

Table des matières

1	Définitions et préliminaires	3
1.1	Chemins de Motzkin	3
1.2	Nombres de Catalan	4
1.3	Fractions continues de Stieltjes	5
1.4	Chemins de Motzkin valué	6
1.5	Développement en fraction continue de $F(t)$	10
2	Nombres de Fine, relations de similarité et permutations	15
2.1	Relations de similarité	15
2.1.1	Points isolés	15
2.1.2	Relation entre $S_n^k(321)$ et $RS_n(k)$	17
2.2	Interprétations des F_n	20
2.2.1	Mots de Catalan	20
2.2.2	Expression explicite des coefficients $A_n(x)$	25
2.2.3	Permutations sans le motif 132	35

Introduction

La première fois où le nombre de Fine a été vu était dans la recherche de la prédiction ou de l'extrapolation non statistique d'une fonction faite par Terrence Fine [11]. Avec la puissance des ordinateurs d'aujourd'hui, sa recherche montre beaucoup d'intérêt sur l'apprentissage automatique comme les génératives modèle. Dans son article, il a introduit le concept des relations de similarité, qui est à la base du nombre de Fine. Ce nombre est étroitement lié au nombre de Catalan qui fait l'objet d'étude de plusieurs objets combinatoire tels que les chemins, les permutations et les graphes. Dans le présent mémoire, qui est inspiré de [3], les nombres de Fine sont désignés par F_n . Dans la suite, on notera par C_n les nombres de Catalan et on notera par RS_n , respectivement S_n , l'ensemble des relations de similarité, respectivement des permutations, sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Étant donné que les permutations et les relations de similarité jouent un rôle crucial dans l'interprétation des nombres de Fine, il est donc primordial d'approfondir la recherche sur leurs implications. C'est précisément l'objectif de ce mémoire, qui marque cependant le commencement d'une exploration approfondie plutôt qu'une présentation exhaustive de ces nombres.

De ce fait, ce mémoire est organisé en deux chapitres fondamentaux. Le premier chapitre, les préliminaires, a pour objectif de fournir les connaissances et outils nécessaires à la compréhension de la suite du document. Il présente les définitions, théorèmes et propriétés essentiels abordés dans la semestre S10 du parcours combinatoire et qui seront utilisés ultérieurement. Ensuite, nous détaillons la définition des chemins de Fine et ses propriétés fondamentales, à savoir les fractions continues et les fonctions génératrices du nombre de Fine.

Finalement, le second chapitre se concentre sur les interprétations combinatoires du nombre de Fine, en mettant particulièrement l'accent sur les permutations évitant un motif. Dans un premier temps, nous introduisons les relations de similarité et explorons leurs liens avec les nombres de Fine. Ensuite, nous généralisons la relation entre les permutations évitant un motif et les relations de similarité. Enfin, nous établissons divers résultats concernant les permutations évitant un motif, afin de développer des interprétations combinatoires approfondies des nombres de Fine.

Chapitre 1

Définitions et préliminaires

1.1 Chemins de Motzkin

Définition 1.1.1. Un chemin est une suite de points $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que, pour tout i , si (a_i, b_i) sont les coordonnées de A_i , alors pour tout $i < n$, $a_{i+1} - a_i = 1$ et $|b_{i+1} - b_i| \leq 1$.

Dans la suite, on notera par $\Gamma_{n,1}^i$ l'ensemble des chemins de $A_0 = (0, 0)$ vers $A_n = (n, i)$ en n pas.

Propriété 1.1.1. Soit $c \in \Gamma_{n,1}^i$ avec $c = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ où $A_i = (a_i, b_i)$. On a $b_0 = 0$, $b_n = i$ et pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $A_k = (k, b_k)$.

Définition 1.1.2. Soit $c \in \Gamma_{n,1}^i$. On dit que le k -ième pas de c est :

- un palier, que l'on note par la lettre p , si $b_k - b_{k-1} = 0$.
- une montée, que l'on note par la lettre m , si $b_k - b_{k-1} = 1$.
- une descente, que l'on note par la lettre d , si $b_k - b_{k-1} = -1$.

