



UNIVERSITÉ D'ANTANANARIVO  
ÉCOLE SUPÉRIEURE POLYTECHNIQUE D'ANTANANARIVO



MENTION ÉLECTRONIQUE

Bloc 32 - Campus de Vontovorona  
BP 1500 - 101 Antananarivo

## MÉMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER À VISÉE DE RECHERCHE

Domaine :

Mention :

Parcours :

# RECONSTRUCTION D'IMAGES ISSUES DE TOMODENSITOMÉTRIE

Présenté par : Selison Frédéric ANDRIANARIVONY

Devant les membres du jury composé de :

Soutenu le : ...

N° d'ordre : ...

Année universitaire : ...



## REMERCIEMENTS

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à Dieu Tout-Puissant, source de sagesse et d'inspiration, pour son amour, sa miséricorde et sa guidance tout au long de mes études et pour la réalisation de ce mémoire.

Je remercie chaleureusement Monsieur le Chef du Département Électronique de l'ESPA, Mr. ... pour avoir accepté de présider ma soutenance, ainsi que Madame et Messieurs les membres du jury, composés de Madame ..., Monsieur ... et Monsieur ..., pour leurs conseils, corrections et remarques pertinentes qui ont grandement enrichi ce travail.

Je suis particulièrement reconnaissante à mon encadreur, Madame RAMAFIARISONA Malalatiana, pour son savoir, sa pédagogie et son accompagnement constants, qui m'ont permis de progresser et de mener ce projet à terme avec rigueur et confiance.

Mes remerciements vont également à toute l'équipe pédagogique du Département Électronique de l'ESPA pour les connaissances et compétences transmises au cours de ce Master à visée de recherche.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude à ma famille, pour son soutien moral, matériel et affectif, qui a été une source constante de motivation et d'encouragement.

Que la paix et la bénédiction de Dieu soient avec vous tous.

**Frédéric ANDRIANARIVONY**

# Table des matières

<b>CHAPITRE I: RECONSTRUCTION D'IMAGE</b>	<b>1</b>
I.1 Modalités d'imagerie médicale et reconstruction d'images . . . . .	2
I.1.1 Tomodensitométrie (TDM) . . . . .	2
I.1.2 Imagerie par résonance magnétique (IRM) . . . . .	2
I.1.3 Tomographie par émission de positons (TEP) . . . . .	3
I.1.4 Comparaison des modalités . . . . .	3
I.2 La transformation de Radon et son rôle en reconstruction d'image . . . . .	4
I.3 Limites et artefacts de la rétroprojection filtrée (FBP) . . . . .	5
I.3.1 Limites de la rétroprojection filtrée . . . . .	5
I.3.2 Artefacts associés à la FBP . . . . .	5
I.3.3 Stratégies pour atténuer les artefacts et limitations . . . . .	5
I.4 Introduction au Compressed Sensing . . . . .	6
I.5 Reconstruction d'images par Compressive Sensing (CS) . . . . .	7
I.5.1 Principes et avantages . . . . .	7
I.5.2 Limites et défis . . . . .	8
I.5.3 Artefacts et comportements observés . . . . .	8
I.5.4 Stratégies pour améliorer la reconstruction . . . . .	8
<b>CHAPITRE II: OUTILS MATHÉMATIQUES UTILISÉS DANS LA RE- CONSTRUCTION D'IMAGES PAR LE COMPRESSED SENSING</b>	<b>10</b>
II.1 Classification des approches de reconstruction . . . . .	11
II.1.1 Les méthodes analytiques . . . . .	11
II.1.2 Méthodes itératives et Compressed Sensing . . . . .	14
<b>CHAPITRE III: NOTRE MODÈLE</b>	<b>17</b>
III.1 Transformée de Fourier . . . . .	17
III.2 Convolution . . . . .	18
III.3 La transformée de Radon . . . . .	19
III.3.1 Construction de l'orientation et de la distance . . . . .	20
III.3.2 Le Théorème de la Coupe Centrale . . . . .	23
III.3.3 Rétroprojection filtrée (FBP) . . . . .	24
III.4 Discrétisation des méthodes analytiques . . . . .	29
III.5 Formulation linéaire – Synthèse . . . . .	31
III.5.1 Rétroprojection filtrée continue . . . . .	32
III.5.2 Discrétisation des coordonnées et des angles . . . . .	32
III.5.3 Convolution et filtrage discrets . . . . .	32
III.5.4 Discrétisation de la rétroprojection . . . . .	32

III.5.5	Passage à la forme matricielle linéaire . . . . .	33
III.5.6	Synthèse . . . . .	33
III.6	Théorie du Compressed Sensing . . . . .	33
III.6.1	Le problème inverse en tomodensitométrie . . . . .	34
III.6.2	Mal-positude et conséquences pratiques . . . . .	35
III.6.3	Régularisation par parcimonie et Compressed Sensing . . . . .	35
III.6.4	Formulation variationnelle des problèmes inverses . . . . .	35
III.6.5	Formulation du problème . . . . .	37
III.6.6	Algorithmes de reconstruction itérative en Compressed Sensing . . .	40
III.6.7	Métriques de performance . . . . .	42

## CHAPITRE IV: SIMULATION, DÉVELOPPEMENT ET APPLICATIONS INNOVANTES EN RECONSTRUCTION D'IMAGES 44

IV.1	Algorithme de rétroprojection filtrée pour la reconstruction d'images en tomodensitométrie . . . . .	44
IV.2	Compressive sensing using forward-backward . . . . .	46
IV.2.1	Configuration du problème . . . . .	47
IV.2.2	Définition des fonctions objectif . . . . .	49
IV.2.3	Algorithme Forward-Backward . . . . .	50
IV.2.4	Principe mathématique . . . . .	50
IV.2.5	Calcul du pas optimal . . . . .	50
IV.2.6	Configuration du solveur . . . . .	50
IV.3	Résolution du problème . . . . .	50
IV.3.1	Lancement de l'optimisation . . . . .	50
IV.3.2	Visualisation des résultats . . . . .	51
IV.3.3	Analyse de sensibilité . . . . .	53

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 :	Un appareil de tomographie est une sorte d'anneau dans lequel on place un objet ou une personne, qui sont alors traversés par un faisceau de rayons X « suivant toutes les directions » comme illustré sur l'image ci-dessus où l'on étudie la structure d'objets anciens. . . . .	12
Figure 3.1 :	paramétrisation d'une droite $l_{t,\theta}$ par $t$ et $\theta$ . . . . .	21
Figure 3.2 :	Transformée de Radon pour $\theta_1$ et $\theta_2$ . . . . .	22
Figure 3.3 :	Retroprojection d'un carré dans 5, 25, 100 et 1000 directions . . .	25
Figure 3.4 :	Fantôme de Shepp–Logan . . . . .	38
Figure 3.5 :	Gradient du fantôme de Shepp–Logan . . . . .	39
Figure 3.6 :	Calcul du coefficient de poids $\varphi_{i,j}$ de la matrice système $\Phi$ à partir de la longueur d'intersection du $i$ -ème rayon à travers le $j$ -ème pixel. 41	41

Figure 3.7 :	Mesures des rayons- <b>X</b> $a$ , $b$ , $c$ et $d$ pour des angles de rotation $\alpha$ , $90 - \alpha$ , $90 + \alpha$ et $180 - \alpha$ . Les propriétés de symétrie permettent de déduire les poids d'un rayon à partir d'un autre. . . . .	41
Figure 4.1 :	Simulation de l'algorithme FBP . . . . .	46

# Chapitre I

## RECONSTRUCTION D'IMAGE

L'imagerie médicale occupe aujourd'hui une place centrale dans le diagnostic, le suivi thérapeutique et la recherche biomédicale. Des modalités telles que la tomodensitométrie (CT), l'imagerie par résonance magnétique (IRM) ou la tomographie par émission de positons (TEP) permettent d'explorer de manière non invasive l'anatomie et la physiologie du corps humain avec une précision toujours croissante. Toutefois, la qualité et la fiabilité de ces images reposent sur une étape fondamentale, souvent invisible pour l'utilisateur final : la reconstruction d'image.

La reconstruction d'image médicale consiste à transformer des données de mesure brutes, acquises selon différents angles ou configurations physiques, en représentations visuelles exploitables par le clinicien. Contrairement à la photographie classique, les systèmes d'imagerie médicale ne produisent pas directement des images des organes. Ils mesurent plutôt des interactions physiques — telles que l'atténuation des rayons X, la réponse à des champs magnétiques ou les émissions radioactives — qui ne constituent que des projections partielles de la réalité anatomique ou fonctionnelle. La reconstruction vise alors à estimer, à partir de ces projections, la distribution spatiale des tissus ou des activités biologiques.

En tomodensitométrie, les projections correspondent à l'atténuation des rayons X traversant le corps selon de multiples directions, tandis qu'en tomographie par émission de positons, elles résultent de la détection des photons émis par un traceur radioactif à l'intérieur du patient. Dans les deux cas, les données acquises sont incomplètes, bruitées et fortement corrélées, ce qui rend la reconstruction d'image intrinsèquement complexe. Ce processus s'inscrit dans le cadre des problèmes inverses, pour lesquels on cherche à retrouver les causes physiques à partir d'observations indirectes. Ces problèmes sont généralement mal posés au sens mathématique, plusieurs solutions pouvant conduire à des mesures expérimentales similaires.

Historiquement, les premières méthodes de reconstruction, telles que la rétroprojection filtrée, ont permis le développement clinique rapide de l'imagerie tomographique grâce à leur simplicité et à leur efficacité computationnelle. Cependant, ces approches restent sensibles au bruit et aux artefacts, en particulier lorsque les conditions d'acquisition s'éloignent du cadre idéal. Afin de pallier ces limitations, des méthodes itératives ont été développées. Celles-ci reposent sur une modélisation plus fidèle du processus d'acquisition et permettent d'intégrer des connaissances a priori sur les propriétés des images médicales, au prix d'un coût de calcul plus élevé.

Plus récemment, les méthodes basées sur des modèles physiques détaillés et l'intégration

de techniques d'intelligence artificielle ont profondément renouvelé le domaine de la reconstruction d'image. Ces approches permettent de mieux prendre en compte la géométrie des systèmes d'acquisition, la physique des interactions rayonnement-matière ainsi que les caractéristiques des détecteurs. Elles ouvrent également la voie à des reconstructions plus rapides, plus robustes et de meilleure qualité, répondant à des enjeux majeurs tels que la réduction de la dose de rayonnement, la correction des artefacts et l'amélioration du contraste des images.

## **I.1 Modalités d'imagerie médicale et reconstruction d'images**

L'imagerie médicale regroupe plusieurs modalités utilisées pour le diagnostic et la surveillance de nombreuses pathologies. Chaque modalité repose sur des principes physiques distincts et présente des caractéristiques spécifiques en termes d'acquisition et de reconstruction des images. Comprendre ces différences est essentiel afin d'apprécier les forces, les limites et les défis associés à chaque technique de reconstruction.

### **I.1.1 Tomodensitométrie (TDM)**

La tomodensitométrie repose sur l'utilisation de rayons X pour produire des images détaillées de l'intérieur du corps humain. Un tube à rayons X et un ensemble de détecteurs tournent autour du patient, permettant l'acquisition de projections sous de multiples angles. Ces projections correspondent à l'atténuation du faisceau de rayons X par les tissus traversés.

Historiquement, la rétroprojection filtrée (*Filtered Backprojection*, FBP) a constitué l'algorithme de reconstruction standard en TDM. Cette méthode consiste à filtrer les données de projection afin de corriger le flou inhérent à la rétroprojection, puis à les projeter dans l'espace image. Bien que rapide et robuste, la FBP est sensible au bruit, en particulier lorsque la dose de rayonnement est réduite.

Les systèmes de tomodensitométrie modernes intègrent de plus en plus des méthodes de reconstruction itérative. Ces techniques consistent à ajuster progressivement une estimation de l'image en comparant les projections mesurées aux projections simulées à partir de l'image courante. La reconstruction itérative permet de réduire le bruit, d'améliorer le contraste et de maintenir une qualité d'image acceptable à faible dose, au prix d'un temps de calcul plus important.

Un avantage majeur de la TDM réside dans la rapidité de la reconstruction, souvent réalisable en temps réel ou quasi temps réel. De plus, les valeurs reconstruites sont directement liées aux coefficients d'atténuation des tissus, ce qui confère à la tomodensitométrie une forte valeur quantitative.

### **I.1.2 Imagerie par résonance magnétique (IRM)**

L'imagerie par résonance magnétique utilise un champ magnétique intense et des ondes radiofréquence pour produire des images des structures internes du corps. Elle repose sur les principes de la résonance magnétique nucléaire et permet d'obtenir des contrastes tissulaires riches sans exposition aux rayonnements ionisants.

Les données IRM sont acquises dans le domaine fréquentiel, appelé espace  $k$ . La reconstruction d'image consiste principalement à appliquer une transformée de Fourier inverse afin de convertir ces données fréquentielles en une image spatiale. Cette approche confère à l'IRM une base mathématique élégante et bien établie.

Afin d'accélérer les temps d'acquisition, des techniques telles que le Fourier partiel et l'imagerie parallèle ont été développées. Des méthodes comme SENSE ou GRAPPA reposent sur le sous-échantillonnage de l'espace  $k$  et sur l'utilisation de multiples bobines de réception, combinées à des algorithmes de reconstruction capables de compenser les données manquantes.

La reconstruction en IRM reste toutefois complexe en raison de plusieurs facteurs, notamment les inhomogénéités du champ magnétique, les artefacts liés aux mouvements du patient et la nécessité de combiner correctement les signaux issus de systèmes multi-bobines. Ces défis requièrent des modèles de reconstruction sophistiqués et une calibration précise du système.

### **I.1.3 Tomographie par émission de positons (TEP)**

La tomographie par émission de positons est une modalité d'imagerie fonctionnelle qui repose sur l'injection d'un traceur radioactif dans l'organisme. Le traceur émet des positons qui, après annihilation avec des électrons, produisent deux photons gamma émis en coïncidence et détectés par le système TEP.

Comme en tomodensitométrie, la rétroprojection filtrée a été historiquement utilisée pour la reconstruction des images TEP, en particulier dans les premiers systèmes. Toutefois, en raison du caractère bruité et statistique des données TEP, les méthodes itératives se sont rapidement imposées.

La majorité des systèmes TEP modernes utilisent des algorithmes itératifs, tels que la maximisation d'espérance par sous-ensembles ordonnés (*Ordered Subsets Expectation Maximization*, OSEM). Ces méthodes modélisent finement la physique de l'acquisition et permettent d'intégrer diverses corrections, notamment celles liées à l'atténuation, à la diffusion et aux coïncidences aléatoires.

La reconstruction TEP présente des défis spécifiques, liés à la nécessité de corriger plusieurs phénomènes physiques. L'utilisation de scanners hybrides TEP-TDM ou TEP-IRM permet d'exploiter des informations anatomiques complémentaires afin d'améliorer la qualité et la quantification des images fonctionnelles.

### **I.1.4 Comparaison des modalités**

Bien que la rétroprojection filtrée ait historiquement été utilisée en tomodensitométrie et en TEP, les méthodes de reconstruction itérative sont aujourd'hui privilégiées dans ces deux modalités en raison de leur capacité à améliorer la qualité d'image et à réduire les artefacts. À l'inverse, l'IRM repose principalement sur des reconstructions basées sur la transformée de Fourier, enrichies par des techniques d'accélération et de compensation des données manquantes.

Les processus d'acquisition diffèrent également de manière significative. En TDM et en TEP, les données sont directement liées à des propriétés physiques mesurables, telles que l'atténuation des rayons X ou la distribution d'un traceur radioactif. En IRM, l'acqui-

sition repose sur une manipulation complexe des champs magnétiques et des impulsions radiofréquence afin de coder l'information spatiale.

Enfin, chaque modalité est sujette à des artefacts spécifiques nécessitant des stratégies de correction adaptées lors de la reconstruction. La TDM doit corriger des effets tels que le durcissement du faisceau, l'IRM est sensible aux inhomogénéités de champ et aux mouvements, tandis que la TEP requiert des corrections pour l'atténuation, la diffusion et les événements aléatoires.

En résumé, bien que la reconstruction d'images soit une étape essentielle commune à ces trois modalités, la nature des données, les modèles physiques sous-jacents et les défis algorithmiques diffèrent considérablement. La compréhension de ces spécificités est indispensable pour optimiser la qualité des images et garantir une information diagnostique fiable et pertinente.

## **I.2 La transformation de Radon et son rôle en reconstruction d'image**

### **Origines et développement historique**

Les fondements théoriques de la reconstruction tomographique remontent au début du XXe siècle. En 1917, le mathématicien J. Radon a formulé une théorie mathématique permettant de reconstruire une fonction à partir de ses projections. Cependant, ce n'est qu'avec les progrès des calculateurs numériques dans les années 1960-1970 que cette théorie a pu être appliquée concrètement. Godfrey Hounsfield, ingénieur britannique, a mis au point le premier scanner TDM (tomodensitométrie ou CT) en 1971, grâce à un financement indirect provenant de la société EMI, associée au succès des Beatles. Ce développement a marqué la naissance de l'imagerie médicale tomographique, suivie par l'IRM et la tomoscintigraphie.

La transformation de Radon constitue un outil mathématique fondamental pour la reconstruction d'images à partir de projections. Elle est au cœur de nombreuses techniques d'imagerie médicale, en particulier la tomodensitométrie (TDM). Cette transformation permet de relier les mesures obtenues par les détecteurs à la distribution de densité des tissus à l'intérieur du corps.

Elle consiste à intégrer l'information provenant de différentes lignes de projection afin de créer un ensemble de mesures représentant l'objet examiné sous plusieurs angles. Dans le cadre de la TDM, ces projections correspondent à l'atténuation des rayons X lorsqu'ils traversent le corps. Chaque angle de mesure fournit une "ombre" partielle de la structure interne, et la transformation de Radon permet de regrouper l'ensemble de ces informations.

La transformée inverse de Radon joue un rôle central dans la reconstruction d'image. À partir des projections acquises, elle permet de reconstituer la distribution originale des tissus. L'une des méthodes les plus utilisées pour cette étape est la rétroprojection filtrée, qui combine les différentes projections après un traitement visant à corriger le flou inhérent aux mesures. Cette approche a longtemps constitué la base des reconstructions classiques en tomodensitométrie et demeure largement utilisée.

