Table des matières

Introduction

La première fois où le nombre de Fine a été vu était dans la recherche de la prédiction ou de l'extrapolation non statistique d'une fonction faite par Terrence Fine [11]. Avec la puissance des ordinateurs d'aujourd'hui, sa recherche montre beaucoup d'intérêt sur l'apprentissage automatique comme les génératives modèle. Dans son article, il a introduit le concept des relations de similarité, qui est à la base du nombre de Fine. Ce nombre est étroitement lié au nombre de Catalan qui fait l'objet d'étude de plusieurs objets combinatoire tels que les chemins, les permutations et les graphes. Dans le présent memoire, qui est inspiré de [3], les nombres de Fine sont désignés par F_n. Dans la suite, on notera par C_n les nombres de Catalan et on notera par RS_n, respectivement S_n, l'ensemble des relations de similarité, respectivement des permutations, sur l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Étant donné que les permutations et les relations de similarité jouent un rôle crucial dans l'interprétation des nombres de Fine, il est donc primordial d'approfondir la recherche sur leurs implications. C'est précisément l'objectif de ce memoire, qui marque cependant le commencement d'une exploration approfondie plutôt qu'une présentation exhaustive de ces nombres.

De ce fait, ce memoire est organisé en deux chapitres fondamentaux. Le premier chapitre, les préliminaires, a pour objectif de fournir les connaissances et outils nécessaires à la compréhension de la suite du document. Il présente les définitions, théorèmes et propriétés essentiels abordés dans la semestre S10 du parcours combinatoire et qui seront utilisés ultérieurement. Ensuite, nous détaillons la définition des chemins de Fine et ses propriétés fondamentales, à savoir les fractions continues et la fonction génératrice du nombre de Fine.

Finalement, le second chapitre se concentre sur les interprétations combinatoires du nombre de Fine, en mettant particulièrement l'accent sur les permutations évitant un motif. Dans un premier temps, nous introduisons les relations de similarité et explorons leurs liens avec les nombres de Fine. Ensuite, nous généralisons la relation entre les permutations évitant un motif et les relations de similarité. Enfin, nous établissons divers résultats concernant les permutations évitant un motif, afin de développer des interprétations combinatoires approfondies des nombres de Fine.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Chemins de Motzkin

Définition 1.1.1. Un chemin est une suite de points $(A_i)_{0\leq i\leq n}$ dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que, pour tout i, si (a_i, b_i) sont les coordonnées de A_i, alors pour tout $i < n$, $a_{i+1} - a_i = 1$ et $|b_{i+1} - b_i| \leq 1$.

Dans la suite, on notera par $\Gamma^i_{n,1}$ l'ensemble des chemins de $A_0 = (0,0)$ vers $A_n = (n,i)$ en n pas.

Propriété 1.1.1. *Soit $c \in \Gamma^i_{n,1}$ avec $c = (A_0, A_1, \cdots, A_n)$ où $A_i = (a_i, b_i)$.*
On a $b_0 = 0$, $b_n = i$ et pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $A_k = (k, b_k)$.

Définition 1.1.2. Soit $c \in \Gamma^i_{n,1}$. On dit que le k-ième pas de c est :

- un palier, que l'on note par la lettre p, si $b_k - b_{k-1} = 0$.
- une montée, que l'on note par la lettre m, si $b_k - b_{k-1} = 1$.
- une descente, que l'on note par la lettre d, si $b_k - b_{k-1} = -1$.

Tout chemin $c \in \Gamma^i_{n,1}$ est entièrement détérminé par $b_0, b_1, \cdots, b_n$. En conséquence, nous adoptons la notation suivante pour un chemin donné : $c = c_1c_2\cdots c_n$ où $c_k \in \{p, m, d\}$ représente la k-ième pas de c de niveau b_{k-1}. La longueur du chemin, notée $|c|$, correspond au nombre total de pas. On désigne par $|x|_u$ le nombre de lettre dans le mot x égal à u. Nous notons également l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ par $[n]$ tout au long du document.

Définition 1.1.3. Les chemins de Motzkin sont les éléments de l'ensemble $\Gamma^0_{n,1}$ qui vérifient, pour tout $c \in \Gamma^0_{n,1}$:

(i) $\forall i \in [n]$, $|c_1c_2\cdots c_i|_m \geq |c_1c_2\cdots c_i|_d$

(ii) $|c_1c_2\cdots c_n|_m = |c_1c_2\cdots c_n|_d$

On note par γ_{k-1} le niveau du k-ième pas d'un chemin de Motzkin c. On a $\gamma_0 = 0$.

Proposition 1.1.2. *Soit* $c \in \Gamma^0_{n,1}$. *Pour tout* $i \geq 2$, *on a* $|c_1 \cdots c_{i-1}|_m - |c_1 \cdots c_{i-1}|_d = \gamma_{i-1}$

Preuve : On a

$$\begin{aligned}
\gamma_{i-1} &= (\gamma_{i-1} - \gamma_{i-2}) + (\gamma_{i-2} - \gamma_{i-3}) + \cdots + (\gamma_1 - \gamma_0) \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} (\gamma_j - \gamma_{j-1}) \\
&= \sum_{\substack{j \leq i-1 \\ c_j = m}} (\gamma_j - \gamma_{j-1}) + \sum_{\substack{j \leq i-1 \\ c_j = d}} (\gamma_j - \gamma_{j-1}) + \sum_{\substack{j \leq i-1 \\ c_j = p}} (\gamma_j - \gamma_{j-1}) \\
&= |c_1 \cdots c_{i-1}|_m - |c_1 \cdots c_{i-1}|_d \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Définition 1.1.4. Un 2-chemin de Motzkin est un chemin de Motzkin caractérisé par deux types de paliers : le palier rouge, noté r, et le palier bleu, noté b. De plus, un chemin $c = c_1 c_2 \cdots c_n$, avec $c_k \in \{m, d, r, b\}$, est considéré comme un 2-chemin de Motzkin s'il ne comporte aucun palier rouge de niveau zéro.

Dans la suite, l'ensemble des 2-chemin de Motzkin en n pas sera noté par Γ_n.

Définition 1.1.5. Un chemin de Fine est un 2-chemin de Motzkin sans palier bleu de niveau zéro. On note par $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des chemin de Fine en n pas.

1.2 Nombres de Catalan

Définition 1.2.1. Les nombres de Catalan sont les nombres C_n qui vérifient la relation de récurrence suivante :

(i) $C_0 = 1$

(ii) $\forall n \geq 1$, $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$

On note $C(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^n$ la fonction génératrice ordinaire des nombres de Catalan

Proposition 1.2.1. On a

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned}
C(z) &= 1 + \sum_{n \geq 1} C_n z^n = 1 + \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} = 1 + \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n-1 \\ j+i = n-1}} C_i C_j \\
&= 1 + z \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ j+i = n}} (C_i z^i)(C_j z^j) = 1 + z \left[\left(\sum_{i \geq 0} C_i z^i \right) \left(\sum_{j \geq 0} C_j z^j \right) \right] \\
&= 1 + z (C(z))^2
\end{aligned}$$

Cela implique que $C(z)$ est solution de l'équation $zt^2 - t + 1 = 0$. On a $C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$ ou $C(z) = \frac{1 + \sqrt{1-4z}}{2z}$.

La limite quand z tends vers 0 de $\frac{1 + \sqrt{1-4z}}{2z}$ (resp. $\frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$) est infini (resp. 1)

En conséquent, $C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$ ■

1.3 Fractions continues de Stieltjes

Définition 1.3.1. Une S-fraction est une expression de la forme

$$S(z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{c_1 z}{1 - \cfrac{c_2 z}{1 - \cfrac{c_3 z}{\ddots}}}}$$

où z est une variable formelle et c_i sont des éléments d'un anneau commutatif.

La proposition suivante est analogue au Lemme 2.11 dans [9].

Proposition 1.3.1.

$$\begin{aligned} S(z) &= \cfrac{1}{1 - c_1 z - \cfrac{c_1 c_2 z^2}{1 - (c_2 + c_3) z - \cfrac{c_3 c_4 z^2}{1 - (c_4 + c_5) z - \cfrac{c_5 c_6 z^2}{\ddots}}}} \\ &= 1 + \cfrac{c_1 z}{1 - (c_1 + c_2) z - \cfrac{c_2 c_3 z^2}{1 - (c_3 + c_4) z - \cfrac{c_4 c_5 z^2}{1 - (c_5 + c_6) z - \cfrac{c_6 c_7 z^2}{\ddots}}}} \end{aligned}$$

Proposition 1.3.2. *On a*

$$C(z) = \cfrac{1}{1 - z - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}}$$

Preuve : Comme $C(z)$ est solution de l'équation $zx^2 - x + 1 = 0$, alors on a

$$C(z) = \frac{C(z)}{1} = \frac{C(z)}{C(z) - zC^2(z)} = \frac{1}{1 - zC(z)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z}{1 - zC(z)}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z}{1 - \cfrac{z}{\ddots}}}$$

On voit que $C(z)$ est une S-fraction avec $c_i = 1$ ($\forall i \geq 1$). D'où le résultat est obtenu en utilisant la Proposition 1.3.1. ■

1.4 Chemins de Motzkin valué

Définition 1.4.1. Un 2-chemin de Motzkin valué est un couple (c,p) où $c = c_1 c_2 \cdots c_n$ et $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ vérifient les conditions suivantes :
(i) $c \in \Gamma_n$
(ii). p est le poids associé à c
(iii). $0 \leq p_i \leq \gamma_{i-1}$, si $c_i = m$ ou $c_i = b$
(iv). $0 \leq p_i \leq \gamma_{i-1} - 1$, si $c_i = d$ ou $c_i = r$

Dans la suite, nous adopterons la notation du cours de combinatoire en S10 pour désigner l'ensemble des 2-chemins de Motzkin valués ayant n pas, noté $HL(n)$. Cette notation sera employée ultérieurement. Les chemins, allant de $A_0 = (0,0)$ vers $A_n = (n,i)$, qui ont deux types de palier (à savoir rouge et bleu) est noté par $\Gamma^i_{n,2}$.
Soit $c \in \Gamma^i_{n,2}$. Nous attribuons à chaque pas de c un poids selon les conditions suivante :
(i) si le j-ième pas est une montée (i.e $c_j = m$), alors on affecte le poids $m_{\gamma_{j-1}}$
(ii) si le j-ième pas est une descente (i.e $c_j = d$), alors on affecte le poids $d_{\gamma_{j-1}}$
(iii) si le j-ième pas est un palier bleu (i.e $c_j = b$), alors on affecte le poids $b_{\gamma_{j-1}}$
(iv) si le j-ième pas est un palier rouge (i.e $c_j = r$), alors on affecte le poids $r_{\gamma_{j-1}}$
où les $m_{\gamma_{j-1}}$, $d_{\gamma_{j-1}}$, $b_{\gamma_{j-1}}$ et $r_{\gamma_{j-1}}$ sont des éléments d'un anneau commutatif.

Dans toute la suite, on pose $H_{i,n} = \sum_{c \in \Gamma^i_{n,2}} w(c)$ où $w(c) = \prod_{c_j = m} m_{\gamma_{j-1}} \prod_{c_j = d} d_{\gamma_{j-1}} \prod_{c_j = b} b_{\gamma_{j-1}} \prod_{c_j = r} r_{\gamma_{j-1}}$

Proposition 1.4.1. *On a :*

$$\begin{cases} H_{i,0} & = 0 \text{ si } i \geq 1 \\ H_{0,n} & = b_0 H_{0,n-1} + d_1 H_{1,n-1} \\ H_{i,n} & = 0 \text{ si } i > n \\ H_{i,n} & = m_{i-1} H_{i-1,n-1} + (b_i + r_i) H_{i,n-1} + d_{i+1} H_{i+1,n-1} \text{ si } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

avec la convention $H_{0,0} = 1$

Preuve : Soit $c \in \Gamma^i_{n,2}$. Il est clair que si $i \geq 1$ et $n = 0$ alors $w(c) = 0$
ou encore $H_{i,0} = 0$.
De plus, comme $\Gamma^0_{n,2} = \Gamma_n$ alors, on a $c_n \neq r$ et $c_n \neq m$.

Et

$$\begin{aligned}
H_{0,n} &= \sum_{\substack{c\in\Gamma^0_{n,2}\\ c_n=b}} w(c) \ + \sum_{\substack{c\in\Gamma^0_{n,2}\\ c_n=d}} w(c)\\
&= \sum_{c\in\Gamma^0_{n-1,2}} w(c)b_{\gamma_{n-1}} \ + \sum_{c\in\Gamma^1_{n-1,2}} w(c)d_{\gamma_{n-1}}\\
&= \sum_{c\in\Gamma^0_{n-1,2}} w(c)b_0 \ + \sum_{c\in\Gamma^1_{n-1,2}} w(c)d_1\\
&= b_0H_{0,n-1} + d_1H_{1,n-1}
\end{aligned}$$

D'autre part, si $i > n$, alors $\Gamma^i_{n,2}$ est vide car on n'atteint jamais le niveau i en n pas pour tout les chemins de $\Gamma^i_{n,2}$. Cela implique que $\forall c \in \Gamma^i_{n,2}$, $H_{i,n} = 0$ si $i > n$.

Enfin, soit $i \in [n]$ et $c \in \Gamma^i_{n,2}$,
On a :

$$\gamma_{n-1} = \begin{cases} i-1 & \text{si } c_n = m \\ i & \text{si } (c_n = b \text{ ou } c_n = r) \\ i+1 & \text{si } c_n = d \end{cases}$$

On note $c^{(1)}$ le chemin obtenu à partir de c en supprimant sa dernière lettre.
On obtient alors la relation suivante :

$$w(c) = \begin{cases} w(c^{(1)})m_{i-1} & \text{si } c_n = m \\ w(c^{(1)})b_i & \text{si } c_n = b \\ w(c^{(1)})r_i & \text{si } c_n = r \\ w(c^{(1)})d_{i+1} & \text{si } c_n = d \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
H_{i,n} &= \sum_{c\in\Gamma^i_{n,2}} w(c)\\
&= \sum_{\substack{c\in\Gamma^i_{n,2}\\ c_n=m}} w(c) + \sum_{\substack{c\in\Gamma^i_{n,2}\\ c_n=b}} w(c) + \sum_{\substack{c\in\Gamma^i_{n,2}\\ c_n=r}} w(c) + \sum_{\substack{c\in\Gamma^i_{n,2}\\ c_n=d}} w(c)\\
&= m_{i-1} \sum_{c^{(1)}\in\Gamma^{i-1}_{n-1,2}} w(c^{(1)}) + b_i \sum_{c^{(1)}\in\Gamma^{i}_{n-1,2}} w(c^{(1)})\\
&\quad + r_i \sum_{c^{(1)}\in\Gamma^{i}_{n-1,2}} w(c^{(1)}) + d_{i+1} \sum_{c^{(1)}\in\Gamma^{i+1}_{n-1,2}} w(c^{(1)})\\
&= m_{i-1}H_{i-1,n-1} + (b_i + r_i)H_{i,n-1} + d_{i+1}H_{i+1,n-1}
\end{aligned}$$

D'où le résultat $\blacksquare$

Dans toute la suite, on pose $H_i(z) = \sum_{n\geq 0} H_{i,n} z^n$ $(i \geq 0)$.