Tout chemin $c \in \Gamma_{n,1}^i$ est entièrement déterminé par b_0, b_1, \dots, b_n . En conséquence, nous adoptons la notation suivante pour un chemin donné : $c = c_1 c_2 \dots c_n$, où $c_k \in \{p, m, d\}$ représente la k -ième pas de c de niveau b_{k-1} . La longueur du chemin, notée $|c|$, correspond au nombre total de pas. On désigne par $|x|_u$ le nombre de lettre dans le mot x égal à u . Nous notons également l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ par $[n]$ tout au long du document.

Définition 1.1.3. Les chemins de Motzkin sont les éléments de l'ensemble $\Gamma_{n,1}^0$ qui vérifient, pour tout $c \in \Gamma_{n,1}^0$:

- (i) $\forall i \in [n], |c_1 c_2 \dots c_i|_m \geq |c_1 c_2 \dots c_i|_d$
- (ii) $|c_1 c_2 \dots c_n|_m = |c_1 c_2 \dots c_n|_d$

On note par γ_{k-1} le niveau du k -ième pas d'un chemin de Motzkin c . On a $\gamma_0 = 0$.

Proposition 1.1.2. Soit $c \in \Gamma_{n,1}^0$. Pour tout $i \geq 2$, on a $|c_1 \cdots c_{i-1}|_m - |c_1 \cdots c_{i-1}|_d = \gamma_{i-1}$

Preuve : On a

$$\begin{aligned}
\gamma_{i-1} &= (\gamma_{i-1} - \gamma_{i-2}) + (\gamma_{i-2} - \gamma_{i-3}) + \cdots + (\gamma_1 - \gamma_0) \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} (\gamma_j - \gamma_{j-1}) \\
&= \sum_{\substack{j \leq i-1 \\ c_j = m}} (\gamma_j - \gamma_{j-1}) + \sum_{\substack{j \leq i-1 \\ c_j = d}} (\gamma_j - \gamma_{j-1}) + \sum_{\substack{j \leq i-1 \\ c_j = p}} (\gamma_j - \gamma_{j-1}) \\
&= |c_1 \cdots c_{i-1}|_m - |c_1 \cdots c_{i-1}|_d \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Définition 1.1.4. Un 2-chemin de Motzkin est un chemin de Motzkin caractérisé par deux types de paliers : le palier rouge, noté r , et le palier bleu, noté b . De plus, un chemin $c = c_1 c_2 \cdots c_n$, avec $c_k \in \{m, d, r, b\}$, est considéré comme un 2-chemin de Motzkin s'il ne comporte aucun palier rouge de niveau zéro.

Dans la suite, l'ensemble des 2-chemin de Motzkin en n pas sera noté par Γ_n .

Définition 1.1.5. Un chemin de Fine est un 2-chemin de Motzkin sans palier bleu de niveau zéro. On note par \mathcal{F}_n l'ensemble des chemin de Fine en n pas.

1.2 Nombres de Catalan

Définition 1.2.1. Les nombres de Catalan sont les nombres C_n qui vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
(i) \quad & C_0 = 1 \\
(ii) \quad & \forall n \geq 1, C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}
\end{aligned}$$

On note $C(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n$ la fonction génératrice ordinaire des nombres de Catalan

Proposition 1.2.1. On a

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned}
C(x) &= 1 + \sum_{n \geq 1} C_n x^n = 1 + \sum_{n \geq 1} x^n \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} = 1 + \sum_{n \geq 1} x^n \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n-1 \\ j+i=n-1}} C_i C_j \\
&= 1 + x \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ j+i=n}} (C_i x^i) (C_j x^j) = 1 + x \left[\left(\sum_{i \geq 0} C_i x^i \right) \left(\sum_{j \geq 0} C_j x^j \right) \right] \\
&= 1 + x(C(x))^2
\end{aligned}$$

Cela implique que $C(x)$ est solution de l'équation $xt^2 - t + 1 = 0$. On a $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$

ou $C(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$.

La limite quand x tends vers 0 de $\frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ (resp. $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$) est infini (resp. 1)

En conséquent, $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ ■

1.3 Fractions continues de Stieltjes

Définition 1.3.1. Une S -fraction est une expression de la forme

$$S(z) = \frac{1}{1 - \frac{c_1 z}{1 - \frac{c_2 z}{1 - \frac{c_3 z}{\ddots}}}}$$

où z est une variable formelle et c_i sont des éléments d'un anneau commutatif.

La proposition suivante est analogue au Lemme 2.11 dans [9].

Proposition 1.3.1.

