Ερωτήματα

Ερώτημα 1. (3 βαθμοί)

1. Με τη χρήση επαγωγής να δείξετε ότι $n = O(2^n)$.
2. Να αποδείξετε ότι
   (α′) $\log_{10} n = O(n)$,
   (β′) $\sum_{x=1}^{n} x^c = \Theta(n^{c+1})$, όπου $c \in \mathbb{N}$.

Λύση

1. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή για να δείξουμε ότι $n \leq 2^n$.
   Βάση Επαγωγής: $n = 1$. Ισχύει αφού $1 < 2$.
   Επαγωγικό Βήμα: Έστω ότι ισχύει το ζητούμενο για $n = k > 1$. Δηλαδή,
   $$k \leq 2^k. \tag{1}$$
   Θα δείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = k + 1$. Από (1) έχουμε
   $$k \leq 2^k \Rightarrow 2k \leq 2 \cdot 2^k \Rightarrow k + k \leq 2^{k+1} \Rightarrow k + 1 \leq 2^{k+1},$$
   αφού $k > 1$.

   (α′) Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $c, n_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\log_{10} n = c \cdot n$, για $n \geq n_0$. Στο προηγούμενο υποερώτημα δείξαμε ότι
   $$n \leq 2^n \Rightarrow \log_{10} n \leq \log_{10} 2 \cdot n.$$
   Επομένως, $c = \log_{10} 2, n_0 = 1$.

   (β′) Παρατηρούμε ότι
   $$\sum_{x=1}^{n} x^c \leq \sum_{x=1}^{n} n^c = n \cdot n^c = n^{c+1}. \tag{2}$$
   Επίσης,
   $$\sum_{x=1}^{n} x^c \geq \sum_{x=\frac{n}{2}+1}^{n} x^c > \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^c = \frac{1}{2^{c+1}} n^{c+1}. \tag{3}$$
   (2),(3) συνεπάγονται το ζητούμενο.

Ερώτημα 2. (4 βαθμοί)
Δίνεται η αναδρομική συνάρτηση

$$T(n) = \begin{cases} 7T(\frac{n}{2}) + n^2, & n > 1, \\ 1, & n \leq 1. \end{cases}$$

1. Με χρήση του δένδρου αναδρομής να δώσετε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για την $T(n)$.
2. Με χρήση του κεντρικού θεωρήματος να δώσετε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για την $T(n)$. Πως συγκρίνονται οι δύο εκτιμήσεις;
3. Θεωρήστε ότι για τον ορισμό της συνάρτησης $T(n)$ αντί του λόγου $\frac{n}{2}$ χρησιμοποιούμε το "πάτωμα" του (δηλαδή $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). Αλλάζει η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντηση σας.
   Υπόδειξη: Για την αιτιολόγηση της απάντησης σας να κάνετε χρήση επαγωγής.

Λύση

1. Το δένδρο αναδρομής οδηγεί στην εξίσωση

$$\begin{aligned} T(n) &= 7^{\lceil \lg n \rceil} + n^2 \sum_{j=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} \frac{7^j}{(2^j)^2} = 7^{\lceil \lg n \rceil} + n^2 \sum_{j=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} \left(\frac{7}{2^2}\right)^j \\ &= 7^{\lceil \lg n \rceil} + n^2 \frac{1 - \left(\frac{7}{4}\right)^{\lceil \lg n \rceil}}{1 - \frac{7}{4}} = 7^{\lceil \lg n \rceil} + n^2 \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{\lceil \lg n \rceil} - 1}{\frac{7}{4} - 1} \\ &= 7^{\lceil \lg n \rceil} + \frac{4}{3} \cdot n^2 \cdot \left(\left(\frac{7}{4}\right)^{\lceil \lg n \rceil} - 1\right) \end{aligned} \tag{4}$$

   Από (4) έχουμε

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 7^{\lceil \lg n \rceil} + \frac{4}{3} \cdot n^2 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{\lceil \lg n \rceil} \leq 7^{\lg n + 1} + \frac{4}{3} \cdot n^2 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{\lg n + 1} = 7 \cdot \left(7^{\lg n} + \frac{1}{3} \cdot n^2 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{\lg n}\right) \\ &= 7 \cdot \left(7^{\lg n} + \frac{1}{3} \cdot n^2 \cdot \frac{7^{\lg n}}{4^{\lg n}}\right) = 7 \cdot \left(7^{\lg n} + \frac{1}{3} \cdot n^2 \cdot \frac{7^{\lg n}}{2^{2 \cdot \lg n}}\right) = 7 \cdot \left(7^{\lg n} + \frac{1}{3} \cdot n^2 \cdot \frac{7^{\lg n}}{2^{\lg n^2}}\right) \\ &= 7 \cdot \left(7^{\lg n} + \frac{1}{3} \cdot 7^{\lg n}\right) = 7 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot 7^{\lg n} = \frac{28}{3} \cdot n^{\lg 7}. \end{aligned} \tag{5}$$

   Από (4) έχουμε

$$T(n) \geq 7^{\lceil \lg n \rceil} \geq 7^{\lg n} = n^{\lg 7.} \tag{6}$$

   (5),(6) συνεπάγονται ότι

$$T(n) = \Theta(n^{\lg 7}). \tag{7}$$

2. το κεντρικό θεώρημα οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα (η δοθείσα συνάρτηση εμπίπτει στην πρώτη περίπτωση).