L'application de la transformation de Radon et de sa transformée inverse a révolutionné le diagnostic médical. Elle permet aujourd'hui de visualiser de manière non invasive et

détaillée les structures internes du corps, offrant des images transversales précises qui améliorent la qualité et la fiabilité des examens cliniques.

En résumé, la transformation de Radon représente un composant essentiel de l'imagerie médicale moderne. Elle constitue le fondement de nombreuses techniques de reconstruction, transformant des données de projection en images exploitables, et reste un outil incontournable pour le diagnostic et le suivi des patients.

### **I.3 Limites et artefacts de la rétroprojection filtrée (FBP)**

La rétroprojection filtrée, ou *Filtered Backprojection* (FBP), est un algorithme de reconstruction largement utilisé dans les modalités d'imagerie médicale telles que la tomodensitométrie (CT) et la tomographie par émission de positons (TEP). Bien que cette méthode soit rapide et relativement efficace, elle présente plusieurs limitations et artefacts pouvant affecter la qualité des images reconstruites.

#### **I.3.1 Limites de la rétroprojection filtrée**

L'une des principales limites de la FBP réside dans le modèle d'atténuation qu'elle suppose. Celui-ci est souvent simplifié et peut ne pas représenter fidèlement les interactions complexes entre le rayonnement et les tissus du patient. Par ailleurs, l'algorithme a tendance à amplifier le bruit présent dans les données de projection, en particulier lorsque le filtrage appliqué n'est pas optimal.

La FBP peut également introduire des artefacts de stries, surtout lorsque les projections sont incomplètes ou bruitées. La résolution des composantes haute fréquence est limitée, entraînant une perte de détails fins dans l'image reconstruite. De plus, l'algorithme suppose un échantillonnage uniforme des projections, condition rarement parfaitement respectée dans la pratique clinique.

#### **I.3.2 Artefacts associés à la FBP**

Plusieurs types d'artefacts peuvent apparaître dans les images reconstruites à l'aide de la FBP. Parmi les plus courants, on trouve les stries sombres ou lumineuses dues à des données incomplètes ou bruitées, ainsi que les artefacts en anneau, souvent liés à un mauvais calibrage des détecteurs. Le durcissement du faisceau peut également générer des bandes sombres ou des stries, conséquence de l'absorption préférentielle des photons de faible énergie.

Des zones sombres peuvent apparaître lorsque le nombre de photons détectés est insuffisant, notamment en présence d'implants métalliques ou de tissus très absorbants. Enfin, la FBP reste sensible aux mouvements du patient pendant l'examen, ce qui peut provoquer du flou ou des stries supplémentaires dans l'image finale.

#### **I.3.3 Stratégies pour atténuer les artefacts et limitations**

Plusieurs approches permettent de réduire l'impact des limitations et des artefacts associés à la FBP. L'optimisation des protocoles d'acquisition, par exemple l'augmentation du nombre de projections ou l'utilisation de détecteurs plus performants, contribue à améliorer la qualité des données de base.

Le pré-traitement des données, comme le filtrage du sinogramme ou la correction du durcissement du faisceau, peut également aider à atténuer les artefacts. L'emploi d'algorithmes de reconstruction plus avancés, tels que la reconstruction itérative ou basée sur un modèle, permet de surmonter certaines des limites inhérentes à la FBP. Enfin, des techniques de post-traitement d'image, incluant le filtrage et l'amélioration de contraste, complètent le processus pour améliorer la qualité visuelle et diagnostique des images reconstruites.

En résumé, bien que la rétroprojection filtrée reste un algorithme de reconstruction largement utilisé et efficace, elle comporte des limites et génère certains artefacts susceptibles d'affecter la qualité des images. La compréhension de ces contraintes est essentielle pour développer des stratégies adaptées, tant au niveau de l'acquisition que du traitement et de la reconstruction, afin d'optimiser les résultats en imagerie médicale.

## I.4 Introduction au Compressed Sensing

L'un des principes fondamentaux du traitement du signal repose sur la théorie d'échantillonnage de Nyquist–Shannon, selon laquelle le nombre d'échantillons nécessaires pour reconstruire un signal sans erreur est déterminé par sa bande passante, c'est-à-dire la longueur du plus petit intervalle contenant le support du spectre du signal considéré. Toutefois, au cours des dernières années, une théorie alternative appelée *Compressed Sensing* (ou échantillonnage compressif) a émergé. Celle-ci démontre qu'il est possible de reconstruire des signaux et des images, y compris à haute résolution, à partir d'un nombre de mesures bien inférieur à celui classiquement requis.

L'objectif du Compressed Sensing est de tirer parti de la structure intrinsèque des signaux afin de réduire significativement la quantité de données nécessaires lors du processus d'acquisition. Un aspect particulièrement remarquable de cette théorie réside dans ses nombreuses interactions avec divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie, tels que les statistiques, la théorie de l'information, la théorie du codage ou encore l'informatique théorique, ce qui souligne son caractère fondamental et transversal.

De manière générale, la parcimonie, et plus largement la compressibilité, joue depuis longtemps un rôle central dans de nombreux domaines scientifiques. La parcimonie permet d'obtenir des estimations efficaces, notamment à travers des méthodes de seuillage ou de régularisation, dont les performances dépendent fortement du nombre réduit de composantes significatives du signal. Elle constitue également le fondement des techniques modernes de compression, où la qualité du codage dépend de la capacité du signal à admettre une représentation parcimonieuse dans une base appropriée. En outre, la parcimonie favorise la réduction de dimension ainsi que la construction de modèles compacts et efficaces.

La contribution essentielle du Compressed Sensing réside dans le fait que la parcimonie n'intervient plus uniquement au stade du traitement ou de la compression, mais influence directement le processus d'acquisition des données. Cette approche ouvre la voie à des protocoles d'acquisition plus efficaces, permettant de convertir des signaux analogiques en une représentation numérique déjà compressée, tout en optimisant l'utilisation des ressources disponibles.

En pratique, il est bien établi que les signaux naturels possèdent une structure intrinsèque qui autorise une compression efficace avec une perte perceptuelle limitée. Les méthodes de codage par transformée exploitent le fait que de nombreux signaux admet-

tent une représentation parcimonieuse dans une base fixe. Le schéma classique consiste à acquérir l'ensemble des données, à calculer tous les coefficients de la transformée, puis à ne conserver que les plus significatifs en éliminant les autres. Ce processus, bien que largement utilisé, demeure peu efficace, puisqu'il implique une acquisition massive de données dont une grande partie est finalement rejetée.

Cette observation soulève une question fondamentale : si la majorité des signaux sont compressibles, pourquoi acquérir l'intégralité des données alors qu'une grande partie sera inévitablement inutilisée ? Le Compressed Sensing apporte une réponse claire à cette problématique en montrant qu'il est possible d'acquérir directement les données sous une forme compressée, sans passer par une étape intermédiaire de sur-acquisition suivie de compression.

## I.5 Reconstruction d'images par Compressive Sensing (CS)

La *Compressive Sensing* (CS) est une approche moderne de reconstruction d'images qui a émergé au milieu des années 2000 comme alternative aux méthodes classiques telles que la rétroprojection filtrée. Elle repose sur l'idée que de nombreuses images médicales peuvent être représentées de manière parcimonieuse dans un certain domaine de transformation, ce qui permet de reconstruire des images de qualité à partir d'un nombre réduit de mesures. Cette capacité à exploiter l'information essentielle rend la CS particulièrement pertinente dans des modalités où l'acquisition est longue, coûteuse ou comporte des risques pour le patient.

### I.5.1 Principes et avantages

La CS réduit considérablement le nombre de projections ou d'échantillons nécessaires pour obtenir une image diagnostique exploitable. Elle est donc idéale pour des modalités telles que la tomodensitométrie, la TEP, ou l'IRM dynamique, où chaque mesure peut être longue ou exposer le patient à un rayonnement ou à un contraste. En exploitant la parcimonie naturelle des images médicales, la CS permet non seulement de diminuer la dose de rayonnement, mais aussi de réduire le temps global d'acquisition tout en maintenant une qualité diagnostique élevée.

Un avantage supplémentaire réside dans sa capacité à limiter le bruit. Contrairement à la rétroprojection filtrée (FBP), qui peut amplifier les fluctuations aléatoires des mesures, la CS intègre des contraintes de régularisation qui favorisent des reconstructions plus stables, visuellement plus propres et moins sensibles aux artefacts issus des mesures bruitées.

#### Contexte additionnel :

- **Transitions cliniques réussies** : Certains scanners commerciaux ont commencé à intégrer la CS, par exemple en tomodensitométrie cardiaque ou en imagerie mammaire, permettant une réduction de dose pouvant atteindre 50% sans compromettre la qualité diagnostique.
- **Fondement théorique** : La CS repose sur deux concepts clés : la parcimonie du signal et l'incohérence entre la matrice d'acquisition et la base dans laquelle le signal est parcimonieux, comme les ondelettes ou la variation totale.

### I.5.2 Limites et défis

Malgré ses avantages, la CS présente des limites importantes. Elle repose sur l'hypothèse que les images sont parcimonieuses, ce qui n'est pas toujours vrai pour certaines structures anatomiques complexes. Les algorithmes CS sont itératifs et demandent plus de ressources computationnelles que la FBP, ce qui peut freiner leur utilisation dans des contextes nécessitant une reconstruction quasi temps réel.

La qualité de reconstruction dépend fortement du choix de la régularisation et de l'algorithme d'optimisation. Des réglages inadéquats peuvent entraîner des artefacts, une perte de détails fins ou un lissage excessif des structures importantes, rendant l'interprétation diagnostique plus difficile.

#### Contexte additionnel :

- **Validation clinique :** Les images reconstruites par CS peuvent paraître différentes de celles obtenues par FBP, même lorsque les métriques quantitatives, telles que le rapport signal-sur-bruit, sont meilleures. Les radiologues doivent donc s'adapter à ce nouvel "aspect" des images.
- **Choix de la base parcimonieuse :** Le type de base choisi influence fortement la reconstruction : la variation totale favorise des contours nets, tandis que les ondelettes sont plus adaptées à la préservation des textures fines.

### I.5.3 Artefacts et comportements observés

Les artefacts observés en CS sont différents de ceux classiques de la FBP. On retrouve notamment des effets de bloc ou des textures irrégulières, généralement dus à un sous-échantillonnage excessif ou à une régularisation trop forte. Les détails fins peuvent être atténués et des motifs répétitifs peuvent apparaître dans certaines zones.

Les mouvements du patient ont un impact moindre que sur la FBP, mais ils peuvent encore dégrader les reconstructions, en particulier lorsque le nombre de mesures est limité ou que les projections sont bruitées.

#### Contexte additionnel :

- **Artefacts de type « piqure » (staircasing) :** Typiques de la régularisation par variation totale, ces artefacts donnent un aspect en escalier aux zones de gradient doux et peuvent masquer des lésions subtiles.
- **Sensibilité aux hyperparamètres :** Contrairement à la FBP, qui ne nécessite presque aucun paramètre, la CS dépend fortement du poids de régularisation et des paramètres d'optimisation, souvent ajustés par validation croisée.

### I.5.4 Stratégies pour améliorer la reconstruction

Plusieurs stratégies permettent d'atténuer les limitations et les artefacts de la CS. L'optimisation des acquisitions, notamment via un sous-échantillonnage structuré plutôt qu'aléatoire, améliore la fidélité des reconstructions. Les algorithmes itératifs peuvent être combinés avec des techniques de régularisation adaptées, comme la parcimonie dans un domaine transformé ou la minimisation de normes spécifiques, afin d'obtenir des reconstructions plus robustes.

Le post-traitement d'image, par filtrage ou amélioration adaptative du contraste, contribue également à améliorer la lisibilité et la qualité visuelle. Dans certaines modalités, comme l'IRM, des acquisitions adaptatives permettent de mieux préserver les informations structurelles tout en maintenant un niveau élevé de sous-échantillonnage.

**Contexte additionnel :**

- **Avancées algorithmiques :** Les méthodes d'optimisation moderne, comme les algorithmes ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers), ont amélioré la vitesse de convergence et la robustesse des reconstructions CS.
- **Acquisitions structurées :** En IRM, des schémas d'échantillonnage variables dans l'espace de Fourier (k-space) permettent de mieux préserver les basses fréquences et d'optimiser la reconstruction des hautes fréquences sous-échantillonnées.
- **Intégration multi-modale :** La CS peut être combinée avec d'autres approches, comme les modèles physiques ou les méthodes statistiques, pour renforcer la qualité des reconstructions et réduire les artefacts dans les cas difficiles.

## Chapitre II

# OUTILS MATHÉMATIQUES UTILISÉS DANS LA RECONSTRUCTION D'IMAGES PAR LE COMPRESSED SENSING

Un sujet très précis et intéressant ! La reconstruction d'images à partir de projections est un aspect crucial de l'imagerie médicale, en particulier dans des modalités telles que la tomodensitométrie (CT) et la tomographie par émission de positons (TEP). Le scanner de tomodensitométrie (CT) diagnostique, voir la Figure 2.1, est un véritable chef-d'œuvre de la technologie moderne et constitue un exemple positif de l'influence des forces du marché libre dans la stimulation de l'innovation. Tous les principaux fabricants de scanners CT disposent d'équipes solides de recherche et développement, qui suivent et contribuent aux travaux de recherche en science de l'imagerie en plus de leurs activités internes.

Les dispositifs CT peuvent être considérés comme la réalisation d'une caméra gigapixel en usage clinique courant. Alors qu'un scanner CT diagnostique moderne typique fournit des volumes composés de centaines d'images de coupes de taille  $512 \times 512$  avec une résolution submillimétrique, les scanners micro-CT peuvent produire des volumes atteignant 2000 voxels.

Dans le cas de l'imagerie cardiaque par CT, une application qui a largement stimulé les avancées technologiques, les images volumiques peuvent être acquises avec une résolution temporelle pouvant descendre jusqu'à 100 millisecondes. La vitesse et la résolution de l'imagerie CT en font un outil indispensable pour l'imagerie cardiaque et l'évaluation des accidents vasculaires cérébraux.

Elle est utilisée de manière routinière pour le diagnostic de diverses pathologies médicales affectant l'ensemble des organes internes, et son utilisation est même envisagée comme outil de dépistage du cancer du poumon. Les recherches actuelles visent globalement à améliorer l'utilité clinique sans augmenter la dose d'irradiation de l'examen, ou à maintenir cette utilité tout en réduisant l'exposition du patient aux rayonnements ionisants.

Les méthodes analytiques directes sont l'approche historique et mathématiquement élégante des problèmes inverses linéaires, particulièrement en tomographie. Leur positionnement répond à un impératif de rapidité de calcul dans des applications où le temps de reconstruction est critique (imagerie médicale clinique, contrôle non destructif industriel).

## II.1 Classification des approches de reconstruction

Le paysage algorithmique de la tomographie se divise principalement en trois familles, distinguées par leur traitement de l'opérateur de projection.

### II.1.1 Les méthodes analytiques

Les méthodes analytiques de reconstruction reposent sur une formulation mathématique explicite de l'inversion de l'opérateur direct reliant l'objet à ses projections. En tomodensitométrie, cet opérateur est étroitement lié à la transformée de Radon. En exploitant ses propriétés, ces méthodes permettent une reconstruction directe et rapide de l'image à partir des données de projection.

L'exemple le plus emblématique est la Rétroprojection Filtrée (*Filtered Backprojection*, FBP). Cette méthode analytique largement utilisée consiste à filtrer les projections avant de les rétroprojeter sur la grille de l'image. La FBP est rapide et efficace, mais elle demeure sensible au bruit et aux artefacts, en particulier lorsque le nombre de projections est limité ou que la dose d'irradiation est réduite.

### La transformée de Radon

Imaginons qu'on ait un objet opaque constitué de différents matériaux, et que l'on souhaite savoir comment ces matériaux sont répartis à l'intérieur sans l'endommager (par exemple, l'objet peut être un malade à l'intérieur du corps duquel on aimerait voir). L'une des méthodes est le scanner : on lance de fins faisceaux de rayons X à travers l'objet dans toutes les directions et on mesure quelle proportion de chaque faisceau a été absorbée.

La tomographie est un procédé permettant de créer l'image d'un objet en deux ou trois dimensions à partir de multiples "coupes" unidimensionnelles (Voir Figure 2.1). Dans un scanner CT (tomodensitométrie), ces coupes sont définies par des faisceaux de rayons **X** parallèles projetés à travers l'objet. En changeant l'orientation de la source et du détecteur (l'angle  $\theta$ ), on obtient des informations sur la densité interne sous différents angles.

Le fonctionnement repose sur la mesure de l'intensité des rayons **X** :

- **Perte d'énergie** : Lorsqu'un rayon **X** traverse un objet, il perd une partie de son énergie, ce qui réduit son intensité
- **Coefficient d'atténuation** : Cette perte dépend de la densité du milieu. Les objets denses (comme l'os) provoquent une variation d'intensité plus importante que les tissus moins denses. Cette caractéristique est appelée le coefficient d'atténuation ( $A(x, y)$ ). L'atténuation mesurée pour chaque faisceau, c'est-à-dire la différence entre l'intensité incidente et l'intensité détectée, correspond à une intégrale de ligne de la structure interne de l'objet. Cette relation entre l'objet et l'ensemble de ses intégrales de ligne est formalisée par la transformée de Radon. La reconstruction de l'image originale repose alors sur l'inversion de cette transformée, qui constitue le fondement théorique de la tomographie assistée par ordinateur
- **Mesures** : Le scanner enregistre l'intensité initiale émise ( $I_0$ ) et l'intensité finale reçue ( $I_1$ ) pour chaque faisceau afin de déduire la densité globale rencontrée sur le trajet



Figure 2.1: Principe de fonctionnement d'un appareil de tomodensitométrie

D'un point de vue mathématique, l'ensemble des mesures acquises par le scanner correspond à l'application de la transformée de Radon à la fonction d'atténuation de l'objet. Le problème fondamental de la tomographie consiste alors à reconstruire cette fonction d'atténuation à partir de ses intégrales de ligne, c'est-à-dire à inverser la transformée de Radon. Pour une fonction d'atténuation bidimensionnelle  $A(x, y)$ , la transformée de Radon est définie par :

$$\mathcal{R}\{A\}(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}^2} A(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy, \quad (\text{II.1})$$

où  $\theta$  représente l'angle de projection,  $s$  la position du détecteur, et  $\delta(\cdot)$  la distribution de Dirac. Cette expression formalise le fait que chaque projection correspond à une intégrale de la fonction d'atténuation le long d'une droite.

