5. Η ακολουθία που αντιστοιχεί στον εκμηδενιστή αυτόν είναι

$$T(n) = (\sqrt{5}+4)(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (-\sqrt{5}+4)(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n - 7.$$

5.2 Μέθοδος της εικασίας

Στη μέθοδο αυτή κάνουμε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για την αναδρομική συνάρτηση και στη συνέχεια προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι η εκτίμηση αυτή ισχύει με τη μέθοδο της επαγωγής. Για παράδειγμα, δοθείσης της συνάρτησης

$$T(n) = \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + 1, & \text{για } n > 2, \\ 1, & \text{για } n \leq 2, \end{cases}$$

εικάζουμε ότι $T(n) = O(\lg n)$.
Με τη χρήση επαγωγής, θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν $a > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$T(n) \leq a \cdot \lg n, \forall n \geq n_0. \tag{5.3}$$

Ως βάση της επαγωγής χρησιμοποιούμε την τιμή $n = 2$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$T(2) = 1 \leq a \cdot \lg 2 \Rightarrow a \geq 1.$$

Η επαγωγική υπόθεση είναι ότι η (5.3) ισχύει για $T(\frac{n}{2})$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} T(\frac{n}{2}) &\leq a \cdot \lg \frac{n}{2} \Rightarrow \\ T(\frac{n}{2}) + 1 &\leq a \cdot \lg \frac{n}{2} + 1 \Rightarrow \\ T(n) &\leq a \cdot \lg \frac{n}{2} + 1 = a \cdot (\lg n - \lg 2) + 1 = a \lg n - a + 1. \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$T(n) \leq a \cdot \lg n$$

για $a \geq 1$
Επομένως δείξαμε ότι η (5.3) ισχύει για $a \geq 1$ και για κάθε $n \geq n_0 = 2$.

Στη συνέχεια εικάζουμε ότι $T(n) = \Omega(\lg n)$. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση θα δείξουμε ότι υπάρχουν $b > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$T(n) \geq b \cdot \lg n, \forall n \geq n_0. \tag{5.4}$$

Και πάλι ως βάση της επαγωγής χρησιμοποιούμε την τιμή $n = 2$ από την οποία προκύπτει ότι $1 \geq b$. Η επαγωγική υπόθεση είναι ότι η (5.4) ισχύει για $T(\frac{n}{2})$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} T(\frac{n}{2}) &\geq b \cdot \lg \frac{n}{2} \Rightarrow \\ T(\frac{n}{2}) + 1 &\geq b \cdot \lg \frac{n}{2} + 1 \Rightarrow \\ T(n) &\geq b \cdot \lg \frac{n}{2} + 1 > b \cdot \lg n \end{aligned}$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει για $1 \geq b \geq 0$ και για κάθε $n \geq n_0 = 2$.
Συνολικά, δείξαμε ότι $T(n) = \Theta(\lg n)$.

5.2.1 Αναδρομικές σχέσεις με ταβάνια και πατώματα

Οι αναδρομικές σχέσεις που εκφράζουν τον αριθμό των ΣΥΒ $T(n)$ έχουν συνήθως νόημα μόνο στην περίπτωση που σε κάθε κλήση της συνάρτησης η τιμή της παραμέτρου n είναι ακέραια. Συνήθως σε αυτές τις περιπτώσεις, το μέγεθος του στιγμιότυπου για το οποίο καλείται αναδρομικά ο αλγόριθμος (δηλαδή η τιμή της παραμέτρου με την οποία καλείται η αναδρομική συνάρτηση) είναι ίσο με το «πάτωμα» ή το «ταβάνι» ενός λόγου του μεγέθους του αρχικού στιγμιότυπου (δηλαδή της παραμέτρου n). Στην περίπτωση αυτή χρειάζεται προσοχή στη μορφή του φράγματος που χρησιμοποιούμε στην επαγωγή. Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση

$$T(n) = \begin{cases} 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1, & n > 1, \\ 1, & n = 1. \end{cases} \tag{5.5}$$

είναι τάξης $O(n)$. Ακολουθώντας τα βήματα του προηγούμενου παραδείγματος, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $a > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $T(n) \leq a \cdot n$, για κάθε $n \geq n_0$. Θα επιχειρήσουμε να το αποδείξουμε κάνοντας την επαγωγική υπόθεση ότι αυτό ισχύει για $T(\lfloor n/2 \rfloor)$. Δηλαδή έστω ότι ισχύει

$$T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq a \cdot \lfloor n/2 \rfloor.$$

Αντικαθιστώντας στην (5.5) έχουμε

$$T(n) \leq 2 \cdot a \cdot \lfloor n/2 \rfloor + 1$$

Επειδή $\lfloor n/2 \rfloor \leq n/2$, η παραπάνω ανισότητα συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2 \cdot a \cdot \frac{n}{2} + 1 \\ &= a \cdot n + 1. \end{aligned}$$

Όμως η τελευταία τιμή είναι μεγαλύτερη του $a \cdot n$ και όχι μικρότερη-ίση με αυτή (που είναι το ζητούμενο στο επαγωγικό βήμα).

Για να άρουμε το αδιέξοδο, αλλάζουμε λίγο το ζητούμενο: αντί να προσπαθούμε να δείξουμε ότι $T(n) \leq a \cdot n$, θα δείξουμε ότι

$$T(n) \leq a \cdot n - b, \tag{5.6}$$

για $b > 0$. Προσέξτε ότι η (5.6) συνεπάγεται το ζητούμενο, δηλαδή ότι $T(n) = O(n)$ αφού για $b > 0$,

$$T(n) \leq a \cdot n - b \leq a \cdot n.$$

Κάνουμε την επαγωγική υπόθεση ότι η (5.6) ισχύει για $T(\lfloor n/2 \rfloor)$. Δηλαδή έστω ότι ισχύει

$$T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq a \cdot \lfloor n/2 \rfloor - b.$$

Αντικαθιστώντας στην (5.5) έχουμε

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2 \cdot (a \cdot \lfloor n/2 \rfloor - b) + 1 \\ &\leq 2 \cdot a \cdot \frac{n}{2} - 2b + 1 \\ &= a \cdot n - b - b + 1 \Rightarrow \\ T(n) &\leq a \cdot n - b, \end{aligned}$$

για $b \geq 1$.

Επίσης επειδή $T(n = 1) = 1$, από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$T(1) = 1 \leq a \cdot 1 - b \Rightarrow a \geq b + 1.$$

5.3 Διαδοχική αντικατάσταση

Η μέθοδος που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο έχει το μειονέκτημα ότι χρειάζεται εμπειρία προκειμένου να διατυπωθεί μία «σωστή» εικασία. Με τη μέθοδο που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο.