Proposition 1.4.2. *On a :*

$$H_0(z) = \cfrac{1}{1 - b_0 z - \cfrac{m_0 d_1 z^2}{1 - (b_1 + r_1)z - \cfrac{m_1 d_2 z^2}{1 - (b_2 + r_2)z - \cfrac{m_2 d_3 z^2}{\ddots}}}}$$

Preuve : D'après la Proposition 1.4.1, on a

$$\begin{aligned}
H_0(z) &= 1 + \sum_{n\geq 1} H_{0,n} z^n \\
&= 1 + b_0 \sum_{n\geq 1} H_{0,n-1} z^n + d_1 \sum_{n\geq 1} H_{1,n-1} z^n \\
&= 1 + b_0 z H_0(z) + d_1 z H_1(z) \\
&= \cfrac{1}{1 - b_0 z - d_1 z \cfrac{H_1(z)}{H_0(z)}}
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $i \geq 1$,

$$\begin{aligned}
H_i(z) &= \sum_{n\geq 0} H_{i,n} z^n \\
&= \sum_{n\geq 1} H_{i,n} z^n \\
&= \sum_{n\geq 1} m_{i-1} H_{i-1,n-1} z^n + (b_i + r_i) \sum_{n\geq 1} H_{i,n-1} z^n + d_{i+1} \sum_{n\geq} H_{i+1,n-1} z^n \\
&= m_{i-1} z H_{i-1}(z) + (b_i + r_i) z H_i(z) + d_{i+1} H_{i+1}(z)
\end{aligned}$$

Cela implique que :

$$\frac{H_i(z)}{H_{i-1}(z)} = \cfrac{m_{i-1} z}{1 - (b_i + r_i)z - d_{i+1} z \cfrac{H_{i+1}(z)}{H_i(z)}}$$

Par conséquent :

$$H_0(z) = \cfrac{1}{1 - b_0 z - d_1 z \cfrac{m_0 z}{1 - (b_1 + r_1) z - d_2 z \cfrac{H_2(z)}{H_1(z)}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 - b_0 z - \cfrac{m_0 d_1 z^2}{1 - (b_1 + r_1) z - \cfrac{m_1 d_2 z^2}{1 - (b_2 + r_2) z - \cfrac{m_2 d_3 z^2}{\ddots}}}}$$

D'où le résultat. ■

Corollaire 1.4.3. *On a* $H_0(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{c \in \Gamma_n} w(c)$

Preuve : Le résultat se déduit du fait que $H_{0,n} = \sum_{c \in \Gamma^0_{n,2}} w(c) = \sum_{c \in \Gamma_n} w(c)$

Proposition 1.4.4. *Posons* $\Gamma(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} |\Gamma_n| z^n$. *On a*

$$\Gamma(z) = \cfrac{1}{1 - z - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}}$$

Preuve : On a $|\Gamma_n| = \sum_{c \in \Gamma_n} 1 = \sum_{c \in \Gamma_n} w(c)$ avec

$$1 = w(c) = \prod_{c_j = m} m_{\gamma_{j-1}} \prod_{c_j = d} d_{\gamma_{j-1}} \prod_{c_j = b} b_{\gamma_{j-1}} \prod_{c_j = r} r_{\gamma_{j-1}}$$

Par conséquent, $m_{\gamma_{i-1}} = d_{\gamma_{i-1}} = r_{\gamma_{i-1}} = b_{\gamma_{i-1}} = 1$. D'après la Proposition 1.4.2 et le Corollaire 1.4.3, on obtient :

$$1 + \sum_{n \geq 1} |\Gamma_n| z^n = 1 + \sum_{n \geq 1} z^n \left(\sum_{c \in \Gamma_n} 1 \right) = \cfrac{1}{1 - z - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}}$$

D'où le résultat. ■

Corollaire 1.4.5. *On a* $|\Gamma_n| = C_n$.

Preuve : De ce qu'on voit dans la Proposition 1.3.2 et dans la Proposition 1.4.4, $C(z)$ et $\Gamma(z)$ ont le même développement en fraction continue.

1.5 Développement en fraction continue de $F(t)$

Proposition 1.5.1. *Posons* $F(z) = \sum_{n\geq 0} F_n z^n$ *avec la convention* $F_0 = 1$ *où* $F_n = |\mathcal{F}_n|$. *On a*

$$F(z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}}$$

Preuve : Soit $c \in \mathcal{F}_n$. On affecte à chaque palier bleu le poids 0 (resp. 1) si son niveau est nul (resp. non nul). Ainsi

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{c\in\Gamma_n} w(c) \\ &= \sum_{c\in\Gamma_n} \prod_{c_i=m} m_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=d} d_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=b} b_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=r} r_{\gamma_{i-1}} \end{aligned}$$

où $m_j = 1, d_j = 1, r_j = 1$ et $b_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq 0 \\ 0 & \text{si } j = 0 \end{cases}$

En utilisant la Proposition 1.4.2, on obtient le résultat. ∎

Proposition 1.5.2. *On a*

$$F(z) = \frac{1}{2+z}(1 + C(z))$$

Preuve : D'abord, on pose

$$\Delta(z) = \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}}$$

On a $C(z) = \dfrac{1}{1 - z - \Delta(z)}$ et $F(z) = \dfrac{1}{1 - \Delta(z)}$ ou encore $F(z) = \dfrac{C(z)}{1 + zC(z)}$.

Ainsi, on obtient :

$$F(z) = \frac{\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}}{1 + \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}} = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{z(3-\sqrt{1-4z})} = \frac{2 - 2\sqrt{1-4z} + 4z}{z(8+4z)} = \frac{1 + \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}}{2+z}$$

∎

Proposition 1.5.3. *Pour tout $n \geq 2$,*

$$F_n = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-2}(-\frac{1}{2})^p C_{n-p}$$

Preuve : D'après la Proposition 1.5.2, on a

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2+z}(1+C(z)) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}(1+C(z)) = \frac{1}{2}\left(\textstyle\sum_{p\geq 0}(-\frac{1}{2})^p z^p\right)\left(1+\textstyle\sum_{m\geq 0} C_m z^m\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\textstyle\sum_{p\geq 0}(-\frac{1}{2})^p z^p + \sum\limits_{k,m\geq 0} C_m(-\frac{1}{2})^k z^{m+k}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\textstyle\sum_{p\geq 0}(-\frac{1}{2})^p z^p + \sum\limits_{n\geq 0} z^n \sum\limits_{k=0}^{n}(-\frac{1}{2})^k C_{n-k}\right] \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} [z^n]F(z) &= \frac{1}{2}\left[(-\frac{1}{2})^n + \sum_{k=0}^{n}(-\frac{1}{2})^k C_{n-k}\right] = \frac{1}{2}\left[(-\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}(-\frac{1}{2})^k C_{n-k}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2(-\tfrac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}(-\frac{1}{2})^k C_{n-k}\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2}(-\frac{1}{2})^k C_{n-k} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 1.5.4. *On a*

$$\forall n \geq 1, C_n = 2F_n + F_{n-1}$$

Preuve : On en déduit de la Proposition 1.5.2 que $C(z) = (2+z)F(z) - 1$. Par conséquent, on obtient

$$C(z) = (2+z)\sum_{n\geq 0} F_n z^n - 1 = \sum_{n\geq 0} 2F_n z^n + \sum_{n\geq 0} F_n z^{n+1} - 1 = \sum_{n\geq 1} 2F_n z^n + \sum_{n\geq 1} F_{n-1} z^n + 1$$

D'où le résultat $\blacksquare$

Définition 1.5.1. Un chemin de Dyck de longueur $2n$ est un chemin dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de $(0,0)$ vers $(2n,0)$ formé par les pas montées $(1,1)$ et descentes $(1,-1)$.

Il est bien connu que le nombre de Catalan C_n est égal au nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$. Dans toute la suite, on pose $\overline{\mathrm{Dyck}}(n)$ l'ensemble des chemins de Dyck qui vérifient la condition si $p_i = m$ et $\gamma_{i-1} = 0$, alors $p_{i+1} = m$.

Proposition 1.5.5. *La transformation* $\theta : \mathcal{F}_n \longrightarrow \overline{\text{Dyck}}(n)$ *;* $c \longrightarrow p = p_1 \cdots p_{2n}$ *défini comme suit, pour tout* $i \in [n]$,

$$p_{2i-1}p_{2i} = \begin{cases} mm & si\ c_i = m \\ dd & si\ c_i = d \\ md & si\ c_i = b \\ dm & si\ c_i = r \end{cases}$$

est une application bijective.

Preuve : Soit $c \in \mathcal{F}_n$ et $\theta(c) := p$. Nous allons voir que $p \in \overline{\text{Dyck}}(n)$.
Par définition de $\mathcal{F}_n$, on a $|c|_d = |c|_m$ ou encore
$\#\{i; p_{2i-1}p_{2i} = mm\} = \#\{i; p_{2i-1}p_{2i} = dd\}$. Par construction, à chaque palier bleu (resp. palier rouge) de c est transformé en md (resp. en dm) ; ce qui implique que $|p|_m = |p|_d$.
Vérifions ensuite la relation $|p_1 \cdots p_j|_m \geq |p_1 \cdots p_j|_d$, $(\forall j \leq 2n)$.
Fixons j et étudions le cas où j impair et j pair.
Supposons que j est pair. Il existe $i \in [n]$ tel que $j = 2i$. On a

$$|p_1 \cdots p_{2i-1}p_{2i}|_m = |c_1 \cdots c_i|_m \geq |c_1 \cdots c_i|_d = |p_1 \cdots p_{2i-1}p_{2i}|_d$$

Supposons ensuite que j est impair. Il existe $i \in [n]$ tel que $j = 2i - 1$.
Nous allons distinguer le cas où $c_i = m$ (resp. $c_i = r, c_i = b, c_i = d$).
Si $c_i = m$, alors on a

$$\begin{aligned} |p_1 \cdots p_{2i-1}|_m &= |p_1 \cdots p_{2i-1}p_{2i}|_m - 1 \\ &= |c_1 \cdots c_i|_m - 1 \\ &= |c_1 \cdots c_{i-1}|_m \\ &\geq |c_1 \cdots c_{i-1}|_d = |p_1 \cdots p_{2i-2}|_d = |p_1 \cdots p_{2i-2}p_{2i-1}|_d \end{aligned}$$

Si $c_i = r$, alors on a

$$\begin{aligned} |p_1 \cdots p_{2i-1}|_m &= |p_1 \cdots p_{2i-2}|_m \\ &= |c_1 \cdots c_{i-1}|_m \\ &\geq |c_1 \cdots c_{i-1}|_d = |c_1 \cdots c_i|_d = |p_1 \cdots p_{2i-1}p_{2i}|_d = |p_1 \cdots p_{2i-1}|_d \end{aligned}$$

Si $c_i = d$ ou $c_i = b$, alors on a

$$\begin{aligned} |p_1 \cdots p_{2i-1}|_m &= |p_1 \cdots p_{2i}|_m \\ &= |c_1 \cdots c_i|_m \\ &\geq |c_1 \cdots c_i|_d = |p_1 \cdots p_{2i-1}p_{2i}|_d > |p_1 \cdots p_{2i-1}|_d \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $j \leq 2n$, $|p_1 \cdots p_j|_m \geq |p_1 \cdots p_j|_d$. Ainsi, $p \in \text{Dyck}(n)$
De plus, s'il existe j tel que $p_j = m$ et $\gamma_{j-1} = 0$, nécéssairement ce j est impair i.e il existe $i \leq n$ tel que $j = 2i - 1$. Cela implique que $|p_1 \cdots p_{2i-2}|_m = |p_1 \cdots p_{2i-2}|_d$ ou encore

$|c_1 \cdots c_{i-1}|_m = |c_1 \cdots c_{i-1}|_d$. Comme c est un élément $\mathcal{F}_n$, alors c_i ne peut pas être égal à d, r ou b. D'où, $c_i = m$ ou encore, $p_{2i} = p_{j+1} = m$. Ainsi $p \in \overline{\text{Dyck}}(n)$. Ce qui prouve que θ est bien définie.

Réciproquement ; soit $p \in \overline{\text{Dyck}}(n)$ et c son antécédent par θ (s'il existe).
On note que $\#\{i; p_{2i-1}p_{2i} = mm\} = \#\{i; p_{2i-1}p_{2i} = dd\}$. Cela implique que $|c|_m = |c|_d$.
Fixons $j \in [n]$ et montrons que $|c_1 \cdots c_j|_m \geq |c_1 \cdots c_j|_d$. On a

$$|c_1 \cdots c_j|_m = |p_1 \cdots p_{2j-1}p_{2j}|_m \geq |p_1 \cdots p_{2j-1}p_{2j}|_d = |c_1 \cdots c_j|_d$$

Enfin montrons que c ne contient pas ni palier bleu ni palier rouge de niveau zéro.

Soit $i \in [n]$. Si $c_i = b$ (resp $c_i = r$) alors on a $\gamma_{i-1} \neq 0$ car $p_{2i-1}p_{2i} = md$
(resp. $p_{2i-1}p_{2i} = dm$) avec le niveau du pas p_{2i} différent de 1 (resp. différent de 0).
Ainsi, $c \in \mathcal{F}_n$. Enfin l'application θ est bijective ■

Proposition 1.5.6. *On a :* $F_n = \sum_{i=2}^{n} C_{i-1}F_{n-i}$

Preuve :
Soit $p \in \overline{\text{Dyck}}(n)$ et $i \leq 2n$ le plus petit entier qui vérifie :

$$|p_1p_2 \cdots p_{2i}|_m = |p_1p_2 \cdots p_{2i}|_d \text{ et } \forall j < 2i, |p_1p_2 \cdots p_j|_m > |p_1p_2 \cdots p_j|_d$$

Nécéssairement, $i > 1$. On note par $\overline{\text{Dyck}}_i(n)$ l'ensemble des éléments $\overline{\text{Dyck}}(n)$ qui vérifient les conditions précédentes.
Soit $p = p_1p_2 \cdots p_{2n} \in \overline{\text{Dyck}}_i(n)$. On a $p_1 = p_2 = m$, $p_{2i-1} = p_{2i} = d$. Soit $p' = p'_1 \cdots p'_{2(i-1)}$ et $p'' = p''_1 \cdots p''_{2(n-i)}$ obtenu à partir de p tel que

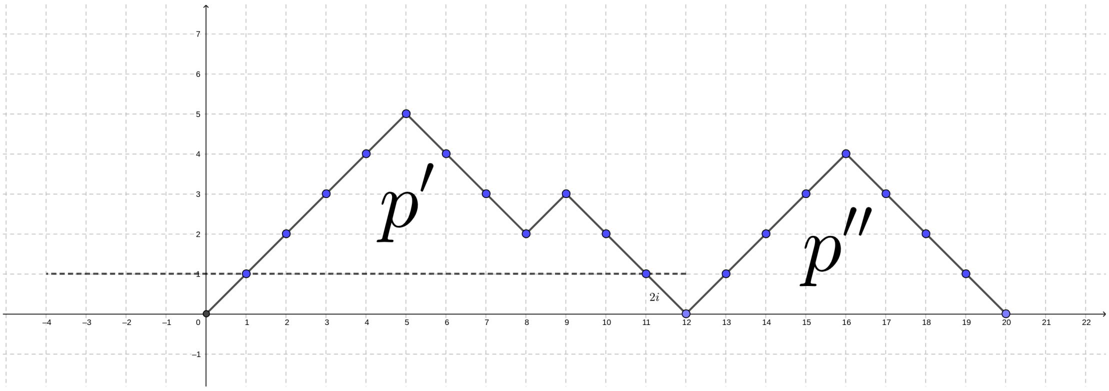
- $p'_k = p_{k+1}, (k \leq 2(i-1))$
- $p''_k = p_{2i+k}, (k \leq 2(n-i))$

On a $p' \in \text{Dyck}(i-1)$ et $p'' \in \overline{\text{Dyck}}(n-i)$.
Considérons l'application $\alpha : \overline{\text{Dyck}}_i(n) \longrightarrow \text{Dyck}(i-1) \times \overline{\text{Dyck}}(n-i), p \mapsto (p', p'')$, défini par la transformation ci-dessus. On voit que α est une application bijective.

Par conséquent,

$$\#\bigcup_{i=2}^{n} \mathrm{Dyck}(i-1) \times \overline{\mathrm{Dyck}}(n-i) = \#\bigcup_{i=2}^{n} \overline{\mathrm{Dyck}}_i(n) = \#\overline{\mathrm{Dyck}}(n)$$

D'après la Proposition 1.5.5, on a $F_n = \#\overline{\mathrm{Dyck}}(n)$ et le fait que $C_n = \#\mathrm{Dyck}(n)$, on obtient le résultat. Ci-dessous une illustration.



Chapitre 2

Nombres de Fine, relations de similarité et permutations

Dans toute la suite, on note par S_n l'ensemble des permutations de [n]. Soit $m \leq n$ et $x = x_1 x_2 \cdots x_m$ une permutation qui n'est pas nécessairement un élément de S_m.
On pose $\mathrm{st}(x) = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m$ la permutation obtenue à partir de x en remplaçant la plus petite lettre de x par 1, la 2$^{\text{e}}$ plus petite lettre de x par 2 et ainsi de suite. Donc la plus grande lettre de x par m. Soit $\pi \in S_n$. On dit que π contient le motif $\alpha \in S_m$, s'il existe $i_1, i_2, \cdots, i_m$ tel que $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ et $\mathrm{st}(\pi_{i_1} \pi_{i_2} \cdots \pi_{i_m}) = \alpha$. Dans le cas contraire, on dit que π évite le motif α. Soit $i \in [n]$. On dit que, i est un point fixe de π si $\pi_i = i$ et on note par $\mathrm{Fix}(\pi)$ l'ensemble des points fixes de π et $\mathrm{fix}(\pi)$ son cardinal.
On note par $S_n(\alpha)$ l'ensemble de toutes les permutations $\pi \in S_n$ qui évitent le motif α et on désigne par $s_n(\alpha)$ son cardinal. Par suite, on note par $S_n^k(\alpha)$ l'ensemble des permutations $\pi \in S_n(\alpha)$ qui ont exactement k points fixes et son cardinal est désigné $s_n^k(\alpha)$.

2.1 Relations de similarité

Définition 2.1.1. Une relation de similarité $\mathcal{R}$ sur [n] est une relation binaire, réflexive et symétrique vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x, y, z \in [n], ((x < y \leq z \text{ et } x\mathcal{R}z) \implies (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z))$$

2.1.1 Points isolés

Définition 2.1.2. Soit $i \in [n]$. On dit que i est un point isolé de $\mathcal{R}$ si

$$\forall j \in [n], (i\mathcal{R}j \implies i = j)$$

Définition 2.1.3. Une relation de similarité $\mathcal{R}$ est non-singulière si elle n'a aucun point isolé.

