# Table des matières

# Chapitre 1

# Préliminaire

## 1.1 Nombres de Catalan

Les nombres de Catalan sont les nombres $C_n (n \geq 0)$ qui vérifient la relation suivante :

$$\begin{cases} C_0 &= 1 \\ C_n &= \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} (n \geq 1) \end{cases}$$

**Proposition 1.1.** Posons $C(t) = \sum\limits_{n \geq 0} C_n t^n$. Nous avons $C(t) = \dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$

<u>Démonstration</u> : En effet,

$$\begin{aligned} C(t) &= 1 + \sum_{n \geq 1} C_n t^n = 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} = 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{j+i=n-1} C_i C_j t^n \\ &= 1 + \sum_{n \geq 0} t \sum_{j+i=n} (C_i t^i)(C_j t^j) = 1 + t \left[ \left( \textstyle\sum_{i \geq 0} C_i t^i \right) \left( \textstyle\sum_{j \geq 0} C_j t^j \right) \right] \\ &= 1 + tC^2(t) \end{aligned}$$

$C(t)$ est solution de l'équation $tx^2 - x + 1 = 0$. On a $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$ ou $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1-4t}}{2t}$. Or $C_0 = 1$ est le premier terme de $C(t)$ et au voisinage de 0 $x_2$ n'a pas de limite. Ainsi $C(t) = \dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$

## 1.2 Groupe symétrique

On note par $S_n$ l'ensemble des permutations de [n]. Soit $\pi \in S_n$ et $1 \leq i \leq n$. On dit que i est un point fixe de $\pi$ si $\pi_i = i$ où on note $\pi(j) = \pi_j, \forall j \leq n$.

Soit $x = x_1 x_2 \cdots x_m$ une permutation qui n'est pas nécéssairement un élément de $S_m$. On définit $st(x) = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m$ par :
en remplaçant la plus petite lettre de x par 1, la 2[e] plus petit lettre par 2 et ainsi de suite. Donc la plus grande lettre par m. $\pi$ contient le motif $\alpha$ s'il existe $i_1, i_2, \cdots, i_m$ tel que $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ et $st(\pi_{i_1} \pi_{i_2} \cdots \pi_{i_m}) = \alpha$.
Exemple : Soit $\pi = 146253$. $\pi$ contient le motif 321 car $st(653) = 321$.

On note $S_n(\alpha)$ l'ensemble de toutes les permutations $\pi \in S_n$ qui ne contiennent pas le motif $\alpha$. Si $\pi \in S_n(\alpha)$, on dit que $\pi$ évite $\alpha$. On note par $s_n(\alpha)$ le cardinal de $S_n(\alpha)$. Le sous-ensemble de $S_n(\alpha)$ dont chaque élément a exactement k points fixes est noté par $S_n^k(\alpha)$.
Pour $k = 0$, on note par $D_n(\alpha)$ l'ensemble $S_n^0(\alpha)$ et par $d_n(\alpha)$ le nombre $s_n^0(\alpha)$. $D_n(\alpha)$ est l'ensemble des dérangements sans le motif $\alpha$.

## 1.3 Fractions continues de Stieltjes

**Définition 1.1.** Une S-fraction est une expression de la forme

$$S(t) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{c_1 t}{1 - \cfrac{c_2 t}{1 - \cfrac{c_3 t}{\ddots}}}}$$

où t est une variable formelle et $(c_i)$ sont des éléments d'un anneau commutatif ou des variables formelles

Pour simplifier on écrit $S(t) = \frac{1}{1-}\frac{c_1 t}{1-}\frac{c_2 t}{1-}\cdots\frac{c_n t}{1-}\frac{c_{n+1} t}{1-}\cdots$

**Proposition 1.2.** D'après lemme 2.11 dans [1], on a la J-fraction (ou fraction continue de Jacobi) suivante :

$$\begin{aligned} J(t) &= \cfrac{1}{1 - c_1 t - \cfrac{c_1 c_2 t^2}{1 - (c_2 + c_3)t - \cfrac{c_3 c_4 t^2}{1 - (c_4 + c_5)t - \cfrac{c_5 c_6 t^2}{\ddots}}}} \\ &= 1 + \cfrac{c_1 t}{1 - (c_1 + c_2)t - \cfrac{c_2 c_3 t^2}{1 - (c_3 + c_4)t - \cfrac{c_4 c_5 t^2}{1 - (c_5 + c_6)t - \cfrac{c_6 c_7 t^2}{\ddots}}}} \\ &= S(t) \end{aligned}$$

**Proposition 1.3.** *On a :* $C(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} C_n t^n = \cfrac{1}{1 - t - \cfrac{t^2}{1 - 2t - \cfrac{t^2}{\ddots}}}$

<u>Démonstration</u> :

$$C(t) = \frac{C(t)}{1} = \frac{C(t)}{C(t) - tC^2(t)} = \frac{1}{1 - tC(t)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{t}{1 - tC(t)}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{t}{1 - \cfrac{t}{\ddots}}}$$

En utilisant la Proposition 1.2. et la Définition 1.1. on a le resultat. ■

## 1.4 Chemin de Motzkin

**Définition 1.2.** Un chemin est une suite de points $(A_i)_{0\leq i\leq n}$ dans $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$ tel que si $(a_i, b_i)$ sont les coordonnées des $A_i$, alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{i+1}-a_i & = & 1 \\ |b_{i+1}-b_i| & \leq & 1 \\ a_i, b_i & \in & \mathbb{N} \end{array}\right.$$

pour tout i

Si $b_i - b_{i-1} = 1$ (resp 0,-1), on dit que le i^-ième^ pas est une montée (resp un palier, une descente).
$A_0$ est l'origine du chemin, $A_n$ est l'extrémité du chemin et $b_{i-1}$ est le niveau du i-ième pas. Un chemin est entièrement déterminé par la donnée de la suite $b_0, b_1, \cdots, b_n$ et son origine $A_0$. Dans toute la suite, on pose $a_0 = 0$ et $a_n = n$.
On note, $\Gamma(n)_{i\longrightarrow j}$ l'ensemble des chemins allant de $A_0$vers $A_n$ en n pas où
$A_0 = (0, i)$ et $A_n = (n, j)$.

**Définition 1.3.** $\Gamma(n)_{0\longrightarrow 0}$ est l'ensemble des chemin de Motzkin. Un élément de $\Gamma(n)_{0\longrightarrow 0}$ sera identifié à un mot $c = c_1\cdots c_n$ où $c_i \in \{m, p, d\}$ tel que

$$c_i = \left\{\begin{array}{l} m \text{ si le i}^{\text{ième}} \text{ pas est une montée} \\ p \text{ si le i}^{\text{ième}} \text{ pas est un palier} \\ d \text{ si le i}^{\text{ième}} \text{ pas est une descente} \end{array}\right.$$

$\forall c \in \Gamma(n)_{0\longrightarrow 0}, \forall i \in [n]$, on a : $|c_1\cdots c_i|_m \geq |c_1\cdots c_i|_d$ et $|c|_m = |c|_d$ ($|c|_x$ désigne le nombre de lettres de c qui est x)

**Proposition 1.4.** Soit $c \in \Gamma(n)_{0\longrightarrow 0}$ et $\gamma_{i-1}$ le niveau du i-ième pas. On a :

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_0 = 0 \\ \forall i \geq 2, \gamma_{i-1} = |c_1\cdots c_{i-1}|_m - |c_1\cdots c_{i-1}|_d \end{array}\right.$$

Démonstration :
$\gamma_0 = b_0 = 0$.
Soit $i \geq 2$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \gamma_{i-1} & = & (\gamma_{i-1}-\gamma_{i-2}) + (\gamma_{i-2}-\gamma_{i-3}) + \cdots + (\gamma_1-\gamma_0) \\ & = & \sum_{j=1}^{i-1}(\gamma_j-\gamma_{j-1}) \\ & = & \sum_{\substack{j\leq i-1 \\ c_j=m}}(\gamma_j-\gamma_{j-1}) + \sum_{\substack{j\leq i-1 \\ c_j=d}}(\gamma_j-\gamma_{j-1}) + \sum_{\substack{j\leq i-1 \\ c_j=p}}(\gamma_j-\gamma_{j-1}) \\ & = & |c_1\cdots c_{i-1}|_m - |c_1\cdots c_{i-1}|_d \end{array}$$

## 1.5 Chemin De Dyck

**Définition 1.4.** Un chemin de Dyck de longueur 2n est un chemin de Motzkin allant de (0,0) vers (2n,0) sans palier.

Un chemin de Dyck de longueur 2n peut donc être considéré comme un mot $x = x_1 \cdots x_{2n} \in \{m,d\}^*$, où $\{m,d\}^*$ est l'ensemble des mots formés par m et d , tels que $|x|_d = |x|_m$ et $\forall i \leq 2n$, on a : $|x_1 \cdots x_i|_m \geq |x_1 \cdots x_i|_d$.
Notons Dyck(n) l'ensemble des chemins de Dyck de longueur 2n.

