Ερωτήματα

Ερώτημα 1. (2 βαθμοί)
Να εξετάσετε αν για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι

1. $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$,
2. $f(n) + g(n) = \Theta(\min\{f(n), g(n)\})$.

Απάντηση

1. Ισχύει, αφού
$$\frac{f(n)+g(n)}{2} \le \max\{f(n), g(n)\} \le f(n) + g(n).$$
2. Δεν ισχύει. Για παράδειγμα θεωρούμε $f(n) = n, g(n) = n^2$. Η συνάρτηση $f(n) + g(n) = n + n^2$ είναι $\Omega(n)$ αλλά όχι $O(n)$.

Ερώτημα 2. (3 βαθμοί)
Να δώσετε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για τις συναρτήσεις

1. $T(n) = 49T(\frac{n}{25}) + n^{\frac{3}{2}} \lg n$
2. $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

Απάντηση

1. Θα χρησιμοποιήσουμε το κεντρικό θεώρημα. Για τη δοθείσα αναδρομική σχέση, έχουμε $a = 49 = 7^2, b = 25 = 5^2$ και επομένως
$$1 < \log_{25} 49 = \log_{5^2} 49 < \log_{5^2} 5^3 = \frac{\lg 5^3}{\lg 5^2} = \frac{3 \lg 5}{2 \lg 5} = \frac{3}{2}.$$
Επομένως ασυμπτωτικά ισχύει ότι $n^{\log_{25} 49} < n^{\frac{3}{2}}$ και άρα υπάρχει ϵ τέτοιο ώστε $n^{\frac{3}{2}} = \Omega(n^{\log_{25} 49+\epsilon})$. Ένα τέτοιο ϵ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση
$$\frac{3}{2} \ge \log_{25} 49 + \epsilon \Rightarrow \log_{25} 5^3 \ge \log_{25} 49 + \epsilon \Rightarrow \log_{25} \frac{125}{49} \ge \epsilon.$$
Παρατηρούμε ότι $\log_{25} \frac{125}{49} > \log_{25} \frac{125}{50} > 0$ αφού $\frac{125}{50} = 2,5 > 1$ (από τον ορισμό του λογαρίθμου ισχύει ότι $\log_{25} 1 = 0$) και επομένως $\epsilon > 0$. Επειδή ισχύει ασυμπτωτικά ότι $n^{\frac{3}{2}} \lg n > n^{\frac{3}{2}}$, καταλήγουμε ότι
$$n^{\frac{3}{2}} \lg n = \Omega(n^{\log_{25} 49+\epsilon}).$$
Στη συνέχεια θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $0 < c < 1$ τέτοιο ώστε
$$49\left(\frac{n}{25}\right)^{\frac{3}{2}} \lg \frac{n}{25} \le c \cdot n^{\frac{3}{2}} \lg n. \tag{1}$$
Έχουμε
$$49\left(\frac{n}{25}\right)^{\frac{3}{2}} \lg \frac{n}{25} = \frac{7^2}{5^{2\frac{3}{2}}} \cdot n^{\frac{3}{2}}(\lg n - \lg 5^2) < \frac{7^2}{5^{2\frac{3}{2}}} \cdot n^{\frac{3}{2}} \lg n. \tag{2}$$
Από (1), (2) αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $0 < c < 1$ για το οποίο να ισχύει ότι
$$\frac{7^2}{5^3} \lg n \le c \lg n.$$
Προφανώς ένα τέτοιο c υπάρχει: θεωρούμε, για παράδειγμα, $c = \frac{50}{125} = 0,4$.
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι είμαστε στην τρίτη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος και άρα $T(n) = \Theta(n^{\frac{3}{2}} \lg n)$.

2. Θέτοντας

$$m = \lg n \tag{3}$$

έχουμε

$$T(2^m) = T(2^{\frac{m}{2}}) + 1.$$

Ορίζουμε $S(m) = T(2^m)$ και επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται

$$S(m) = S(\frac{m}{2}) + 1.$$

Εφαρμόζοντας το κεντρικό θεώρημα (δεύτερη περίπτωση), έχουμε

$$S(m) = \Theta(\lg m) \Rightarrow T(n) = \Theta(\lg \lg n).$$

Ερώτημα 3. (5 βαθμοί)
Δίνεται πίνακας A ο οποίος στις θέσεις από 1 ως n περιέχει ακεραίους από το σύνολο $\{0, 1\}$. Θεωρούμε ότι ο πίνακας είναι ταξινομημένος σε αύξουσα σειρά.

1. Να περιγράψετε σε ψευδοκώδικα αλγόριθμο τύπου **Διαίρει και Βασίλευε** τάξης $\Theta(\lg n)$ ο οποίος να υπολογίζει τον πλήθος των στοιχείων του πίνακα που είναι ίσα με 1.
   Προσοχή: Πριν την περιγραφή του αλγόριθμου, να παραθέσετε αναλυτικά την ιδέα που ο αλγόριθμος σας υλοποιεί και αντίστοιχο παράδειγμα.

2. Να αποδείξετε την πολυπλοκότητα του αλγόριθμου.

Απάντηση

1. Επειδή ο πίνακας είναι ταξινομημένος ισχύει ότι

   (α) αν το στοιχείο στην τελευταία θέση είναι ίσο με μηδέν τότε ο πίνακας δεν περιέχει κανένα στοιχείο ίσο με 1, ενώ,

   (β) αν το στοχείο στην πρώτη θέση είναι 1 τότε όλα τα στοιχεία μέχρι την τελευταία θέση είναι ίσα με 1.

   Οπότε αναδρομικά διαιρούμε το διάστημα από 1 ως n στη μέση και ελέγχουμε τις παραπάνω συνθήκες για τα δύο "μισά" του πίνακα. Ο Αλγόριθμος 1 υλοποιεί την ιδέα. Η αρχική κλήση της συνάρτησης είναι

Αλγοριτημ 1 Πλήθος στοιχείων πίνακα A ίσων με 1

```
int count(int A[ ], int lb, int ub)
if A[ub] = 0 then
    return 0;
else if A[lb] = 1 then
    return ub − lb + 1;
else
    half ← ⌊(lo+hi)/2⌋;
    return count(A, lb, half)+count(A, half + 1, ub);
end if
```

$$\textbf{count}\ (A, 1, n)$$

2. (Περιληπτική απάντηση)
   Παρατηρούμε ότι για κάποιο από τα δύο "μισά" του πίνακα θα ισχύει το (α) ή το (β), παραπάνω. Οπότε τη συνάρτηση που δίνει τον αριθμό των ΣΥΒ ισχύει η σχέση

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + \Theta(1). \tag{4}$$

   Εφαρμόζοντας το κεντρικό θεώρημα έχουμε ότι $T(n) = \Theta(\lg n)$.