



UNIVERSITÉ D'ANTANANARIVO
ÉCOLE SUPÉRIEURE POLYTECHNIQUE D'ANTANANARIVO

MENTION ÉLECTRONIQUE



Bloc 32 - Campus de Vontovorona
BP 1500 - 101 Antananarivo

MÉMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER À VISÉE DE RECHERCHE

Domaine :

Mention :

Parcours :

RECONSTRUCTION D'IMAGES ISSUES DE TOMODENSITOMÉTRIE

Présenté par : Selison Frédéric ANDRIANARIVONY

Devant les membres du jury composé de :

Soutenu le : ...

N° d'ordre : ...

Année universitaire : ...

REMERCIEMENTS

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à Dieu Tout-Puissant, source de sagesse et d'inspiration, pour son amour, sa miséricorde et sa guidance tout au long de mes études et pour la réalisation de ce mémoire.

Je remercie chaleureusement Monsieur le Chef du Département Électronique de l'ESPA, Mr. ... pour avoir accepté de présider ma soutenance, ainsi que Madame et Messieurs les membres du jury, composés de Madame ..., Monsieur ... et Monsieur ..., pour leurs conseils, corrections et remarques pertinentes qui ont grandement enrichi ce travail.

Je suis particulièrement reconnaissante à mon encadreur, Madame RAMAFIARISONA Malalatiana, pour son savoir, sa pédagogie et son accompagnement constants, qui m'ont permis de progresser et de mener ce projet à terme avec rigueur et confiance.

Mes remerciements vont également à toute l'équipe pédagogique du Département Électronique de l'ESPA pour les connaissances et compétences transmises au cours de ce Master à visée de recherche.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude à ma famille, pour son soutien moral, matériel et affectif, qui a été une source constante de motivation et d'encouragement.

Que la paix et la bénédiction de Dieu soient avec vous tous.

Frédéric ANDRIANARIVONY

Table des matières

CHAPITRE I: RECONSTRUCTION D'IMAGE	1
I.1 Modalités d'imagerie médicale et reconstruction d'images	2
I.1.1 Tomodensitométrie (TDM)	2
I.1.2 Imagerie par résonance magnétique (IRM)	2
I.1.3 Tomographie par émission de positons (TEP)	3
I.1.4 Comparaison des modalités	3
I.2 Transformation de Radon et son rôle en reconstruction d'image	4
I.3 Limites et artefacts de la rétroprojection filtrée (FBP)	5
I.3.1 Limites de la rétroprojection filtrée	5
I.3.2 Artefacts associés à la FBP	5
I.3.3 Stratégies pour atténuer les artefacts et limitations	5
I.4 Introduction au Compressed Sensing	6
I.5 Reconstruction d'images par Compressive Sensing (CS)	7
I.5.1 Principes et avantages	7
I.5.2 Limites et défis	8
I.5.3 Artefacts et comportements observés	8
I.5.4 Stratégies pour améliorer la reconstruction	8
 CHAPITRE II: OUTILS MATHÉMATIQUES UTILISÉS DANS LA RE- CONSTRUCTION D'IMAGES CT PAR LE COMPRESSED SENSING	 10
II.1 Classification des approches de reconstruction	10
II.1.1 Méthodes analytiques	11
II.1.2 Méthodes itératives et Compressed Sensing	14
II.2 Transformée de Fourier	16
II.2.1 Transformée de Fourier à Court Terme (STFT)	18
II.3 Convolution	18
II.4 Transformée de Radon	19
II.4.1 Construction de l'orientation et de la distance	20
II.4.2 Théorème de la Coupe Centrale	23
II.4.3 Rétroprojection filtrée (FBP)	24
II.5 Discrétisation des méthodes analytiques	29
II.6 Formulation linéaire – Synthèse	31
II.6.1 Rétroprojection filtrée continue	32
II.6.2 Discrétisation des coordonnées et des angles	32
II.6.3 Convolution et filtrage discrets	32
II.6.4 Discrétisation de la rétroprojection	33
II.6.5 Passage à la forme matricielle linéaire	33

II.6.6 Synthèse	35
CHAPITRE III: NOTRE MODÈLE	37
III.1 Introduction du chapitre	37
III.2 Compressed Sensing	37
III.2.1 Le problème inverse en tomodensitométrie	38
III.2.2 Mal-positude et conséquences pratiques	39
III.2.3 Régularisation par parcimonie et Compressed Sensing	39
III.2.4 Formulation variationnelle des problèmes inverses	39
III.2.5 Formulation du problème	41
III.3 ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers)	43
III.3.1 Ascension Duale.	43
III.3.2 Décomposition Duale.	44
III.3.3 Lagrangiens Augmentés et Méthode des Multiplicateurs	45
III.3.4 Étapes sur l'algorithme ADMM	46
III.4 Transformées en Ondelettes Biorthogonales	48
III.4.1 Fondements Théoriques des Ondelettes	48
III.4.2 Ondelettes Orthogonales : Théorie et Propriétés	52
III.4.3 Ondelettes Biorthogonales	54
III.4.4 Indicateurs permettant d'évaluer la qualité de la reconstruction	55
III.4.5 Résolution du problème inverse CT par régularisation parcimonieuse : une approche ADMM associée aux ondelettes biorthogonales 4.4	58
CHAPITRE IV: SIMULATION, DÉVELOPPEMENT ET APPLICATIONS INNOVANTES EN RECONSTRUCTION D'IMAGES CT	62
IV.1 Collecte des données	62
IV.1.1 Transformée de Radon et de la Génération de Sinogrammes	62
IV.1.2 Sous-Échantillonnage Angulaire en Tomographie pour le Compressed Sensing	65
IV.1.3 Opérateur de Transformée en Ondelettes	68
IV.1.4 Reconstruction d'Images en Tomographie par Transformée de Radon	72
IV.1.5 La Reconstruction Tomographique par Séparation de Variables (ADMM)	74
IV.2 Evaluation	76
IV.3 Discussion	76
IV.4 Applications	76
IV.5 Innovation	76
ANNEXE A Génération de sinogrammes	77
ANNEXE B Opérateur de Transformée en Ondelettes	79
ANNEXE C Reconstruction d'Images en Tomographie par Transfor- mée de Radon	80
C.1 Explication détaillée du code : opérateur de tomographie (CT scan)	80
C.1.1 Objectif du code	80
C.1.2 Explication ligne par ligne	81
C.1.3 Utilisation typique	82

C.1.4	Applications	82
C.1.5	Notes importantes	83

ANNEXE D La Reconstruction Tomographique par Séparation de Variables (ADMM) 84

D.0.1	Utilisation typique	87
D.0.2	Avantages	87
D.0.3	Paramètres clés à ajuster	87

Liste des abréviations

ADMM	Alternating direction method of multipliers
ALARA	As Low As Reasonably Achievable
CT	Computed tomography
FBP	Filtered back projection
FISTA	FISTA: Accelerated proximal gradient method
ISTA	Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm
LNT	Linear No-threshold Theory
STFT	Short-time Fourier transform
TDM	Tomodensitométrie
TEP	Tomographie par émission de positons
TV	Total Variation

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 :	Principe de fonctionnement d'un appareil de tomodensitométrie . .	12
Figure 2.2 :	paramétrisation d'une droite $l_{t,\theta}$ par t et θ	21
Figure 2.3 :	Transformée de Radon pour θ_1 et θ_2	22
Figure 2.4 :	Retroprojection d'un carré dans 5, 25, 100 et 1000 directions . . .	25
Figure 2.5 :	Calcul du coefficient de poids $\varphi_{i,j}$ de la matrice système Φ à partir de la longueur d'intersection du i -ème rayon à travers le j -ème pixel.	34
Figure 2.6 :	Mesures des rayons- X a , b , c et d pour des angles de rotation α , $90 - \alpha$, $90 + \alpha$ et $180 - \alpha$. Les propriétés de symétrie permettent de déduire les poids d'un rayon à partir d'un autre.	35
Figure 3.1 :	Fantôme de Shepp–Logan	42
Figure 3.2 :	Gradient du fantôme de Shepp–Logan	42
Figure 3.3 :	Orthogonalité	49
Figure 3.4 :	Transformation en ondelettes	50
Figure 3.5 :	Ondelette de Daubechies pour différentes valeurs	52
Figure 4.1 :	Processus de transformation de Radon	63
Figure 4.2 :	Diagramme de génération d'un sinogramme	63
Figure 4.3 :	Images-Sinogrammes pairs	64
Figure 4.4 :	Pipeline de sous-échantillonnage angulaire	67
Figure 4.5 :	Opérateur de Transformée en Ondelettes	69
Figure 4.6 :	Opérateur A et son Adjoint A^T pour la Reconstruction CT	73
Figure 4.7 :	Flux d'exécution de la reconstruction tomographique par ADMM .	75

CHAPITRE I

RECONSTRUCTION D'IMAGE

L'imagerie médicale occupe aujourd'hui une place centrale dans le diagnostic, le suivi thérapeutique et la recherche biomédicale. Des modalités telles que la tomodensitométrie (CT), l'imagerie par résonance magnétique (IRM) ou la tomographie par émission de positons (TEP) permettent d'explorer de manière non invasive l'anatomie et la physiologie du corps humain avec une précision toujours croissante. Toutefois, la qualité et la fiabilité de ces images reposent sur une étape fondamentale, souvent invisible pour l'utilisateur final : la reconstruction d'image.

La reconstruction d'image médicale consiste à transformer des données de mesure brutes, acquises selon différents angles ou configurations physiques, en représentations visuelles exploitables par le clinicien. Contrairement à la photographie classique, les systèmes d'imagerie médicale ne produisent pas directement des images des organes. Ils mesurent plutôt des interactions physiques — telles que l'atténuation des rayons X, la réponse à des champs magnétiques ou les émissions radioactives — qui ne constituent que des projections partielles de la réalité anatomique ou fonctionnelle. La reconstruction vise alors à estimer, à partir de ces projections, la distribution spatiale des tissus ou des activités biologiques.

En tomodensitométrie, les projections correspondent à l'atténuation des rayons X traversant le corps selon de multiples directions, tandis qu'en tomographie par émission de positons, elles résultent de la détection des photons émis par un traceur radioactif à l'intérieur du patient. Dans les deux cas, les données acquises sont incomplètes, bruitées et fortement corrélées, ce qui rend la reconstruction d'image intrinsèquement complexe. Ce processus s'inscrit dans le cadre des problèmes inverses, pour lesquels on cherche à retrouver les causes physiques à partir d'observations indirectes. Ces problèmes sont généralement mal posés au sens mathématique, plusieurs solutions pouvant conduire à des mesures expérimentales similaires.

Historiquement, les premières méthodes de reconstruction, telles que la rétroprojection filtrée, ont permis le développement clinique rapide de l'imagerie tomographique grâce à leur simplicité et à leur efficacité computationnelle. Cependant, ces approches restent sensibles au bruit et aux artefacts, en particulier lorsque les conditions d'acquisition s'éloignent du cadre idéal. Afin de pallier ces limitations, des méthodes itératives ont été développées. Celles-ci reposent sur une modélisation plus fidèle du processus d'acquisition et permettent d'intégrer des connaissances a priori sur les propriétés des images médicales, au prix d'un coût de calcul plus élevé.

Plus récemment, les méthodes basées sur des modèles physiques détaillés et l'intégration de techniques d'intelligence artificielle ont profondément renouvelé le domaine de la reconstruction d'image. Ces approches permettent de mieux prendre en compte la géométrie

des systèmes d’acquisition, la physique des interactions rayonnement–matière ainsi que les caractéristiques des détecteurs. Elles ouvrent également la voie à des reconstructions plus rapides, plus robustes et de meilleure qualité, répondant à des enjeux majeurs tels que la réduction de la dose de rayonnement, la correction des artefacts et l’amélioration du contraste des images.

I.1 Modalités d’imagerie médicale et reconstruction d’images

L’imagerie médicale regroupe plusieurs modalités utilisées pour le diagnostic et la surveillance de nombreuses pathologies. Chaque modalité repose sur des principes physiques distincts et présente des caractéristiques spécifiques en termes d’acquisition et de reconstruction des images. Comprendre ces différences est essentiel afin d’apprécier les forces, les limites et les défis associés à chaque technique de reconstruction.

I.1.1 Tomodensitométrie (TDM)

La tomodensitométrie repose sur l’utilisation de rayons X pour produire des images détaillées de l’intérieur du corps humain. Un tube à rayons X et un ensemble de détecteurs tournent autour du patient, permettant l’acquisition de projections sous de multiples angles. Ces projections correspondent à l’atténuation du faisceau de rayons X par les tissus traversés.

Historiquement, la rétroprojection filtrée (*Filtered Backprojection*, FBP) a constitué l’algorithme de reconstruction standard en TDM. Cette méthode consiste à filtrer les données de projection afin de corriger le flou inhérent à la rétroprojection, puis à les projeter dans l’espace image. Bien que rapide et robuste, la FBP est sensible au bruit, en particulier lorsque la dose de rayonnement est réduite.

Les systèmes de tomodensitométrie modernes intègrent de plus en plus des méthodes de reconstruction itérative. Ces techniques consistent à ajuster progressivement une estimation de l’image en comparant les projections mesurées aux projections simulées à partir de l’image courante. La reconstruction itérative permet de réduire le bruit, d’améliorer le contraste et de maintenir une qualité d’image acceptable à faible dose, au prix d’un temps de calcul plus important.

Un avantage majeur de la TDM réside dans la rapidité de la reconstruction, souvent réalisable en temps réel ou quasi temps réel. De plus, les valeurs reconstruites sont directement liées aux coefficients d’atténuation des tissus, ce qui confère à la tomodensitométrie une forte valeur quantitative.

I.1.2 Imagerie par résonance magnétique (IRM)

L’imagerie par résonance magnétique utilise un champ magnétique intense et des ondes radiofréquence pour produire des images des structures internes du corps. Elle repose sur les principes de la résonance magnétique nucléaire et permet d’obtenir des contrastes tissulaires riches sans exposition aux rayonnements ionisants.

Les données IRM sont acquises dans le domaine fréquentiel, appelé espace k . La reconstruction d’image consiste principalement à appliquer une transformée de Fourier inverse

afin de convertir ces données fréquentielles en une image spatiale. Cette approche confère à l'IRM une base mathématique élégante et bien établie.

Afin d'accélérer les temps d'acquisition, des techniques telles que le Fourier partiel et l'imagerie parallèle ont été développées. Des méthodes comme SENSE ou GRAPPA reposent sur le sous-échantillonnage de l'espace k et sur l'utilisation de multiples bobines de réception, combinées à des algorithmes de reconstruction capables de compenser les données manquantes.

La reconstruction en IRM reste toutefois complexe en raison de plusieurs facteurs, notamment les inhomogénéités du champ magnétique, les artefacts liés aux mouvements du patient et la nécessité de combiner correctement les signaux issus de systèmes multi-bobines. Ces défis requièrent des modèles de reconstruction sophistiqués et une calibration précise du système.

I.1.3 Tomographie par émission de positons (TEP)

La tomographie par émission de positons est une modalité d'imagerie fonctionnelle qui repose sur l'injection d'un traceur radioactif dans l'organisme. Le traceur émet des positons qui, après annihilation avec des électrons, produisent deux photons gamma émis en coïncidence et détectés par le système TEP.

Comme en tomodensitométrie, la rétroprojection filtrée a été historiquement utilisée pour la reconstruction des images TEP, en particulier dans les premiers systèmes. Toutefois, en raison du caractère bruité et statistique des données TEP, les méthodes itératives se sont rapidement imposées.

La majorité des systèmes TEP modernes utilisent des algorithmes itératifs, tels que la maximisation d'espérance par sous-ensembles ordonnés (*Ordered Subsets Expectation Maximization*, OSEM). Ces méthodes modélisent finement la physique de l'acquisition et permettent d'intégrer diverses corrections, notamment celles liées à l'atténuation, à la diffusion et aux coïncidences aléatoires.

La reconstruction TEP présente des défis spécifiques, liés à la nécessité de corriger plusieurs phénomènes physiques. L'utilisation de scanners hybrides TEP-TDM ou TEP-IRM permet d'exploiter des informations anatomiques complémentaires afin d'améliorer la qualité et la quantification des images fonctionnelles.

I.1.4 Comparaison des modalités

Bien que la rétroprojection filtrée ait historiquement été utilisée en tomodensitométrie et en TEP, les méthodes de reconstruction itérative sont aujourd'hui privilégiées dans ces deux modalités en raison de leur capacité à améliorer la qualité d'image et à réduire les artefacts. À l'inverse, l'IRM repose principalement sur des reconstructions basées sur la transformée de Fourier, enrichies par des techniques d'accélération et de compensation des données manquantes.

Les processus d'acquisition diffèrent également de manière significative. En TDM et en TEP, les données sont directement liées à des propriétés physiques mesurables, telles que l'atténuation des rayons X ou la distribution d'un traceur radioactif. En IRM, l'acquisition repose sur une manipulation complexe des champs magnétiques et des impulsions radiofréquence afin de coder l'information spatiale.

Enfin, chaque modalité est sujette à des artefacts spécifiques nécessitant des stratégies de correction adaptées lors de la reconstruction. La TDM doit corriger des effets tels que le durcissement du faisceau, l'IRM est sensible aux inhomogénéités de champ et aux mouvements, tandis que la TEP requiert des corrections pour l'atténuation, la diffusion et les événements aléatoires.

En résumé, bien que la reconstruction d'images soit une étape essentielle commune à ces trois modalités, la nature des données, les modèles physiques sous-jacents et les défis algorithmiques diffèrent considérablement. La compréhension de ces spécificités est indispensable pour optimiser la qualité des images et garantir une information diagnostique fiable et pertinente.

I.2 Transformation de Radon et son rôle en reconstruction d'image

a. Origines et développement historique

Les fondements théoriques de la reconstruction tomographique remontent au début du XXe siècle. En 1917, le mathématicien J. Radon a formulé une théorie mathématique permettant de reconstruire une fonction à partir de ses projections. Cependant, ce n'est qu'avec les progrès des calculateurs numériques dans les années 1960-1970 que cette théorie a pu être appliquée concrètement. Godfrey Hounsfield, ingénieur britannique, a mis au point le premier scanner TDM (tomodensitométrie ou CT) en 1971, grâce à un financement indirect provenant de la société EMI, associée au succès des Beatles. Ce développement a marqué la naissance de l'imagerie médicale tomographique, suivie par l'IRM et la tomoscintigraphie.

La transformation de Radon constitue un outil mathématique fondamental pour la reconstruction d'images à partir de projections. Elle est au cœur de nombreuses techniques d'imagerie médicale, en particulier la tomodensitométrie (TDM). Cette transformation permet de relier les mesures obtenues par les détecteurs à la distribution de densité des tissus à l'intérieur du corps.

Elle consiste à intégrer l'information provenant de différentes lignes de projection afin de créer un ensemble de mesures représentant l'objet examiné sous plusieurs angles. Dans le cadre de la TDM, ces projections correspondent à l'atténuation des rayons X lorsqu'ils traversent le corps. Chaque angle de mesure fournit une "ombre" partielle de la structure interne, et la transformation de Radon permet de regrouper l'ensemble de ces informations.

La transformée inverse de Radon joue un rôle central dans la reconstruction d'image. À partir des projections acquises, elle permet de reconstituer la distribution originale des tissus. L'une des méthodes les plus utilisées pour cette étape est la rétroprojection filtrée, qui combine les différentes projections après un traitement visant à corriger le flou inhérent aux mesures. Cette approche a longtemps constitué la base des reconstructions classiques en tomodensitométrie et demeure largement utilisée.

L'application de la transformation de Radon et de sa transformée inverse a révolutionné le diagnostic médical. Elle permet aujourd'hui de visualiser de manière non invasive et détaillée les structures internes du corps, offrant des images transversales précises qui améliorent la qualité et la fiabilité des examens cliniques.

En résumé, la transformation de Radon représente un composant essentiel de l'imagerie médicale moderne. Elle constitue le fondement de nombreuses techniques de reconstruction, transformant des données de projection en images exploitables, et reste un outil incontournable pour le diagnostic et le suivi des patients.

I.3 Limites et artefacts de la rétroprojection filtrée (FBP)

La rétroprojection filtrée, ou *Filtered Backprojection* (FBP), est un algorithme de reconstruction largement utilisé dans les modalités d'imagerie médicale telles que la tomographie à émission de positons (TEP) et la tomographie par émission de positons (PET). Bien que cette méthode soit rapide et relativement efficace, elle présente plusieurs limitations et artefacts pouvant affecter la qualité des images reconstruites.

I.3.1 Limites de la rétroprojection filtrée

L'une des principales limites de la FBP réside dans le modèle d'atténuation qu'elle suppose. Celui-ci est souvent simplifié et peut ne pas représenter fidèlement les interactions complexes entre le rayonnement et les tissus du patient. Par ailleurs, l'algorithme a tendance à amplifier le bruit présent dans les données de projection, en particulier lorsque le filtrage appliqué n'est pas optimal.

La FBP peut également introduire des artefacts de stries, surtout lorsque les projections sont incomplètes ou bruitées. La résolution des composantes haute fréquence est limitée, entraînant une perte de détails fins dans l'image reconstruite. De plus, l'algorithme suppose un échantillonnage uniforme des projections, condition rarement parfaitement respectée dans la pratique clinique.

I.3.2 Artefacts associés à la FBP

Plusieurs types d'artefacts peuvent apparaître dans les images reconstruites à l'aide de la FBP. Parmi les plus courants, on trouve les stries sombres ou lumineuses dues à des données incomplètes ou bruitées, ainsi que les artefacts en anneau, souvent liés à un mauvais calibrage des détecteurs. Le durcissement du faisceau peut également générer des bandes sombres ou des stries, conséquence de l'absorption préférentielle des photons de faible énergie.

Des zones sombres peuvent apparaître lorsque le nombre de photons détectés est insuffisant, notamment en présence d'implants métalliques ou de tissus très absorbants. Enfin, la FBP reste sensible aux mouvements du patient pendant l'examen, ce qui peut provoquer du flou ou des stries supplémentaires dans l'image finale.

I.3.3 Stratégies pour atténuer les artefacts et limitations

Plusieurs approches permettent de réduire l'impact des limitations et des artefacts associés à la FBP. L'optimisation des protocoles d'acquisition, par exemple l'augmentation du nombre de projections ou l'utilisation de détecteurs plus performants, contribue à améliorer la qualité des données de base.

Le pré-traitement des données, comme le filtrage du sinogramme ou la correction du

durcissement du faisceau, peut également aider à atténuer les artefacts. L'emploi d'algorithmes de reconstruction plus avancés, tels que la reconstruction itérative ou basée sur un modèle, permet de surmonter certaines limites inhérentes à la FBP. Enfin, des techniques de post-traitement d'image, incluant le filtrage et l'amélioration de contraste, complètent le processus pour améliorer la qualité visuelle et diagnostique des images reconstruites.

En résumé, bien que la rétroprojection filtrée reste un algorithme de reconstruction largement utilisé et efficace, elle comporte des limites et génère certains artefacts susceptibles d'affecter la qualité des images. La compréhension de ces contraintes est essentielle pour développer des stratégies adaptées, tant au niveau de l'acquisition que du traitement et de la reconstruction, afin d'optimiser les résultats en imagerie médicale.

I.4 Introduction au Compressed Sensing

L'un des principes fondamentaux du traitement du signal repose sur la théorie d'échantillonnage de Nyquist–Shannon, selon laquelle le nombre d'échantillons nécessaires pour reconstruire un signal sans erreur est déterminé par sa bande passante, c'est-à-dire la longueur du plus petit intervalle contenant le support du spectre du signal considéré. Toutefois, au cours des dernières années, une théorie alternative appelée *Compressed Sensing* (ou échantillonnage compressif) a émergé. Celle-ci démontre qu'il est possible de reconstruire des signaux et des images, y compris à haute résolution, à partir d'un nombre de mesures bien inférieur à celui classiquement requis.

L'objectif du Compressed Sensing est de tirer parti de la structure intrinsèque des signaux afin de réduire significativement la quantité de données nécessaires lors du processus d'acquisition. Un aspect particulièrement remarquable de cette théorie réside dans ses nombreuses interactions avec divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie, tels que les statistiques, la théorie de l'information, la théorie du codage ou encore l'informatique théorique, ce qui souligne son caractère fondamental et transversal.

De manière générale, la parcimonie, et plus largement la compressibilité, joue depuis longtemps un rôle central dans de nombreux domaines scientifiques. La parcimonie permet d'obtenir des estimations efficaces, notamment à travers des méthodes de seuillage ou de régularisation, dont les performances dépendent fortement du nombre réduit de composantes significatives du signal. Elle constitue également le fondement des techniques modernes de compression, où la qualité du codage dépend de la capacité du signal à admettre une représentation parcimonieuse dans une base appropriée. En outre, la parcimonie favorise la réduction de dimension ainsi que la construction de modèles compacts et efficaces.

La contribution essentielle du Compressed Sensing réside dans le fait que la parcimonie n'intervient plus uniquement au stade du traitement ou de la compression, mais influence directement le processus d'acquisition des données. Cette approche ouvre la voie à des protocoles d'acquisition plus efficaces, permettant de convertir des signaux analogiques en une représentation numérique déjà compressée, tout en optimisant l'utilisation des ressources disponibles.

En pratique, il est bien établi que les signaux naturels possèdent une structure intrinsèque qui autorise une compression efficace avec une perte perceptuelle limitée. Les méthodes de codage par transformée exploitent le fait que de nombreux signaux admettent une représentation parcimonieuse dans une base fixe. Le schéma classique consiste à

acquérir l'ensemble des données, à calculer tous les coefficients de la transformée, puis à ne conserver que les plus significatifs en éliminant les autres. Ce processus, bien que largement utilisé, demeure peu efficace, puisqu'il implique une acquisition massive de données dont une grande partie est finalement rejetée.

Cette observation soulève une question fondamentale : si la majorité des signaux sont compressibles, pourquoi acquérir l'intégralité des données alors qu'une grande partie sera inévitablement inutilisée ? Le Compressed Sensing apporte une réponse claire à cette problématique en montrant qu'il est possible d'acquérir directement les données sous une forme compressée, sans passer par une étape intermédiaire de sur-acquisition suivie de compression.

I.5 Reconstruction d'images par Compressive Sensing (CS)

La *Compressive Sensing* (CS) est une approche moderne de reconstruction d'images qui a émergé au milieu des années 2000 comme alternative aux méthodes classiques telles que la rétroprojection filtrée. Elle repose sur l'idée que de nombreuses images médicales peuvent être représentées de manière parcimonieuse dans un certain domaine de transformation, ce qui permet de reconstruire des images de qualité à partir d'un nombre réduit de mesures. Cette capacité à exploiter l'information essentielle rend la CS particulièrement pertinente dans des modalités où l'acquisition est longue, coûteuse ou comporte des risques pour le patient.

I.5.1 Principes et avantages

La CS réduit considérablement le nombre de projections ou d'échantillons nécessaires pour obtenir une image diagnostique exploitable. Elle est donc idéale pour des modalités telles que la tomodensitométrie, la TEP, ou l'IRM dynamique, où chaque mesure peut être longue ou exposer le patient à un rayonnement ou à un contraste. En exploitant la parcimonie naturelle des images médicales, la CS permet non seulement de diminuer la dose de rayonnement, mais aussi de réduire le temps global d'acquisition tout en maintenant une qualité diagnostique élevée.

Un avantage supplémentaire réside dans sa capacité à limiter le bruit. Contrairement à la rétroprojection filtrée (FBP), qui peut amplifier les fluctuations aléatoires des mesures, la CS intègre des contraintes de régularisation qui favorisent des reconstructions plus stables, visuellement plus propres et moins sensibles aux artefacts issus des mesures bruitées.

Contexte additionnel :

- **Transitions cliniques réussies** : Certains scanners commerciaux ont commencé à intégrer la CS, par exemple en tomodensitométrie cardiaque ou en imagerie mammaire, permettant une réduction de dose pouvant atteindre 50% sans compromettre la qualité diagnostique.
- **Fondement théorique** : La CS repose sur deux concepts clés : la parcimonie du signal et l'incohérence entre la matrice d'acquisition et la base dans laquelle le signal est parcimonieux, comme les ondelettes ou la variation totale.

I.5.2 Limites et défis

Malgré ses avantages, la CS présente des limites importantes. Elle repose sur l'hypothèse que les images sont parcimonieuses, ce qui n'est pas toujours vrai pour certaines structures anatomiques complexes. Les algorithmes CS sont itératifs et demandent plus de ressources computationnelles que la FBP, ce qui peut freiner leur utilisation dans des contextes nécessitant une reconstruction quasi temps réel.

La qualité de reconstruction dépend fortement du choix de la régularisation et de l'algorithme d'optimisation. Des réglages inadéquats peuvent entraîner des artefacts, une perte de détails fins ou un lissage excessif des structures importantes, rendant l'interprétation diagnostique plus difficile.

Contexte additionnel :

- **Validation clinique :** Les images reconstruites par CS peuvent paraître différentes de celles obtenues par FBP, même lorsque les métriques quantitatives, telles que le rapport signal-sur-bruit, sont meilleures. Les radiologues doivent donc s'adapter à ce nouvel "aspect" des images.
- **Choix de la base parcimonieuse :** Le type de base choisi influence fortement la reconstruction : la variation totale favorise des contours nets, tandis que les ondelettes sont plus adaptées à la préservation des textures fines.

I.5.3 Artefacts et comportements observés

Les artefacts observés en CS sont différents de ceux classiques de la FBP. On retrouve notamment des effets de bloc ou des textures irrégulières, généralement dus à un sous-échantillonnage excessif ou à une régularisation trop forte. Les détails fins peuvent être atténués et des motifs répétitifs peuvent apparaître dans certaines zones.