Η μέθοδος της Διαδοχικής Αντικατάστασης συνίσταται στην εκτέλεση των παρακάτω βημάτων.

- Αντικαθιστούμε το αριστερό μέλος της αναδρομικής έκφρασης διαδοχικά μέχρι να μπορούμε να γράψουμε την έκφραση σε γενική μορφή (σε σχέση με μία παράμετρο έστω k) που δηλώνει τον αριθμό των αντικαταστάσεων.
- Υπολογίζουμε την τιμή του k για την οποία η έκφραση παύει να είναι αναδρομική.
- Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στη γενική έκφραση και υπολογίζουμε την τελική (κλειστή) της μορφή.

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο για τη μελέτη της συνάρτησης

$$T(n) = \begin{cases} T(n-1)+2, & \text{για } n>0, \\ 1, & \text{για } n=0. \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας διαδοχική αντικατάσταση έχουμε

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1)+2 \\ &= [T((n-1)-1)+2]+2 = T(n-2)+2\cdot 2 \\ &= [T((n-2)-1)+2]+2\cdot 2 = T(n-3)+3\cdot 2 \\ &= \cdots \\ &= T(n-k)+k\cdot 2. \end{aligned}$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε για ποια τιμή του k η σχέση παύει να είναι αναδρομική. Αυτό γίνεται όταν

$$n-k=0 \Rightarrow k=n.$$

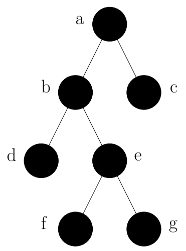
Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση, έχουμε την κλειστή μορφή

$$T(n) = (0)+2n = 2n+1 \Rightarrow T(n)=\Theta(n).$$

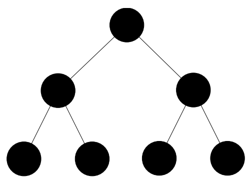
Από την ανάλυση που κάνομε είναι φανερό ότι ο υπολογισμός του ακριβούς αριθμού των στοιχειωδών πράξεων σε κάθε κλήση του αναδρομικού αλγόριθμου δεν είναι απαραίτητος για την κατάταξη του αλγορίθμου στην ιεραρχία πολυπλοκότητας. Ακόμα και αν θεωρούσαμε ότι σε κάθε κλήση εκτελούνται ένας **σταθερός** αριθμός στοιχειωδών πράξεων, έστω c (χωρίς να προσδιορίζαμε την ακριβή τιμή του c), θα προέκυπτε ότι $T(n) = c\cdot n+1$ και άρα πάλι $T(n)=\Theta(n)$. Με αντίστοιχο τρόπο παρατηρούμε ότι δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε επακριβώς τον αριθμό των στοιχειωδών πράξεων που εκτελεί ο αλγόριθμος όταν παύει να είναι αναδρομικός.

5.4 Δένδρο αναδρομής

Ένα δένδρο είναι ένα *άκυκλο συνδεδεμένο γράφημα.* Για παράδειγμα, στο Σχήμα 5.1 απεικονίζεται ένα δένδρο με 7 κορυφές (κόμβους). Στην απεικόνιση του σχήματος, πα-



Σχήμα 5.1: Δυαδικό δένδρο με επτά κορυφές



Σχήμα 5.2: Πλήρες δυαδικό δένδρο με επτά κορυφές

ρατηρούμε ότι οι κορυφές είναι διατεταγμένες σε επίπεδα. Η κορυφή που εμφανίζεται πάνω-πάνω (κορυφή a) ονομάζεται *ρίζα*. Οι κορυφές που δεν συνδέονται με κάποια κορυφή σε χαμηλότερο επίπεδο ονομάζονται *φύλλα* ενώ οι υπόλοιπες *εσωτερικές*. Για το δένδρο του Σχήματος 5.1 φύλλα αποτελούν οι κορυφές c,d ,f,g ενώ εσωτερικές είναι οι κορυφές b, e. Κάθε εσωτερική κορυφή έχει κορυφές απόγονους ενώ κάθε φύλλο όχι. Πρόγονος μίας κορυφής u είναι η κορυφή w που βρίσκεται σε αμέσως προηγούμενο επίπεδο από την u και συνδέεται με αυτή με ακμή. Κάθε κορυφή έχει έναν ακριβώς πρόγονο εκτός από την ρίζα που δεν έχει κανένα.

Ύψος μίας κορυφής είναι ο αριθμός των ακμών στο μακρύτερο μονοπάτι που συνδέει την κορυφή με κάποιο φύλλο. Το κάθε φύλλο έχει ύψος ίσο με μηδέν. *Βάθος* μίας κορυφής είναι ο αριθμός των ακμών στο μονοπάτι που συνδέει την κορυφή με τη ρίζα. Η ρίζα έχει βάθος ίσο με μηδέν. Ύψος ενός δένδρου είναι το ύψος της ρίζας του.

Ένα δένδρο ονομάζεται *δυαδικό* αν κάθε εσωτερικός κόμβος έχει το πολύ δύο απογόνους. Το δένδρο του Σχήματος 5.1 είναι δυαδικό. Ένα δένδρο ονομάζεται πλήρες δυαδικό αν κάθε εσωτερικός κόμβος έχει ακριβώς δύο απογόνους. Το πλήρες δυαδικό δένδρο με επτά κορυφές παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.2.

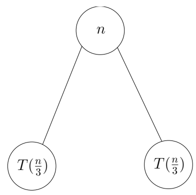
Έστω d ο αριθμός των κορυφών ενός δυαδικού δένδρου και h το ύψος του. Τότε, σε ένα δυαδικό δένδρο σε βάθος m υπάρχουν από 1 έως 2^m κορυφές. Συνεπώς,

$$h + 1 \leq d \leq 2^{h+1} - 1 \tag{5.7}$$

Το κάτω φράγμα στο d προκύπτει στην περίπτωση που το ύψος κάθε κορυφής είναι μοναδικό· δηλαδή, κάθε εσωτερική κορυφή έχει μόνο έναν πρόγονο και έναν απόγονο, η ρίζα έχει μόνο έναν απόγονο ενώ υπάρχει μόνο ένα φύλλο. Το άνω φράγμα στο d προκύπτει για ένα πλήρες δυαδικό δένδρο. Συνεπώς ένα πλήρες δυαδικό δένδρο έχει $2^{h+1} - 1$ κορυφές, 2^h φύλλα και $2^h - 1$ εσωτερικές κορυφές.

