

# Reconstruction d'images issues d'IRM/CI

Réalisé par  
Frederic Andrianarivony

Option:  
M2VR T.A.S.I

19 janvier 2026

# Table des matières

# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 Historique et généralités

Appareils photo numériques, scanners, images météo ... les images ont naturellement envahi notre vie quotidienne. Leur traitement est désormais devenu commun dans beaucoup de domaines. La reconstruction d'image est un processus fondamental en imagerie médicale, scientifique et numérique, visant à reconstituer une image 3D ou une représentation précise à partir de données acquises de manière indirecte, souvent sous forme de projections 2D.

#### **Origines et développement historique**

Les fondements théoriques de la reconstruction tomographique remontent au début du XXe siècle. En 1917, le mathématicien J. Radon a formulé une théorie mathématique permettant de reconstruire une fonction à partir de ses projections. Cependant, ce n'est qu'avec les progrès des calculateurs numériques dans les années 1960-1970 que cette théorie a pu être appliquée concrètement. Godfrey Hounsfield, ingénieur britannique, a mis au point le premier scanner TDM (tomodensitométrie ou CT) en 1971, grâce à un financement indirect provenant de la société EMI, associée au succès des Beatles. Ce développement a marqué la naissance de l'imagerie médicale tomographique, suivie par l'IRM et la tomoscintigraphie.

#### **Évolution avec l'intelligence artificielle**

Depuis 2012, l'apprentissage profond a révolutionné le traitement d'images. Contrairement aux méthodes traditionnelles basées sur des étapes séquentielles (extraction de caractéristiques → reconnaissance), les réseaux de neurones profonds apprennent directement à partir d'images brutes, en utilisant des vérités terrain (annotations manuelles). Des architectures comme les réseaux antagonistes génératifs (GAN), les transformeurs ou les auto-encodeurs sont désormais utilisées pour la reconstruction d'images, la segmentation, le recalage ou la réduction de bruit.

# Chapitre 2

## Outils mathématiques pour la reconstruction d'image

Un sujet très précis et intéressant ! La reconstruction d'images à partir de projections est un aspect crucial de l'imagerie médicale, en particulier dans des modalités telles que la tomodensitométrie (CT) et la tomographie par émission de positons (TEP). Les méthodes analytiques directes sont l'approche historique et mathématiquement élégante des problèmes inverses linéaires, particulièrement en tomographie. Leur positionnement répond à un impératif de rapidité de calcul dans des applications où le temps de reconstruction est critique (imagerie médicale clinique, contrôle non destructif industriel).

### 2.1 Classification des approches de reconstruction

Le paysage algorithmique de la tomographie se divise principalement en trois familles, distinguées par leur traitement de l'opérateur de projection.

#### 2.1.1 Les méthodes analytiques

Elles reposent sur une formulation mathématique explicite de l'inversion de l'opérateur direct. En s'appuyant sur les propriétés de la transformée de Radon, elles permettent une reconstruction directe et rapide. L'exemple le plus emblématique reste la Rétroprojection Filtrée (FBP). C'est une méthode analytique largement utilisée qui consiste à filtrer les projections et à les rétroprojeter sur la grille d'image. FBP est rapide et efficace, mais peut être sensible au bruit et aux artefacts.

#### La transformée de Radon

Imaginons qu'on ait un objet opaque constitué de différents matériaux, et que l'on souhaite savoir comment ces matériaux sont répartis à l'intérieur sans l'endommager (par exemple, l'objet peut être un malade à l'intérieur du corps duquel on aimerait voir). L'une des méthodes est le scanner : on lance de fins faisceaux de rayons X à travers l'objet dans toutes les directions et on mesure quelle proportion de chaque faisceau a été absorbée.

La tomographie est un procédé permettant de créer l'image d'un objet en deux ou trois dimensions à partir de multiples "coupes" unidimensionnelles (Voir Figure 2.1). Dans un

scanner CT (tomodensitométrie), ces coupes sont définies par des faisceaux de rayons **X** parallèles projetés à travers l'objet. En changeant l'orientation de la source et du détecteur (l'angle  $\theta$ ), on obtient des informations sur la densité interne sous différents angles. Le fonctionnement repose sur la mesure de l'intensité des rayons **X** :

- **Perte d'énergie** : Lorsqu'un rayon **X** traverse un objet, il perd une partie de son énergie, ce qui réduit son intensité
- **Coefficient d'atténuation** : Cette perte dépend de la densité du milieu. Les objets denses (comme l'os) provoquent une variation d'intensité plus importante que les tissus moins denses. Cette caractéristique est appelée le coefficient d'atténuation ( $A(x, y)$ ). L'atténuation mesurée pour chaque faisceau, c'est-à-dire la différence entre l'intensité incidente et l'intensité détectée, correspond à une intégrale de ligne de la structure interne de l'objet. Cette relation entre l'objet et l'ensemble de ses intégrales de ligne est formalisée par la transformée de Radon. La reconstruction de l'image originale repose alors sur l'inversion de cette transformée, qui constitue le fondement théorique de la tomographie assistée par ordinateur
- **Mesures** : Le scanner enregistre l'intensité initiale émise ( $I_0$ ) et l'intensité finale reçue ( $I_1$ ) pour chaque faisceau afin de déduire la densité globale rencontrée sur le trajet



Figure 2.1: Un appareil de tomographie est une sorte d'anneau dans lequel on place un objet ou une personne, qui sont alors traversés par un faisceau de rayons X « suivant toutes les directions » comme illustré sur l'image ci-dessus où l'on étudie la structure d'objets anciens.

## La fonction d'atténuation représentant l'objet étudié

L'objet initial, considéré comme plan, est donné par une fonction d'atténuation qui, à chaque point du plan de coordonnées  $(x, y)$ , va associer un nombre  $A(x, y)$  correspondant à la proportion des rayons qui sont absorbés par le matériau en ce point : en un point d'un os,  $A$  sera grand, et en un point de l'air, il sera faible.

### Une loi physique

En supposant dans un premier temps que la fonction d'atténuation de notre objet est constante égale à  $a$ , pour tout rayon lumineux traversant notre objet, pour tout couple de points d'abscisses  $x$  et  $x+l$  sur ce rayon, les abscisses étant croissantes dans le sens du rayon, le rapport d'intensités lumineuses  $\frac{I(x+l)}{I(x)}$  ne dépend que de  $a$  et de la longueur  $l$  traversée et pas du point  $x$  (position).

En omettant provisoirement la dépendance par rapport à  $a$  et en notant alors  $p(l)$  ce rapport  $\frac{I(x+l)}{I(x)}$  qui correspond à la proportion de photons non absorbés sur une longueur  $l$  à partir d'un point  $x$ , on voit que  $p$  vérifie la propriété

$$p(l_1 + l_2) = p(l_1)p(l_2)$$

En Effet, la proportion de photons non absorbés sur une longueur  $l_2$  à partir d'un point  $x + l_1$  est  $\frac{I(x + l_1 + l_2)}{I(x + l_1)} = p(l_2)$ . Donc  $p(l_1)p(l_2) = \frac{I(x + l_1)}{I(x)} \times \frac{I(x + l_1 + l_2)}{I(x + l_1)} = p(l_1 + l_2)$ . Ceci traduit juste le fait simple suivant : les proportions de photons non absorbés se multiplient lors de traversées successives de milieux absorbants. La bonne définition de l'atténuation est précisément :

$$p(l) = e^{-al} \quad (2.1)$$

Autrement dit, pour tout  $x$  et  $x + l$  sur un axe :

$$I(x + l) = I(x)e^{-al} \quad (2.2)$$

Notons que si le phénomène physique d'atténuation est spécifique de la tomographie à rayons X, les méthodes de reconstruction sont en revanche plus générales et sont appliquées également dans d'autres systèmes d'imagerie, dans lesquelles des équations analogues expriment une fonction à reconstruire en fonction de projections. C'est le cas par exemple de la tomographie d'émission de simples photons utilisée en médecine nucléaire.