Les mouvements du patient ont un impact moindre que sur la FBP, mais ils peuvent encore dégrader les reconstructions, en particulier lorsque le nombre de mesures est limité ou que les projections sont bruitées.

Contexte additionnel :

- **Artefacts de type « piqure » (staircasing) :** Typiques de la régularisation par variation totale, ces artefacts donnent un aspect en escalier aux zones de gradient doux et peuvent masquer des lésions subtiles.
- **Sensibilité aux hyperparamètres :** Contrairement à la FBP, qui ne nécessite presque aucun paramètre, la CS dépend fortement du poids de régularisation et des paramètres d'optimisation, souvent ajustés par validation croisée.

I.5.4 Stratégies pour améliorer la reconstruction

Plusieurs stratégies permettent d'atténuer les limitations et les artefacts de la CS. L'optimisation des acquisitions, notamment via un sous-échantillonnage structuré plutôt qu'aléatoire, améliore la fidélité des reconstructions. Les algorithmes itératifs peuvent être combinés avec des techniques de régularisation adaptées, comme la parcimonie dans un domaine transformé ou la minimisation de normes spécifiques, afin d'obtenir des reconstructions plus robustes.

Le post-traitement d'image, par filtrage ou amélioration adaptative du contraste, contribue également à améliorer la lisibilité et la qualité visuelle. Dans certaines modalités, comme l'IRM, des acquisitions adaptatives permettent de mieux préserver les informations structurelles tout en maintenant un niveau élevé de sous-échantillonnage.

Contexte additionnel :

- **Avancées algorithmiques :** Les méthodes d'optimisation moderne, comme les algorithmes ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers), ont amélioré la vitesse de convergence et la robustesse des reconstructions CS.
- **Acquisitions structurées :** En IRM, des schémas d'échantillonnage variables dans l'espace de Fourier (k-space) permettent de mieux préserver les basses fréquences et d'optimiser la reconstruction des hautes fréquences sous-échantillonnées.
- **Intégration multi-modale :** La CS peut être combinée avec d'autres approches, comme les modèles physiques ou les méthodes statistiques, pour renforcer la qualité des reconstructions et réduire les artefacts dans les cas difficiles.

CHAPITRE II

OUTILS MATHÉMATIQUES UTILISÉS DANS LA RECONSTRUCTION D'IMAGES CT PAR LE COMPRESSED SENSING

Un sujet très précis et intéressant ! La reconstruction d'images à partir de projections est un aspect crucial de l'imagerie médicale, en particulier dans des modalités telles que la tomodensitométrie (CT) et la tomographie par émission de positons (TEP). Le scanner de tomodensitométrie (CT) diagnostique, voir la Figure 2.1, est un véritable chef-d'œuvre de la technologie moderne et constitue un exemple positif de l'influence des forces du marché libre dans la stimulation de l'innovation. Tous les principaux fabricants de scanners CT disposent d'équipes solides de recherche et développement, qui suivent et contribuent aux travaux de recherche en science de l'imagerie en plus de leurs activités internes.

Les dispositifs CT peuvent être considérés comme la réalisation d'une caméra gigapixel en usage clinique courant. Alors qu'un scanner CT diagnostique moderne typique fournit des volumes composés de centaines d'images de coupes de taille 512×512 avec une résolution submillimétrique, les scanners micro-CT peuvent produire des volumes atteignant 2000 voxels.

Dans le cas de l'imagerie cardiaque par CT, une application qui a largement stimulé les avancées technologiques, les images volumiques peuvent être acquises avec une résolution temporelle pouvant descendre jusqu'à 100 millisecondes. La vitesse et la résolution de l'imagerie CT en font un outil indispensable pour l'imagerie cardiaque et l'évaluation des accidents vasculaires cérébraux.

Elle est utilisée de manière routinière pour le diagnostic de diverses pathologies médicales affectant l'ensemble des organes internes, et son utilisation est même envisagée comme outil de dépistage du cancer du poumon. Les recherches actuelles visent globalement à améliorer l'utilité clinique sans augmenter la dose d'irradiation de l'examen, ou à maintenir cette utilité tout en réduisant l'exposition du patient aux rayonnements ionisants.

Les méthodes analytiques directes sont l'approche historique et mathématiquement élégante des problèmes inverses linéaires [2], particulièrement en tomographie. Leur positionnement répond à un impératif de rapidité de calcul dans des applications où le temps de reconstruction est critique (imagerie médicale clinique, contrôle non destructif industriel).

II.1 Classification des approches de reconstruction

Le paysage algorithmique de la tomographie se divise principalement en trois familles, distinguées par leur traitement de l'opérateur de projection.

II.1.1 Méthodes analytiques

Les méthodes analytiques de reconstruction reposent sur une formulation mathématique explicite de l'inversion de l'opérateur direct reliant l'objet à ses projections. En tomodensitométrie (TDM), cet opérateur est étroitement lié à la transformée de Radon. En exploitant ses propriétés, ces méthodes permettent une reconstruction directe et rapide de l'image à partir des données de projection.

L'exemple le plus emblématique est la Rétroprojection Filtrée (*Filtered Backprojection*, FBP). Cette méthode analytique largement utilisée consiste à filtrer les projections avant de les rétroprojeter sur la grille de l'image. La FBP est rapide et efficace, mais elle demeure sensible au bruit et aux artefacts, en particulier lorsque le nombre de projections est limité ou que la dose d'irradiation est réduite.

a. Fondements de la tomographie assistée par ordinateur (CT)

Imaginons qu'on ait un objet opaque constitué de différents matériaux, et que l'on souhaite savoir comment ces matériaux sont répartis à l'intérieur sans l'endommager (par exemple, l'objet peut être un malade à l'intérieur du corps duquel on aimerait voir). L'une des méthodes est le scanner : on lance de fins faisceaux de rayons X à travers l'objet dans toutes les directions et on mesure quelle proportion de chaque faisceau a été absorbée.

La tomographie est un procédé permettant de créer l'image d'un objet en deux ou trois dimensions à partir de multiples "coupes" unidimensionnelles (Voir Figure 2.1). Dans un scanner CT, ces coupes sont définies par des faisceaux de rayons X parallèles projetés à travers l'objet. En changeant l'orientation de la source et du détecteur (l'angle θ), on obtient des informations sur la densité interne sous différents angles.

Le fonctionnement repose sur la mesure de l'intensité des rayons X :

- **Perte d'énergie** : Lorsqu'un rayon X traverse un objet, il perd une partie de son énergie, ce qui réduit son intensité
- **Coefficient d'atténuation** : Cette perte dépend de la densité du milieu. Les objets denses (comme l'os) provoquent une variation d'intensité plus importante que les tissus moins denses. Cette caractéristique est appelée le coefficient d'atténuation. L'atténuation mesurée pour chaque faisceau, c'est-à-dire la différence entre l'intensité incidente et l'intensité détectée, correspond à une intégrale de ligne de la structure interne de l'objet. Cette relation entre l'objet et l'ensemble de ses intégrales de ligne est formalisée par la transformée de Radon. La reconstruction de l'image originale repose alors sur l'inversion de cette transformée, qui constitue le fondement théorique de la tomographie assistée par ordinateur
- **Mesures** : Le scanner enregistre l'intensité initiale émise (I_0) et l'intensité finale reçue (I_1) pour chaque faisceau afin de déduire la densité globale rencontrée sur le trajet



Figure 2.1: Principe de fonctionnement d'un appareil de tomodensitométrie

D'un point de vue mathématique, l'ensemble des mesures acquises par le scanner correspond à l'application de la transformée de Radon à la fonction d'atténuation de l'objet. Le problème fondamental de la tomographie consiste alors à reconstruire cette fonction d'atténuation à partir de ses intégrales de ligne, c'est-à-dire à inverser la transformée de Radon. Pour une fonction d'atténuation bidimensionnelle $A(x, y)$, la transformée de Radon est définie par :

$$\mathcal{R}\{A\}(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}^2} A(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy, \quad (2.1)$$

où θ représente l'angle de projection, s la position du détecteur, et $\delta(\cdot)$ la distribution de Dirac. Cette expression formalise le fait que chaque projection correspond à une intégrale de la fonction d'atténuation le long d'une droite.

b. Loi de Beer–Lambert et modélisation de l'atténuation des rayons X dans l'objet

L'objet initial, considéré comme plan, est donné par une fonction d'atténuation qui, à chaque point du plan de coordonnées (x, y) , va associer un nombre $A(x, y)$ correspondant à la proportion des rayons qui sont absorbés par le matériau en ce point : en un point d'un os, A sera grand, et en un point de l'air, il sera faible.

En supposant dans un premier temps que la fonction d'atténuation de notre objet est constante égale à a , pour tout rayon lumineux traversant notre objet, pour tout couple de points d'abscisses x et $x + l$ sur ce rayon, les abscisses étant croissantes dans le sens du rayon, le rapport d'intensités lumineuses $\frac{I(x + l)}{I(x)}$ ne dépend que de a et de la longueur l traversée et pas du point x (position).

En omettant provisoirement la dépendance par rapport à a et en notant alors $p(l)$ ce rapport $\frac{I(x+l)}{I(x)}$ qui correspond à la proportion de photons non absorbés sur une longueur l à partir d'un point x , on voit que p vérifie la propriété

$$p(l_1 + l_2) = p(l_1)p(l_2)$$

En Effet, la proportion de photons non absorbés sur une longueur l_2 à partir d'un point $x + l_1$ est $\frac{I(x + l_1 + l_2)}{I(x + l_1)} = p(l_2)$. Donc $p(l_1)p(l_2) = \frac{I(x + l_1)}{I(x)} \times \frac{I(x + l_1 + l_2)}{I(x + l_1)} = p(l_1 + l_2)$. Ceci traduit juste le fait simple suivant : les proportions de photons non absorbés se multiplient lors de traversées successives de milieux absorbants. La bonne définition de l'atténuation est précisément :

$$p(l) = e^{-al} \quad (2.2)$$

Autrement dit, pour tout x et $x + l$ sur un axe :

$$I(x + l) = I(x)e^{-al} \quad (2.3)$$

Notons que si le phénomène physique d'atténuation est spécifique de la tomographie à rayons X, les méthodes de reconstruction sont en revanche plus générales et sont appliquées également dans d'autres systèmes d'imagerie, dans lesquelles des équations analogues expriment une fonction à reconstruire en fonction de projections. C'est le cas par exemple de la TEP utilisée en médecine nucléaire.

c. Reconstruction d'images en tomodensitométrie : inversion de Fourier, rétroprojection et FBP

À partir de la modélisation physique de l'atténuation et de la formulation mathématique de la transformée de Radon, plusieurs méthodes analytiques ont été proposées pour résoudre le problème inverse de la reconstruction tomographique. La reconstruction d'images en tomodensitométrie à partir des projections aux rayons X repose classiquement sur trois grandes approches analytiques.

La première est l'inversion directe de Fourier, fondée sur le théorème de la coupe de Fourier, selon lequel chaque projection acquise à un angle donné correspond à une droite dans l'espace fréquentiel bidimensionnel de l'objet. En théorie, l'acquisition d'un nombre suffisant de projections permet de remplir cet espace fréquentiel et d'obtenir l'image par transformation de Fourier inverse. Toutefois, la nécessité de rééchantillonner des données organisées sur une grille polaire vers une grille cartésienne rend cette méthode complexe et peu utilisée en pratique.

La seconde approche consiste à appliquer une rétroprojection directe des projections, ce qui conduit à une image floue, équivalente à la convolution de l'image originale avec un noyau de type $1/\sqrt{x^2 + y^2}$. La restauration de l'image nécessite alors une déconvolution

bidimensionnelle, opération coûteuse en temps de calcul.

La troisième méthode, la FBP, constitue l'approche la plus répandue en pratique. Elle repose sur le filtrage préalable de chaque projection unidimensionnelle par un filtre rampe dans le domaine fréquentiel, avant la rétroprojection. Ce traitement permet de compenser le flou inhérent à la rétroprojection ([3]) tout en conservant une complexité de calcul réduite, puisque le filtrage est effectué en une dimension. Ces méthodes analytiques supposent néanmoins la disponibilité d'un grand nombre de projections uniformément réparties, hypothèse qui n'est plus toujours valide dans des contextes modernes tels que l'imagerie à faible dose ou à angles limités, où des approches itératives basées sur le *Compressed Sensing* sont alors privilégiées.

II.1.2 Méthodes itératives et Compressed Sensing

La réduction des données de projection et de la dose de rayonnement en tomodensitométrie n'est pas simplement une préférence de calcul ; elle est dictée par la sécurité clinique, l'efficacité opérationnelle et les contraintes physiques des systèmes d'imagerie par rayons X . Cette approche se justifie rigoureusement des points de vue médical, physique et systémique.

En premier lieu, la sécurité des patients est primordiale : les rayons X ionisants utilisés en CT peuvent endommager l'ADN et augmenter le risque de cancer radio-induit, en particulier chez les populations pédiatriques ou lors d'expositions répétées. Le modèle linéaire sans seuil (LNT), pierre angulaire de la radioprotection, postule que toute réduction de dose diminue proportionnellement le risque à long terme. En pratique clinique moderne, où les examens CT se multiplient (dépistage, suivi longitudinal, planification radiothérapeutique), la réduction de la dose par acquisition est essentielle pour limiter l'exposition cumulative.

D'un point de vue physique, la dose est approximativement proportionnelle au nombre de projections et au produit courant-temps du tube. Réduire l'un ou l'autre diminue donc directement l'exposition, mais augmente le bruit quantique des données, rendant la reconstruction plus difficile. Opérationnellement, un plus petit nombre de projections raccourcit la durée d'acquisition, réduisant les artefacts de mouvement et améliorant le débit patient. Pour les populations sensibles (enfants) ou dans des contextes d'imagerie répétée (radiothérapie guidée par l'image), cette réduction devient une obligation clinique et éthique, conforme au principe ALARA (As Low As Reasonably Achievable). Le défi technique réside dans la résolution du problème de reconstruction sous-déterminé qui en résulte, nécessitant des méthodes avancées comme la reconstruction itérative ou le Compressed Sensing [6] pour préserver la qualité diagnostique malgré la réduction des données.

a. Formulation générale du problème inverse

Dans ce contexte, la reconstruction tomographique peut être formulée comme un *problème inverse régularisé*. De manière générale, un problème inverse [4] consiste à reconstruire un modèle à partir de mesures indirectes issues d'un processus physique connu. Le *problème direct* décrit la formation des données de projection à partir de l'image inconnue, tandis que le *problème inverse* vise à retrouver cette image à partir des mesures acquises.

En tomodensitométrie discrète, la relation entre l'image à reconstruire et les données de

projection peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire :

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.4)$$

où \mathbf{f} représente l'image vectorisée, \mathbf{g} les données de projection (sinogramme), \mathbf{H} la matrice du système modélisant la transformée de Radon discrète [5], et $\boldsymbol{\varepsilon}$ un terme représentant le bruit de mesure.

Dans un cadre idéal, l'opérateur \mathbf{H} serait parfaitement inversible et les données seraient complètes et exemptes de bruit. En pratique, ces conditions ne sont jamais réunies. Le problème inverse est alors généralement *mal posé au sens de Hadamard*, en raison d'un manque d'unicité et surtout d'un fort manque de stabilité : de faibles perturbations du bruit peuvent engendrer de grandes erreurs dans l'image reconstruite. Les méthodes itératives abordent ce problème en recherchant une solution régularisée, obtenue par la minimisation d'une fonction de coût combinant un terme d'adéquation aux données et un terme de régularisation incorporant des connaissances *a priori* sur l'image.

b. Principe du Compressed Sensing

Le Compressed Sensing fournit un cadre mathématique rigoureux pour la reconstruction de signaux parcimonieux ou compressibles à partir de mesures linéaires sous-échantillonnées, sous certaines conditions sur l'opérateur de mesure. Il permet de résoudre des problèmes inverses sous-déterminés au moyen de méthodes d'optimisation favorisant la parcimonie ou d'algorithmes gloutons, avec des garanties théoriques de stabilité et de robustesse au bruit.

Dans le cadre de l'imagerie tomographique, le Compressed Sensing exploite l'idée que de nombreuses images médicales admettent une représentation parcimonieuse dans une base ou un dictionnaire approprié, tel que les ondelettes ou le gradient de l'image. La reconstruction est alors formulée comme un problème d'optimisation sous contrainte :

$$\min_{\mathbf{f}} \|\Psi\mathbf{f}\|_1 \quad \text{sous la contrainte} \quad \|\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2 \leq \delta, \quad (2.5)$$

où Ψ désigne un opérateur favorisant la parcimonie et δ un paramètre lié au niveau de bruit des données.

Cette formulation permet de reconstruire des images de qualité acceptable à partir d'un nombre de projections bien inférieur à celui requis par les méthodes analytiques classiques, tout en assurant une certaine stabilité du problème inverse.

c. Régularisation et variation totale

Une régularisation particulièrement adaptée à l'imagerie tomographique est la variation totale (TV) [7], qui favorise les images composées de régions quasi uniformes séparées par des discontinuités nettes. La reconstruction TV est généralement formulée comme :

$$\min_{\mathbf{f}} \frac{1}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2^2 + \lambda \|\nabla\mathbf{f}\|_1, \quad (2.6)$$

où ∇ représente l'opérateur gradient discret et λ un paramètre de régularisation contrôlant le compromis entre fidélité aux données et stabilisation du problème inverse.

Cette approche permet de réduire efficacement le bruit tout en préservant les contours, qualité essentielle pour l'analyse diagnostique.

d. Algorithmes itératifs

La résolution des problèmes d'optimisation issus du Compressed Sensing et des méthodes variationnelles repose sur des algorithmes itératifs, tels que les méthodes de descente de gradient proximal, l'algorithme ISTA/FISTA, l'ADMM ou encore les méthodes de type primal-dual. Ces algorithmes procèdent par mises à jour successives de l'image estimée, alternant entre la réduction de l'erreur de projection et l'application de la régularisation.

Bien que plus coûteuses en temps de calcul que les méthodes analytiques, les méthodes itératives offrent une qualité de reconstruction supérieure dans les scénarios de données limitées et constituent aujourd'hui un axe majeur de recherche et de développement en tomodensitométrie moderne.

e. Comparaison avec les méthodes analytiques

En résumé, les méthodes analytiques privilégient la rapidité et la simplicité au prix d'une sensibilité accrue au bruit et aux artefacts, tandis que les méthodes itératives et basées sur le Compressed Sensing s'inscrivent pleinement dans le cadre des problèmes inverses régularisés. Elles exploitent des informations *a priori* et des contraintes de parcimonie pour améliorer la stabilité et la qualité de reconstruction dans des conditions d'acquisition dégradées, répondant ainsi aux exigences de sécurité clinique et d'efficacité opérationnelle.

II.2 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier joue un rôle fondamental dans la reconstruction d'images en tomodensitométrie (CT), en permettant une analyse fréquentielle de l'image et des projections. Cette décomposition facilite la distinction entre les structures globales, associées aux basses fréquences, et les détails fins, portés par les hautes fréquences, contribuant ainsi à une reconstruction plus fidèle. Son utilisation dans des algorithmes analytiques tels que la FBP permet de formuler le problème dans le domaine fréquentiel, où les opérations de filtrage sont plus simples et plus efficaces à mettre en œuvre numériquement. En particulier, l'application d'un filtre rampe aux projections unidimensionnelles permet de compenser le flou inhérent à la rétroprojection directe et de réduire des artefacts caractéristiques, tels que l'effet d'étoile. En pratique, les données d'atténuation, organisées sous forme de sinogramme, sont transformées dans le domaine fréquentiel afin de contrôler précisément leur contenu spectral avant la reconstruction, ce qui conduit à une amélioration globale de la qualité de l'image reconstruite.

Définition 2.1 (Transformée de Fourier). Soit f une fonction absolument intégrable sur \mathbb{R} . La transformée de Fourier de f , notée $\mathcal{F}f$, est définie pour tout nombre réel ξ par

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

La transformée de Fourier est fréquemment utilisée en analyse du signal et permet de transformer une fonction du temps en une fonction de la fréquence ; la variable x représente le temps en secondes et la variable ξ représente la fréquence de la fonction en hertz. En fait, les transformées de Fourier indiquent des informations sur le signal. Elles montrent les détails concernant la composante de fréquence qui apparaît ou est présente dans le signal. Elles ne donnent pas de détails sur la valeur exacte de la fréquence présente

à cet instant précis.

Il existe une définition alternative faisant intervenir la fréquence angulaire $w = 2\pi\xi$, ce qui conduit à l'expression suivante.

$$(\mathcal{F}f)(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$$

Comme pour la transformée de Radon, nous allons énumérer plusieurs propriétés de la transformée de Fourier.

Proposition 2.1. Pour des constantes réelles α et β , et des fonctions absolument intégrables f et g , on a:

- (i) Linéarité : $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(w) = \alpha \mathcal{F}f(w) + \beta \mathcal{F}g(w)$
- (ii) $\mathcal{F}f(w) < +\infty$

Définition 2.2 (Transformée de Fourier inverse). Soit f une fonction absolument intégrable. La transformée de Fourier inverse de f , notée $\mathcal{F}^{-1}f$, évaluée en x , est définie par

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(w) e^{iwx} dw. \quad (2.7)$$

Ceci nous conduit immédiatement au théorème suivant.

Proposition 2.2 (Théorème d'inversion de Fourier). Soit f une fonction absolument intégrable sur \mathbb{R} . Le théorème d'inversion de Fourier affirme que, pour tout x ,

$$(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})f(x) = f(x)$$

Jusqu'à présent, nous n'avons abordé la transformée de Fourier que dans une dimension. Il existe des définitions correspondantes en dimensions supérieures, mais, pour nos besoins, nous n'utiliserons que les analogues en deux dimensions.

Définition 2.3 (Transformée de Fourier bidimensionnelle). Soit g une fonction absolument intégrable définie sur \mathbb{R}^2 . La transformée de Fourier bidimensionnelle de g , notée \mathcal{F}_2g , est définie pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$(\mathcal{F}_2g)(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i(xX+yY)} dx dy. \quad (2.8)$$

De manière similaire, nous définissons la transformée de Fourier inverse sur \mathbb{R}^2 .

Définition 2.4 (Transformée de Fourier bidimensionnelle inverse). Soit g une fonction absolument intégrable définie sur \mathbb{R}^2 . La transformée de Fourier bidimensionnelle inverse de g , évaluée en (x, y) et notée $\mathcal{F}_2^{-1}g(x, y)$, est donnée par

$$(\mathcal{F}_2^{-1}g)(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(X, Y) e^{i(xX+yY)} dX dY.$$

II.2.1 Transformée de Fourier à Court Terme (STFT)

La STFT est plus avantageuse que la transformée de Fourier dans le sens où elle introduit la fenêtre glissante. En fait, la fenêtre sert à extraire une petite partie du signal donné. Mathématiquement, elle est représentée par :

$$Sf(u, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \omega(t - u) \exp(-j\xi t) dt \quad (3) \quad (2.9)$$

II.3 Convolution

La convolution joue un rôle clé dans la reconstruction d'image par rétroprojection filtrée (FBP), car elle intervient directement dans l'étape de filtrage des projections. Avant la rétroprojection, chaque projection mesurée est convoluée avec un filtre adapté afin de compenser le flou intrinsèque introduit par la rétroprojection simple. Cette opération permet de renforcer les hautes fréquences et d'améliorer la résolution de l'image reconstruite.

Définition 8.1. Pour deux fonctions intégrables f et g définies sur \mathbb{R} , nous définissons la convolution de f et g , notée $f \star g$, par

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x - t) dt,$$

où $x \in \mathbb{R}$.

Nous pouvons facilement étendre cette définition à l'espace bidimensionnel. Pour les fonctions polaires, nous prenons uniquement l'intégrale par rapport à la variable radiale, tandis que pour les fonctions cartésiennes nous intégrons par rapport aux deux variables. Les définitions explicites sont données ci-dessous.

Définition 2.1. Pour des fonctions polaires intégrables $f(t, \theta)$ et $g(t, \theta)$, nous définissons la convolution de f et g par

$$(f \star g)(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, \theta) g(t - s, \theta) ds.$$

Pour des fonctions intégrables F et G sur \mathbb{R}^2 , nous définissons la convolution de F et G par

$$(F \star G)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t) G(x - s, y - t) ds dt.$$

La convolution est une méthode mathématique permettant de moyenner une fonction f à l'aide du déplacement d'une autre fonction g . Dans la convolution $f \star g$, la fonction g est translatée à travers la fonction f , et la fonction résultante dépend de la zone de recouvrement au cours de cette translation. En un certain sens, on peut voir g comme un filtre utilisé pour effectuer une moyenne de f sur un intervalle donné. La fonction de filtrage agit ainsi comme un lisseur pour les données bruitées fournies par la fonction originale.

Proposition 2.1. Pour des fonctions intégrables f, g, h définies sur \mathbb{R} et des constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- (i) $f \star g = g \star f$ (commutativité),
- (ii) $f \star (\alpha g + \beta h) = \alpha(f \star g) + \beta(f \star h)$ (linéarité).
- (iii) $\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f \star g)$

II.4 Transformée de Radon

L'hypothèse fondamentale est que le détecteur mesure l'atténuation intégrée le long d'un rayon.

Définition 2.1. Pour un faisceau de rayons \mathbf{X} d'énergie \mathbf{E} donnée et un taux de propagation des photons $\mathbf{N}(x)$, l'intensité du faisceau $\mathbf{I}(x)$ à une distance x de l'origine est définie comme

$$\mathbf{I}(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{E}$$

Définition 2.2. La proportion de photons absorbés par millimètre de substance à une distance x de l'origine est appelée le coefficient d'atténuation $\mathbf{A}(x)$ du milieu.

Nous connaissons les intensités initiale et finale, I_0 et I_1 d'un faisceau unique. L'objectif est d'utiliser ces intensités pour déterminer le coefficient d'atténuation le long du trajet du faisceau. Heureusement, la loi de Beer-Lambert établit une relation entre ces deux grandeurs.

Définition 2.3 (Loi de Beer-Lambert). Pour un faisceau de rayons \mathbf{X} monochromatique, non réfractif et de largeur nulle, traversant un milieu homogène sur une distance x à partir de l'origine, l'intensité $I(x)$ est donnée par

$$I(x) = I_0 e^{-\mathbf{A}(x)x} \quad (2.10)$$

En l'état, cette équation ne nous est pas particulièrement utile. Elle exprime le coefficient d'atténuation en un point donné en fonction de l'intensité en ce point, alors que nous ne connaissons la valeur de l'intensité qu'en des points situés à l'extérieur de l'objet. Ce que nous cherchons réellement est une relation entre le coefficient d'atténuation à l'intérieur de l'objet et la variation de l'intensité du faisceau. Pour cela, nous allons manipuler légèrement l'équation (2.10).

En passant à la dérivée de la loi de Beer-Lambert, nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{dI}{dx} = -\mathbf{A}(x)I(x)$$

Soit $I(x_0) = I_0$ la valeur initiale de l'intensité du faisceau et $I(x_1) = I_1$ la valeur finale de l'intensité du faisceau. En utilisant cette relation, nous obtenons la relation suivante :

$$-\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{A}(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dI}{I(x)} = \ln\left(\frac{I_1}{I_0}\right)$$

ou encore

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{A}(x)dx = \ln\left(\frac{I_0}{I_1}\right) \quad (2.11)$$

$\ln(\frac{I_0}{I_1})$ désigne les données de projection, communément appelées le sinogramme, qui résultent de l'acquisition des projections tomographiques. Nous sommes maintenant prêts à introduire des outils mathématiques — en particulier la transformée de Radon — qui joueront un rôle central dans la détermination du coefficient d'atténuation dans l'équation (2.10).

L'écriture sous forme normale d'une équation de droite joue un rôle clé dans la transformée de Radon, car elle permet une paramétrisation naturelle et complète de toutes les droites du plan, ce qui est essentiel pour la définition mathématique et le calcul pratique de cette transformation.

Cette équation sous forme normale fournit :

- (i) Une paramétrisation unique et continue de toutes les droites du plan. La forme normale (ou forme normale de Hesse) de l'équation de la droite s'écrit :

$$x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = \rho$$

où ρ est la distance par rapport à l'origine et θ est l'angle par rapport à l'axe des abscisses.

- (ii) Une interprétation géométrique claire de ρ et θ . Chaque droite du plan correspond à un unique couple (ρ, θ) . Cette paramétrisation évite les redondances et garantit qu'on parcourt toutes les droites une et une seule fois (à une convention près).
- (iii) Une mesure naturelle sur l'espace des droites, utilisée dans les formules d'inversion.
- (iv) Un formalisme adapté au théorème de coupe, reliant transformée de Radon et transformée de Fourier 2D.
- (v) Une mesure naturelle sur l'espace des droites, utilisée dans les formules d'inversion.

II.4.1 Construction de l'orientation et de la distance

Nous connaissons tous l'idée qu'une droite l dans \mathbb{R}^2 peut être représentée par l'équation

$$ax + by = c$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a^2 + b^2 \neq 0$.