Πόρισμα 4. Ο μεγαλύτερος αριθμός κορυφών που μπορεί να έχει ένα δυαδικό δένδρο ύψους h είναι $2^{h+1} - 1$.

Από την (5.7) μπορούμε να εξάγουμε φράγματα για το ύψος του δένδρου σε συνάρ-



Σχήμα 5.3: Δένδρο αναδρομής - ανάπτυξη της ρίζας

τηση με τον αριθμό των κορυφών που περιέχει. Παίρνοντας τους λογαριθμούς, έχουμε

$$\lg(d+1) - 1 \leq h \leq d - 1 \tag{5.8}$$

Επειδή το h είναι ακέραιος από το αριστερό μέλος της (5.8) έχουμε

$$\lceil \lg(d+1) - 1 \rceil \leq h \Rightarrow \lceil \lg(d+1) \rceil - 1 \leq h. \tag{5.9}$$

Η (5.9) ισχύει σαν ισότητα όταν το δένδρο είναι πλήρες δυαδικό.

Πόρισμα 5. Ανάμεσα στα δυαδικά δένδρα με d κορυφές, όπου $d = 2^k, k \geq 2$, αυτό που έχει το μικρότερο ύψος είναι το πλήρες δυαδικό.

Ένα πιο «απλό» κάτω φράγμα για το ύψος του δένδρου προκύπτει ως εξής:

$$2^{h+1} - 1 \geq d \Rightarrow 2^{h+1} > d \Rightarrow h + 1 > \lg d \geq \lfloor \lg d \rfloor.$$

Επειδή το ύψος h είναι ακέραιος η παραπάνω σχέση συνεπάγεται

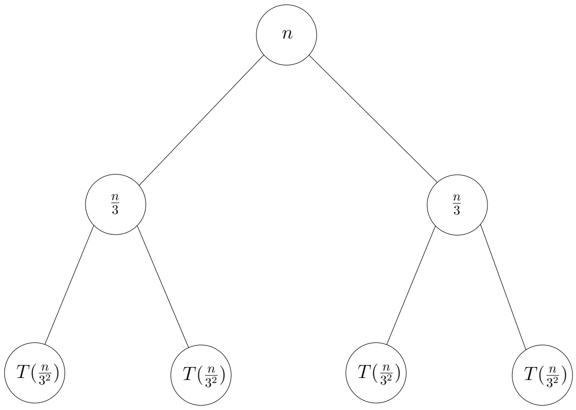
$$h \geq \lfloor \lg d \rfloor. \tag{5.10}$$

Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη δενδρική δομή προκειμένου να επιλύσουμε μία (αναδρομική) σχέση που περιγράφει τον αριθμό των ΣΥΒ ενός αναδρομικού αλγόριθμου. Παρατηρούμε ότι οι αναδρομικές κλήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα *δένδρο υπολογισμού*: κάθε κορυφή του δένδρου αντιστοιχεί σε μία αναδρομική κλήση η οποία εκτελεί μία σειρά από ΣΥΒ. Αθροίζοντας τον αριθμό των ΣΥΒ για τις κορυφές που βρίσκονται στο ίδιο ύψος, βρίσκουμε τη συνεισφορά του ύψους αυτό στο συνολικό αριθμό των ΣΥΒ. Στη συνέχεια αθροίζουμε ως προς κάθε ύψος για να βρούμε τον συνολικό αριθμό ΣΥΒ.

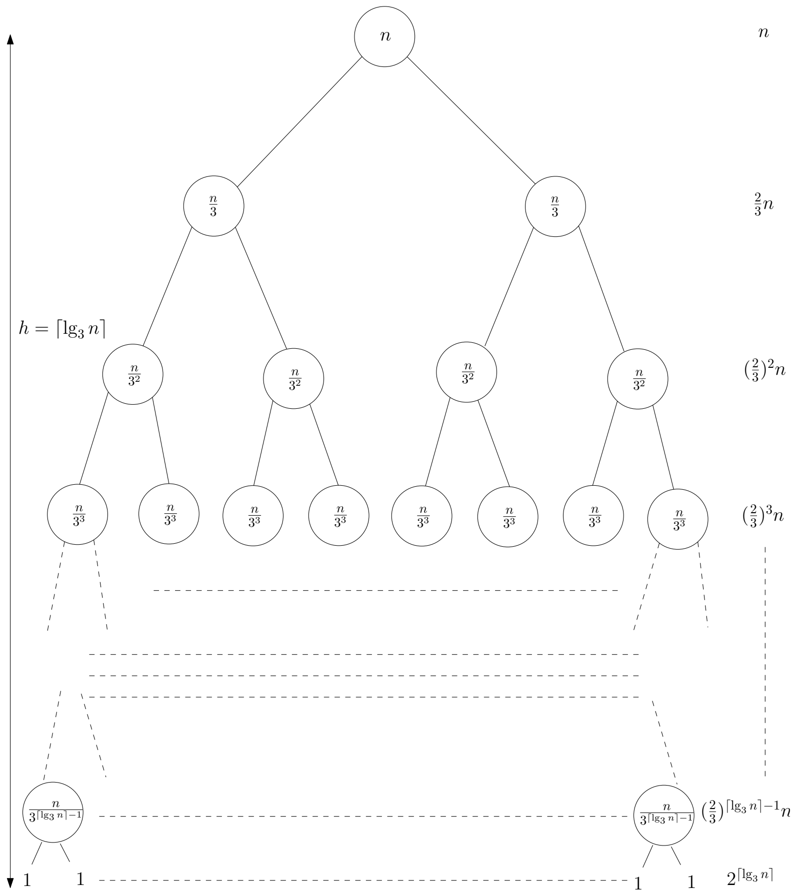
Παράδειγμα 16. Έστω ότι ο αριθμός των ΣΥΒ κάποιου αλγόριθμου δίνεται από την αναδρομική συνάρτηση

$$T(n) = \begin{cases} 2T(\frac{n}{3}) + n, & \text{για } n > 1, \\ 1, & \text{για } n \leq 1. \end{cases} \tag{5.11}$$