### 2.1.2 Les méthodes itératives

Ces approches traitent la reconstruction comme un problème d'optimisation numérique. Elles cherchent à minimiser un critère d'erreur (souvent par les moindres carrés ou le maximum de vraisemblance) entre les projections mesurées et celles simulées à partir d'une image estimée. Elles sont particulièrement robustes face aux données bruitées ou incomplètes. Un aspect important des sciences physiques consiste à inférer des paramètres physiques à partir de données. En général, les lois de la physique permettent de calculer les valeurs des données étant donné un modèle. C'est ce qu'on appelle le problème direct.

Le **problème inverse**, quant à lui, vise à reconstruire le modèle à partir d'un ensemble de mesures. Ce paradigme trouve une application centrale dans le domaine de la **reconstruction d'image**, où l'on s'efforce de retrouver une image – représentant par exemple une distribution de densité, une structure anatomique ou une source astrophysique – à partir de données acquises de manière indirecte, sous-échantillonnée ou bruitée. Que ce soit en tomographie, en imagerie par résonance magnétique (IRM) ou en astronomie, la reconstruction repose sur l'inversion d'un modèle direct qui décrit le processus physique d'acquisition.

Dans le cas idéal, il existe une théorie exacte qui prescrit comment les données doivent être transformées pour reproduire le modèle ou l'image recherchée. Pour certains problèmes bien conditionnés et avec des données complètes, une telle théorie existe, en supposant que des ensembles de données infinis et exempts de bruit seraient disponibles. Toutefois, la plupart des situations pratiques en reconstruction d'image se heurtent à la mal-positude du problème inverse, nécessitant des approches régularisées pour obtenir des solutions stables et physiquement plausibles.

## Quelques exemples de problèmes inverse

### Déconvolution

Dans la déconvolution [?], on suppose que la mesure est une version convoluée de l'image réelle. L'opérateur est donc défini comme la convolution  $A : u \mapsto g * u$  avec un filtre  $g$ . Dans le cas le plus simple, le filtre de convolution  $g$  est supposé connu. Un des exemples les plus connus est celui du débruitage, où le filtre utilisé est souvent le filtre gaussien, voir Figure 2.2.



(a) Input image



(b) Blurred image

Figure 2.2: Dans le débruitage, l'objectif est de retrouver une image nette à partir d'une image floue, celle-ci étant obtenue par convolution avec un filtre gaussien.

### Computed Tomography (CT)

Les examens par tomodensitométrie (CT) sont une méthode courante pour obtenir des images internes du corps humain. En gros, des rayons  $\mathbf{X}$  sont envoyés à travers le corps selon différentes directions. Pendant leur traversée, les rayons  $\mathbf{X}$  sont atténués en fonction de la densité des matériaux qu'ils rencontrent. Cette diminution d'intensité est ensuite mesurée sur le côté opposé du corps. L'ensemble de toutes ces mesures est appelé un *sinogramme*. L'opérateur linéaire utilisé pour décrire le processus de scan est appelé la *transformée de Radon*, étudiée par Johann Radon bien avant son utilisation pratique.

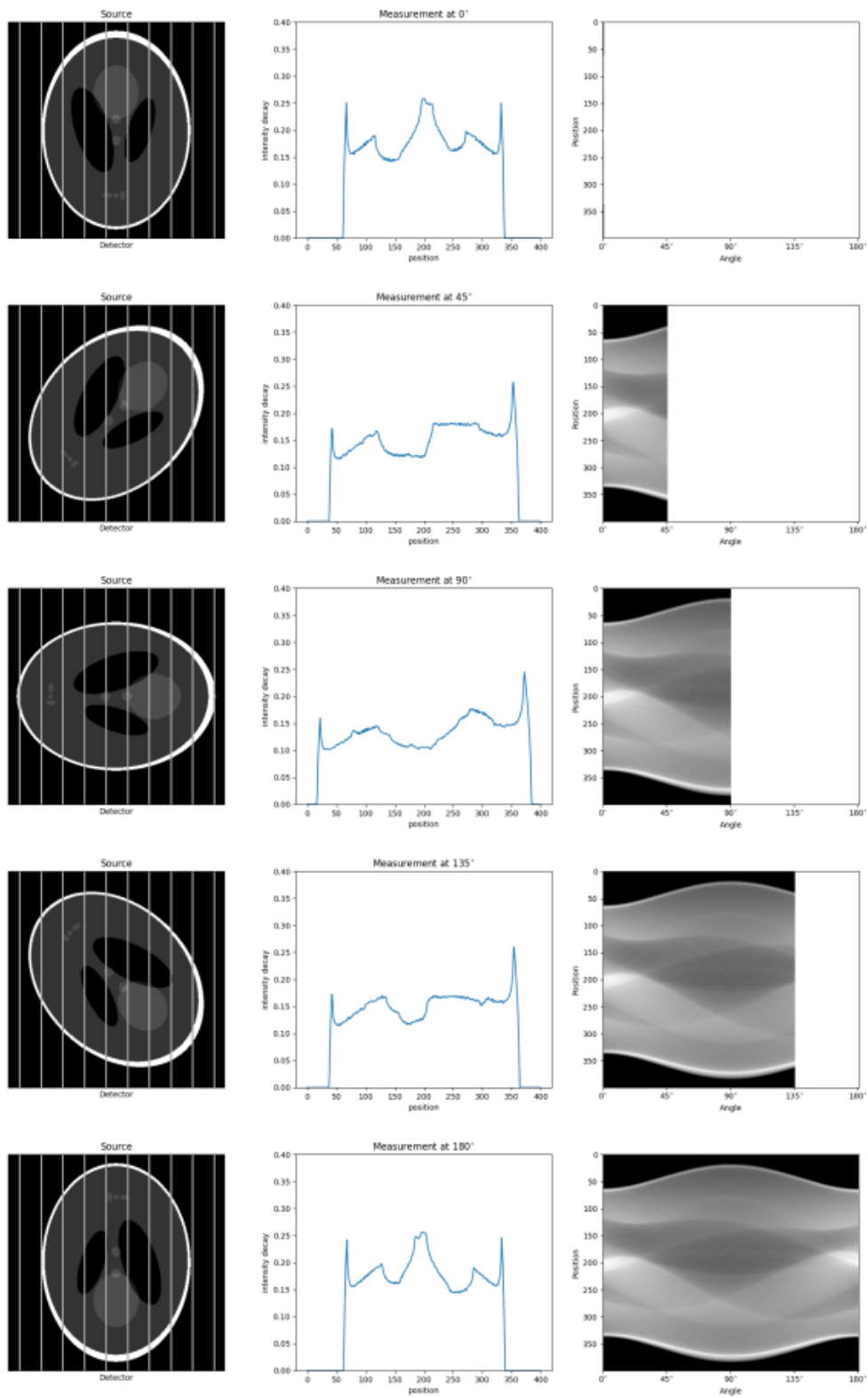


Figure 2.3: **Exemple de tomodensitométrie (CT) avec le modèle de Shepp-Logan.** La colonne de gauche montre la rotation de la source de rayonnement, la colonne du milieu les mesures du détecteur pour un angle spécifique, et la colonne de gauche l'évolution du sinogramme.