**Proposition 1.5.** On a |Dyck(n)|= $C_n$ où $C_n$ est le n-ième nombre de Catalan.

Démonstration :
Notons $\text{Dyck}_i(n) = \{x \in \text{Dyck(n)}; |x_1 \cdots x_{2i}|_m = |x_1 \cdots x_{2i}|_d \text{ et } \forall j < 2i, |x_1 \cdots x_{2j}|_m > |x_1 \cdots x_{2j}|_d\}$.
Considérons l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : \text{Dyck}_i(n) & \longrightarrow & \text{Dyck}(i-1)\text{xDyck}(n-i) \\ x & \longmapsto & (x', x'') \end{array}$$

où $x' = x_2 \cdots x_{2i-1}$ et $x'' = x_{2i+1} \cdots x_n$ avec la convention |Dyck(0)|=1 où Dyck(0) est l'ensemble formé par le mot vide.
Montrons que f est bien définie

Si $i \neq 1$, alors $x_2 = m$ (par construction i est le plus petit entier vérifiant $|x_1 \cdots x_{2i}|_m = |x_1 \cdots x_{2i}|_d$)
Dans ce cas : $(2 \leq j \leq 2i-1)$

$$\begin{array}{rcl} |x_2 \cdots x_j|_m & = & |x_1 \cdots x_j|_m - 1 \\ & > & |x_1 \cdots x_j|_d - 1 = |x_2 \cdots x_j|_d - 1 \end{array}$$

Par suite $|x_2 \cdots x_j|_m \geq |x_2 \cdots x_j|_d$ et

$$\begin{array}{rcl} |x'|_m & = & |x_2 \cdots x_{2i-1}|_m = |x_1 \cdots x_{2i}|_m - 1 = |x_1 \cdots x_{2i}|_d - 1 = |x_1 \cdots x_{2i-1}|_d \\ & = & |x_2 \cdots x_{2i-1}|_d = |x''|_d \end{array}$$

De même si $i \neq n$ alors $x_{2i+1} = m$ et $x'' \in Dyck(n-i)$

$$\begin{array}{rcl} |x_{2i+1} \cdots x_j|_m & = & |x_1 \cdots x_{2i} \cdots x_j|_m - i \\ & \geq & |x_1 \cdots x_{2i} \cdots x_j|_d - i = |x_{2i+1} \cdots x_j|_d + i - i \end{array}$$

D'autre part, f est bijective car $x = mx'dx''$
Par conséquent, comme $\{\text{Dyck}_i(n)\}_{1 \leq i \leq n}$ est une partition de Dyck(n), nous avons :

$$|\text{Dyck(n)}| \;=\; \sum_{i=1}^{n} |\text{Dyck}(i-1)||\text{Dyck}(n-i)|$$

or $|\text{Dyck}(0)| = 1$, comme $C_n$ et $|\text{Dyck}(n)|$ ont même relation de récurrence, alors $C_n = |\text{Dyck}(n)|$. ■

## 1.6 Chemins valués et permutations

Soit $\sigma \in S_n$ et $1 \leq i \leq n$

**Définition 1.5.** On dit que $\sigma(i)$ est :

. un creux de $\sigma$ si $\sigma(i-1) > \sigma(i) < \sigma(i+1)$

. un pic de $\sigma$ si $\sigma(i-1) < \sigma(i) > \sigma(i+1)$

. une double montée de $\sigma$ si $\sigma(i-1) < \sigma(i) < \sigma(i+1)$

. une double descente de $\sigma$ si $\sigma(i-1) > \sigma(i) > \sigma(i+1)$

On convient que $\sigma(0) = n+1$ et $\sigma(n+1) = 0$.
Nous allons maintenant voir un chemin de Motzkin qui a deux sortes de palier

**Définition 1.6.** Un 2-chemin de Motzkin en n pas est un mot $c = c_1c_2\cdots c_n \in \{m, d, b, r\}^*$ où m (resp d, b, r) dénote une montée (resp descente, palier bleu, palier rouge) tel que :

. si $c_i = r$, alors $\gamma_{i-1} \neq 0$

. $|c|_m = |c|_d$

. $\forall i \leq n$, $|c_1\cdots c_i|_m \geq |c_1\cdots c_i|_d$

On note par $\Gamma_n$ l'ensemble de 2-chemin de Motzkin

**Définition 1.7.** Un 2-chemin de Motzkin valué est un couple (c,p) où $c = c_1c_2\cdots c_n$ et $p = p_1p_2\cdots p_n$ tel que :

. $c \in \Gamma_n$

. $0 \leq p_i \leq \gamma_{i-1}$, si $c_i = m$ ou $c_i = b$

. $0 \leq p_i \leq \gamma_{i-1} - 1$, si $c_i = d$ ou $c_i = r$

On note par $HL(n)$ l'ensemble de 2-chemin de Motzkin valué. On pose $\Gamma_{0\to i}^{(n)}$ l'ensemble de 2-chemin en n pas qui n'est pas nécéssairement de Motzkin allant de (0,0) vers (n,i) et verifiant la condition de la Définition 1.6.

Françon et Viennot ont montré la proposition suivante.

**Proposition 1.6.** *Il existe une bijection $\psi_{FV} : S_n \longrightarrow HL(n), \sigma \longmapsto (c,p)$ vérifiant :*
*(i) i creux de $\sigma$ $\iff$ $c_i = m$*
*(ii) i pic de $\sigma$ $\iff$ $c_i = d$*
*(iii) i double descente de $\sigma$ $\iff$ $c_i = b$*
*(iv) i double montée de $\sigma$ $\iff$ $c_i = r$*

Nous allons besoin de la construction de $\psi_{FV}$.
Démonstration :
Soit $\sigma \in S_n$. Nous allons construire l'image de $\sigma$ par $\psi_{FV}$. Soit $\sigma = M_1\cdots M_u$ la décomposition en mots croissants maximaux de $\sigma$ c'est à dire $\forall j < u, D(M_j) > P(M_{j+1})$ où $D(M_k)$ et $P(M_k)$ désigne la première et la dernière lettre de $M_k$ $(1 \leq k \leq u)$.
Soit $j \leq u$ et i une lettre de $M_j$. On a :

| | | |
|---|---|---|
| . i creux de $\sigma$ | $\iff$ | $\lvert M_j\rvert > 1$ et $i = P(M_j)$ |
| . i pic de $\sigma$ | $\iff$ | $\lvert M_j\rvert > 1$ et $i = D(M_j)$ |
| . i double descente de $\sigma$ | $\iff$ | $\lvert M_j\rvert = 1$ |
| . i double montée de $\sigma$ | $\iff$ | $\lvert M_j\rvert > 1$ et $P(M_j) < i < D(M_j)$ |

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|c_1\cdots c_i|_m - |c_1\cdots c_i|_d &= |\{l\le i; l \text{ est un creux de } \sigma\}| - |\{l\le i; l \text{ est un pic de } \sigma\}| \\
&= |\{M_r; |M_r|>1, P(M_r)\le P(M_j)=i\}| - |\{M_r; |M_r|>1, D(M_r)\le i\}| \\
&= |\{M_r; |M_r|>1, P(M_r)\le i < D(M_r)\}| \\
&\quad + |\{M_r; |M_r|>1, P(M_r) < D(M_r)\le i\}| \\
&\quad - |\{M_r; |M_r|>1, D(M_r)\le i\}| \\
&= |\{M_r; |M_r|>1, P(M_r)\le i < D(M_r)\}| \ge 0
\end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.3, on a $\gamma_{i-1} = |\{M_r; |M_r|>1, P(M_r) < i \le D(M_r)\}|$

Puis on définit $p_i$ comme suit :

. Si i est un creux ou une double descente de $\sigma$, $p_i = |\{M_r; r<j \text{ et } P(M_r) < i < D(M_r)\}|$
Dans ce cas $0\le p_i\le \gamma_{i-1}$

. Si est i un pic ou une double montée de $\sigma$,$p_i = |\{M_r; r<j, \text{ et } P(M_r) < i < D(M_r)\}|$
Dans ce cas $0\le p_i < \gamma_{i-1}$

D'où $(c,p)\in HL(n)$. Pour montrer que $\psi_{F.V}$ est bijective, on va construire sa réciproque. Soit $(c,p)\in HL(n)$ et $\sigma$ un antécédent de (c, p) (s'il existe).

$\sigma = M_1\cdots M_u$ est la décomposition en mots croissant maximaux de $\sigma$. On a :

$|\{M_r; |M_r|\ge 2\}| = |c|_m$

$|\{M_r; |M_r| = 1\}| = |c|_b$

Donc, $u = |c|_m + |c|_b$. Pour construire $\sigma$, on procède comme suit :

$Q = \{i_1,\cdots,i_p\}$ (resp $P = \{j_1,\cdots,j_p\}, Dd = \{s_1,\cdots,s_{u-p}\}, Dm = \{t_1,\cdots,t_{n-p-u}\}$) l'ensemble des creux de $\sigma$ (resp pic, doubles descentes, doubles montées de $\sigma$). Soit $QP = \{k_1,\cdots,k_{2p}\}$ le réarrangement croissant des éléments de $Q$ et $P$ c'est à dire $k_{2i+1} < k_{2i+2}$ pour $0\le i\le p-1$ et $k_{2i} < k_{2i+1}$ pour $1\le i\le p-1$.

On a $k_1$ est un creux de $\sigma$. On place d'abord les éléments de $QP$ par ordre croissant.

Posons $\sigma^0 = \star$

. $c_{k_1} = m$ et $p_{k1} = 0$, on place $k_1\star$ après la $(p_{k_1}+1)^{\text{è}}$ $\star$
On pose $\sigma^1 = \star k_1\star$
Ensuite, on place $k_2$ selon la condition $c_{k_2} = m$ ou $c_{k_2} = d$

. $c_{k_2} = m$ et $p_{k_2} = 0$ (resp $p_{k_2} = 1$), alors on place $k_2\star$ après le $(p_{k_2}+1)^{\text{è}}$ $\star$
On pose $\sigma^2 = \star k_2\star k_1\star$ (resp $\sigma^2 = \star k_1\star k_2\star$ )

. $c_{k_2} = d$ et $p_{k_2} = 0$, on remplace par $k_2$ le $(p_{k_2}+2)^{\text{è}}$ $\star$
On pose $\sigma^2 = \star k_1 k_2$

Supposons $k_1,\cdots,k_{l-1}$ sont placés. Et on va retrouver la place de $k_l$. Si $c_{k_l} = m$, on place $k_l\star$ après le $(p_{k_l}+1)^{\text{è}}$ $\star$

Si $c_{k_l} = d$, on remplace par $k_l$ le $(p_{k_l}+2)^{\text{è}}$ $\star$

A la fin, on obtient $\sigma^{2p} = \star M_1\cdots M_p$. La présence d'un seul $\star$ est dû au fait que $\sigma^0 = \star$ et $|Q| = |P|$. Supposons que les éléments de P et Q sont tous placés. Soit i tel que $c_i = r$ ou $c_i = b$. Si $c_i = r$, on place i dans $M_j$ où $M_j$ est le $(p_i+1)^{\text{è}}$ mots qui vérifie $P(M_j) < i < D(M_j)$ si un tel mots