Το δένδρο υπολογισμού αρχικά έχει μόνο μία κορυφή η οποία αντιστοιχεί στην κλήση της συνάρτησης με παράμετρο $n > 1$. Αυτή η κορυφή θα αποτελέσει τη ρίζα του δένδρου. Αν αντικαταστήσουμε με τον αριθμό των ΣΥΒ από την (5.11) έχουμε, σε όρους της αναδρομικής συνάρτησης, την εικόνα του Σχήματος 5.3. Αναπτύσσοντας πάλι από την (5.11), τις δύο μη-ριζικές κορυφές έχουμε το δένδρο του Σχήματος 5.4. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι ο αναδρομικός αλγόριθμος να κληθεί με τιμή παραμέτρου μικρότερη-ίση με ένα. Το δένδρο σε πλήρη ανάπτυξη απεικονίζεται



Σχήμα 5.4: Δένδρο αναδρομής - επίπεδα 0-2



Σχήμα 5.5: Δένδρο αναδρομής - πλήρης ανάπτυξη

στο Σχήμα 5.5. Το δένδρο είναι δυαδικό και πλήρες. Άρα ο αριθμός των ακμών σε οποιοδήποτε μονοπάτια από τη ρίζα σε φύλλο αποτελεί το ύψος του δένδρου. Στο μονοπάτι αυτό η κάθε ακμή αντιστοιχεί σε μία διαίρεση του μεγέθους του στιγμιότυπου με το 3. Άρα το ύψος του δένδρου, έστω h, μας δίνει *μικρότερο αριθμό* διαιρέσεων του n με το 3 προκειμένου να φτάσουμε σε τιμή μικρότερη-ίση με 1. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \frac{n}{3^h} \leq 1 \Rightarrow n \leq 3^h \Rightarrow h \geq \lg_3 n \Rightarrow \\ h = \lceil \lg_3 n \rceil. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Παρατηρούμε ότι η (5.12) δίνει το ύψος του δένδρου όπως αυτό προκύπτει από την (5.9), η όποια ισχύει σαν ισότητα (αφού το δένδρο είναι πλήρες δυαδικό), με αριθμό κορυφών $d = 2^{\lceil \lg_3 n \rceil + 1} - 1$. Στο Σχήμα 5.5 σημειώνεται το ύψος του δένδρου καθώς και ο αριθμός των ΣΥΒ που εκτελούνται σε κάθε ύψος (ποσότητες στο αριστερό περιθώριο του σχήματος).

Μετρώντας από επάνω προς τα κάτω, θεωρούμε τον δείκτη βάθους $j \in \{0, \ldots, \lceil \lg_3 n \rceil\}$ - σε βάθος $j = 0$ βρίσκεται η ρίζα του δένδρου που συνεισφέρει n στο συνολικό αριθμό των, σε βάθος $j = 1$ οι δύο κορυφές που συνεισφέρουν η καθεμία $\frac{n}{3}$, κλπ. Δηλαδή, ο αριθμός των ΣΥΒ σε κάθε βάθος είναι

$$\begin{aligned} (\frac{2}{3})^j \cdot n, &\qquad j = 0, \ldots, \lceil \lg_3 n \rceil - 1, \\ 2^j \cdot 1, &\qquad j = \lceil \lg_3 n \rceil. \end{aligned}$$

Αθροίζοντας, για όλες τις τιμές του δείκτη j, έχουμε

$$\begin{aligned} T(n) &= n \sum_{j=0}^{\lceil \lg_3 n \rceil - 1} \left(\frac{2}{3}\right)^j + 2^{\lceil \lg_3 n \rceil} \\ &\leq n \sum_{j=0}^{(\lg_3 n + 1) - 1} \left(\frac{2}{3}\right)^j + 2^{(\lg_3 n + 1)} \\ &= n \sum_{j=0}^{\lg_3 n} \left(\frac{2}{3}\right)^j + 2 \cdot 2^{\lg_3 n} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} T(n) &\leq n \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j + 2 \cdot n^{\lg_3 2} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} n + 2n^{\lg_3 2} = 3n + 2n^{\lg_3 2} \\ &\leq 3n + 2n \Rightarrow \\ T(n) &\leq 5n. \end{aligned}$$

Από την τελευταία ανισότητα έχουμε ότι $T(n) = O(n)$.

Μπορούμε να γενικεύσουμε την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε ως εξής. Έστω

$$T(n) = \begin{cases} aT(\frac{n}{b}) + cn, & \text{για } n > 1, \\ 1, & \text{για } n \leq 1, \end{cases} \tag{5.13}$$

όπου $a, b > 1$. Το ύψος του δένδρου αναδρομής (μήκος μονοπατιού από τη ρίζα μέχρι κάποιο φύλλο του δένδρου) είναι $\lceil \lg_b n \rceil$· οι κορυφές διακρίνονται σε επίπεδα τα οποία αριθμούνται από 0 (επίπεδο στο οποίο βρίσκεται η ρίζα του δένδρου) μέχρι $\lceil \lg n \rceil$ (επίπεδο στο οποίο βρίσκονται τα φύλλα). Επομένως, αριθμός των ΣΥΒ σε κάθε επίπεδο j είναι

$$\begin{array}{ll} (\frac{a}{b})^j \cdot n, & j = 0, \ldots, \lceil \lg_b n \rceil - 1, \\ a^j, & j = \lceil \lg_b n \rceil. \end{array}$$

Το δένδρο αναδρομής είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για την μελέτη αναδρομικών συναρτήσεων στις οποίες περιλαμβάνονται περισσότεροι του ενός αναδρομικοί όροι στο δεξί μέλος. Ένα παράδειγμα αποτελεί η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2. Έστω

$$T(n) = \begin{cases} T(n/a) + T(n/b) + \Theta(n), & n > 1, \\ 0 & n \leq 1, \end{cases}$$

όπου $a, b > 1$. Τότε

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n), & \text{αν } a^{-1} + b^{-1} < 1, \\ \Theta(n \lg n), & \text{αν } a^{-1} + b^{-1} = 1. \end{cases}$$

Απόδειξη. Το δένδρο αναδρομής απεικονίζεται στο Σχήμα 5.6. Παρατηρούμε ότι το δένδρο δεν είναι ισοζυγισμένο: ο αριθμός των ακμών σε κάθε μονοπάτι από την ρίζα σε ένα φύλο δεν είναι ίδιος. Αν υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $a < b$ ο αριθμός αυτός κυμαίνεται από $\lceil \lg_b n \rceil$ μέχρι $\lceil \lg_a n \rceil$.[3] Επομένως το ύψος του δένδρου είναι $\lceil \lg_a n \rceil$.

Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 5.6 η συνεισφορά των εσωτερικών κορυφών σε βάθος k στην συνάρτηση $T(n)$ είναι [4]

$$cn \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^k. \tag{5.14}$$

Αφού το μεγαλύτερο βάθος δεν ξεπερνά το $\lceil \lg_a n \rceil$ αν αθροίσουμε τις παραπάνω ποσότητες για $k = 0, \ldots \lceil, \lg_a n \rceil$ έχουμε ένα άνω φράγμα στον αριθμό των ΣΥΒ

$$T(n) \leq cn \sum_{j=0}^{\lceil \lg_a n \rceil - 1} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^j + 2^{\lceil \lg_a n \rceil} \cdot 0 = cn \sum_{j=0}^{\lceil \lg_a n \rceil - 1} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^j. \tag{5.15}$$

Συνεπώς,

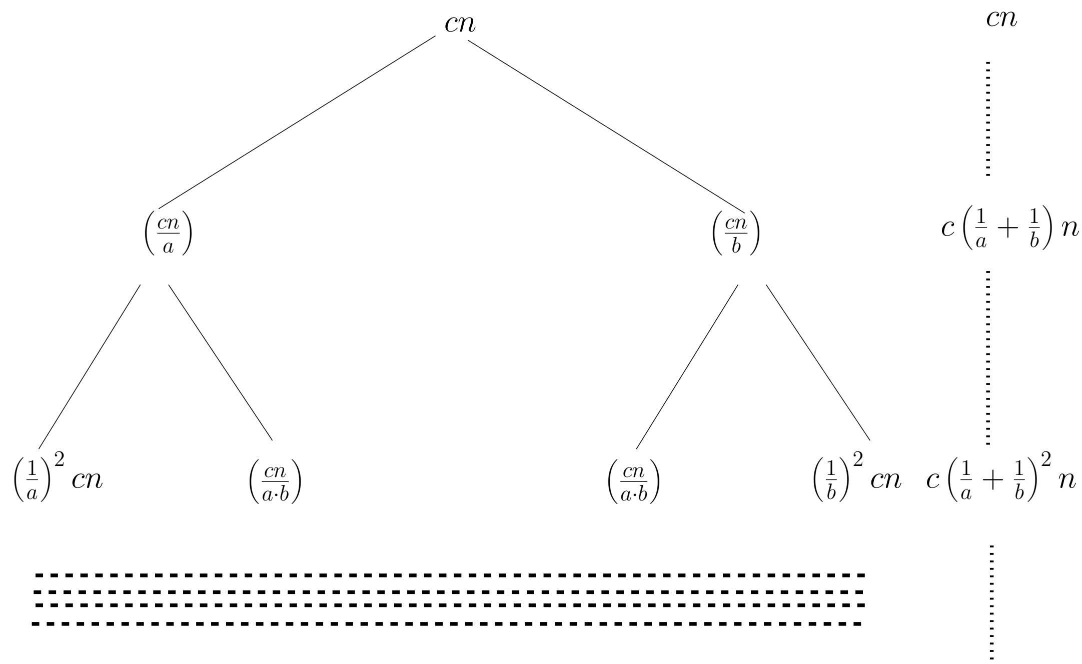
$$T(n) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^j cn = \frac{c}{1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} n. \tag{5.16}$$

Αν $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$, ο παρανομαστής του δεξιού μέλους της (5.16) είναι θετικός και άρα το ίδιο ισχύει και για το κλάσμα με το οποίο πολλαπλασιάζεται η παράμετρος n. Άρα $T(n) = O(n)$. Περαιτέρω επειδή $T(n) \geq n \Rightarrow T(n) = \Omega(n)$, έχουμε ότι

$$T(n) = \Theta(n).$$

[3]Θέτοντας $x = \lg_a n, y = \lg_b n$ έχουμε $a^x = n = b^y$. Επειδή $a < b$, για να ισχύει η ισότητα, θα πρέπει $x < y$ και επομένως $\lg_b n < \lg_a n$. Οπότε ισχύει ότι $\lceil \lg_b n \rceil \geq \lceil \lg_a n \rceil$.

[4]Δες παράρτημα για μια αυστηρή απόδειξη της (5.14)



Σχήμα 5.6: Δένδρο αναδρομής, Πρόταση 2

Αν $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, η (5.15) συνεπάγεται ότι

$$T(n) \leq \sum_{j=0}^{\lceil \lg_a n \rceil - 1} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^j cn = cn \sum_{j=0}^{\lceil \lg_a n \rceil - 1} 1 = cn \cdot \lceil \lg_a n \rceil \leq cn(\lg_a n + 1). \tag{5.17}$$

Επειδή για οποιοδήποτε ακέραιο $a > 1$ ισχύει ότι $\lg_a n = \Theta(\lg n)$, η (5.17) συνεπάγεται $T(n) = O(n \lg n)$.

Αν θεωρήσουμε το άθροισμα της (5.14) για $k = 0, \ldots, \lceil \lg_b n \rceil - 1$, τότε παίρνουμε ένα κάτω φράγμα για την $T(n)$. Ακολουθώντας αντίστοιχη αποδεικτική διαδικασία με την παραπάνω, βρίσκουμε ότι $T(n) = \Omega(n \lg n)$. $\square$

5.5 Θεώρημα κυρίαρχου όρου

Η χρήση του δένδρου αναδρομής αν και διαισθητική είναι κάπως δύσκολη στον υπολογισμό του συνολικού αριθμού των ΣΥΒ. Ένας πιο εύκολος τρόπος για να εκτιμήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά μίας αναδρομικής συνάρτησης είναι με τη χρήση του επόμενου θεωρήματος το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη (δες [3]).

Θεώρημα 1 (Θεώρημα κυρίαρχου όρου - Master theorem)**.** Έστω συνάρτηση $T(n)$ ορισμένη στους μη-αρνητικούς πραγματικούς που να ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n)$$

όπου $a > 0, b > 1$ και $f(n)$ μη-αρνητική συνάρτηση ορισμένη στους θετικούς πραγματικούς. Τότε

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\lg_b a}), \text{ αν } f(n) = O(n^{\lg_b a - \epsilon}), \epsilon > 0, \\ \Theta(n^{\lg_b a} \lg^{k+1} n), \text{ αν } f(n) = \Theta(n^{\lg_b a} \lg^k n), k \geq 0, \\ \Theta(f(n)), \text{ αν } f(n) = \Omega(n^{\lg_b a + \epsilon}), \epsilon > 0, \text{ και} \\ \qquad\qquad\qquad af(n/b) \leq cf(n), c < 1 \end{cases}$$

Ως παράδειγμα, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1 για να δώσουμε ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τις συναρτήσεις

α) $T(n) = 8T(n/2) + n^2$,

β) $T(n) = 2T(n/4) + n^{1/2}$,

γ) $T(n) = 2T(n/3) + n$.