### La fonction d'atténuation représentant l'objet étudié

L'objet initial, considéré comme plan, est donné par une fonction d'atténuation qui, à chaque point du plan de coordonnées  $(x, y)$ , va associer un nombre  $A(x, y)$  correspondant à la proportion des rayons qui sont absorbés par le matériau en ce point : en un point d'un os,  $A$  sera grand, et en un point de l'air, il sera faible.

### Loi de Beer–Lambert et modélisation de l'atténuation

En supposant dans un premier temps que la fonction d'atténuation de notre objet est constante égale à  $a$ , pour tout rayon lumineux traversant notre objet, pour tout couple de points d'abscisses  $x$  et  $x + l$  sur ce rayon, les abscisses étant croissantes dans le sens du

rayon, le rapport d'intensités lumineuses  $\frac{I(x+l)}{I(x)}$  ne dépend que de  $a$  et de la longueur  $l$  traversée et pas du point  $x$  (position).

En omettant provisoirement la dépendance par rapport à  $a$  et en notant alors  $p(l)$  ce rapport  $\frac{I(x+l)}{I(x)}$  qui correspond à la proportion de photons non absorbés sur une longueur  $l$  à partir d'un point  $x$ , on voit que  $p$  vérifie la propriété

$$p(l_1 + l_2) = p(l_1)p(l_2)$$

En Effet, la proportion de photons non absorbés sur une longueur  $l_2$  à partir d'un point  $x + l_1$  est  $\frac{I(x + l_1 + l_2)}{I(x + l_1)} = p(l_2)$ . Donc  $p(l_1)p(l_2) = \frac{I(x + l_1)}{I(x)} \times \frac{I(x + l_1 + l_2)}{I(x + l_1)} = p(l_1 + l_2)$ . Ceci traduit juste le fait simple suivant : les proportions de photons non absorbés se multiplient lors de traversées successives de milieux absorbants. La bonne définition de l'atténuation est précisément :

$$p(l) = e^{-al} \quad (\text{II.2})$$

Autrement dit, pour tout  $x$  et  $x + l$  sur un axe :

$$I(x + l) = I(x)e^{-al} \quad (\text{II.3})$$

Notons que si le phénomène physique d'atténuation est spécifique de la tomographie à rayons X, les méthodes de reconstruction sont en revanche plus générales et sont appliquées également dans d'autres systèmes d'imagerie, dans lesquelles des équations analogues expriment une fonction à reconstruire en fonction de projections. C'est le cas par exemple de la tomographie d'émission de simples photons utilisée en médecine nucléaire.

### Filtered Backprojection (FBP)

À partir de la modélisation physique de l'atténuation et de la formulation mathématique de la transformée de Radon, plusieurs méthodes analytiques ont été proposées pour résoudre le problème inverse de la reconstruction tomographique. La reconstruction d'images en tomodensitométrie à partir des projections aux rayons X repose classiquement sur trois grandes approches analytiques. La première est l'inversion directe de Fourier, fondée sur le théorème de la coupe de Fourier, selon lequel chaque projection acquise à un angle donné correspond à une droite dans l'espace fréquentiel bidimensionnel de l'objet. En théorie, l'acquisition d'un nombre suffisant de projections permet de remplir cet espace fréquentiel et d'obtenir l'image par transformation de Fourier inverse. Toutefois, la nécessité de rééchantillonner des données organisées sur une grille polaire vers une grille cartésienne rend cette méthode complexe et peu utilisée en pratique. La seconde approche consiste à appliquer une rétroprojection directe des projections, ce qui conduit à une image floue, équivalente à la convolution de l'image originale avec un noyau de type  $1/\sqrt{x^2 + y^2}$ . La restauration de l'image nécessite alors une déconvolution bidimensionnelle, opération coûteuse en temps de calcul. La troisième méthode, la rétroprojection filtrée (Filtered Backprojection, FBP), constitue l'approche la plus répandue en pratique. Elle repose sur le filtrage préalable de chaque projection unidimensionnelle par un filtre rampe dans le domaine fréquentiel, avant la rétroprojection. Ce traitement permet de compenser le flou inhérent à la rétroprojection tout en conservant une complexité de calcul réduite, puisque

le filtrage est effectué en une dimension. Ces méthodes analytiques supposent néanmoins la disponibilité d'un grand nombre de projections uniformément réparties, hypothèse qui n'est plus toujours valide dans des contextes modernes tels que l'imagerie à faible dose ou à angles limités, où des approches itératives basées sur le *Compressed Sensing* sont alors privilégiées.

### II.1.2 Méthodes itératives et Compressed Sensing

La réduction des données de projection et de la dose de rayonnement en tomodensitométrie n'est pas simplement une préférence de calcul ; elle est dictée par la sécurité clinique, l'efficacité opérationnelle et les contraintes physiques des systèmes d'imagerie par rayons  $\mathbf{X}$ . Cette approche se justifie rigoureusement des points de vue médical, physique et systémique.

En premier lieu, la sécurité des patients est primordiale : les rayons  $\mathbf{X}$  ionisants utilisés en CT peuvent endommager l'ADN et augmenter le risque de cancer radio-induit, en particulier chez les populations pédiatriques ou lors d'expositions répétées. Le modèle linéaire sans seuil (LNT), pierre angulaire de la radioprotection, postule que toute réduction de dose diminue proportionnellement le risque à long terme. En pratique clinique moderne, où les examens CT se multiplient (dépistage, suivi longitudinal, planification radiothérapeutique), la réduction de la dose par acquisition est essentielle pour limiter l'exposition cumulative.

D'un point de vue physique, la dose est approximativement proportionnelle au nombre de projections et au produit courant-temps du tube. Réduire l'un ou l'autre diminue donc directement l'exposition, mais augmente le bruit quantique des données, rendant la reconstruction plus difficile. Opérationnellement, un plus petit nombre de projections raccourcit la durée d'acquisition, réduisant les artefacts de mouvement et améliorant le débit patient. Pour les populations sensibles (enfants) ou dans des contextes d'imagerie répétée (radiothérapie guidée par l'image), cette réduction devient une obligation clinique et éthique, conforme au principe ALARA (As Low As Reasonably Achievable). Le défi technique réside dans la résolution du problème de reconstruction sous-déterminé qui en résulte, nécessitant des méthodes avancées comme la reconstruction itérative ou le Compressed Sensing pour préserver la qualité diagnostique malgré la réduction des données.

### Formulation générale du problème inverse

Dans ce contexte, la reconstruction tomographique peut être formulée comme un **problème inverse régularisé**. De manière générale, un problème inverse consiste à reconstruire un modèle à partir de mesures indirectes issues d'un processus physique connu. Le **problème direct** décrit la formation des données de projection à partir de l'image inconnue, tandis que le **problème inverse** vise à retrouver cette image à partir des mesures acquises.

En tomodensitométrie discrète, la relation entre l'image à reconstruire et les données de projection peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire :

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\text{II.4})$$

où  $\mathbf{f}$  représente l'image vectorisée,  $\mathbf{g}$  les données de projection (sinogramme),  $\mathbf{H}$  la matrice du système modélisant la transformée de Radon discrète, et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  un terme représentant le bruit de mesure.

Dans un cadre idéal, l'opérateur  $\mathbf{H}$  serait parfaitement inversible et les données seraient complètes et exemptes de bruit. En pratique, ces conditions ne sont jamais réunies. Le problème inverse est alors généralement **mal posé au sens de Hadamard**, en raison d'un manque d'unicité et surtout d'un fort manque de stabilité : de faibles perturbations du bruit peuvent engendrer de grandes erreurs dans l'image reconstruite. Les méthodes itératives abordent ce problème en recherchant une solution régularisée, obtenue par la minimisation d'une fonction de coût combinant un terme d'adéquation aux données et un terme de régularisation incorporant des connaissances *a priori* sur l'image.

## Principe du Compressed Sensing

Le Compressed Sensing fournit un cadre mathématique rigoureux pour la reconstruction de signaux parcimonieux ou compressibles à partir de mesures linéaires sous-échantillonnées, sous certaines conditions sur l'opérateur de mesure. Il permet de résoudre des problèmes inverses sous-déterminés au moyen de méthodes d'optimisation favorisant la parcimonie ou d'algorithmes gloutons, avec des garanties théoriques de stabilité et de robustesse au bruit.

Dans le cadre de l'imagerie tomographique, le Compressed Sensing exploite l'idée que de nombreuses images médicales admettent une représentation parcimonieuse dans une base ou un dictionnaire approprié, tel que les ondelettes ou le gradient de l'image. La reconstruction est alors formulée comme un problème d'optimisation sous contrainte :

$$\min_{\mathbf{f}} \|\Psi\mathbf{f}\|_1 \quad \text{sous la contrainte} \quad \|\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2 \leq \delta, \quad (\text{II.5})$$

où  $\Psi$  désigne un opérateur favorisant la parcimonie et  $\delta$  un paramètre lié au niveau de bruit des données.

Cette formulation permet de reconstruire des images de qualité acceptable à partir d'un nombre de projections bien inférieur à celui requis par les méthodes analytiques classiques, tout en assurant une certaine stabilité du problème inverse.

## Régularisation et variation totale

Une régularisation particulièrement adaptée à l'imagerie tomographique est la variation totale (TV), qui favorise les images composées de régions quasi uniformes séparées par des discontinuités nettes. La reconstruction TV est généralement formulée comme :

$$\min_{\mathbf{f}} \frac{1}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2^2 + \lambda \|\nabla\mathbf{f}\|_1, \quad (\text{II.6})$$

où  $\nabla$  représente l'opérateur gradient discret et  $\lambda$  un paramètre de régularisation contrôlant le compromis entre fidélité aux données et stabilisation du problème inverse.

Cette approche permet de réduire efficacement le bruit tout en préservant les contours, qualité essentielle pour l'analyse diagnostique.

## Algorithmes itératifs

La résolution des problèmes d'optimisation issus du Compressed Sensing et des méthodes variationnelles repose sur des algorithmes itératifs, tels que les méthodes de descente de gradient proximal, l'algorithme ISTA/FISTA, l'ADMM ou encore les méthodes de type

primal-dual. Ces algorithmes procèdent par mises à jour successives de l'image estimée, alternant entre la réduction de l'erreur de projection et l'application de la régularisation.

Bien que plus coûteuses en temps de calcul que les méthodes analytiques, les méthodes itératives offrent une qualité de reconstruction supérieure dans les scénarios de données limitées et constituent aujourd'hui un axe majeur de recherche et de développement en tomodensitométrie moderne.

### **Comparaison avec les méthodes analytiques**

En résumé, les méthodes analytiques privilégient la rapidité et la simplicité au prix d'une sensibilité accrue au bruit et aux artefacts, tandis que les méthodes itératives et basées sur le Compressed Sensing s'inscrivent pleinement dans le cadre des problèmes inverses régularisés. Elles exploitent des informations *a priori* et des contraintes de parcimonie pour améliorer la stabilité et la qualité de reconstruction dans des conditions d'acquisition dégradées, répondant ainsi aux exigences de sécurité clinique et d'efficacité opérationnelle.

# Chapitre III

## NOTRE MODÈLE

### III.1 Transformée de Fourier

**Définition III.1.1** (Transformée de Fourier). Soit  $f$  une fonction absolument intégrable sur  $\mathbb{R}$ . La transformée de Fourier de  $f$ , notée  $\mathcal{F}f$ , est définie pour tout nombre réel  $\xi$  par

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

La transformée de Fourier est fréquemment utilisée en analyse du signal et permet de transformer une fonction du temps en une fonction de la fréquence ; la variable  $x$  représente le temps en secondes et la variable  $\xi$  représente la fréquence de la fonction en hertz.

Il existe une définition alternative faisant intervenir la fréquence angulaire  $w = 2\pi\xi$ , ce qui conduit à l'expression suivante.

$$(\mathcal{F}f)(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$$

Comme pour la transformée de Radon, nous allons énumérer plusieurs propriétés de la transformée de Fourier.

**Proposition III.1.1.** Pour des constantes réelles  $\alpha$  et  $\beta$ , et des fonctions absolument intégrables  $f$  et  $g$ , on a :

- (i) Linéarité :  $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(w) = \alpha \mathcal{F}f(w) + \beta \mathcal{F}g(w)$
- (ii)  $\mathcal{F}f(w) < +\infty$

**Définition III.1.2** (Transformée de Fourier inverse). Soit  $f$  une fonction absolument intégrable. La transformée de Fourier inverse de  $f$ , notée  $\mathcal{F}^{-1}f$ , évaluée en  $x$ , est définie par

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(w) e^{iwx} dw. \quad (\text{III.1})$$

Ceci nous conduit immédiatement au théorème suivant.

**Proposition III.1.2** (Théorème d'inversion de Fourier). Soit  $f$  une fonction absolument intégrale sur  $\mathbb{R}$ . Le théorème d'inversion de Fourier affirme que, pour tout  $x$ ,

$$(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})f(x) = f(x)$$

Jusqu'à présent, nous n'avons abordé la transformée de Fourier que dans une dimension. Il existe des définitions correspondantes en dimensions supérieures, mais, pour nos besoins, nous n'utiliserons que les analogues en deux dimensions.

**Définition III.1.3** (Transformée de Fourier bidimensionnelle). Soit  $g$  une fonction absolument intégrable définie sur  $\mathbb{R}^2$ . La transformée de Fourier bidimensionnelle de  $g$ , notée  $\mathcal{F}_2 g$ , est définie pour tout  $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$  par

$$(\mathcal{F}_2 g)(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i(xX+yY)} dx dy. \quad (\text{III.2})$$

De manière similaire, nous définissons la transformée de Fourier inverse sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition III.1.4** (Transformée de Fourier bidimensionnelle inverse). Soit  $g$  une fonction absolument intégrable définie sur  $\mathbb{R}^2$ . La transformée de Fourier bidimensionnelle inverse de  $g$ , évaluée en  $(x, y)$  et notée  $\mathcal{F}_2^{-1} g(x, y)$ , est donnée par

$$(\mathcal{F}_2^{-1} g)(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(X, Y) e^{i(xX+yY)} dX dY.$$

## III.2 Convolution

**Définition 8.1.** Pour deux fonctions intégrables  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$ , nous définissons la convolution de  $f$  et  $g$ , notée  $f \star g$ , par

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x - t) dt,$$

où  $x \in \mathbb{R}$ .

Nous pouvons facilement étendre cette définition à l'espace bidimensionnel. Pour les fonctions polaires, nous prenons uniquement l'intégrale par rapport à la variable radiale, tandis que pour les fonctions cartésiennes nous intégrons par rapport aux deux variables. Les définitions explicites sont données ci-dessous.

**Définition III.2.1.** Pour des fonctions polaires intégrables  $f(t, \theta)$  et  $g(t, \theta)$ , nous définissons la convolution de  $f$  et  $g$  par

$$(f \star g)(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, \theta) g(t - s, \theta) ds.$$

Pour des fonctions intégrables  $F$  et  $G$  sur  $\mathbb{R}^2$ , nous définissons la convolution de  $F$  et  $G$  par

$$(F \star G)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t) G(x - s, y - t) ds dt.$$

La convolution est une méthode mathématique permettant de moyennner une fonction  $f$  à l'aide du déplacement d'une autre fonction  $g$ . Dans la convolution  $f \star g$ , la fonction

$g$  est translatée à travers la fonction  $f$ , et la fonction résultante dépend de la zone de recouvrement au cours de cette translation. En un certain sens, on peut voir  $g$  comme un filtre utilisé pour effectuer une moyenne de  $f$  sur un intervalle donné. La fonction de filtrage agit ainsi comme un lisseur pour les données bruitées fournies par la fonction originale.

**Proposition III.2.1.** Pour des fonctions intégrables  $f, g, h$  définies sur  $\mathbb{R}$  et des constantes  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

- (i)  $f \star g = g \star f$  (commutativité),
- (ii)  $f \star (\alpha g + \beta h) = \alpha(f \star g) + \beta(f \star h)$  (linéarité).
- (iii)  $\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f \star g)$

### III.3 La transformée de Radon

L'hypothèse fondamentale est que le détecteur mesure l'atténuation intégrée le long d'un rayon.

**Définition III.3.1.** Pour un faisceau de rayons  $\mathbf{X}$  d'énergie  $\mathbf{E}$  donnée et un taux de propagation des photons  $\mathbf{N}(x)$ , l'intensité du faisceau  $\mathbf{I}(x)$  à une distance  $x$  de l'origine est définie comme

$$\mathbf{I}(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{E}$$

**Définition III.3.2.** La proportion de photons absorbés par millimètre de substance à une distance  $x$  de l'origine est appelée le coefficient d'atténuation  $\mathbf{A}(x)$  du milieu.

Nous connaissons les intensités initiale et finale,  $I_0$  et  $I_1$  d'un faisceau unique. L'objectif est d'utiliser ces intensités pour déterminer le coefficient d'atténuation le long du trajet du faisceau. Heureusement, la loi de Beer-Lambert établit une relation entre ces deux grandeurs.

**Définition III.3.3** (Loi de Beer-Lambert). Pour un faisceau de rayons  $\mathbf{X}$  monochromatique, non réfractif et de largeur nulle, traversant un milieu homogène sur une distance  $x$  à partir de l'origine, l'intensité  $I(x)$  est donnée par

$$I(x) = I_0 e^{-\mathbf{A}(x)x} \quad (\text{III.3})$$

En l'état, cette équation ne nous est pas particulièrement utile. Elle exprime le coefficient d'atténuation en un point donné en fonction de l'intensité en ce point, alors que nous ne connaissons la valeur de l'intensité qu'en des points situés à l'extérieur de l'objet. Ce que nous cherchons réellement est une relation entre le coefficient d'atténuation à l'intérieur de l'objet et la variation de l'intensité du faisceau. Pour cela, nous allons manipuler légèrement l'équation (III.3).