Si $c_i = b$, on place i entre $M_q$ et $M_{q+1}$ tel que $D(M_q) > i > P(M_{q+1})$ et $|\{j\le q; D(M_j) > i > P(M_j)\}| = p_i$. ■

**Définition 1.8.** Soit $\sigma\in S_n$ et $i\in[n]$, $\sigma = \sigma_1\cdots\sigma_n$.

On dit que $\sigma_i$ est un saillant inférieur gauche ($sig$) (resp saillant inférieur droite (sid) ) de $\sigma$ si

$\forall j < i$, $\sigma_j > \sigma_i$ (resp $\forall j > i$ $\sigma_j > \sigma_i$).
On dit que $\sigma_i$ est un saillant supérieur gauche (*ssg*) (resp saillant supérieur droite (ssd) ) de $\sigma$ si $\forall j < i$, $\sigma_j < \sigma_i$ (resp $\forall j > i$, $\sigma_j < \sigma_i$)

**Définition 1.9.** On dit que i est :

. un creux de cycle de $\sigma$ si $\sigma^{-1}(i) > i < \sigma(i)$
. un pic de cycle de $\sigma$ si $\sigma^{-1}(i) < i > \sigma(i)$
. une double montée de cycle de $\sigma$ si $\sigma^{-1}(i) < i < \sigma(i)$
. une double descente de cycle de $\sigma$ si $\sigma^{-1}(i) \geq i \geq \sigma(i)$

**Proposition 1.7.** *Il existe une bijection $F : S_n \longrightarrow S_n, \sigma \longmapsto \tau$ tel que $\forall i \in [n]$*

*(i) i creux de cycle de $\sigma \Longleftrightarrow$ i creux de $\tau$*
*(ii) i pic de cycle de $\sigma \Longleftrightarrow$ i pic de $\tau$*
*(iii) i double descente de cycle de $\sigma \Longleftrightarrow$ i double descente de $\tau$*
*(iv) i double montée de cycle de $\sigma \Longleftrightarrow$ i double montée de $\tau$*

Démonstration :
Soit $\sigma \in S_n$ et $(c_1 \cdots c_k)$ sa décomposition en cycle.
Premièrement, on ordonne les lettres de chaque cycle de $\sigma$ tel que la plus grande lettre se trouve en dernière position.
Deuxièment, on ordonne les cycles par ordre décroissant de la plus grande lettre. Posons dans ce cas $\sigma = (a_1 \cdots a_{i_1})(a_{i_1+1} \cdots a_{i_2}) \cdots (a_{i_{k-1}+1} \cdots a_{i_k})$. Alors $a_{i_1} > a_{i_2} > \cdots > a_{i_k}$. Soit $\tau$ une permutation obtenue à partir de $\sigma$ en supprimant les parenthèses. Alors, $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}$ sont ssd de $\tau$. Ainsi $\tau \in S_n$.
Maintenant, nous allons construire la bijection réciproque de F.
Soit $\tau = y_1 \cdots y_{i_1} y_{i_1+1} \cdots y_{i_2} \cdots y_{i_k}$ où $y_{i_1}, y_{i_2} \cdots, y_{i_k}$ sont les ssd $\tau$.
Posons $\sigma = (y_1 \cdots y_{i_1})(y_{i_1+1} \cdots y_{i_2}) \cdots (y_{i_{k-1}+1} \cdots y_{i_k})$ obtenue à partir de $\tau$ tel que l'expression obtenue est une décomposition en cycle. Enfin, nous allons montrer que les propriétés (i),(ii),(iii) et (iv) sont encore vérifiées. Soit $i \in [n]$ et $c_{i_l}$ est le cycle dans $\sigma$ qui le contient.
i est :

. un creux de $\sigma \iff \sigma^{-1}(i) > i < \sigma(i)$.
Si i est la première lettre de $c_{i_l}$, alors, on a : $y_{i_{l-1}} > i < \sigma(i)$ ou encore $y_{i_{l-1}} > i < y_{i_{l-1}+2}$
Si i est différent de la première lettre, alors, il existe j tel que
$\tau(j) = i, \tau(j-1) = \sigma^{-1}(i)$ et $\tau(j+1) = \sigma(i)$.
Ainsi, i est un creux de $\tau$

. un pic de cycle de $\sigma \iff \sigma^{-1}(i) < i > \sigma(i)$
Si i est la plus grande lettre de $c_{i_l}$, alors, on a :

$$\left\{\begin{array}{lll} i_l = n & et & y_{n-1} < i \\ & ou & \\ i_l \neq n & et & y_{i_l-1} < i > y_{i_l+1} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} \tau(n) = i & et & \tau(n-1) < i \\ & ou & \\ i_l \neq n & et & \tau(i_l - 1) < i > \tau(i_l + 1) \end{array}\right.$$

Si i est différent de la plus grande lettre, alors il existe j tel que
$\tau(j) = i, \tau(j-1) = \sigma^{-1}(i)$ et $\tau(j+1) = \sigma(i)$
Ainsi, i est un pic de $\tau$ et on convient que $\tau(n+1) = 0$

. une double montée de cycle de $\sigma \iff \sigma^{-1}(i) < i < \sigma(i)$
Il existe j tel que $\tau(j) = i, \tau(j-1) = \sigma^{-1}(i)$ et $\tau(j+1) = \sigma(i)$

. une double descente de cycle de $\sigma \iff \sigma^{-1}(i) \geq i \geq \sigma(i)$
Si i est la première lettre de $c_{i_l}$, alors on a : soit i est un ssd tel que $y_{i_{l-1}} > i > y_{i_l+1}$, soit $y_{i_{l-1}} > i > \sigma(i)$ ou encore $y_{i_{l-1}} > i = y_{i_l+1} > y_{i_l+2}$
Si i different de la première lettre, alors il existe j tel que

$\tau(j) = i, \tau(j-1) = \sigma^{-1}(i)$ et $\tau(j+1) = \sigma(i)$.
$\blacksquare$

**Définition 1.10.** Soit $(H_{i,n})$ le tableau défini par :

$$\begin{cases} H_{0,0} &= 1 \\ H_{i,0} &= 0 \text{ si } i \geq 1 \\ H_{0,n} &= p_{b_0} H_{0,n-1} + d_1 H_{1,n-1} \\ H_{i,n} &= m_{i-1} H_{i-1,n-1} + (b_i + r_i) H_{i,n-1} + d_{i+1} H_{i+1,n-1} \text{ si } i \geq 1, n \geq 1 \end{cases}$$

Posons $H_i(t) = \sum\limits_{n \geq 0} H_{i,n} t^n$.

**Proposition 1.8.**

$$H_0(t) = \cfrac{1}{1 - b_0 t - \cfrac{m_0 d_1 t^2}{1 - (b_1 + r_1)t - \cfrac{m_1 d_2 t^2}{1 - (b_2 + r_2)t - \cfrac{m_2 d_3 t^2}{\ddots}}}}$$

<u>Démonstration</u> :
On a :

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 + \sum_{n \geq 1} H_{0,n} t^n \\ &= 1 + b_0 \sum_{n \geq 1} H_{0,n-1} t^n + d_1 \sum_{n \geq 1} H_{1,n-1} t^n \\ &= 1 + b_0 t H_0(t) + d_1 t H_1(t) \\ &= \cfrac{1}{1 - b_0 t - d_1 t \cfrac{H_1(t)}{H_0(t)}} \end{aligned}$$

Pour $i \geq 1$ :

$$\begin{aligned} H_i(t) &= \sum_{n \geq 0} H_{i,n} t^n \\ &= \sum_{n \geq 1} H_{i,n} t^n \\ &= \sum_{n \geq 1} m_{i-1} H_{i-1,n-1} t^n + (b_i + r_i) \sum_{n \geq 1} H_{i,n-1} t^n + d_{i+1} \sum_{n \geq} H_{i+1,n-1} t^n \\ &= m_{i-1} t H_{i-1}(t) + (b_i + r_i) t H_i(t) + d_{i+1} H_{i+1}(t) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{H_i(t)}{H_{i-1}(t)} = \cfrac{m_{i-1} t}{1 - (b_i + r_i)t - d_{i+1} t \cfrac{H_{i+1}(t)}{H_i(t)}}$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
H_0(t) &= \cfrac{1}{1-b_0t-d_1t\cfrac{m_0t}{1-(b_1+r_1)t-d_2t\cfrac{H_2(t)}{H_1(t)}}} \\
&= \cfrac{1}{1-b_0t-\cfrac{m_0d_1t^2}{1-(b_1+r_1)t-\cfrac{m_1d_2t^2}{1-(b_2+r_2)t-\cfrac{m_2d_3t^2}{\ddots}}}}
\end{aligned}
$$

■

**Proposition 1.9.** *On a :* $\forall n \geq 1, H_{i,n} = \sum\limits_{c\in\Gamma_{0\to i}^{(n)}} w(c)$ *où* $w(c) = \prod\limits_{c_i=m} m_{\gamma_{i-1}} \prod\limits_{c_i=d} d_{\gamma_{i-1}} \prod\limits_{c_i=b} b_{\gamma_{i-1}} \prod\limits_{c_i=r} r_{\gamma_{i-1}}$ *avec* $x_{\gamma_{i-1}}$ *est le nombre de poids possible associés à* $x$ *où* $x \in \{m,d,b,r\}$

Démonstration :
Posons $\overline{H}_{i,n} = \sum\limits_{c\in\Gamma_{0\to i}^{(n)}} w(c)$ et $c^{(1)}$ le chemin obtenu à partir de $c$ en supprimant la dernière lettre.