On note par $\mathrm{RS}_n(k)$ l'ensemble des éléments de RS_n ayant exactement k points isolés. On note par Sim_n l'ensemble des mots $r = r_1 r_2 \cdots r_n$, avec les $r_i \in \mathbb{N}$, tel que
$\forall i \leq n, 0 \leq r_i \leq i - 1$ et $r_{i+1} \leq r_i + 1$ avec la convention $r_{n+1} = 0$

Proposition 2.1.1.
La transformation Φ :$\mathrm{RS}_n \to \mathrm{Sim}_n$, $\mathcal{R} \to r = r_1r_2\cdots r_n$ *où, pour* $1 \leq i \leq n$, r_i *est égal au nombre d'entiers* j *tels que* $j < i$ *et* $j\mathcal{R}i$, *est une application bijective.*
De plus, le nombre de points isolés de $\mathcal{R}$ *est égal au nombre d'entiers* i *tels que* $r_i = r_{i+1} = 0$

Preuve : Soit $\mathcal{R} \in \mathrm{RS}_n$ et $\Phi(\mathcal{R}) := r = r_1r_2\cdots r_n$. Pour tout $1 \leq j \leq n$, notons $E_j(\mathcal{R}) = \{k < j; k\mathcal{R}j\}$. On a $\#E_j(\mathcal{R}) = r_j$ et $r_j \leq j-1$ pour tout j.
Soit $1 \leq i < n$. Si $r_{i+1} = 0$ on a toujours $r_{i+1} \leq r_i + 1$.
Si $r_{i+1} > 0$, alors $i\mathcal{R}(i+1)$ d'après la définition d'une relation de similarité. De plus, si $k \in E_{i+1}(\mathcal{R})$ et $k < i$, alors $k\mathcal{R}i$, i.e $k \in E_i(\mathcal{R})$. Par conséquent, $r_{i+1} - 1 \leq r_i$.
Ce qui prouve que Φ est bien définie.

D'autre part, soit $r = r_1r_2\cdots r_n \in \mathrm{Sim}_n$ et $p_k = k - r_k$ pour tout k. On a $1 \leq p_k \leq p_{k+1}$ si $k < n$. Soit $\mathcal{R}$ un antécédent de r par Φ. D'après la définition de $\mathcal{R}$, p_k est la plus petite lettre $\leq k$ telle que $p_k\mathcal{R}k$. Ainsi, pour tout couple (i,j) tel que $i \leq j$, on a l'équivalence $(i\mathcal{R}j \iff i \geq p_j)$. Ce qui prouve que Φ est bijective.

Enfin, soit $1 \leq i \leq n$. Si $i = n$, alors i est un point isolé de $\mathcal{R}$ si et seulement si $r_i = 0$.
Si $i < n$, alors i est un point isolé de $\mathcal{R}$ si et seulement si $r_i = 0$ et i n'est pas en relation avec $i+1$ ou encore $r_i = r_{i+1} = 0$. ■
Posons $\mathrm{Sim}_n(k) = \{r \in \mathrm{Sim}_n; \#\{i; r_i = r_{i+1} = 0\} = k\}$

Corollaire 2.1.2.
On a $\#\mathrm{RS}_n(k) = \#\mathrm{Sim}_n(k)$

Proposition 2.1.3.
Soit la transformation φ *:* $\mathrm{Dyck}(n) \longrightarrow \mathrm{Sim}_n$, $p = p_1p_2\cdots p_{2n} \longrightarrow r = r_1r_2\cdots r_n$ *définie comme suit* :
Soit $\mathrm{Mont}(p) = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ *l'ensemble des entiers* i tels que $p_i = m$. *Alors pour tout* $1 \leq j \leq n$, $r_j = \gamma_{i_j-1}$ *où* γ_{i-1} *est le niveau du i-ième pas de* p. *Alors* φ *est une application bijective.*
De plus, $|\mathrm{Sim}_n(k)| = \#\{p \in \mathrm{Dyck}(n); |\{i \in \mathrm{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0 \text{ et } p_{i+1} = d\}| = k\}$

Preuve : Soit $p = p_1p_2\cdots p_{2n} \in \mathrm{Dyck}(n)$ et $\varphi(p) := r$. Notons que

$$\gamma_{i_j-1} = |p_1p_2\cdots p_{i_j-1}|_m - |p_1p_2\cdots p_{i_j-1}|_d$$

Cela implique que $\gamma_{i_j-1} = r_j \leq |p_1p_2\cdots p_{i_j-1}|_m = j-1$.
De plus, $|p_1p_2\cdots p_{i_j-1}|_m - |p_1p_2\cdots p_{i_j-1}|_d = (j-1) - [(i_j-1)-(j-1)] = 2(j-1) - i_j + 1$.
Donc $r_j = \gamma_{i_j-1} = 2(j-1) - i_j + 1$
Ainsi, $r_{j+1} = 2j - i_{j+1} + 1 < 2j - i_j + 1$ ou encore $r_{j+1} \leq 2j - i_j = r_j + 1$.
D'où $r \in \mathrm{Sim}_n$. Ce qui prouve φ est bien définie.

Réciproquement, soit $r = r_1r_2\cdots r_n \in \mathrm{Sim}_n$ et soit $p = p_1p_2\cdots p_{2n}$ un antécédent de r par φ (s'il existe). On note par $E = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ l'ensemble des i tels que $p_i = m$ avec $i_j = 2j - 1 - r_j$ et $\gamma_{i_j-1} = 2j - i_j - 1$.
Par suite, soit $j \in [n]$ tel que le nombre de descentes entre p_{i_j} et $p_{i_{j+1}}$ est

$$r_j - r_{j+1} + 1 = i_{j+1} - i_j - 1$$

On en déduit alors que $p_1 = m$ et $\gamma_0 = 0$.
Enfin, montrons que $p \in$Dyck(n).
Il suffit de montrer que, pour tout $1 \leq k \leq 2n$, $|p_1 \cdots p_k|_m \geq |p_1 \cdots p_k|_d$
Si $k = 2n$, on a $|p|_d = \sum_{j=1}^{n}(r_j - r_{j+1} + 1) = r_1 - r_{n+1} + n = n$. Par conséquent, $|p|_m = |p|_d$.
Supposons que $k \neq 2n$

- Si $p_k = m$, alors il existe $i_j \in E$ tel que $k = i_j$. On a $|p_1 p_2 \cdots p_k|_m = j$ et $|p_1 p_2 \cdots p_k|_d = \sum_{p=1}^{j-1}(r_p - r_{p+1} + 1) = r_1 - r_j + (j-1) = (j-1) - r_j < j$.
- Si $p_k = d$. Soit i_j le plus grand entier élément de E tel que $i_j < k$. On a $|p_1 p_2 \cdots p_{i_j} \cdots p_k|_m = j$ et $|p_1 p_2 \cdots p_{i_j} \cdots p_k|_d \leq |p_1 p_2 \cdots p_{i_j} \cdots p_k \cdots p_{i_{j+1}}|_d$ avec

$$|p_1 p_2 \cdots p_{i_j} \cdots p_k \cdots p_{i_{j+1}}|_d = \sum_{p=1}^{j}(r_p - r_{p+1} + 1) = r_1 - r_{j+1} + j = j - r_{j+1} \leq j$$

On en déduit que, pour tout $k \leq 2n$, $|p_1 p_2 \cdots p_k|_d \leq |p_1 p_2 \cdots p_k|_m$.
Ainsi, $p \in$Dyck(n). Ce qui prouve que φ est bijective.

Soit $p = p_1 p_2 \cdots p_{2n} \in$ Dyck(n) et $\varphi(p) = r$. Soit $k \in [2n-1]$ tel que $\gamma_{k-1} = 0$ et $p_{k+1} = d$. Il existe $i_j \in$Mont$(p) = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ tel que $k = i_j$. Donc, $\gamma_{k-1} = \gamma_{i_j - 1} = 0 = r_j$. De plus k ne peut pas être pair.

- Si $k = 2n-1$, alors on a $k = i_n$. Donc $\gamma_{i_n - 1} = 0 = r_n$ et avec la convention $r_{n+1} = 0$
- Si $k \neq 2n-1$, on a $p_{k+2} = m$ avec $\gamma_{(k+2)-1} = 0$. Cela implique que $i_{j+1} = k+2$ et on en déduit que $\gamma_{(k+2)-1} = \gamma_{i_{j+1}-1} = 0 = r_{j+1}$.

D'où, $|\text{Sim}_n(k)| = \#\{p \in\text{Dyck}(n); |\{i \in\text{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0 \text{ et } p_{i+1} = d\}| = k\}$. ■

Corollaire 2.1.4.
On a $\#\text{RS}_n(k) = \#\{p \in\text{Dyck}(n); |\{i \in\text{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0 \text{ et } p_{i+1} = d\}| = k\}$.

Preuve : On obtient le résultat en utilisant le Corollaire 2.1.2 et la Proposition 2.1.3 ■

Corollaire 2.1.5. *On a :* $|\text{RS}_n| = C_n$.

Preuve : On obtient le résultat en utilisant la Proposition 2.1.1 et la Proposition 2.1.3 ■

D'après la définition de $\overline{\text{Dyck}}(n)$ dans le chapitre 1, on peut aussi écrire
$\overline{\text{Dyck}}(n) = \{p \in\text{Dyck}(n); |\{i \in\text{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0 \text{ et } p_{i+1} = d\}| = 0\}$

Corollaire 2.1.6. On a, $F_n = |\text{RS}_n(0)|$

Preuve : En utilisant la Proposition 1.5.5 et le Corollaire 2.1.4 , on obtient le résultat.

2.1.2 Relation entre $S_n^k(321)$ et $\mathrm{RS}_n(k)$

Définition 2.1.4. Soit π une permutation de $[n]$. On note $D(\pi)$ l'ensemble des i tels que $\pi_{n-i+1} = i$. Pour toute permutation $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$, on note $r(\sigma)$ sa permutation miroir

$$r(\sigma) = \sigma_n\cdots\sigma_2\sigma_1$$

Proposition 2.1.7. *Soit Σ la transformation $S_n(321) \longrightarrow S_n(123)$, $\sigma \longrightarrow \pi$ définie par $\Sigma(\sigma) := r(\sigma)$. Alors φ est une application bijective.*
De plus, $\mathrm{fix}(\sigma) = |D(r(\sigma))|$

Preuve : Soit $\sigma \in S_n(321)$ et $\Sigma(\sigma) := \pi$. On a $\pi \in S_n(123)$, car sinon on aura $r(\pi) = \sigma \notin S_n(321)$. Ce qui prouve que Σ est bien définie.
Réciproquement, soit $\pi \in S_n(123)$ et σ l'antécédent de π par Σ (s'il existe) tel que $\sigma = r(\pi)$. Comme $\pi \in S_n(123)$, alors $r(\pi) \in S_n(321)$. Par conséquent, Σ est bijective.
De plus, soit $i \in \mathrm{Fix}(\sigma)$. On a $\pi_{n-i+1} = i$. Ainsi $\mathrm{fix}(\sigma) = |D(r(\sigma))|$. ■

Définition 2.1.5. Soit $\sigma \in S_n$ et $i \in [n]$.
On dit que σ_i est un saillant supérieur gauche ou un *ssg* (resp saillant supérieur droite ou un ssd) de σ si $\forall j < i$, $\sigma_j < \sigma_i$ (resp $\forall j > i$, $\sigma_j < \sigma_i$)

Définition 2.1.6. Soit π une permutation de $[n]$. On appelle ssd-décomposition de π l'expression $\pi = w_1u_1w_2u_2\cdots w_su_s$ où les u_i sont les ssd de π et les w_i sont des sous-mots (éventuellement vides) de π.

Lemme 2.1.1. *Soit $\sigma \in S_n$ et $\sigma = w_1u_1w_2u_2\cdots w_su_s$ sa* ssd-*décomposition.*
Alors $\sigma \in S_n(123)$ si et seulement si, $w_1w_2\cdots w_s$ est un mot décroissant.

Preuve : Montrons tout d'abord que, s'il existe $k \in [s]$ tel que $|w_k| > 1$, alors $|w_k|$ est une lettre en un mot décroissant. Il est évident que c'est le cas car sinon on aura w_ku_k contient le motif 123.
De plus, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned}
w_1w_2\cdots w_s \text{ n'est pas décroissant} &\iff \exists k \in [s-1], w_kw_{k+1} \text{ n'est pas décroissant}\\
&\iff \exists k \in [s-1], w_kw_{k+1}u_{k+1} \text{ contient le motif 123}\\
&\iff \sigma \text{ contient le motif 123}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sigma \in S_n(123)$ si et seulement si, $w_1w_2\cdots w_s$ est un mot décroissant. ■

Lemme 2.1.2. *Soit $\sigma \in S_n(321)$ et $1 \leq j \leq n$.*
j est un point fixe de σ si dans la décomposition linéaire de σ, toute lettre à gauche de j est plus petite que j et toute lettre à droite de j est plus grande que j. La réciproque n'est pas vraie.

Preuve : Soit $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n) \in S_n(321)$ et $1 \leq j \leq n$ tel que $\sigma(j) = j$.
Si $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(j-1)$ n'est pas formé par les éléments de $[j-1]$, alors il existe $i < j$ et $k > j$ tel que $\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)$ est un motif 321.

Proposition 2.1.8. *Soit Θ la transformation $S_n(123) \longrightarrow \mathrm{Dyck}(n)$, $\pi \longrightarrow p$ défini par : soit $w_1u_1w_2u_2\cdots w_su_s$ la ssd-décomposition de π et on définit $\Theta(\pi) := p = m_1d_1m_2d_2\cdots m_sd_s$ où m_i, resp d_i, est un mot formé par la seule lettre m, resp d, tel que $|m_i| = |w_i| + 1$ et $|d_i| = u_i - u_{i+1}$ avec la convention $u_{s+1} = 0$.*
Alors Θ est bijective.
De plus, $D(\pi) = \#\{i \in \mathrm{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0, p_{i+1} = d\}$

Preuve : Soit $\pi \in S_n(123)$ et montrons que $|p|_m = |p|_d$. On a :

$$|p|_m = \sum_{k=1}^{s}|m_k| = \sum_{k=1}^{s}(|w_k|+1) = s + \sum_{k=1}^{s}|w_k| = s + (n-s) = n$$

et

$$|p|_d = \sum_{k=1}^{s}|d_k| = \sum_{k=1}^{s}(u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{s+1} = u_1 = n$$

Ensuite, on note $p = p_1p_2\cdots p_{2n}$ avec $p_1 = m$ et $\gamma_0 = 0$, et montrons que

$$k \leq 2n, |p_1p_2\cdots p_k|_m \geq |p_1p_2\cdots p_k|_d$$

On commence par prouver que, $\forall h \leq s$, $n - u_h \leq |m_1d_1\cdots m_{h-1}d_{h-1}|_m$.
Posons $|w_hu_h\cdots w_su_s| = q$. Alors, la plus grande lettre de $\mathrm{st}(w_hu_h\cdots w_su_s)$ est égale à q. Nécessairement $u_h \geq q$ car u_h ssd de π. D'où

$$\begin{aligned}
u_h \geq |w_hu_h\cdots w_su_s| &= n - |w_1u_1\cdots w_{h-1}u_{h-1}| \\
&= n - \left[(h-1) + \sum_{i=1}^{h-1}|w_i|\right] \\
&= n - \left[(h-1) + \sum_{i=1}^{h-1}(|m_i|-1)\right] \\
&= n - \sum_{i=1}^{h-1}|m_i| \\
&= n - |m_1d_1\cdots m_{h-1}d_{h-1}|_m
\end{aligned}$$

ou encore $|m_1d_1\cdots m_{h-1}d_{h-1}|_m \geq n - u_h$.
Passons ensuite à la preuve de $|p_1p_2\cdots p_k|_m \geq |p_1p_2\cdots p_k|_d$, $\forall k \leq 2n$.

- Si $p_k = m$, alors il existe $l \in [s]$ tel que p_k est une lettre de m_l.
  On a $|m_1d_1\cdots m_{l-1}d_{l-1}|_m < |p_1p_2\cdots p_k|_m$ et
  $|p_1p_2\cdots p_k|_d = |m_1d_1\cdots m_{l-1}d_{l-1}|_d = \sum_{i=1}^{l-1}|d_i| = n - u_l$.
  On en déduit que $|p_1p_2\cdots p_k|_d = n - u_l \leq |m_1d_1\cdots m_{l-1}d_{l-1}|_m < |p_1p_2\cdots p_k|_m$ ou encore $|p_1p_2\cdots p_k|_d < |p_1p_2\cdots p_k|_m$.
- Si $p_k = d$, alors il existe $l \in [s]$ tel que p_k est une lettre de d_l.
  On a $|p_1p_2\cdots p_k|_d \leq |m_1d_1\cdots m_ld_l|_d = \sum_{i=1}^{l}|d_i| = \sum_{i=1}^{l}(u_i - u_{i+1}) = n - u_{l+1}$ et $|p_1p_2\cdots p_k|_m = |m_1d_1\cdots m_ld_l|_m$.
  On en déduit que $|p_1p_2\cdots p_k|_d \leq n - u_{l+1} \leq |m_1d_1\cdots m_ld_l|_m = |p_1p_2\cdots p_k|_m$ ou encore $|p_1p_2\cdots p_k|_d \leq |p_1p_2\cdots p_k|_m$

Par conséquent, $p \in$ Dyck (n). Ce qui prouve que Θ est bien définie.

