Quelques interprétations des nombres de Fine

Frédéric ANDRIANARIVONY

Département Mathématiques et informatiques

March 6, 2024

Table des Matières

1. Définitions et quelques résultats préliminaire
   - Fraction continues
   - Nombres de Catalan
   - Chemins de Motzkin
   - Chemins de Fine

2. Nombres de Fine, relations de similarité et permutation
   - Relations de similarité
   - Autres interprétations des F_n

S-Fraction et J-Fraction

S-Fraction

Une S-fraction est une expression de la forme:

$$S(z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{c_1 z}{1 - \cfrac{c_2 z}{1 - \cfrac{c_3 z}{\ddots}}}}$$

S-Fraction et J-Fraction

J-Fraction

Une J-fraction est une expression de la forme:

$$J(z) = \cfrac{1}{1 - c_1 z - \cfrac{c_1 c_2 z^2}{1 - (c_2 + c_3)z - \cfrac{c_3 c_4 z^2}{1 - (c_4 + c_5)z - \cfrac{c_5 c_6 z^2}{\ddots}}}}$$

D'après le Lemme 2.11 de [9], on a $S(z) = J(z)$

Nombres de Catalan

Définition

Le nombre de Catalan d'ordre $n \geq 1$ est défini par

(*i*) $C_0 = 1$

(*ii*) $\forall n \geq 1,\ C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$

Développement en fraction continue de la fgo

On a $C(z) = \cfrac{1}{1 - z - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}}$

où $C(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^n$

Nombres de Catalan

Définition

Le nombre de Catalan d'ordre $n \geq 1$ est défini par

(*i*) $C_0 = 1$

(*ii*) $\forall n \geq 1,\ C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$

Développement en fraction continue de la fgo

On a $C(z) = \cfrac{1}{1 - z - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}}$

où $C(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^n$

Définition de quelques chemins

Chemins de Motzkin

Les chemins de Motzkin sont les éléments de l'ensemble $\Gamma^0_{n,1}$ qui vérifient, pour tout $c \in \Gamma^0_{n,1}$:

(*i*) $\forall i \in [n]$, $|c_1 c_2 \cdots c_i|_m \geq |c_1 c_2 \cdots c_i|_d$

(*ii*) $|c_1 c_2 \cdots c_n|_m = |c_1 c_2 \cdots c_n|_d$

2-Chemins de Motzkin

Un 2-chemin de Motzkin est un chemin de Motzkin caractérisé par deux types de paliers : le palier rouge, noté r, et le palier bleu, noté b. De plus, un chemin $c = c_1 c_2 \cdots c_n$, avec $c_k \in \{m, d, r, b\}$, est considéré comme un 2-chemin de Motzkin s'il ne comporte aucun palier rouge de niveau zéro.

Figure: 2-Chemin de Motzkin

Définition de quelques chemins

Chemins de Motzkin valués

Un 2-chemin de Motzkin valué est un couple (c,p) où $c = c_1 c_2 \cdots c_n$ et $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ vérifient les conditions suivantes:

- $c \in \Gamma_n$
- $0 \leq p_i \leq \gamma_{i-1}$, si $c_i = m$ ou $c_i = b$
- $0 \leq p_i \leq \gamma_{i-1} - 1$, si $c_i = d$ ou $c_i = r$

Quelques résultats sur les chemins

Proposition

La J-fraction des $(|\Gamma_n|)$ est $\Gamma(z) = \cfrac{1}{1 - z - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}}$

où $\Gamma(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} |\Gamma_n| z^n$

Corollaire

On a $|\Gamma_n| = C_n$

Quelques résultats sur les chemins

Proposition

La J-fraction des $(|\Gamma_n|)$ est $\Gamma(z) = \cfrac{1}{1 - z - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}}$

où $\Gamma(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} |\Gamma_n| z^n$

Corollaire

On a $|\Gamma_n| = C_n$

Premier aperçu sur les nombres de Fine

Définition

Un chemin de Fine est un 2-chemin de Motzkin sans palier bleu de niveau zéro. On note par $\mathcal{F}_n$ l'ensemble de tels chemins