On a :

$$
\begin{aligned}
\text{Si } c_n &= m, \text{ alors } w(c) = w(c^{(1)})m_{i-1} \\
\text{Si } c_n &= b, \text{ alors } w(c) = w(c^{(1)})b_i \\
\text{Si } c_n &= r, \text{ alors } w(c) = w(c^{(1)})r_i \\
\text{Si } c_n &= d, \text{ alors } w(c) = w(c^{(1)})d_{i+1}
\end{aligned}
$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
\overline{H}_{i,n} &= \sum_{c\in\Gamma_{0\to i}^{(n)}} w(c) \\
&= \sum_{\substack{c\in\Gamma_{0\to i}^{(n)} \\ c_n=m}} w(c) + \sum_{\substack{c\in\Gamma_{0\to i}^{(n)} \\ c_n=b}} w(c) + \sum_{\substack{c\in\Gamma_{0\to i}^{(n)} \\ c_n=r}} w(c) + \sum_{\substack{c\in\Gamma_{0\to i}^{(n)} \\ c_n=d}} w(c) \\
&= m_{i-1} \sum_{c^{(1)}\in\Gamma_{0\to i-1}^{(n-1)}} w(c^{(1)}) + b_i \sum_{c^{(1)}\in\Gamma_{0\to i}^{(n-1)}} w(c^{(1)}) + r_i \sum_{c^{(1)}\in\Gamma_{0\to i}^{(n-1)}} w(c^{(1)}) + d_{i+1} \sum_{c^{(1)}\in\Gamma_{0\to i+1}^{(n-1)}} w(c^{(1)}) \\
&= m_{i-1}\overline{H}_{i-1,n-1} + (b_i+r_i)\overline{H}_{i,n-1} + d_{i+1}\overline{H}_{i+1,n-1}
\end{aligned}
$$

$\overline{H}_{i,n}$ et $H_{i,n}$ ont même relation de récurrence. On convient que $m_{-1} = r_0 = 0$
On a : $\overline{H}_{0,n} = b_0\overline{H}_{0,n-1} + d_1\overline{H}_{1,n-1}$. Pour $n = 1$

$$
\overline{H}_{i,1} = \begin{cases} b_0 & \text{si } i = 0 \\ m_0 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \geq 2 \end{cases}
$$

$$
H_{i,1} = \begin{cases} b_0 & \text{si } i = 0 \\ m_0 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \geq 2 \text{ car } H_{i,n} = 0 \textbf{ si } i \geq n \end{cases}
$$

D'où le résultat ■

**Corollaire 1.1.** $H_0(t) = 1 + \sum\limits_{n\geq 1} t^n \left( \sum\limits_{c\in\Gamma_n} w(c) \right)$

**Proposition 1.10.** *On a :* $1 + \sum_{n\geq 1} |\Gamma_n| t^n = \cfrac{1}{1 - t - \cfrac{t^2}{1 - 2t - \cfrac{t^2}{\ddots}}}$

<u>Démonstration</u> :
$|\Gamma_n| = \sum_{c\in\Gamma_n} 1$. Donc, $m_{\gamma_{i-1}} = d_{\gamma_{i-1}} = r_{\gamma_{i-1}} = b_{\gamma_{i-1}} = 1$. Ainsi, en utilisant la Proposition 1.7. et le Corollaire 1.1., on a :

$$1 + \sum_{n\geq 1} |\Gamma_n| t^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \left( \sum_{c\in\Gamma_n} 1 \right) t^n = \cfrac{1}{1 - t - \cfrac{t^2}{1 - 2t - \cfrac{t^2}{\ddots}}}$$

**Corollaire 1.2.** *On a :* $|\Gamma_n| = C_n$.

<u>Preuve</u> : En utilisant la Proposition 1.3. et Proposition 1.10. on a le resultat.

# Chapitre 2

# Relation de similarité $\mathcal{R}$

Dans toute la suite la relation $\mathcal{R}$ est définie sur l'ensemble $[n]$

**Définition 2.1.** Une relation de similarité est une relation binaire réflexive, symétrique verifiant la propriété suivante :
$\forall x, y, z \in [n], (x < y < z \text{ et } x\mathcal{R}z) \implies (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z)$

## 2.1 Points isolés

Soit $i \in [n]$.

**Définition 2.2.** On dit que i est une point isolé si $\forall j \in [n], (i\mathcal{R}j \implies i = j)$

**Définition 2.3.** Une relation de similarité $\mathcal{R}$ est non-singulière si elle n'a aucun point isolé.

Dans toute la suite, on note par $SR_n$ l'ensemble des relations de similarité sur $[n]$. $SR_n(k)$ est l'ensemble des relations de similarité ayant k points isolés. Soit $Sim_n$ l'ensemble des n-uples $(r_1, \cdots, r_n)$ d'entier tel que $\forall i \leq n, 0 \leq r_i \leq i-1$ et $r_{i+1} \leq r_i + 1$ si $i < n$

**Proposition 2.1.** *Il existe une bijection $\Phi$ de $SR_n$ sur $Sim_n$.*

Preuve :
Soit $\mathcal{R} \in SR_n$. Pour tout $i \in [n]$, notons $j_i$ le plus petit entier tel que $i\mathcal{R}j_i$. Comme $i\mathcal{R}i$, alors $j_i \leq i$. Posons $r_i = i - j_i$ pour tout i. D'autre part, soit $i < n$. Montrons que $j_{i+1} \geq j_i$. Supposons que $j_{i+1} < j_i$. Par définition de $\mathcal{R}$, $j_{i+1} < j_i \leq i < i+1 \implies j_i\mathcal{R}(i+1)$ et $j_{i+1}\mathcal{R}i$. En contradiction avec la définition de $j_i$. Par suite, $r_{i+1} = i+1-j_{i+1} \leq i+1-j_i = r_i+1$. On pose $\Phi(\mathcal{R}) = r = (r_1, \cdots, r_n)$ car $r \in Sim_n$.
Soit maintenant $r = (r_1, \cdots, r_n) \in Sim_n$. Pour tout $i \in [n]$, posons $j_i = i - r_i$.
Comme $0 \leq r_i \leq i-1$, alors $1 \leq j_i \leq i$. De plus, si $i < n, r_{i+1} \leq r_i + 1 \implies j_{i+1} \geq j_i$. Soit donc $\mathcal{R} \in SR_n$ tel que $\forall i, j_i$ est le plus petit entier vérifiant $j_i\mathcal{R}i$. On a $\Phi(\mathcal{R}) = r$. D'où $\mathcal{R}$ existe.
Soit $\mathcal{R}^{(1)} \in SR_n$ tel que $\mathcal{R}^{(1)} \neq \mathcal{R}$. $\neg(x\mathcal{R}y)$ signifie que x n'est pas en relation avec y.
$\exists(x, y), x < y, (x\mathcal{R}y \text{ et } \neg(x\mathcal{R}^{(1)}y))$ ou $(x\mathcal{R}^{(1)}y \text{ et } \neg(x\mathcal{R}y))$
Si $(x\mathcal{R}^{(1)}y$ et $\neg(x\mathcal{R}y))$ et $x < y$, alors $x < j_y$. Posons $y = i$. Si $\Phi(R^{(1)}) = r$, on aurait le plus petit entier $j_i^{(1)}$ tel que $j_i^{(1)}\mathcal{R}^{(1)}i$, et $j_i^{(1)} \leq x$. Or $r_i = i - j_i^{(1)} \geq i - x > i - j_y = i - j_i = r_i$. On a une contradiction.
Si $(x\mathcal{R}y$ et $\neg(x\mathcal{R}^{(1)}y))$ et $x < y$, alors $x = j_y$. Posons $y = i$. Si $\Phi(R^{(1)}) = r$, on aurait le plus petit entier $j_i^{(1)}$ tel que $j_i^{(1)}\mathcal{R}^{(1)}i$, et $x < j_i^{(1)}$. Or $r_i = i - j_i^{(1)} = i - j_y = i - j_i = r_i$. On a une contradiction. D'où l'unicité de $\mathcal{R}$. $\blacksquare$.

Posons $\overline{Sim_n} = \{r \in Sim_n; \forall i \leq n-1, (r_i = 0 \implies r_{i+1} \neq 0)\}$

**Proposition 2.2.** *On a :* $\Phi(SR_n(0)) = \overline{Sim_n}$

Démonstration :
Soit $r \in \Phi(SR_n(0))$. Il existe $\mathcal{R} \in SR_n(0)$ tel que $\Phi(\mathcal{R}) = r \in Sim_n$. Posons $r_i = 0$. Comme $\mathcal{R}$ est sans point isolé, il existe $j > i$ tel que $i\mathcal{R}j$. D'après la définition de $\mathcal{R}$, comme $i < i+1 \leq j$, alors $i\mathcal{R}(i+1)$. Donc $r_{i+1} \neq 0$. Ainsi $r \in \overline{Sim_n}$.
Soit maintenant $r \in \overline{Sim_n}$. Il existe un seul et unique $\mathcal{R} \in SR_n$ tel que $\Phi^{-1}(r) = \mathcal{R}$. Supposons qu'il existe i tel que i est un point isolé, alors $r_i = 0$. Or $r_{i+1} = (i+1) - j_{i+1}$ où $j_{i+1}$ est le plus petit entier qui vérifie $(i+1)\mathcal{R}j_{i+1}$, alors $j_{i+1} < i+1$. De plus $r_{i+1} = 1$ car $r_i = 0$, $r_{i+1} \leq r_i + 1$ et $r \in \overline{Sim_n}$. D'où $j_{i+1} = i$ ou encore $i\mathcal{R}(i+1)$. On a une contradiction. Ainsi $\mathcal{R} \in SR_n(0)$. ■

## 2.2 Bijection entre $\mathcal{F}_n$ et $SR_n(0)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note par $\overline{\text{Dyck}}(n) = \{p \in \text{Dyck}(n); (p_i = m \text{ et } \gamma_{i-1} = 0) \implies p_{i+1} = m\}$

**Définition 2.4.** Soit $\mathcal{F}_n := \{c \in \Gamma_n; \gamma_{i-1} \neq 0 \text{ si } c_i = b\}$. Le nombre de Fine est égal au cardinal de $\mathcal{F}_n$, que l'on note par $F_n$

