Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής & Υπολογιστών

Μάθημα: Σχεδίαση & Ανάλυση Αλγορίθμων Σεπτέμβριος 2022

Ερωτήματα

Ερώτημα 1 (4)**.**
Έστω n, k θετικοί ακέραιοι. Χωρίς τη χρήση ορίων νσ δείξετε ότι

1. $\frac{1}{2}n^2 - 2n + 1 = \Theta(n^2)$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta(n^{k+1})$

Ερώτημα 2 (6)**.** Έστω πίνακας A ο οποίος περιέχει ακεραίους στις θέσεις από 1 ως $n \geq 3$ με τις ακόλουθες ιδιότητες

- $|A[i] - A[i+1]| \leq 1, i = 1, \ldots, n-1,$
- $A[1] < A[n]$

1. Να εκπονήσετε αλγόριθμο πολυπλοκότητας $\Theta(\lg n)$ ο οποίος θα εντοπίζει τη θέση $k \neq 1, n$ με την ιδιότητα $A[1] \leq A[k] \leq A[n]$
2. Να εκτελέσετε τον αλγόριθμο που εκπονήσατε στη σειρά

$$2\ 2\ 1\ 0\ -1\ -1\ -1\ 0\ 1\ 1\ 2\ 3$$

   περιγράφοντας σε κάθε αναδρομική κλίση τις τιμές των μεταβλητών και των παραμέτρων του αλγόριθμου σας. Επίσης να υποδείξετε ποιο στοιχείο από τη σειρά θα επιστρέψει ο αλγόριθμος σας.
3. Να γράψετε την αναδρομική σχέση που περιγράφει τον αριθμό των ΣΥΒ και να αποδείξετε την ασυμπτωτική της συμπεριφορά, θεωρώντας ότι η τιμή της παραμέτρου n είναι δύναμη του 2.

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Ερώτημα 1.

Απάντηση.

1. Για το άνω φράγμα έχουμε

$$\frac{1}{2}n^2 - 2n + 1 \leq \frac{1}{2}n^2 + 1 \leq \frac{1}{2}n^2 + n^2 = \frac{3}{2}n^2. \tag{1}$$

   Για το κάτω φράγμα θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν b, n_0 τέτοια ώστε

$$\frac{1}{2}n^2 - 2n + 1 > bn^2, \forall n \geq n_0. \tag{2}$$

   Έχουμε

$$\frac{1}{2}n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 - \frac{n^2}{2} \geq bn^2 \Rightarrow \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - \frac{1}{2} \geq b. \tag{3}$$

   Επειδή $b > 0$ από την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow n > \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}} \Rightarrow n \geq 4,$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το ότι n ακέραιος. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση του αριστερού μέλους της (3) είναι αύξουσα. Πράγματι

$$\begin{aligned} n_1 > n_2 &\Rightarrow \frac{1}{n_1} < \frac{1}{n_2} \Rightarrow -\frac{1}{n_1} > -\frac{1}{n_2} \\ &\Rightarrow 1 - \frac{1}{n_1} > 1 - \frac{1}{n_2} \Rightarrow \frac{n_1 - 1}{n_1} > \frac{n_2 - 1}{n_2} \Rightarrow \left(\frac{n_1 - 1}{n_1}\right)^2 > \left(\frac{n_2 - 1}{n_2}\right)^2 \\ &\Rightarrow \left(\frac{n_1 - 1}{n_1}\right)^2 - \frac{1}{2} > \left(\frac{n_2 - 1}{n_2}\right)^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση αυτή όταν $n \in N$ ελαχιστοποιείται για $n = n_0 = 4$.Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην (3), έχουμε

$$\left(\frac{4-1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} \geq b \Rightarrow \frac{1}{16} \geq b.$$

Επομένως για η (2) ισχύει για κάθε $n \geq n_0 = 4$ και $b \leq \frac{1}{16}$. Αυτό σε συνδυασμό με την (1) αποδεικνύει το ζητούμενο.

2. Για το πάνω φράγμα παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k + n^k \leq n^k + n^k + \cdots + n^k + n^k = n^{k+1}. \tag{4}$$

Για το κάτω φράγμα

- αν $n \pmod 2 = 0$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} i^k \geq \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^k = \frac{1}{2^{k+1}} n^{k+1}. \tag{5}$$

- αν $n \pmod 2 = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i^k \geq \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n} i^k &= (\frac{n+1}{2})^k + (\frac{n+1}{2} + 1)^k + \cdots (\frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2})^k \\ &\geq (\frac{n-1}{2} + 1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^k \geq \frac{1}{2^{k+1}}(n+1)^{k+1} \geq \frac{1}{2^{k+1}} n^{k+1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Οι (4), (5), (6) αποδεικνύουν το ζητούμενο. ■

Ερώτημα 2.

Απάντηση.

1. Έστω μια τυχαία θέση k στον πίνακα ($1 \leq k \leq n$). Αν $1 \leq A[k] \leq A[n]$ τότε το στοιχείο $A[k]$ είναι το ζητούμενο στοιχείο. Αν $A[k] < A[1]$ τότε σε κάποια από τις θέσεις $k+1, \ldots, n$ θα πρέπει να υπάρχει κάποιο στοιχείο μικρότερο-ίσο του $A[n]$ και μεγαλύτερο-ίσο του $A[1]$. Αν $A[k] > A[n]$ τότε σε κάποια από τις θέσεις $1, \ldots, k-1$ θα πρέπει να υπάρχει το ζητούμενο στοιχείο. Ο Αλγόριθμος 1 εκμεταλλεύεται την παραπάνω ιδιότητα στα πλαίσια της δυαδικής αναζήτησης.

2. Η εκτέλεση παραλείπεται - ο αλγόριθμος θα επιστρέψει τη θέση 11 της σειράς.

3. Ο αριθμός των ΣΥΒ περιγράφεται από την αναδρομική σχέση

$$T(n) = \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + \Theta(1), & n \geq 3, \\ \Theta(1), & n \leq 2. \end{cases}$$

Επομένως $T(n) = \Theta(n)$ (δεύτερη περίπτωση κεντρικού θεωρήματος).

■

Αλγόριθμος 1 Εύρεση στοιχείου a σε πίνακα A.

Απαιτείται: Ακέραιοι lo, hi, με $lo \leq hi$, πίνακας ακεραίων A με στοιχεία από τη θέση lo μέχρι τη θέση hi που ικανοποιούν τις δοθείσες ιδιότητες

Επιστρέφεται: Επιστροφή θέσης k που υπάρχει στον πίνακα τέτοιο ώστε $A[1] \leq A[k] \leq A[n]$.

function Find_k(`int` $A[\,]$, `int` lo, `int` hi)
    if $lo \leq hi$ **then**
        $k \leftarrow \lfloor \frac{lo+hi}{2} \rfloor$;
        if $A[1] \leq A[k]$ **and** $A[k] \leq A[n]$ **then**
            return k;
        end if
        if $A[k] < A[1]$ **then**
            return Find_k$(A, k+1, hi)$;
        else
            return Find_k$(A, lo, k-1)$;
        end if
    end if
end function