En passant à la dérivée de la loi de Beer-Lambert, nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{dI}{dx} = -\mathbf{A}(x)I(x)$$

Soit  $I(x_0) = I_0$  la valeur initiale de l'intensité du faisceau et  $I(x_1) = I_1$  la valeur finale de l'intensité du faisceau. En utilisant cette relation, nous obtenons la relation suivante :

$$-\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{A}(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dI}{I(x)} = \ln\left(\frac{I_1}{I_0}\right)$$

ou encore

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{A}(x)dx = \ln\left(\frac{I_0}{I_1}\right) \quad (\text{III.4})$$

$\ln(\frac{I_0}{I_1})$  désigne les données de projection, communément appelées le sinogramme, qui résultent de l'acquisition des projections tomographiques. Nous sommes maintenant prêts à introduire des outils mathématiques — en particulier la transformée de Radon — qui joueront un rôle central dans la détermination du coefficient d'atténuation dans l'équation (III.3).

L'écriture sous forme normale d'une équation de droite joue un rôle clé dans la transformée de Radon, car elle permet une paramétrisation naturelle et complète de toutes les droites du plan, ce qui est essentiel pour la définition mathématique et le calcul pratique de cette transformation.

Cette équation sous forme normale fournit :

- (i) Une paramétrisation unique et continue de toutes les droites du plan. La forme normale (ou forme normale de Hesse) de l'équation de la droite s'écrit :

$$x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = \rho$$

où  $\rho$  est la distance par rapport à l'origine et  $\theta$  est l'angle par rapport à l'axe des abscisses.

- (ii) Une interprétation géométrique claire de  $\rho$  et  $\theta$ . Chaque droite du plan correspond à un unique couple  $(\rho, \theta)$ . Cette paramétrisation évite les redondances et garantit qu'on parcourt toutes les droites une et une seule fois (à une convention près).
- (iii) Une mesure naturelle sur l'espace des droites, utilisée dans les formules d'inversion.
- (iv) Un formalisme adapté au théorème de coupe, reliant transformée de Radon et transformée de Fourier 2D.
- (v) Une mesure naturelle sur l'espace des droites, utilisée dans les formules d'inversion.

### III.3.1 Construction de l'orientation et de la distance

Nous connaissons tous l'idée qu'une droite  $l$  dans  $\mathbb{R}^2$  peut être représentée par l'équation

$$ax + by = c$$

où  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $a^2 + b^2 \neq 0$ .

On peut alors écrire cette équation d'une droite sous la forme

$$w_1x + w_2y = t$$

où  $\mathbf{w} := (w_1, w_2) = (\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})$  et  $t = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , que nous pouvons voir comme un point situé sur le cercle unitaire, pour

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$$

Cela implique que  $\mathbf{w} := (\cos(\theta), \sin(\theta))$  est un vecteur normal unitaire,  $\theta \in [0, 2\pi)$  représente l'orientation, et  $t$  est exactement la distance à l'origine. On a

$$x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = t$$

Notez que dans les équations ci-dessus,  $t$  et  $\theta$  sont fixes et déterminent une droite spécifique  $l$  dans le plan. On peut donc dire que  $t$  et  $\theta$  paramètrent une droite  $l_{t,\theta}$  et que  $\mathbf{z}$  détermine des points spécifiques sur cette droite  $l$ . Ou encore

$$l_{t,\theta} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : \langle \mathbf{z}, (\cos \theta, \sin \theta) \rangle = t\}.$$

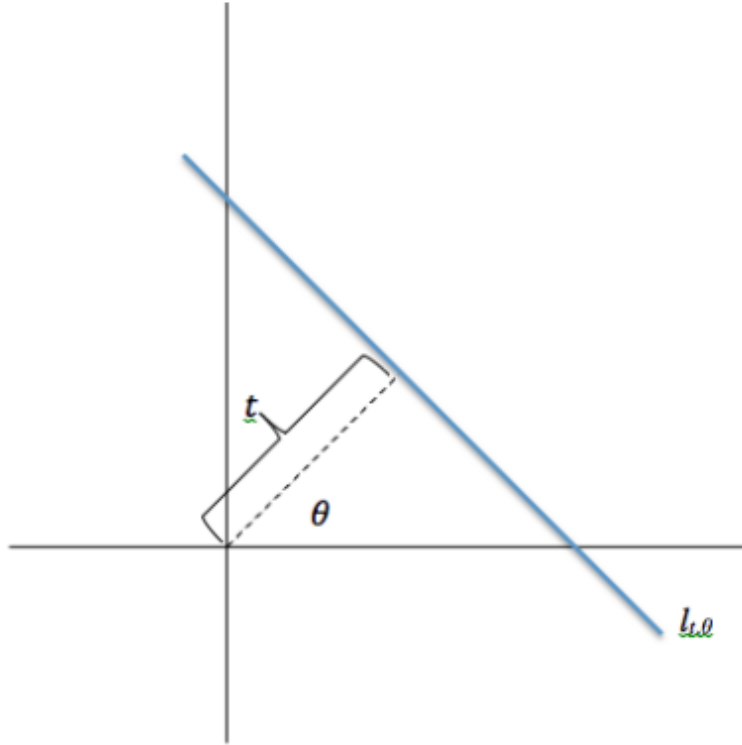


Figure 3.1: paramétrisation d'une droite  $l_{t,\theta}$  par  $t$  et  $\theta$

On voit que  $(t \cos(\theta), t \sin(\theta))$  est un point situé sur la droite  $l_{t,\theta}$  (Figure 4.1) et  $(-\sin(\theta), \cos(\theta))$  est un vecteur perpendiculaire au vecteur unitaire  $\mathbf{w}$ .

En géométrie affine élémentaire, une ligne est un point plus une direction. Par conséquent, nous pouvons décrire un point particulier  $(x, y)$  sur  $l_{t,\theta}$  en termes de nombre réel  $s$  comme suit :

$$l_{t,\theta} = \{(t \cos(\theta) - s \sin(\theta), t \sin(\theta) + s \cos(\theta)); s \in \mathbb{R}\} \quad (\text{III.5})$$

**Définition III.3.4** (Transformée de Radon). Soit  $f(t, \theta)$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  à support compact. La transformée de Radon de  $f$ , notée  $\mathcal{R}f$ , est définie pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in (0, 2\pi]$  par

$$\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(s), y(s)) ds$$

La transformée de Radon permet de déterminer la densité totale d'une fonction  $f$  le long d'une droite donnée  $l$ . Cette droite  $l$  est définie par un angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $x$  et une distance  $t$  par rapport à l'origine. Comme illustré à la Figure 3.2, si l'on calcule la transformée de Radon le long de plusieurs droites à des angles différents (ici  $\theta_1$  et  $\theta_2$ ), on peut déterminer plusieurs fonctions de densité pour notre objet. Intuitivement, on peut interpréter la transformée de Radon comme une version « étalée » de notre objet initial. Supposons que la région en forme de tache représentée à la Figure 3.2 soit une tache d'encre; si l'on étale cette tache le long de lignes de direction  $\theta_1$ , on s'attend à ce que les régions les plus larges de la tache correspondent à des zones plus étendues que les régions plus petites, ce qui correspond exactement à ce que l'on observe.

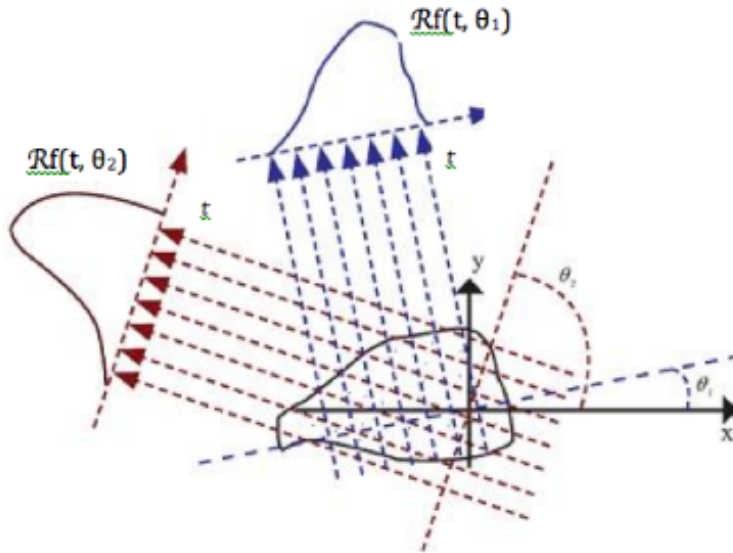


Figure 3.2: Transformée de Radon pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

L'intégrale  $\mathcal{R}f(t, \theta)$  représente le membre gauche de l'équation (III.4). Rappelons que, dans cette équation,  $\mathbf{A}(x)$  est inconnue et que  $\ln(\frac{I_1}{I_0})$  correspond à une information mesurée. Autrement dit,  $\ln(\frac{I_1}{I_0})$  est la transformée de Radon, et la transformée de Radon représente donc des données connues issues de la mesure.

L'objectif est maintenant de trouver une formule d'inversion de la transformée de Radon qui nous permettra de reconstruire la fonction initiale  $f$  (ou, dans le contexte de l'imagerie médicale,  $\mathbf{A}(x)$ ). Pour ce faire, il sera utile de rappeler plusieurs propriétés de la transformée de Radon.

**Proposition III.3.1.** Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels et  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}^2$  à support compact. On a

- (i) Linéarité :  $\mathcal{R}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{R}f + \beta \mathcal{R}g$

(ii) Parité:  $\mathcal{R}f(-t, -\theta) = \mathcal{R}f(t, \theta)$

(iii)  $\mathcal{R}f(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(s), y(s)) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos(\theta) - s \sin(\theta), t \sin(\theta) + s \cos(\theta)) ds$

Nous définissons en outre le domaine naturel de la transformée de Radon comme l'ensemble des fonctions  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x(s), y(s))| ds < \infty$$

### III.3.2 Le Théorème de la Coupe Centrale

Le théorème de la coupe centrale, également appelé théorème de projection-transforme de Fourier ou théorème de Fourier-Slice, est un résultat fondamental en traitement d'image et en tomographie. Il établit un lien profond entre la transformée de Radon (utilisée pour décrire les projections d'un objet) et la transformée de Fourier (utilisée pour analyser les fréquences spatiales). Ce théorème constitue la pierre angulaire mathématique de la plupart des méthodes de reconstruction tomographique moderne.

**Proposition III.3.2.** Soit  $g$  une fonction absolument intégrale sur  $\mathbb{R}^2$ . Le théorème de la coupe centrale affirme que, pour tout  $S \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in [0, 2\pi]$ , on a :

$$\mathcal{F}_2 g(S \cos(\theta), S \sin(\theta)) = \mathcal{F}(\mathcal{R}g)(S, \theta)$$

**Preuve:** En utilisant la définition de la transformée de Fourier bidimensionnelle (III.2) on obtient

$$\mathcal{F}_2 g(S \cos(\theta), S \sin(\theta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-iS(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} dx dy$$

Nous effectuons maintenant un changement de variables conformément au système de coordonnées que nous avons défini à la *Construction de l'orientation et de la distance*. Rappelons que, lors de la paramétrisation de la droite  $\ell_{t,\theta}$ , nous avons montré que, pour  $s \in \mathbb{R}$ , on peut écrire :

$$x(s) = t \cos \theta - s \sin \theta, \quad y(s) = t \sin \theta + s \cos \theta, \quad t = x \cos \theta + y \sin \theta.$$

En examinant le déterminant du Jacobien associé à  $x(s)$  et  $y(s)$ , on obtient :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} = 1.$$

Nous en déduisons que

$$ds dt = dx dy.$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-iS(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) e^{-iSt} ds dt.$$

Comme  $e^{-iSt}$  ne dépend pas de la variable  $s$ , nous pouvons réarranger l'intégrale précédente de la manière suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \right) e^{-iSt} dt.$$

L'intégrale intérieure est exactement la transformée de Radon de  $f$ , évaluée en  $(t, \theta)$ , ce qui implique que l'expression précédente devient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (Rg(t, \theta)) e^{-iSt} dt.$$

Cette dernière intégrale n'est autre que la transformée de Fourier de  $Rg(S, \theta)$ , ce qui conclut la démonstration.  $\square$

### III.3.3 Rétroprojection filtrée (FBP)

Nous sommes maintenant enfin prêts à effectuer une première tentative pour retrouver la fonction de coefficient d'atténuation. Rappelons que, d'un point de vue physique, la transformée de Radon  $\mathcal{R}f(t, \theta)$  nous donne la densité totale de l'objet  $f$  le long d'une droite  $\ell_{t, \theta}$ . Nous avons déterminé cette densité en mesurant les intensités initiale et finale d'un faisceau de rayons  $\mathbf{X}$  traversant l'objet le long de cette droite. En procédant ainsi pour plusieurs droites différentes, nous sommes capables de reconstruire une coupe unique de l'objet initial, et en faisant varier l'angle  $\theta$  de ces rayons  $\mathbf{X}$ , nous pouvons définir de nombreuses coupes.

Si nous sommes capables, d'une certaine manière, de « rétroprojeter » ces densités sur le plan, nous pourrions peut-être reconstituer l'objet initial. Intuitivement, on peut interpréter ce processus comme le fait de prendre les données du sinogramme et de les « déflouter » pour les ramener dans le plan.

**Définition III.3.5.** Soit  $h = h(t, \theta)$ . On définit la *rétroprojection*, notée  $\mathcal{B}h$ , en un point  $(x, y)$  par :

$$\mathcal{B}h(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta.$$

En appliquant cette formule de rétroprojection à la transformée de Radon, on obtient :

$$\mathcal{B}\mathcal{R}f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{R}f(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta. \quad (\text{III.6})$$

Nous sommes capables d'effectuer la rétroprojection sur les coupes que nous avons mesurées. Comme illustré à la Figure 3.3, effectuer une rétroprojection selon seulement quelques directions  $\theta$  constitue une méthode extrêmement imprécise pour reconstituer ne serait-ce qu'un objet simple. Toutefois, même si nous augmentons de manière significative le nombre de rétroprojections (par exemple jusqu'à 1000 directions), il subsiste encore une quantité importante de bruit qui brouille l'image reconstruite. En réalité, quel que soit le nombre de directions selon lesquelles nous tentons d'effectuer la rétroprojection, nous ne serons jamais capables de reconstruire parfaitement l'image à l'aide de la formule de rétroprojection donnée par l'équation (III.6). Pour que ce procédé soit réellement utile, il est nécessaire de dériver une méthode permettant de filtrer une partie du bruit que la formule de rétroprojection semble introduire dans l'image, afin d'obtenir une représentation plus lisse de l'objet.

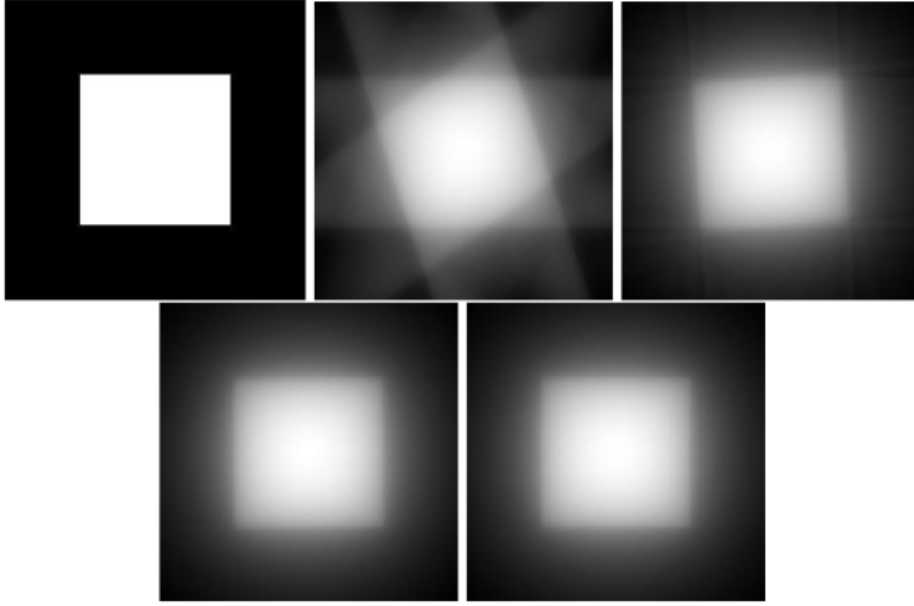


Figure 3.3: Retroprojection d'un carré dans 5, 25, 100 et 1000 directions

Dans ce but, nous définissons une formule de *rétroprojection filtrée*.

**Proposition III.3.3.** Soit  $f$  une fonction absolument intégrable définie sur  $\mathbb{R}^2$ . Alors,

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B} \{ \mathcal{F}^{-1} [|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)] \} (x, y). \quad (\text{III.7})$$

*Démonstration.* Nous commençons par rappeler que, pour la transformée de Fourier bidimensionnelle et son inverse, on a :

$$f(x, y) = \mathcal{F}_2^{-1} \mathcal{F}_2 f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2 f(X, Y) e^{i(Xx+Yy)} dX dY. \quad (\text{III.8})$$

Nous allons maintenant effectuer un changement de variables des coordonnées cartésiennes  $(X, Y)$  vers les coordonnées polaires  $(S, \theta)$ , définies par

$$X = S \cos \theta, \quad Y = S \sin \theta,$$

où  $S \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in [0, \pi]$ . Ce changement de variables conduit au déterminant jacobien suivant :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial S} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial S} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = |S|$$

Ce qui nous dit que  $dX dY = |S| dS d\theta$ . En incorporant ce nouveau changement de variables, l'équation (III.8) devient :

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2 f(S \cos \theta, S \sin \theta) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS d\theta.$$

Et en utilisant le théorème de la tranche centrale, nous voyons que l'équation ci-dessus est en fait égale à

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}(\mathcal{R}f(S, \theta)) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS d\theta. \quad (\text{III.9})$$

Prenons maintenant un regard plus attentif sur l'intégrale intérieure de l'équation (III.9) et en utilisant la définition de la Transformée de Fourier inverse, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}(\mathcal{R}f(S, \theta)) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS &= 2\pi \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}(\mathcal{R}f(S, \theta)) e^{iS(x \cos \theta + y \sin \theta)} |S| dS \right) \\ &= 2\pi \mathcal{F}^{-1}(|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta))(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \end{aligned}$$

Autrement dit, l'intégrale intérieure de l'équation (7.4) est égale à  $2\pi$  fois l'inverse de la transformée de Fourier de  $|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)$  au point  $(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta)$ . Nous pouvons alors voir que l'équation (7.4) est en fait égale à

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{F}^{-1}(|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta))(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta.$$

Finalement, nous constatons que l'intégrale ci-dessus est égale à  $\frac{1}{2}$  de la rétroprojection donnée dans la définition (III.6) pour  $\mathcal{F}^{-1}[|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)]$ . Nous simplifions donc l'équation précédente pour obtenir

$$\frac{1}{2} \mathcal{B} \left\{ \mathcal{F}^{-1}[|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f(S, \theta))] \right\} (x, y).$$

Ce qui nous conduit à la conclusion souhaitée :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B} \left\{ \mathcal{F}^{-1}[|S| \mathcal{F}(\mathcal{R}f(S, \theta))] \right\} (x, y).$$

□

Le facteur important dans cette formule est le multiplicateur  $|S|$  qui apparaît entre la transformée de Fourier et son inverse. Sans ce facteur, ces deux termes s'annuleraient mutuellement et nous nous retrouverions avec la formule standard de rétroprojection pour la transformée de Radon que nous avons rencontrée précédemment et qui, comme nous l'avons vu, ne nous donne pas directement  $f(x, y)$ . Nous appelons ce  $|S|$  supplémentaire un **filtre** de la transformée de Radon, ce qui nous donne le nom de la formule de **rétroprojection filtrée**.

