

Prélude

Bonjour à tous,

C'est un mélange d'enthousiasme et de gratitude que je me présente devant vous aujourd'hui pour présenter mon mémoire intitulé

Quelques interprétations des nombres de Fine. *Ce moment marque non seulement la culmination de nombreuses heures de travail et de réflexion mais également une étape importante dans mon parcours académique.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers le Pr. **Arthur RANDRIANARIVONY** pour son soutien constant et ses conseils éclairés. Mes sincères remerciements s'adressent également au Jury **Mr. Joseph RAKOTONDRALAMBO** et à l'examineur **Mr. Hanjarivo LALAHARISON** pour leur temps. Je souhaite également exprimer ma reconnaissance envers mes collègues, mes amis et ma famille pour leur encouragement indéfectible.*

Sans plus tarder, je vous invite à vous joindre à moi dans cette exploration intellectuelle, dans l'espoir que cette présentation puisse susciter des réflexions nouvelles et enrichir notre compréhension des nombres de Fine.

Merci

Pour commencer, Cette présentation se divise en deux grandes parties. La première se focalise sur quelques définitions et résultats que nous avons déjà vus dans le semestre 9 du parcours Combinatoire et Optimisation.

Dans la deuxième partie, on va explorer un peu plus profondément les nombres de Fine.

Définitions et quelques résultats préliminaire

Premièrement, nous avons vu les fractions continues. Et deux formes de fractions continues nous intéressent dans ce mémoire et qui sont: ...

Ces deux formes de fractions continues nous servent de base à la démonstration du développement en fraction continue des nombres de Fine.

Ensuite, les nombres de Catalan. Nous allons les utiliser plus tard pour établir une relation de récurrence avec les nombres de Fine. On voit le développement en fraction continue de la fonction génératrice ordinaire de nombres de Catalan est de la forme J-fraction.

Enfin, les chemins de Motzkin. Trois types de chemins ont été explorés dans ce mémoire et ils jouent tous un rôle crucial dans l'interprétation des nombres de Fine et qui sont: ...

Le résultat suivant nous montre que le développement en fraction continue des nombres de 2-chemins de Motzkin est de forme J-fraction. Et ce dernier est égale au développement en fraction continue des nombres de Catalan. D'où le corollaire suivant ...

Maintenant que nous avons introduit les concepts clés et les fondements de notre étude, un premier aperçu sur les nombres de Fine sera essentiel. Les résultats suivants seront utilisés dans la prochaine partie afin qu'on puisse montrer qu'on a bien les nombres que Terrence Fine a mentionné dans son article sur l'extrapolation d'une fonction.

Par définition, ...

Et on a la proposition suivant qui nous montre la relation entre $F(z)$ et $C(z)$. L'extraction du coefficient de z^n dans $F(z)$ et $C(z)$ nous amène aux deux relations de récurrence suivantes: ...

De plus, on a une correspondance bijective entre l'ensemble des chemins de Fine et les chemins de Dyck qui vérifient la condition ci-dessous. Cette bijection nous sert comme un pont entre le nombre que Terrence a défini dans son article et le nombre F_n qui sera utilisé plus tard comme le nombre de Fine.

Maintenant nous allons commencer la dernière partie de cette présentation.

Interprétation des nombres de Fine

Terrence Fine a introduit le concept de relation de similarité et qui est par définition ...

Par définition, le nombre de Fine correspond à la cardinalité de l'ensemble des relations de similarité sans point isolé. Notre premier objectif est de démontrer que le nombre F_n dans la première partie correspond à ce nombre défini par Terrence Fine. A cette fin, deux bijections seront nécessaire et qui sont ...

Sans oublier les permutations et leurs aspects, nous allons voir quelques résultats entre ces dernières et les nombres de Fine. On a ...

Enfin, la dernière ligne de cette présentation sera consacrée à la demarche pour obtenir les deux propositions suivantes dans la première nous montre que ...

Une nouvelle concept nous sera utile pour montrer la première proposition et qui est les mots de Catalan. Ces derniers n'est autre que la transformation des chemins de Dyck. Plusieurs résultats nous seront utiles pour trouver notre fameux relation entre les nombres de Fine et les permutations évitant un motif, dont lequel chaque résultat se déduit du précédent dans une séquence de déduction en cascade. Ce qui nous intéresse, c'est le coefficient $b(n, k)$ car on a pu trouver une relation de récurrence entre ce coefficient et le nombre $c_{n,k}$ dans le triangle de Catalan défini comme suit: ...

