Υπόβαθρο

Δ. Μάγος

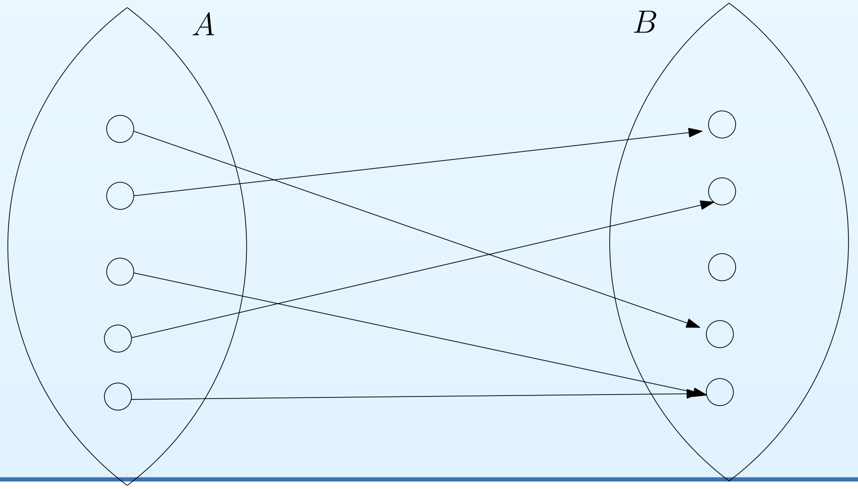
10 Φεβρουαρίου 2020

Συνάρτηση

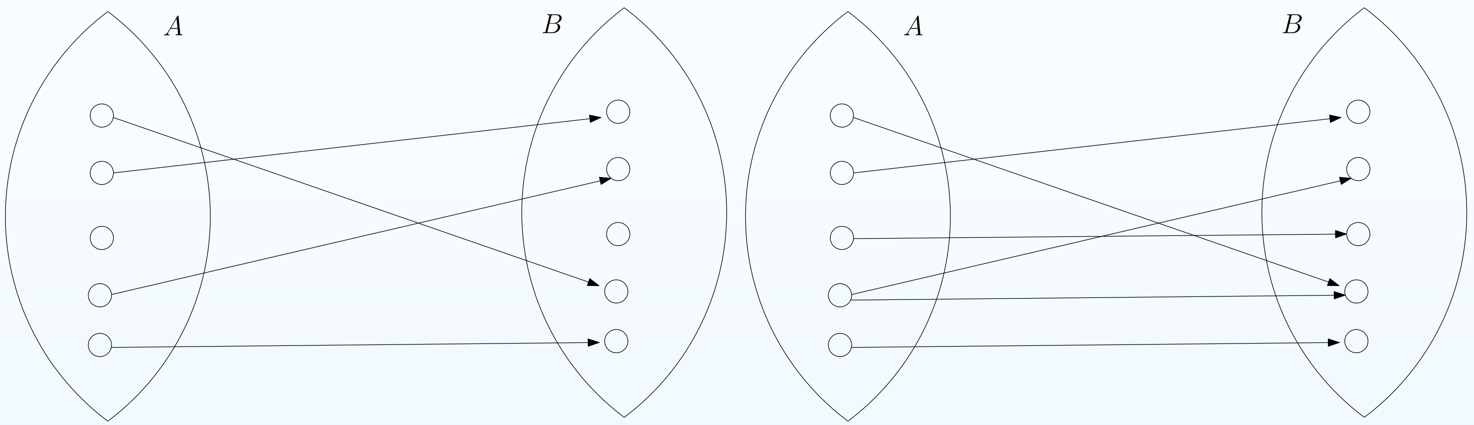
Ορισμός 1 *Μία συνάρτηση είναι μια αντιστοίχιση μεταξύ δύο συνόλων, που καλούνται σύνολο ορισμού και σύνολο τιμών, κατά την οποία ΚΑΘΕ ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού αντιστοιχίζεται σε ΕΝΑ ΚΑΙ ΜΟΝΟ στοιχείο του πεδίου τιμών.*

Αν f είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο A και πεδίο τιμών το σύνολο B γράφουμε

$$f : A \to B$$



Συναρτήσεις



Σχήμα 2: Παραδείγματα απεικονίσεων που δεν αποτελούν συναρτήσεις

Δεξιά: Υπάρχει στοιχείο του πεδίου ορισμού που δεν αντιστοιχείται σε κάποιο στοιχείο του πεδίου τιμών.