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{1 - c_1 z - \frac{c_1 c_2 z^2}{1 - (c_2 + c_3)z - \frac{c_3 c_4 z^2}{1 - (c_4 + c_5)z - \frac{c_5 c_6 z^2}{\ddots}}}} \\ &= 1 + \frac{c_1 z}{1 - (c_1 + c_2)z - \frac{c_2 c_3 z^2}{1 - (c_3 + c_4)z - \frac{c_4 c_5 z^2}{1 - (c_5 + c_6)z - \frac{c_6 c_7 z^2}{\ddots}}}} \end{aligned}$$

Proposition 1.3.2. On a

$$C(z) = \frac{1}{1 - z - \frac{z^2}{1 - 2z - \frac{z^2}{\ddots}}}$$

Preuve : Comme $C(z)$ est solution de l'équation $zx^2 - x + 1 = 0$, alors on a

$$C(z) = \frac{C(z)}{1} = \frac{C(z)}{C(z) - zC^2(z)} = \frac{1}{1 - zC(z)} = \frac{1}{1 - \frac{z}{1 - zC(z)}} = \frac{1}{1 - \frac{z}{1 - \frac{z}{\ddots}}}$$

On voit que $C(z)$ est une S -fraction avec $c_i = 1$ ($\forall i \geq 1$). D'où le résultat est obtenu en utilisant la Proposition 1.3.1. ■

1.4 Chemins de Motzkin valués

Définition 1.4.1. Un 2-chemin de Motzkin valué est un couple (c, p) où $c = c_1 c_2 \cdots c_n$ et $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ vérifient les conditions suivantes :

- (i) $c \in \Gamma_n$
- (ii). p est le poids associé à c
- (iii). $0 \leq p_i \leq \gamma_{i-1}$, si $c_i = m$ ou $c_i = b$
- (iv). $0 \leq p_i \leq \gamma_{i-1} - 1$, si $c_i = d$ ou $c_i = r$

Dans la suite, nous adopterons la notation du cours de combinatoire en S10 pour désigner l'ensemble des 2-chemins de Motzkin valués ayant n pas, noté $HL(n)$. Cette notation sera employée ultérieurement. Les chemins, allant de $A_0 = (0, 0)$ vers $A_n = (n, i)$, qui ont deux types de palier (à savoir rouge et bleu) est noté par $\Gamma_{n,2}^i$.

Soit $c \in \Gamma_{n,2}^i$. Nous attribuons à chaque pas de c un poids selon les conditions suivante :

- (i) si le j -ième pas est une montée (i.e $c_j = m$), alors on affecte le poids $m_{\gamma_{j-1}}$
- (ii) si le j -ième pas est une descente (i.e $c_j = d$), alors on affecte le poids $d_{\gamma_{j-1}}$
- (iii) si le j -ième pas est un palier bleu (i.e $c_j = b$), alors on affecte le poids $b_{\gamma_{j-1}}$
- (iv) si le j -ième pas est un palier rouge (i.e $c_j = r$), alors on affecte le poids $r_{\gamma_{j-1}}$

où les $m_{\gamma_{j-1}}$, $d_{\gamma_{j-1}}$, $b_{\gamma_{j-1}}$ et $r_{\gamma_{j-1}}$ sont des éléments d'un anneau commutatif.

Dans toute la suite, on pose $H_{i,n} = \sum_{c \in \Gamma_{n,2}^i} w(c)$ où $w(c) = \prod_{c_j=m} m_{\gamma_{j-1}} \prod_{c_j=d} d_{\gamma_{j-1}} \prod_{c_j=b} b_{\gamma_{j-1}} \prod_{c_j=r} r_{\gamma_{j-1}}$.

Proposition 1.4.1. On a :

$$\begin{cases} H_{i,0} &= 0 \text{ si } i \geq 1 \\ H_{0,n} &= b_0 H_{0,n-1} + d_1 H_{1,n-1} \\ H_{i,n} &= 0 \text{ si } i > n \\ H_{i,n} &= m_{i-1} H_{i-1,n-1} + (b_i + r_i) H_{i,n-1} + d_{i+1} H_{i+1,n-1} \text{ si } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

avec la convention $H_{0,0} = 1$

Preuve : Soit $c \in \Gamma_{n,2}^i$. Il est clair que si $i \geq 1$ et $n = 0$ alors $w(c) = 0$ ou encore $H_{i,0} = 0$.