## Mal-positude au sens de Hadamard

Lors de la résolution de problèmes inverses, nous devons faire face à certaines difficultés :

- **Le premier problème** survient s'il n'existe aucune solution au problème inverse. Cela peut se produire si la mesure est bruitée et que  $\mathbf{y}$  n'appartient pas à la plage de données supposée. Le problème de non-existence peut souvent être surmonté par une modélisation appropriée.
- **Le deuxième problème** survient si la solution du problème inverse n'est pas **unique**, c'est-à-dire s'il existe plusieurs entrées  $\mathbf{x}$  qui génèrent la même mesure  $\mathbf{y}$ .
- **Le troisième problème, et le plus difficile**, survient si la résolution du problème inverse n'est pas **stable**, c'est-à-dire si le comportement de la solution ne varie pas continûment par rapport à la mesure  $\mathbf{y}$ . Si le problème est instable, même de petites perturbations du bruit  $\varepsilon$  dans la mesure peuvent entraîner des artefacts importants dans la solution.

## Quelques approches itératives

- Méthodes algébriques (ART, SIRT, SART)
- Méthodes statistiques (ML-EM, OSEM, MAP)
- **Méthodes variationnelles** (régularisation de Tikhonov, Total Variation)
- **Compressive Sensing** (reconstruction à partir de mesures sous-échantillonnées)

### 2.1.3 Méthodes basées sur l'apprentissage profond

Reconstruction par modèles neuronaux apprenant directement la relation données-image.

#### Quelques exemples

- Réseaux feed-forward (U-Net, FBPCConvNet)
- Architectures itératives unrolled
- Modèles génératifs (GAN, diffusion models)

Bref, le processus est fondamentalement linéaire et mal conditionné, ce qui signifie que de petites erreurs dans les données peuvent entraîner de grandes erreurs dans l'image reconstruite. Cela rend la qualité de l'acquisition et le traitement préalable (filtrage, correction d'aberrations) essentiels.

# Chapitre 3

## Quelques modèles de reconstruction

### 3.1 Les traitements préalables à la reconstruction

#### 3.1.1 Méthodes dans le domaine spatial

Filtrage linéaire

Filtrage non linéaire

Filtres bilatéraux, médians, morphologiques

#### 3.1.2 Méthodes dans le domaine transformé

Transformée de Fourier : filtrage fréquentiel

Filtre de Wiener

Transformée en cosinus discrète (DCT)

Ondelettes, curvelets, contourlets

Filtrage collaboratif BM3D

### 3.2 La transformée de Radon

L'hypothèse fondamentale est que le détecteur mesure l'atténuation intégrée le long d'un rayon.

**Définition 3.2.1.** Pour un faisceau de rayons  $\mathbf{X}$  d'énergie  $\mathbf{E}$  donnée et un taux de propagation des photons  $\mathbf{N}(x)$ , l'intensité du faisceau  $\mathbf{I}(x)$  à une distance  $x$  de l'origine est définie comme

$$\mathbf{I}(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{E}$$

**Définition 3.2.2.** La proportion de photons absorbés par millimètre de substance à une distance  $x$  de l'origine est appelée le coefficient d'atténuation  $\mathbf{A}(x)$  du milieu.

Nous connaissons les intensités initiale et finale,  $I_0$  et  $I_1$  d'un faisceau unique. L'objectif est d'utiliser ces intensités pour déterminer le coefficient d'atténuation le long du trajet du faisceau. Heureusement, la loi de Beer-Lambert établit une relation entre ces deux grandeurs.

**Définition 3.2.3** (Loi de Beer-Lambert). Pour un faisceau de rayons  $X$  monochromatique, non réfractif et de largeur nulle, traversant un milieu homogène sur une distance  $x$  à partir de l'origine, l'intensité  $I(x)$  est donnée par

$$I(x) = I_0 e^{-\mathbf{A}(x)x} \quad (3.1)$$

En l'état, cette équation ne nous est pas particulièrement utile. Elle exprime le coefficient d'atténuation en un point donné en fonction de l'intensité en ce point, alors que nous ne connaissons la valeur de l'intensité qu'en des points situés à l'extérieur de l'objet. Ce que nous cherchons réellement est une relation entre le coefficient d'atténuation à l'intérieur de l'objet et la variation de l'intensité du faisceau. Pour cela, nous allons manipuler légèrement l'équation (3.1).

En passant à la dérivée de la loi de Beer-Lambert, nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{dI}{dx} = -\mathbf{A}(x)I(x)$$

Soit  $I(x_0) = I_0$  la valeur initiale de l'intensité du faisceau et  $I(x_1) = I_1$  la valeur finale de l'intensité du faisceau. En utilisant cette relation, nous obtenons la relation suivante :

$$-\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{A}(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dI}{I(x)} = \ln\left(\frac{I_1}{I_0}\right)$$

ou encore

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{A}(x)dx = \ln\left(\frac{I_0}{I_1}\right) \quad (3.2)$$

Nous sommes maintenant prêts à introduire des outils mathématiques — en particulier la transformée de Radon — qui joueront un rôle central dans la détermination du coefficient d'atténuation dans l'équation (3.1).

L'écriture sous forme normale d'une équation de droite joue un rôle clé dans la transformée de Radon, car elle permet une paramétrisation naturelle et complète de toutes les droites du plan, ce qui est essentiel pour la définition mathématique et le calcul pratique de cette transformation.

Cette équation sous forme normale fournit :

- (i) Une paramétrisation unique et continue de toutes les droites du plan. La forme normale (ou forme normale de Hesse) de l'équation de la droite s'écrit :

$$x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = \rho$$

où  $\rho$  est la distance par rapport à l'origine et  $\theta$  est l'angle par rapport à l'axe des abscisses.

- (ii) Une interprétation géométrique claire de  $\rho$  et  $\theta$ . Chaque droite du plan correspond à un unique couple  $(\rho, \theta)$ . Cette paramétrisation évite les redondances et garantit qu'on parcourt toutes les droites une et une seule fois (à une convention près).

- (iii) Une mesure naturelle sur l'espace des droites, utilisée dans les formules d'inversion.
- (iv) Un formalisme adapté au théorème de coupe, reliant transformée de Radon et transformée de Fourier 2D.
- (v) Une mesure naturelle sur l'espace des droites, utilisée dans les formules d'inversion.