Montrons qu'elle est bijective. Soit $p \in$Dyck(n). On peut écrire p sous la forme $p = m_1d_1m_2d_2\cdots m_sd_s$ où m_i (resp. d_i) est un mot formé par la seule lettre m (resp. d). Posons $u_i = \sum_{k=i}^{s}|d_k|$ et soit $w_1, w_2, \cdots, w_s$ s mots tels que $|w_i| = |m_i| - 1$ $(1 \leq i \leq s)$ et $w_1w_2\cdots w_s$ le mot décroissant formé par les lettres de $[n] \setminus \{u_1, u_2, \cdots, u_s\}$ avec $w_i = e$ si w_i est vide.
Il est évident que $u_s < u_{s-1} < \cdots < u_1$.
D'autre part, comme $|w_1w_2\cdots w_s| = n - s$ alors

$$\begin{aligned}|w_iw_{i+1}\cdots w_s| &= n - s - |w_1w_2\cdots w_{i-1}| \\ &= n - s - (\sum_{k=1}^{i-1}|m_k| - (i-1)) \leq n - s - (\sum_{k=1}^{i-1}|d_k| - (i-1))\end{aligned}$$

avec $n - s - (\sum_{k=1}^{i-1}|d_k| - (i-1)) = \sum_{k=i}^{s}|d_k| - (s-i+1) = u_i - (s-i+1)$.
Par conséquent, $|w_iw_{i+1}u_{i+1}\cdots w_su_s| \leq u_i - 1 < u_i$, et toutes les lettres du mot $w_iw_{i+1}u_{i+1}\cdots w_su_s$ sont plus petites que u_i. Il s'ensuit que l'antécédent de p est π dont la ssd-décomposition est $w_1u_1w_2u_2\cdots w_su_s$.

Enfin, soit $\pi \in S_n(123)$ et soit $j \in D(\pi)$. On en déduit de Proposition 2.1.7 et le Lemme 2.1.2 que toute lettre à droite de j et plus petite que j et toute lettre à gauche de j et plus grande que j. Cela implique que j est un ssd de π
ou encore $\exists i, u_i = j, |w_i| = 0, |w_1u_1w_2u_2\cdots w_{i-1}u_{i-1}| = n - j, |w_{i+1}u_{i+1}\cdots w_su_s| = j - 1$
ou encore $\exists i, u_i = j, |w_i| = 0, |w_1w_2\cdots w_{i-1}| + i - 1 = n - j, |w_{i+1}\cdots w_s| + s - j = j - 1$
ou encore $\exists i, \sum_{k=1}^{i-1}|d_k| = n - j, |m_i| = 1, \sum_{k=1}^{i-1}|m_k| = n - j, \sum_{k=i+1}^{s}|m_k| = j - 1$
De ce fait, on a $u_{i+1} = j - 1$. Par conséquent,
$j \in D(\pi)$,
$\iff \exists i, \sum_{k=1}^{i-1}|m_k| = \sum_{k=1}^{i-1}|d_k| = n - j, |m_i| = |d_i| = 1, \sum_{k=i+1}^{s}|m_k| = \sum_{k=i+1}^{s}|d_k| = j - 1$
$\iff \gamma_{2(n-j)} = 0$ et $p_{2(n-j+1)} = d$

Corollaire 2.1.9. *On a* $\forall n \geq 0, s_n^k(321) = \#\mathrm{RS}_n(k)$

Preuve : D'après la Proposition 2.1.7, $\forall \sigma \in S_n(321)$, fix$(\sigma)$= $D(r(\sigma))$.
D'où $s_n^k(321) = \#\{\sigma \in S_n(123); D(\sigma) = k\}$ et la Proposition 2.1.8 nous donne

$$\#\{\sigma \in S_n(123); D(\sigma) = k\} = \#\{p \in \mathrm{Dyck}(n); |\{i \in \mathrm{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0, p_{i+1} = d\}| = k\}$$

Le résultat est obtenu en utilisant le Corollaire 2.1.4. ■

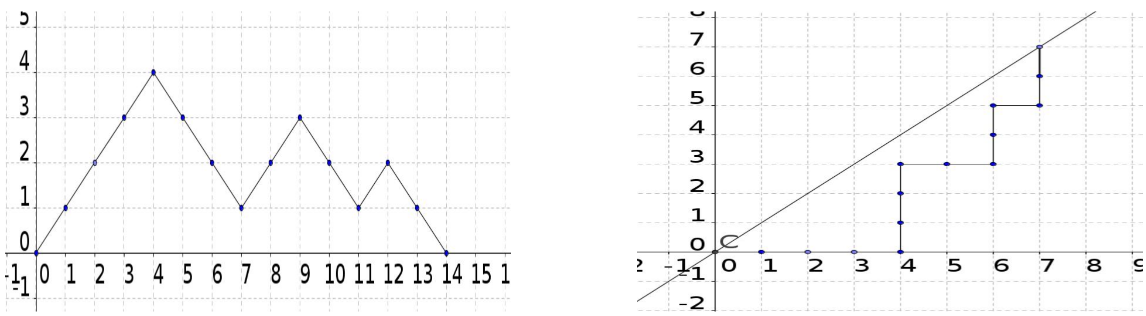
Corollaire 2.1.10. *On a* $F_n = s_n^0(321)$.

Preuve : En utilisant le Corollaire 2.1.9 et le Corollaire 2.1.6, on obtient le résultat.

2.2 Autres Interprétations des F_n

2.2.1 Mots de Catalan

Dans un chemin de Dyck, si on remplace chaque montée (resp. chaque descente) par un pas horizontal (resp. vertical), on obtient une autre définition d'un chemin de Dyck. Un chemin de Dyck de longueur $2n$ est un chemin dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de $(0, 0)$ vers (n, n) formé par les pas horizontaux $(1, 0)$ et verticaux $(0, 1)$ et qui se trouvent au-dessous de la droite $y = x$ (Voir figure ci-dessous).
Un chemin de Dyck de longueur $2n$ peut être représenté par le mot $c_0 c_1 \cdots c_{n-1}$ où c_{i-1} est le niveau du i-ème pas horizontal : $0 \leq c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_{n-1}$ avec $c_i \leq i$. Notons que c_{i-1} est égal au nombre de pas verticaux qui se trouvent avant le i-ème pas horizontal.



(a) Chemin de Dyck

(b) Transformé du chemin de Dyck

Définition 2.2.1. A un décalage d'indice, un chemin de Dyck de longueur $2n$ est représenté par un mot $c_1 c_2 \cdots c_n$ tel que $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$ où $c_i \leq i$ pour tout i. Un tel mot est appelé mot de Catalan de longueur n.

Dans toute la suite, on note par $\mathrm{Cat}(n)$ l'ensemble des mots de Catalan de longueur n.

Définition 2.2.2. Soit $\psi : S_m(321) \longrightarrow S_{m-1}(321), \pi \longrightarrow \psi(\pi)$ définie par :
- Si $\pi(m) = m - 1$, alors $\psi(\pi) = st(\pi(1)\pi(2) \cdots \pi(m-1))$
- Si $\pi(m) \neq m - 1$, alors $\psi(\pi)$ se déduit de π en supprimant m

On note $\mathrm{ps}(\pi)$ la position de m, i.e, $\mathrm{ps}(\pi) = \pi^{-1}(m)$.

Proposition 2.2.1.
La transformation $\alpha : S_n(321) \longrightarrow \mathrm{Cat}(n), \pi \longrightarrow c = \mathrm{ps}(\pi^{(n-1)})\mathrm{ps}(\pi^{(n-2)}) \cdots \mathrm{ps}(\pi^{(0)})$
où $\pi^{(0)} = \pi$ *et* $\pi^{(i)} = \psi(\pi^{(i-1)})$ $(1 \leq i \leq n)$ *est une application bijective.*
De plus, $\mathrm{fix}(\pi) = \#\{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i + 1\}$ *où l'on convient que* $c_{n+1} = n + 1$.

Preuve : Soit $\pi \in S_n(321)$ et $\alpha(\pi) := c = c_1 c_2 \cdots c_n$ où $c_i = \mathrm{ps}(\pi^{(n-i)})$.
Pour tout $0 \leq i \leq n - 1$, on a $\pi^{(i)} \in S_{n-i}(321)$. On en déduit que $\mathrm{ps}(\pi^{(i)}) \leq n - i$ ou encore $c_{n-i} \leq n - i$.
En utilisant la définition de ψ, on a :
- si $\pi^{(i)}(n - i) = n - i - 1$, alors $\mathrm{ps}(\pi^{(i)}) = \mathrm{ps}(\pi^{(i+1)})$

- si $\pi^{(i)}(n-i) \neq n-i-1$ alors dans la décomposition linéaire de $\pi^{(i)}$, $n-i-1$ se trouve à gauche de $n-i$ car $\pi^{(i)} \in S_{n-i}(321)$. Cela implique que $\mathrm{ps}(\pi^{(i)}) > (\pi^{(i)})^{-1}(n-i-1) = \mathrm{ps}(\psi(\pi^{(i)})) = \mathrm{ps}(\pi^{(i+1)})$. D'où $\mathrm{ps}(\pi^{(i)}) > \mathrm{ps}(\pi^{(i+1)})$

Cela implique que $1 \leq \mathrm{ps}(\pi^{(n-1)}) \leq \mathrm{ps}(\pi^{(n-2)}) \leq \cdots \leq \mathrm{ps}(\pi^{(0)}) \leq n$
ou encore $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n \leq n$.
Il s'ensuit que $c \in \mathrm{Cat}(n)$. Ce qui prouve que α est bien définie.

Montrons qu'elle est bijective. Soit $c \in \mathrm{Cat}(n)$ et $\pi^{(0)}, \pi^{(1)}, \cdots, \pi^{(n-1)}$ des mots tels que $\pi^{(n-1)} = 1$ et pour tout $2 \leq j \leq n$, $\pi^{(n-j)}$ est un mot obtenu à partir de $\pi^{(n-j+1)}$ comme suit :

- si $c_j = c_{j-1}$, alors on remplace $j-1$ par j et on ajoute $j-1$ après la dernière lettre.
- si $c_j > c_{j-1}$, alors on insère j après la $(c_j - 1)$-ème lettre.

On en déduit que pour tout $1 \leq j \leq n$, $\pi^{(n-j)} \in S_j$.

Vérifions que pour tout $1 \leq j \leq n$, $c_j = \mathrm{ps}(\pi^{(n-j)})$. D'après la construction de $\pi^{(n-j)}$ précèdente, cette dernière est évidente dans le cas où $c_j > c_{j-1} (j \geq 2)$. Supposons alors que $c_j = c_{j-1}$. Soit $k < j-1$ l'entier qui vérifie (s'il existe) $c_{k+1} > c_k$ et
$c_{k+1} = c_{k+2} = \cdots = c_{j-1} = c_j$.
On a $\mathrm{ps}(\pi^{(n-(k+1))}) = \mathrm{ps}(\pi^{(n-(k+2))}) = \cdots = \mathrm{ps}(\pi^{(n-j+1)}) = \mathrm{ps}(\pi^{(n-j)})$ avec
$\mathrm{ps}(\pi^{(n-(k+1))}) = c_{k+1}$
On en déduit que $c_j = \mathrm{ps}(\pi^{(n-j)})$

Il nous reste à montrer que pour tout $1 \leq j \leq n$, $\pi^{(n-j)} \in S_j(321)$
Supposons qu'il existe $j \leq n$ tel que $\pi^{(n-j)} \notin S_j(321)$ et pour tout $p < j$, $\pi^{(n-p)} \in S_p(321)$.
Soit alors $i < k < l$ tel que $st(\pi^{(n-j)}(i)\pi^{(n-j)}(k)\pi^{(n-j)}(l)) = 321$. On en déduit que $\pi^{(n-j)}(i) = j$.
On a $\pi^{(n-j)}(j) \neq j-1$ et $j-1$ se trouve à droite de j dans la décomposition linéaire de $\pi^{(n-j)}$ car sinon on aura $\pi^{(n-j+1)} \notin S_{j-1}(321)$.
Cela implique que $\mathrm{ps}(\pi^{(n-j)}) < \mathrm{ps}(\pi^{(n-j+1)})$ ou encore $c_j < c_{j-1}$ qui est en contradiction avec $c \in \mathrm{Cat}(n)$.
Ainsi, pour tout $1 \leq j \leq n$, $\pi^{(n-j)} \in S_j(321)$.
$\pi^{(0)}$ est l'antécédent de c par α. Ce qui prouve que α est une application bijective.

Enfin, soit $\pi \in S_n(321)$ et $\alpha(\pi) = c$. Soit $i \in \mathrm{Fix}(\pi)$. D'après le Lemme 2.1.2, toute lettre à gauche de i est plus petite que i et toute lettre à droite de i est plus grande que i. D'après la Definition 2.2.2, on a $\pi^{(n-i)}(i) = i$ et $\pi^{(n-i-1)}(i+1) = i+1$ ou encore $c_i = i$ et $c_{i+1} = i+1$
Ainsi $\mathrm{fix}(\pi) = \#\{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\}$. ■

Corollaire 2.2.2. *On a* $F_n = \#\{c \in \mathrm{Cat}(n); |\{i; c_i = i \textit{ et } c_{i+1} = i+1\}| = 0\}$

Preuve : En utilisant la Proposition 2.2.1, on a

$$s_n^k(321) = \#\{c \in \mathrm{Cat}(n); |\{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\}| = k\}$$

et en utilisant le Corollaire 2.1.10, on obtient le résultat. ■

Considérons maintenant la fonction génératrice $A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(321)} x^{\mathrm{fix}(\pi)}$.

Proposition 2.2.3. *On a* $A_n(x) = \sum\limits_{c\in \mathrm{Cat}(n)} x^{\#D(c)}$ *où* $D(c) = \{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\}$.

De plus, $x^{\#D(c)} = \sum\limits_{S\subset D(c)} (x-1)^{\#S}$

Preuve : Soit $c \in \mathrm{Cat}(n)$ et $\alpha(c) := \pi \in S_n(321)$ où α est la bijection définit dans la Proposition 2.2.1. On a $\mathrm{fix}(\pi) = \#\{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\} = \#D(c)$. D'où le résultat. D'autre part,

$$\begin{aligned} x^{\#D(c)} = ((x-1)+1)^{\#D(c)} &= \sum_{k=0}^{\#D(c)} 1^{\#D(c)-k}(x-1)^k \binom{\#D(c)}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\#D(c)} \sum_{\substack{S\subset D(c)\\ |S|=k}} (x-1)^k \\ &= \sum_{S\subset D(c)} (x-1)^{\#S} \end{aligned}$$

■

Posons $E := \{c \in \mathrm{Cat}(n); c_2 = 2\}$.

Lemme 2.2.1. *Soit* η *la transformation de* $E \longrightarrow \mathrm{Cat}(n-1)$, $c \longrightarrow c^{(1)}$ *définie comme suit, pour toute* $i \leq n-1$, $c_i^{(1)} = c_{i+1} - 1$. η *est bijective.*
De plus, $\#D(c) = \#D(c^{(1)}) + 1$ *où* $D(c)$ *est défini dans la proposition précèdente.*

Preuve : Il est évident que η est bijective.
De plus, soit $c \in E$ et $i \in D(c)$ tel que $i \neq 1$. On a $c_{i-1}^{(1)} = c_i - 1 = i - 1$ et $c_i^{(1)} = c_{i+1} - 1 = i + 1 - 1 = i$. D'où $i - 1 \in D(c^{(1)})$.
Par conséquent, on a $\#D(c) = \#D(c^{(1)}) + 1$ car $1 \in D(c)$ ■

Proposition 2.2.4. *On a* $A_n(x) = (x-1)A_{n-1}(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_{i-1}A_{n-i}(x)$ *où l'on convient que* $A_0(x) = 1$.

Preuve : On a

$$A_n(x) = \sum_{c\in\mathrm{Cat}(n)} \sum_{S\subset D(c)} (x-1)^{\#S} = \sum_{c\in\mathrm{Cat}(n)} \left(\sum_{\substack{S\subset D(c)\\ 1\in S}} (x-1)^{\#S} + \sum_{\substack{S\subset D(c)\\ 1\notin S}} (x-1)^{\#S} \right)$$

On pose $A_n^{(1)}(x) = \sum\limits_{c\in\mathrm{Cat}(n)} \sum\limits_{\substack{S\subset D(c)\\ 1\in S}} (x-1)^{\#S}$ et $A_n^{(2)}(x) = \sum\limits_{c\in\mathrm{Cat}(n)} \sum\limits_{\substack{S\subset D(c)\\ 1\notin S}} (x-1)^{\#S}$.

