Αναδρομικές Σχέσεις
Ασκήσεις

Δημήτριος Μάγος

14 Νοεμβρίου 2017

Άσκηση 1 *Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των διαδοχικών αντικαταστάσεων να δώσετε ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τις εκφράσεις*

1. $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$
2. $T(n) = 3T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + \Theta(n)$

Και στις δύο περιπτώσεις θεωρείστε ότι $T(m) = 1$, *για κάθε* $m \leq 1$.

Λύση

1. $\Theta(n) = cn$ για κάποιο $c > 0$. Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T(\frac{n}{2}) + cn = 3\left(3T(\frac{\frac{n}{2}}{2}) + c\frac{3n}{2}\right) + cn \\
&= 3^2T(\frac{n}{2^2}) + cn\left(1 + \frac{3}{2}\right) \\
&= 3^2\left(3T(\frac{\frac{n}{2^2}}{2}) + c\frac{n}{2^2}\right) + cn\left(1 + \frac{3}{2}\right) \\
&= 3^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + cn\left(1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) \\
&= \ldots \\
&= 3^kT(\frac{n}{2^k}) + cn\left(\left(\frac{3}{2}\right)^0 + \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\right) \\
&= 3^kT(\frac{n}{2^k}) + cn\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^j.
\end{aligned}$$

Προφανώς για $k = \lg n$ το όρισμα της $T()$ γίνεται 1. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3^{\lg n} + cn \sum_{j=0}^{\lg n - 1} \left(\frac{3}{2}\right)^j = n^{\lg 3} + cn\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n}}{1-\frac{3}{2}} = n^{\lg 3} + cn\frac{1-n^{\lg\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{2}} \\
&= n^{\lg 3} - 2cn(1-n^{\lg\frac{3}{2}}) = n^{\lg 3} - 2cn(1-n^{\lg 3 - 1}) = n^{\lg 3} - 2cn(1-\frac{n^{\lg 3}}{n}) \\
&= n^{\lg 3} - 2c(n - n^{\lg 3}) \\
&= n^{\lg 3}(1+2c) - 2cn \leq d \cdot n^{\lg 3} \qquad \text{για } d = (1+2c) \\
&\Rightarrow \\
T(n) &= O(n^{\lg 3}).
\end{aligned}$$

2. Για κάθε $a \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι $\lfloor a \rfloor \leq a$. Επομένως $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor \leq \frac{n}{4}$. Συνεπώς,

$$T(n) \leq 3T(\frac{n}{4}) + \Theta(n)$$

Ισοδύναμα, για κάποιο $c > 0$ η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq 3T(\lfloor\frac{n}{4}\rfloor) + cn \\
&= 3\left(3T(\frac{\frac{n}{4}}{4}) + c\frac{n}{4}\right) + n \\
&= 3^2T(\frac{n}{4^2}) + cn(1+\frac{3}{4}) \\
&= \ldots \\
&= 3^kT(\frac{n}{4^k}) + \sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{3}{4}\right)^i \qquad (1)
\end{aligned}$$

Επειδή γνωρίζουμε ότι $T(m) = 1$, μας ενδιαφέρει να γνωρίσουμε για ποια τιμή του k η ποσότητα $m = \lfloor\frac{n}{4^k}\rfloor$ είναι μικρότερη-ίση με 1. Επειδή

$$\frac{n}{4^k} - 1 \leq \lfloor\frac{n}{4^k}\rfloor,$$

έχουμε ότι

$$\lfloor\frac{n}{4^k}\rfloor \leq 1 \Rightarrow \frac{n}{4^k} - 1 \leq 1 \Rightarrow \frac{n}{4^k} \leq 2 \Rightarrow k \geq \frac{\lg n - 1}{2}$$

Επομένως για $k = \frac{\lg n}{2}$ έχουμε[1] ότι $\frac{n}{4^k} \leq 1$. Αντικαθιστώντας, με αυτή την τιμή του k στην (1) έχουμε

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq 3^{\frac{\lg n}{2}} + cn \sum_{i=0}^{\frac{\lg n}{2}-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \\
&\leq 3^{\lg n^{\frac{1}{2}}} + cn \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i \\
&\leq 4^{\lg n^{\frac{1}{2}}} + cn \frac{1}{1-\frac{3}{4}} \\
&= \left(n^{\frac{1}{2}}\right)^{\lg 4} + cn \frac{1}{\frac{1}{4}} \\
&= n + 4cn \Rightarrow \\
T(n) &= O(n)
\end{aligned}$$

Επειδή δε

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + \Theta(n) \\
&\geq cn \Rightarrow T(n) = \Omega(n).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $T(n) = \Theta(n)$.

Άσκηση 2 *Χρησιμοποιώντας το δένδρο αναδρομής να προσδιορίσετε ένα ασυμπτωτικό φράγμα για τις σχέσεις*

1. $T(n) = 4T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \Theta(n)$
2. $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^2$, *με n δύναμη του 2.*

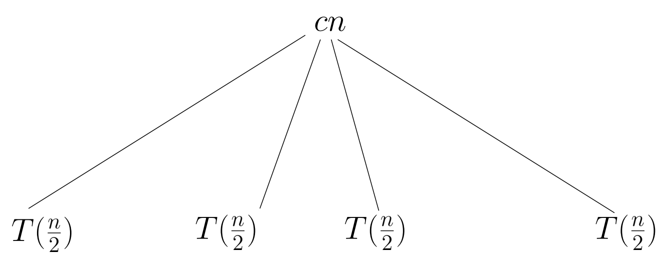
Και στις δύο περιπτώσεις θεωρείστε ότι $T(1) = 1$.

