# Σημειώσεις Σχεδίασης και Ανάλυσης Αλγορίθμων Παρασκευής 24/03/2023

$f(n) = 3n^2 - 5n + 4$

Να δείξετε οτι $f(n) = \Theta(n^2)$

1. Ν.Δ.Ο $f(n) = O(n^2)$

Άρα υπάρχουν $a, n_0 > 0: f(n) \leq a * n^2, \forall n \geq n_0$
$3n^2 - 5n + 4 \leq a * n^2, \forall n \geq n_0 \rightarrow$
$\rightarrow 3n^2 - 5n + 4 \leq 3n^2 + 4 , \forall\ n \geq 0$
$3n^2 + 4 \leq 3n^2 + 4n^2 = 7n^2, \forall n \geq 1 , a = 7, n_0 = 1$

2. ΝΔΟ $f(n) = \Omega(n^2)$

$b, n_0 > 0 : f(n) \geq b * n^2, \forall n \geq n_0$
$3n^2 - 5n + 4 \geq b * n^2, \forall n \geq n_o$
$(3 - b)n^2 - 5n + 4 \geq 0$
$3 - b \geq 0 \Rightarrow 3 \geq b$ $\Delta = (-5)^2 - 4 * (3 - b) * 4 < 0 \Rightarrow b < \frac{23}{16}$

$b < \min\left\{3, \frac{23}{16}\right\} = \frac{23}{16}$
$a = 7, b = 1, n_0 < 1$
$b * n^2 \geq f(n) \geq B(n^2), \forall n \geq 1$

Να δείξετε οτι $n^2 \neq O(n)$
Έστω ότι $n^2 = O(n)$
$\exists n, n_0 > 0 : \begin{array}{c} n^2 \leq a * n, \forall n \geq n_0 \\ n \leq a, \forall n \geq n_0 \end{array}$

$n_1 = \max\{a, n_0\} + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_1 > n_0 \Rightarrow n_1 \leq a \\ n_1 > a \end{cases}$$

(Άρα έχουμε άτοπο καθώς το $n_1$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο ή ίσο και μικρότερο του α ταυτόχρονα)

Έστω α > 1. Να δείξετε οτι $f(n) = \Theta\left(\log_n n\right) \Rightarrow f(n) = \Theta(logn)$

$$\exists C_1, C_2, n_0 > 0: C_2 * \log_n n \le f(n) \le C_1 * \log_n n, \qquad \forall n \ge n_0$$
$$\Rightarrow C_2 * \frac{lgn}{lga} \le f(a) \le C_1 * \frac{lgn}{lga} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{C_2}{lga} * lgn\right) * lgn \le f(n) \le \left(\frac{C_1}{lga}\right) * lgn$$

Ισχύει ότι:

1. $f(n) = O(g(n))$ ανν (αν και μόνον αν) $g(n) = \Omega(f(n))$
2. Η κλάση Θ ορίζει στο σύνολο των συναρτήσεων μια σχέση ισοδυναμίας
3. Αν $f(n) = \Theta(g(n))$ τότε οι κλάσεις $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$ και αντίστροφα
4. Ισχύει αποκλειστικά ένα από τα παρακάτω:
   a. $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$
   b. $\Theta\left(f(n)\right) \cap \Theta\left(g(n)\right) = \emptyset$

Για εξεταστική:
Αν ζητήσει να βρεθεί f(n) = O(n) και τέτοια αλλα ζητούμενα **ΧΩΡΊΣ** τη χρήση ορίων, τοτε εννοεί χωρίς το Πόρισμα 3. Δηλαδή χωρίς το πόρισμα που λέει $p(n) = \Theta(n^d)$ για ασυμπτωτικά θετικό πολυώνυμο βαθμού d. Επίσης, θεωρούνται εξεταστέα ύλη οι αποδείξεις για τις 4 προαναφερθείσες ιδιότητες κλάσεων

$$O(1) < O(lgn) < \cdots < O(n^n)$$
$$\Omega(1) > \Omega(lgn) > \cdots > \Omega(n^n)$$

<u>Σημείωση περί notation:</u> $\lg^k n = (lgn)^k \ne lg(n^k)$

Π.χ. $f(n) = n, g(n) = n^{n \bmod 3}, n \ge 1$

<u>Ορισμοί</u>

$$o\left(g(n)\right) = \{f: \forall a \in \mathbb{R}, \exists n_0 > 0, a * g(n) > f(n) \ge 0, \forall n \ge n_0\}$$

$$\omega\left(g(n)\right) = \{f: \forall b \in \mathbb{R}, \exists n_0 > 0, f(n) > b * g(n) \ge 0, \forall n \ge n_0\}$$

Π.χ.

$f(n) = n^2$
$g(n) = 2n^2$
$f(n) = O\big(g(n)\big)$
$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{1}{2} < 1$

Άσκηση: Να διατάξετε τις παρακάτω συναρτήσεις:

$f_1(n) = 3^n$
$f_2(n) = \lg^2 n$
$f_3(n) = \lg(lgn^2)$
$f_4(n) = 4lgn$
$f_5(n) = 2n^2$

$f_4(n) = 4^{lgn} = \left(2^2\right)^{lgn} = 2^{2lgn} = 2^{lgn^2} = n^2 < 2n^2 = f_5(n)$
$f_3(n) = \lg\left(\lg n^2\right) = \lg(2lgn) = lg2 + lglgn = 1 + lglgn < 2lglgn =$
$= \lg^2 lgn < \lg^2 n = f_2(n)$

Άρα διατάσσονται έτσι: $f_3(n) < f_2(n) < f_4(n) < f_5(n) < f_1(n)$

Έστω $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$

$a_i, k \in \mathbb{N} - \{0\}$ τότε $f(n) = \Theta(n^k)$

1. $f(n) = O(n^k)$
2. $f(n) = \Omega\left(n^k\right) \to f(n) \geq a_k * n^k$

1. $a, n_0 > 0$ , τέτοια ώστε $a * f(n) \leq a * n^k, \forall\ n \geq n_0$

$\hat{a} = \max\{a_k, a_{k-1}, \dots, a_0\}$
$f(n) \leq (k+1) * \hat{a} * n^k$

$a^k n^k \leq \hat{a} n^k$
$a_{n-1} n^{k-1} \leq\ \hat{a} n^k$