Donc $A_n(x) = A_n^{(1)}(x) + A_n^{(2)}(x)$.

Trouvons d'abord l'expression $A_n^{(1)}(x)$.

On a $A_n^{(1)}(x) = \sum\limits_{c\in E} \sum\limits_{\substack{S\subset D(c)\\ 1\in S}} (x-1)^{\#S}$ car si $c_2 \neq 2$, alors il n'existe aucun $S \subset D(c)$ tel que $1 \in S$.
Soit $c \in E$ et $c^{(1)} = \eta(c)$. Soit $S \subset D(c)$ tel que $1 \in S$ et on note S' l'ensemble obtenu à partir de S en supprimant l'élément 1 et on diminuant de 1 les éléments restants (s'il y en a). Cela implique que $S' \subset D(c^{(1)})$. Il est clair que pour tout $i \in S$, $i \neq 1$, on a $i-1 \in D(c^{(1)})$ et $\#S = \#S'+1$.
De plus,

$$\sum_{\substack{S\subset D(c)\\ 1\in S}} (x-1)^{\#S} = \sum_{S'\subset D(c^{(1)})} (x-1)^{\#S'+1}$$

Par conséquent,

$$A_n^{(1)}(x) = \sum_{c^{(1)}\in \mathrm{Cat}(n-1)} \sum_{S'\subset D(c^{(1)})} (x-1)^{\#S'+1} = (x-1)A_{n-1}(x)$$

Trouvons ensuite l'expression de $A_n^{(2)}(x)$.
On a $A_n^{(2)}(x) = \sum\limits_{\substack{c\in \mathrm{Cat}(n)\\ c_2=2}} \sum\limits_{\substack{S\subset D(c)\\ 1\notin S}} (x-1)^{\#S} + \sum\limits_{\substack{c\in \mathrm{Cat}(n)\\ c_2\neq 2}} \sum\limits_{\substack{S\subset D(c)\\ 1\notin S}} (x-1)^{\#S}$.
On pose $a_n(x) = \sum\limits_{\substack{c\in \mathrm{Cat}(n)\\ c_2=2}} \sum\limits_{\substack{S\subset D(c)\\ 1\notin S}} (x-1)^{\#S}$ et $b_n(x) = \sum\limits_{\substack{c\in \mathrm{Cat}(n)\\ c_2\neq 2}} \sum\limits_{\substack{S\subset D(c)\\ 1\notin S}} (x-1)^{\#S}$.
Donc $A_n^{(2)}(x) = a_n(x) + b_n(x)$.
Premièrement, trouvons l'expression de $a_n(x)$. Soit $c \in E$ et $c^{(1)} = \eta(c)$. Soit $S \subset D(c)$ tel que $1 \notin S$ et S' l'ensemble obtenu à partir de S en diminuant de 1 ses éléments. Il est clair que $S' \subset D(c^{(1)})$ et pour tout $i \in S$, on a $i-1 \in S'$. D'où $\#S' = \#S$ et par conséquent

$$a_n(x) = \sum_{c^{(1)}\in \mathrm{Cat}(n-1)} \sum_{S'\subset D(c^{(1)})} (x-1)^{\#S'} = A_{n-1}(x)$$

Deuxièmement, on va trouver l'expression de $b_n(x)$. Soit $c \in \mathrm{Cat}(n)$ tel que $c_2 \neq 2$. Cela implique que $1 \notin D(c)$ ou encore pour tout $S \subset D(c)$, on a $1 \notin S$. Alors on a

$$b_n(x) = \sum_{\substack{c\in \mathrm{Cat}(n)\\ c_2\neq 2}} \sum_{S\subset D(c)} (x-1)^{\#S}$$

Posons $\overline{E} := \{c \in \mathrm{Cat}(n); c_2 \neq 2\}$ et soit $i > 1$. On note par $Cat_i(n)$ l'ensemble des $c \in \overline{E}$ tel que i est le plus petit entier qui vérifie $c_i = i$.
Il est clair que $\mathrm{Cat}_2(n) = \emptyset$ et pour tout $i \neq j$, on a $\mathrm{Cat}_i(n) \bigcap \mathrm{Cat}_j(n) = \emptyset$
Ensuite, on note par F l'ensemble des $c \in \overline{E}$ tels que pour tout $k > 1$, $c_k < k$.
On a

$$\left(\bigcup_{i=3}^{n} \mathrm{Cat}_i(n)\right) \bigcap F = \emptyset \text{ et } \overline{E} = \left(\bigcup_{i=3}^{n} \mathrm{Cat}_i(n)\right) \bigcup F$$

Par conséquent

$$b_n(x) = \sum_{c\in\left(\bigcup\limits_{i=3}^{n}\mathrm{Cat}_i(n)\right)\bigcup F}\ \sum_{S\subset D(c)}(x-1)^{\#S} = \sum_{i=3}^{n}\sum_{c\in\mathrm{Cat}_i(n)}\sum_{S\subset D(c)}(x-1)^{\#S}+\sum_{c\in F}\sum_{S\subset D(c)}(x-1)^{\#S}$$

.

La transformation $\beta : \mathrm{Cat}_i(n) \longrightarrow \mathrm{Cat}(i-2)\times\mathrm{Cat}(n-i+1)\,;\, c \longmapsto (c', c'')$ définie comme suit $c'_j = c_{j+1}$ et $c''_j = c_{i+j-1} - (i-1)$, est bijective.
De plus, $\#D(c) = \#D(c'')$.

La transformation $\mu : F \longrightarrow \mathrm{Cat}(n-1)\,;\, c = c_1\cdots c_n \longmapsto c^{(1)} = c_2\cdots c_n$ est bijective. De plus, pour tout $c \in F$, on a $D(c) = \emptyset$. D'où $\sum\limits_{S\subset D(c)}(x-1)^{\#S} = 1$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} b_n(x) &= \sum_{i=3}^{n}\ \sum_{(c',c'')\in\mathrm{Cat}(i-2)\times\mathrm{Cat}(n-i+1)}\ \sum_{S\subset D(c'')}(x-1)^{\#S} + \sum_{c^{(1)}\in\mathrm{Cat}(n-1)} 1 \\ &= \sum_{i=3}^{n} C_{i-2}\sum_{c''\in\mathrm{Cat}(n-i+1)}\ \sum_{S\subset D(c'')}(x-1)^{\#S} + C_{n-1} \\ &= C_{n-1} + \sum_{i=3}^{n} C_{i-2}A_{n-i+1}(x) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $A_n^{(2)} = a_n(x)+b_n(x) = A_{n-1}(x)+C_{n-1}+\sum\limits_{i=3}^{n} C_{i-2}A_{n-i+1}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_{i-1}A_{n-i}(x)$.

Par conséquent, $A_n(x) = A_n^{(1)} + A_n^{(2)} = (x-1)A_{n-1}(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_{i-1}A_{n-i}(x)$ ■

2.2.2 Expression explicite des coefficients $A_n(x)$

Soit $\sigma \in S_n$ et $1 \le i \le n$

Définition 2.2.3. On dit que $\sigma(i)$ est :

- un creux de σ si $\sigma(i-1) > \sigma(i) < \sigma(i+1)$
- un pic de σ si $\sigma(i-1) < \sigma(i) > \sigma(i+1)$
- une double montée de σ si $\sigma(i-1) < \sigma(i) < \sigma(i+1)$
- une double descente de σ si $\sigma(i-1) > \sigma(i) > \sigma(i+1)$

On convient que $\sigma(0) = n+1$ et $\sigma(n+1) = 0$. D'après [8], on a la bijection de J. Françon et G. Viennot ci-dessous.. La démonstration de cette proposition nous sera utile dans toute la suite.

Proposition 2.2.5. *Il existe une bijection ψ_{FV} de S_n sur $HL(n)$ vérifiant :*
(i) i creux de σ ssi $c_i = m$
(ii) i pic de σ ssi $c_i = d$
(iii) i double descente de σ ssi $c_i = b$

(iv) i double montée de σ ssi $c_i = r$

Preuve : Soit $\sigma \in S_n$ et $M_1 \cdots M_u$ sa décomposition en mots croissants maximaux, i.e pour tout $j < u$, la dernière lettre de M_j est supérieur à la première lettre de M_{j+1}. Dans toute la suite, on note par $D(M_k)$, resp $P(M_k)$, la dernière lettre, resp la première lettre, du mot M_k. Soit $j \leq u$ et i une lettre de M_j. On a :

$$\begin{cases} \text{i est un creux de } \sigma & ssi\ |M_j| > 1 \text{ et } i = P(M_j) \\ \text{i est un pic de } \sigma & ssi\ |M_j| > 1 \text{ et } i = D(M_j) \\ \text{i est une double descente de } \sigma & ssi\ |M_j| = 1 \\ \text{i est une double montée de } \sigma & ssi\ |M_j| > 1 \text{ et } P(M_j) < i < D(M_j) \end{cases}$$

On obtient alors,

$$\begin{array}{rcl} |c_1 \cdots c_i|_m - |c_1 \cdots c_i|_d & = & |\{l \leq i; l \text{ est un creux de } \sigma\}| - |\{l \leq i; l \text{ est un pic de } \sigma\}| \\ & = & |\{M_r; |M_r| > 1, P(M_r) \leq P(M_j) = i\}| \\ & & -|\{M_r; |M_r| > 1, D(M_r) \leq i\}| \\ & = & |\{M_r; |M_r| > 1, P(M_r) \leq i < D(M_r)\}| \\ & & +|\{M_r; |M_r| > 1, P(M_r) < D(M_r) \leq i\}| \\ & & -|\{M_r; |M_r| > 1, D(M_r) \leq i\}| \\ & = & |\{M_r; |M_r| > 1, P(M_r) \leq i < D(M_r)\}| \geq 0 \end{array}$$

D'après la Proposition 1.1.2, on a $\gamma_{i-1} = |\{M_r; |M_r| > 1, P(M_r) < i \leq D(M_r)\}|$.
On pose $p_i = |\{M_r; r < j \text{ et } P(M_r) < i < D(M_r)\}|$. Si i est un creux ou une double descente de σ, alors $0 \leq p_i \leq \gamma_{i-1}$. Et si i est un pic ou une double montée de σ, alors $0 \leq p_i \leq \gamma_{i-1} - 1$.
On a $(c, p) \in HL(n)$.

Pour montrer que $\psi_{F.V}$ est bijective, on va construire sa réciproque. Soit $(c, p) \in HL(n)$ et σ un antécédent de (c, p) (s'il existe). $M_1 \cdots M_u$ est la décomposition en mots croissants maximaux de σ. On a $|\{M_r; |M_r| \geq 2\}| = |c|_m$ et $|\{M_r; |M_r| = 1\}| = |c|_b$. D'où, $u = |c|_m + |c|_b$.
Pour construire σ, on procède comme suit.
Soit $Q = \{i_1, \cdots, i_p\}$ (resp $P = \{j_1, \cdots, j_p\}, Dd = \{s_1, \cdots, s_{u-p}\}, Dm = \{t_1, \cdots, t_{n-p-u}\}$) l'ensemble des creux (resp des pics, des doubles descentes, des doubles montées) de σ.
On pose $QP = Q \bigcup P = \{k_1, \cdots, k_{2p}\}$ avec $\forall i < 2p, k_i < k_{i+1}$. Il est évident que k_1 est un creux de σ. Nous allons placer tous les éléments de QP

On pose $\sigma^0 = \star$.

- . Si $c_{k_1} = m$ et $p_{k1} = 0$, alors on place $k_1\star$ après la $(p_{k_1} + 1)$-ième $\star$ et on pose $\sigma^1 = \star k_1 \star$
- . Si $c_{k_2} = m$ et $p_{k_2} = 0$ (resp $p_{k_2} = 1$), alors on place $k_2\star$ après le $(p_{k_2} + 1)$- ième $\star$ et on pose $\sigma^2 = \star k_2 \star k_1 \star$ (resp $\sigma^2 = \star k_1 \star k_2 \star$)
- . Si $c_{k_2} = d$ et $p_{k_2} = 0$, alors on remplace par k_2 le $(p_{k_2} + 2)$-ième $\star$ et on pose $\sigma^2 = \star k_1 k_2$

Supposons que les lettres $k_1, \cdots, k_{l-1}$ sont toutes placées. On va trouver la place de k_l. Si $c_{k_l} = m$, alors on place $k_l\star$ après le $(p_{k_l} + 1)$-ième $\star$. Et si $c_{k_l} = d$, alors on remplace par

k_l le $(p_{k_l}+2)$-ième $\star$.
On obtient ainsi l'expression $\sigma^{2p} = \star M_1 \cdots M_p$ car $|Q| = |P|$. La présence d'une seule $\star$ est dû au fait que $\sigma^0 = \star$ et $|Q| = |P|$. Supposons que les éléments de P et Q sont tous placés.
Soit i tel que $c_i = r$ ou $c_i = b$. Si $c_i = r$, alors on place i dans M_j où M_j est le (p_i+1)-ième mot qui vérifie $P(M_j) < i < D(M_j)$. Si $c_i = b$, alors on place i entre M_q et M_{q+1} tel que $D(M_q) > i > P(M_{q+1})$ et $|\{j \leq q; D(M_j) > i > P(M_j)\}| = p_i$. ■

Lemme 2.2.2. *Soit $\sigma \in S_n$ et $(c,p) = \psi_{FV}(\sigma)$. Alors*

$$\sigma \in S_n(123) \iff \forall i \in [n], c_i \neq r$$

De plus, $\#S_n(123)(c) = \prod_{c_i=m} m_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=d} d_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=r} r_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=b} b_{\gamma_{i-1}}$
où $m_q = d_{q+1} = 1$ et $r_{q+1} = 0$ pour tout $q \geq 0$, $b_0 = 1$ et $b_q = 2$ pour tout $q \geq 1$.

Preuve : Soit $\sigma \in S_n$ et $(c,p) = \psi_{FV}(\sigma)$. Soit i une lettre de σ. D'après la construction de ψ_{FV}, i est une double montée de σ ssi $c_i = r$. On en déduit que

$$\sigma \in S_n(123) \iff \forall i \in [n], c_i \neq r$$

car σ ne contient pas une double montée.

D'autre part, on a

$$\#S_n(123)(c) = \#\{\sigma \in S_n(123); (c,p) = \psi_{FV}(\sigma)\} = \prod_{c_i=m} m_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=d} d_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=r} r_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=b} b_{\gamma_{i-1}}$$

où $m_{\gamma_{i-1}}$ (resp $d_{\gamma_{i-1}}, r_{\gamma_{i-1}}, b_{\gamma_{i-1}}$) est le poids affecté au $i^e - pas$ de c.
Nous allons trouver ces poids.
Soit $\sigma \in S_n(123)(c)$ et $(c,p) = \psi_{F.V}(\sigma)$. On pose $M_1 M_2 \cdots M_l$ la décomposition en mots croissants maximaux de σ.

D'abord, pour tout $i \leq l, |M_i| \leq 2$ et si $|M_i| = |M_j| = 2$, $i < j \leq l$, alors $D(M_i) > D(M_j)$ et $P(M_i) > P(M_j)$.

Ensuite, soit $j \leq l$ et i une lettre de M_j. Notons que

$p_i = |\{M_r; r < j \text{ et } P(M_r) < i < D(M_r)\}|$ et $\gamma_{i-1} = |\{M_r; |M_r| = 2 \text{ et } P(M_r) < i \leq D(M_r)\}|$

On a :

(i) Si i est un ceux de σ, alors pour tout $r < j$, $i = P(M_j) < P(M_r)$. Cela implique que $p_i = 0$.
D'où, $m_q = 1$ pour tout $q \geq 0$.

(ii) Si i est un pic de σ i.e $i = D(M_j)$, alors toutes lettres à droite de i sont inférieurs à i.
Cela implique que

$$p_i = |\{M_r; r \neq j \text{ et } P(M_r) < i < D(M_r)\}| = |\{M_r; |M_r| = 2 \text{ et } P(M_r) < i \leq D(M_r)\}| - 1$$

car $P(M_j) < i = D(M_j)$. Ou encore $p_i = \gamma_{i-1} - 1$. D'où $d_{q+1} = 1$ pour tout $q \geq 0$

(iii) Si i est une double descente de σ et s'il existe M_u, $u < j$, tel que $P(M_u) < i$, alors toutes lettres à droite de i sont inférieur à i. Cela implique que $p_i = \gamma_{i-1}$. Il est évident que $p_i = 0$ si $P(M_u) > i$, pour tout $u < j$. D'où $b_0 = 1$ et $b_q = 2$ pour tout $q \geq 1$.