Λύση

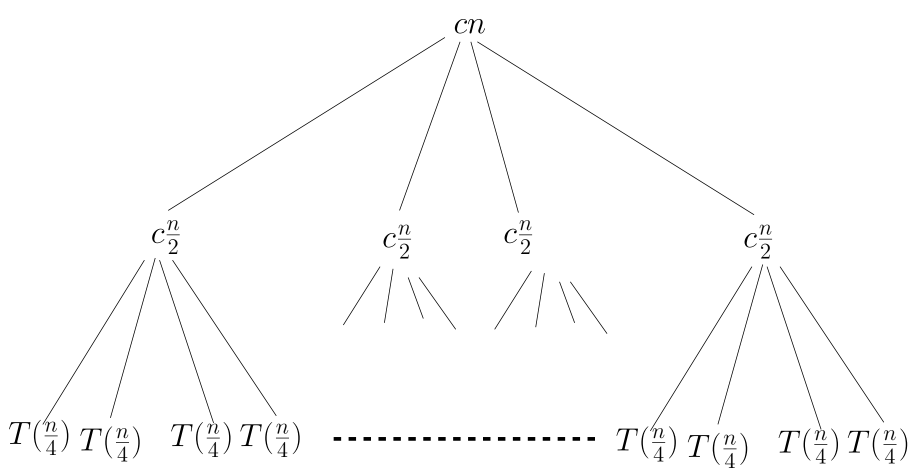
1. Όπως και στην Άσκηση 1 ένα άνω φράγμα για την $T(n)$ είναι

$$T(n) \leq 4T(\frac{n}{2}) + cn.$$

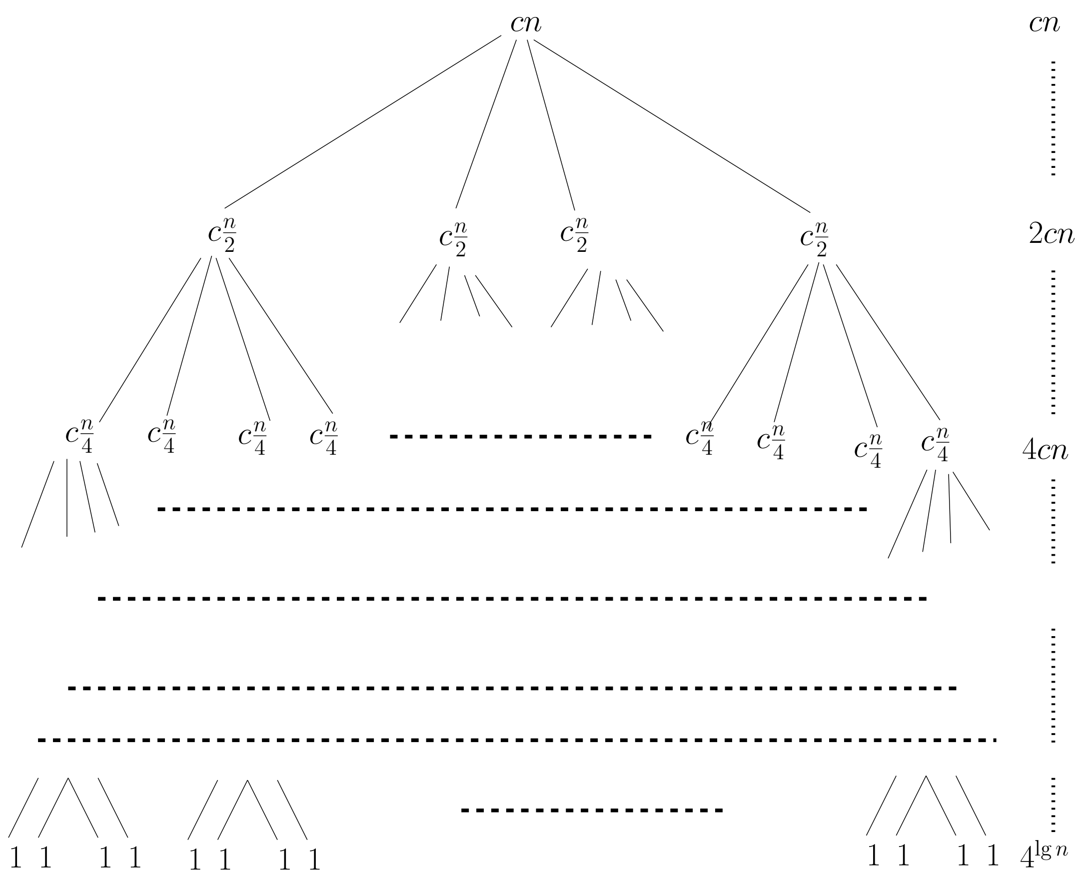
Κατασκευάζουμε το δένδρο αναδρομής για την παραπάνω σχέση (Σχήμα 1,..., 3) Το δένδρο έχει ύψος $\lg n$ και επομένως ο αριθμός των φύλων



Σχήμα 1: Δένδρο αναδρομής, άσκηση 2.1



Σχήμα 2: Δένδρο αναδρομής, άσκηση 2.1



Σχήμα 3: Δένδρο αναδρομής, άσκηση 2.1

είναι $4^{\lg n}$. Στο Σχήμα 3 απεικονίζεται η συνεισφορά του κάθε επιπέδου στη συνάρτηση. Αθροίζοντας,

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 4T(\frac{n}{2}) + cn = 4^{\lg n} + cn \sum_{j=0}^{\lg n - 1} 2^j \\ &= n^{\lg 4} + cn \cdot (2^{\lg n} - 1) = n^2 + cn(n-1) \Rightarrow \\ T(n) &\leq (c+1)n^2 - cn. \end{aligned} \tag{2}$$

Η (2) μας οδηγεί την εξής εικασία: υπάρχουν σταθερές $d, b > 0$ για τις οποίες ισχύει ότι

$$T(n) \leq dn^2 - bn.\ ^2 \tag{3}$$

Προχωράμε με επαγωγή: έστω ότι ισχύει η (3) για $T(n/2)$. Δηλαδή, έστω ότι ισχύει

$$T(n/2) = d\left(\frac{n}{2}\right)^2 - b\frac{n}{2}.$$

Αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση, έχουμε

$$\begin{aligned} T(n) &= 4(d\frac{n^2}{2^2} - b\frac{n}{2}) + cn \\ &= dn^2 - bn + cn - bn = dn^2 - bn - (b-c)n \Rightarrow \\ T(n) &\leq dn^2 - bn, \end{aligned}$$

εφ'όσων $b > c$.

