Sophie Germain Identity

$$
\begin{aligned}
A^4 + 4B^4 &= \left(A^2\right)^2 + \left(2B^2\right)^2 \\
&= \left(A^2\right)^2 + \left(2B^2\right)^2 + 2\left(A^2\right)\left(2B^2\right) - 2\left(A^2\right)\left(2B^2\right) \\
&= \left(A^2\right)^2 + 2\left(A^2\right)\left(2B^2\right) + \left(2B^2\right)^2 - 4A^2B^2 \\
&= \left(A^2 + 2B^2\right)^2 - (2AB)^2 \\
&= \left(A^2 - 2AB + 2B^2\right)\left(A^2 + 2AB + 2B^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{A^4 + 4B^4 \equiv \left(A^2 - 2AB + 2B^2\right)\left(A^2 + 2AB + 2B^2\right)}
$$