(iv) On déduit de l'équivalence précédente que $r_{j+1} = 0$ pour tout $j \geq 0$

Proposition 2.2.6. *On a* $1 + \sum_{n\geq 1} |S_n(123)|z^n = C(z)$

Preuve : En utilisant le Lemme 2.2.2, on a

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{n\geq 1} |S_n(123)|z^n &= 1 + \sum_{n\geq 1} z^n \sum_{c\in\Gamma_n} |S_n(123)(c)| \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} z^n \sum_{c\in\Gamma_n} w(c) \\
&= \cfrac{1}{1 - z - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}}} \\
&= C(z)
\end{aligned}$$

■

Dans toute la suite on pose $\phi(x,z) = 1 + \sum_{n\geq 1} A_n(x)z^n$ avec $A_n(x) = \sum_{\pi\in S_n(321)} x^{\mathrm{fix}(\pi)}$

Proposition 2.2.7. *On a* $\phi(x,z) = \cfrac{1}{1 - xz - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}}}$

Preuve : Notons que l'application φ de $S_n(321)$ vers $S_n(123)$, $\sigma \longrightarrow \pi$ définie par $\varphi(\sigma) = r(\sigma)$ où $r(\sigma)$ est la permutation miroir de σ, est bijective.
De plus $\mathrm{fix}(\sigma) = \#\{i; \pi_{n-i+1} = i\}$.
On en déduit

$$A_n(x) = \sum_{\pi\in S_n(123)} x^{\#\{i;\pi_{n-i+1}=i\}}$$

D'abord, soit $c \in \Gamma_n$ et $\sigma \in S_n(123)(c)$ et soit i tel que $\sigma_{n-i+1} = i$. Dans la décomposition linéaire de σ, toute lettre à gauche de i est plus grande que i et toute lettre à droite de i est plus petite que i. Donc, i est une double descente de σ ou encore $c_i = b$. Posons $M_1M_1\cdots M_l$ la décomposition en mots croissants maximaux de σ. On a $\gamma_{i-1} = \#\{M_r; |M_r| > 1 \text{ et } P(M_r) < i \leq D(M_r)\} = 0$.
D'où la relation

$$\sigma(n-i+1) = i \iff c_i = b \text{ et } \gamma_{i-1} = 0$$

Par conséquent, $\#\{j; \sigma_{n-j+1} = j\} = \#\{j; c_j = b \text{ et } \gamma_{j-1} = 0\}$.

Ainsi, on a

$$A_n(x) = \sum_{\sigma \in S_n(123)} x^{\#\{i;\sigma_{n-i+1}=i\}} = \sum_{c \in \Gamma_n} \sum_{\sigma \in S_n(123)(c)} x^{\#\{i;\sigma_{n-i+1}=i\}}$$

où $\sum_{\sigma \in S_n(123)(c)} x^{\#\{i;\sigma_{n-i+1}=i\}} = \sum_{\sigma \in S_n(123)(c)} x^{\#\{i;c_i=b \text{ et } \gamma_{i-1}=0\}} = \prod_{\substack{c_i=b \\ \gamma_{i-1}=0}} x \ . \ \#S_n(123)(c) = w(c)$.

En utilisant le Lemme 2.2.2, on obtient $m_q = d_{q+1} = 1$ et $r_{q+1} = 0$ pour tout $q \geq 0$, $b_0 = x$ et $b_q = 2$ pour tout $q \geq 1$. Par conséquent,

$$\phi(x,z) = 1 + \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{c \in \Gamma_n} w(c) = \cfrac{1}{1 - xz - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}}}$$

Corollaire 2.2.8. *On a* $\phi(x,z) = \dfrac{1 - x + C(z)}{2 - x + z(x-1)^2}$

Preuve :

Posons $\kappa(z) = \cfrac{1}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{1 - 2z - \cfrac{z^2}{\ddots}}}$ ou encore $\kappa(z) = \dfrac{1}{1 - 2z - z^2\kappa(z)}$

Cela implique que $\kappa(z)$ est solution de l'équation $z^2x^2 - (1-2z)x + 1 = 0$.

Donc

$$\kappa(z) = \frac{(1-2z) - \sqrt{1-4z}}{2z^2} \quad \text{ou} \quad \kappa(z) = \frac{(1-2z) + \sqrt{1-4z}}{2z^2}$$

Comme $\kappa(0) = 1$, et au voisinage de 0, $\kappa(z) = \dfrac{(1-2z) + \sqrt{1-4z}}{2z^2}$ tend vers $+\infty$,

alors $\kappa(z) = \dfrac{(1-2z) - \sqrt{1-4z}}{2z^2}$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\phi(x,z) &= \frac{1}{1-xz-z^2\dfrac{1-2z-\sqrt{1-4z}}{2z^2}}\\
&= \frac{1}{1-xz-\dfrac{1}{2}(1-2z-\sqrt{1-4z})}\\
&= \frac{2}{1-2z(x-1)+\sqrt{1-4z}}\\
&= \frac{2(1-2z(x-1)-\sqrt{1-4z})}{(1-2z(x-1)+\sqrt{1-4z})(1-2z(x-1)-\sqrt{1-4z})}\\
&= \frac{-2(x-1)z+1-\sqrt{1-4z}}{-2xz+4z+2z^2(x-1)^2}\\
&= \frac{-(x-1)+\dfrac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}}{-x+2+z(x-1)^2}\\
&= \frac{1-x+C(z)}{2-x+z(x-1)^2}
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.9. *On a* $A_n(x) = \sum_{p=0}^{n} C_{n-p}(-1)^p \frac{(x-1)^{2p}}{(2-x)^{p+1}} - (-1)^n \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2-x)^{n+1}}$

Preuve : En utilisant le Corollaire 2.2.8, on a :

$$\begin{aligned}
\phi(x,z) &= \frac{1-x+C(z)}{2-x+z(x-1)^2}\\
&= (C(z)-(x-1))\left[\frac{1}{(2-x)\left[1+\dfrac{(x-1)^2}{2-x}z\right]}\right]\\
&= [C(z)-(x-1)]\frac{1}{2-x}\sum_{p\geq 0}(-1)^p\frac{(x-1)^{2p}}{(2-x)^p}z^p\\
&= \sum_{m,p} C_m(-1)^p\frac{(x-1)^{2p}}{(2-x)^{p+1}}z^{m+p} - \sum_{p\geq 0}(-1)^p\frac{(x-1)^{2p+1}}{(2-x)^{p+1}}z^p\\
&= \sum_{n\geq 0} z^n \sum_{p=0}^{n} C_{n-p}(-1)^p\frac{(x-1)^{2p}}{(2-x)^{p+1}} - \sum_{p\geq 0}(-1)^p\frac{(x-1)^{2p+1}}{(2-x)^{p+1}}z^p
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 2.2.10. *On a* $A_n(x) = (x-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-i} C_{j-1}A_{n-i-j}(x)(x-1)^i$

Preuve : D'après la Proposition 2.2.4, $A_n(x) = (x-1)A_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}A_{n-i}(x)$ et posons $f(n) = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1}A_{n-i}(x)$.

On a :

$$\begin{array}{rcl} A_n(x) & = & (x-1)A_{n-1}(x) + f(n) \\ & = & (x-1)^2A_{n-2}(x) + (x-1)f(n-1) + f(n) \\ & \vdots & \\ & = & (x-1)^nA_0(x) + (x-1)^{n-1}f(1) + \cdots + (x-1)^2f(n-2) + (x-1)f(n-1) + f(n) \\ & = & (x-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1}(x-1)^i f(n-i) \\ & = & (x-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1}(x-1)^i \sum_{j=1}^{n-i} C_{j-1}A_{n-i-j}(x) \end{array}$$

■

On peut alors écrire $A_n(x)$ sous la forme $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b(n,k)(x-1)^k$

Proposition 2.2.11. *On a* $(x-1)^k[A_n(x)] := b(n;k) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-i} C_{j-1}b(n-i-j;k-i)$

Preuve : Cette relation est obtenue en utilisant la Proposition 2.2.10.

Corollaire 2.2.12. *On a* $b(n;k) = \sum_{p=1}^{n} C_{p-1} \sum_{i=1}^{n-p+1} b(n-p-i+1;k-i+1)$

Preuve : En utilisant la proposition 2.2.11, on a $b(n;k) = \sum_{p=0}^{n-1} C_p \sum_{i=1}^{n-p} b(n-p-i;k-i+1)$. D'où le résultat. ■

Proposition 2.2.13. *On a :*

$$b(n,k) = \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p}(-1)^p \binom{k-p}{p} + (-1)^n \binom{k-n-1}{n-1}$$

Preuve : Le résultat suivant est obtenu dans la semestre S8 du parcours combinatoire :

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{(1-z)^k} & = & \sum_{n_1,\cdots,c_k} z^{n_1+\cdots+n_k} \\ & = & \sum_{n\geq 0} z^n \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} 1 \\ & = & \sum_{n\geq 0} z^n \binom{n+k-1}{k-1} \end{array}$$

Posons $z = x-1$ ou encore $2-x = 1-z$. On a :

$$\begin{array}{rcl} A_n(x) & = & \sum_{p=0}^{n} C_{n-p}(-1)^p(x-1)^{2p}\sum_{q\geq 0}\binom{q+p}{q}(x-1)^q - (-1)^n(x-1)^{2n+1}\sum_{q\geq 0}\binom{q+n}{n}(x-1)^q \\ & = & \sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{q\geq 0} C_{n-p}(-1)^p\binom{q+p}{q}(x-1)^{2p+q}\right) + (-1)^{n+1}\sum_{q\geq 0}\binom{q+n}{n}(x-1)^{2n+q+1} \end{array}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
b(n,k) &= \sum_{p=0}^{n} C_{n-p}(-1)^p \tbinom{k-p}{p} + (-1)^{n+1}\tbinom{k-n-1}{n} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p}(-1)^p \tbinom{k-p}{p} + (-1)^{n}\left[\tbinom{k-n}{n} - \tbinom{k-n-1}{n}\right] \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p}(-1)^p \tbinom{k-p}{p} + (-1)^{n}\tbinom{k-n-1}{n-1}
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.14. *Soit $n \geq 1$ et $k \leq n$. On a*

$$b(n,k) = b(n,k+1) + b(n-1,k-1) \text{ où } b(0,0) = 1 \tag{2.1}$$

Preuve : En utilisant la Proposition 2.2.13, on en déduit la relation suivante :

$$\begin{aligned}
b(n,k+1) + b(n-1,k-1) &= C_n + \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p C_{n-p}\left[\tbinom{k-p+1}{p} - \tbinom{k-p}{p-1}\right] \\
&\quad +(-1)^n\left[\tbinom{k-n}{n-1} - \tbinom{k-n-1}{n-2}\right] \\
&= C_n + \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p C_{n-p}\tbinom{k-p}{p} + (-1)^n \tbinom{k-n-1}{n-1} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p}(-1)^p \tbinom{k-p}{p} + (-1)^n \tbinom{k-n-1}{n-1} \\
&= b(n,k)
\end{aligned}$$

■

En utilisant la forme explicite de $b(n,k)$, cette relation n'est pas vérifiée pour $n < k$. Par convention, si $n < k$, alors on pose $b(n,k) = 0$. De plus, si $k < 0$ ou $n < 0$ on a $b(n,k) = 0$.

Corollaire 2.2.15. *Pour tout $k \leq n$, on a :*

$$b(n,k) = \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p}(-1)^p \binom{k-p}{p}$$

Corollaire 2.2.16. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$b(n,0) = C_n \text{ et } b(0,0) = 1$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}
b(n,k) &= \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p}(-1)^p \tbinom{k-p}{p} \\
&= C_n + \sum_{p=1}^{n-1} C_{n-p}(-1)^p \tbinom{k-p}{p}
\end{aligned}$$

Si $k = 0$, alors on a le résultat. ■

Proposition 2.2.17. *On a* $b(n;k) = \sum_{i=0}^{n} b(n-i;k-i+1)$

Preuve : On en déduit de la relation $b(n;k) = b(n;k+1) + b(n-1;k-1)$

Corollaire 2.2.18. *On a* $b(n;k) = \sum_{p=1}^{n} C_{p-1} b(n-p;k-1)$

Preuve : D'après le Corollaire 2.2.12,

$$b(n,k) = \sum_{p=1}^{n} C_{p-1} \sum_{i=1}^{n-p+1} b(n-p-i+1;k-i+1)$$

En utilisant la Proposition 2.2.17, on a

$$\sum_{i=1}^{n-p+1} b(n-p-i+1;k-i+1) = \sum_{i=0}^{n-p} b(n-p-i;k-i) = b(n-p;k-1)$$

D'où le résultat. ■

Proposition 2.2.19. *Soit* $n \geq 1$. *On a :*

$$b(n,k) = \frac{k+1}{n+1}\binom{2n-k}{n} \tag{2.2}$$

Preuve : On va montrer par récurrence sur k. Pour $k = 0$, le résultat est obtenu en utilisant le Corollaire 2.2.16. Supposons que c'est vrai pour k et montrons que c'est aussi vrai pour k+1. En utilisant la relation (2.1), on a

$$\begin{aligned}
b(n,k+1) &= b(n,k) - b(n-1,k-1) \\
&= \binom{2n-k}{n}\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n}\binom{2n-2-k+1}{n-1} \\
&= \binom{2n-k}{n}\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n}\binom{2n-k-1}{n-1}
\end{aligned}$$

D'après la formule de Pascal :

$$\binom{2n-k}{n} = \binom{2n-k-1}{n-1} + \binom{2n-k-1}{n}$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
b(n,k+1) &= \binom{2n-k-1}{n-1}\frac{k+1}{n+1} + \binom{2n-k-1}{n}\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n}\binom{2n-k-1}{n-1} \\
&= \frac{n-k}{(n+1)n}\binom{2n-k-1}{n-1} + \frac{k+1}{n+1}\binom{2n-k-1}{n} \\
&= \frac{k+2}{n+1}\binom{2n-k-1}{n}
\end{aligned}$$

■

Dans ce memoire, nous allons redéfinir ce qui est ennoncé dans [6]

Définition 2.2.4. *Le triangle de Catalan est défini comme suit :*

$$\begin{cases} c_{n,0} & = 1, \forall n \geq 0 \\ c_{n,k} & = 0, \ si\ n < k\ \ ou\ n < 0\ \ ou\ k < 0 \\ c_{n,k} & = c_{n-1,k} + c_{n,k-1}, \forall k, n \geq 1 \end{cases}$$

En utilisant la Definition 2.2.4 et d'après le Théorème 2.2 de [6], on a le lemme suivant.

Lemme 2.2.3. *Soit $s_{n,k}(p)$ le nombre de permutation σ dans $S_n(p)$ vérifiant $\sigma(1) = k$. On a pour tout $n, k \geq 1$, $s_{n,k}(123) = s_{n,k}(132) = s_{n,n-k+1}(321) = c_{n-1,k-1}$*

A partir des deux tableaux suivants, on déduit la proposition ci-dessous.

Le tableau $(b(n, k))$ est

1				
1	1			
2	2	1		
5	5	3	1	
14	14	9	4	1

et le tableau $(c_{n,k})$ est

1				
1	1			
1	2	2		
1	3	5	5	
1	4	9	14	14

Proposition 2.2.20. *Pour tout $n \geq k$, on a $c_{n,k} = b(n, n-k)$*

Preuve : Nous allons montre par récurrence sur n et k. D'abord, fixons n.
Si $k = 0$, on a $c_{n,0} = 1 = b(n, n)$.
Si $k = 1$ on a $c_{n,1} = c_{n-1,1} + c_{n,0} = c_{n-1,1} + 1 = \cdots = c_{1,1} + n - 1 = n$
et $b(n, n-1) = b(n, n) + b(n-1, n-2) = 1 + b(n-1, n-2) = \cdots = n - 1 + b(1, 0) = n$.
D'où $c_{n,1} = b(n, n-1)$.

Supposons que $c_{n,k-1} = b(n, n-k+1)$
Ensuite, fixons k et faire varié n.
On a $c_{0,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $b(0, -k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
D'où $c_{0,k} = b(0, -k)$.

Supposons que $c_{n-1,k} = b(n-1, n-k-1)$
Par conséquent,

$$c_{n,k} = c_{n-1,k} + c_{n,k-1} = b(n-1; n-k-1) + b(n, n-k+1) = b(n, n-k) \quad \blacksquare$$

Dans la suite, nous allons voir que $A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(132)} x^{\mathrm{fix}(\pi)}$

2.2.3 Permutations sans le motif 132

On note $\mathcal{E}_{n,r}$ l'ensemble des bijections π de $[n]$ vers $\{r+1, \cdots, r+n\}$ telles que $\mathrm{st}(\pi) \in S_n(132)$ et considérons la fonction génératrice $E_{n,r}(x) = \sum_{\pi \in \mathcal{E}_{n,r}} x^{\mathrm{fix}(\pi)}$ où l'on convient $E_{0,r}(x) = 1$

Lemme 2.2.4. *Soit $\sigma \in S_n(132)$. On a $\sigma^{-1} \in S_n(132)$*

Preuve : Supposons le contraire i.e il existe $i < j < k$ tel que $\mathrm{st}(\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)\sigma^{-1}(k)) = 132$. Comme $\sigma^{-1}(p)$ est la position de p dans σ, alors ikj sera un motif 132 de σ. ■

Proposition 2.2.21. *Soit ρ la transformation $\mathcal{E}_{n,r} \longrightarrow \mathcal{E}_{n,-r}$, $\pi \longrightarrow \pi'$ définie par, $\forall i \in [n], \pi'(i) = \sigma^{-1}(i) - r$ où σ est la permutation obtenue à partir de π telle que $\forall j \in [n], \sigma(j) = \pi(i) - r$. Alors ρ est bijective.*
De plus, $\mathrm{fix}(\pi) = \mathrm{fix}(\pi')$

Preuve : En utilisant le Lemme 2.2.4, on a $\sigma^{-1} \in S_n(132)$. On en déduit que $\pi' \in \mathcal{E}_{n,-r}$. Ainsi ρ est bien définie.