On peut alors écrire cette équation d'une droite sous la forme

$$w_1 x + w_2 y = t$$

où $\mathbf{w} := (w_1, w_2) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ et $t = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, que nous pouvons voir comme un point situé sur le cercle unitaire, pour

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

Cela implique que $\mathbf{w} := (\cos(\theta), \sin(\theta))$ est un vecteur normal unitaire, $\theta \in [0, 2\pi)$ représente l'orientation, et t est exactement la distance à l'origine. On a

$$x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = t$$

Notez que dans les équations ci-dessus, t et θ sont fixes et déterminent une droite spécifique l dans le plan. On peut donc dire que t et θ paramètrent une droite $l_{t,\theta}$ et que \mathbf{z} détermine des points spécifiques sur cette droite l . Ou encore

$$l_{t,\theta} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : \langle \mathbf{z}, (\cos \theta, \sin \theta) \rangle = t\}.$$

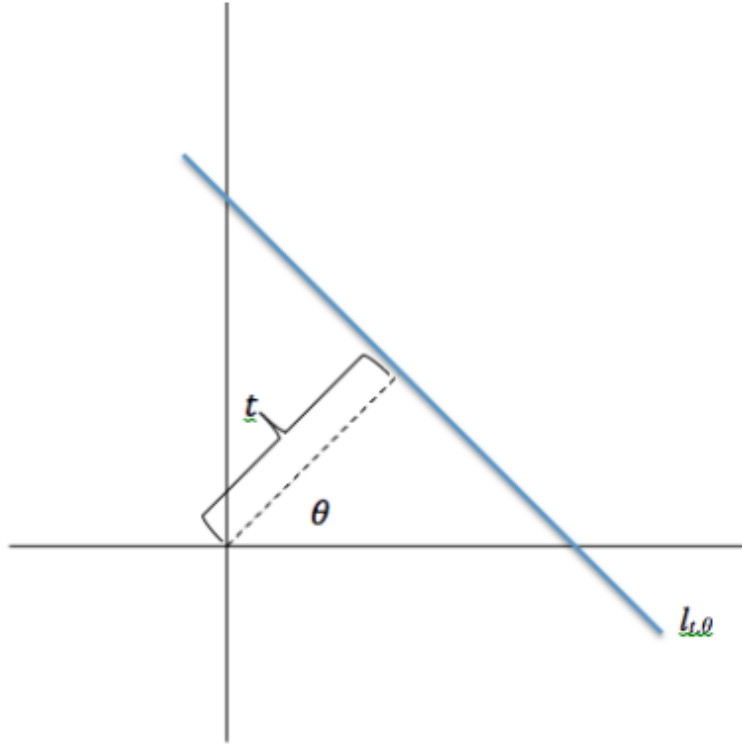


Figure 2.2: paramétrisation d'une droite $l_{t,\theta}$ par t et θ

On voit que $(t \cos(\theta), t \sin(\theta))$ est un point situé sur la droite $l_{t,\theta}$ (Figure 2.2) et $(-\sin(\theta), \cos(\theta))$ est un vecteur perpendiculaire au vecteur unitaire \mathbf{w} .

En géométrie affine élémentaire, une ligne est un point plus une direction. Par conséquent, nous pouvons décrire un point particulier (x, y) sur $l_{t,\theta}$ en termes de nombre réel s comme suit :

$$l_{t,\theta} = \{(t \cos(\theta) - s \sin(\theta), t \sin(\theta) + s \cos(\theta)); s \in \mathbb{R}\} \quad (2.12)$$

Définition 2.4 (Transformée de Radon). Soit $f(t, \theta)$ une fonction définie sur \mathbb{R}^2 à support compact. La transformée de Radon de f , notée $\mathcal{R}f$, est définie pour $t \in \mathbb{R}$ et $\theta \in (0, 2\pi]$ par

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(s), y(s)) ds$$

La transformée de Radon permet de déterminer la densité totale d'une fonction f le long d'une droite donnée l . Cette droite l est définie par un angle θ par rapport à l'axe x et une distance t par rapport à l'origine. Comme illustré à la Figure 2.3, si l'on calcule la transformée de Radon le long de plusieurs droites à des angles différents (ici θ_1 et θ_2), on

peut déterminer plusieurs fonctions de densité pour notre objet. Intuitivement, on peut interpréter la transformée de Radon comme une version « étalée » de notre objet initial. Supposons que la région en forme de tache représentée à la Figure 2.3 soit une tache d'encre; si l'on étale cette tache le long de lignes de direction θ_1 , on s'attend à ce que les régions les plus larges de la tache correspondent à des zones plus étendues que les régions plus petites, ce qui correspond exactement à ce que l'on observe.

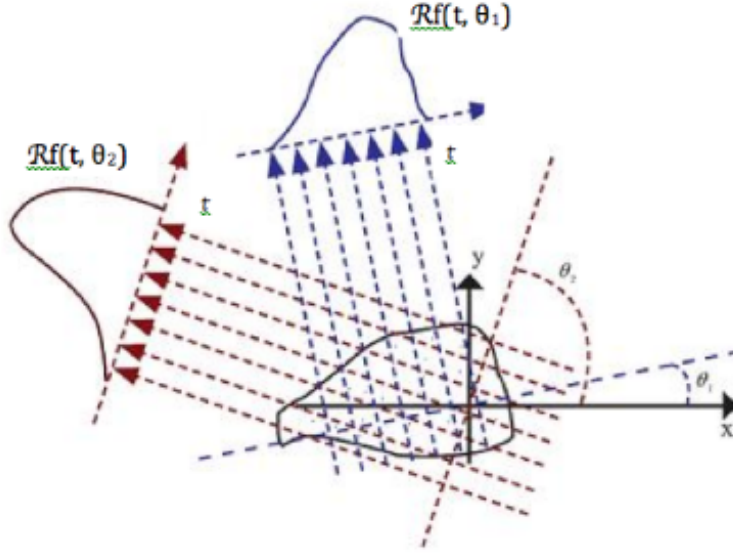


Figure 2.3: Transformée de Radon pour θ_1 et θ_2 .

L'intégrale $\mathcal{R}f(t, \theta)$ représente le membre gauche de l'équation (2.11). Rappelons que, dans cette équation, $\mathbf{A}(x)$ est inconnue et que $\ln(\frac{I_1}{I_0})$ correspond à une information mesurée. Autrement dit, $\ln(\frac{I_1}{I_0})$ est la transformée de Radon, et la transformée de Radon représente donc des données connues issues de la mesure.

L'objectif est maintenant de trouver une formule d'inversion de la transformée de Radon qui nous permettra de reconstruire la fonction initiale f (ou, dans le contexte de l'imagerie médicale, $\mathbf{A}(x)$). Pour ce faire, il sera utile de rappeler plusieurs propriétés de la transformée de Radon.

Proposition 2.1. Soit α et β deux réels et f et g deux fonctions continues sur \mathbb{R}^2 à support compact. On a

- (i) Linéarité : $\mathcal{R}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{R}f + \beta \mathcal{R}g$
- (ii) Parité: $\mathcal{R}f(-t, -\theta) = \mathcal{R}f(t, \theta)$
- (iii) $\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(s), y(s)) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos(\theta) - s \sin(\theta), t \sin(\theta) + s \cos(\theta)) ds$

Nous définissons en outre le domaine naturel de la transformée de Radon comme l'ensemble des fonctions f sur \mathbb{R}^2 telles que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x(s), y(s))| ds < \infty$$

II.4.2 Théorème de la Coupe Centrale

Le théorème de la coupe centrale, également appelé théorème de projection-transforme de Fourier ou théorème de Fourier-Slice, est un résultat fondamental en traitement d'image et en tomographie. Il établit un lien profond entre la transformée de Radon (utilisée pour décrire les projections d'un objet) et la transformée de Fourier (utilisée pour analyser les fréquences spatiales). Ce théorème constitue la pierre angulaire mathématique de la plupart des méthodes de reconstruction tomographique moderne.

Proposition 2.2. Soit g une fonction absolument intégrale sur \mathbb{R}^2 . Le théorème de la coupe centrale affirme que, pour tout $S \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, on a :

$$\mathcal{F}_2 g(S \cos(\theta), S \sin(\theta)) = \mathcal{F}(\mathcal{R}g)(S, \theta)$$

Preuve: En utilisant la définition de la transformée de Fourier bidimensionnelle (2.8) on obtient

$$\mathcal{F}_2 g(S \cos(\theta), S \sin(\theta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-iS(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} dx dy$$

Nous effectuons maintenant un changement de variables conformément au système de coordonnées que nous avons défini à la *Construction de l'orientation et de la distance*. Rappelons que, lors de la paramétrisation de la droite $\ell_{t,\theta}$, nous avons montré que, pour $s \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$x(s) = t \cos \theta - s \sin \theta, \quad y(s) = t \sin \theta + s \cos \theta, \quad t = x \cos \theta + y \sin \theta.$$

En examinant le déterminant du Jacobien associé à $x(s)$ et $y(s)$, on obtient :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} = 1.$$

Nous en déduisons que

$$ds dt = dx dy.$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-iS(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) e^{-iSt} ds dt.$$

Comme e^{-iSt} ne dépend pas de la variable s , nous pouvons réarranger l'intégrale précédente de la manière suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \right) e^{-iSt} dt.$$

L'intégrale intérieure est exactement la transformée de Radon de f , évaluée en (t, θ) , ce qui implique que l'expression précédente devient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{R}g(t, \theta)) e^{-iSt} dt.$$

Cette dernière intégrale n'est autre que la transformée de Fourier de $\mathcal{R}g(S, \theta)$, ce qui conclut la démonstration. \square

II.4.3 Rétroprojection filtrée (FBP)

Nous sommes maintenant enfin prêts à effectuer une première tentative pour retrouver la fonction de coefficient d'atténuation. Rappelons que, d'un point de vue physique, la transformée de Radon $\mathcal{R}f(t, \theta)$ nous donne la densité totale de l'objet f le long d'une droite $\ell_{t, \theta}$. Nous avons déterminé cette densité en mesurant les intensités initiale et finale d'un faisceau de rayons \mathbf{X} traversant l'objet le long de cette droite. En procédant ainsi pour plusieurs droites différentes, nous sommes capables de reconstruire une coupe unique de l'objet initial, et en faisant varier l'angle θ de ces rayons \mathbf{X} , nous pouvons définir de nombreuses coupes.

Si nous sommes capables, d'une certaine manière, de « rétroprojeter » ces densités sur le plan, nous pourrions peut-être reconstituer l'objet initial. Intuitivement, on peut interpréter ce processus comme le fait de prendre les données du sinogramme et de les « déflouter » pour les ramener dans le plan.

Définition 2.5. Soit $h = h(t, \theta)$. On définit la *rétroprojection*, notée $\mathcal{B}h$, en un point (x, y) par :

$$\mathcal{B}h(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta.$$

En appliquant cette formule de rétroprojection à la transformée de Radon, on obtient :

$$\mathcal{B}\mathcal{R}f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{R}f(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta. \quad (2.13)$$

Nous sommes capables d'effectuer la rétroprojection sur les coupes que nous avons mesurées. Comme illustré à la Figure 2.4, effectuer une rétroprojection selon seulement quelques directions θ constitue une méthode extrêmement imprécise pour reconstituer ne serait-ce qu'un objet simple. Toutefois, même si nous augmentons de manière significative le nombre de rétroprojections (par exemple jusqu'à 1000 directions), il subsiste encore une quantité importante de bruit qui brouille l'image reconstruite. En réalité, quel que soit le nombre de directions selon lesquelles nous tentons d'effectuer la rétroprojection, nous ne serons jamais capables de reconstruire parfaitement l'image à l'aide de la formule de rétroprojection donnée par l'équation (2.13). Pour que ce procédé soit réellement utile, il est nécessaire de dériver une méthode permettant de filtrer une partie du bruit que la formule de rétroprojection semble introduire dans l'image, afin d'obtenir une représentation plus lisse de l'objet.

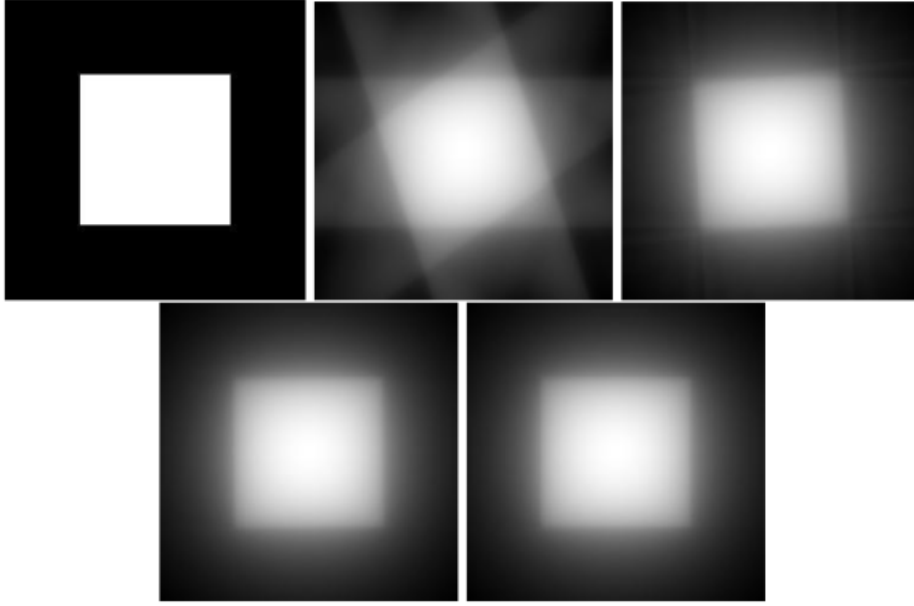


Figure 2.4: Retroprojection d'un carré dans 5, 25, 100 et 1000 directions

Dans ce but, nous définissons une formule de *rétroprojection filtrée*.

Proposition 2.3. Soit f une fonction absolument intégrable définie sur \mathbb{R}^2 . Alors,

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B} \{ \mathcal{F}^{-1} [|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)] \} (x, y). \quad (2.14)$$

Démonstration. Nous commençons par rappeler que, pour la transformée de Fourier bidimensionnelle et son inverse, on a :

$$f(x, y) = \mathcal{F}_2^{-1} \mathcal{F}_2 f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2 f(X, Y) e^{i(Xx+Yy)} dX dY. \quad (2.15)$$

Nous allons maintenant effectuer un changement de variables des coordonnées cartésiennes (X, Y) vers les coordonnées polaires (S, θ) , définies par

$$X = S \cos \theta, \quad Y = S \sin \theta,$$

où $S \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, \pi]$. Ce changement de variables conduit au déterminant jacobien suivant :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial S} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial S} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = |S|$$

Ce qui nous dit que $dX dY = |S| dS d\theta$. En incorporant ce nouveau changement de variables, l'équation (2.15) devient :

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2 f(S \cos \theta, S \sin \theta) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS d\theta.$$

Et en utilisant le théorème de la tranche centrale, nous voyons que l'équation ci-dessus est en fait égale à

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}(\mathcal{R}f(S, \theta)) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS d\theta. \quad (2.16)$$

Prenons maintenant un regard plus attentif sur l'intégrale intérieure de l'équation (2.16) et en utilisant la définition de la Transformée de Fourier inverse, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}(\mathcal{R}f(S, \theta)) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS &= 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}(\mathcal{R}f(S, \theta)) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS \right) \\ &= 2\pi \mathcal{F}^{-1}(|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta))(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \end{aligned}$$

Autrement dit, l'intégrale intérieure de l'équation (7.4) est égale à 2π fois l'inverse de la transformée de Fourier de $|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)$ au point $(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta)$. Nous pouvons alors voir que l'équation (7.4) est en fait égale à

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{F}^{-1}(|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta))(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta.$$

Finalement, nous constatons que l'intégrale ci-dessus est égale à $\frac{1}{2}$ de la rétroprojection donnée dans la définition (2.13) pour $\mathcal{F}^{-1}[|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)]$. Nous simplifions donc l'équation précédente pour obtenir

$$\frac{1}{2} \mathcal{B} \left\{ \mathcal{F}^{-1}[|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f(S, \theta))] \right\} (x, y).$$

Ce qui nous conduit à la conclusion souhaitée :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B} \left\{ \mathcal{F}^{-1}[|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f(S, \theta))] \right\} (x, y).$$

□

Le facteur important dans cette formule est le multiplicateur $|S|$ qui apparaît entre la transformée de Fourier et son inverse. Sans ce facteur, ces deux termes s'annuleraient mutuellement et nous nous retrouverions avec la formule standard de rétroprojection pour la transformée de Radon que nous avons rencontrée précédemment et qui, comme nous l'avons vu, ne nous donne pas directement $f(x, y)$. Nous appelons ce $|S|$ supplémentaire un **filtre** de la transformée de Radon, ce qui nous donne le nom de la formule de **rétroprojection filtrée**.

Proposition 2.4. Soit f et g deux fonctions intégrables définies sur \mathbb{R} , alors

$$(\mathcal{B}g \star f)(X, Y) = \mathcal{B}(g \star \mathcal{R}f)(X, Y)$$

Considérons maintenant la relation (2.14) et supposons qu'il existe une fonction, notée $\varphi(t)$, dont la transformée de Fourier soit égale à notre facteur de filtrage $|S|$. Autrement dit, supposons qu'il existe une fonction $\varphi(t)$ telle que

$$\mathcal{F}\varphi(S) = |S|.$$

Plus simplement, supposons que nous connaissions une fonction dont la transformée de Fourier est égale à la fonction valeur absolue. Nous pourrions alors réécrire la rétroprojection sous la forme suivante :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B} \{ \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F} \varphi \cdot \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)] \} (x, y). \quad (2.17)$$

Cependant, le membre de droite de l'équation (2.17) contient un produit de transformées de Fourier, que nous savons être égal à la convolution des fonctions transformées

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B} \{ \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F}(\varphi \star \mathcal{R}f)(S, \theta)] \} (x, y).$$

Mais ceci n'est rien d'autre que la transformée de Fourier inverse de la transformée de Fourier, ce qui nous ramène à la fonction de départ. Cela nous conduit à la formule de rétroprojection filtrée beaucoup plus simple :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B}(\varphi \star \mathcal{R}f)(x, y). \quad (2.18)$$

L'équation (2.18) est bien plus élégante que notre formule initiale de rétroprojection filtrée et ne semble pas difficile à appliquer. Physiquement parlant, $\mathcal{R}f$ représente nos données mesurées et l'équation (2.18) requiert simplement de les filtrer à l'aide de notre nouvelle fonction φ , puis d'appliquer la formule de rétroprojection, qui est une intégrale relativement simple.

Malheureusement, il n'existe pas de fonction φ dont la transformée de Fourier soit exactement égale à la valeur absolue. Considérons la fonction $\mathcal{F}\varphi$:

$$\mathcal{F}\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Nous pouvons constater que, lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $\mathcal{F}\varphi(\omega) \rightarrow 0$ (remarquons l'exponentielle négative). Cependant, pour la fonction valeur absolue $|\omega|$, lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $|\omega| \rightarrow \infty$. Par conséquent, il est impossible de trouver une fonction φ telle que, pour tout ω , $\mathcal{F}\varphi(\omega) = |\omega|$.

Toutefois, tout notre travail précédent n'est pas vain. Examinons plutôt le type de fonctions sur lesquelles nous avons restreint notre étude. Nous ne considérons notre fonction que sur un intervalle fini et supposons en fait qu'elle soit nulle en dehors de cet intervalle. En étendant cette idée à la transformée de Fourier, nous constatons que nous devons porter notre attention sur les *fonctions à bande limitée*.

Définition 2.6. Une fonction φ est dite à *bande limitée* s'il existe un réel $L > 0$ tel que

$$\mathcal{F}\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\omega x} dx = 0 \quad \text{pour tout } \omega \notin [-L, L]. \quad (2.19)$$

Le facteur de filtrage $|S|$ sert à amplifier le terme $\mathcal{F}(\mathcal{R}f)$ dans la formule de rétroprojection filtrée originale (2.14). En pratique, $\mathcal{F}(\mathcal{R}f)$ est très sensible aux hautes fréquences.

En concentrant notre attention sur les basses fréquences à l'aide d'une fonction à bande limitée φ , nous sommes en mesure d'éviter ce problème. Notre objectif est de remplacer S par ce que l'on appelle un *filtre passe-bas* (noté S'), qui prend en compte les effets des

basses fréquences tout en atténuant les hautes fréquences. Cette fonction S' doit avoir un support compact et être de la forme

$$S' = \mathcal{F}\varphi$$

(sur un intervalle compact).

Le coût de l'utilisation de $S'(\omega)$ est que nous ne disposons plus de l'égalité présentée dans l'équation (2.18). En revanche, nous obtenons :

$$f(x, y) \approx \frac{1}{2} \mathcal{B}(\mathcal{F}^{-1}S' \star \mathcal{R}f)(x, y). \quad (2.20)$$

De manière générale, la plupart des filtres passe-bas sont de la forme

$$S'(\omega) = |\omega| \cdot F(\omega) \cdot \Pi_L(\omega),$$

où $L > 0$ définit la région sur laquelle le filtrage est effectué. Différentes fonctions F déterminent les caractéristiques précises du filtre, et $\Pi_L(\omega)$ est définie comme suit :

$$\Pi_L(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq L, \\ 0 & \text{si } |\omega| > L. \end{cases}$$

Nous introduisons maintenant deux filtres couramment utilisés en imagerie numérique et en traitement du signal : le filtre *Ram-Lak* et le filtre *Hann*.

Filtre Ram-Lak

Le filtre Ram-Lak est défini par :

$$S'(\omega) = |\omega| \cdot \Pi_L(\omega) = \begin{cases} |\omega| & \text{si } |\omega| \leq L, \\ 0 & \text{si } |\omega| > L. \end{cases}$$

Le filtre Ram-Lak constitue la base de nombreux autres filtres utilisés en analyse du signal, car il remplace simplement la fonction $F(\omega)$ par la fonction constante égale à 1. D'autres filtres, tels que le filtre Hann, consistent généralement en des produits de fonctions sinus ou cosinus destinées à éliminer le bruit indésirable.

Filtre Hann

Le filtre Hann est donné par :

$$S'(\omega) = |\omega| \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\omega}{L}\right) \right) \cdot \Pi_L(\omega).$$

Le filtre Hann utilise la fonction de Hann

$$\frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\omega}{L}\right) \right)$$

comme fonction $F(\omega)$,

II.5 Discrétisation des méthodes analytiques

Ainsi nous avons traité presque exclusivement des intégrales continues pour la transformée de Radon, la transformée de Fourier et les formules de rétroprojection. En pratique, cependant, nous n'avons qu'un ensemble fini de données avec lesquelles travailler. Par conséquent, nous devons former des versions discrètes de toutes les formules que nous avons utilisées dans notre rétroprojection filtrée.

Une fonction discrète est une fonction définie uniquement sur un ensemble dénombrable. Pour nos besoins, nous considérerons des fonctions discrètes définies sur des ensembles finis (l'ensemble étant composé des lignes sur lesquelles nous avons pris nos mesures d'intensité). Soit g_n la fonction discrète g à la valeur n . Comme nous connaissons cette fonction discrète sur un ensemble fini, soit N , nous pouvons dire que $g = g_n : 0 \leq n \leq N - 1$. Si nous voulons étendre cette définition à tous les entiers, nous pouvons simplement « répéter » notre fonction encore et encore ; c'est-à-dire, nous pouvons la rendre périodique avec une période N . Cette extension sera utile pour certaines des formules discrètes que nous rencontrerons.

Supposons que nous prenions des mesures à P angles différents θ et que pour chaque angle nous ayons $2M + 1$ faisceaux espacés d'une distance d . Alors nous pouvons définir des valeurs particulières θ_k et t_j comme

$$\theta_k = \left\{ \frac{k\pi}{P} : 0 \leq k \leq P - 1 \right\},$$

$$t_j = \{jd : -M \leq j \leq M\}.$$

Ce qui nous permet de définir une ligne particulière comme l_{t_j, θ_k} . Nous définissons donc la transformée de Radon discrète comme suit :

Définition 2.1. Pour une fonction absolument intégrable f et $0 \leq k \leq P$ et $-M \leq j \leq M$, ($P, M > 0$), nous définissons la transformée de Radon discrète de f , notée $\mathcal{R}_D f$, comme

$$\mathcal{R}_D f_{j,k} = \mathcal{R}f(t_j, \theta_k).$$

Pour mettre en œuvre la formule de rétroprojection filtrée (2.20), nous devons également définir la convolution de deux fonctions discrètes.

Définition 2.2. Pour deux fonctions discrètes N -périodiques f et g , nous définissons la **convolution discrète** de f et g , notée $f \star g$, comme

$$(f \star g)_m = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cdot g_{(m-j)}, \quad \text{pour } m \in \mathbb{Z}.$$

Évidemment, nous aurons également besoin de la transformée de Fourier discrète.

Définition 2.3 (Transformée de Fourier discrète). Étant donnée une fonction discrète N -périodique f , nous définissons la **transformée de Fourier discrète** de f , notée $\mathcal{F}_D f$, par

$$(\mathcal{F}_D f)_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{i2\pi kj/N}, \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, (N - 1). \quad (2.21)$$

Il convient de noter que la N -périodicité de f nous permet de remplacer les bornes de la sommation par tout ensemble d'entiers de longueur $(N - 1)$. Avec cette définition, il n'est pas surprenant que nous définissions la transformée de Fourier discrète inverse de la manière suivante.

Définition 2.4 (Transformée de Fourier discrète inverse). Étant donnée une fonction discrète N -périodique g , la **transformée de Fourier discrète inverse** de g , notée $\mathcal{F}_D^{-1}g$, est définie par

$$(\mathcal{F}_D^{-1}g)_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{i2\pi kn/N}, \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, (N - 1). \quad (2.22)$$

Nous remarquons que plusieurs des mêmes propriétés de la transformée de Fourier que nous avons définies dans le cadre continu s'appliquent également au cas discret avec de légères modifications :

Proposition 2.1 (Propriétés des fonctions discrètes N -périodiques). Pour des fonctions discrètes N -périodiques f et g :

1. $\mathcal{F}_D(f \star g) = (\mathcal{F}_D f) \cdot (\mathcal{F}_D g)$
2. $\mathcal{F}_D(f \cdot g) = \frac{1}{N} (\mathcal{F}_D f) \star (\mathcal{F}_D g)$
3. $\mathcal{F}_D^{-1}(\mathcal{F}_D f)_n = f_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Nous sommes maintenant prêts à aborder la discrétisation de la formule de rétro-projection elle-même. Rappelons que la formule de rétroprojection était définie comme une intégrale de 0 à π par rapport à $d\theta$. Dans le cas discret, nous avons remplacé ce $d\theta$ continu par $k\pi/P$ pour $0 \leq k \leq (P - 1)$. Cela conduit à la définition suivante de la **rétroprojection discrète** :

Définition 2.5 (Rétroprojection discrète). Étant donnée une fonction discrète h , nous définissons la **rétroprojection discrète** de h , notée $\mathcal{B}_D h$, par

$$\mathcal{B}_D h(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h\left(x \cos \frac{k\pi}{N} + y \sin \frac{k\pi}{N}, k\pi/N\right). \quad (2.23)$$

Rappelons notre forme finale pour la formule filtrée de rétroprojection en équation (2.20) :

$$f(x, y) \approx \frac{1}{2} \mathcal{B}(\mathcal{F}^{-1} S' \star \mathcal{R} f)(x, y).$$

Pour former la version discrète de cette équation, nous voyons que nous devons appliquer la formule suivante:

$$f(x, y) \approx \frac{1}{2} \mathcal{B}_D (\mathcal{F}_D^{-1} S' \star \mathcal{R}_D f)(x, y). \quad (2.24)$$

Nous rencontrons maintenant un léger problème. $\mathcal{R}_D f$ représente les données mesurées basées sur les intensités finales d'un seul faisceau de rayons X. Nous avons défini les emplacements des différents faisceaux (et donc des différentes coupes) en utilisant un

système de coordonnées perpendiculaire aux coordonnées polaires basé sur des angles discrets θ et des distances t .

En examinant l'équation (2.23), nous voyons que nous devons sommer sur h en différents points (x, y) dans le système de coordonnées cartésien pour créer une grille de niveaux de gris rectangulaire qui représente notre objet original. Les systèmes de coordonnées polaires et cartésiens ne correspondent pas nécessairement parfaitement, et nous devons donc *interpoler* les points de données manquants. L'interpolation consiste à créer une fonction continue (ou au minimum par morceaux continues) à partir d'un ensemble discret de valeurs. Il existe de nombreuses méthodes pour interpoler une fonction (spline cubique, Lagrange, etc.), chacune ayant ses avantages et inconvénients.

Pour nos besoins, nous allons définir un type général d'interpolation basé sur une fonction de pondération W qui détermine comment nous allons choisir nos points interpolés. Nous ne définissons pas de fonction de pondération particulière W , car les détails de l'interpolation ne sont pas aussi importants que le fait que nous pouvons remplir les "trous" dans nos données.

Définition 2.6. Pour une fonction de pondération donnée W et une fonction discrète N -périodique g , l'*interpolation* W de g est définie par :

$$\mathcal{I}_W(g)(x) = \sum_n g(n) \cdot W\left(\frac{x}{d} - n\right), \quad \text{pour } -\infty < x < \infty. \quad (2.25)$$

Maintenant que nous avons couvert toutes les parties de l'équation (2.18) dans un cadre discret et traité le problème de l'interpolation, nous pouvons proposer un algorithme de reconstruction discret pour résoudre le coefficient d'atténuation à partir d'un ensemble de données discret.