De plus, comme $\Gamma_{n,2}^0 = \Gamma_n$ alors, on a $c_n \neq r$ et $c_n \neq m$.

Et

$$\begin{aligned}
H_{0,n} &= \sum_{\substack{c \in \Gamma_{n,2}^0 \\ c_n = b}} w(c) + \sum_{\substack{c \in \Gamma_{n,2}^0 \\ c_n = d}} w(c) \\
&= \sum_{c \in \Gamma_{n-1,2}^0} w(c) b_{\gamma_{n-1}} + \sum_{c \in \Gamma_{n-1,2}^1} w(c) d_{\gamma_{n-1}} \\
&= \sum_{c \in \Gamma_{n-1,2}^0} w(c) b_0 + \sum_{c \in \Gamma_{n-1,2}^1} w(c) d_1 \\
&= b_0 H_{0,n-1} + d_1 H_{1,n-1}
\end{aligned}$$

D'autre part, si $i > n$, alors $\Gamma_{n,2}^i$ est vide car on n'atteint jamais le niveau i en n pas pour tout les chemins de $\Gamma_{n,2}^i$. Cela implique que $\forall c \in \Gamma_{n,2}^i$, $H_{i,n} = 0$ si $i > n$.

Enfin, soit $i \in [n]$ et $c \in \Gamma_{n,2}^i$,

On a :

$$\gamma_{n-1} = \begin{cases} i-1 & \text{si } c_n = m \\ i & \text{si } (c_n = b \text{ ou } c_n = r) \\ i+1 & \text{si } c_n = d \end{cases}$$

On note $c^{(1)}$ le chemin obtenu à partir de c en supprimant sa dernière lettre.

On obtient alors la relation suivante :

$$w(c) = \begin{cases} w(c^{(1)}) m_{i-1} & \text{si } c_n = m \\ w(c^{(1)}) b_i & \text{si } c_n = b \\ w(c^{(1)}) r_i & \text{si } c_n = r \\ w(c^{(1)}) d_{i+1} & \text{si } c_n = d \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
H_{i,n} &= \sum_{c \in \Gamma_{n,2}^i} w(c) \\
&= \sum_{\substack{c \in \Gamma_{n,2}^i \\ c_n = m}} w(c) + \sum_{\substack{c \in \Gamma_{n,2}^i \\ c_n = b}} w(c) + \sum_{\substack{c \in \Gamma_{n,2}^i \\ c_n = r}} w(c) + \sum_{\substack{c \in \Gamma_{n,2}^i \\ c_n = d}} w(c) \\
&= m_{i-1} \sum_{c^{(1)} \in \Gamma_{n-1,2}^{i-1}} w(c^{(1)}) + b_i \sum_{c^{(1)} \in \Gamma_{n-1,2}^i} w(c^{(1)}) \\
&\quad + r_i \sum_{c^{(1)} \in \Gamma_{n-1,2}^i} w(c^{(1)}) + d_{i+1} \sum_{c^{(1)} \in \Gamma_{n-1,2}^{i+1}} w(c^{(1)}) \\
&= m_{i-1} H_{i-1,n-1} + (b_i + r_i) H_{i,n-1} + d_{i+1} H_{i+1,n-1}
\end{aligned}$$

D'où le résultat ■

Dans toute la suite, on pose $H_i(z) = \sum_{n \geq 0} H_{i,n} z^n$ ($i \geq 0$).

Proposition 1.4.2. *On a :*

$$H_0(z) = \frac{1}{1 - b_0 z - \frac{m_0 d_1 z^2}{1 - (b_1 + r_1)z - \frac{m_1 d_2 z^2}{1 - (b_2 + r_2)z - \frac{m_2 d_3 z^2}{\ddots}}}}$$