Έχουμε:

α) $a = 8 = 2^3, b = 2, f(n) = n^2$. Είναι τετριμμένο ότι $n^2 = O(n^{3-\epsilon}), 1 \geq \epsilon \geq 0$ και $3 = \lg 2^3$. Επομένως,

$$f(n) = n^2 = O(n^{\lg 2^3 - \epsilon})$$

και άρα σύμφωνα με την πρώτη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος

$$T(n) = \Theta(n^3).$$

β) $a = 2, b = 4, f(n) = n^{1/2} = \Theta(n^{\lg_4 2} \lg^0 n)$. Άρα σύμφωνα με τη δεύτερη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος για $k = 0$, έχουμε

$$T(n) = \Theta(n^{1/2} \lg n)$$

γ) $a = 2, b = 3, f(n) = n$. Επειδή

$$n \geq n^{\lg_3 2 + \epsilon}$$

όταν

$$1 \geq \lg_3 2 + \epsilon \Rightarrow 1 - \lg_3 2 \geq \epsilon \Rightarrow \lg_3 3 - \lg_3 2 \geq \epsilon \Rightarrow \lg_3 \frac{3}{2} \geq \epsilon.$$

Άρα

$$f(n) = \Omega(n^{\lg_3 2 + \epsilon}) \text{ όταν } \lg_3 \frac{3}{2} \geq \epsilon \geq 0.$$

Επίσης

$$2 \cdot n/3 \leq c \cdot n \text{ για } 1 > c \geq 2/3.$$

Από τα παραπάνω και σύμφωνα με την τρίτη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος έχουμε

$$T(n) = \Theta(n).$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι το Θεώρημα 1 ισχύει και στην περίπτωση που ο όρος $T(\frac{n}{b})$ αντικαθίσταται από τον $T(\lceil \frac{n}{b} \rceil)$ ή τον $T(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor)$. Αναλυτικότερα, στην εργασία [14] αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα

Θεώρημα 2. Έστω σταθερές $a > 0, b > 1$. Θεωρούμε μη-αρνητική συνάρτηση $f(n)$ ορισμένη στο $\mathbb{R}_+$ και $T(n)$ ορισμένη στο $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$T(n) = a_1 T(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor) + a_2 T(\lceil \frac{n}{b} \rceil) + f(n)$$

όπου $a_1, a_2 \geq 0 \geq 1$, και $a = a_1 + a_2$. Τότε

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\lg_b a}), \text{ αν } f(n) = O(n^{\lg_b a - \epsilon}), \epsilon > 0, \\ \Theta(n^{\lg_b a} \lg^{k+1} n), \text{ αν } f(n) = \Theta(n^{\lg_b a} \lg^k n), k \geq 0, \\ \Theta(f(n)), \text{ αν } f(n) = \Omega(n^{\lg_b a + \epsilon}), \epsilon > 0, \text{ και} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad af(n/b) \leq cf(n), c < 1 \end{cases}$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το Θεώρημα 1 όπως διατυπώθηκε δεν καλύπτει κάθε περίπτωση αναδρομικής σχέσης. Για παράδειγμα η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\lg n}$$

δεν μπορεί να εκτιμηθεί με βάση αυτό το θεώρημα αφού

$$\frac{\frac{n}{\lg n}}{n^{\lg 2}} = \frac{1}{\lg n} < n^{\epsilon},$$

για κάθε $\epsilon > 0$.

5.6 Μέθοδος των φραγμάτων

Στην περίπτωση που η $T(n)$ είναι αρκετά σύνθετη για να τη χειριστούμε μέσω κάποιας από τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν μέχρι τώρα μπορούμε να επιχειρήσουμε να την φράξουμε από επάνω και από τα κάτω από δύο έτερες συναρτήσεις οι οποίες μπορούν να μελετηθούν πιο εύκολα. Οι ασυμπτωτικές εκτιμήσεις των συναρτήσεων αυτών μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να εξαχθεί μία ασυμπτωτική εκτίμηση για την συνάρτηση την οποία φράζουν. Για παράδειγμα έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για τη συνάρτηση

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{5}\right) + n. \tag{5.18}$$

Από την Πρόταση 2 γνωρίζουμε ότι $T(n) = \Theta(n)$. Θα δείξουμε πως μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα φράζοντας την $T(n)$ από επάνω και από κάτω. Παρατηρούμε ότι

$$2T\left(\frac{n}{5}\right) + n \leq T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n. \tag{5.19}$$

Ισοδύναμα,

$$T'(n) \leq T(n) \leq T''(n), \text{ όπου,}$$
$$T'(n) = 2T'\left(\frac{n}{5}\right) + n, T''(n) = 2T''\left(\frac{n}{3}\right) + n.$$

Στην Ενότητα 5.5 δείξαμε ότι $T''(n) = \Theta(n)$ (Παράδειγμα (γ)). Για την περίπτωση της $T'(n)$ έχουμε $a = 2, b = 5, f(n) = n$. Επειδή $n > n^{\lg_5 2+\epsilon}$ για $\epsilon > 0$ και αρκετά μικρό ($\epsilon \leq \lg_5 \frac{5}{2}$), έχουμε ότι $n = \Omega(n^{\lg_5 2+\epsilon})$. Επιπλέον

$$2f(n/5) = 2n/5 \leq cn,$$

για $1 > c \geq 2/5$. Επομένως σύμφωνα με την τρίτη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος έχουμε

$$T'(n) = \Theta(n). \tag{5.20}$$

Τα παραπάνω σε συνδυασμό με την (5.19) συνεπάγονται

$$T(n) = \Theta(n).$$

5.7 Θεώρημα Akra-Bazzi

Το θεώρημα αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν μία γενίκευση του κεντρικού θεωρήματος. Αφορά αναδρομικές σχέσεις της μορφής

$$T(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} a_i T(n/b_i) + g(n), & n > n_0, \\ \Theta(1), & 1 \leq n \leq n_0, \end{cases} \tag{5.21}$$

όπου

- $k \geq 1$,
- $b_i > 1$, και $n_0 > \max\{b_i, b_i/(b_i - 1)\}$, για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$,
- $a_i > 0$, για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$,
- $g(n)$ είναι μη-αρνητική συνάρτηση για την οποία υπάρχουν σταθερές α, β τέτοιες ώστε $g(n) = O(n^\alpha)$ και $g(n) = \Omega(n^\beta)$, με $0 < \beta \leq \alpha$.