Nous interpolons ici la fonction $(\mathcal{F}_D^{-1}\mathcal{S}') * \mathcal{R}_D f(jd, k\pi/N)$ (c'est-à-dire que nous remplissons les trous après le filtrage de la transformée de Radon). Définissons cette fonction interpolée comme \mathcal{I} . Cela conduit à la formule de reconstruction suivante :

$$\begin{aligned} f(x_m, y_n) &\approx \frac{1}{2} \mathcal{B}_D \left((\mathcal{F}_D^{-1}\mathcal{S}') * \mathcal{R}_D f \right) (jd, k\pi/N) \\ &\approx \frac{1}{2} \mathcal{B}_D \mathcal{I}(x_m, y_n) \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{I} \left(x_m \cos \frac{k\pi}{N} + y_n \sin \frac{k\pi}{N}, \frac{k\pi}{N} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

L'équation précédente tient compte de la nature discrète de nos données réelles et traite les problèmes (comme le manque de données) qui surviennent lorsque l'on dispose d'un nombre fini de mesures.

II.6 Formulation linéaire – Synthèse

Ce chapitre explique pas à pas comment passer de la formulation intégrale continue de la rétroprojection filtrée à la **formulation linéaire discrète** $g = Af$ utilisée en pratique en tomographie. Cette transition est essentielle pour relier la théorie mathématique aux algorithmes numériques implémentés dans les systèmes réels. Elle constitue également le point d'entrée vers les méthodes itératives modernes.

D'accord, nous allons expliquer pas à pas comment passer de la formulation intégrale continue de la rétroprojection filtrée à la **formulation linéaire discrète** $g = Af$ utilisée en pratique en tomographie.

II.6.1 Rétroprojection filtrée continue

Cette section présente l'expression analytique idéale de la reconstruction tomographique. Elle met en évidence le rôle central de la transformée de Radon, du filtrage et de l'intégration angulaire. Bien que mathématiquement élégante, cette formulation reste purement continue et ne peut pas être appliquée directement en pratique.

On a la formule continue pour la reconstruction filtrée :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left((\mathcal{F}^{-1} S') \star \mathcal{R}f \right) (x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

Ici :

- $f(x, y)$: coefficient d'atténuation à reconstruire,
- $\mathcal{R}f(t, \theta)$: transformée de Radon (projection à l'angle θ),
- $\mathcal{F}^{-1} S'$: filtre appliqué sur chaque projection,
- \star : convolution dans t .

C'est une **formule intégrale continue**, dépendante de coordonnées polaires.

II.6.2 Discrétisation des coordonnées et des angles

La discrétisation permet d'adapter le modèle continu aux contraintes physiques des systèmes d'acquisition. Elle transforme les intégrales et variables continues en un ensemble fini de mesures exploitables numériquement. Cette étape conditionne directement la qualité et la résolution de la reconstruction finale.

Pour passer au discret :

1. On ne mesure que P angles : $\theta_k = k\pi/P$, $k = 0, \dots, P-1$,
2. On ne mesure que $2M+1$ faisceaux par angle, espacés de d : $t_j = jd$, $j = -M, \dots, M$,
3. On obtient donc la **transformée de Radon discrète** :

$$\mathcal{R}_D f_{j,k} = \mathcal{R}f(t_j, \theta_k).$$

II.6.3 Convolution et filtrage discrets

Le filtrage est une étape cruciale de la méthode FBP, car il compense le flou introduit par la rétroprojection simple. Il repose sur l'opération de convolution, qui permet de renforcer les hautes fréquences nécessaires à une bonne résolution spatiale. Sans ce filtrage, la reconstruction serait fortement dégradée.

On applique ensuite le filtre sur chaque projection :

$$h_{j,k} = (\mathcal{F}_D^{-1} S' * \mathcal{R}_D f)_{j,k}$$

Ici, $*$ est la **convolution discrète** dans t :

$$(f * g)_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n g_{(m-n)}.$$

II.6.4 Discrétisation de la rétroprojection

La rétroprojection assure la redistribution des projections filtrées sur la grille de l'image reconstruite. Elle garantit la cohérence géométrique entre l'espace des mesures et l'espace image. Cette étape nécessite une interpolation, introduisant une approximation contrôlée du modèle continu.

La rétroprojection discrète est :

$$f(x_m, y_n) \approx \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} h \left(x_m \cos \frac{k\pi}{N} + y_n \sin \frac{k\pi}{N}, \frac{k\pi}{N} \right).$$

Comme les coordonnées cartésiennes (x_m, y_n) ne tombent pas exactement sur les positions t_j , on **interpole** :

$$h(x_m \cos \theta_k + y_n \sin \theta_k, \theta_k) \approx \sum_j h_{j,k} W \left(\frac{x_m \cos \theta_k + y_n \sin \theta_k - t_j}{d} \right),$$

où W est la fonction de pondération de l'interpolation (linéaire, spline, etc.).

Cela transforme chaque $f(x_m, y_n)$ en **combinaison linéaire des mesures** $h_{j,k}$.

II.6.5 Passage à la forme matricielle linéaire

La formulation matricielle permet de rassembler toutes les opérations précédentes dans un cadre linéaire unique. Elle constitue un lien direct entre la théorie continue et les algorithmes numériques. Cette écriture est essentielle pour l'analyse et l'extension vers des méthodes itératives.

Si on note :

- f le vecteur de tous les $f(x_m, y_n)$ sur la grille,
- g le vecteur de toutes les mesures projetées filtrées $h_{j,k}$,
- A la matrice représentant la **rétroprojection + interpolation**,

alors :

$$f_i = \sum_j A_{ij} g_j$$

On obtient :

$$\boxed{g = Af} \quad (\text{ou } f = Ag \text{ selon la convention})$$

En pratique, A est **très grande et creuse**, mais la reconstruction se réduit à un produit matriciel.

Définition 2.1 (Matrice système Φ et poids $\varphi_{i,j}$). Dans le cadre discret, le vecteur de données de projection à faisceau parallèle \vec{g} est modélisé par une somme pondérée sur les pixels traversés par le rayon X :

$$g_i = \sum_{j=1}^N \varphi_{i,j} \cdot f_j, \quad \text{où } i = 1, 2, \dots, M. \quad (2.27)$$

Le coefficient de pondération $\varphi_{i,j}$ de la matrice système Φ est égal à la longueur d'intersection du i -ème rayon à travers le j -ème pixel.

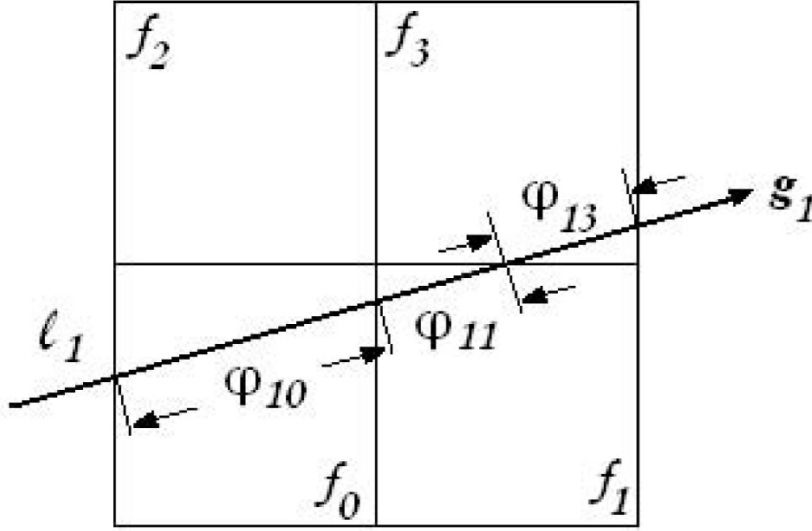


Figure 2.5: Calcul du coefficient de poids $\varphi_{i,j}$ de la matrice système Φ à partir de la longueur d'intersection du i -ème rayon à travers le j -ème pixel.

Le calcul direct de chaque $\varphi_{i,j}$ est coûteux. Pour accélérer la reconstruction, on peut pré-calculer et stocker ces poids, et exploiter les propriétés de symétrie des projections à faisceau parallèle pour réduire le nombre de calculs nécessaires.

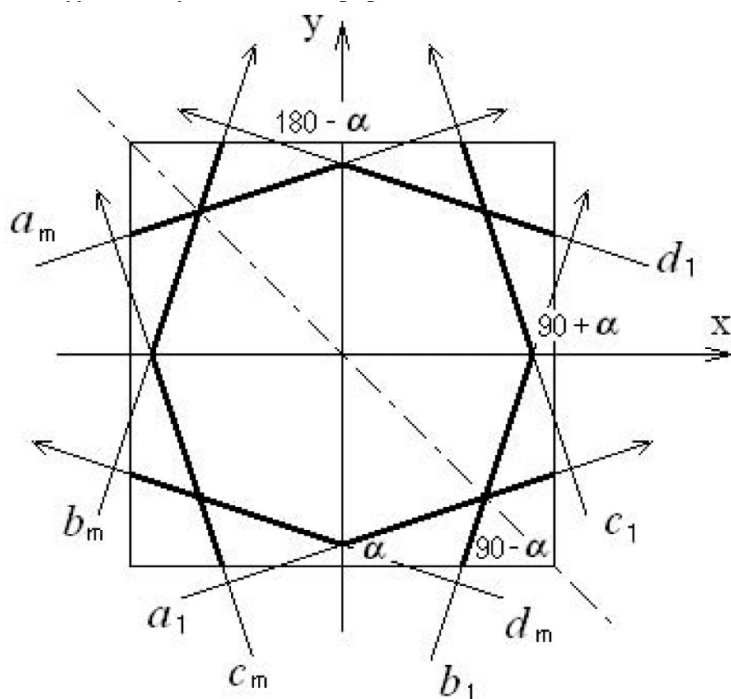


Figure 2.6: Mesures des rayons-X a , b , c et d pour des angles de rotation α , $90 - \alpha$, $90 + \alpha$ et $180 - \alpha$. Les propriétés de symétrie permettent de déduire les poids d'un rayon à partir d'un autre.

II.6.6 Synthèse

Cette synthèse met en évidence la cohérence globale du passage du modèle continu vers une implémentation discrète. Elle permet de comprendre la FBP comme une succession structurée d'opérations linéaires. Cette vision prépare naturellement l'introduction de méthodes de reconstruction plus avancées.

Le passage de l'intégrale continue à $g = Af$ se fait en quatre étapes principales :

1. **Échantillonnage discret** des angles et des faisceaux,
2. **Filtrage discret** par convolution,
3. **Rétroprojection discrète** avec interpolation,
4. **Formulation linéaire matricielle**.

Conclusion

Ce chapitre a présenté les principaux outils mathématiques qui fondent la reconstruction d'images tomographiques, en mettant en évidence la transition fondamentale entre les méthodes analytiques classiques et les approches modernes basées sur le *Compressed Sensing*.

Les méthodes analytiques, historiquement les premières, reposent sur une formulation mathématique élégante et directe du problème inverse. La transformée de Radon en constitue la pierre angulaire, en modélisant le lien entre l'objet et ses projections. Son inversion, fondée sur le théorème de la coupe centrale et mise en œuvre dans l'algorithme

de rétroprojection filtrée (FBP), permet une reconstruction rapide. Ces méthodes, dont la FBP demeure un standard clinique, supposent toutefois des données abondantes, complètes et faiblement bruitées.

Cependant, les exigences actuelles de réduction de dose et de temps d'acquisition conduisent à des scénarios sous-échantillonnés, dans lesquels les méthodes analytiques atteignent leurs limites, se traduisant par des artefacts et une forte sensibilité au bruit. C'est dans ce contexte que les méthodes itératives et le cadre du *Compressed Sensing* prennent tout leur sens. En formulant la reconstruction comme un problème inverse régularisé, elles exploitent des connaissances a priori sur l'image, telles que sa parcimonie dans un domaine approprié (ondelettes, gradient), afin de stabiliser l'inversion et d'obtenir des reconstructions de qualité à partir de données limitées. La variation totale (TV) constitue un exemple de régularisation particulièrement adapté, permettant de préserver les contours tout en réduisant le bruit.

La transformée de Fourier et l'opération de convolution jouent un rôle transversal essentiel, aussi bien dans l'implémentation du filtrage pour la FBP que dans l'analyse fréquentielle des données. Par ailleurs, la discrétisation des opérateurs mathématiques et la formulation matricielle linéaire du problème, sous la forme

$$g = Hf,$$

permettent d'établir un lien direct entre la théorie continue et son implémentation numérique, ouvrant ainsi la voie aux algorithmes d'optimisation itératifs.

En résumé, ce chapitre dresse un panorama cohérent des approches algorithmiques de la reconstruction tomographique. Il montre que si les méthodes analytiques offrent rapidité et simplicité dans des conditions idéales, les méthodes itératives régularisées, appuyées par la théorie du *Compressed Sensing*, constituent une réponse incontournable aux défis de l'imagerie moderne : reconstruire davantage d'information à partir de moins de données, sans compromettre la qualité diagnostique ni la sécurité du patient. La maîtrise de ces outils mathématiques apparaît ainsi comme un levier essentiel pour le développement des méthodes de reconstruction de demain.

CHAPITRE III

NOTRE MODÈLE

III.1 Introduction du chapitre

Avant d'introduire formellement le modèle de reconstruction proposé, il est nécessaire d'établir le cadre théorique et méthodologique qui en constitue le fondement. La reconstruction d'images en tomodensitométrie à faible dose s'inscrit en effet dans le cadre des problèmes inverses mal posés, où la réduction du nombre de mesures compromet la stabilité et l'unicité de la solution. Dans ce contexte, le paradigme du *compressed sensing* fournit un cadre théorique rigoureux permettant d'exploiter la parcimonie intrinsèque des images afin de rendre le problème bien conditionné et de permettre une reconstruction fiable à partir de données limitées.

Ce chapitre présente ainsi les principes fondamentaux du *compressed sensing*, la formulation mathématique du problème inverse en tomodensitométrie, ainsi que les approches de régularisation parcimonieuse fondées sur les représentations multi-échelles. Une attention particulière est portée aux transformées en ondelettes biorthogonales, dont les propriétés de localisation et de représentation efficace des singularités les rendent particulièrement adaptées aux images tomographiques. Nous présentons également le cadre variationnel retenu, dans lequel le problème de reconstruction est formulé comme un problème d'optimisation convexe combinant un terme de fidélité aux données et un terme de régularisation favorisant la parcimonie.

La résolution de ce problème est réalisée à l'aide de l'algorithme ADMM (*Alternating Direction Method of Multipliers*), dont la structure permet de découpler efficacement les différentes composantes du problème tout en garantissant la stabilité et l'efficacité numérique du processus de reconstruction. Enfin, ce chapitre introduit les métriques quantitatives utilisées pour l'évaluation des performances du modèle, notamment la MSE, le PSNR et le SSIM, qui permettront d'analyser de manière objective la qualité et la fidélité structurelle des images reconstruites.

L'ensemble de ces éléments conduit à la définition d'un modèle de reconstruction parcimonieux adapté au contexte de tomodensitométrie à faible dose, constituant le socle théorique et algorithmique des développements présentés dans la suite de ce manuscrit.

III.2 Compressed Sensing

En tomodensitométrie (CT), la réduction du nombre de projections et de la dose de rayonnement [8] constitue un enjeu majeur de sécurité clinique et de performance opérationnelle. La diminution de l'exposition aux rayons \mathbf{X} vise à limiter les risques biologiques associés aux rayonnements ionisants, en particulier dans les contextes d'examens répétés

ou pour les populations sensibles. Toutefois, cette réduction conduit inévitablement à une acquisition de données incomplètes et bruitées, rendant la reconstruction d'image plus difficile.

D'un point de vue mathématique, cette situation se traduit par un problème inverse sous-déterminé, pour lequel les méthodes analytiques classiques, telles que la rétroprojection filtrée, deviennent instables ou génèrent des artefacts importants. Le *Compressed Sensing* (CS) fournit un cadre théorique et algorithmique permettant d'aborder cette problématique en exploitant des propriétés structurelles des images CT.

Définition 3.1. Le *compressed sensing* (CS) est un cadre mathématique et algorithmique permettant la reconstruction de signaux de grande dimension à partir d'un nombre de mesures significativement inférieur à celui requis par les méthodes d'échantillonnage classiques, sous réserve que le signal présente une structure de parcimonie adaptée.

Définition 3.2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un signal inconnu. On dit que x est k -parcimonieux dans une base (ou un dictionnaire) Ψ (par exemple ondelettes, DCT) si

$$x = \Psi\alpha, \quad \text{où } \alpha \text{ possède au plus } k \ll n \text{ coefficients non nuls.}$$

Dans le cas des images CT, bien que la distribution d'atténuation ne soit pas parcimonieuse dans le domaine spatial, elle est souvent compressible dans des bases multi-échelles ou via le gradient de l'image. Cette propriété constitue le fondement de l'application du compressed sensing à la reconstruction tomographique.

Les mesures acquises lors d'un examen CT peuvent être modélisées par un ensemble de relations linéaires :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

où $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ représente l'opérateur de projection discrétisé (assimilable à la transformée de Radon discrète) et $m \ll n$ lorsque le nombre de projections est réduit.

Contrairement au cadre classique de l'échantillonnage, qui impose un nombre de mesures au moins égal à la dimension du signal, le compressed sensing montre que

$$m \gtrsim k \log(n/k)$$

peut être suffisant pour une reconstruction stable, sous des conditions appropriées sur l'opérateur \mathbf{A} , telles que l'incohérence ou la propriété d'isométrie restreinte (*Restricted Isometry Property*, RIP).

III.2.1 Le problème inverse en tomodensitométrie

La reconstruction CT s'inscrit dans le cadre général des problèmes inverses, où l'objectif est d'estimer une image à partir de mesures indirectes, bruitées et incomplètes. Ce problème peut être formulé sous la forme :

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \tag{3.1}$$

où :

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ représente la distribution d'atténuation à reconstruire,
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ correspond aux données de projection (sinogramme),

- \mathcal{A} modélise le processus de projection CT,
- \mathbf{n} représente le bruit de mesure, principalement de nature quantique.

Lorsque le nombre de projections est réduit, l'opérateur \mathcal{A} devient non inversible et le problème est sous-déterminé. Cette situation est inhérente aux stratégies de réduction de dose et ne peut être évitée sans compromettre la sécurité du patient.

III.2.2 Mal-positude et conséquences pratiques

Définition 3.3. Un problème est dit **bien posé** au sens de Hadamard s'il vérifie l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution. Si l'une de ces conditions n'est pas satisfaite, le problème est dit *mal posé*.

Dans le contexte de la reconstruction CT à faible dose, la condition d'unicité est violée du fait de la sous-détermination, et la condition de stabilité est fortement compromise par la présence de bruit. De faibles fluctuations du sinogramme peuvent ainsi engendrer des artefacts marqués dans l'image reconstruite.

III.2.3 Régularisation par parcimonie et Compressed Sensing

Pour rendre le problème inverse traitable, il est nécessaire d'introduire des informations a priori sur la solution recherchée. Le compressed sensing propose d'utiliser la parcimonie ou la compressibilité de l'image CT dans une représentation appropriée comme mécanisme de régularisation.

Cette hypothèse restreint l'ensemble des solutions admissibles et permet de transformer un problème inverse mal posé en un problème d'optimisation bien conditionné, pour lequel une solution stable et physiquement plausible peut être obtenue malgré la réduction du nombre de projections.

Jusqu'à présent, le compressed sensing a été présenté comme un cadre théorique exploitant la parcimonie pour résoudre des problèmes inverses sous-déterminés. En pratique, cette hypothèse de parcimonie est intégrée au processus de reconstruction via des formulations variationnelles. Ces formulations constituent un cadre général permettant d'unifier les approches classiques de régularisation et les méthodes issues du compressed sensing.

III.2.4 Formulation variationnelle des problèmes inverses

Dans de nombreux problèmes d'imagerie, et en particulier en tomodensitométrie à faible dose, l'objectif est de reconstruire une image inconnue $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ à partir d'un ensemble de mesures $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ (i.e synogramme) obtenues par un système d'acquisition indirect. Ce processus est généralement modélisé par une relation linéaire de la forme

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

où \mathcal{A} représente l'opérateur direct du système CT et $\boldsymbol{\varepsilon}$ un terme de bruit.

Lorsque les données sont bruitées et/ou acquises de manière incomplète ($m \ll n$), l'opérateur \mathcal{A} devient non inversible ou mal conditionné. Dans ce cas, une inversion directe est soit impossible, soit extrêmement instable, et de petites perturbations des données peuvent engendrer de fortes dégradations de la solution reconstruite. Ce phénomène est caractéristique des problèmes inverses mal posés.

Définition 3.4. Un *problème inverse* consiste à estimer une quantité inconnue \mathbf{x} à partir d'observations indirectes \mathbf{y} , reliées par un opérateur \mathcal{A} , lorsque l'inversion directe de cet opérateur est impossible ou instable.

a. Principe de la régularisation.

Afin de rendre le problème inverse traitable, il est nécessaire d'introduire des informations a priori sur la solution recherchée. Cette démarche est connue sous le nom de *régularisation*.

Définition 3.5. Une régularisation est une application $\mathfrak{R}_\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui associe à des données observées \mathbf{y} une solution stable $\hat{\mathbf{x}}$, en incorporant des hypothèses supplémentaires sur la structure de la solution.

Intuitivement, une méthode de régularisation vise à étendre la notion d'inverse au cadre bruité et mal posé, de sorte que

$$\mathfrak{R}_\alpha(\mathcal{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}) \approx \mathbf{x},$$

même lorsque $\boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$ ou que \mathcal{A} n'est pas inversible.

b. Formulation variationnelle.

Une approche largement utilisée pour implémenter la régularisation consiste à formuler le problème inverse comme un problème d'optimisation variationnelle, dans lequel on recherche une solution équilibrant fidélité aux données et conformité aux a priori. Cette formulation s'écrit généralement sous la forme

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \underbrace{\|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2}_{\text{fidélité aux données}} + \alpha \underbrace{\mathcal{R}(\mathbf{x})}_{\text{terme de régularisation}} \right\}. \quad (3.2)$$

Les différents termes de cette formulation jouent des rôles complémentaires :

- **Fidélité aux données :** Ce terme impose la cohérence entre l'image reconstruite \mathbf{x} et les mesures observées \mathbf{y} . Dans un contexte bruité, il n'est pas souhaitable de l'annuler strictement, car cela conduirait à une reconstruction amplifiant le bruit.
- **Terme de régularisation :** Le régularisant $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ encode les informations a priori disponibles sur la solution recherchée, telles que la régularité, la parcimonie ou des contraintes physiques. Il permet de restreindre l'ensemble des solutions admissibles et d'améliorer la stabilité du problème.
- **Paramètre de régularisation α :** Le paramètre $\alpha > 0$ contrôle le compromis entre fidélité aux données et influence de l'a priori. Un choix inadéquat peut conduire soit à une reconstruction bruitée (faible α), soit à une image excessivement lissée (grand α).

Le compressed sensing s'inscrit naturellement dans ce cadre variationnel en choisissant des régularisants non quadratiques conçus pour promouvoir la parcimonie ou la compressibilité de l'image, tels que les normes ℓ_1 ou la variation totale. Ces choix conduisent à des problèmes d'optimisation non différentiables, nécessitant des algorithmes itératifs spécifiques, qui seront abordés dans les sections suivantes.

III.2.5 Formulation du problème

Dans le cadre de la tomographie par rayons X (CT), la reconstruction d'image à partir d'un nombre limité de projections conduit à un problème inverse sous-déterminé. Le cadre du *Compressed Sensing* (CS) permet de résoudre ce problème en exploitant la parcimonie intrinsèque des images CT dans un domaine approprié, typiquement le domaine du gradient.

Définition 3.6 (Image et représentation parcimonieuse). Considérons une image f , vue comme un vecteur colonne de dimension $n \times 1$ dans \mathbb{R}^n , dont les éléments individuels f_j , pour $j = 1, 2, \dots, n$, représentent les n valeurs de pixels de l'image. On développe le vecteur f dans une base orthonormée Ψ comme suit :

$$f = \Psi \mathbf{x},$$

où Ψ est la matrice $n \times n$ $[\psi_1, \dots, \psi_n]$, dont les vecteurs $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ constituent les colonnes, et où \mathbf{x} est un vecteur colonne de dimension $n \times 1$.

Si la majorité des composantes du vecteur \mathbf{x} sont nulles ou quasi nulles, on dira que f est **parcimonieuse** dans le domaine Ψ , et que \mathbf{x} constitue sa **représentation parcimonieuse**.

Dans le cas des images CT, la parcimonie ne s'exprime généralement pas directement dans le domaine spatial, mais plutôt dans le domaine du gradient. Les images CT sont en effet caractérisées par des régions quasi homogènes séparées par des discontinuités nettes, ce qui rend leur gradient parcimonieux.

Considérons l'exemple du fantôme de Shepp–Logan représenté à la Figure 3.1 et de son équivalent en gradient à la Figure 3.2. On note l'intensité d'un pixel d'une image bidimensionnelle par $f_{h,w}$, où $h = 1, 2, \dots, H$ et $w = 1, 2, \dots, W$; H et W désignent respectivement la hauteur et la largeur de l'image 2D, et $W \times H = n$.

Définition 3.7 (Module du gradient). Si les valeurs des pixels sont notées $f_{h,w}$, le module du gradient discret est défini comme suit :

$$|\nabla f_{h,w}| = \sqrt{(f_{h+1,w} - f_{h,w})^2 + (f_{h,w+1} - f_{h,w})^2}. \quad (3.3)$$

La *variation totale* (Total Variation, TV) de l'image est alors définie comme la somme du module du gradient sur l'ensemble des pixels :

$$\text{TV}(f) = \sum_{h,w} |\nabla f_{h,w}|.$$

La minimisation de la variation totale correspond à la minimisation de la norme ℓ_1 du gradient et constitue une pénalisation standard dans le cadre du Compressed Sensing appliqué au CT.



Figure 3.1: Fantôme de Shepp-Logan

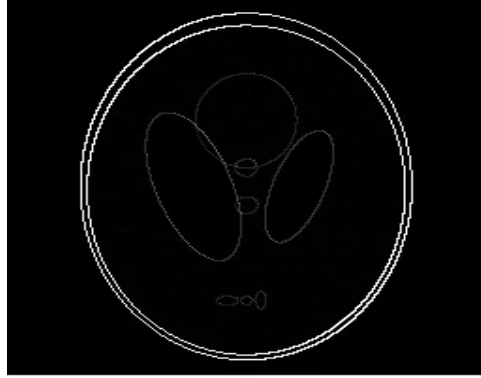


Figure 3.2: Gradient du fantôme de Shepp-Logan

Proposition 3.1 (Modèle d'acquisition en tomographie CT). En imagerie CT réaliste, les données de projection à faisceau parallèle, également appelées *sinogramme*, sont modélisées par un système linéaire discret :

$$\mathbf{g} = \Phi \mathbf{f}, \quad (3.4)$$

où $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des mesures de projection, et $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice système décrivant la géométrie d'acquisition CT.

En introduisant la représentation parcimonieuse de l'image, le modèle devient :

$$\mathbf{g} = \Phi \mathbf{f} = \Phi \Psi \mathbf{x} = \Phi' \mathbf{x}, \quad (3.5)$$

où $\Phi' = \Phi \Psi$.

Lorsque le nombre de projections est limité, on a $m \ll n$, ce qui rend le système sous-déterminé.

Proposition 3.2 (Reconstruction CT par Compressed Sensing). La reconstruction de l'image consiste alors à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\mathbf{x} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{x}}} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_1 \quad \text{sous la contrainte} \quad \left\| \Phi' \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{g} \right\|_2 \leq \varepsilon, \quad (3.6)$$

où ε modélise le bruit présent dans les mesures.

Dans le cas particulier du CT, cette formulation est équivalente à une minimisation de la variation totale de l'image sous contrainte de fidélité aux données.

III.3 ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers)

Cette section expose brièvement deux algorithmes d'optimisation précurseurs de ADMM, fournissant ainsi le contexte théorique nécessaire à sa compréhension.

III.3.1 Ascension Duale.

Considérons le problème d'optimisation convexe sous contrainte d'égalité

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && f(x) \\ & \text{sous contrainte} && Ax = b, \end{aligned} \tag{3.7}$$

avec la variable $x \in \mathbb{R}^n$, où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe. Le Lagrangien pour ce problème est

$$L(x, y) = f(x) + y^T(Ax - b)$$

et la fonction duale est

$$g(y) = \inf_x L(x, y) = -f^*(-A^T y) - b^T y,$$

où y est la variable duale ou le multiplicateur de Lagrange, et f^* est le conjugué convexe de f .

Le problème duale est

$$\text{maximiser } g(y),$$

avec la variable $y \in \mathbb{R}^m$. En supposant qu'il y a une dualité forte, les valeurs optimales des problèmes primal et dual sont les mêmes. Nous pouvons retrouver un point optimal primal x^* à partir d'un point optimal dual y^* comme

$$x^* = \arg \min_x L(x, y^*),$$

à condition qu'il n'y ait qu'un seul minimiseur de $L(x, y^*)$. (C'est le cas si, par exemple, f est strictement convexe.) Dans la suite, nous utiliserons la notation $\arg \min_x F(x)$ pour désigner n'importe quel minimiseur de F , même lorsque F n'a pas un minimiseur unique.