Proposition

On a $$F(z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}} = \frac{1}{2+z}(1 + C(z))$$

où $F(z) = \sum_{n \geq 0} F_n z^n$ et $F_n = |\mathcal{F}_n|$

Premier aperçu sur les nombres de Fine

Définition

Un chemin de Fine est un 2-chemin de Motzkin sans palier bleu de niveau zéro. On note par $\mathcal{F}_n$ l'ensemble de tels chemins

Proposition

On a $F(z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}} = \frac{1}{2+z}(1 + C(z))$

où $F(z) = \sum_{n \geq 0} F_n z^n$ et $F_n = |\mathcal{F}_n|$

Quelques relations de récurrence

- $[z^n]C(z) = C_n = 2F_n + F_{n-1}, (n \geq 1)$
- $[z^n]F(z) = F_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2}(-\frac{1}{2})^k C_{n-k}, (n \geq 2)$

Quelques relations de récurrence

- $[z^n]C(z) = C_n = 2F_n + F_{n-1}, (n \geq 1)$
- $[z^n]F(z) = F_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}(-\frac{1}{2})^k C_{n-k}, (n \geq 2)$

Quelques relations de récurrence

- $[z^n]C(z) = C_n = 2F_n + F_{n-1}, (n \geq 1)$
- $[z^n]F(z) = F_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2}(-\frac{1}{2})^k C_{n-k}, (n \geq 2)$

Proposition 1

La transformation $\theta : \mathcal{F}_n \longrightarrow \overline{\mathrm{Dyck}}(n)$; $c \longrightarrow p = p_1 \cdots p_{2n}$ définie comme suit, pour tout $i \in [n]$,

$$p_{2i-1}p_{2i} = \begin{cases} mm & \text{si } c_i = m \\ dd & \text{si } c_i = d \\ md & \text{si } c_i = b \\ dm & \text{si } c_i = r \end{cases}$$

est une application bijective où $\overline{\mathrm{Dyck}}(n)$ l'ensemble des chemins de Dyck qui vérifient la condition si $p_i = m$ et $\gamma_{i-1} = 0$, alors $p_{i+1} = m$.

Proposition 2

On a $F_n = \sum_{k=2}^{n} C_{k-1}F_{n-k}$

Proposition 1

La transformation $\theta : \mathcal{F}_n \longrightarrow \overline{\mathrm{Dyck}}(n)$; $c \longrightarrow p = p_1 \cdots p_{2n}$ définie comme suit, pour tout $i \in [n]$,

$$p_{2i-1}p_{2i} = \begin{cases} mm & \text{si } c_i = m \\ dd & \text{si } c_i = d \\ md & \text{si } c_i = b \\ dm & \text{si } c_i = r \end{cases}$$

est une application bijective où $\overline{\text{Dyck}}(n)$ l'ensemble des chemins de Dyck qui vérifient la condition si $p_i = m$ et $\gamma_{i-1} = 0$, alors $p_{i+1} = m$.

Proposition 2

On a $F_n = \sum_{k=2}^{n} C_{k-1} F_{n-k}$

Quelques définitions

Définition 1

Une relation de similarité $\mathcal{R}$ sur [n] est une relation binaire, réflexive et symétrique vérifiant la propriété suivante:

$$\forall x, y, z \in [n], ((x < y \leq z \text{ et } x\mathcal{R}z) \implies (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z))$$

On note par RS_n l'ensemble de tels relations.

Définition 2

Soit $i \in [n]$. On dit que i est un point isolé de $\mathcal{R}$ si

$$\forall j \in [n], (i\mathcal{R}j \implies i = j)$$

On note par Sim_n l'ensemble des mots $r = r_1 r_2 \cdots r_n$, avec les $r_i \in \mathbb{N}$, tels que $\forall i \leq n, 0 \leq r_i \leq i-1$ et $r_{i+1} \leq r_i + 1$ avec la convention $r_{n+1} = 0$

Conditions nécessaire et suffisante

Proposition 1

La transformation $\Phi : \mathrm{RS}_n \to \mathrm{Sim}_n$, $\mathcal{R} \to r = r_1 r_2 \cdots r_n$ *où, pour* $1 \leq i \leq n$, r_i *est égale au nombre d'entiers* j *tels que* $j < i$ *et* $j\mathcal{R}i$, *est une application bijective.*
De plus, $|\mathrm{Sim}_n(k)| := \{r \in \mathrm{Sim}_n; \#\{i; r_i = r_{i+1} = 0\} = k\} = \#\mathrm{RS}_n(k)$
$\mathcal{R}$