**Proposition III.3.4.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables définies sur  $\mathbb{R}$ , alors

$$(\mathcal{B}g \star f)(X, Y) = \mathcal{B}(g \star \mathcal{R}f)(X, Y)$$

Considérons maintenant la relation (III.7) et supposons qu'il existe une fonction, notée  $\varphi(t)$ , dont la transformée de Fourier soit égale à notre facteur de filtrage  $|S|$ . Autrement dit, supposons qu'il existe une fonction  $\varphi(t)$  telle que

$$\mathcal{F}\varphi(S) = |S|.$$

Plus simplement, supposons que nous connaissions une fonction dont la transformée de Fourier est égale à la fonction valeur absolue. Nous pourrions alors réécrire la rétroprojection sous la forme suivante :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B} \{ \mathcal{F}^{-1} [ \mathcal{F}\varphi \cdot \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta) ] \} (x, y). \quad (\text{III.10})$$

Cependant, le membre de droite de l'équation (III.10) contient un produit de transformées de Fourier, que nous savons être égal à la convolution des fonctions transformées

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B} \{ \mathcal{F}^{-1} [ \mathcal{F}(\varphi \star \mathcal{R}f)(S, \theta) ] \} (x, y).$$

Mais ceci n'est rien d'autre que la transformée de Fourier inverse de la transformée de Fourier, ce qui nous ramène à la fonction de départ. Cela nous conduit à la formule de rétroprojection filtrée beaucoup plus simple :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B}(\varphi \star \mathcal{R}f)(x, y). \quad (\text{III.11})$$

L'équation (III.11) est bien plus élégante que notre formule initiale de rétroprojection filtrée et ne semble pas difficile à appliquer. Physiquement parlant,  $\mathcal{R}f$  représente nos données mesurées et l'équation (III.11) requiert simplement de les filtrer à l'aide de notre nouvelle fonction  $\varphi$ , puis d'appliquer la formule de rétroprojection, qui est une intégrale relativement simple.

Malheureusement, il n'existe pas de fonction  $\varphi$  dont la transformée de Fourier soit exactement égale à la valeur absolue. Considérons la fonction  $\mathcal{F}\varphi$  :

$$\mathcal{F}\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Nous pouvons constater que, lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{F}\varphi(\omega) \rightarrow 0$  (remarquons l'exponentielle négative). Cependant, pour la fonction valeur absolue  $|\omega|$ , lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Par conséquent, il est impossible de trouver une fonction  $\varphi$  telle que, pour tout  $\omega$ ,  $\mathcal{F}\varphi(\omega) = |\omega|$ .

Toutefois, tout notre travail précédent n'est pas vain. Examinons plutôt le type de fonctions sur lesquelles nous avons restreint notre étude. Nous ne considérons notre fonction que sur un intervalle fini et supposons en fait qu'elle soit nulle en dehors de cet intervalle. En étendant cette idée à la transformée de Fourier, nous constatons que nous devons porter notre attention sur les *fonctions à bande limitée*.

**Définition III.3.6.** Une fonction  $\varphi$  est dite à *bande limitée* s'il existe un réel  $L > 0$  tel que

$$\mathcal{F}\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\omega x} dx = 0 \quad \text{pour tout } \omega \notin [-L, L]. \quad (\text{III.12})$$

Le facteur de filtrage  $|S|$  sert à amplifier le terme  $\mathcal{F}(\mathcal{R}f)$  dans la formule de rétroprojection filtrée originale (III.7). En pratique,  $\mathcal{F}(\mathcal{R}f)$  est très sensible aux hautes fréquences.

En concentrant notre attention sur les basses fréquences à l'aide d'une fonction à bande limitée  $\varphi$ , nous sommes en mesure d'éviter ce problème. Notre objectif est de remplacer  $S$  par ce que l'on appelle un *filtre passe-bas* (noté  $S'$ ), qui prend en compte les effets des

basses fréquences tout en atténuant les hautes fréquences. Cette fonction  $S'$  doit avoir un support compact et être de la forme

$$S' = \mathcal{F}\varphi$$

(sur un intervalle compact).

Le coût de l'utilisation de  $S'(\omega)$  est que nous ne disposons plus de l'égalité présentée dans l'équation (III.11). En revanche, nous obtenons :

$$f(x, y) \approx \frac{1}{2} \mathcal{B}(\mathcal{F}^{-1}S' \star \mathcal{R}f)(x, y). \quad (\text{III.13})$$

De manière générale, la plupart des filtres passe-bas sont de la forme

$$S'(\omega) = |\omega| \cdot F(\omega) \cdot \Pi_L(\omega),$$

où  $L > 0$  définit la région sur laquelle le filtrage est effectué. Différentes fonctions  $F$  déterminent les caractéristiques précises du filtre, et  $\Pi_L(\omega)$  est définie comme suit :

$$\Pi_L(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq L, \\ 0 & \text{si } |\omega| > L. \end{cases}$$

Nous introduisons maintenant deux filtres couramment utilisés en imagerie numérique et en traitement du signal : le filtre *Ram-Lak* et le filtre *Hann*.

### Filtre Ram-Lak

Le filtre Ram-Lak est défini par :

$$S'(\omega) = |\omega| \cdot \Pi_L(\omega) = \begin{cases} |\omega| & \text{si } |\omega| \leq L, \\ 0 & \text{si } |\omega| > L. \end{cases}$$

Le filtre Ram-Lak constitue la base de nombreux autres filtres utilisés en analyse du signal, car il remplace simplement la fonction  $F(\omega)$  par la fonction constante égale à 1. D'autres filtres, tels que le filtre Hann, consistent généralement en des produits de fonctions sinus ou cosinus destinées à éliminer le bruit indésirable.

### Filtre Hann

Le filtre Hann est donné par :

$$S'(\omega) = |\omega| \cdot \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi\omega}{L}\right) \right) \cdot \Pi_L(\omega).$$

Le filtre Hann utilise la fonction de Hann

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi\omega}{L}\right) \right)$$

comme fonction  $F(\omega)$ ,

### III.4 Discrétisation des méthodes analytiques

Ainsi nous avons traité presque exclusivement des intégrales continues pour la transformée de Radon, la transformée de Fourier et les formules de rétroprojection. En pratique, cependant, nous n'avons qu'un ensemble fini de données avec lesquelles travailler. Par conséquent, nous devons former des versions discrètes de toutes les formules que nous avons utilisées dans notre rétroprojection filtrée.

Une fonction discrète est une fonction définie uniquement sur un ensemble dénombrable. Pour nos besoins, nous considérerons des fonctions discrètes définies sur des ensembles finis (l'ensemble étant composé des lignes sur lesquelles nous avons pris nos mesures d'intensité). Soit  $g_n$  la fonction discrète  $g$  à la valeur  $n$ . Comme nous connaissons cette fonction discrète sur un ensemble fini, soit  $N$ , nous pouvons dire que  $g = g_n : 0 \leq n \leq N - 1$ . Si nous voulons étendre cette définition à tous les entiers, nous pouvons simplement « répéter » notre fonction encore et encore ; c'est-à-dire, nous pouvons la rendre périodique avec une période  $N$ . Cette extension sera utile pour certaines des formules discrètes que nous rencontrerons.

Supposons que nous prenions des mesures à  $P$  angles différents  $\theta$  et que pour chaque angle nous ayons  $2M + 1$  faisceaux espacés d'une distance  $d$ . Alors nous pouvons définir des valeurs particulières  $\theta_k$  et  $t_j$  comme

$$\theta_k = \left\{ \frac{k\pi}{P} : 0 \leq k \leq P - 1 \right\},$$

$$t_j = \{jd : -M \leq j \leq M\}.$$

Ce qui nous permet de définir une ligne particulière comme  $l_{t_j, \theta_k}$ . Nous définissons donc la transformée de Radon discrète comme suit :

**Définition III.4.1.** Pour une fonction absolument intégrable  $f$  et  $0 \leq k \leq P$  et  $-M \leq j \leq M$ , ( $P, M > 0$ ), nous définissons la transformée de Radon discrète de  $f$ , notée  $\mathcal{R}_D f$ , comme

$$\mathcal{R}_D f_{j,k} = \mathcal{R}f(t_j, \theta_k).$$

Pour mettre en œuvre la formule de rétroprojection filtrée (III.13), nous devons également définir la convolution de deux fonctions discrètes.

**Définition III.4.2.** Pour deux fonctions discrètes  $N$ -périodiques  $f$  et  $g$ , nous définissons la **convolution discrète** de  $f$  et  $g$ , notée  $f \star g$ , comme

$$(f \star g)_m = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cdot g_{(m-j)}, \quad \text{pour } m \in \mathbb{Z}.$$

Évidemment, nous aurons également besoin de la transformée de Fourier discrète.

**Définition III.4.3** (Transformée de Fourier discrète). Étant donnée une fonction discrète  $N$ -périodique  $f$ , nous définissons la **transformée de Fourier discrète** de  $f$ , notée  $\mathcal{F}_D f$ , par

$$(\mathcal{F}_D f)_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{i2\pi kj/N}, \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, (N - 1). \quad (\text{III.14})$$

Il convient de noter que la  $N$ -périodicité de  $f$  nous permet de remplacer les bornes de la sommation par tout ensemble d'entiers de longueur  $(N - 1)$ . Avec cette définition, il n'est pas surprenant que nous définissions la transformée de Fourier discrète inverse de la manière suivante.

**Définition III.4.4** (Transformée de Fourier discrète inverse). Étant donnée une fonction discrète  $N$ -périodique  $g$ , la **transformée de Fourier discrète inverse** de  $g$ , notée  $\mathcal{F}_D^{-1}g$ , est définie par

$$(\mathcal{F}_D^{-1}g)_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{i2\pi kn/N}, \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, (N - 1). \quad (\text{III.15})$$

Nous remarquons que plusieurs des mêmes propriétés de la transformée de Fourier que nous avons définies dans le cadre continu s'appliquent également au cas discret avec de légères modifications :

**Proposition III.4.1** (Propriétés des fonctions discrètes  $N$ -périodiques). Pour des fonctions discrètes  $N$ -périodiques  $f$  et  $g$  :

1.  $\mathcal{F}_D(f \star g) = (\mathcal{F}_D f) \cdot (\mathcal{F}_D g)$
2.  $\mathcal{F}_D(f \cdot g) = \frac{1}{N} (\mathcal{F}_D f) \star (\mathcal{F}_D g)$
3.  $\mathcal{F}_D^{-1}(\mathcal{F}_D f)_n = f_n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$

Nous sommes maintenant prêts à aborder la discrétisation de la formule de rétroprojection elle-même. Rappelons que la formule de rétroprojection était définie comme une intégrale de 0 à  $\pi$  par rapport à  $d\theta$ . Dans le cas discret, nous avons remplacé ce  $d\theta$  continu par  $k\pi/P$  pour  $0 \leq k \leq (P - 1)$ . Cela conduit à la définition suivante de la **rétroprojection discrète** :

**Définition III.4.5** (Rétroprojection discrète). Étant donnée une fonction discrète  $h$ , nous définissons la **rétroprojection discrète** de  $h$ , notée  $\mathcal{B}_D h$ , par

$$\mathcal{B}_D h(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h\left(x \cos \frac{k\pi}{N} + y \sin \frac{k\pi}{N}, k\pi/N\right). \quad (\text{III.16})$$

Rappelons notre forme finale pour la formule filtrée de rétroprojection en équation (III.13) :

$$f(x, y) \approx \frac{1}{2} \mathcal{B}(\mathcal{F}^{-1} S' \star \mathcal{R} f)(x, y).$$

Pour former la version discrète de cette équation, nous voyons que nous devons appliquer la formule suivante:

$$f(x, y) \approx \frac{1}{2} \mathcal{B}_D (\mathcal{F}_D^{-1} S' \star \mathcal{R}_D f)(x, y). \quad (\text{III.17})$$

Nous rencontrons maintenant un léger problème.  $\mathcal{R}_D f$  représente les données mesurées basées sur les intensités finales d'un seul faisceau de rayons X. Nous avons défini les emplacements des différents faisceaux (et donc des différentes coupes) en utilisant un

système de coordonnées perpendiculaire aux coordonnées polaires basé sur des angles discrets  $\theta$  et des distances  $t$ .

En examinant l'équation (III.16), nous voyons que nous devons sommer sur  $h$  en différents points  $(x, y)$  dans le système de coordonnées cartésien pour créer une grille de niveaux de gris rectangulaire qui représente notre objet original. Les systèmes de coordonnées polaires et cartésiens ne correspondent pas nécessairement parfaitement, et nous devons donc *interpoler* les points de données manquants. L'interpolation consiste à créer une fonction continue (ou au minimum par morceaux continues) à partir d'un ensemble discret de valeurs. Il existe de nombreuses méthodes pour interpoler une fonction (spline cubique, Lagrange, etc.), chacune ayant ses avantages et inconvénients.

Pour nos besoins, nous allons définir un type général d'interpolation basé sur une fonction de pondération  $W$  qui détermine comment nous allons choisir nos points interpolés. Nous ne définissons pas de fonction de pondération particulière  $W$ , car les détails de l'interpolation ne sont pas aussi importants que le fait que nous pouvons remplir les "trous" dans nos données.

**Définition III.4.6.** Pour une fonction de pondération donnée  $W$  et une fonction discrète  $N$ -périodique  $g$ , l'*interpolation*  $W$  de  $g$  est définie par :

$$\mathcal{I}_W(g)(x) = \sum_n g(n) \cdot W\left(\frac{x}{d} - n\right), \quad \text{pour } -\infty < x < \infty. \quad (\text{III.18})$$

Maintenant que nous avons couvert toutes les parties de l'équation (III.11) dans un cadre discret et traité le problème de l'interpolation, nous pouvons proposer un algorithme de reconstruction discret pour résoudre le coefficient d'atténuation à partir d'un ensemble de données discret.

Nous interpolons ici la fonction  $(\mathcal{F}_D^{-1}\mathcal{S}') * \mathcal{R}_D f(jd, k\pi/N)$  (c'est-à-dire que nous remplissons les trous après le filtrage de la transformée de Radon). Définissons cette fonction interpolée comme  $\mathcal{I}$ . Cela conduit à la formule de reconstruction suivante :

$$\begin{aligned} f(x_m, y_n) &\approx \frac{1}{2} \mathcal{B}_D \left( (\mathcal{F}_D^{-1}\mathcal{S}') * \mathcal{R}_D f \right) (jd, k\pi/N) \\ &\approx \frac{1}{2} \mathcal{B}_D \mathcal{I}(x_m, y_n) \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{I} \left( x_m \cos \frac{k\pi}{N} + y_n \sin \frac{k\pi}{N}, \frac{k\pi}{N} \right). \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

L'équation précédente tient compte de la nature discrète de nos données réelles et traite les problèmes (comme le manque de données) qui surviennent lorsque l'on dispose d'un nombre fini de mesures.

### III.5 Formulation linéaire – Synthèse

D'accord, nous allons expliquer pas à pas comment passer de la formulation intégrale continue de la rétroprojection filtrée à la **formulation linéaire discrète**  $g = Af$  utilisée en pratique en tomographie.

### III.5.1 Rétroprojection filtrée continue

On a la formule continue pour la reconstruction filtrée :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left( (\mathcal{F}^{-1} S') \star \mathcal{R}f \right) (x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

Ici :

- $f(x, y)$  : coefficient d'atténuation à reconstruire,
- $\mathcal{R}f(t, \theta)$  : transformée de Radon (projection à l'angle  $\theta$ ),
- $\mathcal{F}^{-1} S'$  : filtre appliqué sur chaque projection,
- $\star$  : convolution dans  $t$ .

C'est une **formule intégrale continue**, dépendante de coordonnées polaires.

### III.5.2 Discrétisation des coordonnées et des angles

Pour passer au discret :

1. On ne mesure que  $P$  angles :  $\theta_k = k\pi/P$ ,  $k = 0, \dots, P-1$ ,
2. On ne mesure que  $2M+1$  faisceaux par angle, espacés de  $d$  :  $t_j = jd$ ,  $j = -M, \dots, M$ ,
3. On obtient donc la **transformée de Radon discrète** :

$$\mathcal{R}_D f_{j,k} = \mathcal{R}f(t_j, \theta_k).$$

### III.5.3 Convolution et filtrage discrets

On applique ensuite le filtre sur chaque projection :

$$h_{j,k} = (\mathcal{F}_D^{-1} S' * \mathcal{R}_D f)_{j,k}$$

Ici,  $*$  est la **convolution discrète** dans  $t$  :

$$(f * g)_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n g_{(m-n)}.$$

### III.5.4 Discrétisation de la rétroprojection

La rétroprojection discrète est :

$$f(x_m, y_n) \approx \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} h \left( x_m \cos \frac{k\pi}{N} + y_n \sin \frac{k\pi}{N}, \frac{k\pi}{N} \right).$$

Comme les coordonnées cartésiennes  $(x_m, y_n)$  ne tombent pas exactement sur les positions  $t_j$ , on **interpole** :

$$h(x_m \cos \theta_k + y_n \sin \theta_k, \theta_k) \approx \sum_j h_{j,k} W \left( \frac{x_m \cos \theta_k + y_n \sin \theta_k - t_j}{d} \right),$$

où  $W$  est la fonction de pondération de l'interpolation (linéaire, spline, etc.). Cela transforme chaque  $f(x_m, y_n)$  en **combinaison linéaire des mesures**  $h_{j,k}$ .

