Proposition 0.1. *On a :*

$$1+\sum_{n\geq 1}|S_n(123)|t^n = \cfrac{1}{1-t-\cfrac{t^2}{1-2t-\cfrac{t^2}{\ddots}}}$$

<u>Preuve</u> :
Soit $\sigma \in S_n(123)$. Comme $S_n(123) \subset S_n$, alors
$\overline{HL}(n) = \{(c,p) \in HL(n) : \exists x \in S_n(123), \psi_{F.V}(x) = (c,p)\}$. Donc $|\overline{HL}(n)| = |S_n(123)|$ car $\psi_{F.V}$ est une bijection.
Posons $\sigma = M_1 \cdots M_l$ la décomposition en mots croissant maximaux de σ. $\exists!(c,p) \in \overline{HL}(n)$ tel que $\psi_{F.V}(\sigma) = (c,p)$. On a :

. $\forall i \leq l$, $|M_i| \leq 2$

. Soit i et j deux entiers tel que $i < j \leq l$ et $|M_i| = |M_j| = 2$. Alors

$$\begin{cases} D(M_i) > D(M_j) & \text{et} & P(M_i) > P(M_j) \\ & \text{Et} & \\ P(M_i) < D(M_j) & \text{ou} & P(M_i) > D(M_j) \end{cases}$$

Soit i une lettre de σ. i est une :

. une double descente de σ, alors p_i n'a que deux valeurs possible ; soit 0, soit γ_{i-1}

. un creux de σ, alors $p_i = 0$

. un pic de σ, alors $p_i = \gamma_{i-1}$

Notons que σ n'a pas de double montée.
On pose : $S_n(123)(c) = \{\sigma \in S_n(123) : \psi_{F.V}(\sigma) = (c,p)\}$. On a : $S_n(123)(c) \subset S_n(123)$. Comme c fixe, alors $|S_n(123)(c)|$ est égal au nombre de p possible associé à c.
D'où $|S_n(123)(c)| = \prod_{c_i=m} m_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=d} d_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=b} b_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=r} r_{\gamma_{i-1}} = w(c)$
Si c contient un palier rouge, alors $|S_n(123)(c)| = 0$.
On a :

. $m_{\gamma_{i-1}} = m_{\gamma_{i-1}} = 1$

. $b_{\gamma_{i-1}} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \gamma_{i-1} = 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$

De plus, $\bigcup_{c\in\Gamma_n} S_n(123)(c) = S_n(123)$, alors
$\sum_{c\in\Gamma_n} |S_n(123)(c)| = |S_n(123)| = \sum_{c\in\Gamma_n} w(c)$

Ainsi, $1+\sum_{n\geq 1}|S_n(123)|t^n = 1+\sum_{n\geq 1}(\sum_{c\in\Gamma_n} w(c))t^n = \cfrac{1}{1-t-\cfrac{t^2}{1-2t-\cfrac{t^2}{\ddots}}}$

Corollaire 0.1. $|S_n(123)| = |S_n(321)| = C_n$