Proposition 2

Soit la transformation $\varphi : \mathrm{Dyck}(n) \longrightarrow \mathrm{Sim}_n$,
$p = p_1 p_2 \cdots p_{2n} \longrightarrow r = r_1 r_2 \cdots r_n$ *définie comme suit:*
Soit $\mathrm{Mont}(p) = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ *l'ensemble des entiers* i tels que $p_i = m$.
Alors pour tout $1 \leq j \leq n$, $r_j = \gamma_{i_j - 1}$ *où* γ_{i-1} *est le niveau du* i*-ième pas de p. Alors* φ *est une application bijective.*
De plus,
$|\mathrm{Sim}_n(k)| = \#\{p \in \mathrm{Dyck}(n); |\{i \in \mathrm{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0 \text{ et } p_{i+1} = d\}| = k\}$

Conditions nécessaire et suffisante

Proposition 1

La transformation $\Phi : \mathrm{RS}_n \to \mathrm{Sim}_n$, $\mathcal{R} \to r = r_1 r_2 \cdots r_n$ *où, pour* $1 \leq i \leq n$, r_i *est égale au nombre d'entiers* j *tels que* $j < i$ *et* $j\mathcal{R}i$, *est une application bijective.*
De plus, $|\mathrm{Sim}_n(k)| := \{r \in \mathrm{Sim}_n; \#\{i; r_i = r_{i+1} = 0\} = k\} = \#\mathrm{RS}_n(k)$
$\mathcal{R}$

Proposition 2

Soit la transformation φ : $\mathrm{Dyck}(n) \longrightarrow \mathrm{Sim}_n$,
$p = p_1 p_2 \cdots p_{2n} \longrightarrow r = r_1 r_2 \cdots r_n$ *définie comme suit:*
Soit $\mathrm{Mont}(p) = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ *l'ensemble des entiers* i tels que $p_i = m$.
Alors pour tout $1 \leq j \leq n$, $r_j = \gamma_{i_j - 1}$ *où* γ_{i-1} *est le niveau du* i*-ième pas de p. Alors* φ *est une application bijective.*
De plus,
$|\mathrm{Sim}_n(k)| = \#\{p \in \mathrm{Dyck}(n); |\{i \in \mathrm{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0 \text{ et } p_{i+1} = d\}| = k\}$

Les relations de similarité non-singulière

On en déduit les résultats suivants en utilisant les deux bijections précédentes et la bijection θ sur les chemins de Fine:

- $\{p \in \mathrm{Dyck}(n); |\{i \in \mathrm{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0 \text{ et } p_{i+1} = d\}| = 0\} = \overline{\mathrm{Dyck}}(n)$
- $|\mathrm{RS}_n(0)| = F_n$ où F_n est la cardinalité de $|\mathcal{F}_n|$

1. Définitions et quelques résultats préliminaire
2. Nombres de Fine, relations de similarité et permutation
   - Relations de similarité
   - Autres interprétations des F_n

Les permutations évitant le motif 123

Proposition 1

Soit Θ la transformation $S_n(123) \longrightarrow \mathrm{Dyck}(n)$, $\pi \longrightarrow p$ *définie par: soit* $w_1 u_1 w_2 u_2 \cdots w_s u_s$ *la ssd-décomposition de* π *et on définit* $\Theta(\pi) := p = m_1 d_1 m_2 d_2 \cdots m_s d_s$ *où* m_i *(resp* d_i*) est un mot formé par la seule lettre* m *(resp* d*) tel que* $|m_i| = |w_i| + 1$ *et* $|d_i| = u_i - u_{i+1}$ *avec la convention* $u_{s+1} = 0$*.*
Alors Θ *est bijective.*
De plus, $\#D(\pi) = \#\{i \in \mathrm{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0, p_{i+1} = d\}$ où $D(\pi) := \{i; \pi_{n-i+1} = i\}$

Corollaire 1

On a $\forall n \geq 0, s_n^k(321) = \#\mathrm{RS}_n(k)$

Corollaire 2

On a $F_n = s_n^0(321)$.