### Construction de l'orientation et de la distance

Nous connaissons tous l'idée qu'une droite  $l$  dans  $\mathbb{R}^2$  peut être représentée par l'équation

$$ax + by = c$$

où  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

On peut alors écrire cette équation d'une droite sous la forme

$$w_1x + w_2y = t$$

où  $w := (w_1, w_2) = (\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})$  et  $t = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , que nous pouvons voir comme un point situé sur le cercle unitaire, pour

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$$

Cela implique que  $w := (\cos(\theta), \sin(\theta))$  est un vecteur normal unitaire,  $\theta \in [0, 2\pi)$  représente l'orientation, et  $t$  est exactement la distance à l'origine. On a

$$x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = t$$

Notez que dans les équations ci-dessus,  $t$  et  $\theta$  sont fixes et déterminent une droite spécifique  $l$  dans le plan. On peut donc dire que  $t$  et  $\theta$  paramètrent une droite  $l_{t,\theta}$  et que  $z$  détermine des points spécifiques sur cette droite  $l$ . Ou encore

$$l_{t,\theta} = \{z \in \mathbb{R}^2 : \langle z, (\cos \theta, \sin \theta) \rangle = t\}.$$

**Définition 3.2.4** (Transformée de Radon). Soit  $f(t, \theta)$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  à support compact. La transformée de Radon de  $f$ , notée  $\mathcal{R}f$ , est définie pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in (0, 2\pi]$  par

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(s), y(s)) ds$$

La transformée de Radon permet de déterminer la densité totale d'une fonction  $f$  le long d'une droite donnée  $l$ . Cette droite  $l$  est définie par un angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $x$  et une distance  $t$  par rapport à l'origine. Comme illustré à la ??, si l'on calcule la transformée de Radon le long de plusieurs droites à des angles différents (ici  $\theta_1$  et  $\theta_2$ ), on peut déterminer plusieurs fonctions de densité pour notre objet. Intuitivement, on peut interpréter la transformée de Radon comme une version « étalée » de notre objet initial. Supposons que la région en forme de tache représentée à la ?? soit une tache d'encre ; si

l'on étale cette tache le long de lignes de direction  $\theta_1$ , on s'attend à ce que les régions les plus larges de la tache correspondent à des zones plus étendues que les régions plus petites, ce qui correspond exactement à ce que l'on observe.

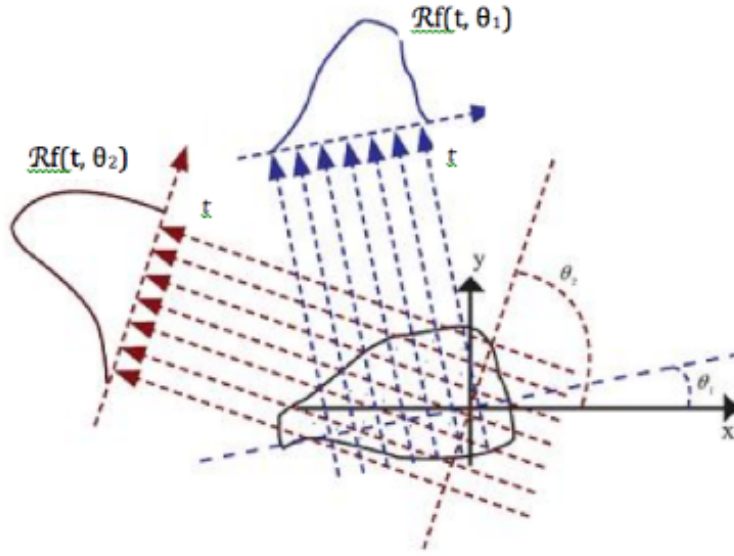


Figure 3.1: Transformée de Radon pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

L'objectif est maintenant de trouver une formule d'inversion de la transformée de Radon qui nous permettra de reconstruire la fonction initiale  $f$  (ou, dans le contexte de l'imagerie médicale,  $\mathbf{A}(x)$ ). Pour ce faire, il sera utile de rappeler plusieurs propriétés de la transformée de Radon.

**Proposition 3.2.1.** Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels et  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}^2$  à support compact. On a

- (i) Linéarité :  $\mathcal{R}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{R}f + \beta \mathcal{R}g$
- (ii) Parité:  $\mathcal{R}f(-t, -\theta) = \mathcal{R}f(t, \theta)$
- (iii)  $\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(s), y(s)) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos(\theta) - s \sin(\theta), t \sin(\theta) + s \cos(\theta)) ds$

Nous définissons en outre le domaine naturel de la transformée de Radon comme l'ensemble des fonctions  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x(s), y(s))| ds < \infty$$

### 3.3 Transformée de Fourier

**Définition 3.3.1** (Transformée de Fourier). Soit  $f$  une fonction absolument intégrable sur  $\mathbb{R}$ . La transformée de Fourier de  $f$ , notée  $\mathcal{F}f$ , est définie pour tout nombre réel  $\xi$  par

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

La transformée de Fourier est fréquemment utilisée en analyse du signal et permet de transformer une fonction du temps en une fonction de la fréquence ; la variable  $x$  représente le temps en secondes et la variable  $\xi$  représente la fréquence de la fonction en hertz.

Il existe une définition alternative faisant intervenir la fréquence angulaire  $w = 2\pi\xi$ , ce qui conduit à l'expression suivante.

$$(\mathcal{F}f)(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$$

Comme pour la transformée de Radon, nous allons énumérer plusieurs propriétés de la transformée de Fourier.

**Proposition 3.3.1.** Pour des constantes réelles  $\alpha$  et  $\beta$ , et des fonctions absolument intégrables  $f$  et  $g$ , on a :

(i) Linéarité :  $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(w) = \alpha \mathcal{F}f(w) + \beta \mathcal{F}g(w)$

(ii)  $\mathcal{F}f(w) < +\infty$

**Définition 3.3.2** (Transformée de Fourier inverse). Soit  $f$  une fonction absolument intégrable. La transformée de Fourier inverse de  $f$ , notée  $\mathcal{F}^{-1}f$ , évaluée en  $x$ , est définie par

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(w) e^{iwx} dw.$$

Ceci nous conduit immédiatement au théorème suivant.

**Proposition 3.3.2** (Théorème d'inversion de Fourier). Soit  $f$  une fonction absolument intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Le théorème d'inversion de Fourier affirme que, pour tout  $x$ ,

$$(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})f(x) = f(x)$$

Jusqu'à présent, nous n'avons abordé la transformée de Fourier que dans une dimension. Il existe des définitions correspondantes en dimensions supérieures, mais, pour nos besoins, nous n'utiliserons que les analogues en deux dimensions.

**Définition 3.3.3** (Transformée de Fourier bidimensionnelle). Soit  $g$  une fonction absolument intégrable définie sur  $\mathbb{R}^2$ . La transformée de Fourier bidimensionnelle de  $g$ , notée  $\mathcal{F}_2g$ , est définie pour tout  $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$  par

$$(\mathcal{F}_2g)(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i(xX+yY)} dx dy. \quad (3.3)$$

De manière similaire, nous définissons la transformée de Fourier inverse sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 3.3.4** (Transformée de Fourier bidimensionnelle inverse). Soit  $g$  une fonction absolument intégrable définie sur  $\mathbb{R}^2$ . La transformée de Fourier bidimensionnelle inverse de  $g$ , évaluée en  $(x, y)$  et notée  $\mathcal{F}_2^{-1}g(x, y)$ , est donnée par

$$(\mathcal{F}_2^{-1}g)(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(X, Y) e^{i(xX+yY)} dX dY.$$

### 3.3.1 Le Théorème de la Coupe Centrale

Le théorème de la coupe centrale, également appelé théorème de projection-transforme de Fourier ou théorème de Fourier-Slice, est un résultat fondamental en traitement d'image et en tomographie. Il établit un lien profond entre la transformée de Radon (utilisée pour décrire les projections d'un objet) et la transformée de Fourier (utilisée pour analyser les fréquences spatiales). Ce théorème constitue la pierre angulaire mathématique de la plupart des méthodes de reconstruction tomographique moderne.