Επομένως, δείξαμε ότι

$$T(n) = O(n^2).$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε αν το n^2 αποτελεί και ασυμπτωτικό κάτω όριο για την $T(n)$. Επειδή $\lfloor n/2 \rfloor > n/2 - 1$, η αναδρομική σχέση συνεπάγεται ότι

$$T(n) \geq 4T(\frac{n}{2} - 1) + cn = 4T(\frac{n-2}{2}) + cn. \tag{4}$$

[1] αφού $\frac{\lg n}{2} > \frac{\lg n - 1}{2}$

[2] Προφανώς, αν ισχύει κάτι τέτοιο $T(n) = O(n^2)$

Σαν βάση της επαγωγής, θεωρούμε ότι $T(\frac{n-2}{2}) = \Omega(n^2)$ και άρα υπάρχει κάποιο $d > 0$ για το οποίο $T(\frac{n-2}{2}) \geq d\frac{(n-2)^2}{2^2}$.

Αντικαθιστώντας στην (4),

$$\begin{aligned} T(n) &\geq 4d\frac{(n-2)^2}{4} + cn = d(n-2)^2 + cn \\ &= dn^2 + (-4d + c)n + 4d \geq dn^2, \end{aligned}$$

εφ΄ όσων

$$-4d + c \geq 0 \Rightarrow \frac{c}{4} \geq d.$$

Επομένως, $T(n) \geq d \cdot n^2$, για κάποιο $d \leq \frac{c}{4}$, και άρα

$$T(n) = \Omega(n^2).$$

Συνολικά,

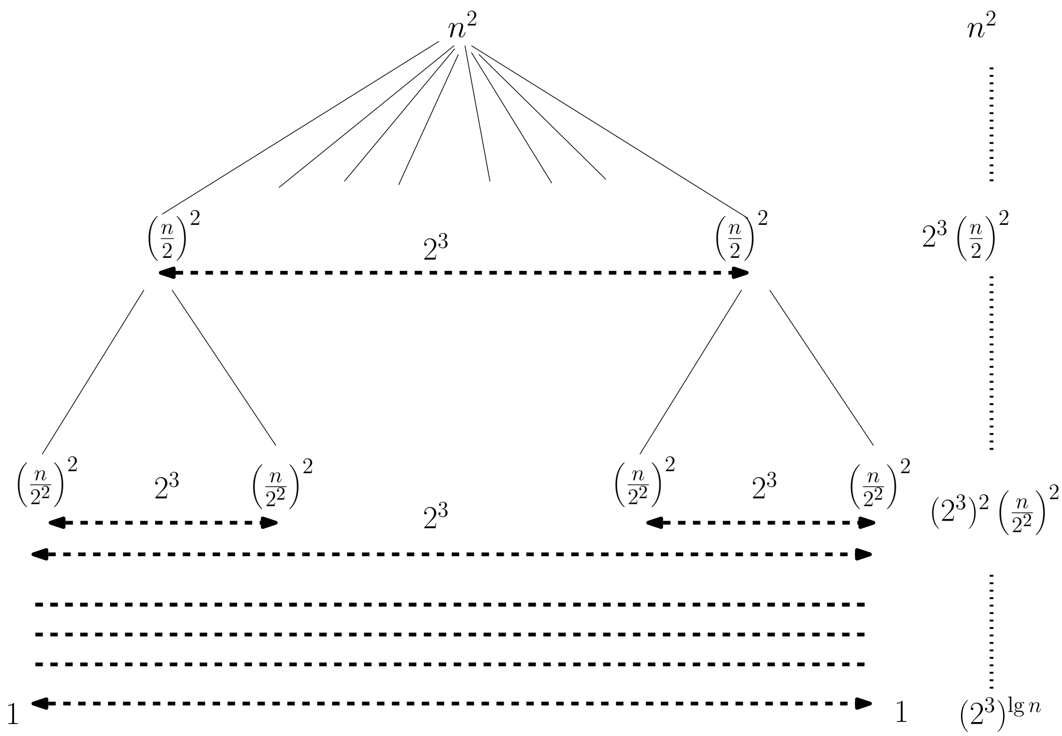
$$T(n) = \Theta(n^2).$$

2. Το δένδρο αναδρομής έχει βάθος $\lg n$ και απεικονίζεται στο Σχήμα 4. Παρατηρούμε ότι το η συνεισφορά του επιπέδου j στη συνάρτηση δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} (2^3)^j\left(\frac{n}{2^j}\right)^2, &\qquad 0 \leq j \leq \lg n - 1, \\ (2^3)^j, &\qquad j = \lg n. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} T(n) &= (2^3)^{\lg n} + n^2 \sum_{j=0}^{\lg n-1} \frac{(2^3)^j}{(2^j)^2} \\ &= n^{\lg 2^3} + n^2 \sum_{j=0}^{\lg n-1} \frac{(2^3)^j}{(2^2)^j} \\ &= n^3 + n^2 \sum_{j=0}^{\lg n-1} 2^j \\ &= n^3 + n^2(2^{\lg n-1} - 1) \\ &= n^3 + n^2(\frac{n}{2} - 1) \\ &= \frac{3}{2}n^3 - n^2. \end{aligned}$$



Σχήμα 4: Δένδρο αναδρομής, άσκηση 2.1

Εικάζουμε ότι $T(n) \leq dn^3 - n^2, d > 0$. Έστω ότι ισχύει για $T(\frac{n}{2})$. Έχουμε,

$$T(n) \leq 8(d(n/2)^3 - (n/2)^2) + n^2 = dn^3 - n^2 \Rightarrow$$
$$T(n) = O(n^3).$$

Άσκηση 3 *Με τη χρήση του κεντρικού θεωρήματος να δώσετε ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τις συναρτήσεις*

1. $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$
2. $T(n) = T(\frac{2n}{3}) + 1$
3. $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n \lg n$

Λύση

1. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $a = 9, b = 3, f(n) = n$. Επειδή $n^{\lg_3 9} = n^{\lg_3 3^2} = n^2$, $f(n) = n = O(n^{2-\epsilon})$, για $1 \geq \epsilon \geq 0$, είμαστε στην πρώτη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος και άρα
$$T(n) = \Theta(n^{\lg_3 3^2}) = \Theta(n^2).$$

2. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $a = 1, b = 3/2, f(n) = 1 = \Theta(1)$. Επειδή $\lg_{\frac{3}{2}} 1 = 0$, $f(n) = 1 = \Theta(n^{\lg_{\frac{3}{2}} 1}) = \Theta(n^0) = \Theta(1)$. Είμαστε στη δεύτερη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος και επομένως
$$T(n) = \Theta(n^{\lg_{\frac{3}{2}} 1} \lg n) = \Theta(\lg n).$$

3. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $a = 3, b = 4, f(n) = n \lg n$. Υπάρχουν $d, \epsilon > 0$, τέτοια ώστε
$$n \lg n \geq d \cdot n^{\lg_4 3 + \epsilon}.$$
Για παράδειγμα, αν θεωρήσετε $d = 1, \epsilon = 1 - \lg_4 3 = \lg_4 4 - \lg_4 3 = -\lg_4 \frac{4}{3}$ η παραπάνω ανισότητα γίνεται [$n \lg n \geq n$, η οποία είναι αληθής για $n \geq 2$. Στη συνέχεια εξετάζουμε αν υπάρχει $c < 1$ για το οποίο να ισχύει ότι
$$3\frac{n}{4} \lg \frac{n}{4} \leq cn \lg n.$$
Μια προφανής τιμή για την οποία ισχύει είναι $c = 3/4$. Επομένως, είμαστε στην τρίτη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος και άρα
$$T(n) = \Theta(n \lg n).$$

Άσκηση 4 *Μπορείτε με τη χρήση του κεντρικού θεωρήματος να δώσετε μια ασυμπτωτική εκτίμηση για τη σχέση*

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\lg n;$$

Αν ναι να την διατυπώσετε. Αν όχι να χρησιμοποιείστε άλλη μέθοδο.

Λύση Έχουμε $a = 2, b = 2, f(n) = n\lg n$, και άρα $n^{\lg_a b} = n^{\lg 2} = n$ Προφανώς δεν είμαστε στην πρώτη και δεύτερη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος αφού για κανένα $\epsilon > 0$ ισχύει ότι $n\lg n = O(n^{-\epsilon}$ και $n\lg n \neq \Theta(n)$. Όσο για την τρίτη περίπτωση, θα πρέπει να υπάρχει $d > 0$ τέτοιο ώστε

$$n\lg n \geq dn^{1+\epsilon} \Rightarrow \lg n \geq dn^{\epsilon}.$$

Όμως η ανισότητα αυτή δεν ισχύει ασυμτωτικά αφού οι πολυωνυμικές συναρτήσεις κυριαρχούν στις λογαριθμικές. Άρα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κεντρικό θεώρημα και για να απαντήσουμε στο ζητούμενο θα καταφύγουμε στη μέθοδο της διαδοχικής αντικατάστασης. Έχουμε

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n\lg n = 2(2T\left(\frac{\frac{n}{2}}{2}\right) + \frac{n}{2}\lg\frac{n}{2}) + n\lg n \\
&= 2^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + n(\lg n + \lg\frac{n}{2}) \\
&= \dots \\
&= 2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + n\sum_{j=0}^{k-1}\lg\left(\frac{n}{2^j}\right) \\
&= 2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + n\sum_{j=0}^{k-1}(\lg n - \lg 2^j) \\
&= 2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + n\cdot k\lg n - n\sum_{j=0}^{k-1}j \\
&= 2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + n\cdot k\lg n - n\frac{k(k-1)}{2}
\end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι $T(1) = 1$ και άρα $k = \lg n$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση, έχουμε

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2^{\lg n} + +n\lg^2 n - \frac{n}{2}\lg^2 n + \frac{n}{2}\lg n \\
&= n + \frac{n}{2}\lg^2 n + \frac{n}{2}\lg n \\
&\Rightarrow \\
T(n) &= \Theta(n\lg^2 n).
\end{aligned}$$

Άσκηση 5 *Να δώσετε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για τη συνάρτηση*

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{5}\right) + n.$$

Λύση Παρατηρούμε ότι

$$2T\left(\frac{n}{5}\right) + n \le T(n) \le 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n. \tag{5}$$

Ισοδύναμα,

$$T'(n) \le T(n) \le T''(n), \text{ όπου,}$$
$$T'(n) = 2T'\left(\frac{n}{5}\right) + n, T''(n) = 2T''\left(\frac{n}{3}\right) + n.$$

Ήδη έχουμε δείξει [3] ότι

$$T''(n) = \Theta(n). \tag{6}$$

Για την περίπτωση της $T''(n)$ έχουμε $a = 2, b = 5, f(n) = n$. Επειδή $n > n^{\lg_5 2+\epsilon}$ για $\epsilon > 0$ και αρκετά μικρό ($\epsilon \le \lg_5 \frac{5}{2}$), έχουμε ότι $n = \Omega(n^{\lg_5 2+\epsilon})$. Επιπλέον

$$2f(n/5) = 2n/5 \le cn,$$

για $1 > c \ge 2/5$. Επομένως σύμφωνα με την τρίτη περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος έχουμε

$$T''(n) = \Theta(n). \tag{7}$$

Η (5) σε συνδυασμό με (6), (7) συνεπάγεται

$$T(n) = \Theta(n).$$

[3] Δες διαφάνειες περί αναδρομικών σχέσεων - παράδειγμα 3γ

Άσκηση 6 *Να δώσετε μία ασυμπτωτική εκτίμηση για τη συνάρτηση*

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \lg n.$$

Λύση Θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική της *αλλαγής μεταβλητών*. Συγκεκριμένα θέτοντας

$$m = \lg n \tag{8}$$

στην παραπάνω έκφραση παίρνουμε

$$T(2^m) = 2T(2^{\frac{m}{2}}) + m.$$

Αν θέσουμε στην παραπάνω $S(m) = T(2^m)$ έχουμε

$$S(m) = 2S(\frac{m}{2}) + m.$$

η οποία έχει λύση $S(m) = \Theta(m \lg m)$ (κεντρικό θεώρημα, δεύτερη περίπτωση). Αντικαθιστώντας από (8), έχουμε

$$T(n) = T(2^m) = S(m) = \Theta(m \lg m) = \Theta(\lg n \lg \lg n)$$

Άσκηση 7 *Για την επίλυση ενός υπολογιστικού προβλήματος έχουμε να επιλέξουμε μεταξύ τεσσάρων διαφορετικών αλγορίθμων τύπου ‘διαίρει και βασίλευε’. Έτσι για το αρχικό πρόβλημα μεγέθους n*

