# Proof of Fundamental Theorem of Calculus

If f is continuous on the interval $[a, x]$, then:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{f}(x)$$

*Proof.* Let $\mathrm{g}(x) = \int\limits_{\mathrm{a}}^{x} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}'(x) &= \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{\mathrm{g}(x+\mathrm{h}) - \mathrm{g}(x)}{\mathrm{h}} \\
&= \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{\int\limits_{\mathrm{a}}^{x+\mathrm{h}} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{\mathrm{a}}^{x} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{h}} \\
&= \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{\int\limits_{x}^{x+\mathrm{h}} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{h}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}(x) &= \lim_{\mathrm{h}\to 0} \mathrm{f}(x) \\
&= \lim_{\mathrm{h}\to 0} \mathrm{f}(x) \cdot \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{h}} \\
&= \lim_{\mathrm{h}\to 0} \mathrm{f}(x) \cdot \frac{(x+\mathrm{h}) - x}{\mathrm{h}} \\
&= \lim_{\mathrm{h}\to 0} \mathrm{f}(x) \cdot \frac{\int\limits_{x}^{x+\mathrm{h}} \mathrm{d}t}{\mathrm{h}} \\
&= \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{\int\limits_{x}^{x+\mathrm{h}} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{h}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}'(x) - \mathrm{f}(x) &= \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{\int\limits_{x}^{x+\mathrm{h}} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{h}} - \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{\int\limits_{x}^{x+\mathrm{h}} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{h}} \\
&= \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{\int\limits_{x}^{x+\mathrm{h}} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{x}^{x+\mathrm{h}} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}t}{\mathrm{h}} \\
&= \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{\int\limits_{x}^{x+\mathrm{h}} [\mathrm{f}(t) - \mathrm{f}(x)]\,\mathrm{d}t}{\mathrm{h}}
\end{aligned}$$

Let $\varepsilon > 0$. Without loss of generality, assume that $\delta > \mathrm{h} > 0$.

$$\begin{array}{ccccc} x & \leqslant & t & \leqslant & x+\mathrm{h} \\ 0 & \leqslant & t-x & \leqslant & \mathrm{h} \\ 0 & \leqslant & |t-x| & \leqslant & \mathrm{h} \\ 0 & < & |t-x| & < & \delta \end{array}$$

Since f is continuous on the interval $[a, x]$:

$$0 < |t-x| < \delta \implies |\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\int_x^{x+\mathrm{h}} [\mathrm{f}(t) - \mathrm{f}(x)] \, \mathrm{d}t}{\mathrm{h}} \right| &= \frac{1}{\mathrm{h}} \left| \int_x^{x+\mathrm{h}} [\mathrm{f}(t) - \mathrm{f}(x)] \, \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \frac{1}{\mathrm{h}} \int_x^{x+\mathrm{h}} |\mathrm{f}(t) - \mathrm{f}(x)| \, \mathrm{d}t \\ &< \frac{1}{\mathrm{h}} \int_x^{x+\mathrm{h}} \varepsilon \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\varepsilon}{\mathrm{h}} \int_x^{x+\mathrm{h}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{\varepsilon}{\mathrm{h}} (x + h - x) \\ &= \frac{\varepsilon}{\mathrm{h}} \cdot \mathrm{h} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\mathrm{h} \to 0} \frac{\int_x^{x+\mathrm{h}} \mathrm{f}(x) \, \mathrm{d}t}{\mathrm{h}} &= 0 \\ \mathrm{g}'(x) - \mathrm{f}(x) &= 0 \\ \mathrm{g}'(x) &= \mathrm{f}(x) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{g}(x) &= \mathrm{f}(x) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x \mathrm{f}(t) \, \mathrm{d}t &= \mathrm{f}(x) \end{aligned}$$

$\square$