Les permutations évitant le motif 123

Proposition 1

Soit Θ la transformation $S_n(123) \longrightarrow \mathrm{Dyck}(n)$, $\pi \longrightarrow p$ *définie par: soit* $w_1 u_1 w_2 u_2 \cdots w_s u_s$ *la ssd-décomposition de* π *et on définit* $\Theta(\pi) := p = m_1 d_1 m_2 d_2 \cdots m_s d_s$ *où* m_i *(resp* d_i*) est un mot formé par la seule lettre* m *(resp* d*) tel que* $|m_i| = |w_i| + 1$ *et* $|d_i| = u_i - u_{i+1}$ *avec la convention* $u_{s+1} = 0$.
Alors Θ *est bijective.*
De plus, $\#D(\pi) = \#\{i \in \mathrm{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0, p_{i+1} = d\}$ où $D(\pi) := \{i; \pi_{n-i+1} = i\}$

Corollaire 1

On a $\forall n \geq 0, s_n^k(321) = \#\mathrm{RS}_n(k)$

Corollaire 2

On a $F_n = s_n^0(321)$.

Les permutations évitant le motif 123

Proposition 1

Soit Θ la transformation $S_n(123) \longrightarrow \mathrm{Dyck}(n)$, $\pi \longrightarrow p$ *définie par: soit* $w_1 u_1 w_2 u_2 \cdots w_s u_s$ *la ssd-décomposition de* π *et on définit* $\Theta(\pi) := p = m_1 d_1 m_2 d_2 \cdots m_s d_s$ *où* m_i *(resp* d_i*) est un mot formé par la seule lettre* m *(resp* d*) tel que* $|m_i| = |w_i| + 1$ *et* $|d_i| = u_i - u_{i+1}$ *avec la convention* $u_{s+1} = 0$.
Alors Θ *est bijective.*
De plus, $\#D(\pi) = \#\{i \in \mathrm{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0, p_{i+1} = d\}$ où
$D(\pi) := \{i; \pi_{n-i+1} = i\}$

Corollaire 1

On a $\forall n \geq 0, s_n^k(321) = \#\mathrm{RS}_n(k)$

Corollaire 2

On a $F_n = s_n^0(321)$.

Interprétations combinatoire des F_n

Proposition 1

Pour tout $\mu \in \{123, 132\}$, on a $F_{2n} = \#\{\sigma \in S_{2n}(\mu); \sigma(1) \text{ impair }\}$ et $F_{2n+1} = \#\{\sigma \in S_{2n+1}(\mu); \sigma(1) \text{ pair }\}$

Proposition 2

Pour tout $n \geq 1$, on a $F_n = \#\{\pi \in S_n(\mu); \mathrm{Fix}(\pi) \bigcap [n-1] \neq \emptyset\}$

Interprétations combinatoire des F_n

Proposition 1

Pour tout $\mu \in \{123, 132\}$, on a $F_{2n} = \#\{\sigma \in S_{2n}(\mu); \sigma(1) \text{ impair } \}$ et $F_{2n+1} = \#\{\sigma \in S_{2n+1}(\mu); \sigma(1) \text{ pair } \}$

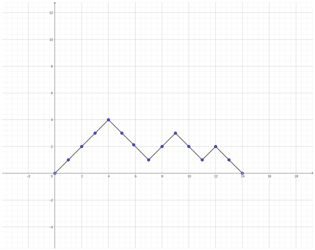
Proposition 2

Pour tout $n \geq 1$, on a $F_n = \#\{\pi \in S_n(\mu); \mathrm{Fix}(\pi) \bigcap [n-1] \neq \emptyset\}$

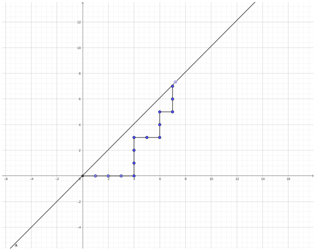
Mots de Catalan

Définition

A un décalage d'indice, un chemin de Dyck de longueur $2n$ est représenté par un mot $c_1c_2\cdots c_n$ tel que $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$ où $c_i \leq i$ pour tout i. Un tel mot est appelé mot de Catalan de longueur n. On note par $\mathrm{Cat}(n)$ l'ensemble des mots de Catalan de longueur n.