- *ο αλγόριθμος Α διασπά το αρχικό πρόβλημα σε 8 υποπροβλήματα μεγέθους $n/3$ τα επιλύει και στη συνέχεια συνθέτει τις λύσεις τους σε χρόνο $n/2$,*
- *ο αλγόριθμος Β διασπά το αρχικό πρόβλημα σε 3 υποπροβλήματα μεγέθους $n/7$ τα επιλύει και στη συνέχεια συνθέτει τις λύσεις τους σε χρόνο n^2,*
- *ο αλγόριθμος Γ διασπά το αρχικό πρόβλημα σε 8 υποπροβλήματα μεγέθους $n/32$ τα επιλύει και στη συνέχεια συνθέτει τις λύσεις τους σε χρόνο $n^{\frac{3}{5}}$,*
- *ο αλγόριθμος Δ διασπά το αρχικό πρόβλημα σε 1 υποπροβλήματα μεγέθους $n/3$ και σε ένα υποπρόβλημα μεγέθους $n/4$ τα επιλύει και στη συνέχεια συνθέτει τις λύσεις τους σε χρόνο n.*

Ποιόν αλγόριθμο θα προτείνατε για τη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος και γιατί·

Λύση Για τις τρεις πρώτες περιπτώσεις θα χρησιμοποιήσουμε το κεντρικό θεώρημα το οποίο υποθέτει τη γενική μορφή

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$$

Αλγ. Α:

$$T(n) = 8T(\frac{n}{3}) + \frac{n}{2}.$$

Άρα, $a = 8, b = 3, f(n) = \frac{n}{2}$. Επειδή, $\lg_b a = \lg_3 8 > 1$, έχουμε $f(n) = \frac{1}{2}n^1 = O(n\lg_3 8 - \epsilon)$, π.χ. για $\epsilon = 0,1$. Συνεπώς, σύμφωνα με την 1η περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος η λύση της αναδρομικής εξίσωσης είναι $T(n) = \Theta(n^{\lg_3 8})$.

Αλγ. Β:

$$T(n) = 3T(\frac{n}{7}) + n^2.$$

Άρα, $a = 3, b = 7, f(n) = n^2$. Επειδή, $\lg_b a = \lg_7 3 < 1$, έχουμε $f(n) = n^2 = \Omega(n\lg_7 3 + \epsilon)$, π.χ. για $\epsilon = 0,1$. Επίσης $af(\frac{n}{b}) = 3\left(\frac{n}{7}\right)^2 = \frac{3}{49}n^2 < cf(n)$, για κάθε $1 > c > \frac{3}{49}$. Συνεπώς, σύμφωνα με την 3η περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος η λύση της αναδρομικής εξίσωσης είναι $T(n) = \Theta(n^2)$.

Αλγ. Γ:

$$T(n) = 8T(\frac{n}{32}) + n^{\frac{3}{5}}.$$

Άρα, $a = 8, b = 32, f(n) = n^{\frac{3}{5}}$. Επειδή, $\lg_b a = \lg_{32} 8 = \frac{\lg 8}{\lg 32} = \frac{3}{5}$, έχουμε $f(n) = \Theta(n^{\frac{3}{5}})$. Συνεπώς, σύμφωνα με την 2η περίπτωση του κεντρικού θεωρήματος η λύση της αναδρομικής εξίσωσης είναι $T(n) = \Theta(n^{\frac{3}{5}} \lg n)$.

Για τον αλγόριθμο Δ η αναδρομική σχέση είναι

$$T(n) = T(\frac{n}{3}) + T(\frac{n}{4}) + n$$

Το δένδρο της αναδρομής σχέση απεικονίζεται στο Σχήμα 5. Το μακρύτερο μονοπάτι από τη ρίζα του δένδρου έχει $\lg_3 n$ ακμές ενώ το συντομότερο έχει $\lg_4 n$ ακμές. Επομένως,

$$T(n) \le \sum_{j=0}^{\lg_3 n} \left(\frac{7}{12}\right)^j n \le \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{7}{12}\right)^j n = n\frac{1}{1-\frac{7}{`12}}$$

Από τα παραπάνω εικάζουμε ότι $T(n) = O(n)$. Θα το αποδείξουμε με τη μέθοδο της επαγωγής. Έστω ότι $T(\frac{n}{3}) \le c\frac{n}{3}, T(\frac{n}{4}) \le c\frac{n}{4}$. Θα δείξουμε ότι $T(n) \le cn$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} T(n) &\le c\frac{n}{3} + c\frac{n}{4} + n \\ &= cn\frac{7}{12} + n \le cn, \end{aligned}$$

εφόσον $c > \frac{12}{5}$. Επομένως, $T(n) = O(n)$ και επειδή $T(n) \ge n$, συνεπάγεται ότι $T(n) = \Theta(n)$.

Οι συναρτήσεις που υπολογίστηκαν ταξινομούνται κατά αύξουσα σειρά ως

$$n^{\frac{3}{5}} \lg n < n < n^{\lg_3 8} < n^2$$

και επομένως συστήνεται η χρήση του αλγόριθμου Γ για την επίλυση του προβλήματος.