Dans la méthode d'ascension duale, nous résolvons le problème dual en utilisant l'ascension de gradient. En supposant que g est différentiable, le gradient $\nabla g(y)$ peut être évalué comme suit. Nous trouvons d'abord $x^+ = \arg \min_x L(x, y)$; ensuite nous avons $\nabla g(y) = Ax^+ - b$, qui est le résidu pour la contrainte d'égalité. La méthode d'ascension duale consiste à itérer les mises à jour

Étape 1:

$$x^{k+1} := \arg \min_x L(x, y^k)$$

Étape 2:

$$y^{k+1} := y^k + \alpha^k(Ax^{k+1} - b),$$

où $\alpha^k > 0$ est une taille de pas, et l'exposant est le compteur d'itération. La première étape est une étape de minimisation en x , et la deuxième étape est une mise à jour de la variable duale. La variable duale y peut être interprétée comme un vecteur de prix, et la mise à jour de y est alors appelée mise à jour des prix ou étape d'ajustement des prix. Cet algorithme est appelé ascension duale car, avec un choix approprié de α^k , la fonction duale augmente à chaque étape, c'est-à-dire $g(y^{k+1}) > g(y^k)$.

La méthode d'ascension duale peut être utilisée même dans certains cas où g n'est pas différentiable. Dans ce cas, le résidu $Ax^{k+1} - b$ n'est pas le gradient de g , mais l'opposé d'un sous-gradient de $-g$. Ce cas nécessite un choix différent de α^k que lorsque g est différentiable, et la convergence n'est pas monotone ; il arrive souvent que $g(y^{k+1}) \neq g(y^k)$. Dans ce cas, l'algorithme est habituellement appelé la méthode de sous-gradient dual.

Si α^k est choisi de manière appropriée et que plusieurs autres hypothèses sont vérifiées, alors x^k converge vers un point optimal et y^k converge vers un point dual optimal. Cependant, ces hypothèses ne sont pas vérifiées dans de nombreuses applications, donc l'ascension duale ne peut souvent pas être utilisée. Par exemple, si f est une fonction affine non nulle d'une composante quelconque de x , alors la mise à jour de x échoue, car L n'est pas bornée inférieurement en x pour la plupart des y .

III.3.2 Décomposition Duale.

L'avantage majeur de la méthode d'ascension duale est qu'elle peut conduire à un algorithme décentralisé dans certains cas. Supposons, par exemple, que l'objectif f est séparable (par rapport à une partition ou un éclatement de la variable en sous-vecteurs), ce qui signifie que

$$f(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i),$$

où $x = (x_1, \dots, x_N)$ et les variables $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ sont des sous-vecteurs de x . En partitionnant la matrice A de manière conforme comme

$$A = [A_1 \cdots A_N],$$

ainsi $Ax = \sum_{i=1}^N A_i x_i$, le Lagrangien peut s'écrire comme

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^N L_i(x_i, y) = \sum_{i=1}^N (f_i(x_i) + y^T A_i x_i - (1/N) y^T b),$$

qui est également séparable en x . Cela signifie que l'étape de minimisation en x se divise en N problèmes distincts qui peuvent être résolus en parallèle. Explicitement, l'algorithme est

$$x_i^{k+1} := \arg \min_{x_i} L_i(x_i, y^k) \quad (3.8)$$

$$y^{k+1} := y^k + \alpha^k (Ax^{k+1} - b) \quad (3.9)$$

L'étape de minimisation en x (3.8) est effectuée indépendamment, en parallèle, pour chaque $i = 1, \dots, N$. Dans ce cas, nous nous référons à la méthode d'ascension duale sous le nom de décomposition duale.

Dans le cas général, chaque itération de la méthode de décomposition duale nécessite une opération de diffusion et une opération de collecte. Dans l'étape de mise à jour duale (3.9), les contributions du résidu de la contrainte d'égalité $A_i x_i^{k+1}$ sont collectées (rassemblées) afin de calculer le résidu $Ax^{k+1} - b$. Une fois que la variable duale (globale) y^{k+1} est calculée, elle doit être distribuée (diffusée) aux processeurs qui effectuent les N étapes individuelles de minimisation de x_i (3.8).

III.3.3 Lagrangiens Augmentés et Méthode des Multiplicateurs

Les méthodes de Lagrangien augmenté ont été développées en partie pour apporter de la robustesse à la méthode d'ascension duale, et en particulier, pour obtenir une convergence sans hypothèses comme la stricte convexité ou le caractère fini de f . Le Lagrangien augmenté pour (3.7) est

$$L_\rho(x, y) = f(x) + y^T(Ax - b) + (\rho/2)\|Ax - b\|_2^2 \quad (3.10)$$

où $\rho > 0$ est appelé le paramètre de pénalité. (Notez que L_0 est le Lagrangien standard pour le problème.) Le Lagrangien augmenté peut être vu comme le Lagrangien (non augmenté) associé au problème

$$\begin{aligned} &\text{minimiser } f(x) + (\rho/2)\|Ax - b\|_2^2 \\ &\text{sous contrainte } Ax = b. \end{aligned}$$

Ce problème est clairement équivalent au problème original (3.7), puisque pour tout x réalisable, le terme ajouté à l'objectif est nul. La fonction duale associée est

$$g_\rho(y) = \inf_x L_\rho(x, y)$$

L'avantage d'inclure le terme de pénalité est que g_ρ peut être démontrée comme étant différentiable sous des conditions plutôt faibles sur le problème original. Le gradient de la fonction duale augmentée est trouvé de la même manière qu'avec le Lagrangien ordinaire, c'est-à-dire en minimisant sur x , puis en évaluant le résidu de la contrainte d'égalité résultant. En appliquant l'ascension duale au problème modifié, on obtient l'algorithme

$$x^{k+1} := \arg \min_x L_\rho(x, y^k) \quad (3.11)$$

$$y^{k+1} := y^k + \rho(Ax^{k+1} - b) \quad (3.12)$$

qui est connu sous le nom de méthode des multiplicateurs pour résoudre (3.7). C'est la même chose que l'ascension duale standard, sauf que l'étape de minimisation en x utilise le Lagrangien augmenté, et que le paramètre de pénalité ρ est utilisé comme taille de pas α^k . La méthode des multiplicateurs converge sous des conditions bien plus générales que l'ascension duale, y compris dans les cas où f prend la valeur $+\infty$ ou n'est pas strictement convexe.

Il est facile de motiver le choix de la taille de pas particulière ρ dans la mise à jour duale (3.12). Par souci de simplicité, nous supposons ici que f est différentiable, bien que cela ne soit pas nécessaire pour le bon fonctionnement de l'algorithme. Les conditions d'optimalité pour (3.7) sont la faisabilité primale et duale, c'est-à-dire

$$Ax^* - b = 0, \quad \nabla f(x^*) + A^T y^k = 0,$$

respectivement. Par définition, x^{k+1} minimise $L_\rho(x, y^k)$, donc

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_x L_\rho(x^{k+1}, y^k) \\ &= \nabla_x f(x^{k+1}) + A^T (y^k + \rho(Ax^{k+1} - b)) \\ &= \nabla_x f(x^{k+1}) + A^T y^{k+1} \end{aligned}$$

Nous voyons qu'en utilisant ρ comme taille de pas dans la mise à jour duale, l'itéré (x^{k+1}, y^{k+1}) est dualement réalisable. Au fur et à mesure que la méthode des multiplicateurs progresse, le résidu primal $Ax^{k+1} - b$ converge vers zéro, ce qui donne l'optimalité.

Les propriétés de convergence grandement améliorées de la méthode des multiplicateurs par rapport à l'ascension duale ont un coût. Lorsque f est séparable, le Lagrangien augmenté L_ρ n'est pas séparable, donc l'étape de minimisation en x (3.11) ne peut pas être effectuée séparément en parallèle pour chaque x_i . Cela signifie que la méthode de base des multiplicateurs ne peut pas être utilisée pour la décomposition. Nous verrons comment résoudre ce problème ensuite.

III.3.4 Etapes sur l'algorithme ADMM

L'ADMM est un algorithme conçu pour fusionner la décomposabilité de l'ascension duale avec les propriétés de convergence supérieures de la méthode des multiplicateurs. L'algorithme résout des problèmes de la forme

$$\begin{aligned} &\text{minimiser} && f(x) + g(z) \\ &\text{sous contrainte} && Ax + Bz = c, \end{aligned} \tag{3.13}$$

avec les variables $x \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}^m$, où $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$, et $c \in \mathbb{R}^p$. Nous supposons que f et g sont convexes. La seule différence par rapport au problème général sous contrainte d'égalité linéaire (3.7) est que la variable, appelée x dans ce problème, a été divisée en deux parties, appelées x et z ici, avec la fonction objectif séparable selon cette division. La valeur optimale du problème (3.13) sera notée par

$$p^* = \inf \{f(x) + g(z) \mid Ax + Bz = c\}.$$

Comme dans la méthode des multiplicateurs, nous formons le Lagrangien augmenté

$$L_\rho(x, z, y) = f(x) + g(z) + y^T(Ax + Bz - c) + (\rho/2)\|Ax + Bz - c\|_2^2.$$

L'ADMM consiste en les itérations suivantes :

$$x^{k+1} := \arg \min_x L_\rho(x, z^k, y^k) \tag{3.14}$$

$$z^{k+1} := \arg \min_z L_\rho(x^{k+1}, z, y^k) \tag{3.15}$$

$$y^{k+1} := y^k + \rho(Ax^{k+1} + Bz^{k+1} - c) \tag{3.16}$$

où $\rho > 0$. L'algorithme est très similaire à l'ascension duale et à la méthode des multiplicateurs : il consiste en une étape de minimisation en x (3.14), une étape de minimisation en z (3.15), et une mise à jour de la variable duale (3.16). Comme dans la méthode des multiplicateurs, la mise à jour de la variable duale utilise une taille de pas égale au paramètre du Lagrangien augmenté ρ .

La méthode des multiplicateurs pour (3.13) a la forme

$$\begin{aligned} (x^{k+1}, z^{k+1}) &:= \arg \min_{x, z} L_\rho(x, z, y^k) \\ y^{k+1} &:= y^k + \rho(Ax^{k+1} + Bz^{k+1} - c) \end{aligned}$$

Ici, le Lagrangien augmenté est minimisé conjointement par rapport aux deux variables primales. Dans ADMM, en revanche, x et z sont mis à jour de manière alternée ou séquentielle, ce qui explique le terme direction alternée. Séparer la minimisation sur x et z en deux étapes est précisément ce qui permet la décomposition lorsque f ou g sont séparables. L'état de l'algorithme dans ADMM est constitué de z^k et y^k . En d'autres termes, (z^{k+1}, y^{k+1}) est une fonction de (z^k, y^k) . La variable x^k ne fait pas partie de l'état ; c'est un résultat intermédiaire calculé à partir de l'état précédent (z^{k-1}, y^{k-1}) .

Si nous échangeons (réétiquetons) x et z , f et g , et A et B dans le problème (3.13), nous obtenons une variante d'ADMM avec l'ordre de l'étape de mise à jour de x (3.14) et de l'étape de mise à jour de z (3.15) inversé. Les rôles de x et z sont presque symétriques, mais pas tout à fait, puisque la mise à jour duale est effectuée après la mise à jour de z mais avant la mise à jour de x .

a. Forme Mise à l'Echelle

L'ADMM peut être écrit sous une forme légèrement différente, souvent plus pratique, en combinant les termes linéaires et quadratiques dans le Lagrangien augmenté et en mettant à l'échelle la variable duale. En définissant le résidu $r = Ax + Bz - c$, nous avons

$$\begin{aligned} y^T r + (\rho/2) \|r\|_2^2 &= (\rho/2) \|r + (1/\rho)y\|_2^2 - (1/2\rho) \|y\|_2^2 \\ &= (\rho/2) \|r + u\|_2^2 - (\rho/2) \|u\|_2^2, \end{aligned}$$

où $u = (1/\rho)y$ est la variable duale mise à l'échelle. En utilisant la variable duale mise à l'échelle, nous pouvons exprimer l'ADMM comme

$$x^{k+1} := \arg \min_x (f(x) + (\rho/2) \|Ax + Bz^k - c + u^k\|_2^2) \quad (3.17)$$

$$z^{k+1} := \arg \min_z (g(z) + (\rho/2) \|Ax^{k+1} + Bz - c + u^k\|_2^2) \quad (3.18)$$

$$u^{k+1} := u^k + Ax^{k+1} + Bz^{k+1} - c \quad (3.19)$$

En définissant le résidu à l'itération k comme $r^k = Ax^k + Bz^k - c$, nous voyons que

$$u^k = u^0 + \sum_{j=1}^k r^j,$$

la somme cumulée des résidus.

Nous appelons la première forme de l'ADMM ci-dessus, donnée par ((3.14)-(3.16)), la forme non mise à l'échelle, et la seconde forme ((3.17)-(3.19)) la forme mise à l'échelle, car elle est exprimée en fonction d'une version mise à l'échelle de la variable duale. Les deux sont clairement équivalentes, mais les formules dans la forme mise à l'échelle de l'ADMM sont souvent plus courtes que dans la forme non mise à l'échelle, donc nous utiliserons la forme mise à l'échelle dans la suite. Nous utiliserons la forme non mise à l'échelle lorsque nous souhaitons souligner le rôle de la variable duale ou donner une interprétation qui repose sur la variable duale (non mise à l'échelle).

III.4 Transformées en Ondelettes Biorthogonales

L'analyse et le traitement du signal constituent un pilier fondamental des sciences et technologies modernes. De la compression d'images médicales à la reconnaissance de formes en passant par la transmission de données numériques, les outils mathématiques permettant de représenter, transformer et interpréter les signaux sont au cœur d'innombrables innovations.

Parmi ces outils, la transformée de Fourier a longtemps régné en maître, offrant une représentation fréquentielle des signaux qui a révolutionné notre compréhension des phénomènes physiques. Pourtant, cette représentation présente une limitation majeure : elle perd toute information temporelle. Pour un signal variant dans le temps, savoir quelles fréquences le composent sans savoir à quel moment elles apparaissent revient à lire une partition sans connaître le tempo.

C'est dans ce contexte que les ondelettes ont émergé comme une alternative puissante et élégante. Véritables fenêtres mathématiques, elles permettent une analyse conjointe dans les domaines temporel et fréquentiel, offrant ainsi une résolution adaptative qui fait défaut à la transformée de Fourier classique.

Les ondelettes sont utiles dans diverses applications telles que la sismologie, l'analyse et le traitement du signal. Il est difficile de représenter efficacement des signaux avec une petite valeur de fonction calculable. Généralement, les ondelettes sont liées au filtrage. Il existe certaines similitudes entre les évaluations multi-résolution en temps continu, tandis que le banc de filtres signifie un filtrage sous-bande en temps discret. L'objectif principal du traitement des données est de générer des fonctions basées sur la construction de l'ensemble. Cela permet une description incisive, efficace et explicative du signal. La sélection du signal de base dépend du signal. Les exponentielles complexes de Fourier sont disponibles pour les signaux lisses, mais leurs performances sont médiocres pour les signaux discontinus dans les zones de hautes et basses fréquences. Les ondelettes ne sont rien d'autre qu'une petite fenêtre facile à traiter. Par conséquent, récemment, la transformation en ondelettes a joué un rôle important.

Dans de nombreux cas, la transformée en ondelettes joue un rôle important. Différentes familles d'ondelettes sont disponibles, telles que les ondelettes orthogonales, biorthogonales et biorthogonales inverses, l'ondelette de Daubechies, l'ondelette de Haar, les Symlets, les Coifflets et l'ondelette de Meyer discrète. Les familles d'ondelettes orthogonales et biorthogonales démontrent une propriété de phase linéaire utile dans la reconstruction des données.

III.4.1 Fondements Théoriques des Ondelettes

Avant de comparer leurs performances, posons les fondations mathématiques sur lesquelles repose l'édifice des ondelettes [1].

Orthogonalité : L'orthogonalité est un aspect important lié au traitement du signal car c'est une méthode facile dans les langages pour construire des structures de contrôle et de données. Sa nature est simple, elle a donc de nombreuses conceptions orthogonales avec moins d'attentes. Grâce à cela, nous sommes capables de lire, d'écrire et d'apprendre n'importe quel aspect d'un langage de programmation. Les significations des caractéristiques de l'orthogonalité sont indépendantes pour chaque contexte [9]. L'orthogonalité

reflète les angles droits, c'est-à-dire 90° .

Dans le modèle mathématique, l'orthogonalité décrit la perpendicularité pour l'algèbre linéaire avec des formes bilinéaires. Il y a deux éléments, x et y , qui sont orthogonaux. Si $B(x, y) = \text{angle de } 90 \text{ degrés}$. L'espace vectoriel a des vecteurs non nuls, qui sont auto-orthogonaux. La famille de fonctions orthogonales est utile dans la formation de la base.

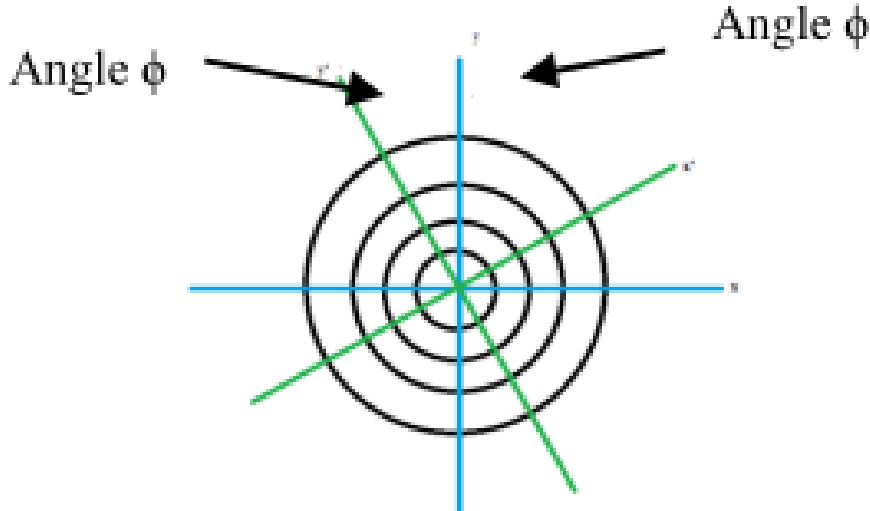


Figure 3.3: Orthogonalité

Signal Orthogonal : Le signal orthogonal est formé à l'aide du filtre miroir conjugué. Le filtre miroir divise l'axe des fréquences en différents intervalles. Ces intervalles ont des tailles différentes. Le banc de filtres conjugués correspond à diverses bases de paquets. Il est nécessaire d'isoler les petites fenêtres, c'est-à-dire la fenêtre d'ondelettes en présence du système variant dans le temps, car elle est responsable de la modification des propriétés du signal. Généralement, les bases cosinus locales sont obtenues par la simple multiplication des fenêtres et de la fonction cosinus. Ici, un paquet d'ondelettes divise l'axe des fréquences et est systématiquement transcrit dans le temps. Les bases cosinus locales divisent l'axe du temps et sont systématiquement transcrites en fréquence.

En fait, la condition linéaire et quadratique n'est pas suffisante pour la production d'un système orthogonal. La fonction $\psi(x)$ fournit le système orthogonal. Cela signifie que les $\psi_{j,k}$ comprennent la base orthonormale lorsqu'ils satisfont à la condition ci-dessous :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\theta(x-k)dx = \delta_{0,k} \quad (3.20)$$

Cette condition donne la condition équivalente pour l'orthogonalité.

Transformation en Ondelettes : Une ondelette est l'une des fonctions mathématiques utiles pour diviser un signal temporel continu ou une fonction en différentes composantes d'échelle. Fondamentalement, les ondelettes sont des oscillations qui ont une certaine valeur d'amplitude. Elles commencent à zéro, puis augmentent, et diminuent à nouveau pour revenir à 0. Cela ressemble aux brèves oscillations qui se produisent sur un sismographe.

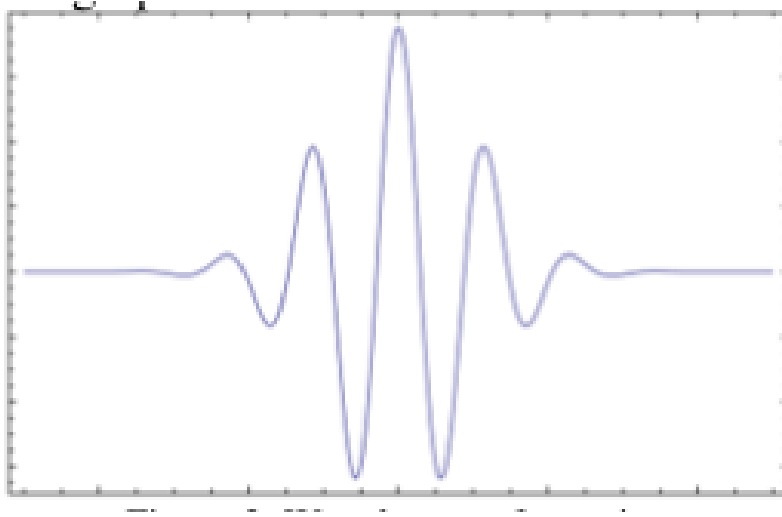


Figure 3.4: Transformation en ondelettes

Une plage de fréquences est assignée à chaque composante d'échelle. L'étude de chaque composante porte une résolution qui correspond à l'échelle. L'ondelette est utilisée pour diverses applications. Elle utilise la convolution. Les ondelettes sont très utiles pour obtenir la partie inconnue. Elle est combinée avec la partie connue d'un signal détruit pour récupérer les données des parties inconnues.

Fondamentalement, la transformée en ondelettes entre en jeu au moment où le signal est analysé, à la fois dans les domaines temporel et fréquentiel. Elle est surtout applicable au système variant dans le temps car elle offre une résolution de fréquence variable à la fin du processus de décomposition, en alternant STFT (Voir Equation (2.9)) et Fourier. Ici, la STFT supporte la transformée de Fourier pour le temps instantané t avec une fenêtre courte ayant un point médian au temps t . La longueur de la fenêtre est constante pour la STFT, donc elle ne supporte pas l'anatomie multi-résolution des signaux. L'ondelette est différente en ce sens qu'elle fournit à la fois une résolution temporelle et fréquentielle.

La fonction de transformation est appelée ondelette *Mère*. Le nom d'ondelette est dérivé des bébés ondes. Ces bébés ondes sont appelées une fonction oscillatoire. Le nom *Mère* entre en jeu car ces ondelettes sont formées à partir de diverses transformations de base. Considérons l'ondelette mère, qui est une fonction fenêtrée, qui est décalée avec le signal temporel où le temps varie de 0 à T . Les coefficients d'ondelette sont calculés par un processus simple. Après avoir multiplié une partie/morceau du signal dans la fenêtre et l'ondelette mère, leur intégration sur le temps complet aboutit à la génération du coefficient d'ondelette. Techniquement, la fenêtre de l'ondelette mère est aussi appelée la fenêtre de support. En raison de l'apparition d'un problème de résolution lié au temps et à la fréquence, la croyance complète en les ondelettes émane de la transformée de Fourier.

Une ondelette mère $\psi(t)$ est fondamentalement la fonction de moyenne 0. Mathématiquement, elle est représentée par :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (4) \quad (3.21)$$

La fonction ci-dessus est mise à l'échelle par **a** puis translatée vers un second scalaire **b**. Alors son ondelette mère est représentée par :

$$\psi_{a,T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-T}{a} \right) \quad (5)$$

La transformée en ondelettes $W(a, T)$ est représentée par :

$$W_x(a, T) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi^n \left(\frac{t-T}{a} \right) dt \quad (6) \quad (3.22)$$

où :

- T = Point quelconque dans le temps
- $\Psi^*(a, T)(t)$ = fonction ondelette
- $y(t)$ = entrée

Nous pouvons concevoir n'importe quelle base d'ondelettes orthogonale en utilisant le filtre miroir conjugué $\hat{h}(\omega)$:

$$|H_\theta(\omega)|^2 + |H_\theta(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (7) \quad (3.23)$$

$$H_\theta(0) = \sqrt{2} \quad (8) \quad (3.24)$$

Le filtre qui satisfait la relation ci-dessus est appelé filtre miroir conjugué [10]. Un filtre miroir conjugué est l'un des moyens les plus simples pour la construction d'une base d'ondelettes orthogonale. Le filtre miroir conjugué et la multi-résolution sont les méthodes de base pour la base d'ondelettes orthogonale [11]

La mise à l'échelle, le décalage, la remise à l'échelle, les moments disparaissants, le support, la régularité et la symétrie sont les propriétés de base de la transformation en ondelettes. L'approximation, le support compact, la symétrie, la régularité et les bases inconditionnelles sont quelques propriétés du système d'ondelettes biorthogonal. Le filtre d'échelle est utile pour déterminer la fonction d'échelle. Chaque filtre d'ondelette est décomposé en procédures de lifting, qui sont présentées par Sweldens et Daubechies.

La représentation de la décomposition d'une ondelette biorthogonale avec la forme du schéma de lifting est représentée comme suit :

$$d^1 = s_{2j} - \frac{1}{2} [s_{2j-1} + s_{2j+2}]$$

$$s^1 = s_{2j-1} + \frac{1}{4} [d_{j-1}^1 + d^{(1)}]$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} d^{(1)}$$

$$s_1 = \sqrt{2} s^{(1)}$$

À partir de l'équation mathématique ci-dessus, nous obtenons le nouveau signal

$$s = [s_1 D]$$

III.4.2 Ondelettes Orthogonales : Théorie et Propriétés

L'ondelette orthogonale est liée à la transformée en ondelettes, et elles sont orthogonales entre elles. L'orthogonalité évite les interférences afin qu'une sortie sans erreur puisse être obtenue. Grâce à ces caractéristiques, elle est le plus souvent préférable. Une ondelette orthogonale est l'adjoint de la transformée en ondelettes. Une fonction d'échelle unique avec une ondelette unique est le résultat d'une ondelette orthogonale.

Une ondelette orthogonale génère une ondelette dont la nature est orthogonale. Cela signifie qu'une transformée en ondelettes inverse ou transposée n'est rien d'autre que l'adjoint d'une transformée en ondelettes.

a. Exemples d'Ondelettes Orthogonales

L'Ondelette de Daubechies : appartient à la catégorie des ondelettes orthogonales. Un nombre plus élevé de moments disparaissants pour une longueur prédéfinie est une caractéristique de cette ondelette. Le nombre de moments est égal à la moitié de la longueur du support. Le nom de l'ondelette représente dbN, où N indique l'ordre de l'ondelette. N varie de 1 à 8. La figure ci-dessous montre l'ondelette de Daubechies pour différentes valeurs de N allant de 2 à 10.

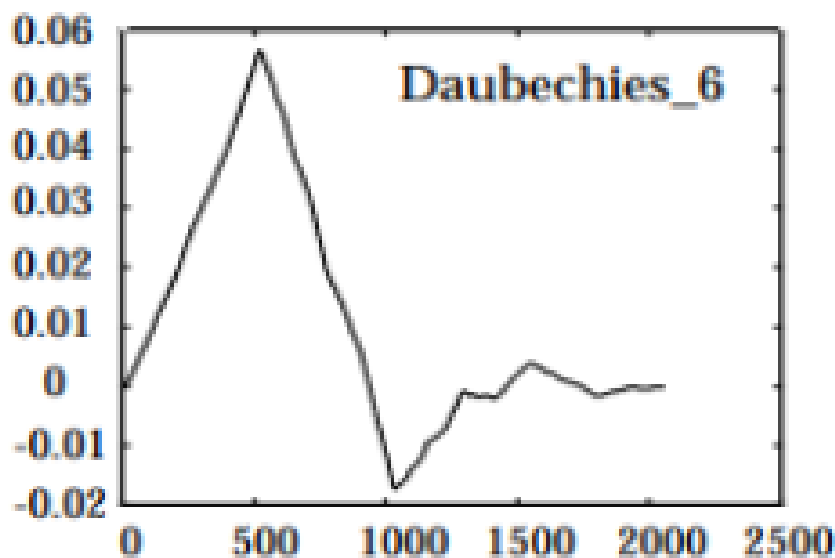


Figure 3.5: Ondelette de Daubechies pour différentes valeurs

L'Ondelette de Haar : a été étudiée par Alfred Haar et est considérée comme la première ondelette mère. Elle est célèbre car elle supporte la longueur la plus courte parmi toutes les ondelettes. Elle échoue en cas de reconstruction d'une fonction lisse car elle a un seul mouvement disparaissant. En tant que concept simple avec une réponse plus rapide, un moyen plus facile de détecter les informations et une utilisation efficace de la mémoire, l'ondelette de Haar est plus utile que les autres ondelettes. Elle est discontinue et similaire à une fonction échelon. Le signal divisé en deux sous-signaux de demi-longueur est décomposé par l'ondelette de Haar. Elle représente la fonction d'ondelette Daubechies 1.

Ici, nous définissons la fonction d'ondelette de Haar comme suit :

$$\psi^{Haar}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.25)$$

À partir de cela, nous obtenons la fonction suivante :

$$\psi_{j,k}^{Haar}(x) = 2^{j/2} \psi^{Haar}(2^j x - k) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{k+1/2}{2} \\ -1, & \frac{k+1/2}{2} \leq x \leq \frac{k+1}{2} \\ 0, & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (3.26)$$

Un $\phi(t)$ est une fonction d'échelle dans le temps t , qui est nommée l'ondelette père (fonction d'échelle, caractérise l'échelle de base de l'ondelette) :

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad (3.27)$$

où j = paramètre d'échelle; k = paramètre de translation; j et k appartiennent à S . S est un ensemble d'entiers.