**Proposition 3.3.3.** Soit  $g$  une fonction absolument intégrale sur  $\mathbb{R}^2$ . Le théorème de la coupe centrale affirme que, pour tout  $S \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in [0, 2\pi]$ , on a :

$$\mathcal{F}_2 g(S \cos(\theta), S \sin(\theta)) = \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)$$

**Preuve:** En utilisant la définition de la transformée de Fourier bidimensionnelle (??) on obtient

$$\mathcal{F}_2 g(S \cos(\theta), S \sin(\theta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-iS(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} dx dy$$

### 3.4 Inversion analytique de la transformée de Radon

### 3.5 Rétroprojection filtrée (FBP) : aspects algorithmiques

# Chapitre 4

## Reconstruction d'images : problèmes inverses et compressive sensing

### 4.1 Cadre des problèmes inverses

#### 4.1.1 Le problème inverse : formulation générale

Un problème inverse consiste à estimer une quantité inconnue (ici, une image) à partir d'observations indirectes, bruitées et souvent incomplètes. Formellement, ce processus peut être modélisé par :

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (4.1)$$

où :

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  représente l'image à reconstruire (inconnue),
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  correspond aux données acquises (observations),
- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est l'opérateur direct modélisant le processus de dégradation (flou, projection, sous-échantillonnage, etc.),
- $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^m$  désigne le bruit de mesure additif.

L'opérateur  $\mathcal{A}$  est typiquement *mal conditionné* voire non inversible ( $m < n$  dans le cas sous-déterminé), rendant la reconstruction de  $\mathbf{x}$  à partir de  $\mathbf{y}$  intrinsèquement difficile.

**Définition 4.1.1.** Un problème est dit **bien posé** au sens de Hadamard s'il vérifie simultanément trois conditions :

1. **Existence** : Il existe au moins un  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .
2. **Unicité** : Cette solution est unique ; c'est-à-dire que si  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  vérifie  $\mathcal{A}\mathbf{z} = \mathbf{y}$ , alors nécessairement  $\mathbf{z} = \mathbf{x}$ .
3. **Stabilité** : La solution dépend continûment des données  $\mathbf{y}$ . Plus précisément, pour toute suite  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  telle que  $\mathcal{A}\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y}$  (convergence dans  $\mathbb{R}^m$ ), on a également  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$  (convergence dans  $\mathbb{R}^n$ ).



Si l'une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, le problème (??) est dit *mal posé* au sens de Hadamard.

La majorité des problèmes inverses en imagerie violent au moins une de ces conditions, les rendant **mal posés**. La mal-positude se manifeste notamment par une grande sensibilité au bruit : de infimes variations des données  $\mathbf{y}$  peuvent provoquer des changements arbitrairement grands dans la solution estimée.

En pratique, les observations  $\mathbf{y}$  sont corrompues par différents types de bruit (phonique, électronique, quantique, etc.) et sont souvent acquises de manière incomplète ( $m \ll n$ ) pour des raisons techniques ou temporelles. Cette sous-détermination aggrave la mal-positude et rend le problème *indéterminé* (multiples solutions possibles).

La résolution d'un problème inverse mal posé nécessite l'injection d'*information a priori* sur la solution recherchée. Ces contraintes peuvent être de différentes natures :

- Contraintes physiques (positivité, support limité, etc.)
- Propriétés statistiques (distribution du bruit, régularité spatiale)
- Structures spécifiques (parcimonie dans une base appropriée, bas rang, etc.)

L'intégration judicieuse de ces informations constitue le cœur des méthodes modernes de reconstruction.

## 4.2 Approches variationnelles

Lors de la résolution de problèmes inverses, l'objectif est de retrouver une quantité inconnue  $\mathbf{x}$  à partir de données mesurées  $\mathbf{y}$ . Comme les exemples précédents l'ont montré, cette tâche peut s'avérer difficile. Même si l'opérateur  $\mathcal{A}$  admet un inverse bien défini sur son image, c'est-à-dire que  $\mathcal{A}^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  existe, rien ne garantit que les données bruitées appartiennent encore à l'image de l'opérateur. On peut également n'avoir accès qu'à des mesures partielles, ce qui mène à des systèmes sous-déterminés et rend l'inversion directe impossible, même sur des données non bruitées.

**Régularisation.** Une approche pour obtenir des solutions significatives dans les scénarios décrits est appelée *régularisation*. Une régularisation  $\mathfrak{R}_\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  associe à tout point de données une solution favorable. Intuitivement, on espère que la régularisation étend approximativement la notion d'inverse au cadre bruité et potentiellement mal posé, c'est-à-dire

$$\mathfrak{R}_\alpha(\mathcal{A}\mathbf{x} + \varepsilon) \approx \mathbf{x}. \quad (4.2)$$

Une stratégie typique est la régularisation dite *de type Tikhonov* ou *variationnelle*, où la sortie de l'application de régularisation est définie comme la solution du problème suivant

$$\arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{L^2}^2}_{\text{fidélité aux données}} + \alpha \underbrace{\mathcal{R}(\mathbf{x})}_{\text{régularisant}}. \quad (4.3)$$

Les termes s'interprètent comme suit :

- **Fidélité aux données** : Ce terme indique à quel point notre estimation  $\mathbf{x}$  correspond aux données observées  $\mathbf{y}$ . Bien que nous souhaitions minimiser la fidélité aux données, il n'est pas toujours pertinent de l'annuler dans le cas bruité, car nous cherchons  $\hat{\mathbf{x}}$  tel que  $\mathcal{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y} - \varepsilon$ , où potentiellement  $\mathcal{A}\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{y}$ .
- **Régularisant** : Le régularisant nous permet d'incorporer des informations supplémentaires sur la solution recherchée. Dans le cas classique, nous savons déjà que  $\mathbf{x}$  doit être proche d'un certain point  $\mu$ , c'est-à-dire que nous voulons pénaliser la distance entre la solution  $\mathbf{x}$  et  $\mu$ . De plus, on souhaite souvent pénaliser certaines directions plus que d'autres, pour lesquelles nous considérons un opérateur unitaire  $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et choisissons ensuite

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mu\|_{L^2, \mathcal{Q}}^2 := \langle \mathbf{x} - \mu, \mathcal{Q}(\mathbf{x} - \mu) \rangle,$$

ce qui est appelé *régularisation de Tikhonov*<sup>1</sup>.

- **Paramètre de régularisation  $\alpha$**  : Le paramètre  $\alpha > 0$  contrôle la force du régularisant. Dans certaines formulations, ce paramètre est inclus dans la définition du régularisant.

Le terme de régularisation  $\mathcal{R}(\mathbf{x})$  joue un rôle central dans la qualité de reconstruction obtenue. Il encode des hypothèses structurelles sur l'image recherchée et conditionne à la fois l'aspect visuel de la solution et la complexité numérique de l'algorithme utilisé.

---

<sup>1</sup>parfois appelée « régularisation aux moindres carrés »

Le choix du régularisateur dépend :

- du type d'images traitées,
- de la nature du bruit,
- de la structure de l'opérateur  $\mathbf{A}$ ,
- des contraintes de temps de calcul.