**Proposition 2.3.** *Il existe une bijection $\theta$ de $\mathcal{F}_n$ sur $\overline{Dyck}(n)$.*

Preuve :
Soit $c \in \mathcal{F}_n$. Soit p est un chemin obtenu à partir de c par la transformation suivante :
. si $c_i = m$, alors on remplace $c_i$ par $p_{2i-1}p_{2i} = mm$
. si $c_i = d$, alors on remplace $c_i$ par $p_{2i-1}p_{2i} = dd$
. si $c_i = b$, alors on remplace $c_i$ par $p_{2i-1}p_{2i} = md$
. si $c_i = r$, alors on remplace $c_i$ par $p_{2i-1}p_{2i} = dm$
Montrons que $p \in \overline{\text{Dyck}}(n)$. On a $|c|_m = |c|_d$. Ensuite, à chaque palier bleu ou rouge est associé à un couple m et d. Donc $|p|_m = |p|_d$.
Soit $i \leq n$. Comme $|c_1 \cdots c_i|_m \geq |c_1 \cdots c_i|_d$, alors $|p_1p_2 \cdots p_{2i-1}p_{2i}|_m \geq |p_1p_2 \cdots p_{2i-1}p_{2i}|_d$.
De plus, $\forall c_i \in \{m, d, b, r\}$, on a $|p_1p_2 \cdots p_{2i-1}|_m \geq |p_1p_2 \cdots p_{2i-1}|_d$.
D'où $\forall j \leq 2n, |p_1 \cdots p_j|_m \geq |p_1 \cdots p_j|_d$. Donc $p \in \text{Dyck}(n)$.
Soit j tel que $p_j = m$ et $\gamma_{j-1} = 0$. j ne peut pas être pair. Posons $j = 2i-1$. D'abord, on a $|p_1 \cdots p_{2j-2}|_m = |p_1 \cdots p_{2j-2}|_d$ ou encore $|c_1 \cdots c_{j-1}|_m = |c_1 \cdots c_{j-1}|_d$. $c_j$ ne peut pas être égal à d ou r. De plus, $c_j \neq b$ car $c \in \mathcal{F}_n$. D'où, $c_j = m$ ou encore, $p_{2i} = p_{j+1} = m$. Ainsi $p \in \overline{\text{Dyck}}(n)$.

Soit $p \in \overline{\text{Dyck}}(n)$ et c son antécédent par $\theta$ (s'il existe). Si $c_i = b$, alors $\gamma_{i-1} \neq 0$ car $p \in \overline{\text{Dyck}}(n)$. Supposons qu'il existe k tel que $c_k = r$. Donc $p_{2k-1}p_{2k} = dm$. Alors le niveau du pas $p_{2k}$ est différent de zéro. Donc, on n'aurait pas un palier rouge de niveau zéro. Ainsi $c \in \mathcal{F}_n$

**Proposition 2.4.** *Il existe une bijection $\beta$ de $\overline{Dyck}(n)$ sur $\overline{Sim_n}$*

Preuve :
Soit $p \in \overline{\text{Dyck}}(n)$. On écrit $p = m_{i_1}d_1m_{i_2}d_2 \cdots m_{i_n}d_n$ où $\forall j, m_{i_j}$ est le $i_j$-ième montée de p et $d_j$ est un mots formé de descentes. On note par e le mots vide i.e |e|=0.
Posons $r = \gamma_{i_1-1}\gamma_{i_2-1} \cdots \gamma_{i_n-1}$ et montrons que $r \in \overline{Sim_n}$.
Soit $k \leq n-1$. Si $d_k = e$, alors $\gamma_{i_{k+1}-1} = \gamma_{i_k-1} + 1$. Si $d_k \neq e$, alors $\gamma_{i_{k+1}-1} = \gamma_{i_k-1} + 1 - |d_k|$.
D'où $\gamma_{i_{k+1}-1} \leq \gamma_{i_k-1} + 1$.

Soit $l \leq n-1$. Si $d_1 = d_2 = \cdots = d_l = e$, alors $\gamma_{i_l - 1} = i_l - 1$.
S'il existe $j \leq l$ tel que $d_j \neq e$, alors $\gamma_{i_j - 1} \leq i_j - 1$. Enfin,s'il existe k tel que $\gamma_{i_k - 1} = 0$, alors $\gamma_{i_{k+1} - 1} = 1$ car $p \in \overline{\text{Dyck}}(n)$. On pose $\beta(p) = r \in \overline{Sim_n}$.
Soit maintenant $r \in \overline{Sim_n}$ et $M_1 \cdots M_k$ la décomposition en mots croissant de longueur maximaux de r. S'il existe j tel que $|M_j| = 1$, alors $M_j \neq 0$.

Posons $p = m_1 d_1 \cdots m_k d_k$ et $\forall j, u_j = 1 + \sum_{i=1}^{j-1} (|m_i|_m + |d_i|_d)$ tel que :

. $\forall j, m_j$ est un mots formé de montées tel que $|m_j|_m = |M_j|$
. $\forall j, d_j$ est un mots formé de descentes tel que :

$$|d_j|_d = D(M_j) - P(M_{j+1}) + 1 \text{ et } |d_k|_d = D(M_k) + 1$$

. $\forall j, \gamma_{u_j - 1} = P(M_j)$ et $\forall j \leq k-1, \gamma_{(u_j - 1) - 1} = P(M_{j+1}) + 1$

On a :

. $\sum_{j=1}^{k} |m_j|_m = n$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} |d_j|_d &= |d_k|_d + \sum_{j=1}^{k-1} [D(M_j) - P(M_{j+1}) + 1] = D(M_k) + 1 + \sum_{j=1}^{k-1} D(M_j) - \sum_{j=2}^{k} P(M_j) + k - 1 \\
&= k + \sum_{j=1}^{k} D(M_j) - \sum_{j=1}^{k} P(M_j) \text{ car } P(M_1) = 0 \\
&= k + \sum_{j=1}^{k} [D(M_j) - P(M_j)] = k + \sum_{j=1}^{k} [|M_j| - 1] \\
&= \sum_{j=1}^{k} |M_j| = n
\end{aligned}$$

Alors, on peut écrire $p = p_1 p_2 \cdots p_{2n}$.
Soit $l < k$. On a $\sum_{j=1}^{l} |d_j|_d = \sum_{j=1}^{l} [D(M_j) + 1 - P(M_{j+1})] = l + \sum_{j=1}^{l} D(M_j) - \sum_{j=2}^{l+1} P(M_j)$
$= l - P(M_{j+1}) + \sum_{j=1}^{l} [D(M_j) - P(M_j)] = l - P(M_{j+1}) + \sum_{j=1}^{l} [|M_j| - 1] = \sum_{j=1}^{l} |M_j| - P(M_{j+1})$
Ainsi, $\sum_{j=1}^{l} |d_j|_d \leq \sum_{j=1}^{l} |M_j| = \sum_{j=1}^{l} |m_j|$ ou encore $\forall t, |p_1 p_2 \cdots p_t|_m \geq |p_1 p_2 \cdots p_t|_d$. Soit t tel que $p_t = m$ et $\gamma_{t-1} = 0$. Il existe $v_t \leq k$ tel que $p_t = P(m_{v_t})$ ou encore $P(M_{v_t}) = \gamma_{t-1}$. Alors, on a : $|M_{v_t}| > 1$ ou encore $|m_{v_t}| > 1$ ou encore $p_{t+1} = m$. On pose p l'antécédent de r par $\beta$. D'où $\beta$ est bijective. ■

**Corollaire 2.1.** On a : $F_n = |SR_n(0)|$

Démonstration : $f = \Phi o \beta o \phi$ est un bijection.

**Proposition 2.5.** *Soient $F(t) = \sum_{n \geq 0} F_n t^n$ la fonction génératrice ordinaire des nombres de Fine. On convient que $F_0 = 1$. On a :*

$$F(t) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{t^2}{1 - 2t - \cfrac{t^2}{\ddots}}}$$

Démonstration : Posons $\mathcal{F} = \{c \in \Gamma_n$ : c ne contient ni palier rouge ni bleu de niveau 0$\}$ et $\widetilde{HL}(n) = \{(c,p) \in HL(n) : c \in \mathcal{F}\}$. $\exists! \widetilde{S}_n, \widetilde{S}_n \subset S_n$, tel que $\psi_{F.V}^{-1}(\widetilde{HL}(n)) = \widetilde{S}_n$ car $\psi_{F.V}$ est une bijection.
Posons maintenant $\widetilde{S}_n(c) = \{\sigma \in \widetilde{S}_n : \psi_{F.V}(\sigma) = (c,p) \in \widetilde{HL}(n)\}$. On a :

$$|\widetilde{S}_n(c)| = \prod_{c_i=m} m_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=d} d_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=b} b_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=r} r_{\gamma_{i-1}} = w(c) \text{ où } w(c) = 0 \text{ si } c \notin \mathcal{F}$$

Alors,

$$\sum_{c \in \mathcal{F}} |\widetilde{S}_n(c)| = \sum_{c \in \mathcal{F}} w(c) = \sum_{c \in \Gamma_n} w(c) = |\widetilde{S}_n|$$

De plus, $F_n = |\mathcal{F}| = \sum_{c \in \mathcal{F}} 1$. On a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{c \in \mathcal{F}} 1 = \sum_{c \in \mathcal{F}} |\widetilde{S}_n(c)| \quad & \Longleftrightarrow \quad |\widetilde{S}_n(c)| = 1 \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} m_{\gamma_{i-1}} & = & d_{\gamma_{i-1}} = 1 \\ & et & \\ b_{\gamma_{i-1}} & = & r_{\gamma_{i-1}} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } \gamma_{i-1} \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, $1 + \sum_{n \geq 1} F_n t^n = 1 + \sum_{n \geq 1} |\widetilde{S}_n| t^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{t^2}{1 - 2t - \cfrac{t^2}{\ddots}}}$

## 2.3 Relation entre $C_n$ et $F_n$

**Proposition 2.6.** *Soient $F(t)$ et $C(t)$ les fonctions génératrices ordinaires des nombres de Fine et de Catalan respectivement. Nous avons :*

$$F(t) = \frac{1}{2+t}(1 + C(t))$$

Démonstration :
Comme $F(t) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{t^2}{1 - 2t - \cfrac{t^2}{1 - 2t - \cfrac{t^2}{\ddots}}}}$ et $C(t) = \cfrac{1}{1 - t - \cfrac{t^2}{1 - 2t - \cfrac{t^2}{1 - 2t - \cfrac{t^2}{\ddots}}}}$