Θεώρημα 3 (Akra - Bazzi)**.** Η λύση της αναδρομικής εξίσωσης (5.21) είναι

$$T(n) = \Theta\left(n^p \left(1 + \int_1^n \frac{g(u)}{u^{p+1}} \mathrm{d}u\right)\right) \tag{5.22}$$

όπου η παράμετρος p αποτελεί τη μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \left(\frac{1}{b_i}\right)^p = 1. \tag{5.23}$$

Το Θεώρημα 3 έχει το πλεονέκτημα ότι δεν απαιτεί οι παράμετροι a_i, b_i να είναι ακέραιοι (ούτε καν ρητοί). Από την άλλη η χαρακτηριστική εξίσωση (5.23) μπορεί να μην έχει αναλυτική λύση· στη γενική περίπτωση χρειάζονται μέθοδοι αριθμητικής ανάλυσης για τον προσδιορισμό της τιμής της παραμέτρου p. Όμως σε πολλές περιπτώσεις κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο.

Παράδειγμα 17. Δίνεται η συνάρτηση

$$T(n) = T(3n/4) + T(n/4) + n.$$

Παρατηρούμε ότι $a_1 = 1, b_1 = 4/3, a_2 = 1, b_2 = 4$ και επομένως η εξίσωση (5.23) γίνεται

$$\left(\frac{3}{4}\right)^p + \left(\frac{1}{4}\right)^p = 1.$$

Η προφανής λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι $p = 1$ και επομένως

$$T(n) = \Theta\left(n\left(1 + \int_1^n \frac{u}{u^{1+1}}\,\mathrm{d}u\right)\right) = \Theta\left(n\left(1 + \int_1^n \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\right)\right) = \Theta(n \log n).$$

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα αποτελεί η επίλυση της (5.18) με τη χρήση του Θεωρήματος 3. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (5.23) είναι

$$\left(\frac{1}{3}\right)^p + \left(\frac{1}{5}\right)^p = 1$$

η οποία δεν φαίνεται να έχει αναλυτική λύση. Όμως παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι φθίνουσα. Άρα $0 < p < 1$ και

$$\int_1^n \frac{g(u)}{u^{p+1}}\,\mathrm{d}u = \int_1^n u^{-p}\,\mathrm{d}u = \frac{u^{1-p}}{1-p}\Big|_{u=1}^n = \frac{n^{1-p}-1}{1-p} = \Theta(n^{1-p}).$$

Επομένως

$$T(n) = \Theta(n^p \cdot (1 + \Theta(n^{1-p})) = \Theta(n).$$

5.8 Μετατροπές

Αρκετές φορές οι αναδρομικές σχέσεις που καλούμαστε να μελετήσουμε δεν ταιριάζουν στα πρότυπα που έχουμε αναλύσει παραπάνω. Στην περίπτωση αυτή επιχειρούμε να μετατρέψουμε τη δοθείσα σχέση σε μια μορφή που ταιριάζει σε κάποιο πρότυπο ορίζοντας μια νέα συνάρτηση με βάση αυτή που προσπαθούμε να μελετήσουμε. Οι βασικοί τύποι μετατροπών είναι

α) Μετατροπή του πεδίου ορισμού: ορίζουμε μία νέα συνάρτηση $S(n) = T(g(n))$ την οποία διέπει με μία απλούστερη αναδρομική σχέση,

β) Μετατροπή του πεδίου τιμών: ορίζουμε μία νέα συνάρτηση $S(n) = g(T(n))$ την οποία διέπει με μία απλούστερη αναδρομική σχέση,

γ) Μετατροπή διαφοράς: απλοποιούμε την αναδρομική συνάρτηση $T(n)$ μελετώντας τη συνάρτηση διαφοράς $\Delta T(n) = T(n) - T(n-1)$.

Η ασυμπτωτική μελέτη της συνάρτησης

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + 1 \tag{5.24}$$

μπορεί να γίνει με τη χρήση της μετατροπής του πεδίου ορισμού. Συγκεκριμένα, αν θέσουμε $g(n) = 2^n$, μπορούμε να μελετήσουμε στη θέση της (5.24) την

$$T(g(n)) = T(2^n) = T(2^{n-1}) + T(2^{n-2}) + 1.$$

Θέτοντας $t(n) = T(2^n)$, η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$t(n) = t(n-1) + t(n-2) + 1 \tag{5.25}$$

η οποία μας θυμίζει την αναδρομική εξίσωση που παράγει τους αριθμούς Fibonacci. Επομένως $t(n) = \Theta(\left(\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right)^n)$ και επειδή $t(n) = T(2^n)$ συνεπάγεται $T(n) = t(\lg n)$, έχουμε

$$T(n) = t(\lg n) = \Theta(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\lg n}) = \Theta(n^{\lg\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}) = \Theta(n^{0,69424}).$$

Μία διαφορετική εφαρμογή της περίπτωσης (α) παρουσιάζεται στη συνέχεια. Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ασυμπτωτικά τη συνάρτηση

$$T(n) = \begin{cases} 2T(\frac{n}{3} - 1) + n, & n > 1, \\ 1, & n \leq 1. \end{cases} \tag{5.26}$$

Ορίζουμε μία νέα συνάρτηση

$$S(n) = T(n + a) \tag{5.27}$$

όπου a μία σταθερά τέτοια ώστε να ικανοποιείται η αναδρομική σχέση

$$S(n) = 2S(\frac{n}{3}) + \Omega(n). \tag{5.28}$$

Από την τρίτη περίπτωση του Θεωρήματος 1 έχουμε ότι

$$S(n) = \Theta(n). \tag{5.29}$$

Αν (μετα-)γράψουμε την (5.28) χρησιμοποιώντας την (5.27) έχουμε τη σχέση

$$T(n + a) = 2T(\frac{n}{3} + a) + \Omega(n). \tag{5.30}$$

Άμεσα από την (5.26) αν αντικαταστήσουμε το n από το $n + a$ παίρνουμε

$$T(n + a) = 2T(\frac{n + a}{3} - 1) + n + a. \tag{5.31}$$

Για να είναι (5.30) ισοδύναμη με την (5.31) θα πρέπει

$$\frac{n}{3} + a = \frac{n + a}{3} - 1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}.$$

Άρα

$$T(n) = S(n - a) = S(n + \frac{3}{2}) = \Theta(n + \frac{3}{2}) = \Theta(n).$$

Για ένα ακόμα παράδειγμα της περίπτωσης (α) θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της αναδρομικής έκδοσης του αλγόριθμου αναζήτησης ενός στοιχείου σε μία ταξινομημένη ακολουθία n στοιχείων με τη μέθοδο των ομάδων (Ενότητα 4.2.2, Αλγόριθμος 25).