Des régularisations hybrides, combinant par exemple variation totale et parcimonie, sont fréquemment utilisées pour améliorer la qualité de reconstruction.

## 4.3 Régularisation classique

La régularisation classique désigne l'ensemble des méthodes visant à stabiliser la résolution des problèmes inverses en introduisant des contraintes supplémentaires sur la solution. Ces contraintes imposent des propriétés de l'image reconstruite telles que la régularité, la parcimonie des gradients ou la similarité avec des voisins. Les principales familles comprennent la régularisation quadratique de Tikhonov, la variation totale, les approches non locales et les méthodes multi-échelles.

### 4.3.1 Régularisation de Tikhonov ( $L^2$ )

Une méthode bien connue et efficace est la *régularisation de Tikhonov*. Dans cette approche, une solution du problème (??) est approchée par une solution du problème de minimisation

$$\min \|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2^2 \quad (4.4)$$

où  $\alpha > 0$  est un petit paramètre,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  est une approximation du membre de gauche exact  $\mathbf{y}$  du problème (??), et  $\mathbf{x}^*$  est une estimation a priori de la solution inconnue.

D'après l'article [?], la démonstration de l'existence, de l'unicité et de la stabilité de la solution du problème de minimisation de Tikhonov est principalement détaillée dans les sections 2 et 3.

#### Existence de la solution

L'existence d'une solution au problème de minimisation est établie à la fois par l'analyse fonctionnelle générale et par une construction opératorielle spécifique :

- **Lemme 1** : Les auteurs affirment qu'une solution  $R_\alpha y$  du problème de minimisation  $\min(\|Av - y\|_Y^2 + \alpha M(v))$  **existe** . La preuve repose sur le fait que  $M$  est une fonctionnelle semi-continue inférieurement et que l'ensemble  $\{v \in X_M : M(v) \leq r\}$  est compact .
- **Système de fonctions propres** : Dans la section 3, le texte déclare explicitement : « Tout d'abord, nous prouvons l'**existence** et l'unicité ». Cela est démontré en montrant que la solution  $x(\alpha)$  peut être représentée à l'aide d'un système complet de fonctions propres  $\{L_k\}$  de l'opérateur autoadjoint  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$  .

## Unicité de la solution

L'article fournit deux justifications mathématiques distinctes pour l'unicité de la solution :

- **Détermination des composantes** : Dans la section 3, les composantes de la solution  $x_k(\alpha)$  sont montrées être **déterminées de manière unique** par la formule :

$$x_k(\alpha) = \frac{y_k^A}{\lambda_k + \alpha}$$

où  $\lambda_k$  sont les valeurs propres de  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$

- **Opérateur injectif** : Les références prouvent en outre l'unicité en montrant que l'opérateur  $(\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)$  est positif. Plus précisément, ils démontrent que le **noyau** de  $(\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)$  est  $\{0\}$ , ce qui garantit que toute solution existante est nécessairement unique.

## Stabilité de la solution

La stabilité est abordée comme la dépendance continue de la solution par rapport aux données et au paramètre  $\alpha$  :

- **Preuve de continuité** : Dans la section 3, les auteurs déclarent explicitement : « Nous montrons maintenant que  $R_\alpha$ , c'est-à-dire  $x(\alpha)$ , est **continu** » [5]. Ils fournissent une preuve montrant que lorsque la différence entre les paramètres  $|\alpha' - \alpha|$  tend vers zéro, la distance entre les solutions correspondantes  $\|x(\alpha) - x(\alpha')\|$  s'annule également.
- **Propriété de régularisation** : Par définition, la famille d'opérateurs  $R_\alpha$  est montrée être un **régulariseur**, ce qui signifie qu'elle fournit une approximation stable qui converge ponctuellement vers la solution exacte lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ , sous réserve que les données soient cohérentes ( $y = \mathcal{A}x$ ).

### 4.3.2 Variation Totale (TV)

Afin de pallier les limitations de la régularisation quadratique, la régularisation par variation totale a été introduite pour préserver les discontinuités. Dans sa forme isotrope, elle est définie par :

$$\mathcal{R}_{\text{TV}}(\mathbf{x}) = \sum_{i,j} \sqrt{(\nabla_x x_{i,j})^2 + (\nabla_y x_{i,j})^2} = \|\nabla \mathbf{x}\|_1. \quad (4.5)$$

L'emploi de la norme  $L^1$  du gradient conduit à :

- la préservation des bords nets,
- la suppression efficace du bruit,
- la production d'images par morceaux quasi-constants.

La minimisation associée est cependant non lisse et nécessite des méthodes itératives de type primal-dual, ADMM ou Split-Bregman [?]. Un inconvénient notable est l'apparition du phénomène dit de *staircasing*, caractérisé par des paliers artificiels.

### 4.3.3 Méthodes non locales

Les méthodes non locales exploitent la redondance statistique présente dans l'image en considérant des similarités entre pixels spatialement éloignés. Plutôt que de ne considérer que le voisinage local, elles s'appuient sur une mesure de similarité entre patches.

Une formulation typique repose sur la pénalisation :

$$\mathcal{R}_{\text{NL}}(\mathbf{x}) = \sum_{i,j} w_{ij} (x_i - x_j)^2, \quad (4.6)$$

où  $w_{ij}$  représente un poids mesurant la similarité entre les régions autour des pixels  $i$  et  $j$ .

Ces approches permettent :

- meilleure préservation des textures,
- réduction du bruit sans sur-lissage,
- exploitation de structures répétitives.

Elles sont à la base des méthodes telles que *Non-Local Means* et des approches basées patches pour la débruitage et la défloutage.

### 4.3.4 Approches multi-échelles (ondelettes, curvelets)

Les approches multi-échelles s'appuient sur le fait que les images naturelles présentent des structures à plusieurs résolutions. Les représentations dans des bases telles que les ondelettes, les curvelets ou les contourlets permettent de capturer efficacement :

- les singularités orientées,
- les contours,
- les textures fines.

La régularisation consiste alors à imposer la parcimonie des coefficients transformés :

$$\mathcal{R}_{\text{MS}}(\mathbf{x}) = \|\Psi \mathbf{x}\|_1, \quad (4.7)$$

où  $\Psi$  désigne une transformée multi-résolution.

Les ondelettes sont particulièrement adaptées aux singularités ponctuelles, tandis que les curvelets et shearlets offrent une meilleure représentation des structures anisotropes et courbes. Ces méthodes constituent un lien direct avec le *Compressed Sensing* et les modèles parcimonieux modernes.

## 4.4 Modèles parcimonieux

Les modèles parcimonieux reposent sur l'hypothèse qu'une image ou un signal peut être représenté par un nombre réduit de coefficients significatifs dans une base appropriée ou un dictionnaire sur-complet. Cette propriété est à la base de nombreuses techniques modernes de reconstruction d'images, de compression et de *Compressed Sensing*. L'objectif est de promouvoir des représentations compactes permettant de régulariser les problèmes inverses mal posés.

### 4.4.1 Bases orthogonales vs dictionnaires

Une représentation parcimonieuse peut être obtenue soit dans une **base orthogonale**, soit dans un **dictionnaire sur-complet**.

