*

1. *Διατυπώστε την αναδρομική εξίσωση που δίνει το πλήθος των συνολικών υποδιπλασιασμών της αρχικής έκτασης n. Λύστε την αναδρομική εξίσωση.*
2. *Υπολογίστε τον αριθμό των ατόμων που πρέπει να περιλαμβάνει η επιστημονική ομάδα για τη μελέτη των κουνουπιών στη ζούγκλα.*
3. *Υπολογίστε το συνολικό χρόνο από την έναρξη της διαδικασίας μέχρι να μάθει ο αρχηγός τον πληθυσμό των κουνουπιών στη ζούγκλα.*

Λύση

1. Έστω $X(n)$ το πλήθος των χωρισμών σε υποπεριοχές της αρχικής περιοχής έκτασης n. Ισχύει,

$$X(n) = \begin{cases} 2X(\frac{n}{2}) + 1, & n > 1, \\ 0, & n \leq 1. \end{cases}$$

Η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$X(n) = 2^{\lceil \lg n \rceil} \cdot X\left(\frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}}\right) + \sum_{j=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 2^j = 2^{\lceil \lg n \rceil} \cdot 0 + \sum_{j=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 2^j$$
$$= 2^{\lceil \lg n \rceil} - 1$$

2. Ο αριθμός των ατόμων είναι ίσος με τον αριθμό των κόμβων του δένδρου αναδρομής. Δηλαδή, όλοι οι κόμβοι μέχρι το τελευταίο επίπεδο και οι κόμβοι του τελευταίου επιπέδου

$$2^{\lceil \lg n \rceil} - 1 + 2^{\lceil \lg n \rceil} = 2^{\lceil \lg n \rceil + 1} - 1$$

3. Ο χρόνος για τον υποδιπλασιασμό των περιοχών είναι ίσος με το ύψος του δένδρου (περιλαμβάνεται ο πρώτος κόμβος σε επίπεδο μηδέν αλλά εξαιρούνται τα φύλλα):

$$A(n) = 1' \cdot \lceil \lg n \rceil.$$

Ο χρόνος για την επικοινωνία των κόμβων κάθε επιπέδου με τους κόμβους του ακριβώς ανώτερου επιπέδου είναι $2'$. Επομένως, ο συνολικός χρόνος για να φτάσει η πληροφορία στον αρχηγό είναι:

$$B(n) = 2' \cdot \lceil \lg n \rceil.$$

Τέλος χρειάζεται $10'$ για τα φύλλα να μετρήσουν τα κουνούπια στην περιοχή τους (που είναι μικρότερη-ίση με 1 τ.μ.). Από αυτή την παρατήρηση και (18), (**;;**) προκύπτει ότι ο συνολικός χρόνος είναι

$$\lceil \lg n \rceil + 2'\lceil \lg n \rceil + 10' = 3'\lceil \lg n \rceil + 10'$$

Άσκηση 12 *Ένας αλγόριθμος $D(X, Y)$ δέχεται στην είσοδο δύο σύνολα δεδομένων X, Y και επιλύει ένα πρόβλημα Π σε χρόνο $|X| + |Y|$. Η έξοδος του αλγόριθμου (συμβολίζεται $B \leftarrow D(X, Y)$) είναι ένα σύνολο B με $|X| + |Y|$ στοιχεία. Έστω ότι δίνονται k σύνολα $A_1, \ldots, A_k$, $k \geq 3$, ξένα μεταξύ τους όπου το καθένα περιέχει $\frac{n}{k}$ στοιχεία.*

1. *Ποια είναι η πολυπλοκότητα της παρακάτω διαδικασίας· Η αρχική αναδρομική κλήση είναι $S(A_1, A_2, 2)$.*

2. *Να περιγράψετε έναν αλγόριθμο που να επιλύει το πρόβλημα Π για τα σύνολα* $A_1, \ldots, A_k$ *σε χρόνο* $\Theta(n \lg k)$.