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των ΣΥΒ σε κάθε κλήση της συνάρτησης εξαρτάται από τον αριθμό των ταξινομημένων στοιχείων ανάμεσα στα οποία γίνεται η αναζήτηση μόνο στο βρόχο των γραμμών 16-19 (σε κάθε άλλο σημείο του αλγόριθμου ο αριθμός των ΣΥΒ είναι σταθερός). Συγκεκριμένα, στις γραμμές αυτές εκτελούνται τάξης $O(\sqrt{n})$ ΣΥΒ όταν ο αλγόριθμος καλείται «να ψάξει» $n = hi - lo + 1$ στοιχεία. Επίσης στη συνέχεια καλείται να επιλύσει ένα στιγμιότυπο του ίδιου προβλήματος μεγέθους μικρότερου-ίσου της ποσότητας $\sqrt{n}$. Έτσι ο αριθμός των ΣΥΒ του αλγόριθμου φράζεται από τα επάνω από τη συνάρτηση $T(n)$ η οποία ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + p\sqrt{n}, \tag{5.32}$$

όπου p μία θετική σταθερά. Θα αναλύσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης αυτής. Θέτουμε

$$m = \lg n \Rightarrow n = 2^m \Rightarrow \sqrt{n} = 2^{\frac{m}{2}}. \tag{5.33}$$

Η (5.32) γίνεται

$$T(2^m) = T(2^{\frac{m}{2}}) + p \cdot 2^{\frac{m}{2}}. \tag{5.34}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση

$$S(m) = T(g(m)), \tag{5.35}$$

όπου $g(m) = 2^m$. Επομένως,

$$S(m) = T(2^m) \Rightarrow S(m/2) = T(2^{m/2}).$$

Η (5.34) γίνεται

$$S(m) = S(\frac{m}{2}) + p \cdot 2^{\frac{m}{2}}. \tag{5.36}$$

Εξετάζοντας την (5.36) υπό το πρίσμα του κεντρικού θεωρήματος έχουμε ότι $a = 1, b = 2, f(m) = p \cdot 2^{\frac{m}{2}}$. Παρατηρούμε ότι $f(m) = p \cdot 2^{\frac{m}{2}} \geq m^{\lg 1+\epsilon} = m^{\epsilon}$ για $\epsilon > 0$ (π.χ. $\epsilon = 1$) και επομένως $f(m) = \Omega(m^{\lg 1+\epsilon})$. Επιπλέον, $1 \cdot f(m/2) = p \cdot 2^{\frac{m}{4}}$ είναι μικρότερο -ίσο από $cf(m) = c \cdot p \cdot 2^{\frac{m}{2}}$ για κάποιο $c < 1$, π.χ. θεωρήστε $c = 1/2$. Άρα από την τρίτη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος έχουμε ότι $S(m) = \Theta(f(m)) = \Theta(p \cdot 2^{\frac{m}{2}}) = \Theta(2^{\frac{m}{2}})$. Από τις (5.32), …, (5.36), έχουμε,

$$T(n) = T(2^m) = S(m) = \Theta(2^{\frac{m}{2}}) = \Theta(2^{\frac{\lg n}{2}}) = \Theta(\sqrt{n}).$$

Εφόσον η $T(n)$ φράζει τον αριθμό των ΣΥΒ από επάνω, συνεπάγεται ότι ο Αλγόριθμος 15 είναι τάξης $O(\sqrt{n})$.

Για ένα παράδειγμα της περίπτωσης (β) θεωρούμε την αναδρομική σχέση

$$T(n) = \frac{1}{4}T(n/4) + \frac{3}{4}T(3n/4) + 1.$$

Τη σχέση αυτή μπορούμε να την επιλύσουμε εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3. Εναλλακτικά ορίζουμε τη συνάρτηση $U(n) = nT(n)$. Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με n έχουμε

$$U(n) = U(n/4) + U(3n/4) + n$$

η οποία με τη χρήση του δένδρου αναδρομής (Πρόταση 2) μας δίνει ότι

$$U(n) = \Theta(n \lg n) \Rightarrow T(n) = \Theta(\lg n)$$

Για ένα παράδειγμα της περίπτωσης (γ), θεωρούμε τη συνάρτηση (προκύπτει από τον αλγόριθμο της τυχαιοκρατικής ταχυταξινόμησης - randomized quicksort)

$$T(n) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T(k) + n.$$

Η δοθείσα αναδρομική συνάρτηση είναι *πλήρους-ιστορίας* αφού η τιμή της $T(n)$ εξαρτάται από τις τιμές που είχε πάρει η συνάρτηση αυτή για κάθε $k < n$. Πολλαπλασιάζοντας με n έχουμε

$$nT(n) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} T(k) + n^2 \Rightarrow \tag{5.37}$$

$$(n-1)T(n-1) = 2 \sum_{k=0}^{n-2} T(k) + (n-1)^2. \tag{5.38}$$

Η διαφορά (5.37)-(5.38) δίνει τη σχέση

$$T(n) = \frac{n+1}{n} T(n-1) + 2 - \frac{1}{n}.$$

Ουσιαστικά οι παραπάνω χειρισμοί κατάφεραν να εκφράσουν την $T(n)$ σε σχέση μόνο με την $T(n-1)$. Στη συνέχεια θέτουμε $t(n) = T(n)/(n+1)$ και οι παραπάνω σχέση γίνεται

$$t(n) = t(n-1) + \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} = t(n-1) + \frac{3}{n+1} - \frac{1}{n}.$$

Με διαδοχική αντικατάσταση και θεωρώντας ότι $t(0) = 1$ η παραπάνω σχέση συνεπάγεται

$$\begin{aligned} t(n) &= 1 + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{3}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \\ &= \frac{3}{n+1} - 2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{3}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \\ &= \frac{3}{n+1} - 2 + 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

Επειδή $\frac{3}{n+1} - 2 = \Theta(1)$ και $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ είναι ο αρμονικός μέσος ο οποίος είναι τάξης $\Theta(\lg n)$, έχουμε ότι $t(n) = \Theta(\lg n)$. Αντικαθιστώντας, από τη σχέση $t(n) = T(n)/(n+1)$ προκύπτει ότι

$$T(n) = \Theta(n \lg n).$$