La translation et l'échelle sont responsables de la génération d'une famille de fonctions, et à l'aide de la dilatation, peuvent former l'équation suivante :

$$\phi(t) = \sqrt{2 \sum_n h_n \phi(2t - n)} \quad (3.28)$$

Ici, h_n est l'ensemble des coefficients du filtre et $\sqrt{2}$ est un facteur d'échelle. L'existence de l'ondelette mère (fonction ondelette, caractérise la forme de base de l'ondelette) est représentée par :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (3.29)$$

Ceci est responsable de la formation de la base orthogonale pour $L^2 R$. Ici, $\psi(t)$ représente la somme pondérée des $\psi(2t)$ décalés :

$$\psi(t) = \sqrt{2 \sum_n g_n \phi(2t - n)} \quad (3.30)$$

La partie ondelette nécessite un espace complémentaire orthogonal. L'orthogonalité nécessite le filtre d'ondelette et les coefficients d'échelle, qui sont liés entre eux par :

$$g_n = (-1)^n h_{1-n} \quad (3.31)$$

Ici, la paire de g_n et h_n est appelée un filtre miroir en quadrature passe-haut et passe-bas.

Avantages et Limitations. Les ondelettes orthogonales offrent une représentation efficace et sans redondance des signaux. Cependant, de fortes limitations apparaissent au moment de la construction de l'ondelette, en raison de la propriété d'orthogonalité. Il est difficile de chercher ou de trouver des ondelettes qui soient symétriques, à support compact et orthogonales.

III.4.3 Ondelettes Biorthogonales

Dans certains cas, lorsque la condition d'orthogonalité échoue, cela donne lieu à des ondelettes biorthogonales. À ce stade, les ondelettes biorthogonales se forment et l'orthogonalité des ondelettes disparaît.

Fondamentalement, l'ondelette biorthogonale est le résultat de la généralisation de l'orthogonale classique. Une ondelette biorthogonale associée à la transformation en ondelettes est inversible. Si elle est inversible, elle n'a pas besoin d'être orthogonale. Dans le cas de la conception d'ondelettes orthogonales, l'ondelette biorthogonale permet une liberté maximale. Elle supporte également la construction de fonctions d'ondelettes symétriques.

Une ondelette biorthogonale génère une ondelette et une fonction d'échelle pour la décomposition et une paire supplémentaire pour la reconstruction. Deux fonctions d'échelle sont responsables de la génération de diverses analyses multi-résolution.

Ici, la fonction d'échelle duale est représentée mathématiquement comme suit :

$$\tilde{\phi}(t) = \sqrt{2} \sum_n \tilde{h}_n \tilde{\phi}(2t - n) \quad (3.32)$$

De même, l'ondelette duale est représentée par :

$$\tilde{\psi}(t) = \sqrt{2} \sum_n \tilde{g}_n \tilde{\psi}(2t - n) \quad (3.33)$$

Maintenant, l'échelle duale est liée comme suit :

$$\begin{aligned} g_n &= (-1)^n h_{1-n} \\ \tilde{g}_n &= (-1)^n \tilde{h}_{1-n} \end{aligned} \quad (3.34)$$

a. Construction par le Schéma de Lifting.

W. Sweldens a introduit la construction de l'ondelette biorthogonale en utilisant le schéma de lifting. Fondamentalement, le lifting est une méthode simple utile pour augmenter les moments disparaissants pour les ondelettes duales.

La naissance du schéma de lifting vient de Cohen et al. et Swelden [12]. Nous avons supposé que l'ensemble initial $\{h, \tilde{h}^0, g^0, \tilde{g}\}$ concernait des ondelettes biorthogonales finies. Ainsi, nous avons rassemblé un nouvel ensemble $\{h, \tilde{h}, g, \tilde{g}\}$, qui consiste en un filtre biorthogonal fini.

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\omega) &= \tilde{h}^0(\omega) + \tilde{g}(\omega) \overline{s(2\omega)} \\ \tilde{g}(\omega) &= g^0(\omega) + h(\omega) s(2\omega) \end{aligned} \quad (3.35)$$

D'après les équations ci-dessus, il est clair que les filtres d'échelle et d'ondelette duale ne sont pas modifiés. Par conséquent, les fonctions biorthogonales sont dérivées des filtres ci-dessus. L'ensemble $\{\phi, \tilde{\phi}^0, \psi^0, \tilde{\psi}^0\}$ est l'ensemble initial, qui contient la fonction d'échelle biorthogonale. Le nouvel ensemble obtenu est $\{\phi, \tilde{\phi}, \psi, \tilde{\psi}\}$. Ainsi, l'ondelette biorthogonale a été obtenue comme suit :

$$\psi(x) = \psi^0(x) - \sum_k s_k \phi(x - k) \quad (3.36)$$

$$\tilde{\phi}(x) = 2 \sum_k \tilde{h}_k^0 \phi(2x - k) + \sum_k s_{-k} \tilde{\psi}(x - k) \quad (3.37)$$

$$\tilde{\psi}(x) = 2 \sum_k \tilde{g}_k \tilde{\phi}(2x - k) \quad (3.38)$$

Ici s_k peut être choisi aléatoirement. La valeur de s est responsable de la manipulation des fonctions duales et des ondelettes dérivées d'une fonction d'échelle simple.

b. Propriétés des Ondelettes Biorthogonales

Une ondelette biorthogonale permet deux analyses multi-résolution : $V_j, W_j, \phi_{j,k}, \psi_{j,k}$ et $\tilde{V}_j, \tilde{W}_j, \tilde{\phi}_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,k}$. La dilatation et la translation des fonctions d'échelle, $(\phi_{j,k}(x))$ et $(\psi_{j,k}(x))$ constituent la base pour V_j et W_j , respectivement. La biorthogonalité satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_j &\perp W_j \\ V_j &\perp \tilde{W}_j \\ \langle \tilde{\phi}_{j,l}, \phi_{j,l'} \rangle &= \delta_{l,l'} \\ \langle \tilde{\psi}_{j,l}, \psi_{j,l'} \rangle &= \delta_{j,j'} \delta_{l,l'} \\ \langle \tilde{\phi}_{j,l}, \psi_{j,l'} \rangle &= 0 \quad \text{et} \quad \langle \tilde{\psi}_{j,l}, \phi_{j,l'} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

La caractéristique la plus significative de la biorthogonalité est la reconstruction parfaite.

c. Comparaison avec les Ondelettes Orthogonales

Une ondelette biorthogonale est plus avancée qu'une ondelette orthogonale. Cependant, elle nécessite plus d'efforts de calcul et est un processus plus long. Une variation de longueur est la principale différence entre l'ondelette orthogonale et l'ondelette biorthogonale lors de l'analyse, ainsi que dans le processus de synthèse. Dans une ondelette orthogonale, des filtres de même longueur sont utilisés et dans l'ondelette biorthogonale, des filtres de longueurs différentes sont utilisés.

La différence entre les ondelettes orthogonales et biorthogonales est qu'une ondelette orthogonale fournit une matrice orthogonale avec transformation unitaire, tandis qu'une ondelette biorthogonale donne une matrice inversible, c'est-à-dire une matrice inverse avec reconstruction parfaite. Dans le cas d'un filtre d'ondelette biorthogonal, le filtre passe-bas (LPF) et le filtre passe-haut (HPF) ont des longueurs différentes. Le filtre passe-bas démontre la symétrie, tandis que le filtre passe-haut est asymétrique ou symétrique.

III.4.4 Indicateurs permettant d'évaluer la qualité de la reconstruction

Dans le domaine du traitement d'images et de la compression de données, il est crucial de pouvoir mesurer objectivement la qualité d'une image reconstruite (ou décompressée) par rapport à son original. Ces mesures permettent de quantifier la fidélité de la reconstruction et l'information perdue (la distorsion) lors du processus. Cette section détaille trois métriques fondamentales, dont les définitions sont présentées dans le document source (image jointe).

a. Mean Squared Error (Erreur Quadratique Moyenne)

L'Erreur Quadratique Moyenne, ou Mean Squared Error (MSE), est la métrique la plus simple et la plus courante pour évaluer la différence entre deux images. Elle quantifie l'énergie de l'erreur pixel par pixel.

Comme indiqué dans le document [[13], [14]], sa définition mathématique est la suivante :

$$MSE = \frac{1}{P \times Q} \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{Q-1} (I_{ij} - \hat{T}_{ij})^2$$

Où :

- MSE : désigne l'Erreur Quadratique Moyenne.
- P : désigne le nombre de lignes (hauteur) de l'image.
- Q : désigne le nombre de colonnes (largeur) de l'image.
- I_{ij} : désigne la valeur du pixel à la position (i, j) dans l'image originale.
- \hat{T}_{ij} : désigne la valeur du pixel à la position (i, j) dans l'image reconstruite (ou décompressée).

Interprétation :

- Le calcul consiste à faire la différence entre chaque pixel de l'original et de la reconstruction, à élever cette différence au carré (pour éviter les compensations entre erreurs positives et négatives, et pour pénaliser plus lourdement les grandes erreurs), puis à en faire la moyenne sur toute l'image.
- Une valeur de $MSE = 0$ signifie que les deux images sont identiques (reconstruction parfaite).
- Plus la valeur de la MSE est élevée, plus la différence entre l'original et la reconstruction est grande, indiquant une perte de qualité significative.

b. Peak Signal-to-Noise Ratio (Rapport Signal sur Bruit de Crête)

Le Rapport Signal sur Bruit de Crête, ou Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR), est une métrique dérivée de la MSE. Elle est très populaire car elle exprime la qualité en décibels (dB), une échelle souvent plus intuitive pour les ingénieurs. Le PSNR met en relation la puissance maximale possible d'un signal (l'image) avec la puissance du bruit (l'erreur) qui dégrade sa qualité.

La formule donnée dans le document [[15], [16]] est la suivante :

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{65025}{MSE} \right)$$

Où :

- $PSNR$: désigne le Rapport Signal sur Bruit de Crête.

- MSE : désigne l'Erreur Quadratique Moyenne calculée en (3).

Détail important : La valeur 65025 dans la formule est spécifique aux images en niveaux de gris codées sur 8 bits. Dans ce codage, la valeur maximale qu'un pixel peut prendre est $2^8 - 1 = 255$. Le terme 65025 est simplement le carré de cette valeur maximale (255^2). Plus généralement, la formule s'écrit $PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{MAX^2}{MSE} \right)$, où MAX est la valeur dynamique maximale des pixels.

Interprétation :

- Le PSNR est inversement proportionnel à la MSE. Une MSE faible donnera un PSNR élevé, et vice-versa.
- Une reconstruction parfaite ($MSE = 0$) donne un PSNR théoriquement infini.
- En pratique, pour une image 8 bits :
 - Un PSNR > 40 dB est généralement considéré comme une excellente qualité (très proche de l'original).
 - Un PSNR entre 30 et 40 dB est souvent jugé comme une bonne qualité (les pertes sont visibles mais acceptables).
 - Un PSNR < 20 dB indique une très mauvaise qualité.

c. Structural Similarity Index (Indice de Similarité Structurale)

Bien que très utilisées, la MSE et le PSNR sont des métriques purement numériques basées sur les différences de valeurs de pixels. Elles ne correspondent pas toujours à la perception visuelle humaine. L'Indice de Similarité Structurale, ou Structural Similarity Index (SSIM), a été développé pour pallier ce problème en se concentrant sur la perception de l'information structurelle d'une scène.

Le document [[17], [18]] en fournit la définition :

$$SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)}$$

Où, pour une fenêtre de l'image x (original) et y (reconstruit) :

- μ_x, μ_y : sont les moyennes des intensités des pixels dans les fenêtres x et y . Elles estiment la luminance.
- σ_x^2, σ_y^2 : sont les variances des intensités. Elles estiment le contraste.
- σ_{xy} : est la covariance entre x et y . Elle mesure la corrélation ou la similarité structurelle (comment les motifs varient ensemble).
- C_1, C_2 : sont deux constantes servant à stabiliser la division lorsque les dénominateurs sont faibles.

Interprétation :

- Le SSIM est calculé localement sur différentes fenêtres de l'image, puis la moyenne de ces valeurs donne un score global.
- La valeur du SSIM est comprise entre -1 et 1.
- Une valeur de 1 indique une similarité parfaite (les deux images sont identiques).
- Plus la valeur est proche de 1, meilleure est la qualité perçue. Une valeur de 0,97 ou 0,98 indique une très haute similarité structurelle, correspondant mieux à la perception humaine qu'un simple calcul d'erreur quadratique.

III.4.5 Résolution du problème inverse CT par régularisation parcimonieuse : une approche ADMM associée aux ondelettes biorthogonales 4.4

La reconstruction tomographique à partir de données incomplètes ou bruitées constitue un problème inverse mal posé. Pour y remédier, une approche classique consiste à introduire un a priori sur la solution dans un cadre variationnel. Nous détaillons ici la stratégie d'optimisation retenue, fondée sur une régularisation favorisant la parcimonie des coefficients d'ondelettes.

a. Formulation variationnelle du problème de reconstruction CT régularisée

Le problème de reconstruction d'image $x \in \mathbb{R}^n$ à partir de mesures sinographiques $y \in \mathbb{R}^m$ peut s'écrire sous la forme du problème d'optimisation suivant :

$$\min_x \frac{1}{2} \|\mathcal{A}x - y\|_2^2 + \lambda \|Wx\|_1, \quad (3.40)$$

où:

- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est l'opérateur de projection modélisant l'acquisition CT (transformée de Radon discrète ou matrice système) ;
- $y \in \mathbb{R}^m$ représente les données mesurées (sinogramme) ;
- $\lambda > 0$ est le paramètre de régularisation contrôlant le compromis entre la fidélité aux données et le terme a priori ;
- $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la transformée en ondelettes biorthogonales `bior4.4` (définie par les filtres d'analyse) ;
- $\|\cdot\|_1$ est la norme ℓ_1 qui, appliquée aux coefficients d'ondelettes Wx , promeut la parcimonie.

La minimisation directe du problème (3.40) est rendue complexe par la présence de la norme ℓ_1 , un terme non-différentiable. Cette caractéristique exclut l'utilisation de méthodes d'optimisation simples basées uniquement sur le gradient et empêche l'obtention d'une solution sous forme analytique explicite. Il est donc nécessaire de recourir à des algorithmes itératifs plus sophistiqués, capables de traiter efficacement ce type de fonction objectif composite.

b. Séparation de variables et algorithme ADMM

Pour surmonter la difficulté liée à la non-différentiabilité, nous introduisons l'algorithme du Multiplicateur à Direction Alternée (ADMM). La première étape consiste à reformuler le problème en séparant les termes quadratique et non-différentiable via l'introduction d'une variable auxiliaire z . En posant $z = Wx$, le problème (3.40) devient un problème d'optimisation sous contrainte d'égalité :

$$\min_{x,z} \frac{1}{2} \|\mathcal{A}x - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \|z\|_1 \quad \text{tel que} \quad Wx - z = 0.$$

Cette formulation est au cœur de l'ADMM : elle découple la difficulté du problème initial. La variable x n'intervient désormais que dans le terme d'attache aux données (quadratique), tandis que la variable z supporte seule le terme de régularisation non-différentiable (ℓ_1).

c. Lagrangien augmenté et mises à jour itératives

L'algorithme ADMM résout le problème contraint en minimisant le Lagrangien augmenté associé. Introduisons la variable duale mise à l'échelle u et le paramètre de pénalité $\rho > 0$. Le Lagrangien augmenté s'écrit :

$$L_\rho(x, z, u) = \frac{1}{2} \|\mathcal{A}x - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \|z\|_1 + \frac{\rho}{2} \|Wx - z + u\|_2^2.$$

Le terme quadratique supplémentaire, pondéré par ρ , pénalise l'écart à la contrainte $Wx = z$ et rend le sous-problème en x strictement convexe, facilitant ainsi sa résolution. Le paramètre ρ joue un rôle crucial dans la vitesse de convergence de l'algorithme en contrôlant le pas de la mise à jour duale. L'optimisation se fait alors de manière itérative et alternée sur les blocs de variables x , z , et u .

Mise à jour de x (sous-problème quadratique) À l'itération k , les variables z^k et u^k étant fixées, la mise à jour de x consiste à résoudre le problème de minimisation quadratique suivant :

$$x^{k+1} = \arg \min_x \frac{1}{2} \|\mathcal{A}x - \mathbf{y}\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \|Wx - z^k + u^k\|_2^2.$$

Ce problème admet une solution unique obtenue en annulant le gradient. En développant les deux normes quadratiques et en calculant le gradient par rapport à x , on obtient le système linéaire suivant :

$$(A^T A + \rho W^T W) x = A^T y + \rho W^T (z^k - u^k),$$

où A est la représentation matricielle de l'opérateur \mathcal{A} . La matrice $A^T A$ est symétrique semi-définie positive, typiquement mal conditionnée en tomographie. L'ajout du terme $\rho W^T W$, où $W^T W$ est définie positive (car la transformée en ondelettes est bi-orthogonale et surjective), améliore le conditionnement du système, le rendant définie positif et bien posé. La résolution de ce système linéaire à chaque itération est effectuée de manière efficace par l'algorithme du gradient conjugué [19], en exploitant la structure particulière des opérateurs.

Mise à jour de z (seuillage doux) La variable z est ensuite mise à jour en fixant x^{k+1} et u^k . Le problème à résoudre est :

$$z^{k+1} = \arg \min_z \lambda \|z\|_1 + \frac{\rho}{2} \|z - (Wx^{k+1} + u^k)\|_2^2.$$

Cette formulation correspond exactement à l'opérateur proximal [20] de la norme ℓ_1 , dont la solution est donnée par l'opérateur de seuillage doux (soft-thresholding) :

$$z^{k+1} = \mathcal{S}_{\lambda/\rho} (Wx^{k+1} + u^k),$$

où $\mathcal{S}_\tau(t) = \text{sign}(t) \max\{0, |t| - \tau\}$ est appliqué composante par composante. Cette étape est fondamentale pour imposer la parcimonie : les coefficients d'ondelettes de faible amplitude (inférieurs au seuil $\tau = \lambda/\rho$) sont mis à zéro, tandis que les coefficients significatifs sont réduits. La parcimonie est donc explicitement appliquée dans le domaine des ondelettes via la variable z .

Mise à jour de la variable duale u Enfin, la variable duale (mise à l'échelle) est actualisée pour tenir compte de la violation de la contrainte $Wx - z = 0$:

$$u^{k+1} = u^k + (Wx^{k+1} - z^{k+1}).$$

Cette mise à jour, caractéristique de l'approche de type "dual ascent", ajuste la pénalité linéaire. Lorsque la contrainte est satisfaite ($Wx^{k+1} \approx z^{k+1}$), la variation de u devient négligeable, signalant la convergence de l'algorithme. Dans le cas contraire, la variable duale intègre l'erreur de contrainte, ce qui influence les itérations suivantes de x et z pour forcer leur accord.

Conclusion

Ce chapitre a posé les fondements théoriques et algorithmiques du modèle de reconstruction proposé pour la tomodesitométrie à faible dose. La réduction du nombre de mesures transforme le problème de reconstruction en un problème inverse mal posé, caractérisé par une non-unicité de la solution et une sensibilité accrue au bruit. Dans ce contexte, le cadre du *compressed sensing* fournit une approche rigoureuse en exploitant la parcimonie des images dans un domaine de représentation approprié, permettant ainsi de restreindre l'espace des solutions admissibles et de stabiliser le processus de reconstruction.

Sur cette base, le problème a été formulé sous la forme d'un problème variationnel combinant un terme de fidélité aux données, dérivé du modèle d'acquisition tomographique, et un terme de régularisation favorisant la parcimonie des coefficients dans une base d'ondelettes biorthogonales **bior4.4**. Ce choix se justifie par la capacité de ces ondelettes à fournir une représentation multi-échelles efficace des images, tout en préservant les structures géométriques et les discontinuités, caractéristiques essentielles des images tomographiques. La régularisation par norme ℓ_1 constitue, dans ce cadre, un compromis optimal entre expressivité du modèle et tractabilité numérique.

La résolution du problème d'optimisation associé a été réalisée à l'aide de l'algorithme ADMM (*Alternating Direction Method of Multipliers*), dont la structure permet de découpler le terme de fidélité et le terme de régularisation. Cette décomposition conduit à une succession de sous-problèmes convexes, admettant des solutions efficaces et bien conditionnées : une étape quadratique pour la mise à jour de la variable image, une étape

proximale correspondant à un opérateur de seuillage doux imposant la parcimonie, et une mise à jour duale assurant la cohérence des contraintes. Cette stratégie garantit à la fois la robustesse, la stabilité et l'efficacité computationnelle du schéma de reconstruction.

Par ailleurs, un cadre d'évaluation rigoureux a été défini à l'aide de métriques quantitatives complémentaires, notamment la MSE, le PSNR et le SSIM, permettant d'évaluer respectivement la précision numérique, la qualité énergétique et la fidélité structurelle des images reconstruites. Ces indicateurs offrent une caractérisation objective et multidimensionnelle des performances du modèle.

En définitive, ce chapitre a permis d'établir une formulation mathématique cohérente et un schéma algorithmique efficace pour la reconstruction d'images tomographiques à faible dose, fondés sur la combinaison d'une régularisation parcimonieuse en ondelettes biorthogonales et d'un algorithme d'optimisation de type ADMM. Ce cadre constitue une base solide pour l'étude expérimentale présentée dans le chapitre suivant, qui visera à valider empiriquement les propriétés du modèle et à analyser son comportement dans des conditions réalistes d'acquisition à faible dose.

CHAPITRE IV

SIMULATION, DÉVELOPPEMENT ET APPLICATIONS INNOVANTES EN RECONSTRUCTION D'IMAGES CT

IV.1 Collecte des données

IV.1.1 Transformée de Radon et de la Génération de Sinogrammes

La génération d'un sinogramme 4.2 constitue une étape centrale en tomographie, notamment en imagerie médicale et industrielle. Elle repose sur un outil mathématique fondamental appelé transformée de Radon, qui permet de représenter une image bidimensionnelle sous forme d'un ensemble de projections unidimensionnelles. Ce processus consiste à mesurer l'intégrale de l'intensité de l'image le long de droites orientées selon différents angles, simulant ainsi le principe physique de l'acquisition tomographique. Cette transformation permet de passer de l'espace spatial de l'image à un espace de projections, appelé espace de Radon, qui contient l'information nécessaire à la reconstruction de l'image originale. L'implémentation numérique complète de ce processus, incluant la discrétisation, le calcul des projections et la construction du sinogramme, est présentée dans le code fourni en Annexe A.

La transformée de Radon d'une fonction continue $f(x, y)$, représentant l'intensité de l'image, est définie comme l'intégrale de cette fonction le long d'une droite caractérisée par un angle θ et une distance s par rapport à l'origine. Mathématiquement, elle s'écrit :

$$\mathcal{R}f(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y), \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s), dx, dy$$

où δ désigne la fonction delta de Dirac, qui permet de sélectionner uniquement les points appartenant à la droite considérée. Cette formulation exprime le fait que chaque valeur de la transformée correspond à une projection de l'image selon une direction donnée. D'un point de vue géométrique, pour un angle fixé, la transformée calcule la somme des intensités de tous les points situés le long de droites parallèles. En faisant varier l'angle, on obtient un ensemble complet de projections décrivant l'image sous différents points de vue.

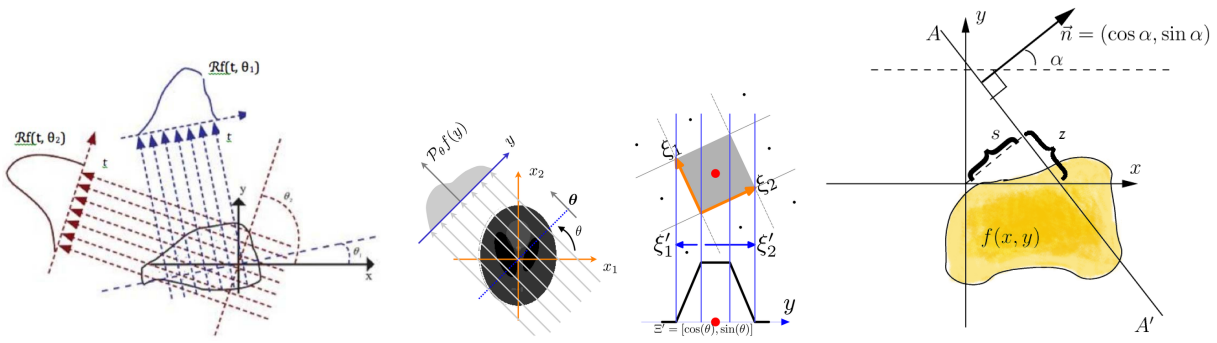


Figure 4.1: Processus de transformation de Radon

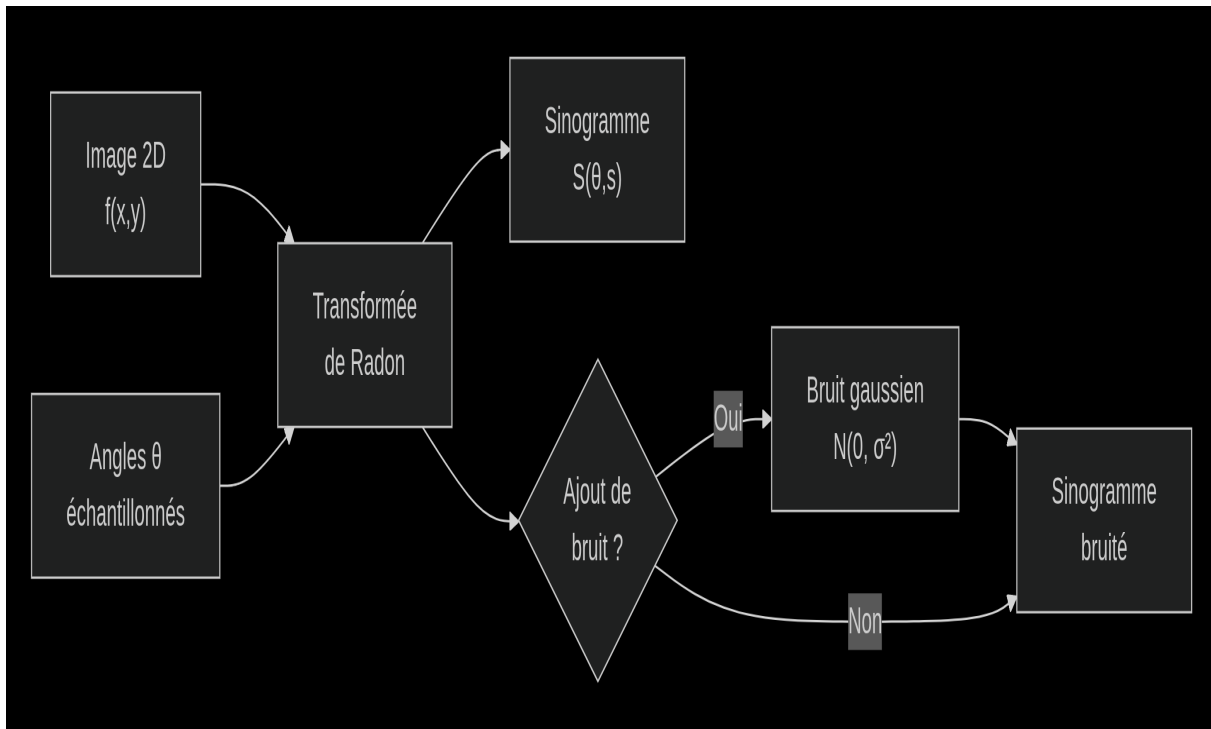


Figure 4.2: Diagramme de génération d'un sinogramme

Dans la pratique, cette transformation continue doit être discrétisée afin d'être implémentée numériquement. Les angles de projection sont échantillonnés uniformément dans l'intervalle $[0, 180^\circ[$ selon la relation :

$$\theta_k = \frac{180^\circ}{N} \cdot k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

où N représente le nombre total de projections. Pour chaque angle discret, l'image est projetée sur un ensemble de détecteurs qui échantillonnent la variable spatiale s . Le résultat de ce processus est organisé sous forme d'une matrice appelée sinogramme, notée $S \in \mathbb{R}^{M \times N}$, où M correspond au nombre de détecteurs et N au nombre d'angles. Chaque colonne du sinogramme contient la projection de l'image pour un angle donné, tandis que chaque ligne correspond à la variation des projections pour un détecteur donné lorsque l'angle

change. L'algorithme détaillé de cette discrétisation ainsi que la structure matricielle utilisée pour stocker les données sont explicitement décrits dans le code de l'Annexe A, afin d'assurer la reproductibilité des résultats présentés.

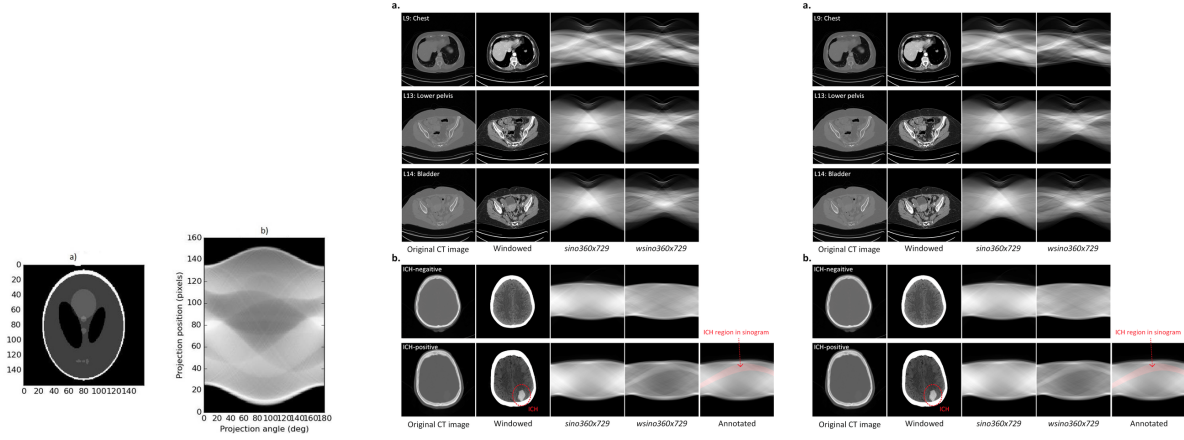


Figure 4.3: Images-Sinogrammes pairs

Dans les systèmes réels, les mesures sont inévitablement affectées par le bruit, provenant principalement des limitations électroniques des détecteurs, des fluctuations statistiques du signal et des perturbations environnementales. Ce bruit est généralement modélisé comme un bruit additif gaussien, ce qui conduit à l'expression :

$$S_{\text{bruité}}(s, \theta) = S(s, \theta) + \eta(s, \theta)$$

où $\eta(s, \theta)$ est une variable aléatoire suivant une distribution normale de moyenne nulle et de variance σ^2 . Cette modélisation permet de reproduire de manière réaliste les conditions expérimentales et constitue une étape essentielle pour l'évaluation des algorithmes de reconstruction. Le mécanisme d'ajout de bruit, paramétré par un niveau de variance contrôlé, est également intégré dans l'implémentation fournie en Annexe A.