Posons $\Delta(t) = \cfrac{t^2}{1 - 2t - \cfrac{t^2}{1 - 2t - \cfrac{t^2}{\ddots}}}$

D'où : $C(t) = \dfrac{1}{1 - t - \Delta(t)}$ et $F(t) = \dfrac{1}{1 - \Delta(t)}$

Ou encore, $F(t) = \dfrac{C(t)}{1+tC(t)}$. Comme $C(t) = \dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$, alors

$$F(t) \quad = \quad \frac{\dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}}{1+\dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}} = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{t(3-\sqrt{1-4t})} = \frac{2-2\sqrt{1-4t}+4t}{t(8+4t)} = \frac{1+\dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}}{2+t}$$

**Proposition 2.7.** *Pour tout $n \geq 1$,on a :*

$$C_n = 2F_n + F_{n-1}$$

Démonstration :
Comme $F(t) = \dfrac{1}{2+t}(1+C(t))$ alors $C(t) = (2+t)F(t) - 1$.
Ou encore

$$C(t) = (2+t)\sum_{n\geq 0} F_n t^n = \sum_{n\geq 0} 2F_n t^n + \sum_{n\geq 0} F_n t^{n+1} - 1 = \sum_{n\geq 1} 2F_n t^n + \sum_{n\geq 1} F_{n-1} t^n + 1$$

Ainsi $C_n = 2F_n + F_{n-1}$ $\forall n \geq 1$ et $C_0 = 1$ ■

**Corollaire 2.2.** *Pour tout $n \geq 2$,*

$$F_n = \sum_{p=0}^{n-2} (-\frac{1}{2})^p C_{n-p}$$

Démonstration :
La Proposition 2.6 nous donne,

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2+t}(1+C(t)) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{t}{2}}(1+C(t)) = \frac{1}{2}\left(\sum_{p\geq 0}(-\frac{1}{2})^p t^p\right)\left(1+\sum_{m\geq 0} C_m t^m\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{p\geq 0}(-\frac{1}{2})^p t^p + \sum_{p,m\geq 0} C_m(-\tfrac{1}{2})^p t^{m+p}\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{p\geq 0}(-\frac{1}{2})^p t^p + \sum_{n\geq 0} t^n \sum_{k=0}^{n}(-\frac{1}{2})^k C_{n-k}\right] \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2}\left[(-\frac{1}{2})^n + \sum_{k=0}^{n}(-\frac{1}{2})^k C_{n-k}\right] = \frac{1}{2}\left[(-\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}(-\frac{1}{2})^k C_{n-k}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2(-\tfrac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}(-\frac{1}{2})^k C_{n-k}\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2}(-\frac{1}{2})^k C_{n-k} \end{aligned}$$ ■

# Chapitre 3

# Permutation 321

Dans cet chapitre nous allons montrer que les dérangements sans le motif 321 sont énumérés par les nombres de Fine.

## 3.1 Relation entre $S_n^k(321)$ et $SR_n(k)$

**Définition 3.1.** On dit qu'une permutation $\pi \in S_n$ est un dérangement à rebours si $\pi_{n+1-i} \neq i$ pour tour $1 \leq i \leq n$.

On note par $S_n^{(k)}(123) = \{\sigma \in S_n(123); |\{i : \sigma(n-i+1) = i\}| = k\}$

**Proposition 3.1.** *Il existe une bijection $\varphi$ de $S_n^k(321)$ sur $S_n^{(k)}(123), \forall k \geq 0$.*

Démonstration :
Soit $\sigma \in S_n^k(321)$ et posons Fix($\sigma$) l'ensemble des points fixes de $\sigma$. Soit i$\in$ Fix($\sigma$), alors $\sigma(i) = i$. Soit $\pi$ une permutation obtenue à partir de $\sigma$ par $\varphi$ tel que $\pi = \sigma_n \cdots \sigma_i \cdots \sigma_1$. On a $\pi_{n-i+1} = \sigma_i = i$. Montrons que $\pi \in S_n(123)$. Ceci est équivalent à montrer que, $\forall j < i, \sigma(j) < \sigma(i)$ ou encore $\forall k > i, \sigma(k) < \sigma(i)$. S'il existe k > i tel que $\sigma(k) < \sigma(i)$, alors il existe p tel que le cycle $(k\sigma(k) \cdots \sigma^p(k))$ contient au moins un élément superieur à i. Soit l tel que $\sigma^l(k) > i$ et $\sigma^{l-1}(k) < i$. Donc $\sigma(\sigma^{l-1}(k)) = \sigma^l(k) > i > \sigma(k)$. En contradiction avec $\sigma \in S_n^k(321)$. La réciproque se construit de la même manière. Ainsi $\varphi$ est bijective.

**Proposition 3.2.** *Il existe une bijection $\Omega$ de Dyck($n$) vers $Sim_n$. $Sim_n$ a été défini dans le chapitre 2.*

Preuve :
Soit $p \in$ Dyck($n$). On écrit $p = m_{i_1}d_1m_{i_2}d_2 \cdots m_{i_n}d_n$ où $\forall j, m_{i_j}$ est le $i_j$-ième montée de p et $d_j$ est un mots formé de descentes. On note par e le mots vide i.e |e|=0.
Posons $r = \gamma_{i_1-1}\gamma_{i_2-1} \cdots \gamma_{i_n-1}$ et montrons que $r \in Sim_n$.
Soit $k \leq n-1$. Si $d_k = e$, alors $\gamma_{i_{k+1}-1} = \gamma_{i_k-1} + 1$. Si $d_k \neq e$, alors $\gamma_{i_{k+1}-1} = \gamma_{i_k-1} + 1 - |d_k|$.
D'où $\gamma_{i_{k+1}-1} \leq \gamma_{i_k-1} + 1$.
Soit $l \leq n-1$. Si $d_1 = d_2 = \cdots = d_l = e$, alors $\gamma_{i_l-1} = i_l - 1$.
S'il existe $j \leq l$ tel que $d_j \neq e$, alors $\gamma_{i_j-1} \leq i_j - 1$. On pose $\Omega(p) = r \in Sim_n$.
Soit maintenant $r \in Sim_n$ et $M_1 \cdots M_k$ la décomposition en mots croissant de longueur maximaux de r.
Posons $p = m_1d_1 \cdots m_kd_k$ et $\forall j, u_j = 1 + \sum_{i=1}^{j-1}(|m_i|_m + |d_i|_d)$ tel que :

. $\forall j, m_j$ est un mots formé de montées tel que $|m_j|_m = |M_j|$
. $\forall j, d_j$ est un mots formé de descentes tel que :

$$|d_j|_d = D(M_j) - P(M_{j+1}) + 1 \text{ et } |d_k|_d = D(M_k) + 1$$

. $\forall j, \gamma_{u_j - 1} = P(M_j)$ et $\forall j \leq k-1, \gamma_{(u_j-1)-1} = P(M_{j+1}) + 1$

On a :

. $\sum_{j=1}^{k} |m_j|_m = n$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} |d_j|_d &= |d_k|_d + \sum_{j=1}^{k-1} [D(M_j) - P(M_{j+1}) + 1] = D(M_k) + 1 + \sum_{j=1}^{k-1} D(M_j) - \sum_{j=2}^{k} P(M_j) + k - 1 \\
&= k + \sum_{j=1}^{k} D(M_j) - \sum_{j=1}^{k} P(M_j) \text{ car } P(M_1) = 0 \\
&= k + \sum_{j=1}^{k} [D(M_j) - P(M_j)] = k + \sum_{j=1}^{k} [|M_j| - 1] \\
&= \sum_{j=1}^{k} |M_j| = n
\end{aligned}$$

Alors, on peut écrire $p = p_1 p_2 \cdots p_{2n}$.

Soit $l < k$. On a $\sum_{j=1}^{l} |d_j|_d = \sum_{j=1}^{l} [D(M_j) + 1 - P(M_{j+1})] = l + \sum_{j=1}^{l} D(M_j) - \sum_{j=2}^{l+1} P(M_j)$
$= l - P(M_{j+1}) + \sum_{j=1}^{l} [D(M_j) - P(M_j)] = l - P(M_{j+1}) + \sum_{j=1}^{l} [|M_j| - 1] = \sum_{j=1}^{l} |M_j| - P(M_{j+1})$

Ainsi, $\sum_{j=1}^{l} |d_j|_d \leq \sum_{j=1}^{l} |M_j| = \sum_{j=1}^{l} |m_j|$ ou encore $\forall t, |p_1 p_2 \cdots p_t|_m \geq |p_1 p_2 \cdots p_t|_d$. On pose p l'antécédent de r par $\Omega$. D'où $\Omega$ est bijective. ■

**Corollaire 3.1.** *On a :* $|SR_n| = C_n$.

**Proposition 3.3.** *Il existe une bijection* $\kappa$ *de* $S_n^{(0)}(123)$ *vers* $\overline{Dyck}(n)$

Preuve :

Soit $\pi \in S_n^{(0)}(123)$ et $S = \{\pi_{i_1}, \pi_{i_2}, \cdots, \pi_{i_s}\}$ l'ensemble des ssd de $\pi$ tel que $\pi_{i_1} > \pi_{i_2} > \cdots > \pi_{i_s}$. On peut écrire $\pi = w_1 \pi_{i_1} w_2 \pi_{i_2} \cdots w_s \pi_{i_s}$ tel que $\forall j, |w_j| = i_j - i_{j-1} - 1$. Par convention $i_0 = 0$. Pour tout j, $w_j$ est un mot décroissant et $\forall j \geq 2$, toutes lettres de $w_j$ sont inférieurs à toutes lettres de $w_{j-1}$. Posons $p = m_1 d_1 m_2 d_2 \cdots m_s d_s$ tel que $\forall j \leq s, m_j$ et $d_j$ sont deux mots formés de montées et descentes respectivement. De plus, $|m_j|_m = |w_j| + 1$, $|d_j|_d = \pi_{i_j} - \pi_{i_{j+1}}$ et par convention $\pi_{i_{s+1}} = 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{s} |m_k|_m + |d_k|_d &= \sum_{k=1}^{s} (|w_k| + 1) + \sum_{k=1}^{s} (\pi_{i_k} - \pi_{i_{k+1}}) = s + \sum_{k=1}^{s} (i_k - i_{k-1} - 1) + \pi_{i_1} \\
&= i_s + \pi_{i_1} = 2n
\end{aligned}$$