Montrons qu'elle est bijective. Soit $\pi' \in \mathcal{E}_{n,-r}$ et $\tau \in S_n(132)$ définie par $\tau(i) = \pi'(i) + r$. π est obtenue par $\pi(i) = \tau^{-1}(i) + r$. Comme $\tau \in S_n(132)$, d'après le Lemme 2.2.4 on a $\tau^{-1} \in S_n(132)$; on en déduit que $\pi \in \mathcal{E}_{n,r}$. Ce qui prouve que ρ est bijective.

D'autre part, soit $\pi \in \mathcal{E}_{n,r}$, $\rho(\pi) = \pi' \in \mathcal{E}_{n,-r}$ et $\sigma \in S_n(132)$ tel que $\sigma(i) = \pi(i) - r$. Soit $k \in \mathrm{Fix}(\pi)$. On a :

$$\begin{aligned} \pi(k) = k = \sigma(k) + r \quad &\Longleftrightarrow \quad \sigma(k) = k - r \\ &\Longleftrightarrow \quad k - r = \sigma^{-1}(k-r) - r \\ &\Longleftrightarrow \quad k - r = \pi'(k-r) \end{aligned}$$

Corollaire 2.2.22. *On a $E_{n,r}(x) = E_{n,-r}(x)$*

Dans toute la suite on pose $r \geq 0$ et on pose $\mathcal{E}^i_{n,r} = \{\pi \in \mathcal{E}_{n,r}; \pi(i) = n + r\}$.

Proposition 2.2.23. *La transformation $\mu : \mathcal{E}^i_{n,r} \longrightarrow \mathcal{E}_{i-1,n-i+r} \times \mathcal{E}_{n-i,r-i}$, $\pi \longrightarrow (\pi', \pi'')$ définie par :*

- *Pour tout $1 \leq l \leq i-1$, $\pi'(l) = \pi(l)$*
- *Pour tout $1 \leq l \leq n-i$, $\pi''(k) = \pi(i+k) - i$*

est bijective.

De plus,
- *Si $r > 0$, alors* $\mathrm{fix}(\pi) = \mathrm{fix}(\pi') + \mathrm{fix}(\pi'')$.
- *Si $r = 0$ et $i < n$ (resp $i = n$) alors* $\mathrm{fix}(\pi) = \mathrm{fix}(\pi') + \mathrm{fix}(\pi'')$ *(resp,* $\mathrm{fix}(\pi) = \mathit{fix}(\pi') + 1$*)*

Preuve : Il est évident que μ est bijective.
D'autre part, soit $\pi \in \mathcal{E}^i_{n,r}$ et $\mu(\pi) = (\pi', \pi'')$. On a toujours $\mathrm{fix}(\pi') = \mathrm{fix}(\pi(1)\cdots\pi(i-1))$ et
- Si $r > 0$, alors $i \notin \mathrm{Fix}(\pi)$. Soit $q \geq i+1$, $q \in \mathrm{Fix}(\pi)$. Il existe $1 \leq p \leq n-i$ tel que $q = i+p$. On a $\pi''(p) = \pi(i+p) - i = i+p-i = p$. Donc $p \in \mathrm{Fix}(\pi'')$. D'où $\mathrm{fix}(\pi) = \mathrm{fix}(\pi') + \mathrm{fix}(\pi'')$
- Si $r = 0$, alors $\mathcal{E}_{n,0} = S_n(132)$. De plus, si $i < n$ (resp $i = n$) alors $i \notin \mathrm{Fix}(\pi)$ (resp $i \in \mathrm{Fix}(\pi)$) et on a $\mathrm{fix}(\pi) = \mathrm{fix}(\pi') + \mathrm{fix}(\pi'')$ (resp $\mathrm{fix}(\pi) = \mathrm{fix}(\pi') + 1$)

Proposition 2.2.24. *On a* $E_{n,0} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} E_{i-1,n-i}(x)E_{n-i,-i}(x) + xE_{n-1,0}(x)$

Preuve : On a

$$\begin{aligned}
E_{n,0}(x) = \sum_{\pi\in\mathcal{E}_{n,0}} x^{\mathrm{fix}(\pi)} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\pi\in\mathcal{E}_{n,0}\\ \pi(i)=n}} x^{\mathrm{fix}(\pi)} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{\pi\in\mathcal{E}_{n,0}\\ \pi(i)=n}} x^{\mathrm{fix}(\pi)} + \sum_{\substack{\pi\in\mathcal{E}_{n,0}\\ \pi(n)=n}} x^{\mathrm{fix}(\pi)} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\pi\in\mathcal{E}^i_{n,0}} x^{\mathrm{fix}(\pi)} + \sum_{\pi\in\mathcal{E}_{n-1,0}} x^{\mathrm{fix}(\pi)+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{(\pi',\pi'')\in\mathcal{E}_{i-1,n-i}\times\mathcal{E}_{n-i,-i}} x^{\mathrm{fix}(\pi')+\mathrm{fix}(\pi'')} + xE_{n-1,0}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sum_{\pi'\in\mathcal{E}_{i-1,n-i}} x^{\mathrm{fix}(\pi')} \sum_{\pi''\in\mathcal{E}_{n-i,-i}} x^{\mathrm{fix}(\pi'')} \right] + xE_{n-1,0}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} E_{i-1,n-i}(x)E_{n-i,-i}(x) + xE_{n-1,0}(x)
\end{aligned}$$

Proposition 2.2.25. *Pour tout $r > 0$, on a* $E_{n,r}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} E_{i-1,n-i+r}(x)E_{n-i,r-i}(x)$

Preuve : On a $E_{n,r}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{\substack{\pi\in\mathcal{E}_{n,r}\\ \pi_i=n+r}} x^{\mathrm{fix}(\pi)}$. En utilisant la Proposition 2.2.23, on a

$$\begin{aligned}
E_{n,r}(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{(\pi',\pi'')\in\mathcal{E}_{i-1,n-i+r}\times\mathcal{E}_{n-i,r-i}} x^{\mathrm{fix}(\pi')+\mathrm{fix}(\pi'')} &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\pi'\in\mathcal{E}_{i-1,n-i+r}} x^{\mathrm{fix}(\pi')} \sum_{\pi''\in\mathcal{E}_{n-i,r-i}} x^{\mathrm{fix}(\pi'')} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_{i-1,n-i+r}(x)E_{n-i,r-i}(x)
\end{aligned}$$

Corollaire 2.2.26. *On a* $E_{n,r}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} E_{i-1,n-i+r}(x)E_{n-i,r-i}(x) + (x-1)E_{n-1,0}(x)\mathbb{1}_{\{r=0\}}$

Proposition 2.2.27. *On a* $\forall r \geq n$, $E_{n,r}(x) = C_n$

<u>*Démontration*</u> :
D'abord, pour tout $\pi \in \mathcal{E}_{n,r}, \mathrm{fix}(\pi) = 0$. Alors, on a $E_{n,r}(x) = \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{E}_{i-1,n-i+r}||\mathcal{E}_{n-i,r-i}|$

Le nombre $|\mathcal{E}_{n,r}|$ dépend seulement de n. On convient que $|\mathcal{E}_{0,r}| = 1 = C_0$.
On a $|\mathcal{E}_{1,r}| = 1 = C_1$ et $|\mathcal{E}_{2,r}| = 2 = C_2$. Comme $E_{n,r}(x)$ et C_n ont même relation de récurrence, alors $E_{n,r}(x) = C_n, \forall r \geq n$ ■

Il est important de faire quelques modifications sur les indices pour prouver la proposition ci-dessous. On change $E_{n-i,r-i}(x)$ par $E_{n-i,i-r}(x)$ si $i > r$ et on utilise le fait que $E_{i-1,n-i+r}(x) = C_{i-1}$ si $n-i+r \geq i-1$ ou encore $n+r+1 \geq 2i$ ou encore $i \leq \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor$ (avec $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal a x). Et $E_{n-i,i-r}(x) = C_{n-i}$ si $i - r \geq n - i$ ie $i \geq \lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor$. On obtient ainsi la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} E_{n,r}(x) &= \sum_{i=1}^{r} C_{i-1} E_{n-i,r-i}(x) \\ &+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor} C_{i-1} E_{n-i,i-r}(x) \\ &+ \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1}^{n} C_{n-i} E_{i-1,n-i+r}(x) \\ &+ (x-1) E_{n-1,0}(x) \mathbb{1}_{\{r=0\}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

On pose $F_{n,r}(x) = A_n(x) + (1-x) \sum_{i=1}^{r} C_{i-1} A_{n-i}$.
Alors on peut écrire $F_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(n,k)(x-1)^k$

Lemme 2.2.5. $[(x-1)^k] F_{n,r}(x) = f(n,k) = b(n,k) - \sum_{i=1}^{r} C_{i-1} b(n-i, k-1)$

Proposition 2.2.28. *Pour tout $r \geq n$, on a $F_{n,r}(x) = C_n$*

Preuve : On a $F_{n,r}(x) = f(n,0) + \sum_{k=1}^{n} f(n,k)(x-1)^k = f(n,0) = b(n,0) = C_n$
car $b(n,k) = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} b(n-i, k-1)$ et
pour tout $r \geq n$ et $k \neq 0, f(n,k) = b(n,k) - \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} b(n-i, k-1) = 0$

Corollaire 2.2.29. *Pour tout $r \geq n$, on $F_{n,r}(x) = E_{n,r}(x)$*

Dans toute la suite on suppose que $r < n$.

Proposition 2.2.30. *On a* $\begin{cases} f(n,0) & = C_n, \forall n \geq 0 \\ f(n,k) & = 0 \text{ si } k,n < 0 \text{ ou } k > n \\ f(n,k) & = f(n,k+1) + f(n-1,k-1), \forall k \leq n \end{cases}$

Preuve : En utilisant le Lemme 2.2.5, on a $f(n,0) = C_n$ et $f(n,k) = 0$ si $n,k < 0$ et aussi $f(n,k) = 0$ si $k > n$ car pour tout $1 \leq i \leq r$, on a $n-i < k-1$ et donc

$b(n-i,k-1)=0$.
De plus,

$$\begin{aligned} f(n,k+1)+f(n-1,k-1) &= b(n,k+1)-\sum_{i=1}^{r} C_{i-1}b(n-i,k)+b(n-1,k-1) \\ &\quad -\sum_{i=1}^{r} C_{i-1}b(n-i-1,k-2) \\ &= b(n,k)-\sum_{i=1}^{r} C_{i-1}\left[b(n-i,k)+b(n-i-1,k-2)\right] \\ &= b(n,k)-\sum_{i=1}^{r} C_{i-1}b(n-i,k-1) \end{aligned}$$

■

On pose

$$\begin{aligned} F_{n,r}^{(1)}(x) &= \sum_{i=1}^{r} C_{i-1}F_{n-i,r-i}(x) \\ &+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor} C_{i-1}F_{n-i,i-r}(x) \\ &+ \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor+1}^{n} C_{n-i}F_{i-1,n-i+r}(x) \\ &+(x-1)F_{n-1,0}(x)\mathbb{1}_{\{r=0\}} \end{aligned}$$

Alors on peut écrire $F_{n,r}^{(1)}(x)=\sum_{k=0}^{n} f^{(1)}(n,k)(x-1)^k$

Lemme 2.2.6. *On a*

$$\begin{aligned} f^{(1)}(n,k) &= \sum_{i=1}^{r} C_{i-1}\left[b(n-i,k)-\sum_{p=1}^{r-i} C_{p-1}b(n-i-p,k-1)\right] \\ &+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor} C_{i-1}\left[b(n-i,k)-\sum_{p=1}^{i-r} C_{p-1}b(n-i-p,k-1)\right] \\ &+ \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor+1}^{n} C_{n-i}\left[b(i-1,k)-\sum_{p=1}^{n+r-i} C_{p-1}b(i-p-1,k-1)\right] \\ &+b(n-1,k-1)\mathbb{1}_{\{r=0\}} \end{aligned}$$

Proposition 2.2.31. *On a* $f^{(1)}(n,k)=f^{(1)}(n,k+1)+f^{(1)}(n-1,k-1)$

Preuve : En utilisant le Lemme 2.2.6, on a

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(n,k+1) &= \sum_{i=1}^{r} C_{i-1}\left[b(n-i,k+1)-\sum_{p=1}^{r-i} C_{p-1} b(n-i-p,k)\right]\\
&+\sum_{i=r+1}^{\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor} C_{i-1}\left[b(n-i,k+1)-\sum_{p=1}^{i-r} C_{p-1} b(n-i-p,k)\right]\\
&+\sum_{i=\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor+1}^{n} C_{n-i}\left[b(i-1,k+1)-\sum_{p=1}^{n+r-i} C_{p-1} b(i-p-1,k)\right]\\
&+b(n-1,k)\mathbb{1}_{\{r=0\}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(n-1,k-1) &= \sum_{i=1}^{r} C_{i-1}\left[b(n-i-1,k-1)-\sum_{j=1}^{r-i} C_{j-1} b(n-i-j-1,k-2)\right]\\
&+\sum_{i=r+1}^{\lfloor\frac{n+r}{2}\rfloor} C_{i-1}\left[b(n-i-1,k-1)-\sum_{j=1}^{i-r} C_{j-1} b(n-i-j-1,k-2)\right]\\
&+\sum_{i=\lfloor\frac{n+r}{2}\rfloor+1}^{n-1} C_{n-i-1}\left[b(i-1,k-1)-\sum_{j=1}^{n+r-i-1} C_{j-1} b(i-j-1,k-2)\right]\\
&+b(n-2,k-2)\mathbb{1}_{\{r=0\}}
\end{aligned}$$

Si on arrive à montrer que

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(n-1,k-1) &= \sum_{i=1}^{r} C_{i-1}\left[b(n-i-1,k-1)-\sum_{j=1}^{r-i} C_{j-1} b(n-i-j-1,k-2)\right]\\
&+\sum_{i=r+1}^{\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor} C_{i-1}\left[b(n-i-1,k-1)-\sum_{j=1}^{i-r} C_{j-1} b(n-i-j-1,k-2)\right]\\
&+\sum_{i=\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor+1}^{n} C_{n-i}\left[b(i-2,k-1)-\sum_{j=1}^{n+r-i} C_{j-1} b(i-j-2,k-2)\right]\\
&+b(n-2,k-2)\mathbb{1}_{\{r=0\}}
\end{aligned} \qquad (E)$$

alors, le résultat se déduit en utilisant la relation $b(n,k)=b(n-1,k-1)+b(n,k+1)$ $(\forall k\leq n)$.