(a) Chemin de Dyck



(b) Transformé du chemin de Dyck

Figure: Nouveau chemin de Dyck

Quelques résultats

On pose $A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(321)} x^{fix(\pi)}$

- $A_n(x) = \sum_{c \in Cat(n)} x^{\#D(c)}$ où $D(c) = \{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\}$
- $s_n^k(321) = \#\{c \in Cat(n); |D(c)| = k\}$
- $1 + \sum_{n \geq 1} A_n(x) z^n = \frac{1 - x + C(z)}{2 - x + z(x-1)^2}$
- $A_n(x) = (x-1)A_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} A_{n-i}(x)$n
- $A_n(x) = (x-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (x-1)^i \sum_{j=1}^{n-i} C_{j-1} A_{n-i-j}(x) = \sum_{k=0}^{n} b(n,k)(x-1)^k$
- $[x^k]A_n(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{k}{j} b(n,k)(-1)^{j-k}$
- $\forall n \geq 1$ et $\forall k \leq n, b(n,k) = b(m, k+1) + b(n-1, k-1)$

Quelques résultats

On pose $A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(321)} x^{fix(\pi)}$

- $A_n(x) = \sum_{c \in Cat(n)} x^{\#D(c)}$ où $D(c) = \{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\}$
- $s_n^k(321) = \#\{c \in Cat(n); |D(c)| = k\}$
- $1 + \sum_{n \geq 1} A_n(x) z^n = \frac{1 - x + C(z)}{2 - x + z(x-1)^2}$
- $A_n(x) = (x-1)A_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} A_{n-i}(x)$n
- $A_n(x) = (x-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (x-1)^i \sum_{i=1}^{n-i} C_{j-1} A_{n-i-j}(x) = \sum_{k=0}^{n} b(n,k)(x-1)^k$
- $[x^k] A_n(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{k}{j} b(n,k)(-1)^{j-k}$
- $\forall n \geq 1$ et $\forall k \leq n, b(n,k) = b(m, k+1) + b(n-1, k-1)$

Quelques résultats

On pose $A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(321)} x^{fix(\pi)}$

- $A_n(x) = \sum_{c \in Cat(n)} x^{\#D(c)}$ où $D(c) = \{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\}$
- $s_n^k(321) = \#\{c \in Cat(n); |D(c)| = k\}$
- $1 + \sum_{n \geq 1} A_n(x) z^n = \dfrac{1 - x + C(z)}{2 - x + z(x-1)^2}$
- $A_n(x) = (x-1)A_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} A_{n-i}(x)$n
- $A_n(x) = (x-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (x-1)^i \sum_{i=1}^{n-i} C_{j-1} A_{n-i-j}(x) = \sum_{k=0}^{n} b(n,k)(x-1)^k$
- $[x^k]A_n(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{k}{j} b(n,k)(-1)^{j-k}$
- $\forall n \geq 1$ et $\forall k \leq n$, $b(n,k) = b(m,k+1) + b(n-1,k-1)$

Quelques résultats

On pose $A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(321)} x^{fix(\pi)}$

- $A_n(x) = \sum_{c \in Cat(n)} x^{\#D(c)}$ où $D(c) = \{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\}$
- $s_n^k(321) = \#\{c \in Cat(n); |D(c)| = k\}$
- $1 + \sum_{n \geq 1} A_n(x) z^n = \frac{1 - x + C(z)}{2 - x + z(x-1)^2}$
- $A_n(x) = (x-1)A_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} A_{n-i}(x)$n
- $A_n(x) = (x-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (x-1)^i \sum_{i=1}^{n-i} C_{j-1} A_{n-i-j}(x) = \sum_{k=0}^{n} b(n,k)(x-1)^k$
- $[x^k]A_n(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{k}{j} b(n,k)(-1)^{j-k}$
- $\forall n \geq 1$ et $\forall k \leq n, b(n,k) = b(m,k+1) + b(n-1,k-1)$

Quelques résultats

On pose $A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(321)} x^{fix(\pi)}$