Άσκηση 8 *Δίνεται η αναδρομική σχέση*

$$T(n) = T(n/a) + T(n/b) + \Theta(n).$$

Θεωρείστε ότι $T(n) = 0$*, για* $n \le 1$*. Να δείξετε ότι αν* $a^{-1} + b^{-1} < 1$*, τότε* $T(n) = \Theta(n)$*. Τι συμβαίνει αν* $a^{-1} + b^{-1} = 1$*;*

Λύση Το δένδρο αναδρομής απεικονίζεται στο Σχήμα 6. Παρατηρούμε ότι το δένδρο δεν είναι ισοζυγισμένο: ο αριθμός των ακμών σε κάθε μονοπάτι από την ρίζα σε ένα φύλο δεν είναι ίδιος. Αν υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $a < b$ ο αριθμός αυτός κυμαίνεται από $\lceil \lg_b n \rceil$ μέχρι $\lceil \lg_a n \rceil$.[4]

[4] Προσέξτε ότι

$$a < b \Rightarrow \lg_b n < \lg_a n.$$

Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 6 η συνεισφορά του επιπέδου $k < \lceil \lg_b n \rceil$ στην συνάρτηση $T(n)$ είναι [5]

$$cn\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^k. \tag{9}$$

Επομένως αν πάρουμε και μεγαλύτερες τιμές για το k (π.χ. $k \geq \lceil \lg_a n \rceil$) η (9) παρέχει ένα πάνω φράγμα στο $T(n)$. Για απλοποίηση, θεωρούμε ότι $k = \max\{\lceil \lg_a n \rceil, \lceil \lg_b n \rceil\}$ και επομένως

$$T(n) \leq \sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^j cn \tag{10}$$

Από την (10) έχουμε ότι

$$T(n) \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^j cn = cn\frac{1}{1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

Άρα εικάζουμε ότι $T(n) = O(n)$. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή και είναι παρόμοια με αυτή της προηγούμενης άσκησης. Καταλήγει στη σχέση

$$T(n) \leq dn, \quad \text{με } d \geq \frac{c}{1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

Επομένως, $T(n) = O(n)$ και επειδή $T(n) \geq n \Rightarrow T(n) = \Omega(n)$, έχουμε ότι

$$T(n) = \Theta(n).$$

Στην περίπτωση που $a^-1 + b^-1 = 1$, η (10) συνεπάγεται ότι

$$T(n) \leq \sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^j cn = cn\sum_{j=0}^{k-1} 1 = cn \cdot k. \tag{11}$$

Επειδή $k = \max\{\lg_a n, \lg_b n\}$ και έχουμε δει σε προηγούμενη άσκηση ότι $\lg_t n = \Theta(\lg n)$, για οποιοδήποτε ακέραιο t, η (11) συνεπάγεται ότι

$$T(n) \leq cn \lg n.$$

[5] Δες Παράρτημα για μια αυστηρή απόδειξη της (9)

Άρα εικάζουμε ότι $T(n) = O(n \lg n)$. Θα υποθέσουμε ότι ισχύει η υπόθεση αυτή για $T(n/a), T(n/b)$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $T(n)$. Έχουμε,

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq d\frac{n}{a}(\lg \frac{n}{a}) + d\frac{n}{b}(\lg \frac{n}{b}) + cn \\
&= dn\left(\lg \frac{n^{(1/a)}}{a^{(1/a)}} + \lg \frac{n^{(1/b)}}{b^{(1/b)}}\right) + cn \\
&= dn \lg\left(\frac{n^{(1/a)}}{a^{(1/a)}} \cdot \frac{n^{(1/b)}}{b^{(1/b)}}\right) + cn \\
&= dn \lg n - dn \lg a^{\frac{1}{a}} b^{\frac{1}{b}} + cn
\end{aligned}
$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a < b$. Η παραπάνω σχέση γίνεται

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq dn \lg n - dn \lg a^{\frac{1}{a}} a^{\frac{1}{b}} + cn \\
&= dn \lg n - dn \lg a + cn \leq dn \lg n
\end{aligned}
$$

εφόσον $d > \frac{c}{\lg a}$. Με αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύεται ότι $T(n) \geq d' n \lg n$ με $d' > \frac{c}{\lg b}$. Επομένως αν $a^-1 + b^-1 = 1$,

$$T(n) = \Theta(n \lg n).$$

Άσκηση 9 *Σε μία ζούγκλα της Αφρικής συνολικής έκτασης n τ.μ., επιστήμονες θέλουν να μελετήσουν τον πληθυσμό κουνουπιών. Ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία.*

- *Ο υπεύθυνος μίας έκτασης την χωρίζει (χρόνος 1 ' λεπτό) σε δύο ίσες εκτάσεις και θέτει ως υπεύθυνους δύο βοηθούς του, έναν σε κάθε έκταση. Ο υπεύθυνος για όλη τη ζούγκλα (έκταση n τ.μ.), αποκαλείται και Αρχηγός,*

- *Αν ένας βοηθός γίνει υπεύθυνος μίας έκτασης μικρότερης-ίσης 1 τ.μ. τότε μελετά ο ίδιος τα κουνούπια στην έκταση αυτή (χρόνος 10 ') αλλιώς την αναθέτει σε δύο βοηθούς όπως περιγράφεται παραπάνω.*

- *Κάθε υπεύθυνος μίας περιοχής αναφέρει (χρόνος 2 ') στον ανώτερο του τα νούμερα που του έχουν ήδη αναφέρει (με ταυτόχρονο τρόπο οι δύο βοηθοί του) για τα κουνούπια*

1. *Διατυπώστε την αναδρομική εξίσωση που δίνει το πλήθος των συνολικών υποδιπλασιασμών της αρχικής έκτασης n. Λύστε την αναδρομική εξίσωση.*

2. *Υπολογίστε τον αριθμό των ατόμων που πρέπει να περιλαμβάνει η επιστημονική ομάδα για τη μελέτη των κουνουπιών στη ζούγκλα.*

3. *Υπολογίστε το συνολικό χρόνο από την έναρξη της διαδικασίας μέχρι να μάθει ο αρχηγός τον πληθυσμό των κουνουπιών στη ζούγκλα.*

Λύση

1. Έστω $X(n)$ το πλήθος των χωρισμών σε υποπεριοχές της αρχικής περιοχής έκτασης n. Ισχύει,

$$X(n) = \begin{cases} 2X(\frac{n}{2}) + 1, & n > 1, \\ 0, & n \leq 1. \end{cases}$$

   Η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$\begin{aligned} X(n) &= 2^{\lceil \lg n \rceil} \cdot X\left(\frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}}\right) + \sum_{j=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 2^j = 2^{\lceil \lg n \rceil} \cdot 0 + \sum_{j=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 2^j \\ &= 2^{\lceil \lg n \rceil} - 1 \end{aligned}$$