Posons $p^{(l)} = m_1 d_1 m_2 d_2 \cdots m_l d_l$. On a

$$\sum_{k=1}^{l} |m_k|_m = \sum_{k=1}^{l} |w_k| + 1 = l + \sum_{k=1}^{l} (i_k - i_{k-1} - 1) = i_l = |w_1 \pi_{i_1} w_2 \pi_{i_2} \cdots w_l \pi_{i_l}|$$

et
$$\sum_{k=1}^{l}|d_k|_d=\sum_{k=1}^{l}(\pi_{i_k}-\pi_{i_{k+1}})=\pi_{i_1}-\pi_{i_{l+1}}=n-\pi_{i_{l+1}}$$
De plus, $w_{l+1}\pi_{i_{l+1}}w_{l+2}\pi_{i_{l+2}}\cdots w_s\pi_{i_s}=n-i_{l+1}+1+|w_{l+1}|=n-i_{l+1}+1+i_{l+1}-i_l-1=n-i_l$. Nécéssairement, $\pi_{i_{l+1}}\geq n-i_l$, ou encore $i_l\geq n-\pi_{i_{l+1}}$. D'où $p\in$Dyck$(n)$. On peut écrire $p=p_1p_2\cdots p_{2n}$. Soit j tel que $p_j=m$ et $\gamma_{j-1}=0$. Il existe q tel que $\sum\limits_{k=1}^{q}|m_k|_m=\sum\limits_{k=1}^{q}|d_k|_d$ et $p_j$ est la première lettre de $m_{q+1}$. Si $p_{j+1}=d$, alors $|w_{q+1}|=0$ et $\pi_{i_q}=\pi_{i_{q+1}}+1$. Posons $\pi_{i_{q+1}}=x-1$. On a $\pi_{i_{q+1}}w_{q+2}\cdots w_s\pi_{i_s}\in S^{(0)}_{x-1}(123)$ et $|w_1\pi_{i_1}w_2\pi_{i_2}\cdots w_q\pi_{i_q}|=n-x+1$. D'où $\pi_{n-x+1}=\pi_{i_q}=\pi_{i_{q+1}}+1=(x-1)+1=x$. En contradiction avec $\pi\in S^{(0)}_n(123)$. Ainsi $p_{j+1}=m$ et $p\in\overline{Dyck}(n)$. On pose $\kappa(\pi)=p$. Pour construire la bijection inverse, on reprend la construction précédente en identifiant d'abord les ssd et en plaçant ensuite les $(w_j)$ suivant les conditions précédente. Ainsi $\kappa$ est bijective. ■

**Corollaire 3.2.** *$\forall n\geq 1$, $d_n(321)=F_n$.*

**Proposition 3.4.** *$\forall n\geq 0$, $s^k_n(321)=|SR_n(k)|$*

Démonstration :
On va démontrer par récurrence sur $k$. Pour $k=0$, le Corollaire 3.2. nous donne le résultat. On suppose qu'il existe une bijection $\gamma^k_n$ de $S^k_n(321)$ vers $SR_n(k)$. Soit $\pi\in S^{k+1}_n(321)$ et soit $f$ le plus petit point fixe de $\pi$. En écrivant $\pi=\pi(1)f\pi(2)$, alors $\pi(2)$ contient $k$ points fixes. Notant que $\pi$ est une permutation sans le motif 321. On obtient $\pi(1)\in S^0_{f-1}(321)$ ie les éléments de $\pi(1)$ sont $1,2,3,\cdots,f-1$ car sinon $\exists y>f$ tel que $y\in\pi(1)$ et $x<f$ tel que $x\in\pi(2)$, alors $st(yfx)=321$, non autorisé. Et aussi $\pi(2)\in S^k_{n-f}(321)$. Soit $\gamma^0_{f-1}(\pi(1))=t\in SR_{f-1}(0)$ et $\gamma^k_{n-f}(\pi(2))=r\in SR_{n-f}(k)$. Alors on définit $\gamma^{k+1}_n(\pi)=t0r\in SR_n(k+1)$. Ceci est obtenu en notant que la position du premier zéro dans la première occurrence de double zéro d'un élément de $SR_n(k+1)$ correspond au plus petit point fixe. ■

## 3.2 Suite de Catalan

**Définition 3.2.** Soient $S$ et $C$ deux ensembles finis. Posons $C=\{c_1,\cdots c_k\}$. Soit $h$ une application de $S$ vers $C$. Le poids énumerateur de S de poids $x^{h(s)}$ est défini par $\sum\limits_{i=1}^{k}s_ix^{c_i}$ où $s_i=|\{s\in S:h(s)=c_i\}|$

**Définition 3.3.** L'ensemble de suite de Catalan de longueur n est défini par :

$$\mathit{Cat(n)}=\{c_1c_2\cdots c_n:c_i\in\mathbb{N},1\leq c_1\leq c_2\leq\cdots\leq c_n \text{ et } c_i\leq i \text{ pour } 1\leq i\leq n\}$$

**Proposition 3.5.** *$\forall n\geq 1,|Cat(n)|=C_n$.*

Démonstration :
On pose $Cat_i(n)=\{c\in Cat(n):i$ est le plus grand entier qui verifie $c_i=i\}$. Soit $c\in Cat_i(n)$. Posons $c'=c_1c_2\cdots c_{i-1}$. On a $c'$ est un élément de $Cat(i-1)$ et $c_{i+1}=i$. Posons ensuite $c''=c''_1\cdots c''_{n-i}$ où $c''_p=c_{p+i}-(i-1),\forall p\in[n-i]$. De plus, $c''_1=c_{i+1}-i+1=i-i+1=1$ et $\forall p\in[n-i],c_{i+p}\leq c_{i+p+1}$ ou encore $c_{i+p}-(i-1)\leq c_{i+p+1}-(i-1)$ ou encore $c''_p\leq c''_{p+1}$. Ainsi, $c''\in Cat_(n-i)$.

Soit $\phi : Cat_i(n) \longrightarrow Cat(i-1)$ x $Cat(n-i), c \longmapsto (c', c'')$ une application, tel que $c'$ et $c''$ sont obtenus par le procédé précèdent.
$\phi$ est une application bijective. Donc $|Cat_i(n)| = |Cat(i-1)| * |Cat(n-i)|$.
On a :

$$\begin{aligned} |Cat(n)| &= \sum_{i=1}^{n} |Cat_i(n)| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |Cat(i-1)| * |Cat(n-i)| \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, $|Cat(1)| = 1 = C_1$. Comme $C_n$ et $|Cat(n)|$ ont même relation de récurrence, alors $C_n = |Cat(n)|$.■

**Proposition 3.6.** *$\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe une bijection $\alpha_n$ de $S_n(321)$ sur $Cat(n)$.*