Nous allons étudier séparement le cas où $n+r$ est impair et $n+r$ pair.
D'abord, supposons que $n+r$ est impair. Alors, il existe p tel que $n+r=2p+1$.
Cela implique que

$$\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor = \lfloor\frac{n+r}{2}\rfloor + 1$$

et

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(n-1,k-1) &= \sum_{i=1}^{r} C_{i-1}\left[b(n-i-1,k-1) - \sum_{j=1}^{r-i} C_{j-1} b(n-i-j-1,k-2)\right] \\
&+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-1} C_{i-1}\left[b(n-i-1,k-1) - \sum_{j=1}^{i-r} C_{j-1} b(n-i-j-1,k-2)\right] \\
&+ \sum_{i=\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor}^{n-1} C_{n-i-1}\left[b(i-1,k-1) - \sum_{j=1}^{n+r-i-1} C_{j-1} b(i-j-1,k-2)\right] \\
&+ b(n-2,k-2)\mathbb{1}_{\{r=0\}}
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(n-1,k-1) &= \sum_{i=1}^{r} C_{i-1}\left[b(n-i-1,k-1) - \sum_{j=1}^{r-i} C_{j-1} b(n-i-j-1,k-2)\right] \\
&+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor} C_{i-1}\left[b(n-i-1,k-1) - \sum_{j=1}^{i-r} C_{j-1} b(n-i-j-1,k-2)\right] \\
&- C_{\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-1}\Bigg[b(n-\lfloor\tfrac{n+r+1}{2}\rfloor-1,k-1) \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-r} C_{j-1} b(n-\lfloor\tfrac{n+r+1}{2}\rfloor-j-1,k-2)\Bigg] \\
&+ \sum_{i=\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor+1}^{n} C_{n-i}\left[b(i-2,k-1) - \sum_{j=1}^{n+r-i} C_{j-1} b(i-j-2,k-2)\right] \\
&+ b(n-2,k-2)\mathbb{1}_{\{r=0\}}
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que

$$C_{\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-1}\left[b(n-\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-1,k-1) - \sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-r} C_{j-1} b(n-\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-j-1,k-2)\right] = 0$$

On a

$$\begin{array}{rcl} n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1 & = & n-(p+1)-1 \\ & = & 2p+1-r-p-2 \\ & = & p-1-r \\ & = & p+1-r-2 \\ & = & \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - r - 2 \end{array}$$

ou encore $\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - r = n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1$.
Cela implique que

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - r} C_{j-1} b(n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - j - 1, k-2) & = & \sum_{j=1}^{n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1} C_{j-1} b(n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - j - 1, k-2) \\ & = & \sum_{j=1}^{n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1} C_{j-1} b(n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - j - 1, k-2) \\ & = & b(n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1, k-1) \end{array}$$

D'où, la relation (E)

Ensuite, supposons que $n+r$ est pair. Alors, il existe p tel que $n+r=2p$.
Cela implique que

$$\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor$$

et

$$\begin{array}{rcl} f^{(1)}(n-1,k-1) & = & \sum_{i=1}^{r} C_{i-1} \left[b(n-i-1,k-1) - \sum_{j=1}^{r-i} C_{j-1} b(n-i-j-1,k-2) \right] \\ & & + \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor} C_{i-1} \left[b(n-i-1,k-1) - \sum_{j=1}^{i-r} C_{j-1} b(n-i-j-1,k-2) \right] \\ & & + \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1}^{n-1} C_{n-i-1} \left[b(i-1,k-1) - \sum_{j=1}^{n+r-i-1} C_{j-1} b(i-j-1,k-2) \right] \\ & & + b(n-2,k-2) \mathbb{1}_{\{r=0\}} \end{array}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(n-1,k-1) &= \sum_{i=1}^{r} C_{i-1}\left[b(n-i-1,k-1)-\sum_{j=1}^{r-i} C_{j-1} b(n-i-j-1,k-2)\right] \\
&+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor} C_{i-1}\left[b(n-i-1,k-1)-\sum_{j=1}^{i-r} C_{j-1} b(n-i-j-1,k-2)\right] \\
&+ \sum_{i=\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor+1}^{n} C_{n-i}\left[b(i-2,k-1)-\sum_{j=1}^{n+r-i} C_{j-1} b(i-j-2,k-2)\right] \\
&- C_{n-\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-1}\Bigg[b(\lfloor\tfrac{n+r+1}{2}\rfloor-1,k-1) \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{n+r-\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-1} C_{j-1} b(\lfloor\tfrac{n+r+1}{2}\rfloor-j-1,k-2)\Bigg] \\
&+ b(n-2,k-2)\mathbb{1}_{\{r=0\}}
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que

$$C_{n-\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-1}\left[b(\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-1,k-1)-\sum_{j=1}^{n+r-\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-1} C_{j-1} b(\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-j-1,k-2)\right]=0$$

On a

$$\begin{aligned}
n-\lfloor\tfrac{n+r+1}{2}\rfloor+r-1 &= n+r-p-1 \\
&= 2p-p-1 \\
&= p-1 \\
&= \lfloor\tfrac{n+r+1}{2}\rfloor-1
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+r-\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-1} C_{j-1} b(\lfloor\tfrac{n+r+1}{2}\rfloor-j-1,k-2) &= \sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n+r+1}{2}\rfloor-1} C_{j-1} b(\lfloor\tfrac{n+r+1}{2}\rfloor-j-1,k-2) \\
&= b(\lfloor\tfrac{n+r+1}{2}\rfloor-1,k-1)
\end{aligned}$$

D'où, la relation (E)

Corollaire 2.2.32. *On a* $F_{n,r}(x)=F^{(1)}_{n,r}(x)$

Preuve : On en déduit du Lemme 2.2.6 que $f^{(1)}(n,0)=\sum_{i=1}^{n} C_{i-1}C_{n-i}=C_n$ et $f^{(1)}(n,k)=0$ si $n,k<0$ ou $n<k$. En utilisant la Proposition 2.2.30 et la Proposition 2.2.31, on a $f(n,k)=f^{(1)}(n,k)$

Corollaire 2.2.33. *On a* $F_{n,r}(x) = E_{n,r}(x)$

Preuve : Nous allons montrer par récurrence sur n.
Si $n = 0$, on a $F_{0,r}(x) = 1$ et $E_{0,r}(x) = 1$
Si $n = 1$, on a $F_{1,r}(x) = \begin{cases} x & \text{si } r = 0 \\ 1 & \text{si } r \neq 0 \end{cases}$ et $E_{1,r}(x) = \sum_{\pi\mathcal{E}_{1,r}} x^{\text{fix}(\pi)} = \begin{cases} x & \text{si } r = 0 \\ 1 & \text{si } r \neq 0 \end{cases}$
Supposont que $F_{k,r}(x) = E_{k,r}(x)$ pour tout $k \leq n$, et montrons que $F_{n+1,r}(x) = E_{n+1,r}(x)$.
On a

$$\begin{aligned} E_{n+1,r}(x) &= \sum_{i=1}^{r} C_{i-1} E_{n+1-i,r-i}(x) \\ &+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+2}{2} \rfloor} C_{i-1} E_{n+1-i,i-r}(x) \\ &+ \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+2}{2} \rfloor+1}^{n+1} C_{n+1-i} E_{i-1,n+1-i+r}(x) \\ &+ (x-1) E_{n,0}(x) \mathbb{1}_{\{r=0\}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_{n+1,r}(x) &= \sum_{i=1}^{r} C_{i-1} F_{n+1-i,r-i}(x) \\ &+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+2}{2} \rfloor} C_{i-1} F_{n+1-i,i-r}(x) \\ &+ \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+2}{2} \rfloor+1}^{n+1} C_{n+1-i} F_{i-1,n+1-i+r}(x) \\ &+ (x-1) F_{n,0}(x) \mathbb{1}_{\{r=0\}} \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on le résultat. ■

Corollaire 2.2.34. *On a* $E_{n,0}(x) = A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(132)} x^{\text{fix}(\pi)}$

Proposition 2.2.35. *On a* $C_n = 2A_n(x) - xA_n(x) + (1-x)^2 A_{n-1}(x)$

Preuve : Prenons $r = n$. Par définition de $F_{n,r}(x)$ et en utilisant le Corollaire 2.2.29, on a

$$C_n = A_n(x) + (1-x) \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} A_{n-i}(x)$$

Et en utilisant la Proposition 2.2.4. on a :

$$\sum_{i=1}^{n} C_{i-1} A_{n-i}(x) = A_n(x) + (1-x) A_{n-1}(x)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} C_n &= A_n(x) + (1-x)[A_n(x) + (1-x)A_{n-1}(x)] \\ &= 2A_n(x) - xA_n(x) + (1-x)^2 A_{n-1}(x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Dans la suite, on ne prend que les $\alpha \in \{132, 321\}$ et on convient que $s_n^{-1} = 0$.

Proposition 2.2.36. *Pour tout $n \geq 2$, on a*

$$2s_n^k + s_{n-1}^k = s_n^{k-1} + 2s_{n-1}^{k-1} - s_{n-1}^{k-2}$$

Preuve : Comme

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{\pi \in S_n(\alpha)} x^{\mathrm{fix}(\pi)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\pi \in S_n^k(\alpha)} x^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} s_n^k(\alpha) x^k \end{aligned}$$

En extrayant le coefficient de x^k dans la Proposition 2.2.35. on a :

$$0 = 2s_n^k(\alpha) - s_n^{k-1}(\alpha) + s_{n-1}^k(\alpha) - 2s_{n-1}^{k-1}(\alpha) + s_{n-1}^{k-2}(\alpha) \quad \blacksquare$$

Proposition 2.2.37. *Soit $\alpha \in \{132, 321\}$. Pour tout $n \geq 1$,*

$$s_n^1(\alpha) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} (-\frac{1}{2})^i \left(C_{n-i} + 3F_{n-i-1}\right)$$

Preuve : En utilisant la Proposition 2.2.36 et pour $k = 1$, on a

$$2s_n^1 + s_{n-1}^1 = s_n^0 + 2s_{n-1}^0$$

On pose $s(z) = \sum_{n \geq 0} s_n^1(\alpha) z^n$. Comme $s_n^0(\alpha) = F_n$, alors

$$\sum_{n \geq 1} 2s_n^1 z^n + \sum_{n \geq 1} s_{n-1}^1 z^n = \sum_{n \geq 1} s_n^0 z^n + \sum_{n \geq 1} 2s_{n-1}^0 z^n$$

D'où

$$2[-s_0^1 + s(z)] + zs(z) = -F_0 + F(z) + 2zF(z)$$

ou encore

$$\begin{aligned}
s(z) &= \frac{F(z)(1+2z)-1}{2+z} \\
&= \frac{F(z)}{2+z}(1+2z) - \frac{1}{2+z} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} z^n \sum_{i=0}^{n} F_{n-i}(-\frac{1}{2})^i(1+2z) - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-\frac{1}{2})^n z^n \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n\geq 0} z^n \sum_{i=0}^{n} F_{n-i}(-\frac{1}{2})^i - \sum_{n\geq 0}(-\frac{1}{2})^n z^n\right] + \sum_{n\geq 1} z^n \sum_{i=0}^{n-1} F_{n-i-1}(-\tfrac{1}{2})^i
\end{aligned}$$

Cela implique que :

$$\begin{aligned}
s_n^1(\alpha) &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n} F_{n-i}(-\frac{1}{2})^i - (-\frac{1}{2})^n\right] + \sum_{i=0}^{n-1} F_{n-i-1}(-\frac{1}{2})^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{F_{n-i}}{2} + F_{n-i-1}\right](-\frac{1}{2})^i \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\left[2F_{n-i} + F_{n-i-1} + 3F_{n-i-1}\right](-\frac{1}{2})^i \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1}[C_{n-i} + 3F_{n-i-1}](-\frac{1}{2})^i \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposition 2.2.38. *Soit $\alpha \in \{132, 321\}$. Pour $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, on a :*

$$s_n^k(\alpha) = \sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j \binom{j+k}{k} b(n, k+j)$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}
A_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} b(n,k)(x-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} b(n,k)(-1)^{k-i}x^i\right)
\end{aligned}$$

Ainsi le coefficient de x^k est

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k} b(n,j)(-1)^{j-k}$$

D'où,

$$s_n^k(\alpha) = \sum_{j=0}^{n-k}\binom{j+k}{k} b(n, j+k)(-1)^j$$

Proposition 2.2.39. *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$C_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j \binom{j+k}{k} b(n, j+k)$$

Preuve : Comme $S_n(\alpha) = \bigcup_{k=0}^{n} S_n^k(\alpha)$ avec $|S_n(\alpha)| = C_n$ alors, on a $C_n = \sum_{k=0}^{n} s_n^k(\alpha)$ ■

Proposition 2.2.40. *Pour tout $n \geq 1$, $F_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j b(n,j)$*

Preuve : On a

$$\begin{aligned} F_n &= s_n^0(\alpha) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{0} b(n,j)(-1)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} b(n,j)(-1)^j \ ■ \end{aligned}$$

Proposition 2.2.41. *On a $F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{n-1,n-2k}$*

Preuve : Dans la Proposition 2.2.31, on a $F_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j b(n,j)$. Rappelons que, pour tout $n \geq k$,
$c_{n,k} = b(n,k)$. Cela implique que $F_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j c_{n,n-j}$. Nous allons distinguer le cas où n est pair et n impair.
Si n est pair, alors il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $n = 2p$.
On a

$$\begin{aligned} F_{2p} &= \sum_{j=0}^{2p}(-1)^j c_{2p,2p-j} \\ &= (c_{2p,2p} - c_{2p,2p-1}) + (c_{2p,2p-2} - c_{2p,2p-3}) + \cdots + (c_{2p,2} - c_{2p,1}) + c_{2p,0} \end{aligned}$$

D'après la Definition 2.2.4, on obtient

$$\begin{aligned} F_{2p} &= c_{2p-1,2p} + c_{2p-1,2p-2} + \cdots + c_{2p-1,2} + c_{2p,0} \\ &= \sum_{i=0}^{p} c_{2p-1,2i} \\ &= \sum_{i=0}^{p} c_{2p-1,2p-2i} \end{aligned}$$

Si n est impair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$.
On a

$$\begin{aligned} F_{2p+1} &= \sum_{j=0}^{2p+1}(-1)^j c_{2p+1,2p+1-j} \\ &= (c_{2p+1,2p+1} - c_{2p+1,2p}) + (c_{2p+1,2p-1} - c_{2p+1,2p-2}) + \cdots + (c_{2p+1,1} - c_{2p+1,0}) \end{aligned}$$

D'après la Definition 2.2.4, on obtient

$$\begin{aligned} F_{2p+1} &= c_{2p,2p+1} + c_{2p,2p-1} + \cdots + c_{2p,1} \\ &= \sum_{i=0}^{p} c_{2p,2i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{p} c_{2p,2p+1-2i} \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 2.2.42. *Pour tout* $\mu \in \{123, 132\}$*, on a* $F_{2n} = \#\{\sigma \in S_{2n}(\mu); \sigma(1) \text{ impair }\}$ *et* $F_{2n+1} = \#\{\sigma \in S_{2n+1}(\mu); \sigma(1) \text{ pair }\}$

Preuve : Soit $\mu \in \{123, 132\}$. Il est à noter que, pour tout $n, k \geq 1$, $s_{n,k}(\mu) = c_{n-1,k-1}$.

On a

$$\begin{aligned} F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} c_{2n-1,2n-2k} = \sum_{k=0}^{n} s_{2n,2(n-k)+1}(\mu) &= \sum_{k=0}^{n} s_{2n,2k+1}(\mu) \\ &= \#\{\sigma \in S_{2n}(\mu); \sigma(1) \text{ impair }\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_{2n,2n-2k+1} = \sum_{k=0}^{n} s_{2n+1,2(n-k)+2}(\mu) &= \sum_{k=0}^{n} s_{2n+1,2(n-k+1)}(\mu) \\ &= \#\{\sigma \in S_{2n+1}(\mu); \sigma(1) \text{ pair }\} \end{aligned}$$

■

Soit $\mu \in \{132, 321\}$. On pose $T_n(\mu) = \{\pi \in S_n(\mu); \mathrm{Fix}(\pi) \bigcap [n-1] \neq \emptyset\}$

Proposition 2.2.43. *Pour tout* $n \geq 1$*, on a* $F_n = |T_n(\mu)|$.

Preuve : Soit $n \geq 1$, on pose $U_n(\mu) = \{\pi \in S_n(\mu); \forall i < n, \pi(i) \neq i \text{ et } \pi(n) = n\}$. Les ensembles $S_n^0(\mu)$, $T_n(\mu)$ et $U_n(\mu)$ forment une partition de $S_n(\mu)$. De plus, l'ensemble $U_n(\mu)$ est en bijection avec l'ensemble $S_{n-1}^0(\mu)$, via la bijection $\pi \mapsto \pi'$ où π' est obtenue en supprimant n dans π.
On a $|S_n(\mu)| = C_n = |S_n^0(\mu)| + |T_n(\mu)| + |S_{n-1}^0(\mu)| \iff C_n = F_n + F_{n-1} + |T_n(\mu)|$.
Or $C_n = 2F_n + F_{n-1}$. Donc $F_n = |T_n(\mu)|$

Bibliographie

[1] C. Krattenthaler, Advances in Applied Mathematics 27,*Permutations with Restricted Patterns and Dyck Paths*

[2] RODICA SIMION AND FRANK W. SCHMIDT, *Restricted Permutations*, Europ.l. Combinatorics (1985) 6, 383-406

[3] Aaron Robertson, Dan Saracino, Doron Zeilberger, *REFINED RESTRICTED PERMUTATIONS*

[4] Gi-Sang Cheon, Sang-Gu Lee, Louis W. Shapiro *The Fine numbers refined*, European Journal of Combinatorics 31 (2010) 120-128

[5] Volker STREHL *A NOTE ON SIMILARITY RELATIONS*, Discrete Mathematics 19 (W7) 99-101.

[6] DEREK DESANTIS, REBECCA FIELD, WESLEY HOUGH, BRANT JONES, REBECCA MEISSEN, AND JACOB ZIEFLE *PERMUTATION PATTERN AVOIDANCE AND THE CATALAN TRIANGLE*, MISSOURI J. OF MATH. SCI., Vol. 25, 2010

[7] Emeric Deutsch, Louis Shapiro *A survey of the Fine numbers*, Discrete Mathematics, pp 241-265, 2001

[8] J. Françon, G. Viennot *Permutations selon leurs pics, creux, doubles montées et double descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi*, Discrete Mathematics, pp 21-35, 1979

[9] SHISHUO FU, DAZHAO TANG, BIN HAN, AND JIANG ZENG *(q, t)-CATALAN NUMBERS*, Discrete Mathematics, pp 9, 2018

[10] SERGI ELZALDE *Fixed Points and Excedances in Restricted Permutations*, Dartmouth College, pp 6, 2012

[11] T. Fine. Extrapolation when very little is known about the source, Inform and Control 331 - 359