**Bases orthogonales** Une base orthogonale  $\{\phi_k\}_{k=1}^N$  de  $\mathbb{R}^n$  permet d'écrire :

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k, \quad (4.8)$$

où les coefficients  $\alpha_k$  sont uniques. Exemples courants :

- ondelettes orthogonales,
- base de Fourier,
- transformée discrète du cosinus (DCT).

Les bases orthogonales ont l'avantage de garantir l'unicité des coefficients et de permettre des calculs rapides via des transformées rapides (FFT, DWT, DCT).

**Dictionnaires sur-complets** Un dictionnaire  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N \times K}$  avec  $K > n$  est dit sur-complet. Dans ce cas, un signal peut avoir plusieurs décompositions possibles :

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}\alpha, \quad (4.9)$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}^K$  est un vecteur de coefficients.

Les dictionnaires sur-complets offrent :

- une meilleure capacité d'adaptation aux structures complexes,
- des représentations plus parcimonieuses,
- la possibilité d'apprentissage à partir des données.

Cependant, la décomposition n'est plus unique et nécessite la résolution de problèmes d'optimisation.

### 4.4.2 Modèles sparse : $L^0$ et $L^1$

La parcimonie consiste à rechercher une représentation comportant le moins de coefficients non nuls possible. Le problème fondamental est :

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \quad \text{sous la contrainte} \quad \mathbf{x} = \mathbf{D}\alpha, \quad (4.10)$$

où  $\|\alpha\|_0$  désigne le nombre de coefficients non nuls. Ce problème est combinatoire et NP-difficile.

Pour rendre la résolution praticable, on remplace la norme  $L^0$  par la norme convexe  $L^1$  :

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \quad \text{sous} \quad \mathbf{x} = \mathbf{D}\alpha, \quad (4.11)$$

ou, en présence de bruit,

$$\min_{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{D}\alpha\|_2^2 + \alpha \|\alpha\|_1 \right\}. \quad (4.12)$$

La relaxation  $L^1$  constitue la base mathématique des approches de *Basis Pursuit*, *LASSO* et du *Compressed Sensing*.

#### 4.4.3 Algorithmes d'approximation parcimonieuse

Plusieurs classes d'algorithmes permettent de résoudre les problèmes parcimonieux.

**Méthodes gloutonnes** Ces méthodes sélectionnent itérativement les atomes du dictionnaire qui expliquent au mieux le signal résiduel. Parmi elles :

- Matching Pursuit (MP),
- Orthogonal Matching Pursuit (OMP),
- Stagewise OMP (StOMP).

Elles présentent un faible coût de calcul et sont adaptées aux dictionnaires de grande taille.

**Méthodes par seuillage** Ces méthodes reposent sur le seuillage doux ou dur des coefficients :

- ISTA (Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm),
- FISTA (version accélérée),
- algorithmes proximal-gradient.

Elles sont particulièrement adaptées à la minimisation de fonctionnelles  $L^2$ - $L^1$  convexes.

#### 4.4.4 K-SVD : apprentissage de dictionnaire

Le K-SVD est un algorithme d'apprentissage de dictionnaire visant à construire un dictionnaire sur-complet directement à partir d'un ensemble d'images ou de patches. L'objectif est de résoudre :

$$\min_{\mathbf{D}, \alpha_i} \sum_i \|\mathbf{x}_i - \mathbf{D}\alpha_i\|_2^2 \quad \text{sous la contrainte} \quad \|\alpha_i\|_0 \leq T_0, \quad (4.13)$$

où  $\{\mathbf{x}_i\}$  sont les signaux d'apprentissage et  $T_0$  fixe le niveau de parcimonie.

L'algorithme alterne :

1. une étape de **codage parcimonieux** des coefficients,
2. une étape de **mise à jour du dictionnaire** atome par atome via la décomposition en valeurs singulières (SVD).

Le K-SVD permet de construire des dictionnaires adaptés aux structures réelles des images, conduisant à d'excellentes performances en :

- débruitage,
- défloutage,
- inpainting,
- super-résolution.

## 4.5 Théorie du Compressive Sensing

Le compressed sensing fournit un cadre rigoureux pour la reconstruction de signaux parcimonieux ou compressibles à partir de mesures linéaires fortement sous-échantillonnées. Il offre une solution fondée sur des principes solides aux problèmes inverses sous-déterminés, via des méthodes d'optimisation favorisant la parcimonie ou des algorithmes d'approximation gloutons. Cette approche a un impact majeur en imagerie médicale, imagerie computationnelle, résolution de problèmes inverses et systèmes de communication modernes.

**Définition 4.5.1.** Le *compressed sensing* (CS) est un cadre mathématique et algorithmique qui permet la reconstruction de signaux de grande dimension à partir d'un nombre de mesures significativement inférieur à celui requis par les méthodes traditionnelles.

**Définition 4.5.2.** Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  un signal inconnu. On dit que  $x$  est  $k$ -parcimonieux dans une base (ou dictionnaire)  $\Psi$  (ex: Fourier, wavelet, DCT) si

$$x = \Psi\alpha, \quad \text{où } \alpha \text{ possède au plus } k \ll n \text{ coefficients non nuls.}$$

En pratique, de nombreux signaux ne sont pas parcimonieux dans leur domaine original (canonique), mais le deviennent après l'application d'une transformation linéaire. On observe des mesures linéaires de la forme

$$y = Ax,$$

où  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  avec  $m \ll n$ . La théorie classique de l'échantillonnage exige  $m = n$  mesures indépendantes pour une reconstruction exacte, tandis que le compressed sensing montre que

$$m \gtrsim k \log(n/k)$$

est suffisant pour une reconstruction exacte ou stable, sous des conditions appropriées sur  $A$ , telles que la propriété d'isométrie restreinte (*Restricted Isometry Property*, RIP) ou l'incohérence.

Les résultats classiques de l'échantillonnage, tels que le théorème de Nyquist–Shannon, imposent qu'un signal soit échantillonné à une fréquence proportionnelle à sa bande passante. Le compressed sensing remet en cause ce paradigme en observant que de nombreux signaux réels (images, données médicales, spectres) sont parcimonieux ou compressibles dans une base de transformation (par exemple ondelettes, Fourier, DCT). Par conséquent, leur dimension effective est bien plus faible que le nombre d'échantillons disponibles. Le compressed sensing exploite cette redondance pour réduire drastiquement les coûts d'acquisition. Le compressed sensing s'attaque au problème général suivant :



Comment reconstruire un signal parcimonieux de grande dimension à partir d'un ensemble sous-déterminé de mesures linéaires ?

Ce cadre permet de résoudre plusieurs limitations pratiques :

**Réduction du nombre de mesures.**

De nombreux systèmes d'acquisition sont limités par le coût, le temps ou l'énergie. Le compressed sensing permet :

- une acquisition plus rapide des données,
- une réduction de la complexité matérielle,
- une diminution de la dose de radiation (par exemple en tomodensitométrie),
- une réduction des coûts de stockage et de transmission.

**Problèmes inverses mal posés (ill-posed inverse problems).**

Lorsque le nombre de mesures est insuffisant pour garantir une solution unique, le CS introduit une régularisation fondée sur la parcimonie, permettant une reconstruction stable. Les principales applications incluent :

- la tomographie (CT, IRM, PET),
- l'imagerie à super-résolution,
- la déconvolution,
- les inversions géophysiques et les essais non destructifs.