Démonstration : Posons $A_n = S_n(321)$. Soit $\pi \in A_n$ tel que $\pi_{i_1} = n$. On pose $\pi^{(1)}$ la permutation obtenue à partir de $\pi$ tel que :
Si $\pi_n = n-1$, alors $\pi^{(1)} = \pi_1 \cdots \pi_{i_1-1}(n-1)\pi_{i_1+1} \cdots \pi_{n-1} = \pi_1^{(1)}\pi_2^{(1)} \cdots \pi_{n-1}^{(1)}$
où $\forall i < i_1, \pi_i^{(1)} = \pi_i$ ; $\pi_{i_1}^{(1)} = n-1$ et $\forall i > i_1, \pi_i^{(1)} = \pi_i$
Si $\pi_n \neq n-1$, alors $\pi^{(1)} = \pi_1 \cdots \pi_{i_1-1}\pi_{i_1+1} \cdots \pi_n = \pi_1^{(1)}\pi_2^{(1)} \cdots \pi_{n-1}^{(1)}$
où $\forall i < i_1, \pi_i^{(1)} = \pi_i$ et $\forall i \geq i_1, \pi_i^{(1)} = \pi_{i+1}$.
Ainsi $\pi^{(1)} \in A_{n-1}$.
Ensuite, posons $\pi^{(2)}$ la permutation obtenue à partir de $\pi^{(1)}$ tel que $\pi_{i_2}^{(1)} = n-1$.
Si $\pi_{n-1}^{(1)} = n-2$, alors $\pi^{(2)} = \pi_1^{(1)}\pi_1^{(1)} \cdots \pi_{i_2-1}^{(1)}(n-2)\pi_{i_2+1}^{(1)} \cdots \pi_{n-2}^{(1)} = \pi_1^{(2)}\pi_2^{(2)} \cdots \pi_{n-2}^{(2)}$
où $\forall i < i_2, \pi_i^{(2)} = \pi_i^{(1)}$ ; $\pi_{i_2}^{(2)} = n-2$ et $\forall i > i_2, \pi_i^{(2)} = \pi_i^{(1)}$.
Si $\pi_{n-1}^{(1)} \neq n-2$, alors $\pi^{(2)} = \pi_1^{(1)}\pi_1^{(1)} \cdots \pi_{i_2-1}^{(1)}\pi_{i_2+1}^{(1)} \cdots \pi_{n-1}^{(1)} = \pi_1^{(2)}\pi_2^{(2)} \cdots \pi_{n-2}^{(2)}$
où $\forall i < i_2, \pi_i^{(2)} = \pi_i^{(1)}$ et $\forall i \geq i_2, \pi_i^{(2)} = \pi_{i+1}^{(1)}$.
Ainsi $\pi^{(2)} \in A_{n-2}$.
Ainsi de suite. Posons $\pi^{(j)}$ la permutation obtenue à partir de $\pi^{(j-1)} \in A_{n-(j-1)}$ tel que $\pi_{i_j}^{(j-1)} = n-(j-1)$.
Si $\pi_{n-(j-1)}^{(j-1)} = n-(j-1)-1 = n-j$, alors $\pi^{(j)} = \pi_1^{(j-1)}\pi_2^{(j-1)} \cdots \pi_{i_j-1}^{(j-1)}(n-j)\pi_{i_j+1}^{(j-1)} \cdots \pi_{n-j}^{(j-1)} = \pi_1^{(j)}\pi_2^{(j)} \cdots \pi_{n-j}^{(j)}$ où $\forall i < i_j, \pi_i^{(j)} = \pi_i^{(j-1)}$; $\pi_{i_j}^{(j)} = n-j$ et $\forall i > i_j, \pi_i^{(j)} = \pi_i^{(j-1)}$.
Si $\pi_{n-(j-1)}^{(j-1)} \neq n-j$, alors $\pi^{(j)} = \pi_1^{(j-1)}\pi_2^{(j-1)} \cdots \pi_{i_j-1}^{(j-1)}\pi_{i_j+1}^{(j-1)} \cdots \pi_{n-(j-1)}^{(j-1)} = \pi_1^{(j)}\pi_2^{(j)} \cdots \pi_{n-j}^{(j)}$ où $\forall i < i_j, \pi_i^{(j)} = \pi_i^{(j-1)}$ et $\forall i \geq i_j, \pi_i^{(j)} = \pi_{i+1}^{(j-1)}$.
Ainsi $\pi^{(j)} \in A_{n-j}$.
Pour tout j<n, on pose $\alpha_{n-j}(\pi^{(j)}) = c^{(j)}$ l'image de $\pi^{(j)}$ s'il existe et $\alpha_{n-(j-1)}(\pi^{(j-1)}) = \alpha_{n-j}(\pi^{(j)})i_j$ où $\pi_{i_j}^{(j-1)} = n-(j-1)$. Par convention $\pi^{(0)} = \pi$. On va montrer par récurrence sur n que si $\alpha_{n-1}$ est bijective, alors $\alpha_n$ l'est aussi. Il est évident que $\alpha_1$ est une bijection de $A_1$ sur $Cat(1)$ qui transforme 1 en 1 i.e $\alpha_1(1) = 1$.
Pour n=2, $A_2 = \{12, 21\}$ et $Cat(2) = \{11, 12\}$.
Pour $\pi = 12$, on a $\pi^{(1)} = 1$. Posons $\alpha_2(\pi) = \alpha_1(\pi^{(1)})2 = 12 \in Cat(2)$
Et pour $\pi = 21$, on $\pi^{(1)} = 1$. Posons $\alpha_2(\pi) = \alpha_1(\pi^{(1)})1 = 11 \in Cat(2)$
Ainsi $\alpha_2$ est bijective.
Supposons que $\alpha_{n-1}$ est bijective et montrons que $\alpha_n$ l'est aussi. Soit $\pi \in A_n$.
On a $\alpha_n(\pi) = \alpha_{n-1}(\pi^{(1)})i_1$. Nous allons montrer que $\alpha_n \in A_n$ ou encore montrons que pour tout n>j>0 la dernière lettre de $\alpha_{n-j}(\pi^{(j)})$ est inférieur ou égal à $i_j$.
Si $\pi_{n-(j-1)}^{(j-1)} = n-j$, alors $\pi_{i_j}^{(j)} = n-j$. Ainsi la dernière lettre de $\alpha_{n-j}(\pi^{(j)})$ est égal à $i_j$
Si $\pi_{n-(j-1)}^{(j-1)} \neq n-j$ alor il existe $l < i_j$ tel que $\pi_l^{(j)} = n-j$.
Ainsi la dernière lettre de $\alpha_{n-j}(\pi^{(j)})$ est strictement inférieur à $i_j$.

De plus, $\pi^{(n-1)} = 1$ et $\alpha_1(\pi^{(n-1)}) = 1$. Ainsi $\alpha_n(\pi) \in Cat(n)$.
Enfin nous allons construire l'inverse de $\alpha_n$. Soit $c \in Cat(n)$ et $c^{(1)}$ obtenu à partir de c en supprimant la dernière lettre. Alors $c^{(1)} \in Cat(n-1)$. Comme $\alpha_{n-1}$ bijective, alors $\exists! \pi^{(1)}$ tel que $\alpha_{n-1}(\pi^{(1)}) = c^{(1)}$.
Si $c_n = c_{n-1}$, on pose $\pi$ la permutation obtenue à partir de $\pi^{(1)}$ en remplaçant n-1 par n et en ajoutant n-1 à la dernière place i.e $\pi = \pi_1^{(1)}\pi_2^{(1)} \cdots \pi_{i_1-1}^{(1)} n \pi_{i_1+1}^{(1)} \cdots \pi_{n-1}^{(1)}(n-1)$ où $\pi_{i_1}^{(1)} = n-1$.
Si $c_n > c_{n-1}$, on pose on insère n après le $(c_n - 1)$-ème lettre de $\pi^{(1)}$ i.e
$\pi = \pi_1^{(1)} \cdots \pi_{c_{n-1}-1}^{(1)}(n-1)\pi_{c_{n-1}+1}^{(1)} \cdots \pi_{c_n-1}^{(1)} n \pi_{c_n}^{(1)} \cdots \pi_{n-1}^{(1)}$.
Dans les deux cas $\pi \in A_n$. Ainsi $\alpha_n$ est une bijection. ■

**Proposition 3.7.** $\forall \pi \in S_n(321)$, *on pose* $c = \alpha_n(\pi)$. *On a :*

*(i)* $\pi_i = i$ *ssi* ($c_i = i$ *et* $c_{i+1} = i+1$)

*(ii)* $\pi_n = n$ *ssi* $c_n = n$

Démonstration : Soit $\pi \in S_n(321)$ tel que $\pi_i = i$. On a $\forall k < i, \pi_k < \pi_i$ et $\exists l > i$ tel que $\pi_l = i+1$. En utilisant la démonstration de la Proposition 3.6, on a :
$\pi^{(n-(i+1))} = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_i\pi_l = \pi_1^{(n-(i+1))}\pi_2^{(n-(i+1))} \cdots \pi_i^{(n-(i+1))}\pi_{i+1}^{(n-(i+1))} \in S_{i+1}(321)$.
De plus,

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1}(\pi^{(n-(i+1))}) = \alpha_i(\pi^{(n-i)})j_{n-i} &= \alpha_i(\pi_1^{(n-(i+1))}\pi_2^{(n-(i+1))} \cdots \pi_i^{(n-(i+1))})j_{n-i} \\ &= \alpha_{i-1}(\pi^{(n-i+1)})j_{n-i+1}j_{n-i}\end{aligned}$$

où $\pi_{j_{n-i}}^{(n-(i+1))} = i+1$ et $\pi_{j_{n-i+1}}^{(n-i)} = i$ . Donc $j_{n-i} = i+1$ et $j_{n-i+1} = i$.
Alors, on a $\alpha_n(\pi) = \alpha_{i-1}(\pi^{(n-i+1)})i(i+1)j_{n-i-1} \cdots j_2j_1$. Ainsi $c_i = i$ et $c_{i+1} = i+1$.
Soit $c \in Cat(n)$ tel que $c_i = i$ et $c_{i+1} = i+1$. Il existe $\pi \in S_n(321)$ tel que $\alpha_n(\pi) = c$. Comme $c_{i-1} < c_i = i$ et $c_i < c_{i+1} = i+1$, alors $\pi_i^{(n-i)} = i$ et $\pi_{i+1}^{(n-(i+1))} = i+1$ où $\alpha_i^{-1}(c^{(n-i)}) = \pi^{(n-i)} \in S_i(321)$ et $\alpha_{i+1}^{-1}(c^{(n-(i+1))}) = \pi^{(n-(i+1))} = \pi^{(n-i)}(i+1) \in S_{i+1}(321)$ tel que $\forall j, c^{(n-j)} = c_1c_2 \cdots c_j \in Cat(j)$. Par convention $c^{(0)} = c$. $\forall p \geq i+2, c_{i+1} \leq c_p$ et $\exists l \geq i+1$ tel que $\pi_l^{(n-p)} = i+1$ où $\pi^{(n-p)} = \pi_1^{(n-p)}\pi_2^{(n-p)} \cdots \pi_p^{(n-p)} = \pi^{(n-i)}\pi_{i+1}^{(n-p)} \cdots \pi_p^{(n-p)}$. Ainsi $\pi_i = i$ ■

**Définition 3.4.** Soit $c \in Cat(n)$.
On pose $D(c) = \{i; 1 \leq i < n, c_i = i, c_{i+1} = i+1\} \bigcup \{n; c_n = n\}$ et $g(c) = \#D(c)$.

On pose $A_n(x) = \sum\limits_{\pi \in S_n(321)} x^{fix(\pi)}$. On a la proposition suivante :

**Proposition 3.8.** $A_n(x) = \sum\limits_{c \in Cat(n)} x^{g(c)}$

Démonstration :
En utilisant la Proposition 3.6 et la Proposition 3.7, on a le résultat ■. Nous avons la relation de récurrence suivante :

**Proposition 3.9.** $A_n(x) = (x-1)A_{n-1}(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_{i-1} * A_{n-i}(x)$

Démonstration :

D'abord, $x^{g(c)} = ((x-1)+1)^{g(c)} = \sum\limits_{k=0}^{g(c)} 1^{g(c)-k}(x-1)^k \binom{g(c)}{k} = \sum\limits_{k=0}^{g(c)} \sum\limits_{\substack{S \subset D(c) \\ |S|=k}} (x-1)^k = \sum\limits_{S \subset D(c)} (x-1)^{|S|}$.

Alors, on a :

$$A_n(x) = \sum_{c \in Cat(n)} x^{g(c)} = \sum_{c \in Cat(n)} \sum_{S \subset D(c)} (x-1)^{|S|}$$

où é è ç à

# Bibliographie

[1] B. H. SHISHUO FU, DAZHAO TANG and J. ZENG, "(q, t)-catalan numbers," *Discret Math*, p. 9, 2018.