### III.5.5 Passage à la forme matricielle linéaire

Si on note :

- $f$  le vecteur de tous les  $f(x_m, y_n)$  sur la grille,
- $g$  le vecteur de toutes les mesures projetées filtrées  $h_{j,k}$ ,
- $A$  la matrice représentant la **rétroprojection + interpolation**,

alors :

$$f_i = \sum_j A_{ij} g_j$$

Chaque coefficient  $A_{ij}$  représente le poids avec lequel la projection  $g_j$  contribue au pixel  $f_i$ .

On obtient donc :

$$\boxed{g = Af} \quad \text{ou souvent } f = Ag \text{ selon la notation.}$$

En pratique,  $A$  est **très grande et creuse**, mais la reconstruction se réduit à un simple **produit matriciel**.

### III.5.6 Synthèse

Le passage de l'intégrale continue à  $g = Af$  se fait en quatre étapes principales :

1. **Échantillonnage discret** des angles et des faisceaux  $\rightarrow \mathcal{R}_D f$ ,
2. **Filtrage discret** via convolution et transformée de Fourier discrète,
3. **Rétroprojection discrète** et interpolation sur la grille cartésienne,
4. **Écriture linéaire** : chaque pixel reconstruit est une combinaison linéaire des mesures  $\rightarrow$  matrice  $A$ .

Ainsi, **toute la formule intégrale est transformée en somme discrète**, et la linéarité de la convolution et de la rétroprojection permet de la représenter par  $A$ .

## III.6 Théorie du Compressed Sensing

En tomodensitométrie (CT), la réduction du nombre de projections et de la dose de rayonnement constitue un enjeu majeur de sécurité clinique et de performance opérationnelle. La diminution de l'exposition aux rayons **X** vise à limiter les risques biologiques associés aux rayonnements ionisants, en particulier dans les contextes d'examens répétés ou pour les populations sensibles. Toutefois, cette réduction conduit inévitablement à une acquisition de données incomplètes et bruitées, rendant la reconstruction d'image plus difficile.

D'un point de vue mathématique, cette situation se traduit par un problème inverse sous-déterminé, pour lequel les méthodes analytiques classiques, telles que la rétroprojection filtrée, deviennent instables ou génèrent des artefacts importants. Le *Compressed Sensing* (CS) fournit un cadre théorique et algorithmique permettant d'aborder cette problématique en exploitant des propriétés structurelles des images CT.

**Définition III.6.1.** Le *compressed sensing* (CS) est un cadre mathématique et algorithmique permettant la reconstruction de signaux de grande dimension à partir d'un nombre de mesures significativement inférieur à celui requis par les méthodes d'échantillonnage classiques, sous réserve que le signal présente une structure de parcimonie adaptée.

**Définition III.6.2.** Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  un signal inconnu. On dit que  $x$  est  $k$ -parcimonieux dans une base (ou un dictionnaire)  $\Psi$  (par exemple ondelettes, DCT) si

$$x = \Psi\alpha, \quad \text{où } \alpha \text{ possède au plus } k \ll n \text{ coefficients non nuls.}$$

Dans le cas des images CT, bien que la distribution d'atténuation ne soit pas parcimonieuse dans le domaine spatial, elle est souvent compressible dans des bases multi-échelles ou via le gradient de l'image. Cette propriété constitue le fondement de l'application du compressed sensing à la reconstruction tomographique.

Les mesures acquises lors d'un examen CT peuvent être modélisées par un ensemble de relations linéaires :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

où  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  représente l'opérateur de projection discrétisé (assimilable à la transformée de Radon discrète) et  $m \ll n$  lorsque le nombre de projections est réduit.

Contrairement au cadre classique de l'échantillonnage, qui impose un nombre de mesures au moins égal à la dimension du signal, le compressed sensing montre que

$$m \gtrsim k \log(n/k)$$

peut être suffisant pour une reconstruction stable, sous des conditions appropriées sur l'opérateur  $\mathbf{A}$ , telles que l'incohérence ou la propriété d'isométrie restreinte (*Restricted Isometry Property*, RIP).

### III.6.1 Le problème inverse en tomodensitométrie

La reconstruction CT s'inscrit dans le cadre général des problèmes inverses, où l'objectif est d'estimer une image à partir de mesures indirectes, bruitées et incomplètes. Ce problème peut être formulé sous la forme :

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \tag{III.20}$$

où :

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  représente la distribution d'atténuation à reconstruire,
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  correspond aux données de projection (sinogramme),
- $\mathcal{A}$  modélise le processus de projection CT,
- $\mathbf{n}$  représente le bruit de mesure, principalement de nature quantique.

Lorsque le nombre de projections est réduit, l'opérateur  $\mathcal{A}$  devient non inversible et le problème est sous-déterminé. Cette situation est inhérente aux stratégies de réduction de dose et ne peut être évitée sans compromettre la sécurité du patient.

### III.6.2 Mal-positude et conséquences pratiques

**Définition III.6.3.** Un problème est dit **bien posé** au sens de Hadamard s'il vérifie l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution. Si l'une de ces conditions n'est pas satisfaite, le problème est dit *mal posé*.

Dans le contexte de la reconstruction CT à faible dose, la condition d'unicité est violée du fait de la sous-détermination, et la condition de stabilité est fortement compromise par la présence de bruit. De faibles fluctuations du sinogramme peuvent ainsi engendrer des artefacts marqués dans l'image reconstruite.

### III.6.3 Régularisation par parcimonie et Compressed Sensing

Pour rendre le problème inverse traitable, il est nécessaire d'introduire des informations a priori sur la solution recherchée. Le compressed sensing propose d'utiliser la parcimonie ou la compressibilité de l'image CT dans une représentation appropriée comme mécanisme de régularisation.

Cette hypothèse restreint l'ensemble des solutions admissibles et permet de transformer un problème inverse mal posé en un problème d'optimisation bien conditionné, pour lequel une solution stable et physiquement plausible peut être obtenue malgré la réduction du nombre de projections.

Jusqu'à présent, le compressed sensing a été présenté comme un cadre théorique exploitant la parcimonie pour résoudre des problèmes inverses sous-déterminés. En pratique, cette hypothèse de parcimonie est intégrée au processus de reconstruction via des formulations variationnelles. Ces formulations constituent un cadre général permettant d'unifier les approches classiques de régularisation et les méthodes issues du compressed sensing.

### III.6.4 Formulation variationnelle des problèmes inverses

Dans de nombreux problèmes d'imagerie, et en particulier en tomodensitométrie à faible dose, l'objectif est de reconstruire une image inconnue  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  à partir d'un ensemble de mesures  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  obtenues par un système d'acquisition indirect. Ce processus est généralement modélisé par une relation linéaire de la forme

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

où  $\mathcal{A}$  représente l'opérateur direct du système CT et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  un terme de bruit.

Lorsque les données sont bruitées et/ou acquises de manière incomplète ( $m \ll n$ ), l'opérateur  $\mathcal{A}$  devient non inversible ou mal conditionné. Dans ce cas, une inversion directe est soit impossible, soit extrêmement instable, et de petites perturbations des données peuvent engendrer de fortes dégradations de la solution reconstruite. Ce phénomène est caractéristique des problèmes inverses mal posés.

**Définition III.6.4.** Un *problème inverse* consiste à estimer une quantité inconnue  $\mathbf{x}$  à partir d'observations indirectes  $\mathbf{y}$ , reliées par un opérateur  $\mathcal{A}$ , lorsque l'inversion directe de cet opérateur est impossible ou instable.

**Principe de la régularisation.** Afin de rendre le problème inverse traitable, il est nécessaire d'introduire des informations a priori sur la solution recherchée. Cette démarche est connue sous le nom de *régularisation*.

**Définition III.6.5.** Une régularisation est une application  $\mathfrak{R}_\alpha : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui associe à des données observées  $\mathbf{y}$  une solution stable  $\hat{\mathbf{x}}$ , en incorporant des hypothèses supplémentaires sur la structure de la solution.

Intuitivement, une méthode de régularisation vise à étendre la notion d'inverse au cadre bruité et mal posé, de sorte que

$$\mathfrak{R}_\alpha(\mathcal{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}) \approx \mathbf{x},$$

même lorsque  $\boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$  ou que  $\mathcal{A}$  n'est pas inversible.

**Formulation variationnelle.** Une approche largement utilisée pour implémenter la régularisation consiste à formuler le problème inverse comme un problème d'optimisation variationnelle, dans lequel on recherche une solution équilibrant fidélité aux données et conformité aux a priori. Cette formulation s'écrit généralement sous la forme

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \underbrace{\|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2}_{\text{fidélité aux données}} + \alpha \underbrace{\mathcal{R}(\mathbf{x})}_{\text{terme de régularisation}} \right\}. \quad (\text{III.21})$$

Les différents termes de cette formulation jouent des rôles complémentaires :

- **Fidélité aux données :** Ce terme impose la cohérence entre l'image reconstruite  $\mathbf{x}$  et les mesures observées  $\mathbf{y}$ . Dans un contexte bruité, il n'est pas souhaitable de l'annuler strictement, car cela conduirait à une reconstruction amplifiant le bruit.
- **Terme de régularisation :** Le régularisant  $\mathcal{R}(\mathbf{x})$  encode les informations a priori disponibles sur la solution recherchée, telles que la régularité, la parcimonie ou des contraintes physiques. Il permet de restreindre l'ensemble des solutions admissibles et d'améliorer la stabilité du problème.
- **Paramètre de régularisation  $\alpha$  :** Le paramètre  $\alpha > 0$  contrôle le compromis entre fidélité aux données et influence de l'a priori. Un choix inadéquat peut conduire soit à une reconstruction bruitée (faible  $\alpha$ ), soit à une image excessivement lissée (grand  $\alpha$ ).

**Cas particulier : régularisation de Tikhonov.** Une régularisation classique consiste à choisir un régularisant quadratique, conduisant à la régularisation dite de Tikhonov. Par exemple, en supposant que la solution recherchée soit proche d'un modèle de référence  $\boldsymbol{\mu}$ , on peut définir

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}\|_{L^2, \mathcal{Q}}^2 := \langle \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}, \mathcal{Q}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \rangle,$$

où  $\mathcal{Q}$  est un opérateur positif définissant une pondération directionnelle.

Bien que cette approche soit mathématiquement simple et numériquement stable, elle favorise des solutions lisses et ne permet pas de promouvoir des structures parcimonieuses. Dans le contexte de la reconstruction CT à faible dose, elle est souvent insuffisante pour préserver les contours et les détails fins.

Le compressed sensing s'inscrit naturellement dans ce cadre variationnel en choisissant des régularisants non quadratiques conçus pour promouvoir la parcimonie ou la compressibilité de l'image, tels que les normes  $\ell_1$  ou la variation totale. Ces choix conduisent à des problèmes d'optimisation non différentiables, nécessitant des algorithmes itératifs spécifiques, qui seront abordés dans les sections suivantes.

### III.6.5 Formulation du problème

Dans le cadre de la tomographie par rayons X (CT), la reconstruction d'image à partir d'un nombre limité de projections conduit à un problème inverse sous-déterminé. Le cadre du *Compressed Sensing* (CS) permet de résoudre ce problème en exploitant la parcimonie intrinsèque des images CT dans un domaine approprié, typiquement le domaine du gradient.

**Définition III.6.6** (Image et représentation parcimonieuse). Considérons une image  $f$ , vue comme un vecteur colonne de dimension  $n \times 1$  dans  $\mathbb{R}^n$ , dont les éléments individuels  $f_j$ , pour  $j = 1, 2, \dots, n$ , représentent les  $n$  valeurs de pixels de l'image. On développe le vecteur  $f$  dans une base orthonormée  $\Psi$  comme suit :

$$f = \Psi \mathbf{x},$$

où  $\Psi$  est la matrice  $n \times n$   $[\psi_1, \dots, \psi_n]$ , dont les vecteurs  $\{\psi_i\}_{i=1}^n$  constituent les colonnes, et où  $\mathbf{x}$  est un vecteur colonne de dimension  $n \times 1$ .

Si la majorité des composantes du vecteur  $\mathbf{x}$  sont nulles ou quasi nulles, on dira que  $f$  est **parcimonieuse** dans le domaine  $\Psi$ , et que  $\mathbf{x}$  constitue sa **représentation parcimonieuse**.

Dans le cas des images CT, la parcimonie ne s'exprime généralement pas directement dans le domaine spatial, mais plutôt dans le domaine du gradient. Les images CT sont en effet caractérisées par des régions quasi homogènes séparées par des discontinuités nettes, ce qui rend leur gradient parcimonieux.

Considérons l'exemple du fantôme de Shepp–Logan représenté à la Figure 3.4 et de son équivalent en gradient à la Figure 3.5. On note l'intensité d'un pixel d'une image bidimensionnelle par  $f_{h,w}$ , où  $h = 1, 2, \dots, H$  et  $w = 1, 2, \dots, W$  ;  $H$  et  $W$  désignent respectivement la hauteur et la largeur de l'image 2D, et  $W \times H = n$ .

**Définition III.6.7** (Module du gradient). Si les valeurs des pixels sont notées  $f_{h,w}$ , le module du gradient discret est défini comme suit :

$$|\nabla f_{h,w}| = \sqrt{(f_{h+1,w} - f_{h,w})^2 + (f_{h,w+1} - f_{h,w})^2}. \quad (\text{III.22})$$

La *variation totale* (Total Variation, TV) de l'image est alors définie comme la somme du module du gradient sur l'ensemble des pixels :

$$\text{TV}(f) = \sum_{h,w} |\nabla f_{h,w}|.$$

La minimisation de la variation totale correspond à la minimisation de la norme  $\ell_1$  du gradient et constitue une pénalisation standard dans le cadre du Compressed Sensing appliqué au CT.



Figure 3.4: Fantôme de Shepp–Logan

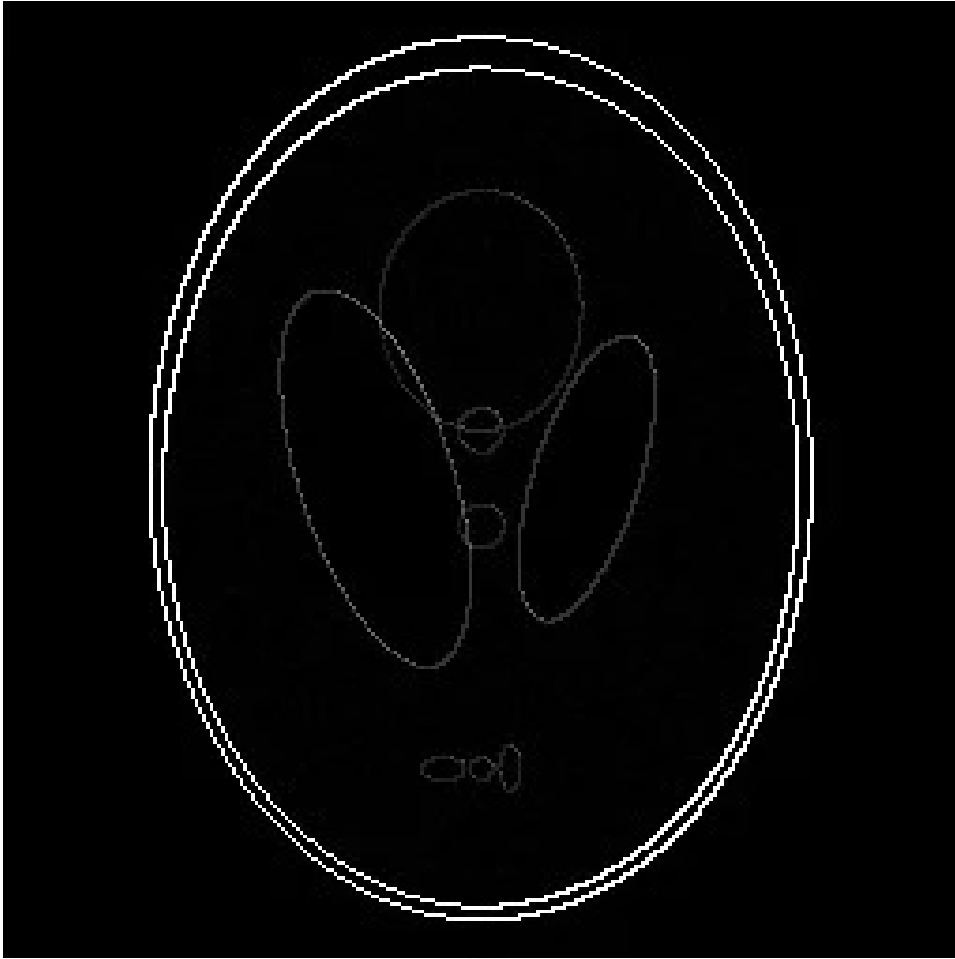


Figure 3.5: Gradient du fantôme de Shepp-Logan

**Proposition III.6.1** (Modèle d’acquisition en tomographie CT). En imagerie CT réaliste, les données de projection à faisceau parallèle, également appelées *sinogramme*, sont modélisées par un système linéaire discret :

$$\mathbf{g} = \Phi \mathbf{f}, \quad (\text{III.23})$$

où  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des mesures de projection, et  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est la matrice système décrivant la géométrie d’acquisition CT.

En introduisant la représentation parcimonieuse de l’image, le modèle devient :

$$\mathbf{g} = \Phi \mathbf{f} = \Phi \Psi \mathbf{x} = \Phi' \mathbf{x}, \quad (\text{III.24})$$

où  $\Phi' = \Phi \Psi$ .

Lorsque le nombre de projections est limité, on a  $m \ll n$ , ce qui rend le système sous-déterminé.

**Proposition III.6.2** (Reconstruction CT par Compressed Sensing). La reconstruction de l’image consiste alors à résoudre le problème d’optimisation suivant :

$$\mathbf{x} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{x}}} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_1 \quad \text{sous la contrainte} \quad \left\| \Phi' \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{g} \right\|_2 \leq \varepsilon, \quad (\text{III.25})$$

où  $\varepsilon$  modélise le bruit présent dans les mesures.

Dans le cas particulier du CT, cette formulation est équivalente à une minimisation de la variation totale de l'image sous contrainte de fidélité aux données.

