Ερωτήματα

Ερώτημα 1. (2 βαθμοί)
Έστω συναρτήσεις $f_1, g_1, f_2, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ με $f_1(n) = \Theta(g_1(n)), f_2(n) = \Theta(g_2(n))$. Να δείξετε ότι

1. $f_1(n) + f_2(n) = \Theta(g_1(n) + g_2(n))$,
2. αν $f_2(n) = o(f_1(n))$ τότε $g_2(n) = O(g_1(n))$.

Απάντηση

1. Επειδή $f_i(n) = \Theta(g_i(n))$, για $i = 1, 2$, υπάρχουν θετικές σταθερές a_i, b_i, n_i, τέτοιες ώστε

$$b_1 \cdot g_1(n) \le f_1(n) \le a_1 \cdot g_1(n), \forall n \ge n_1, \tag{1}$$
$$b_2 \cdot g_2(n) \le f_2(n) \le a_2 \cdot g_2(n), \forall n \ge n_2. \tag{2}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη, έχουμε

$$b_1 g_1(n) + b_2 g_2(n) \le f_1(n) + f_2(n) \le a_1 g_1(n) + a_2 g_2(n), \forall n \ge n_0 = \max\{n_1, n_2\}.$$

Η παραπάνω σχέση συνεπάγεται

$$b(g_1(n) + g_2(n)) \le f_1(n) + f_2(n) \le a(g_1(n) + g_2(n)), \forall n \ge n_0$$

όπου $b = \min\{b_1, b_2\}, a = \max\{a_1, a_2\}$, και επομένως $f_1(n) + f_2(n) = \Theta(g_1(n) + g_2(n))$.

2. Από την (2) έχουμε

$$\frac{1}{a_2} f_2(n) \le g_2(n) \le \frac{1}{b_2} f_2(n), \forall n \ge n_2. \tag{3}$$

Επειδή $f_2(n) = o(f_1(n))$, υπάρχει $n_3 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{b_2} f_2(n) < \frac{1}{b_2} f_1(n), \forall n \ge n_3. \tag{4}$$

Από (3), (4), (1) έχουμε

$$g_2(n) < \frac{a_1}{b_2} g_1(n), \forall n \ge \max\{n_1, n_2, n_3\}$$

το οποίο συνεπάγεται το ζητούμενο.

Ερώτημα 2. (3 βαθμοί)
Να δώσετε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για τις συναρτήσεις

1. $T(n) = T(\frac{5n}{8}) + T(\frac{3n}{8}) + n$
2. $T(2^n) = T(2^{n-1}) + 2^n$

Απάντηση

1. Έχουμε

$$T(n) = T(\frac{n}{\frac{8}{5}}) + T(\frac{n}{\frac{8}{3}}) + n.$$

Επειδή $\frac{8}{5} < \frac{8}{3}$, έχουμε

$$\bar{T}(n) \leq T(n) \leq \hat{T}(n) \tag{5}$$

όπου

$$\bar{T}(n) = 2\bar{T}(\frac{n}{\frac{8}{3}}) + n \tag{6}$$

$$\hat{T}(n) = 2\hat{T}(\frac{n}{\frac{8}{5}}) + n \tag{7}$$

Θα μελετήσουμε την (6) με το Κεντρικό Θεώρημα. Έχουμε $a = 2, b = \frac{8}{3}$ και επομένως $\log_{\frac{8}{3}} 2 < 1$, αφού $\frac{8}{3} > 2$. Παρατηρούμε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ για το οποίο ισχύει $n \geq n^{\log_{\frac{8}{3}} 2+\epsilon}$ αφού

$$1 \geq \log_{\frac{8}{3}} 2 + \epsilon \Rightarrow \log_{\frac{8}{3}} \frac{8}{3} - \log_{\frac{8}{3}} 2 \geq \epsilon \Rightarrow \log_{\frac{8}{3}} \frac{4}{3} \geq \epsilon > 0.$$

Επίσης, υπάρχει $c < 1$ για το οποίο ισχύει

$$2\frac{n}{\frac{8}{3}} = \frac{6}{8}n < cn$$

Για παράδειγμα, η παραπάνω ανισότητα ισχύει για $c = \frac{7}{8}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ισχύει η τρίτη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος και επομένως $\bar{T}(n) = \Theta(n)$. Συνδυάζοντας το αποτέλεσμα αυτό με την (5), έχουμε ότι $T(n) = O(n)$. Επίσης, επειδή $T(n) \geq n$, έχουμε $T(n) = \Theta(n)$.