2. Ο αριθμός των ατόμων είναι ίσος με τον αριθμό των κόμβων του δένδρου αναδρομής. Δηλαδή, όλοι οι κόμβοι μέχρι το τελευταίο επίπεδο και οι κόμβοι του τελευταίου επιπέδου

$$2^{\lceil \lg n \rceil} - 1 + 2^{\lceil \lg n \rceil} = 2^{\lceil \lg n \rceil + 1} - 1$$

3. Ο χρόνος για τον υποδιπλασιασμό των περιοχών είναι ίσος με το ύψος του δένδρου (περιλαμβάνεται ο πρώτος κόμβος σε επίπεδο μηδέν αλλά εξαιρούνται τα φύλλα):

$$A(n) = 1' \cdot \lceil \lg n \rceil.$$

   Ο χρόνος για την επικοινωνία των κόμβων κάθε επιπέδου με τους κόμβους του ακριβώς ανώτερου επιπέδου είναι $2'$. Επομένως, ο συνολικός χρόνος για να φτάσει η πληροφορία στον αρχηγό είναι:

$$B(n) = 2' \cdot \lceil \lg n \rceil.$$

Τέλος χρειάζεται $10'$ για τα φύλλα να μετρήσουν τα κουνούπια στην περιοχή τους (που είναι μικρότερη-ίση με 1 τ.μ.). Από αυτή την παρατήρηση και (12), (**;;**) προκύπτει ότι ο συνολικός χρόνος είναι

$$\lceil \lg n \rceil + 2'\lceil \lg n \rceil + 10' = 3'\lceil \lg n \rceil + 10'$$

Άσκηση 10 *Ένας αλγόριθμος $D(X, Y)$ δέχεται στην είσοδο δύο σύνολα δεδομένων X, Y και επιλύει ένα πρόβλημα Π σε χρόνο $|X| + |Y|$. Η έξοδος του αλγόριθμου (συμβολίζεται $B \leftarrow D(X, Y)$) είναι ένα σύνολο B με $|X| + |Y|$ στοιχεία. Έστω ότι δίνονται k σύνολα $A_1, \ldots, A_k$, $k \geq 3$, ξένα μεταξύ τους όπου το καθένα περιέχει $\frac{n}{k}$ στοιχεία.*

1. *Ποια είναι η πολυπλοκότητα της παρακάτω διαδικασίας· Η αρχική αναδρομική κλήση είναι $S(A_1, A_2, 2)$.*

```
Function S(X, Y, t)
B ← D(X, Y)
if t + 1 ≤ k then
  Return S(B, A_{t+1}, t + 1)
end if
```

2. *Να περιγράψετε έναν αλγόριθμο που να επιλύει το πρόβλημα Π για τα σύνολα $A_1, \ldots, A_k$ σε χρόνο $\Theta(n \lg k)$.*

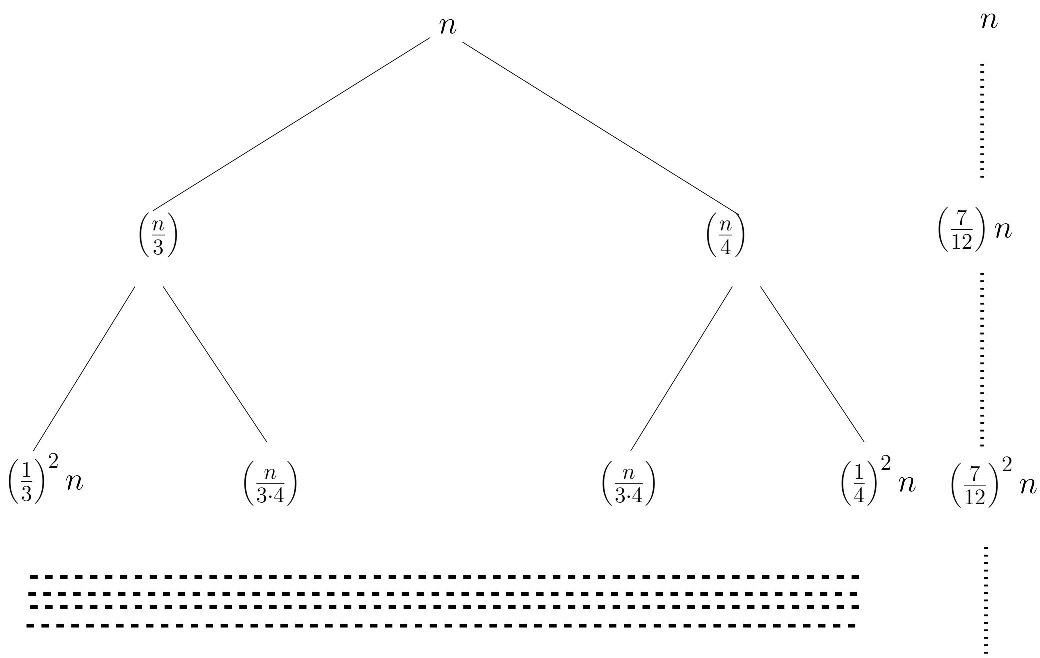
Λύση

1. Οι διαδοχικές κλήσεις κοστίζουν

$$\begin{aligned} |A_1| + |A_2| &= 2\frac{n}{k} + 1 \\ |A_1| + |A_2| + |A_3| &= 3\frac{n}{k} + 1 \\ &\ldots \\ |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots |A_k| &= k\frac{n}{k} + 1 \end{aligned}$$