### III.6.6 Algorithmes de reconstruction itérative en Compressed Sensing

#### Descente de gradient

**Définition III.6.8** (Descente de gradient pour la minimisation de la variation totale). Afin de minimiser la norme  $\ell_1$  du gradient (variation totale), une méthode de descente de gradient est employée. La mise à jour de l'image  $f$  s'effectue selon :

$$f^{\text{suivant}} = f^{\text{courant}} - \alpha \vec{\Delta}^{\text{courant}}, \quad (\text{III.26})$$

où  $\alpha$  est un pas de descente. Le terme  $\vec{\Delta}$  correspond au gradient régularisé de la variation totale.

**Définition III.6.9** (Mise à jour par descente de gradient pour la norme  $\ell_1$  du gradient). Pour minimiser la norme  $\ell_1$  de l'image de gradient, une méthode de descente de gradient est employée. La mise à jour de l'image  $f$  s'effectue itérativement selon :

$$f^{\text{suivant}} = f^{\text{courant}} - \alpha \vec{\Delta}^{\text{courant}}, \quad (\text{III.27})$$

où  $\alpha$  est une constante contrôlant la vitesse de descente. Le terme  $\vec{\Delta}$  est une image dont la valeur de chaque pixel  $(h, w)$  est donnée par la dérivée partielle de la norme  $\ell_1$  du gradient :

$$\begin{aligned} \nu_{h,w} &= \frac{\partial \|\nabla f_{h,w}\|_1}{\partial f_{h,w}} \\ &= \frac{2f_{h,w} - f_{h+1,w} - f_{h,w+1}}{\sqrt{\varepsilon + (f_{h+1,w} - f_{h,w})^2 + (f_{h,w+1} - f_{h,w})^2}} \\ &+ \frac{f_{h,w} - f_{h-1,w}}{\sqrt{\varepsilon + (f_{h,w} - f_{h-1,w})^2 + (f_{h-1,w+1} - f_{h-1,w})^2}} \\ &+ \frac{f_{h,w} - f_{h,w-1}}{\sqrt{\varepsilon + (f_{h+1,w-1} - f_{h,w-1})^2 + (f_{h,w} - f_{h,w-1})^2}} \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

**Définition III.6.10** (Matrice système  $\Phi$  et poids  $\varphi_{i,j}$ ). Dans le cadre discret, le vecteur de données de projection à faisceau parallèle  $\vec{g}$  est modélisé par une somme pondérée sur les pixels traversés par le rayon  $X$  :

$$g_i = \sum_{j=1}^N \varphi_{i,j} \cdot f_j, \quad \text{où } i = 1, 2, \dots, M. \quad (\text{III.29})$$

Le coefficient de pondération  $\varphi_{i,j}$  de la matrice système  $\Phi$  est égal à la longueur d'intersection du  $i$ -ème rayon à travers le  $j$ -ème pixel.

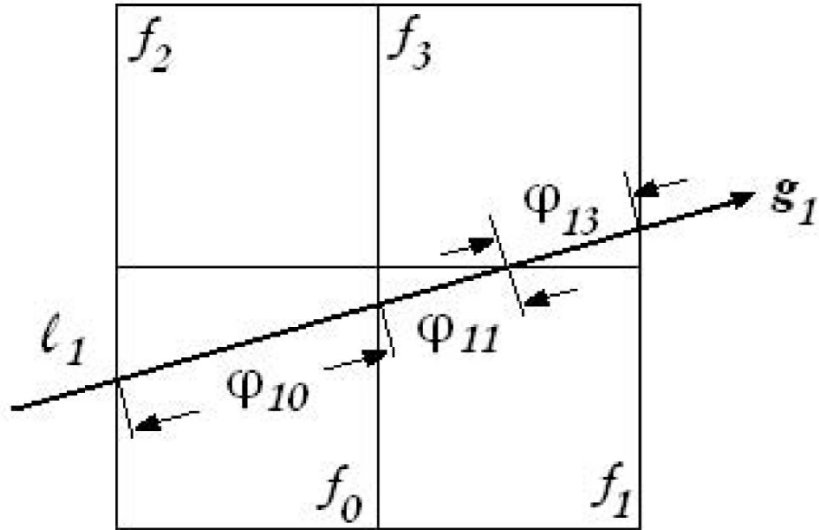


Figure 3.6: Calcul du coefficient de poids  $\varphi_{i,j}$  de la matrice système  $\Phi$  à partir de la longueur d'intersection du  $i$ -ème rayon à travers le  $j$ -ème pixel.

Le calcul direct de chaque  $\varphi_{i,j}$  est coûteux. Pour accélérer la reconstruction, on peut pré-calculer et stocker ces poids, et exploiter les propriétés de symétrie des projections à faisceau parallèle pour réduire le nombre de calculs nécessaires.

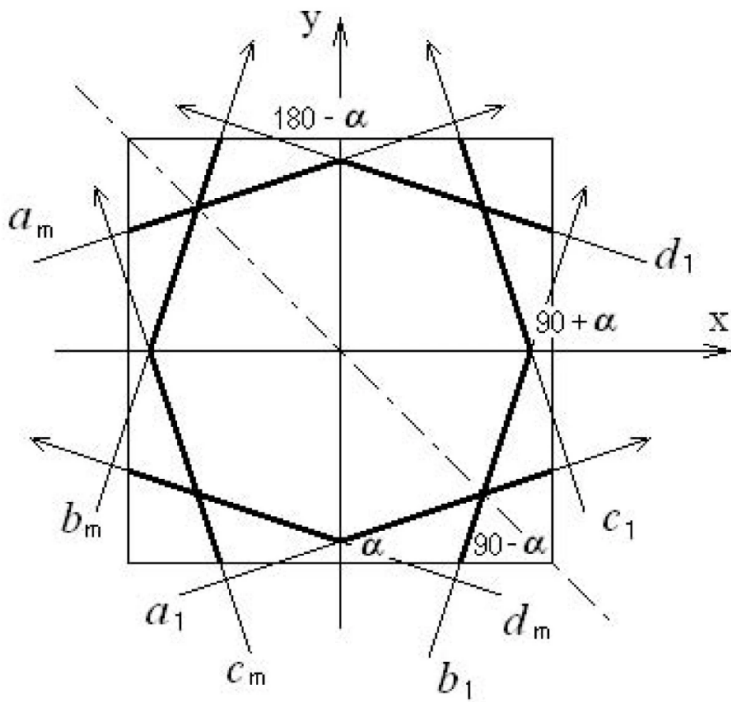


Figure 3.7: Mesures des rayons-**X**  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  pour des angles de rotation  $\alpha$ ,  $90 - \alpha$ ,  $90 + \alpha$  et  $180 - \alpha$ . Les propriétés de symétrie permettent de déduire les poids d'un rayon à partir d'un autre.

## Pseudo-code

---

### Algorithm 1 Méthode de reconstruction hybride (SART + Descente de gradient)

---

**Require:**  $\varphi$  - matrice de projection,  $g$  - données d'acquisition,  $M$  - nombre d'itérations

SART,  $\lambda$  - paramètre de relaxation,  $\alpha$  - pas d'apprentissage

**Ensure:**  $\hat{f}$  - image reconstruite

#### (1) Initialisation de l'image

1:  $f^{(0)} \leftarrow 0$

#### (2) Processus itératif de type SART

2: **for**  $k = 1$  **à**  $M$  **do**

▷ Une période complète d'itération

3:     **for**  $j = 1$  **à**  $N$  **do**

4:          $f_j^{(k)} \leftarrow f_j^{(k-1)} + \lambda \cdot \frac{g_i - \sum_{n=1}^N \varphi_{i,n} f_n^{(k-1)}}{\sum_{n=1}^N \varphi_{i,n}^2} \cdot \varphi_{i,j}$

5:     **end for**

6: **end for**

#### (3) Initialisation pour la descente de gradient

7:  $\hat{f}^{(0)} \leftarrow f^{(M)}$

#### (4) Descente de gradient (contrainte de parcimonie)

8: **for**  $l = 1$  **à** 5 **do**

9:      $\vec{\Delta}_l \leftarrow \left| \hat{f}^{(0)} - f^{(0)} \right| \cdot \frac{\nu_{x,y}}{|\nu_{x,y}|}$

10:      $\hat{f}^{(l)} \leftarrow \hat{f}^{(l-1)} - \alpha \cdot \vec{\Delta}_l$

11: **end for**

#### (5) Initialisation de l'étape itérative suivante

12:  $f^{(0)} \leftarrow \hat{f}^{(5)}$

13: **return**  $\hat{f}^{(5)}$

---

Les étapes (2) à (5) sont répétées jusqu'à ce que la différence entre deux images successives  $f^{(M)}$  soit inférieure à un seuil (e.g., 0.001) ou que le nombre d'itérations dépasse une limite (e.g., 1000). Les paramètres typiques sont  $\lambda = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.0001$ ,  $\alpha = 0.5$ .

## III.6.7 Métriques de performance

**Définition III.6.11** (Métriques de similarité d'image). Soient  $f_r$  et  $f_o$  les vecteurs représentant respectivement l'image reconstruite et l'image originale, composées de  $N$  pixels. On définit les métriques suivantes :

- **Erreur quadratique moyenne (RMSE)** :  $\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (f_{r_i} - f_{o_i})^2}{N}}$
- **Indice universel de qualité (UQI)** :  $\text{UQI} = \frac{2 \text{Cov}\{f_r, f_o\}}{D(f_r) + D(f_o)} \cdot \frac{2 \bar{f}_r \bar{f}_o}{\bar{f}_r^2 + \bar{f}_o^2}$
- **Coefficient de corrélation (CC)** :  $\text{CC} = \frac{2 \text{Cov}\{f_r, f_o\}}{\sqrt{D(f_r) \cdot D(f_o)}}$

avec  $\bar{f}_o = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{o_i}$ ,  $\bar{f}_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{r_i}$ ,  $D(f) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2$ ,  
et  
 $\text{Cov}\{f_r, f_o\} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (f_{r_i} - \bar{f}_r) (f_{o_i} - \bar{f}_o)$ .

# Chapitre IV

## SIMULATION, DÉVELOPPEMENT ET APPLICATIONS INNOVANTES EN RECONSTRUCTION D'IMAGES

### IV.1 Algorithme de rétroprojection filtrée pour la reconstruction d'images en tomodensitométrie

La tomodensitométrie (CT) est une modalité d'imagerie médicale permettant de visualiser les structures internes du corps à partir de mesures d'atténuation des rayons X. La qualité des images reconstruites dépend directement de l'algorithme utilisé pour transformer les projections en image. L'algorithme de rétroprojection filtrée, ou *Filtered Backprojection* (FBP), est l'une des méthodes les plus utilisées dans ce contexte.

Le principe de FBP repose sur deux étapes principales : le filtrage et la rétroprojection. L'étape de filtrage vise à corriger le flou inhérent aux projections en amplifiant les composantes haute fréquence. Elle consiste à appliquer un filtre de rampe aux données de sinogramme obtenues à partir des mesures CT. Ensuite, l'étape de rétroprojection additionne les projections filtrées le long des trajectoires des rayons X pour former l'image reconstruite.

L'implémentation pratique de cet algorithme peut être illustrée par le code Python suivant. Il montre comment générer un sinogramme à partir d'une image, appliquer un filtre en rampe et réaliser la rétroprojection pour obtenir l'image finale.

---

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def generate_sinogram(image, theta):
5     """
6     Générer des données de sinogramme à partir d'une image et d'un tableau d'angles.
7
8     Paramètres :
9     image (ndarray) : image d'entrée
10    theta (ndarray) : tableau d'angles en radians
11
12    Renvoie :
13    sinogram (ndarray) : données de sinogramme
14    """
15    sinogram = np.zeros((len(theta), image.shape[0]))
16    for i, angle in enumerate(theta):
17        rotated_image = np.rot90(image, -int(np.degrees(angle) / 90) % 4)
18        sinogram[i] = np.sum(rotated_image, axis=0)
19    return sinogram
```

```

20
21 def ramp_filter(sinogram):
22     """
23     Appliquer un filtre de rampe aux données de sinogramme.
24
25     Paramètres :
26         sinogram (ndarray) : données du sinogramme
27
28     Renvoie :
29         filtered_sinogram (ndarray) : sinogramme filtré
30     """
31     freq = np.fft.fftfreq(sinogram.shape[1])
32     ramp = np.abs(freq)
33     filtered_sinogram = np.real(np.fft.ifft(np.fft.fft(sinogram) * ramp))
34     return filtered_sinogram
35
36 def backproject(filtered_sinogram, theta, image_shape):
37     """
38     Rétroprojeter les données filtrées pour reconstruire l'image.
39
40     Paramètres :
41         filtered_sinogram (ndarray) : données filtrées
42         theta (ndarray) : tableau d'angles
43         image_shape (tuple) : dimensions de l'image reconstruite
44
45     Renvoie :
46         reconstructed_image (ndarray) : image reconstruite
47     """
48     reconstructed_image = np.zeros(image_shape)
49     for i, angle in enumerate(theta):
50         reconstructed_image += np.rot90(
51             np.tile(filtered_sinogram[i][:, np.newaxis], (1, image_shape[0])),
52             int(np.degrees(angle) / 90) % 4
53         )
54     return reconstructed_image / len(theta)
55
56 def main():
57     # Générer un exemple d'image
58     image = np.zeros((256, 256))
59     image[100:150, 100:150] = 1
60
61     # Générer des données de sinogramme
62     theta = np.linspace(0, np.pi, 180, endpoint=False)
63     sinogram = generate_sinogram(image, theta)
64
65     # Appliquer l'algorithme FBP
66     filtered_sinogram = ramp_filter(sinogram)
67     reconstructed_image = backproject(filtered_sinogram, theta, image.shape)
68
69     # Afficher les résultats
70     plt.figure(figsize=(12, 6))
71     plt.subplot(1, 3, 1)
72     plt.imshow(image, cmap='gray')
73     plt.title("Image originale")
74
75     plt.subplot(1, 3, 2)
76     plt.imshow(sinogram, cmap='gray', aspect='auto')
77     plt.title("Sinogramme")
78
79     plt.subplot(1, 3, 3)
80     plt.imshow(reconstructed_image, cmap='gray')
81     plt.title("Image reconstruite")
82
83     plt.show()
84
85 if __name__ == "__main__":
86     main()

```

---

Ce code illustre de manière pratique le fonctionnement de l'algorithme FBP. Il génère un exemple simple avec un objet carré, simule les mesures CT en produisant un sino-

gramme, applique le filtrage et la rétroprojection, puis affiche l'image originale, le sinogramme et l'image reconstruite. L'algorithme constitue ainsi une méthode efficace et largement utilisée pour la reconstruction d'images tomographiques, combinant rapidité et fidélité visuelle.

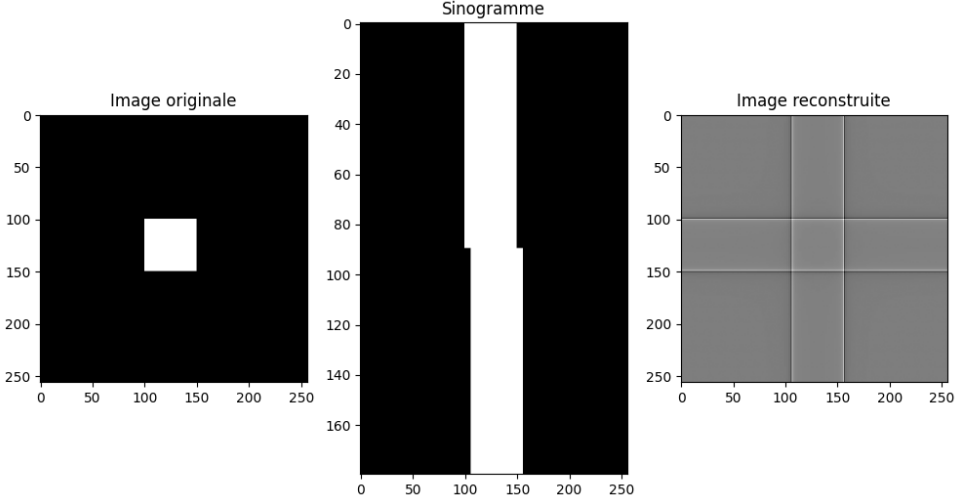


Figure 4.1: Simulation de l'algorithme FBP

## IV.2 Compressive sensing using forward-backward

Le compressed sensing est une technique révolutionnaire en traitement du signal qui permet d'acquérir et de reconstruire un signal en utilisant beaucoup moins de mesures que ce qu'exige le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon. Ceci est possible lorsque le signal est **creux** (sparse) dans une certaine base. Le compressed sensing s'inscrit dans un cadre théorique plus large visant à exploiter les structures intrinsèques des signaux naturels. En pratique, de nombreux signaux d'intérêt (images, signaux biomédicaux, signaux radar ou sismiques) ne sont pas arbitraires, mais présentent une forte redondance lorsqu'ils sont représentés dans une base appropriée (ondelettes, cosinus, dictionnaires appris, etc.). Cette observation remet en question l'approche classique de l'échantillonnage uniforme et ouvre la voie à des stratégies d'acquisition plus efficaces.

L'idée fondamentale du compressed sensing repose sur deux piliers théoriques : la *parcimonie* du signal et l'*incohérence* entre la base de représentation du signal et le système de mesure. Lorsque ces conditions sont satisfaites, il devient possible de reconstruire exactement le signal original à partir d'un nombre de mesures très inférieur à sa dimension ambiante.

Le problème d'optimisation s'écrit :

$$\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \tau \|x\|_1 \quad (\text{IV.1})$$

où :

- $y \in \mathbb{R}^m$  : mesures acquises
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  : matrice de mesure ( $m < n$ )

- $x \in \mathbb{R}^n$  : signal à reconstruire
- $\tau > 0$  : paramètre de régularisation

Le problème d'optimisation présenté à l'équation (IV.1) correspond à une formulation dite *régularisée*, largement utilisée en pratique. Le premier terme impose une cohérence entre les mesures acquises et le signal reconstruit, tandis que le second terme agit comme une contrainte indirecte sur la structure du signal recherché.

Cette formulation peut également être interprétée comme une relaxation convexe du problème initial, qui consisterait à minimiser directement le nombre de composantes non nulles du signal. En remplaçant la pseudo-norme  $\ell_0$  par la norme  $\ell_1$ , on obtient un problème convexe, garantissant l'existence d'une solution globale et permettant l'utilisation d'algorithmes d'optimisation efficaces.

## Interprétation des termes

L'équilibre entre ces deux termes est crucial pour la qualité de la reconstruction. Un poids trop faible accordé à la régularisation peut conduire à une solution bruitée et peu parcimonieuse, tandis qu'un poids excessif peut supprimer des composantes pertinentes du signal. Le choix du paramètre  $\tau$  constitue donc un aspect fondamental du problème, souvent traité par validation croisée ou analyse de sensibilité.

- $\|Ax - y\|_2^2$  : terme de fidélité aux données (L2-norm)
- $\|x\|_1$  : terme de régularisation favorisant la parcimonie (L1-norm)
- $\tau$  : contrôle le compromis entre fidélité et parcimonie

Afin d'illustrer concrètement les principes du compressed sensing, nous considérons dans la suite une simulation numérique. Cette approche permet de valider expérimentalement les résultats théoriques et d'évaluer les performances de reconstruction dans un cadre contrôlé, où le signal original est parfaitement connu.

### IV.2.1 Configuration du problème

#### Paramètres de la simulation

Nous allons reconstruire un signal de dimension  $n = 5000$  avec seulement  $S = 100$  composantes non nulles.

---

