1. Αριθμητικές Σχέσεις

$$\frac{n}{n+1} \leq \ln(1+n) \leq n, n > -1, \tag{1}$$

$$1 + x \leq (1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x, \tag{2}$$

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1, x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$$\lceil \frac{x}{y} \rceil \leq \frac{x + y - 1}{y} \tag{4}$$

$$\lfloor \frac{x}{y} \rfloor \geq \frac{x - y + 1}{y} \tag{5}$$

$$x \bmod n = x - n \lfloor \frac{x}{n} \rfloor \tag{6}$$

2. Βασικές ταυτότητες αθροισμάτων

$$\sum_{i=m}^{i=n-1} a^i = \frac{a^m - a^n}{1 - a}, m < n, \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} a^i = \frac{1 - a^n}{1 - a}, \tag{8}$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} i \cdot a^i = \frac{a - na^n + (n-1)a^{n+1}}{(1-a)^2}, a \neq 1, n > 0, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} a^i = \frac{a}{1-a} \Rightarrow \sum_{i=0}^{i=\infty} a^i = \frac{1}{1-a}, |a| < 1, \tag{10}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1, \tag{11}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \binom{n}{i} = n2^{n-1}, \tag{13}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + c, c > 0. \tag{15}$$

3. Έστω k, n ακέραιοι, Μας ενδιαφέρει πότε

$$\frac{n}{2^k} \leq 1. \tag{16}$$

Λύνουμε,

$$\frac{n}{2^k} \leq 1 \Rightarrow k \geq \lg n.$$

Επειδή το k είναι ακέραιος, η μικρότερη τιμή του για την οποία ισχύει η (16) είναι

$$k = \lceil \lg n \rceil.$$

Σχετιζόμενο με το παραπάνω είναι η αναδρομική σχέση

$$T(n) = \begin{cases} aT(\frac{n}{2}) + cn, & n \geq 2, \\ 1, & n = 1. \end{cases} \tag{17}$$

Στην παραπάνω σχέση αντιστοιχεί ένα δένδρο αναδρομής που έχει

$$\lceil \lg n \rceil$$

επίπεδα: η ρίζα είναι σε επίπεδο μηδέν ενώ τα φύλλα σε επίπεδο $\lceil \lg n \rceil$. Ο αριθμός των φύλλων είναι

$$a^{\lceil \lg n \rceil}.$$

4. Στην περίπτωση όπου η (17) γίνεται

$$T(n) = \begin{cases} aT(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + cn, & n \geq 2, \\ 1, & n = 1, \end{cases} \tag{18}$$

Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να βρούμε την μικρότερη τιμή του k για την οποία ισχύει

$$\lfloor \frac{n}{2^k} \rfloor \leq 1. \tag{19}$$

Από την (19) έχουμε

$$1 \geq \lfloor \frac{n}{2^k} \rfloor > \frac{n}{2^k} - 1 \Rightarrow$$
$$2 > \frac{n}{2^k} \Rightarrow k > \lg n - 1.$$

Επειδή k ακέραιος η μικρότερη τιμή του για την οποία ισχύει η (19) είναι[1]

$$k = \lfloor \lg n \rfloor.$$

Το δένδρο αναδρομής έχει ανάλογα χαρακτηριστικά όπως στο 1 παραπάνω.

5. Γενίκευση της 1. Στη γενική μορφή η (17) γίνεται

$$T(n) = \begin{cases} aT(\frac{n}{b}) + cn, & n \geq 2, \\ 1, & n = 1, \end{cases}$$

   Το ύψος του δένδρου αναδρομής είναι

$$\lceil \lg_b n \rceil$$

   ενώ ο αριθμός των φύλων είναι

$$a^{\lg_b n}.$$

6. Προφανώς όταν $a = 2, b = 2$, το δένδρο αναδρομής είναι *πλήρες δυαδικό δένδρο*. Δηλαδή κάθε κόμβος που δεν είναι φύλλο έχει δύο απογόνους.

7. Ανάλυση της σχέσης

$$T(n) = T(\frac{n}{a}) + T(\frac{n}{b}) + \Theta(n), \tag{20}$$

   όπου $a, b \in \mathbb{R}_+$.