Λύση

1. Οι διαδοχικές κλήσεις κοστίζουν

$$\begin{aligned}
|A_1| + |A_2| &= 2\frac{n}{k} + 1 \\
|A_1| + |A_2| + |A_3| &= 3\frac{n}{k} + 1 \\
&\ldots \\
|A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots |A_k| &= k\frac{n}{k} + 1
\end{aligned}$$

Αθροίζοντας,

$$T(n) = \frac{n}{k}\sum_{j=2}^{k} j + k - 1 = \frac{n}{k}(\frac{k(k+1)}{2} - 1) + k - 1 = \Theta(nk).$$

2. Η συνάρτηση S' αποτελεί μία διαφορετική υλοποίηση η οποία εμπεριέχει την τεχνική διαίρει-και-βασίλευε. Η αρχική κλήση είναι $S'(1, k)$. Η συνεισφορά του κάθε επιπέδου του δένδρου αναδρομής στη συνάρτηση $T(n)$ είναι n και το ύψος του δένδρου είναι $\lg k$. Επομένως $T(n) = \Theta(n \lg k)$.

Παράρτημα

Λήμμα 1 *Στην αναδρομική συνάρτηση*

$$T(n) = T(n/a) + T(n/b) + \Theta(n),$$

όπου $a \leq b$, *η συνεισφορά του κάθε επιπέδου* $k < \lceil \lg_b n \rceil$ *του δένδρου αναδρομής δίνεται από τη σχέση (14), δηλαδή είναι*

$$cn\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^k .$$

Απόδειξη Από το δένδρο αναδρομής είναι εύκολο να δει κανείς ότι η (14) ισχύει για $k = 0, 1$. Έστω ότι ισχύει για $k = m$. Δηλαδή για το επίπεδο αυτό έχουμε τη συνεισφορά

$$cn\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^m .$$

Στο επίπεδο αυτό παρατηρούμε ότι κάθε κόμβος $j = 0, \ldots, m$ συνεισφέρει στη συνάρτηση κατά

$$cn \cdot \binom{m}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^j, \tag{18}$$

και επομένως από το διώνυμο του Νεύτωνος έχουμε

$$cn \cdot \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^j = cn\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^m \tag{19}$$

Η συνεισφορά των κόμβων του δένδρου στο επίπεδο $k = m + 1$ προέρχονται από τη διαίρεση των όρων (18) με a, b, αντίστοιχα. Έχουμε

$$cn \cdot \binom{m}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m+1-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^j, \tag{20}$$

$$cn \cdot \binom{m}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{j+1}, \tag{21}$$

Αν θεωρήσουμε τους όρους της (20) για $j \neq 0$ και τους όρους της (21) για $j \neq n$, παρατηρούμε ότι για κάθε όρο της πρώτης υπάρχει ένας όρος της δεύτερης όπου τα κλάσματα $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ εμφανίζονται με κοινό εκθέτη. Συγκεκριμένα, αν γράψουμε για $j = r \neq 0$ την (20) και $j = r - 1$ την (21) παίρνουμε

$$cn \cdot \binom{m}{r} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r},$$
$$cn \cdot \binom{m}{r-1} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r}.$$

Αθροίζοντας, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&cn \cdot \left(\binom{m}{r} + \binom{m}{r-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \left(\frac{m!}{r! \cdot (m-r)!} + \frac{m!}{(r-1)! \cdot (m-(r-1))!}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \frac{m!}{(r-1)! \cdot (m-r)!} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{m-r+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \frac{m!}{(r-1)! \cdot (m-r)!} \cdot \frac{m+1}{r(m-r+1)} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \frac{(m+1)!}{r! \cdot (m+1-r)!} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \binom{m+1}{r} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m+1-r} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \qquad (22)
\end{aligned}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι για $j = 0$ η (20) γίνεται

$$cn \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m+1} \qquad (23)$$

ενώ η (21) για $j = m$ γίνεται

$$cn \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{m+1} \qquad (24)$$

Αθροίζοντας την (22) για κάθε $r = 1, \ldots, m$ και (23), (24) προκύπτει η συνεισφορά του επιπέδου $k = m + 1$ στη συνάρτηση $T(n)$, ήτοι,

$$cn \cdot \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m+1-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{j} = cn\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{m+1},$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

Function $S(X, Y, t)$
$B \leftarrow D(X, Y)$
if $t + 1 \leq k$ **then**
  Return $S(B, A_{t+1}, t + 1)$
end if

Function $S'(l, u)$
$B \leftarrow D(X, Y)$
if $l = u$ **then**
  Return $A_l)$
else
  middle $\leftarrow \lfloor \frac{l+u}{2} \rfloor$
  Return $D(S'(l, middle), S'(middle + 1, u))$
end if