```

1  import numpy as np
2
3  # Paramètres du problème
4  n = 5000          # Dimension du signal
5  S = 100           # Nombre de composantes non nulles (sparsity level)
6
7  # Nombre de mesures nécessaire (théorème de Candès et al.)
8  m = int(np.ceil(S * np.log(n)))
9  print(f'Dimension du signal : {n}')
10 print(f'Nombre de mesures : {m}')
11 print(f'Taux de compression : {n/m:.2f}')
12 print(f'Niveau de parcimonie : {S} ({S/n*100:.1f}% de non-zéros)')

```

---

## Génération de la matrice de mesure

La matrice  $A$  doit satisfaire la propriété d'isométrie restreinte (RIP). En pratique, une matrice gaussienne aléatoire convient.

---

```
1 # Pour la reproductibilité des résultats
2 np.random.seed(1)
3
4 # Génération de la matrice de mesure (gaussienne i.i.d.)
5 A = np.random.normal(size=(m, n))
6 print(f'Forme de A : {A.shape}')
7
8 # Calcul de la norme opérateur pour le pas de gradient
9 norm_A = np.linalg.norm(A, ord=2)
10 print(f'Norme opérateur de A : {norm_A:.4f}')
```

---

Le choix d'une matrice de mesure aléatoire de type gaussien est motivé par ses excellentes propriétés théoriques. En effet, ce type de matrice satisfait la propriété d'isométrie restreinte avec une forte probabilité, à condition que le nombre de mesures soit suffisant. Cette propriété garantit que les distances entre signaux parcimonieux sont approximativement préservées après projection.

## Création du signal parcimonieux

Nous générons un signal avec exactement  $S$  composantes non nulles.

---

```
1 # Création d'un signal S-parcimonieux
2 x_true = np.zeros(n)
3
4 # Sélection aléatoire des positions des composantes non nulles
5 indices_non_nuls = np.random.permutation(n)[:S]
6 valeurs_non_nulles = np.random.normal(size=S)
7
8 x_true[indices_non_nuls] = valeurs_non_nulles
9 x_true = x_true / np.linalg.norm(x_true) # Normalisation
10
11 print(f'Nombre de composantes non nulles : {np.sum(x_true != 0)}')
12 print(f'Norme L1 du signal : {np.linalg.norm(x_true, 1):.4f}')
13 print(f'Norme L2 du signal : {np.linalg.norm(x_true, 2):.4f}')
```

---

La normalisation du signal permet de travailler dans un cadre numérique stable et facilite l'interprétation des métriques de reconstruction. Elle permet également de comparer les performances pour différentes configurations sans être influencé par l'échelle du signal.

## Simulation des mesures acquises

---

```
1 # Génération des mesures (acquisition compressée)
2 y = np.dot(A, x_true)
3 print(f'Forme du vecteur de mesures y : {y.shape}')
4
5 # Vérification de la cohérence énergétique
6 energie_signal = np.linalg.norm(x_true)**2
7 energie_mesures = np.linalg.norm(y)**2 / norm_A**2
8 print(f'Énergie du signal : {energie_signal:.4f}')
9 print(f'Énergie estimée à partir des mesures : {energie_mesures:.4f}')
```

---

## IV.2.2 Définition des fonctions objectif

La séparation du problème en plusieurs fonctions objectif est particulièrement adaptée aux méthodes d'optimisation proximales. Elle permet de traiter séparément les termes différentiables et non différentiables, tout en conservant une structure algorithmique simple et efficace.

### Fonction de régularisation L1

La norme L1 favorise la parcimonie de la solution.

---

```
1 from pyunlocbox import functions
2
3 # Paramètre de régularisation
4 tau = 1.0
5
6 # Définition de la fonction L1
7 f1 = functions.norm_l1(lambda_=tau)
8
9 print("Fonction L1 définie avec tau =", tau)
10 print("Évaluation sur un vecteur test :",
11       f1._eval(np.array([1, -2, 0, 3])))
```

---

### Fonction de fidélité L2

Plusieurs méthodes pour définir le terme de fidélité aux données.

#### Méthode 1 : Matrice explicite

---

```
1 # Méthode directe avec matrice A
2 f2 = functions.norm_l2(y=y, A=A)
```

---

#### Méthode 2 : Opérateurs fonctionnels

---

```
1 # Méthode avec opérateurs fonctionnels (utile pour les grandes matrices)
2 f3 = functions.norm_l2(y=y)
3 f3.A = lambda x: np.dot(A, x)      # Opérateur forward
4 f3.At = lambda x: np.dot(A.T, x)   # Opérateur adjoint
```

---

#### Méthode 3 : Définition manuelle

---

```
1 # Définition complètement manuelle
2 f4 = functions.func()
3 f4._eval = lambda x: np.linalg.norm(np.dot(A, x) - y)**2
4 f4._grad = lambda x: 2.0 * np.dot(A.T, np.dot(A, x) - y)
5
6 # Test d'équivalence
7 x_test = np.random.normal(size=n)
8 print(f"f2(x_test) = {f2._eval(x_test):.6f}")
9 print(f"f3(x_test) = {f3._eval(x_test):.6f}")
10 print(f"f4(x_test) = {f4._eval(x_test):.6f}")
```

---

### IV.2.3 Algorithme Forward-Backward

L'algorithme forward-backward appartient à la famille des méthodes de descente proximale. Il est particulièrement bien adapté aux problèmes de grande dimension rencontrés en compressed sensing, car il ne nécessite que des opérations matricielles simples et l'évaluation d'opérateurs proximaux explicites. L'utilisation de l'accélération de Nesterov (FISTA) permet d'améliorer significativement la vitesse de convergence, en particulier pour des problèmes mal conditionnés ou de grande taille.

### IV.2.4 Principe mathématique

L'algorithme forward-backward résout des problèmes de la forme :

$$\min_x f(x) + g(x)$$

où  $f$  est différentiable et  $g$  admet un opérateur proximal simple.

L'itération s'écrit :

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\gamma g}(x_k - \gamma \nabla f(x_k))$$

avec  $\gamma \in ]0, 2/\beta[$  où  $\beta$  est la constante de Lipschitz de  $\nabla f$ .

### IV.2.5 Calcul du pas optimal

---

```
1 # Calcul de la constante de Lipschitz
2 beta = 2.0 * norm_A**2 # Pour f(x) = ||Ax - y||^2
3 print(f"Constante de Lipschitz beta = {beta:.4f}")
4
5 # Pas optimal pour la convergence
6 step = 0.5 / norm_A**2 # gamma = 1/beta
7 print(f"Pas d'itération optimal : {step:.6f}")
```

---

### IV.2.6 Configuration du solveur

---

```
1 from pyunlocbox import solvers
2
3 # Instanciation de l'algorithme forward-backward
4 solver = solvers.forward_backward(
5     step=step,          # Pas d'itération
6     method='FISTA',    # Accélération de Nesterov (optionnel)
7     tol=1e-10,         # Tolérance sur la condition d'arrêt
8 )
9
10 print("Solveur forward-backward configuré")
11 print(f"Méthode : {solver.method}")
12 print(f"Pas : {solver.step}")
```

---

## IV.3 Résolution du problème

### IV.3.1 Lancement de l'optimisation

---

```
1 # Point initial (vecteur nul)
2 x0 = np.zeros(n)
3
4 # Résolution du problème d'optimisation
5 ret = solvers.solve(
```

```

6     [f1, f2],          # Liste des fonctions objectif
7     x0,                # Point initial
8     solver,            # Algorithme d'optimisation
9     rtol=1e-4,         # Tolérance relative
10    maxit=300,          # Nombre maximum d'itérations
11    verbosity='LOW'     # Niveau de verbosité
12 )
13
14 # Affichage des résultats
15 print("\n" + "="*50)
16 print("RÉSULTATS DE L'OPTIMISATION")
17 print("="*50)
18 print(f"Solution trouvée en {ret['iter']} itérations")
19 print(f"Critère d'arrêt : {ret['crit']}")
20 print(f"Valeur objective finale : {ret['objective'][-1].sum():.6f}")
21 print(f"Temps de calcul : {ret['time']:.2f} secondes")

```

---

## Analyse de la solution

```

1  # Récupération de la solution
2  x_recon = ret['sol']
3
4  # Calcul des métriques de reconstruction
5  mse = np.linalg.norm(x_recon - x_true)**2 / n
6  psnr = 10 * np.log10(1.0 / mse) if mse > 0 else float('inf')
7  support_error = np.sum((x_recon != 0) != (x_true != 0))
8
9  print(f"\nANALYSE DE LA RECONSTRUCTION")
10 print(f"Erreur quadratique moyenne (MSE) : {mse:.2e}")
11 print(f"PSNR : {psnr:.2f} dB")
12 print(f"Erreur de support : {support_error} composantes")
13 print(f"Rapport de compression effectif : {n/m:.2f}")

```

---

Les métriques utilisées permettent d'évaluer différents aspects de la reconstruction. L'erreur quadratique moyenne mesure la fidélité globale du signal reconstruit, tandis que l'erreur de support évalue la capacité de l'algorithme à identifier correctement les positions des composantes non nulles. Ces deux critères sont complémentaires et essentiels pour juger la qualité d'une méthode de compressed sensing.

### IV.3.2 Visualisation des résultats

#### Comparaison signal original/reconstruit

```

1  import matplotlib.pyplot as plt
2
3  fig, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(12, 8))
4
5  # Signal original vs reconstruit (vue globale)
6  ax = axes[0, 0]
7  ax.plot(x_true, 'b-', alpha=0.6, linewidth=0.5, label='Original')
8  ax.plot(x_recon, 'r--', alpha=0.8, linewidth=0.5, label='Reconstruit')
9  ax.set_xlabel('Index')
10 ax.set_ylabel('Amplitude')
11 ax.set_title('Signal original vs reconstruit')
12 ax.legend()
13 ax.grid(True, alpha=0.3)
14
15 # Zoom sur les composantes non nulles
16 ax = axes[0, 1]
17 non_zero_indices = np.where(x_true != 0)[0]
18 zoom_indices = non_zero_indices[:min(50, len(non_zero_indices))]
19 ax.stem(zoom_indices, x_true[zoom_indices],

```

```

20         linefmt='b-', markerfmt='bo', basefmt=' ', label='Original')
21 ax.stem(zoom_indices, x_recon[zoom_indices],
22         linefmt='r--', markerfmt='rx', basefmt=' ', label='Reconstruit')
23 ax.set_xlabel('Index')
24 ax.set_ylabel('Amplitude')
25 ax.set_title('Zoom sur les composantes non nulles')
26 ax.legend()
27 ax.grid(True, alpha=0.3)
28
29 # Erreur de reconstruction
30 ax = axes[1, 0]
31 erreur = x_recon - x_true
32 ax.plot(erreur, 'g-', linewidth=0.5)
33 ax.axhline(y=0, color='k', linestyle='--', alpha=0.5)
34 ax.set_xlabel('Index')
35 ax.set_ylabel('Erreur')
36 ax.set_title('Erreur de reconstruction')
37 ax.grid(True, alpha=0.3)
38
39 # Histogramme des amplitudes
40 ax = axes[1, 1]
41 ax.hist(x_true, bins=50, alpha=0.5, label='Original', density=True)
42 ax.hist(x_recon, bins=50, alpha=0.5, label='Reconstruit', density=True)
43 ax.set_xlabel('Amplitude')
44 ax.set_ylabel('Densité')
45 ax.set_title('Distribution des amplitudes')
46 ax.legend()
47 ax.grid(True, alpha=0.3)
48
49 plt.tight_layout()
50 plt.savefig('reconstruction_results.png', dpi=150, bbox_inches='tight')
51 plt.show()

```

---

## Convergence de l'algorithme

```

1 # Analyse de convergence
2 objective = np.array(ret['objective'])
3
4 fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 4))
5
6 # Convergence des objectifs individuels
7 ax = axes[0]
8 ax.semilogy(objective[:, 0], 'b-', label='Terme L1 (parcimonie)')
9 ax.semilogy(objective[:, 1], 'r-', label='Terme L2 (fidélité)')
10 ax.semilogy(np.sum(objective, axis=1), 'k-',
11             linewidth=2, label='Objectif total')
12 ax.set_xlabel('Itération')
13 ax.set_ylabel('Valeur objective')
14 ax.set_title('Convergence des fonctions objectif')
15 ax.legend()
16 ax.grid(True, alpha=0.3)
17
18 # Taux de décroissance
19 ax = axes[1]
20 obj_total = np.sum(objective, axis=1)
21 rate = np.diff(np.log(obj_total)) / np.diff(range(len(obj_total)))
22 ax.plot(rate, 'g-')
23 ax.axhline(y=0, color='k', linestyle='--', alpha=0.5)
24 ax.set_xlabel('Itération')
25 ax.set_ylabel('Taux de décroissance logarithmique')
26 ax.set_title('Taux de convergence')
27 ax.grid(True, alpha=0.3)
28
29 plt.tight_layout()
30 plt.savefig('convergence_analysis.png', dpi=150, bbox_inches='tight')
31 plt.show()

```

---

### IV.3.3 Analyse de sensibilité

#### Influence du paramètre $\tau$

---

```
1 def reconstruire_avec_tau(tau_value):
2     """Fonction helper pour tester différents tau"""
3     f1_tau = fonctions.norm_l1(lambda=tau_value)
4     solver_tau = solvers.forward_backward(step=step)
5
6     ret_tau = solvers.solve(
7         [f1_tau, f2],
8         x0,
9         solver_tau,
10        rtol=1e-4,
11        maxit=200,
12        verbosity='NONE'
13    )
14
15    x_tau = ret_tau['sol']
16    mse_tau = np.linalg.norm(x_tau - x_true)**2 / n
17    sparsity_tau = np.sum(np.abs(x_tau) > 1e-4) / n
18
19    return mse_tau, sparsity_tau, ret_tau['iter']
20
21 # Test de différentes valeurs de tau
22 tau_values = np.logspace(-3, 2, 20)
23 results = []
24
25 print("Analyse de sensibilité au paramètre tau:")
26 print("-" * 50)
27 print(f"{'tau':>10} {'MSE':>12} {'Sparsity':>12} {'Iterations':>12}")
28 print("-" * 50)
29
30 for tau in tau_values:
31     mse_val, sparsity_val, iterations = reconstruire_avec_tau(tau)
32     results.append((tau, mse_val, sparsity_val, iterations))
33     print(f"{'tau':10.2e} {'mse_val':12.2e} {'sparsity_val':12.4f} {'iterations':12d}")
34
35 results = np.array(results)
36
37 # Visualisation
38 fig, axes = plt.subplots(1, 3, figsize=(15, 4))
39
40 ax = axes[0]
41 ax.loglog(results[:, 0], results[:, 1], 'bo-')
42 ax.set_xlabel('$\\tau$')
43 ax.set_ylabel('MSE')
44 ax.set_title('Erreur vs $\\tau$')
45 ax.grid(True, alpha=0.3)
46
47 ax = axes[1]
48 ax.semilogx(results[:, 0], results[:, 2], 'ro-')
49 ax.set_xlabel('$\\tau$')
50 ax.set_ylabel('Taux de parcimonie')
51 ax.set_title('Parcimonie vs $\\tau$')
52 ax.grid(True, alpha=0.3)
53
54 ax = axes[2]
55 ax.semilogx(results[:, 0], results[:, 3], 'go-')
56 ax.set_xlabel('$\\tau$')
57 ax.set_ylabel('Itérations')
58 ax.set_title('Convergence vs $\\tau$')
59 ax.grid(True, alpha=0.3)
60
61 plt.tight_layout()
62 plt.savefig('sensitivity_analysis.png', dpi=150, bbox_inches='tight')
63 plt.show()
```

---

Les résultats obtenus confirment l'efficacité du compressed sensing pour la reconstruction

de signaux parcimonieux à partir d'un nombre réduit de mesures. L'algorithme forward-backward, combiné à une régularisation  $\ell_1$ , offre un compromis pertinent entre précision de reconstruction, parcimonie et complexité algorithmique. Cette étude peut être étendue à des signaux bruités, à d'autres types de matrices de mesure ou encore à des régularisations plus sophistiquées, ouvrant ainsi la voie à de nombreuses applications pratiques.

# Bibliographie

- [1] Wei Zou, Jiajun Wang, David Dagan Feng, *Image reconstruction of fluorescent molecular tomography based on the tree structured Schur complement decomposition*
- [2] RANDRIANARISON N.Tsirilala, RANDRIAMITANTSOA P. Auguste, RAMAFI-ARISON H. Malalatiana, *Performance of K-SVD algorithm in digital Optical Coherence Tomography*
- [3] Linwei Fan, Fan Zhang, Hui Fan, and Caiming Zhang, *Brief review of image denoising techniques*
- [4] Michael S. Hansen, and Peter Kellman, *Image reconstruction: an overview from clinicians*
- [5] Joshua Trzasko\*, Member, IEEE, and Armando Manduca, Member, IEEE, *Highly Undersampled Magnetic Resonance Image Reconstruction via Homotopic  $\ell_0$ -Minimization*
- [6] Helmholtz Imaging, Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY, Notkestr. 85, 22607 Hamburg, Germany, *ntroduction to Regularization and Learning Methods for Inverse Problems*
- [7] Bunyamin Yildiz \*, Murat Subasi, Ali Sever, *On a regularization problem*
- [8] J. P. Bregman, *Bregman Iteration for Correspondence Problems*