La transformée de Radon possède plusieurs propriétés mathématiques fondamentales qui expliquent son importance en tomographie. Elle est linéaire, ce qui signifie que la projection d'une combinaison linéaire de fonctions est égale à la combinaison linéaire de leurs projections. Elle présente également une propriété de symétrie qui réduit la plage angulaire nécessaire à l'acquisition. Plus important encore, elle est étroitement liée à la transformée de Fourier par le théorème de la coupe centrale, selon lequel la transformée de Fourier d'une projection correspond à une coupe radiale de la transformée de Fourier bidimensionnelle de l'image. Cette propriété constitue le fondement théorique de nombreux algorithmes de reconstruction, notamment la rétroprojection filtrée.

D'un point de vue physique, la génération d'un sinogramme correspond à la mesure de l'atténuation d'un rayonnement traversant un objet selon différentes directions. Chaque projection représente l'accumulation des interactions du rayonnement avec la matière le long de sa trajectoire. Cette représentation permet de transformer un problème de reconstruction bidimensionnelle en un ensemble structuré de mesures unidimensionnelles, facilitant ainsi l'analyse, la modélisation et le traitement numérique.

IV.1.2 Sous-Échantillonnage Angulaire en Tomographie pour le Compressed Sensing

L'introduction de ce rapport présente le sous-échantillonnage angulaire comme une technique centrale en tomographie moderne, notamment dans le cadre du Compressed Sensing (CS). Cette approche permet de réduire la dose d'irradiation lors des acquisitions médicales tout en conservant une qualité d'image satisfaisante, grâce à des algorithmes de reconstruction avancés. Elle répond aux besoins croissants de sécurité des patients et d'acquisition rapide, tout en exploitant les propriétés structurelles des images médicales.

En tomographie conventionnelle, le critère de Nyquist définit le nombre minimal d'angles nécessaires pour éviter les artefacts de repliement spectral dans le sinogramme. Formellement, on a :

$$N_{\text{angles}} \geq \frac{\pi}{2} \cdot N_{\text{pixels}}$$

Le sous-échantillonnage consiste à acquérir volontairement moins d'angles que cette limite. Ainsi, le nombre d'angles sous-échantillonnés s'écrit :

$$N_{\text{sous-échantillonné}} = \alpha \cdot N_{\text{complet}}$$

où $\alpha \in [0, 1]$ représente le facteur de sous-échantillonnage. Cette réduction entraîne une perte d'information, mais le Compressed Sensing permet de compenser cette limitation grâce à des hypothèses de parcimonie sur l'image.

La sélection des angles pour le sous-échantillonnage suit généralement un processus aléatoire uniforme, sans remise, afin de garantir l'incohérence nécessaire au CS :

$$\Theta_{\text{sous}} = \{\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \dots, \theta_{i_M}\}$$

où $\{i_1, i_2, \dots, i_M\}$ est un sous-ensemble aléatoire de $\{0, 1, \dots, N-1\}$, et $M = \lfloor \alpha \cdot N \rfloor$ correspond au nombre d'angles acquis. Les indices sont triés pour préserver l'ordre angulaire, ce qui facilite l'interprétation du sinogramme (Voir Annexe A pour l'implémentation).

Le Compressed Sensing repose sur trois concepts fondamentaux : la parcimonie, qui veut que l'image soit parcimonieuse dans un domaine de transformation Ψ (c'est-à-dire que seule une fraction des coefficients est significative) ; l'incohérence, qui exige que la matrice de mesure Φ soit incohérente par rapport à la base dans laquelle l'image est parcimonieuse ; et la reconstruction non-linéaire, où le signal est reconstruit via une optimisation qui favorise la parcimonie, typiquement par la minimisation de la norme L_1 .

Pour une image $x \in \mathbb{R}^n$, le sinogramme sous-échantillonné y est obtenu par :

$$y = \Phi x + \epsilon$$

où $y \in \mathbb{R}^m$ est le sinogramme ($m \ll n$), $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ représente l'opérateur de mesure (transformée de Radon partielle), et ϵ est le bruit de mesure. Cette formulation traduit un problème inverse sous-déterminé.

Pour garantir une reconstruction fiable, la matrice de mesure Φ doit respecter la propriété d'isométrie restreinte (RIP) :

$$(1 - \delta_k)\|x\|_2^2 \leq \|\Phi x\|_2^2 \leq (1 + \delta_k)\|x\|_2^2$$

pour tous les vecteurs k -parcimonieux x , avec $\delta_k \in [0, 1)$. Cette condition garantit que les distances entre vecteurs parcimonieux sont approximativement conservées après projection.

Le théorème de la coupe centrale (Fourier Slice Theorem) établit que la transformée de Radon d'une image correspond à des lignes radiales dans son espace de Fourier. Ainsi, le sous-échantillonnage angulaire entraîne un sous-échantillonnage radial :

$$\mathcal{F}_{1D}[\mathcal{R}f(\theta, s)](\omega) = \mathcal{F}_{2D}[f](\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$$

En pratique, seules certaines lignes radiales sont acquises, ce qui crée des zones vides dans le plan de Fourier (Voir Annexe A pour l'implémentation).

L'opérateur de Radon partiel \mathcal{R}_Θ ne conserve qu'un sous-ensemble des angles :

$$\mathcal{R}_\Theta f(s) = \{\mathcal{R}f(\theta, s) : \theta \in \Theta_{\text{sous}}\}$$

On obtient ainsi un problème inverse sous-déterminé :

$$y = \mathcal{R}_\Theta x$$

Le taux de sous-échantillonnage est simplement le ratio entre le nombre d'angles acquis et le nombre total d'angles complets :

$$\text{Taux} = \frac{M}{N} = \alpha$$

où M est le nombre d'angles réellement acquis.

La reconstruction consiste à résoudre l'optimisation :

$$\hat{x} = \arg \min_x \|\Psi x\|_1 \quad \text{sous contrainte} \quad \|\mathcal{R}_\Theta x - y\|_2 \leq \epsilon$$

où Ψ est un opérateur de transformation vers un domaine parcimonieux (i.e Bi-orthogonal Wavelet Transform, gradient, DCT), $\|\cdot\|_1$ favorise la parcimonie, et ϵ représente le niveau de bruit (Voir Annexe A pour l'implémentation).

Dans la plupart des applications, la parcimonie est obtenue dans le domaine des ondelettes :

$$x = \Psi c$$

avec $\|c\|_0 \ll n$ où $\|c\|_0$ est le nombre de coefficients significatifs.

Le pipeline complet (Voir Figure 4.4) du processus peut être visualisé comme suit : l'image originale x subit une transformée de Radon complète, puis un sous-échantillonnage

angulaire aléatoire basé sur le facteur α pour produire un sinogramme sous-échantillonné y . Ce sinogramme est ensuite traité par un algorithme de reconstruction CS, qui utilise la minimisation L1 dans un domaine de parcimonie Ψ pour finalement produire l'image reconstruite \hat{x} (Voir Annexe A pour l'implémentation).

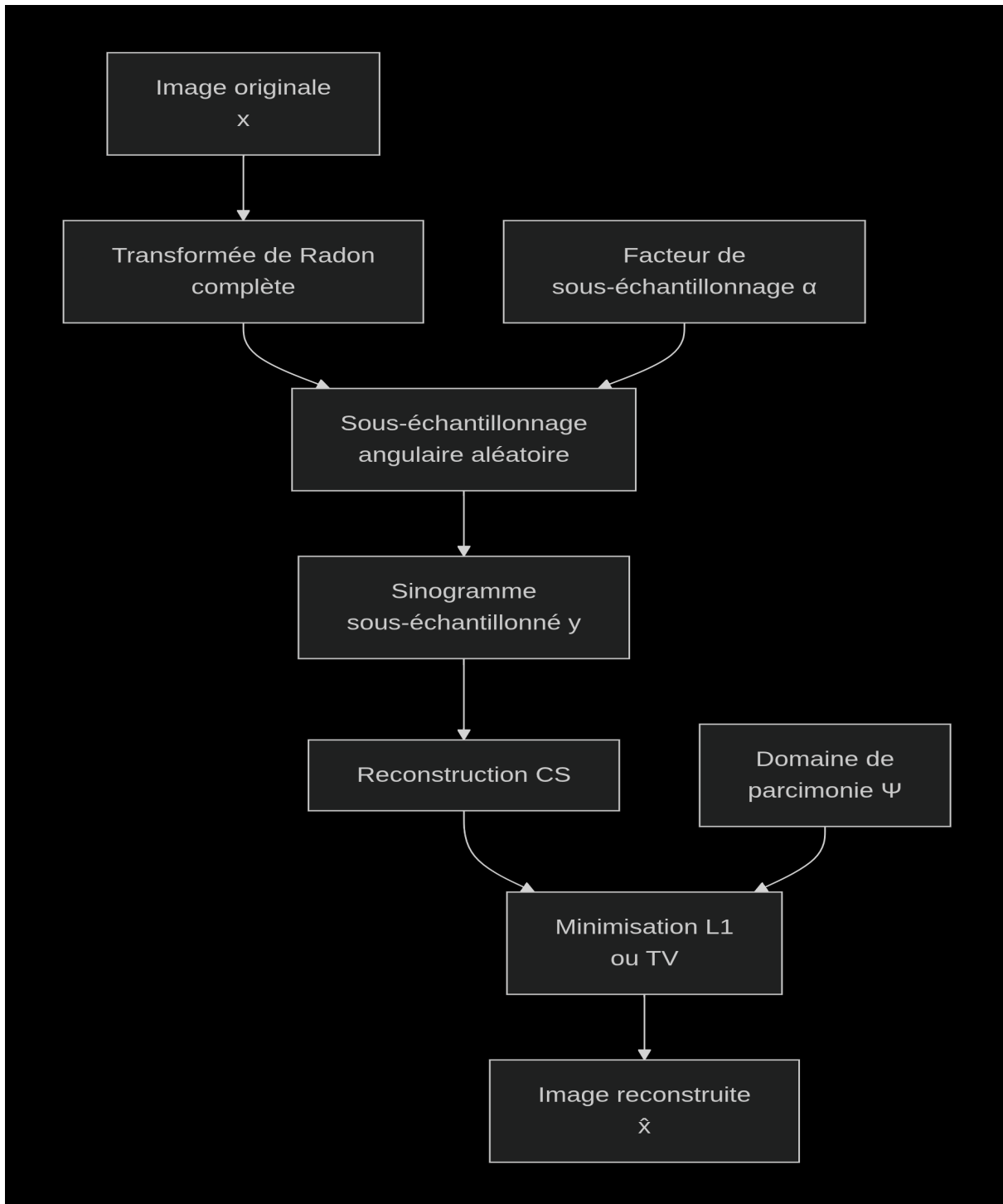


Figure 4.4: Pipeline de sous-échantillonnage angulaire

Le nombre minimal d'angles pour une reconstruction fidèle est donné par :

$$M \geq C \cdot k \cdot \log \left(\frac{n}{k} \right)$$

où k est la parcimonie de l'image, n sa dimension et C une constante dépendant de l'opérateur de mesure. L'erreur de reconstruction est bornée par :

$$\|\hat{x} - x\|_2 \leq C_1 \frac{\|x - x_k\|_1}{\sqrt{k}} + C_2 \epsilon$$

avec x_k la meilleure approximation k -parcimonieuse de x . Le processus reste robuste au bruit tant que :

$$\frac{\|\epsilon\|_2}{\|y\|_2} \ll \frac{1}{\sqrt{\log n}}.$$

Dans les applications cliniques, le sous-échantillonnage angulaire permet de diminuer la dose d'irradiation proportionnellement au facteur α :

$$\text{Dose}_{\text{réduite}} = \alpha \cdot \text{Dose}_{\text{complète}}$$

En imagerie cardiaque, l'acquisition sous-échantillonnée peut être synchronisée avec le cycle cardiaque :

$$\Theta_{\text{cardio}} = \{\theta \in [0, 180] : \text{phase cardiaque} = \text{cible}\}$$

Pour l'imagerie dynamique (tomographie 4D), les angles peuvent varier dans le temps :

$$y(t) = \mathcal{R}_{\Theta(t)} x(t)$$

IV.1.3 Opérateur de Transformée en Ondelettes

La transformation par ondelettes est un outil fondamental en traitement d'images et en optimisation, permettant de représenter une image dans une base multi-résolution. Elle établit une correspondance linéaire entre l'espace des pixels et l'espace des coefficients d'ondelettes. Le diagramme présenté à la Figure 4.5 illustre la construction de cet opérateur ainsi que ses transformations directe et adjointe. L'implémentation correspondante est fournie en Annexe B.

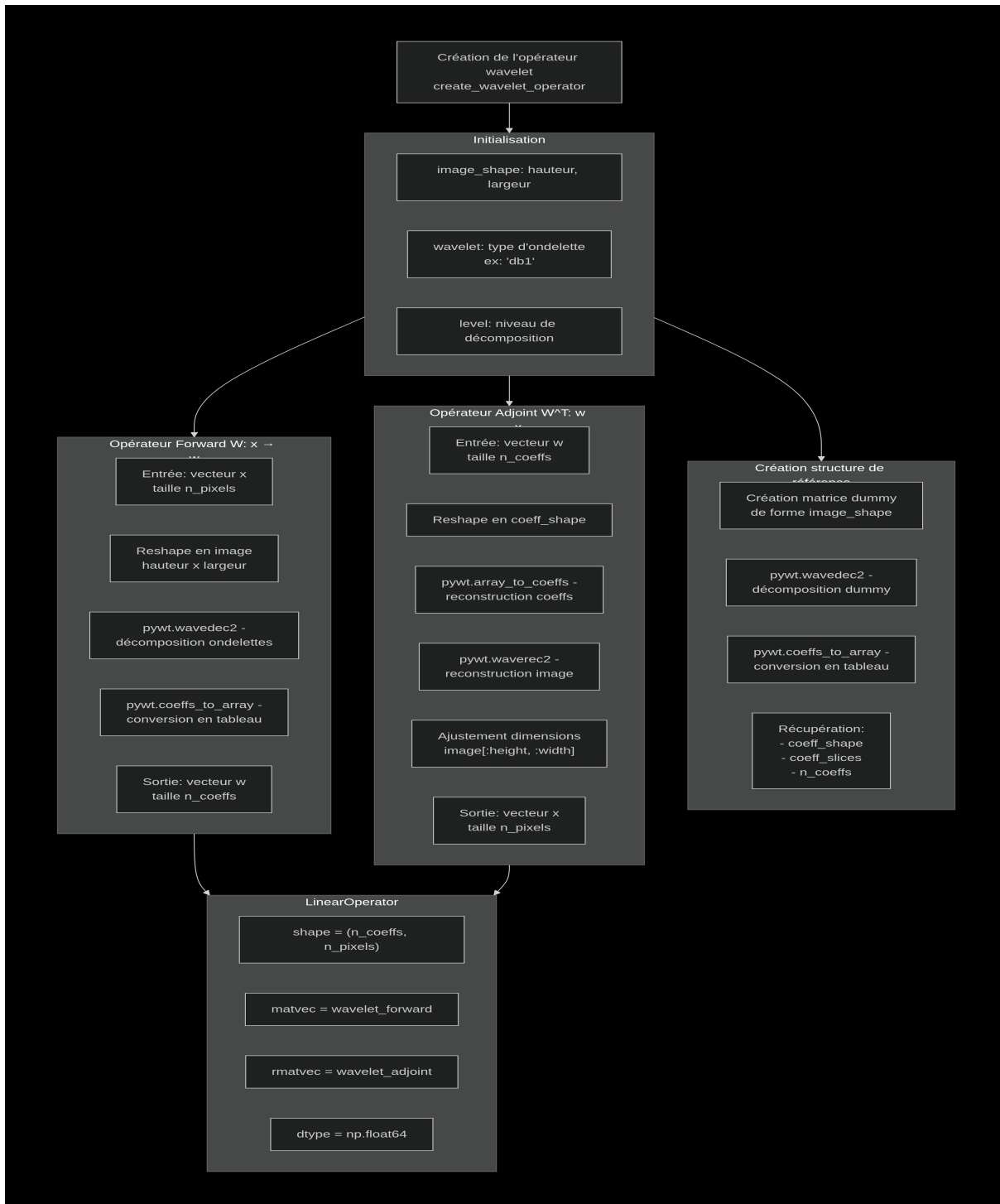


Figure 4.5: Opérateur de Transformée en Ondelettes

Mathématiquement, une image discrète de taille $H \times W$ peut être représentée sous forme vectorielle $x \in \mathbb{R}^n$, où $n = H \times W$. L'opérateur de transformation en ondelettes est défini comme un opérateur linéaire :

$$W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

qui associe à chaque image x un vecteur de coefficients d'ondelettes :

$$w = Wx$$

Ces coefficients représentent l'image dans une base multi-échelle composée de :

$$w = \{a_J, d_J^H, d_J^V, d_J^D, \dots, d_1^H, d_1^V, d_1^D\}$$

où :

- a_J représente les coefficients d'approximation à basse résolution,
- d_j^H, d_j^V, d_j^D représentent respectivement les coefficients de détail horizontal, vertical et diagonal au niveau j .

Cette transformation correspond à une projection de l'image sur une base d'ondelettes :

$$w_i = \langle x, \psi_i \rangle$$

où ψ_i représente les fonctions de base d'ondelettes.

L'opérateur adjoint W^T permet la reconstruction de l'image à partir des coefficients :

$$x = W^T w$$

Dans le cas d'ondelettes orthogonales, on a la propriété importante :

$$W^T = W^{-1}$$

et donc :

$$W^T W = I$$

où I est l'opérateur identité.

Dans le cas général, $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$, avec :

$$n = H \times W$$

$$m = \text{nombre total de coefficients}$$

La transformation directe correspond à l'application :

$$x \mapsto Wx$$

tandis que la transformation adjointe correspond à :

$$w \mapsto W^T w$$

Le diagramme de la Figure 4.5 montre les différentes étapes de construction de cet opérateur :

- la définition de l'espace image \mathbb{R}^n ,
- la construction de la structure des coefficients,
- la définition de l'opérateur direct W ,

- la définition de l'opérateur adjoint W^T ,
- la création de l'opérateur linéaire complet.

Les coefficients sont organisés sous forme hiérarchique, permettant une représentation multi-échelle efficace. Pour assurer la reconstruction correcte, deux éléments essentiels sont conservés :

- la structure des coefficients,
- les dimensions associées à chaque niveau de décomposition.

Cet opérateur possède plusieurs propriétés importantes :

- Linéarité :

$$W(ax + by) = aWx + bWy$$

- Structure matricielle implicite :

$$W \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- Adjoint bien défini :

$$\langle Wx, w \rangle = \langle x, W^T w \rangle$$

- Conservation de l'énergie pour les bases orthogonales :

$$\|Wx\|_2 = \|x\|_2$$

En pratique, l'opérateur n'est pas construit explicitement sous forme matricielle, mais implémenté comme un opérateur linéaire implicite, comme illustré dans l'Annexe B, afin d'éviter le stockage d'une matrice potentiellement très grande.

Cette structure permet d'intégrer efficacement la transformation en ondelettes dans des problèmes inverses, tels que :

- la reconstruction d'images,
- le débruitage,
- la compression,
- les méthodes d'optimisation régularisées.

La transformation fournit ainsi une représentation compacte et multi-résolution de l'image, facilitant l'analyse et la manipulation des structures à différentes échelles.

IV.1.4 Reconstruction d'Images en Tomographie par Transformée de Radon

La tomographie est une technique d'imagerie qui permet de visualiser l'intérieur d'un objet en trois dimensions sans avoir à le découper physiquement. Elle est largement utilisée en imagerie médicale, notamment dans les scanners à rayons X, mais aussi dans le contrôle non destructif des matériaux et en géophysique. Le principe fondamental de la tomographie repose sur l'acquisition d'un ensemble de projections de l'objet sous différents angles. Une projection peut être vue comme une ombre de l'objet, obtenue en mesurant l'atténuation d'un rayonnement qui traverse cet objet. Lorsque ces projections sont collectées pour de nombreux angles, elles forment un ensemble de données appelé sinogramme. Le défi principal consiste alors à reconstruire l'image originale de l'objet à partir de ce sinogramme.

La transformée de Radon est l'outil mathématique qui modélise ce processus d'acquisition des projections, et correspond à ce que l'on appelle la projection avant. Concrètement, si l'on considère une image bidimensionnelle représentant une coupe de l'objet, la transformée de Radon calcule, pour chaque angle donné, l'intégrale des valeurs de l'image le long de droites parallèles correspondant aux trajectoires des rayons. Chaque intégrale constitue un point dans la projection associée à cet angle. En répétant ce processus pour un ensemble d'angles, on obtient un sinogramme, dont l'axe horizontal représente la position des rayons sur le détecteur et l'axe vertical représente les angles de projection. D'un point de vue algébrique, cette opération peut être modélisée comme l'application d'un opérateur linéaire A qui transforme un vecteur x représentant l'image en un vecteur y représentant le sinogramme, selon la relation $y = Ax$. Une implémentation pratique de cet opérateur sous forme sans matrice, utilisant la transformée de Radon, est présentée en Annexe C.

Pour reconstruire l'image originale à partir du sinogramme, il faut effectuer une opération inverse. Une première approche consiste à utiliser la rétroprojection, appelée aussi backprojection. Cette opération consiste à redistribuer les valeurs du sinogramme dans l'espace de l'image en suivant les mêmes trajectoires que celles empruntées par les rayons lors de l'acquisition. En pratique, chaque projection est projetée en retour sur l'image, et la somme de toutes ces contributions fournit une estimation de l'image originale. Mathématiquement, cette opération correspond à l'application de l'opérateur adjoint A^T au sinogramme, ce qui donne une estimation de l'image selon la relation $x_{estim} = A^T y$. Il est important de noter que l'opérateur adjoint n'est pas l'inverse exact de l'opérateur de projection, mais seulement son adjoint. Une implémentation de cet opérateur adjoint basée sur la rétroprojection non filtrée est également fournie en Annexe C.

Cependant, la rétroprojection simple produit généralement une image floue. Ce flou apparaît parce que le processus de projection favorise les basses fréquences de l'image, c'est-à-dire les variations lentes d'intensité, tandis que les hautes fréquences, correspondant aux détails fins et aux contours, sont atténuées. Lorsque l'on applique uniquement la rétroprojection simple, ce déséquilibre est amplifié, ce qui donne une image aux contours flous. Pour corriger ce problème, on utilise la rétroprojection filtrée, qui est la méthode standard en tomographie. Cette méthode consiste d'abord à appliquer un filtre aux projections du sinogramme, généralement un filtre passe-haut comme le filtre de Ram-Lak, afin de compenser la perte des hautes fréquences et de restaurer les détails. Ensuite, les projections filtrées sont rétroprojetées pour reconstruire l'image.

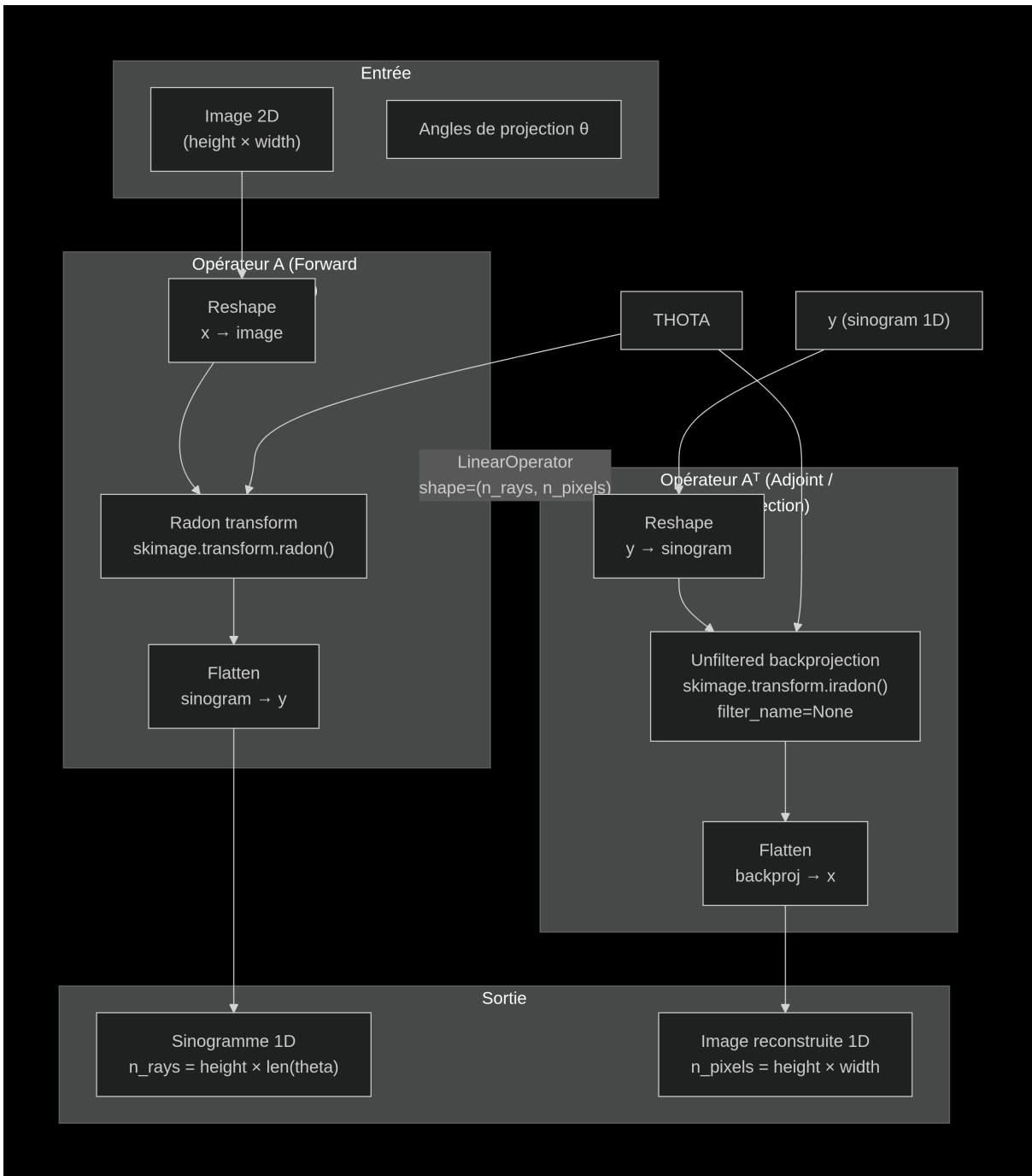


Figure 4.6: Opérateur A et son Adjoint A^T pour la Reconstruction CT

Dans les applications réelles, la taille des images et des sinogrammes est très grande, ce qui rend impossible la construction explicite de la matrice A représentant l'opérateur de Radon, car elle contiendrait des millions de lignes et de colonnes. Pour résoudre ce problème, on utilise une approche dite sans matrice, ou *matrix-free*. Dans cette approche, on ne construit pas la matrice elle-même, mais on définit uniquement deux fonctions : l'une qui calcule la projection avant d'une image, correspondant à l'application de Ax , et l'autre qui calcule la rétroprojection d'un sinogramme, correspondant à l'application de $A^T y$. Ces fonctions agissent comme une boîte noire qui encapsule le comportement de l'opérateur et de son adjoint, permettant de manipuler efficacement des problèmes de très

grande taille sans stocker explicitement la matrice. Une implémentation complète de cet opérateur linéaire sous forme de `LinearOperator` est présentée en Annexe C.

Ainsi, la transformée de Radon modélise le processus d'acquisition des données, la rétroprojection simple correspond à l'opérateur adjoint et produit une image floue, tandis que la rétroprojection filtrée constitue la méthode standard de reconstruction en combinant filtrage et rétroprojection. Enfin, l'approche sans matrice permet de mettre en œuvre ces opérations de manière efficace, même pour des systèmes de très grande dimension, en évitant les limitations liées à la mémoire, comme illustré dans l'implémentation fournie en Annexe C.

IV.1.5 La Reconstruction Tomographique par Séparation de Variables (ADMM)

La tomographie constitue un outil fondamental en imagerie médicale et dans diverses applications industrielles, permettant de reconstruire des structures internes à partir de mesures de projections acquises sous différents angles. La transformation de ces projections, regroupées sous forme de sinogramme, en une image cohérente représente un problème inverse complexe, particulièrement lorsque les données sont incomplètes, bruitées ou limitées en nombre. Les méthodes analytiques classiques atteignent rapidement leurs limites dans ces conditions, ce qui rend les approches itératives indispensables pour obtenir des reconstructions fiables.