**Robustesse au bruit et aux données incomplètes.**

Le CS garantit une reconstruction stable même en présence de bruit, de corruptions ou d'observations manquantes.

## 4.5.1 Reconstruction de signaux par Compressed Sensing

### Reconstruction par optimisation

La formulation canonique de la reconstruction est

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \quad \text{s.c.} \quad y = A\Psi\alpha,$$

ou, en présence de bruit,

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \quad \text{s.c.} \quad \|A\Psi\alpha - y\|_2 \leq \epsilon.$$

Cela correspond aux formulations de type *Basis Pursuit* ou *LASSO*. La minimisation de la norme  $\ell_1$  favorise la parcimonie tout en conservant un problème d'optimisation convexe et calculable efficacement.

## Algorithmes gloutons

Des alternatives plus rapides incluent :

- l'*Orthogonal Matching Pursuit* (OMP),
- le *Compressive Sampling Matching Pursuit* (CoSaMP),
- l'*Iterative Hard Thresholding* (IHT).

Ces méthodes échantonnent une partie de la précision contre un coût computationnel réduit.

### 4.5.2 Applications du Compressed Sensing

#### Imagerie médicale.

- acquisition IRM accélérée,
- CT à dose réduite,
- échographie à haute cadence d'images.

#### Imagerie computationnelle.

- caméras à pixel unique,
- imagerie à ouverture codée,
- reconstruction hyperspectrale.

#### Télédétection et géophysique.

- inversion sismique parcimonieuse,
- imagerie radar et radar à synthèse d'ouverture (SAR).

#### Communications sans fil.

- estimation parcimonieuse de canaux,
- réduction des pilotes dans les systèmes MIMO massifs.

#### Apprentissage automatique et traitement du signal.

- régression parcimonieuse (LASSO),
- apprentissage de dictionnaires,
- ACP robuste et modèles de rang faible apparentés.

## 4.6 Méthodes d'optimisation

Les problèmes inverses régularisés et les modèles parcimonieux conduisent le plus souvent à la minimisation de fonctionnelles non différentiables, voire contraintes. Le choix d'une méthode d'optimisation adaptée conditionne la qualité de la reconstruction, la rapidité de convergence et la robustesse numérique. Les approches modernes reposent notamment sur les méthodes proximales, les schémas de décomposition de type ADMM, ainsi que les méthodes de gradient projeté.

### 4.6.1 Méthodes proximales

Les méthodes proximales constituent le cadre de référence pour l'optimisation de fonctionnelles comportant des termes non lisses. Soit une fonction convexe propre et semi-continue inférieurement  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . L'opérateur proximal associé est défini par :

$$\text{prox}_{\alpha f}(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{z}} \left\{ f(\mathbf{z}) + \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_2^2 \right\}. \quad (4.14)$$

Cet opérateur permet de traiter naturellement des pénalités non différentiables telles que :

- la norme  $\ell_1$  (seuilage doux),
- la variation totale,
- les contraintes indicatrices de convexes fermés.

Les algorithmes emblématiques incluent :

- Forward–Backward Splitting,
- FISTA (accéléré de Nesterov),
- Primal–Dual de Chambolle–Pock.

Ils sont particulièrement adaptés aux problèmes de la forme :

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \quad (4.15)$$

où  $f$  est différentiable à gradient lipschitzien et  $g$  est convexe éventuellement non lisse.

### 4.6.2 Méthodes ADMM

L'Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) est une méthode de décomposition permettant de résoudre des problèmes séparables en introduisant des variables auxiliaires. On considère typiquement le problème :

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{z}} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \quad \text{sous la contrainte} \quad \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{z}. \quad (4.16)$$

Le schéma itératif repose sur :

1. minimisation alternée sur  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{z}$ ,
2. mise à jour des multiplicateurs de Lagrange.

Les avantages majeurs d'ADMM sont :

- traitement naturel des contraintes linéaires,
- parallélisation possible des sous-problèmes,
- robustesse pour les grands problèmes mal conditionnés.

ADMM est aujourd'hui une référence pour la résolution de problèmes de variation totale, de débruitage parcimonieux et d'apprentissage de dictionnaire.

### 4.6.3 Méthodes de gradient projeté

Les méthodes de gradient projeté visent la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes convexes :

$$\min_{\mathbf{x} \in C} f(\mathbf{x}), \quad (4.17)$$

où  $C$  est un ensemble convexe fermé. L'itération générique s'écrit :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \Pi_C \left( \mathbf{x}^k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}^k) \right), \quad (4.18)$$

où  $\Pi_C$  désigne l'opérateur de projection sur  $C$ .

Ces méthodes sont notamment utilisées pour :

- l'imposition de contraintes de positivité,
- la borne supérieure ou inférieure sur des intensités,
- les contraintes de norme sur des coefficients parcimonieux.

Elles constituent des schémas simples, peu coûteux en mémoire, et très utilisés en traitement d'images et en reconstruction tomographique lorsque la fonction coût est différentiable.



# Chapitre 5

## Méthodes basées sur l'apprentissage

### 5.1 Fondements théoriques du deep learning appliqué à la reconstruction

#### 5.1.1 Apprentissage de régularisation

#### 5.1.2 Approches data-driven vs physics-based

#### 5.1.3 Architectures CNN, U-Net, ResNet

### 5.2 Approches supervisées

#### 5.2.1 Reconstruction directe image-à-image

#### 5.2.2 Modèles guidés par sinogrammes (CT)

#### 5.2.3 Méthodes itératives apprises

Networks unrollés

ISTA-Net

ADMM-Net

### 5.3 Approches non supervisées et auto-supervisées

#### 5.3.1 Modèles génératifs (GAN, VAE)

#### 5.3.2 Méthodes Noise2Noise, Noise2Void

#### 5.3.3 Auto-supervision pour MRI sous-échantillonnée

### 5.4 Régularisation neuronale et méthodes hybrides

#### 5.4.1 Deep Image Prior

#### 5.4.2 Plug-and-Play (PnP)

#### 5.4.3 Regularization by Denoising (RED)

#### 5.4.4 Physics-Informed Neural Networks (PINNs)

### 5.5 Applications

# Bibliographie

- [1] Wei Zou, Jiajun Wang, David Dagan Feng, *Image reconstruction of fluorescent molecular tomography based on the tree structured Schur complement decomposition*
- [2] RANDRIANARISON N.Tsirilala, RANDRIAMITANTSOA P. Auguste, RAMAFI-ARISON H. Malalatiana, *Performance of K-SVD algorithm in digital Optical Coherence Tomography*
- [3] Linwei Fan, Fan Zhang, Hui Fan, and Caiming Zhang, *Brief review of image denoising techniques*
- [4] Michael S. Hansen, and Peter Kellman, *Image reconstruction: an overview from clinicians*
- [5] Joshua Trzasko\*, Member, IEEE, and Armando Manduca, Member, IEEE, *Highly Undersampled Magnetic Resonance Image Reconstruction via Homotopic  $\ell_0$ -Minimization*
- [6] Helmholtz Imaging, Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY, Notkestr. 85, 22607 Hamburg, Germany, *ntroduction to Regularization and Learning Methods for Inverse Problems*
- [7] Bunyamin Yildiz \*, Murat Subasi, Ali Sever, *On a regularization problem*
- [8] J. P. Bregman, *Bregman Iteration for Correspondence Problems*