   Θεωρούμε ότι $T(1) = 1$ και $a \leq b$. Το αντίστοιχο δένδρο αναδρομής έχει μονοπάτια, από τη ρίζα μέχρι τα φύλλα, μήκους από $\lceil \lg_b n \rceil$ μέχρι $\lceil \lg_a n \rceil$. Θα δείξουμε (με επαγωγή) ότι η συνεισφορά του επιπέδου $k < \lceil \lg_b n \rceil$ του δένδρου στην συνάρτηση είναι

$$cn \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^k. \tag{21}$$

[1] αφού

$$\lfloor \lg n \rfloor > \lg n - 1$$

Από το δένδρο αναδρομής είναι εύκολο να δει κανείς ότι η (21) ισχύει για $k = 0, 1$. Έστω ότι ισχύει για $k = m$. Δηλαδή για το επίπεδο αυτό έχουμε τη συνεισφορά

$$cn\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^m .$$

Στο επίπεδο αυτό παρατηρούμε ότι κάθε κόμβος $j = 0, \dots, m$ συνεισφέρει στη συνάρτηση κατά

$$cn \cdot \binom{m}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^j , \tag{22}$$

και επομένως από το διώνυμο του Νεύτωνος έχουμε

$$cn \cdot \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^j = cn\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^m \tag{23}$$

Οι κόμβοι του δένδρου στο επίπεδο $k = m + 1$ προέρχονται από τη διαίρεση των όρων (22) με a, b, αντίστοιχα. Έχουμε

$$cn \cdot \binom{m}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m+1-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^j , \tag{24}$$

$$cn \cdot \binom{m}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{j+1} , \tag{25}$$

Αν θεωρήσουμε τους όρους της (24) για $j \neq 0$ και τους όρους της (25) για $j \neq n$, παρατηρούμε ότι για κάθε όρο της πρώτης υπάρχει ένας όρος της δεύτερης όπου τα κλάσματα $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ εμφανίζονται με κοινό εκθέτη. Συγκεκριμένα, αν γράψουμε για $j = r \neq 0$ την (24) και $j = r - 1$ την (25) παίρνουμε

$$cn \cdot \binom{m}{r} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^r ,$$

$$cn \cdot \binom{m}{r-1} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^r .$$

Αθροίζοντας, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
&cn \cdot \left(\binom{m}{r} + \binom{m}{r-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \left(\frac{m!}{r! \cdot (m-r)!} + \frac{m!}{(r-1)! \cdot (m-(r-1))!}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \frac{m!}{(r-1)! \cdot (m-r)!} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{m-r+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \frac{m!}{(r-1)! \cdot (m-r)!} \cdot \frac{m+1}{r(m-r+1)} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \frac{(m+1)!}{r! \cdot (m+1-r)!} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \binom{m+1}{r} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m+1-r} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Επίσης παρατηρούμε ότι για $j = 0$ η (24) γίνεται

$$cn \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m+1} \qquad (27)$$

ενώ η (25) για $j = m$ γίνεται

$$cn \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{m+1} \qquad (28)$$

Αθροίζοντας την (26) για κάθε $r = 1, \ldots, m$ και (27), (28) προκύπτει η συνεισφορά του επιπέδου $k = m + 1$ στη συνάρτηση $T(n)$, ήτοι,

$$cn \cdot \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m+1-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{j} = cn\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{m+1},$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

8. Ένας θετικός ακέραιος a έχει n bits όταν βρίσκεται στα όρια

$$2^{n-1} \le a \le 2^n - 1.$$

Αντίστοιχα τα bits που χρειάζονται για την αποθήκευση ενός θετικού ακεραίου είναι

$$n = \lfloor \lg a \rfloor + 1 \qquad (29)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

$$n \neq \lceil \lg a \rceil$$

αφού η ισότητα στη σχέση αυτή δεν είναι σωστή (αποτυγχάνει) για n δύναμη του 2.

9. Ένας θετικός ακέραιος a (στο δεκαδικό σύστημα) ο οποίος έχει $n > 1$ ψηφία βρίσκεται στα όρια

$$10^{n-1} \leq a \leq 10^n - 1.$$

Η δυαδική του αναπαράσταση είναι ανάμεσα στα όρια

$$\lfloor (n-1) \lg 10 \rfloor + 1 \leq a_2 \leq \lfloor (n) \lg 10 \rfloor + 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lceil (n-1) \lg 10 \rceil \leq a_2 \leq \lceil (n) \lg 10 \rceil$$