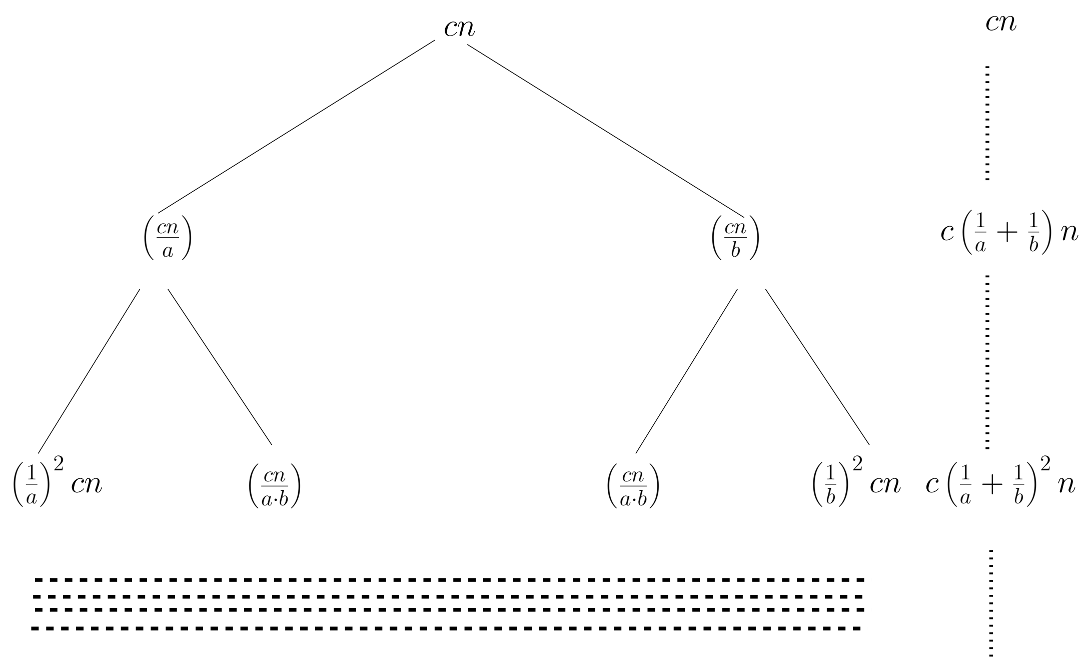
Αθροίζοντας,

$$T(n) = \frac{n}{k}\sum_{j=2}^{k} j + k - 1 = \frac{n}{k}\left(\frac{k(k+1)}{2} - 1\right) + k - 1 = \Theta(nk).$$



Σχήμα 5: Δένδρο αναδρομής, άσκηση 7

Function $S'(l, u)$
$B \leftarrow D(X, Y)$
if $l = u$ **then**
  Return A_l)
else
  middle $\leftarrow \lfloor \frac{l+u}{2} \rfloor$
  Return $D(S'(l, middle), S'(middle + 1, u))$
end if



Σχήμα 6: Δένδρο αναδρομής, άσκηση 8

2. Η συνάρτηση S' αποτελεί μία διαφορετική υλοποίηση η οποία εμπεριέχει την τεχνική διαίρει-και-βασίλευε. Η αρχική κλήση είναι $S'(1, k)$. Η συνεισφορά του κάθε επιπέδου του δένδρου αναδρομής στη συνάρτηση $T(n)$ είναι n και το ύψος του δένδρου είναι $\lg k$. Επομένως $T(n) = \Theta(n \lg k)$.

Παράρτημα

Λήμμα 1 *Στην αναδρομική συνάρτηση*

$$T(n) = T(n/a) + T(n/b) + \Theta(n),$$

όπου $a \leq b$, *η συνεισφορά του κάθε επιπέδου* $k < \lceil \lg_b n \rceil$ *του δένδρου αναδρομής δίνεται από τη σχέση (9), δηλαδή είναι*

$$cn\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^k.$$

Απόδειξη Από το δένδρο αναδρομής είναι εύκολο να δει κανείς ότι η (9) ισχύει για $k = 0, 1$. Έστω ότι ισχύει για $k = m$. Δηλαδή για το επίπεδο αυτό έχουμε τη συνεισφορά

$$cn\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^m.$$

Στο επίπεδο αυτό παρατηρούμε ότι κάθε κόμβος $j = 0, \ldots, m$ συνεισφέρει στη συνάρτηση κατά

$$cn \cdot \binom{m}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^j, \tag{12}$$

και επομένως από το διώνυμο του Νεύτωνος έχουμε

$$cn \cdot \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^j = cn\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^m \tag{13}$$

Η συνεισφορά των κόμβων του δένδρου στο επίπεδο $k = m + 1$ προέρχονται από τη διαίρεση των όρων (12) με a, b, αντίστοιχα. Έχουμε

$$cn \cdot \binom{m}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m+1-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^j, \tag{14}$$

$$cn \cdot \binom{m}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{j+1}, \tag{15}$$

Αν θεωρήσουμε τους όρους της (14) για $j \neq 0$ και τους όρους της (15) για $j \neq n$, παρατηρούμε ότι για κάθε όρο της πρώτης υπάρχει ένας όρος της δεύτερης όπου τα κλάσματα $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ εμφανίζονται με κοινό εκθέτη. Συγκεκριμένα, αν γράψουμε για $j = r \neq 0$ την (14) και $j = r - 1$ την (15) παίρνουμε

$$cn \cdot \binom{m}{r} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r},$$

$$cn \cdot \binom{m}{r-1} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r}.$$

Αθροίζοντας, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&cn \cdot \left(\binom{m}{r} + \binom{m}{r-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \left(\frac{m!}{r! \cdot (m-r)!} + \frac{m!}{(r-1)! \cdot (m-(r-1))!}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \frac{m!}{(r-1)! \cdot (m-r)!} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{m-r+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \frac{m!}{(r-1)! \cdot (m-r)!} \cdot \frac{m+1}{r(m-r+1)} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \frac{(m+1)!}{r! \cdot (m+1-r)!} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m-(r-1)} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \\
=&cn \cdot \binom{m+1}{r} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m+1-r} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{r} \qquad (16)
\end{aligned}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι για $j = 0$ η (14) γίνεται

$$cn \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m+1} \qquad (17)$$

ενώ η (15) για $j = m$ γίνεται

$$cn \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{m+1} \qquad (18)$$

Αθροίζοντας την (16) για κάθε $r = 1, \ldots, m$ και (17), (18) προκύπτει η συνεισφορά του επιπέδου $k = m + 1$ στη συνάρτηση $T(n)$, ήτοι,

$$cn \cdot \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{m+1-j} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{j} = cn\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{m+1},$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.