- $A_n(x) = \sum_{c \in Cat(n)} x^{\#D(c)}$ où $D(c) = \{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\}$
- $s_n^k(321) = \#\{c \in Cat(n); |D(c)| = k\}$
- $1 + \sum_{n \geq 1} A_n(x) z^n = \dfrac{1 - x + C(z)}{2 - x + z(x-1)^2}$
- $A_n(x) = (x-1)A_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} A_{n-i}(x)$n
- $A_n(x) = (x-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (x-1)^i \sum_{i=1}^{n-i} C_{j-1} A_{n-i-j}(x) = \sum_{k=0}^{n} b(n,k)(x-1)^k$
- $[x^k]A_n(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{k}{j} b(n,k)(-1)^{j-k}$
- $\forall n \geq 1$ et $\forall k \leq n$, $b(n,k) = b(m, k+1) + b(n-1, k-1)$

Quelques résultats

On pose $A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(321)} x^{fix(\pi)}$

- $A_n(x) = \sum_{c \in Cat(n)} x^{\#D(c)}$ où $D(c) = \{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\}$
- $s_n^k(321) = \#\{c \in Cat(n); |D(c)| = k\}$
- $1 + \sum_{n \geq 1} A_n(x) z^n = \dfrac{1 - x + C(z)}{2 - x + z(x-1)^2}$
- $A_n(x) = (x-1)A_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} A_{n-i}(x)$n
- $A_n(x) = (x-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (x-1)^i \sum_{i=1}^{n-i} C_{j-1} A_{n-i-j}(x) = \sum_{k=0}^{n} b(n,k)(x-1)^k$
- $[x^k]A_n(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{k}{j} b(n,k)(-1)^{j-k}$
- $\forall n \geq 1$ et $\forall k \leq n$, $b(n,k) = b(m,k+1) + b(n-1,k-1)$

Quelques résultats

On pose $A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(321)} x^{fix(\pi)}$

- $A_n(x) = \sum_{c \in Cat(n)} x^{\#D(c)}$ où $D(c) = \{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\}$
- $s_n^k(321) = \#\{c \in Cat(n); |D(c)| = k\}$
- $1 + \sum_{n \geq 1} A_n(x) z^n = \dfrac{1 - x + C(z)}{2 - x + z(x-1)^2}$
- $A_n(x) = (x-1)A_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} A_{n-i}(x)$n
- $A_n(x) = (x-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (x-1)^i \sum_{i=1}^{n-i} C_{j-1} A_{n-i-j}(x) = \sum_{k=0}^{n} b(n,k)(x-1)^k$
- $[x^k]A_n(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{k}{j} b(n,k)(-1)^{j-k}$
- $\forall n \geq 1$ et $\forall k \leq n$, $b(n,k) = b(m, k+1) + b(n-1, k-1)$

Définition

Le triangle de Catalan est défini comme suit:

$$\begin{cases} c_{n,0} & = 1, \forall n \geq 0 \\ c_{n,k} & = 0, \text{ si } n < k \text{ ou } n < 0 \text{ ou } k < 0 \\ c_{n,k} & = c_{n-1,k} + c_{n,k-1}, \forall k, n \geq 1 \end{cases}$$

Lemme

Soit $s_{n,k}(p)$ le nombre de permutations σ dans $S_n(p)$ vérifiant $\sigma(1) = k$.
On a pour tout $n, k \geq 1$,
$s_{n,k}(123) = s_{n,k}(132) = s_{n,n-k+1}(321) = c_{n-1,k-1}$
(Voir [6])

Définition

Le triangle de Catalan est défini comme suit:

$$\begin{cases} c_{n,0} & = 1, \forall n \geq 0 \\ c_{n,k} & = 0, \text{ si } n < k \text{ ou } n < 0 \text{ ou } k < 0 \\ c_{n,k} & = c_{n-1,k} + c_{n,k-1}, \forall k, n \geq 1 \end{cases}$$

Lemme

Soit $s_{n,k}(p)$ le nombre de permutations σ dans $S_n(p)$ vérifiant $\sigma(1) = k$.
On a pour tout $n, k \geq 1$,
$s_{n,k}(123) = s_{n,k}(132) = s_{n,n-k+1}(321) = c_{n-1,k-1}$
(Voir [6])