Les méthodes itératives reposent sur un principe conceptuel simple mais efficace : partir d'une estimation initiale de l'image et l'affiner progressivement en comparant les projections simulées avec les mesures expérimentales. L'objectif est de déterminer l'image qui minimise la différence entre ses projections et les données observées tout en respectant certaines contraintes structurelles. Cette démarche s'inscrit naturellement dans un cadre d'optimisation, où l'on cherche à concilier fidélité aux données et régularisation, afin de garantir la stabilité et la qualité de la reconstruction. L'implémentation complète de cet algorithme itératif est présentée en Annexe D, offrant un exemple concret de mise en œuvre dans le contexte tomographique.

Parmi les approches itératives, la méthode de séparation de variables par directions alternées, connue sous le nom d'ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers), constitue une solution particulièrement élégante et efficace. L'algorithme décompose un problème d'optimisation complexe en sous-problèmes plus simples, résolus de manière alternée. Dans le cadre de la reconstruction tomographique, cette séparation permet de traiter distinctement la fidélité aux données et la régularisation par parcimonie dans un domaine transformé, tel que les ondelettes. La mise en œuvre de ces mécanismes, incluant la mise à jour des variables primales et duales ainsi que la gestion de la représentation parcimonieuse, est explicitement détaillée dans l'implémentation fournie en Annexe D.

Le fonctionnement de l'algorithme repose sur trois étapes principales, illustrées dans la Figure 4.7, qui présente le flux complet de reconstruction par ADMM. La première consiste à mettre à jour l'image, en résolvant un système linéaire intégrant à la fois l'opérateur de projection et son adjoint, ainsi que l'opérateur de transformation. Cette étape garantit que l'image reconstruite est cohérente avec les mesures tout en restant proche d'une représentation transformée contrôlée. La deuxième étape consiste en la mise à jour de la représentation parcimonieuse, qui applique un seuillage doux afin de favoriser les coefficients significatifs et de réduire l'effet du bruit. La troisième étape met à jour la variable duale, qui assure la cohérence entre l'image reconstruite et sa représentation

parcimonieuse, jouant un rôle crucial dans la stabilité et la convergence de l'algorithme. Toutes ces étapes sont implémentées et illustrées dans l'Annexe D.

La parcimonie constitue un a priori majeur en reconstruction d'images. En effet, les images naturelles et médicales possèdent une structure particulière qui permet de représenter l'information de manière concise dans un domaine approprié, tel que celui des ondelettes. L'encouragement de la parcimonie lors de la reconstruction conduit à des images plus nettes, avec des contours préservés, moins bruitées et capables d'être reconstruites de manière fiable même à partir d'un nombre limité de projections. Le choix du paramètre régulant l'équilibre entre fidélité aux données et régularisation parcimonieuse est déterminant pour obtenir des reconstructions à la fois précises et stables.

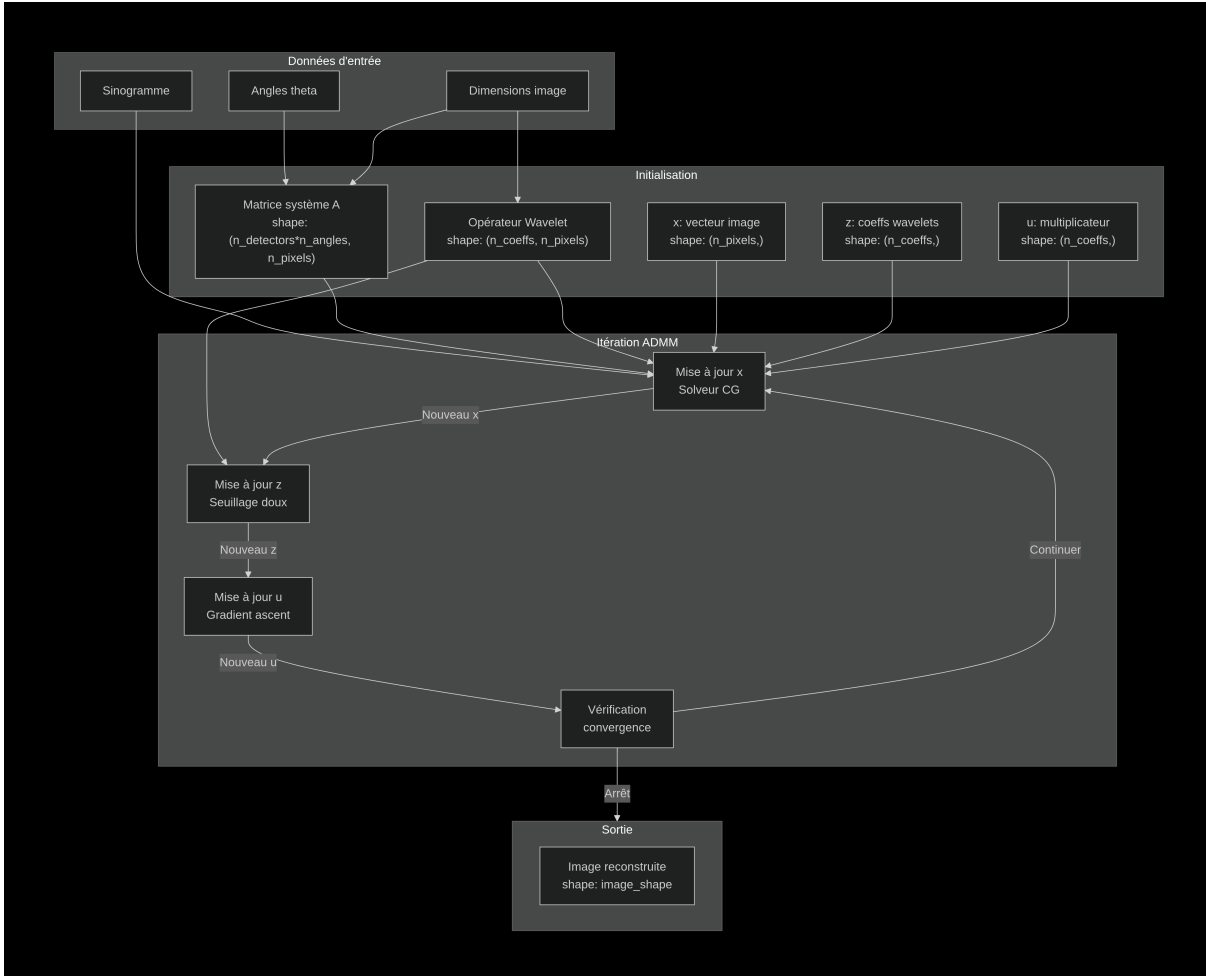


Figure 4.7: Flux d'exécution de la reconstruction tomographique par ADMM

Enfin, la convergence de l'algorithme est évaluée à l'aide de critères basés sur les résidus primal et dual, garantissant que les itérations successives atteignent un état stable et que l'image obtenue respecte à la fois les mesures et la parcimonie attendue. Cette approche itérative robuste et flexible est applicable dans de nombreux domaines, tels que la tomographie médicale (scanners et radiographies), le contrôle non destructif industriel, l'imagerie sismique et la microscopie électronique.

- IV.2 Evaluation**
- IV.3 Discussion**
- IV.4 Applications**
- IV.5 Innovation**

ANNEXE A Génération de sinogrammes

```
1 from PIL import Image
2 import numpy as np
3 from skimage.data import shepp_logan_phantom
4 from skimage.transform import radon, iradon, resize, iradon_sart, rescale
5 from skimage.metrics import peak_signal_noise_ratio as psnr
6 from skimage.metrics import structural_similarity as ssim
```

Description : Le code ci-dessous montre deux fonctions principales pour la génération de sinogrammes en tomographie. Un sinogramme est la représentation de projections d'une image 2D selon différents angles, obtenue via la transformée de Radon. Ces sinogrammes sont utilisés pour reconstruire l'image originale, par exemple en tomographie par rayons X.

```
1 def generate_sinogram(
2     image: np.ndarray,
3     num_angles: int,
4     add_noise: bool = False,
5     noise_level: float = 0.05
6 ):
7     """
8     Génère un sinogramme à partir d'une image en utilisant la transformée de Radon.
9
10    Paramètres :
11    - image : np.ndarray, image 2D à projeter
12    - num_angles : int, nombre de directions de projection (angles uniformes)
13    - add_noise : bool, si True, ajoute du bruit gaussien pour simuler des mesures bruitées
14    - noise_level : float, amplitude relative du bruit ajouté
15
16    Retour :
17    - sinogram : np.ndarray, sinogramme obtenu
18    - theta : np.ndarray, angles utilisés pour la projection
19    """
20    # Crée un vecteur d'angles également espacés de 0 à 180°
21    theta = np.linspace(0., 180., num_angles, endpoint=False)
22
23    # Calcule la transformée de Radon (projections de l'image)
24    sinogram = radon(image, theta=theta, circle=True)
25
26    # Ajoute du bruit si demandé
27    if add_noise:
28        noise = np.random.normal(0, noise_level * np.max(sinogram), sinogram.shape)
29        sinogram = sinogram + noise
30
31    return sinogram, theta
```

Explication : Cette fonction est utilisée pour générer le sinogramme complet d'une image. Elle est utile pour des simulations de reconstruction classique où toutes les projections sont disponibles. Le paramètre `add_noise` permet de simuler des mesures réalistes avec bruit, ce qui est important pour tester la robustesse des algorithmes de reconstruction.

```

1  def generate_undersampled_sinogram(
2      image: np.ndarray,
3      undersampling_factor: float = 0.5
4  ):
5      """
6      Génère un sinogramme sous-échantillonné pour la reconstruction par Compressed Sensing.
7
8      Paramètres :
9      - image : np.ndarray, image 2D à projeter
10     - undersampling_factor : float, fraction des angles à utiliser (0 < factor <= 1)
11
12     Retour :
13     - sinogram : np.ndarray, sinogramme sous-échantillonné
14     - theta_undersampled : np.ndarray, angles sélectionnés pour la projection
15     - selected_indices : np.ndarray, indices des angles sélectionnés
16     """
17     # Ensemble complet d'angles de 0 à 180°
18     full_angles = np.linspace(0., 180., 360, endpoint=False)
19
20     # Sélectionne un sous-ensemble d'angles en fonction du facteur d'undersampling
21     num_angles = int(len(full_angles) * undersampling_factor)
22     selected_indices = np.sort(np.random.choice(len(full_angles), num_angles, replace=False))
23     theta_undersampled = full_angles[selected_indices]
24
25     # Génère le sinogramme uniquement aux angles sélectionnés
26     sinogram = radon(image, theta=theta_undersampled, circle=True)
27
28     return sinogram, theta_undersampled, selected_indices

```

Explication : Cette fonction est conçue pour simuler un scénario de Compressed Sensing (CS) où toutes les projections ne sont pas disponibles (sparse-view CT).

- undersampling_factor contrôle combien d'angles sont conservés.
- Cela permet d'évaluer la performance des algorithmes de reconstruction CS sur des données réalistes avec moins d'informations.

Exemple d'utilisation pour simulation :

```

1  if __name__ == "__main__":
2      # Crée un fantôme Shepp-Logan (image test standard en tomographie)
3      image = shepp_logan_phantom()
4
5      # Sinogramme complet
6      sinogram_full, theta_full = generate_sinogram(image, num_angles=180)
7
8      # Sinogramme sous-échantillonné (50% des angles)
9      sinogram_cs, theta_cs, selected_indices = generate_undersampled_sinogram(image, undersampling_factor=0.5)

```

ANNEXE B Opérateur de Transformée en Ondelettes

```
1 from typing import Annotated
2 from scipy import sparse
3 from scipy.sparse.linalg import LinearOperator
4 import pywt # PyWavelets for wavelet transform
5 import time
6
7
8 def create_wavelet_operator(
9     image_shape: Annotated[Tuple[int, int], "Height x Width"],
10     wavelet: str = 'db1',
11     level: int|None = None
12 ):
13     """
14     Create wavelet transform operator  $W$  and its adjoint  $W^T$ 
15     """
16
17     height, width = image_shape
18     n_pixels = height * width
19
20     # ---- Create reference coefficient structure ----
21     dummy = np.zeros(image_shape)
22     coeffs = pywt.wavedec2(dummy, wavelet, level=level)
23     coeff_array_ref, coeff_slices = pywt.coeffs_to_array(coeffs)
24
25     coeff_shape = coeff_array_ref.shape
26     n_coeffs = coeff_array_ref.size
27
28     # ---- Forward:  $W$   $x$  ----
29     def wavelet_forward(x):
30         img = x.reshape(image_shape)
31         coeffs = pywt.wavedec2(img, wavelet, level=level)
32         coeff_array, _ = pywt.coeffs_to_array(coeffs)
33         return coeff_array.flatten()
34
35     # ---- Adjoint / Inverse:  $W^T$   $w$  ----
36     def wavelet_adjoint(w):
37         coeff_array = w.reshape(coeff_shape)
38         coeffs = pywt.array_to_coeffs(
39             coeff_array,
40             coeff_slices,
41             output_format='wavedec2'
42         )
43         img = pywt.waverec2(coeffs, wavelet)
44         return img[:height, :width].flatten()
45
46     Wop = LinearOperator(
47         shape=(n_coeffs, n_pixels),
48         matvec=wavelet_forward,
49         rmatvec=wavelet_adjoint,
50         dtype=np.float64
51     )
52
53     return Wop
```

ANNEXE C Reconstruction d'Images en Tomographie par Transformée de Radon

```
1 from scipy.sparse.linalg import LinearOperator
2 from skimage.transform import radon, iradon
3 import numpy as np
4
5 def create_system_matrix(image_shape, theta):
6     """
7     Matrix-free CT system operator A and its adjoint A^T
8     (true Radon transform and unfiltered backprojection)
9     """
10    height, width = image_shape
11    n_pixels = height * width
12    n_rays = height * len(theta)
13
14    def matvec(x):
15        """
16        Forward projection:  $y = A x$ 
17        """
18        image = x.reshape(image_shape)
19        sinogram = radon(image, theta=theta, circle=True)
20        return sinogram.flatten()
21
22    def rmatvec(y):
23        """
24        Adjoint operator:  $x = A^T y$ 
25        (unfiltered backprojection)
26        """
27        sino = y.reshape((height, len(theta)))
28        backproj = iradon(
29            sino,
30            theta=theta,
31            filter_name=None, # CRITICAL
32            circle=True,
33            output_size=height
34        )
35        return backproj.flatten()
36
37    A = LinearOperator(
38        shape=(n_rays, n_pixels),
39        matvec=matvec,
40        rmatvec=rmatvec,
41        dtype=np.float64
42    )
43
44    return A
```

C.1 Explication détaillée du code : opérateur de tomographie (CT scan)

C.1.1 Objectif du code

Ce code crée un opérateur linéaire qui modélise un système de tomographie (scanner médical) en utilisant la transformée de Radon. Il permet de simuler l'acquisition de données CT (projections) et la rétroprojection non filtrée.

C.1.2 Explication ligne par ligne

a. Importations

```
1 from scipy.sparse.linalg import LinearOperator
2 from skimage.transform import radon, iradon
3 import numpy as np
```

- `LinearOperator` : classe de SciPy pour créer des opérateurs linéaires sans matrice explicite.
- `radon`, `iradon` : fonctions de scikit-image pour la transformée de Radon directe et inverse.
- `numpy` : manipulation de tableaux.

b. Paramètres de la fonction

```
1 def create_system_matrix(image_shape, theta):
2     """
3     Matrix-free CT system operator A and its adjoint A^T
4     (true Radon transform and unfiltered backprojection)
5     """
6     height, width = image_shape
7     n_pixels = height * width
8     n_rays = height * len(theta)
```

- `image_shape` : dimensions (hauteur, largeur) de l'image à reconstruire.
- `theta` : liste des angles de projection (en degrés) pour lesquels on acquiert des données.
- `n_pixels` : nombre total de pixels dans l'image.
- `n_rays` : nombre total de rayons mesurés (hauteur du détecteur \times nombre d'angles).

c. Fonction de projection avant (A)

```
1 def matvec(x):
2     """
3     Forward projection:  $y = A x$ 
4     """
5     image = x.reshape(image_shape)
6     sinogram = radon(image, theta=theta, circle=True)
7     return sinogram.flatten()
```

- Remet le vecteur `x` en forme 2D.
- Applique la transformée de Radon pour simuler l'acquisition CT.
- Retourne le sinogramme aplati en un vecteur 1D.

Interprétation physique : Cette fonction simule le passage des rayons X à travers l'objet. Chaque pixel du sinogramme représente l'atténuation totale le long d'un rayon.

d. Fonction de rétroprojection (A^T)

```
1 def rmatvec(y):
2     """
3     Adjoint operator:  $x = A^T y$ 
4     (unfiltered backprojection)
5     """
6     sino = y.reshape((height, len(theta)))
7     backproj = iradon(
8         sino,
9         theta=theta,
10        filter_name=None, # CRITICAL
11        circle=True,
12        output_size=height
13    )
14    return backproj.flatten()
```

- Remet le sinogramme aplati en forme 2D.
- Applique la rétroprojection non filtrée via `iradon` avec `filter_name=None`.
- Recadre l'image à la taille originale et l'aplatit.

Interprétation physique : La rétroprojection "étale" chaque mesure le long du trajet du rayon correspondant. C'est l'opération mathématiquement adjointe à la projection avant.

e. Création de l'opérateur linéaire

```
1 A = LinearOperator(
2     shape=(n_rays, n_pixels),
3     matvec=matvec,
4     rmatvec=rmatvec,
5     dtype=np.float64
6 )
7
8 return A
```

C.1.3 Utilisation typique

```
1 # Définir la géométrie d'acquisition
2 image_size = 256
3 angles = np.linspace(0, 180, 180) # 180 projections sur 180°
4
5 # Créer l'opérateur CT
6 A = create_system_matrix((image_size, image_size), angles)
7
8 # Simuler l'acquisition à partir d'une image fantôme
9 phantom = np.zeros((256, 256))
10 # ... remplir le fantôme ...
11 projections = A @ phantom.flatten() # Équivalent à  $A * \text{phantom}$ 
12
13 # Reconstruire par rétroprojection (non filtrée)
14 reconstruction = A.H @ projections # Équivalent à  $A^T * \text{projections}$ 
```

C.1.4 Applications

1. Simulation d'acquisitions CT pour générer des données synthétiques.

2. Reconstruction itérative (ART, SIRT, méthodes de gradient).
3. Résolution de problèmes inverses avec régularisation (TV, ondelettes, etc.).
4. Compressed sensing en tomographie.

C.1.5 Notes importantes

- L'opérateur est "matrix-free" : aucune matrice n'est stockée explicitement.
- Mémoire utilisée : $O(n_pixels)$ au lieu de $O(n_pixels \times n_rays)$.
- L'opérateur adjoint A^T est différent de l'inverse A^{-1} .
- Pour une reconstruction réelle, appliquer un filtre (ramp) ou utiliser des méthodes itératives.

ANNEXE D La Reconstruction Tomographique par Séparation de Variables (ADMM)

```
1 from tqdm import tqdm
2 import numpy as np
3 from scipy.sparse.linalg import cg, LinearOperator
4
5
6 def cs_reconstruction_admm(
7     sinogram, theta, image_shape,
8     rho=1.0, lambda_l1=0.01, max_iter=100
9 ):
10
11     height, width = image_shape
12     n_pixels = height * width
13
14     A = create_system_matrix(image_shape, theta)
15     Wop = create_wavelet_operator(image_shape, wavelet="bior4.4")
16
17     # Initialize
18     x = np.zeros(n_pixels)
19     z = np.zeros(Wop.shape[0])
20     u = np.zeros_like(z)
21
22     for k in tqdm(range(max_iter)):
23
24         # ---- x-update ----
25         def lhs(v):
26             return (
27                 A.rmatvec(A.matvec(v)) +
28                 rho * Wop.rmatvec(Wop.matvec(v))
29             )
30
31         rhs = (
32             A.rmatvec(sinogram.flatten()) +
33             rho * Wop.rmatvec(z - u)
34         )
35
36         x, _ = cg(
37             LinearOperator((n_pixels, n_pixels), matvec=lhs),
38             rhs, x0=x, maxiter=50
39         )
40
41         # ---- z-update (soft thresholding) ----
42         Wx = Wop.matvec(x)
43         v = Wx + u
44         z_old = z.copy()
45         z = np.sign(v) * np.maximum(np.abs(v) - lambda_l1 / rho, 0)
46
47         # ---- u-update ----
48         u = u + Wx - z
49
50         # ---- convergence check ----
51         r_norm = np.linalg.norm(Wx - z)
52         s_norm = rho * np.linalg.norm(z - z_old)
53
54         if r_norm < 1e-4 and s_norm < 1e-4:
55             print(f"ADMM converged at iteration {k}")
56
```

```

57         break
58
59     return x.reshape(image_shape)
60 \section{Reconstruction CT par Compressed Sensing avec ADMM}
61
62 \subsection{Objectif du code}
63
64 Ce code reconstruit une image CT à partir d'un sinogramme incomplet ou bruité en utilisant la régularisation par ondelettes (co
65
66 \subsection{Contexte mathématique}
67
68 On cherche à résoudre :
69 \[
70 \min_x \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|Wx\|_1
71 \]
72 où :
73 \begin{itemize}
74 \item  $A$  est l'opérateur de projection CT
75 \item  $y$  est le sinogramme mesuré
76 \item  $W$  est la transformée en ondelettes
77 \item  $\lambda$  contrôle la force de la régularisation parcimonieuse
78 \end{itemize}
79
80 \subsection{Explication ligne par ligne}
81
82 \subsubsection{Paramètres de la fonction}
83
84 \begin{minted}{python}
85 def cs_reconstruction_admm(
86     sinogram, theta, image_shape,
87     rho=1.0, lambda_l1=0.01, max_iter=100
88 ):

```

- sinogram : données CT acquises (projections)
- theta : angles de projection utilisés
- image_shape : dimensions de l'image à reconstruire
- rho : paramètre de pénalité ADMM
- lambda_l1 : poids de la régularisation L1
- max_iter : nombre maximal d'itérations

a. Initialisation des opérateurs

```

1 A = create_system_matrix(image_shape, theta)
2 Wop = create_wavelet_operator(image_shape, wavelet="bior4.4")

```

- A : opérateur de projection CT
- Wop : opérateur de transformée en ondelettes biorthogonales 4.4

b. Initialisation des variables ADMM

```

1 x = np.zeros(n_pixels)           # Image à reconstruire
2 z = np.zeros(Wop.shape[0])      # Variable auxiliaire (coefficients d'ondelettes)
3 u = np.zeros_like(z)            # Multiplicateur de Lagrange (dual)

```

ADMM décompose le problème en sous-problèmes plus simples avec trois variables :

- x : image dans l'espace des pixels
- z : coefficients d'ondelettes (parcimonieux)
- u : variable duale qui force $Wx \approx z$

c. Boucle principale ADMM

```
1 for k in tqdm(range(max_iter)):
```

Mise à jour de x (sous-problème quadratique)

```
1 def lhs(v):
2     return (
3         A.rmatvec(A.matvec(v)) +
4         rho * Wop.rmatvec(Wop.matvec(v))
5     )
6
7 rhs = (
8     A.rmatvec(sinogram.flatten()) +
9     rho * Wop.rmatvec(z - u)
10 )
11
12 x, _ = cg(
13     LinearOperator((n_pixels, n_pixels), matvec=lhs),
14     rhs, x0=x, maxiter=50
15 )
```

On résout : $(A^T A + \rho W^T W)x = A^T y + \rho W^T (z - u)$

- `lhs(v)` : application de $(A^T A + \rho W^T W)$
- `rhs` : membre droit
- Algorithme du gradient conjugué (CG), 50 itérations max par itération ADMM

Mise à jour de z (seuillage doux)

```
1 Wx = Wop.matvec(x)
2 v = Wx + u
3 z_old = z.copy()
4 z = np.sign(v) * np.maximum(np.abs(v) - lambda_l1 / rho, 0)
```

Opération de **proximal operator** pour la norme L1 :

- Calcule les coefficients d'ondelettes Wx
- Applique le seuillage doux avec seuil λ/ρ
- Rend les coefficients parcimonieux

Mise à jour de u (variable duale)

```
1 u = u + Wx - z
```

Met à jour le multiplicateur de Lagrange.

Vérification de convergence

```
1 r_norm = np.linalg.norm(Wx - z)           # Résidu primal
2 s_norm = rho * np.linalg.norm(z - z_old)   # Résidu dual
3
4 if r_norm < 1e-4 and s_norm < 1e-4:
5     print(f"ADMM converged at iteration {k}")
6     break
```

Critères classiques d'arrêt :

- Résidu primal : $\|Wx - z\|$
- Résidu dual : $\rho\|z - z_{\text{old}}\|$

D.0.1 Utilisation typique

```
1 # Données CT (peu de projections)
2 angles = np.linspace(0, 180, 30)
3 sinogram = radon(phantom, theta=angles, circle=True)
4
5 # Reconstruction CS
6 reconstructed = cs_reconstruction_admm(
7     sinogram, angles, (256, 256),
8     rho=1.0, lambda_l1=0.01, max_iter=50
9 )
10
11 # Visualisation
12 plt.imshow(reconstructed, cmap='gray')
```

D.0.2 Avantages

1. Compressed sensing : reconstruction avec peu de projections
2. Régularisation parcimonieuse : exploite la parcimonie en ondelettes
3. ADMM : décomposition en sous-problèmes simples
4. Matrix-free : adaptée aux grandes images sans mémoire excessive

D.0.3 Paramètres clés à ajuster

- ρ : équilibre fidélité/régularisation (0.1 à 10)
- λ_{l1} : force de la régularisation L1
- max_iter : nombre d'itérations ADMM (50–200 selon la difficulté)

Bibliographie

- [1] *COMPARISON BETWEEN ORTHOGONAL AND BI-ORTHOGONAL WAVELETS*
- [2] Engl, Heinz W., and R. Ramlau, *Regularization of inverse problems*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [3] Jen Beatty Colby College, *The Radon Transform and the Mathematics of Medical Imaging*
- [4] R. Snieder and J. Trampert. *Linear and nonlinear inverse problems*. Department of Geophysics, Utrecht University, P.O. Box 80.021, 3508 TA Utrecht, The Netherlands. Email: snieder@geo.uu.nl.
- [5] I. Bloch. *Reconstruction d'images de tomographie*. LTCI, Télécom Paris, Isabelle.Bloch@telecom-paris.fr.
- [6] S. Qin. *Simple algorithm for L1-norm regularisation-based compressed sensing and image restoration*. Third Institute of Physics, Georg-August-Universität Göttingen, Friedrich-Hund-Platz 1, Göttingen, Germany. Email: shun.qin@outlook.com.
- [7] M. Piening, F. Altekruiger, J. Hertrich, P. Hagemann, A. Walther and G. Steidl. *Learning from small data sets: Patch-based regularizers in inverse problems for image reconstruction*. (Information manquante pour l'affiliation complète). Note: Les affiliations sont indiquées par les chiffres 1 et 2, mais ne sont pas détaillées dans le texte fourni.
- [8] Stephen Boyd , Neal Parikh , Eric Chu Borja Peleato and Jonathan Eckstein *Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers*
- [9] CANDITHIS, D.D. and VIDAKOVIC, B. (2004) *Wavelet Bayesian Block Shrinkage via Mixtures of Normal-Inverse Gamma Priors*. Journal of Computational and Graphical Statistics, 13 (2), pp. 383-398
- [10] LIU, C.-L. (2010) *A Tutorial of the Wavelet Transform*.
- [11] MEEN, R.S. and SHARMA, A. (2014) *Comparison and Analysis of Orthogonal and Biorthogonal Wavelets for ECG Compression*. International Journal of Research in Engineering and Technology, 3 (3), pp. 242-247.
- [12] WIM SWELDENS *THE LIFTING SCHEME: A CONSTRUCTION OF SECOND GENERATION WAVELETS*

- [13] Y. Wang, Z. Liu, and H. Chen, *Accurate Image Quality Assessment in Compressive Sensing: Beyond PSNR and MSE*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 33, pp. 2105–2118, 2024. DOI: 10.1109/TIP.2024.3372109.
- [14] A. Gupta and R. Singh, *Efficient Error Metrics for Sparse Signal Recovery in Medical Imaging*, Signal Processing, vol. 212, pp. 109145, 2023. DOI: 10.1016/j.sigpro.2023.109145.
- [15] Y. Liu, H. Zhang, and Q. Wang, *High-Fidelity Image Recovery in Compressive Sensing: A PSNR-Driven Optimization Framework*, IEEE Transactions on Multimedia, 2024.
- [16] W. Simoes and M. De Sa, *PSNR and SSIM: Evaluation of the Imperceptibility Quality of Images Transmitted over Wireless Networks*, Procedia Computer Science, 2024. DOI: 10.1016/j.procs.2024.11.134.
- [17] Z. Wang and A. C. Bovik, *Advances in Structural Similarity Metrics for Image Quality Assessment*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 45, no. 8, pp. 10212–10227, 2023. DOI: 10.1109/TPAMI.2023.3267890.
- [18] H. Li, Y. Liu, and J. Zhang, *SSIM-Based Optimization for Compressive Sensing Reconstruction in Medical Imaging*, Medical Image Analysis, vol. 92, pp. 102987, 2024. DOI: 10.1016/j.media.2023.102987.
- [19] Jonathan Richard Shewchuk *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain*
- [20] Jeremy E. Cohen *Computing the proximal operator of the ℓ_1 induced matrix norm*