Αριστερά: Υπάρχει στοιχείο του πεδίου ορισμού που αντιστοιχείται σε παραπάνω από ένα στοιχεία του πεδίου τιμών.

Παραδείγματα

- Έστω $f(x) = x$. Είναι συνάρτηση αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δεν είναι συνάρτηση αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$.
- Θεωρούμε $\sqrt{a}$ τον αριθμό που αν τον υψώσουμε στο τετράγωνο παράγει το a. Έστω $f(x) = \sqrt{x}$. Είναι συνάρτηση αν $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Δεν είναι συνάρτηση αν $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ (για παράδειγμα, $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός) ή αν $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (για παράδειγμα, $\sqrt{4} = \pm 2$ και άρα το 4 απεικονίζεται σε δύο στοιχεία του $\mathbb{R}$ μέσω της f.)

Ταβάνι και Πάτωμα

Έστω $a \in \mathbb{R}$.

$\lfloor a \rfloor$: ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος-ίσος με a
$\lceil a \rceil$: ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος-ίσος με a

Παράδειγμα 2

$$a = 3,75 \Rightarrow \lfloor a \rfloor = 3, \lceil a \rceil = 4$$
$$a = -3,75 \Rightarrow \lfloor a \rfloor = -4, \lceil a \rceil = -3$$
$$a = 3 \Rightarrow \lfloor a \rfloor = 3, \lceil a \rceil = 3$$

Ιδιότητες

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1, x \in \mathbb{R},$$

$$\lceil \frac{x}{y} \rceil \leq \frac{x + y - 1}{y}, \qquad \lfloor \frac{x}{y} \rfloor \geq \frac{x - y + 1}{y},$$

$$x \bmod n = x - n\lfloor \frac{x}{n}.\rfloor$$

Διατάξεις και Συνδυασμοί

Έστω ότι έχουμε n διακριτά σφαιρίδια.

- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε $r (r \leq n)$ από αυτά; Ζητάμε τον αριθμό των **συνδυασμών** n ανά r ο οποίος δίνεται από τον τύπο

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Πόσες διαφορετικές σειρές μπορούν να δημιουργηθούν αν επιλέξουμε $r (r \leq n)$ από αυτά; Ζητάμε τον αριθμό των **διατάξεων** n ανά r ο οποίος δίνεται από τον τύπο

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Παράδειγμα

Έστω $A\{a, b, c, d\}$.
Ο αριθμός των διακριτών ζευγαριών είναι

$$C(4,2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6.$$

Ο αριθμός των διακριτών ζευγαριών αν αυτά διαταχθούν σε μία ευθεία είναι

$$P(4,2) = \frac{4!}{2!} = 12.$$

Μεθοδολογία

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει μία πρόταση $P(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η απόδειξη με τη χρήση (ασθενούς) επαγωγής μπορεί να γίνει ως εξής.

- *Βάση Επαγωγής:* Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για μία 'μικρή' τιμή, έστω a, της n (π.χ. $n = 0$ ή $n = 1$ ή $n = 2$, ...)
- *Επαγωγική υπόθεση:* Θεωρούμε ότι ισχύει για μία τιμή $n = k (k > a)$. Δηλαδή θεωρούμε ότι ισχύει η $P(k)$.
- *Επαγωγικό Βήμα:* Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει P για μία τιμή $n = k + 1$. Δηλαδή θα πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει $P(k + 1)$ χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση και τη Βάση της επαγωγής.

Παράδειγμα

Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Απόδειξη

- *Βάση Επαγωγής:* Η πρόταση ισχύει για $n = 1$, αφού

$$0 + 1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

- *Επαγωγική Υπόθεση:* Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = k (k > 1)$. Δηλαδή,

$$\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}. \tag{1}$$

Παράδειγμα

- *Επαγωγικό Βήμα:* Θα πρέπει να δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k + 1$. Όντως,

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \sum_{i=0}^{k} i + k + 1$$

Χρησιμοποιώντας την (1) έχουμε

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$