A partir des deux tableaux suivants, on déduit les deux propositions ci-après.
Le tableau $(b(n,k))$ est

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
2 & 2 & 1 & & \\
5 & 5 & 3 & 1 & \\
14 & 14 & 9 & 4 & 1
\end{array}$$

et le tableau $(c_{n,k})$ est

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 2 & & \\
1 & 3 & 5 & 5 & \\
1 & 4 & 9 & 14 & 14
\end{array}$$

Proposition 1

$\forall n \geq k, b(n,k) = c_{n,n-k}$

Proposition 2

On a $F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{n-1,n-2k}$

Proposition 1

$\forall n \geq k, b(n,k) = c_{n,n-k}$

Proposition 2

On a $F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{n-1,n-2k}$

On conclut que $F_{2n} = \#\{\sigma \in S_{2n}(\mu); \sigma(1) \text{ impair } \}$ et $F_{2n+1} = \#\{\sigma \in S_{2n+1}(\mu); \sigma(1) \text{ pair } \}$ pour $\mu = 321$.

On note $\mathcal{E}_{n,r}$ l'ensemble des bijections π de $[n]$ vers $\{r+1, \cdots, r+n\}$ telles que $\mathrm{st}(\pi) \in S_n(132)$ et considérons la fonction génératrice $E_{n,r}(x) = \sum_{\pi \in \mathcal{E}_{n,r}} x^{\mathrm{fix}(\pi)}$ où l'on convient $E_{0,r}(x) = 1$

Proposition

On a $E_{n,r}(x) = A_n(x) + (1-x)\sum_{i=0}^{r} C_{i-1}A_{n-i}(x)$

Corollaire

On a $A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(132)} x^{fix(\pi)}$

On conclut que $F_{2n} = \#\{\sigma \in S_{2n}(\mu); \sigma(1) \text{ impair }\}$ et $F_{2n+1} = \#\{\sigma \in S_{2n+1}(\mu); \sigma(1) \text{ pair }\}$ pour $\mu = 321$.

On note $\mathcal{E}_{n,r}$ l'ensemble des bijections π de $[n]$ vers $\{r+1, \cdots, r+n\}$ telles que $\mathrm{st}(\pi) \in S_n(132)$ et considérons la fonction génératrice $E_{n,r}(x) = \sum_{\pi \in \mathcal{E}_{n,r}} x^{\mathrm{fix}(\pi)}$ où l'on convient $E_{0,r}(x) = 1$

Proposition

On a $E_{n,r}(x) = A_n(x) + (1-x)\sum_{i=0}^{r} C_{i-1}A_{n-i}(x)$

Corollaire

On a $A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(132)} x^{fix(\pi)}$

- C. Krattenthaler, Advances in Applied Mathematics 27,*Permutations with Restricted Patterns and Dyck Paths*
- Rodica Simion and Frank W. Schmidt, *Restricted Permutations*, Europ.l. Combinatorics (1985) 6, 383-406
- Aaron Robertson, Dan Saracino, Doron Zeilberger, *Refined restricted permutations*
- Gi-Sang Cheon, Sang-Gu Lee, Louis W. Shapiro *The Fine numbers refined*, European Journal of Combinatorics 31 (2010) 120-128
- Volker Strehl *A note on similarity relations*, Discrete Mathematics 19 (W7) 99-101.
- Derek Desantis, Rebecca Field, Wesley Hough, Brant Jones , Rebecca Meissen , and Jacob Ziefle *Permutation pattern avoidance and the Catalan Number*, Missouri J. of Math. sci., Vol. 25, 2010
- Emeric Deutsch, Louis Shapiro *A survey of the Fine numbers*, Discrete Mathematics, pp 241-265, 2001

J. Françon, G. Viennot *Permutations selon leurs pics, creux, doubles montées et double descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi*, Discrete Mathematics, pp 21-35, 1979

Shushuo Fu, Dazhao Tang, Bin Han, and Jiang Zeng *(q, t)-Catalan Numbers*, Discrete Mathematics, pp 9, 2018

Sergi Elzalde *Fixed Points and Excedances in Restricted Permutations*, Dartmouth College, pp 6, 2012

T. Fine. Extrapolation when very little is known about the source, Inform and Control 331 - 359