2. Θέτοντας

$$m = 2^n \tag{8}$$

έχουμε

$$T(m) = T(\frac{m}{2}) + m.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η τρίτη περίπτωση του Κεντρικού Θεωρήματος και άρα $T(m) = \Theta(m)$. Αντικαθιστώντας από την (8), έχουμε $T(2^n) = \Theta(2^n)$.

Ερώτημα 3. (5 βαθμοί)
Δίνεται πίνακας A ο οποίος στις θέσεις από 1 ως n περιέχει **διακριτούς** ακεραίους από το διάστημα $[0, n]$, όπου $n = 2^k - 1, k \in \mathbb{N}$.

1. Να περιγράψετε σε ψευδοκώδικα αλγόριθμο τύπου **Διαίρει και Βασίλευε** τάξης $O(n)$ ο οποίος να εντοπίζει τον αριθμό που λείπει.
   Προσοχή: Πριν την περιγραφή του αλγόριθμου, να παραθέσετε αναλυτικά την ιδέα που ο αλγόριθμος σας υλοποιεί και αντίστοιχο παράδειγμα.
2. Να αποδείξετε την πολυπλοκότητα του αλγόριθμου.

Απάντηση

1. Η ιδέα στην οποία βασίζεται ο ζητούμενος αλγόριθμος προσομοιάζει της δυαδικής αναζήτησης. Συγκεκριμένα, υπολογίζουμε τον ακέραιο μέσο m του διαστήματος $[0, n]$. Αν ο ακέραιος αυτός υπάρχει στον πίνακα A τότε διαχωρίζουμε τα στοιχεία του πίνακα σε δύο υποπίνακες, ονομαστικά $A^{\leq}, A^{>}$. Στον πίνακα $A^{\leq}$ βρίσκονται τα στοιχεία που είναι μικρότερα-ίσα με το m ενώ στον $A^{>}$ αυτά που είναι μεγαλύτερα. Ο πίνακας $A^{\leq}$ είτε έχει $m+1$ στοιχεία ή m στοιχεία. Στην πρώτη περίπτωση ο ακέραιος που λείπει βρίσκεται στο διάστημα $[m+1, n]$ και αναδρομικά καλούμε τον αλγόριθμο με αυτό το διάστημα τιμών και πίνακα ακεραίων τον $A^{>}$. Στη δεύτερη περίπτωση το στοιχείο που λείπει βρίσκεται στο διάστημα $[0, m]$ οπότε καλούμε και πάλι τον αλγόριθμο με αυτό το διάστημα τιμών και πίνακα ακεραίων τον $A^{\leq}$. Ο Αλγόριθμος 1 υλοποιεί την ιδέα. Η αρχική κλήση της συνάρτησης είναι

   $$\textbf{missing } (A, 1, n, 0, n)$$

2. (Περιληπτική απάντηση)
   Για τη συνάρτηση που δίνει τον αριθμό των ΣΥΒ ισχύει η σχέση

   $$T(n) \leq T(\lceil\frac{n}{2}\rceil) + \Theta(n). \tag{9}$$

   Εφαρμόζοντας το κεντρικό θεώρημα έχουμε ότι $T(n) = \Theta(n)$.

Αλγοριτημ 1 Εύρεση ακεραίου από το $[0, n]$ ο οποίος δεν υπάρχει στις πρώτες n θέσεις του πίνακα A

```
int missing(int A[ ], int lb, int ub, int lo, int hi)
m ← ⌊(lo+hi)/2⌋;
A≤[ ], A>[ ];
aux ← 0;
for i ← lb; i ≤ ub; i++ do
   if A[i] ≠ m then
      aux++;
   end if
end for
if aux = ub − lb + 1 then
   return m;
end if
elements_in_A≤ ← 0;
elements_in_A> ← 0;
for i ← lb; i ≤ ub; i++ do
   if A[i] ≤ m then
      elements_in_A≤++;
      A≤[elements_in_A≤] ← A[i];
   else
      elements_in_A>++;
      A>[elements_in_A>] ← A[i];
   end if
end for
if elements_in_A≤ = m − lo then
   return missing(A≤, 1, elements_in_A≤, lo, m);
else
   return missing(A>, 1, elements_in_A>, m + 1, hi);
end if
```