3. Θα δείξουμε ότι ισχύει το παραπάνω αποτέλεσμα και σε αυτή την περίπτωση. Ισοδύναμα θα δείξουμε ότι υπάρχουν $a, b, c, d > 0$ τέτοια ώστε

$$T(n) \leq a n^{\lg 7} - b n^2 - cn - d. \tag{8}$$

   Έστω ότι αυτό ισχύει για $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, δηλαδή

$$\begin{aligned} &T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \leq a \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^{\lg 7} - b \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2 - c \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - d \Rightarrow \\ &T(n) \leq 7\left(a \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^{\lg 7} - b \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2 - c \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - d\right) + n^2 = 7\left(a\left(\frac{n}{2}\right)^{\lg 7} - b\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - c\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) - d\right) + n^2 \Rightarrow \\ &T(n) \leq a n^{\lg 7} - n^2\left(\frac{7b}{4} - 1\right) - n\left(\frac{7(c-b)}{2}\right) - 7\left(\frac{b}{4} - \frac{c}{2} + d\right) \end{aligned} \tag{9}$$

   Για να είναι το δεξί μέρος της (8) μεγαλύτερο του δεξιού μέρους (9) θα πρέπει να ισχύουν οι ανισότητες

$$\frac{7b}{4} - 1 \geq b \Rightarrow b \geq \frac{4}{3}, \tag{10}$$

$$\frac{7(c-b)}{2} \geq c \Rightarrow c \geq \frac{7}{5} b, \tag{11}$$

$$7\left(\frac{b}{4} - \frac{c}{2} + d\right) \geq d \Rightarrow d \geq \frac{14c - 7b}{24}. \tag{12}$$

   Παρατηρήστε ότι

   - (10), (11) συνεπάγονται $c \geq \frac{28}{15}$, και
   - (10), (11),(12) συνεπάγονται $d \geq \frac{7}{10}$.

   Άρα η (9) όταν ισχύουν οι (10),(11),(12) συνεπάγεται την (8). Επομένως $T(n) = O(n^{\lg 7})$.

Ένα εύκολα αποδείξιμο κάτω φράγμα για την $T(n)$ είναι το $\Omega(n^2)$. Όμως ένα αυστηρότερο κάτω φράγμα μπορεί να προκύψει ώς εξής.

$$\begin{aligned}
T(n) =& 7T(\lfloor\frac{n}{2})\rfloor) + n^2 \geq 7T(\frac{n}{2} - 1) + n^2 \geq 7T(\frac{n}{2} - 1) \\
&\geq 7\left(7T(\frac{\frac{n-2}{2}}{2} - 1)\right) = 7^2T(\frac{n - 2 - 2^2}{2^2}) \\
&\geq \cdots \\
&\geq 7^kT\left(\frac{n - \sum_{j=1}^{k} 2^k}{2^k}\right) = 7^kT\left(\frac{n - (2^{k+1} - 2)}{2^k}\right).
\end{aligned}$$

Για $k = \lceil\lg \frac{n+2}{3}\rceil$ το όρισμα της T στην παραπάνω σχέση γίνεται μικρότερο-ίσο του ένα και επομένως τότε η τιμή της T γίνεται ίση με 1. Αντικαθιστώντας την τιμή του k στην προηγούμενη σχέση

$$\begin{aligned}
T(n) \geq& 7^{\lceil\lg \frac{n+2}{3}\rceil} \cdot 1 \geq 7^{\lg \frac{n+2}{3}} \\
&= \left(\frac{n+2}{3}\right)^{\lg 7} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 7}(n+2)^{\lg 7} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 7} n^{\lg 7} \geq p \cdot n^{\lg 7},
\end{aligned}$$

όπου $0 < p \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 7}$. Άρα $T(n) = \Omega(n^{\lg 7})$. Τελικά και σε αυτή την περίπτωση $T(n) = \Theta(n^{\lg 7})$.

Ερώτημα 3. (3 βαθμοί)

Έστω μονοδιάστατος πίνακας (array) A ο οποίος περιέχει ακεραίους στις θέσεις από 1 ως n.

1. Να περιγράψετε τη μέθοδο της ταχυταξινόμησης και να δώσετε μια υλοποίηση σε ψευδοκώσικα που να ταξινομεί σε ΦΘΙΝΟΥΣΑ σειρά τους ακεραίους του πίνακα A.

2. Να χρησιμοποιήσετε την υλοποίηση σας για να ταξινόμησετε τους αριθμούς

   $$12 \quad 7 \quad 3 \quad 15 \quad 20 \quad 17 \quad 11$$

3. Να αποδείξετε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της μεθόδου.

Λύση Δες διαφάνειες και λυμένες ασκήσεις του μαθήματος.