Preuve : D'après la Proposition 1.4.1, on a

$$\begin{aligned} H_0(z) &= 1 + \sum_{n \geq 1} H_{0,n} z^n \\ &= 1 + b_0 \sum_{n \geq 1} H_{0,n-1} z^n + d_1 \sum_{n \geq 1} H_{1,n-1} z^n \\ &= 1 + b_0 z H_0(z) + d_1 z H_1(z) \\ &= \frac{1}{1 - b_0 z - d_1 z \frac{H_1(z)}{H_0(z)}} \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $i \geq 1$,

$$\begin{aligned} H_i(z) &= \sum_{n \geq 0} H_{i,n} z^n \\ &= \sum_{n \geq 1} H_{i,n} z^n \\ &= \sum_{n \geq 1} m_{i-1} H_{i-1,n-1} z^n + (b_i + r_i) \sum_{n \geq 1} H_{i,n-1} z^n + d_{i+1} \sum_{n \geq 1} H_{i+1,n-1} z^n \\ &= m_{i-1} z H_{i-1}(z) + (b_i + r_i) z H_i(z) + d_{i+1} H_{i+1}(z) \end{aligned}$$

Cela implique que :

$$\frac{H_i(z)}{H_{i-1}(z)} = \frac{m_{i-1} z}{1 - (b_i + r_i) z - d_{i+1} z \frac{H_{i+1}(z)}{H_i(z)}}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
H_0(z) &= \frac{1}{1 - b_0 z - d_1 z \frac{m_0 z}{1 - (b_1 + r_1)z - d_2 z \frac{H_2(z)}{H_1(z)}}} \\
&= \frac{1}{1 - b_0 z - \frac{m_0 d_1 z^2}{1 - (b_1 + r_1)z - \frac{m_1 d_2 z^2}{1 - (b_2 + r_2)z - \frac{m_2 d_3 z^2}{\ddots}}}}
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Corollaire 1.4.3. On a $H_0(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} z^n \sum_{c \in \Gamma_n} w(c)$

Preuve : Le résultat se déduit du fait que $H_{0,n} = \sum_{c \in \Gamma_{n,2}^0} w(c) = \sum_{c \in \Gamma_n} w(c)$

Proposition 1.4.4. Posons $\Gamma(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} |\Gamma_n| z^n$. On a

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - z - \frac{z^2}{1 - 2z - \frac{z^2}{\ddots}}}$$

Preuve : On a $|\Gamma_n| = \sum_{c \in \Gamma_n} 1 = \sum_{c \in \Gamma_n} w(c)$ avec

$$1 = w(c) = \prod_{c_j=m} m_{\gamma_{j-1}} \prod_{c_j=d} d_{\gamma_{j-1}} \prod_{c_j=b} b_{\gamma_{j-1}} \prod_{c_j=r} r_{\gamma_{j-1}}$$

Par conséquent, $m_{\gamma_{i-1}} = d_{\gamma_{i-1}} = r_{\gamma_{i-1}} = b_{\gamma_{i-1}} = 1$. D'après la Proposition 1.4.2 et le Corollaire 1.4.3, on obtient :

$$1 + \sum_{n \geq 1} |\Gamma_n| z^n = 1 + \sum_{n \geq 1} z^n \left(\sum_{c \in \Gamma_n} 1 \right) = \frac{1}{1 - z - \frac{z^2}{1 - 2z - \frac{z^2}{\ddots}}}$$

D'où le résultat. ■

Corollaire 1.4.5. On a $|\Gamma_n| = C_n$.

Preuve : De ce qu'on voit dans la Proposition 1.3.2 et dans la Proposition 1.4.4, $C(t)$ et $\Gamma(t)$ ont le même développement en fraction continue.

1.5 Développement en fraction continue de $F(t)$

Proposition 1.5.1. Posons $F(z) = \sum_{n \geq 0} F_n z^n$ avec la convention $F_0 = 1$ où $F_n = |\mathcal{F}_n|$.

On a

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{1 - 2z - \frac{z^2}{\ddots}}}$$

Preuve : Soit $c \in \mathcal{F}_n$. On affecte à chaque palier bleu le poids 0 (resp. 1) si son niveau est nul (resp. non nul). Ainsi

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{c \in \Gamma_n} w(c) \\ &= \sum_{c \in \Gamma_n} \prod_{c_i=m} m_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=d} d_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=b} b_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=r} r_{\gamma_{i-1}} \end{aligned}$$

où $m_j = 1, d_j = 1, r_j = 1$ et $b_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq 0 \\ 0 & \text{si } j = 0 \end{cases}$

En utilisant la Proposition 1.4.2, on obtient le résultat. ■

Proposition 1.5.2. On a

$$F(z) = \frac{1}{2+z}(1 + C(z))$$

Preuve : D'abord, on pose

$$\Delta(z) = \frac{z^2}{1 - 2z - \frac{z^2}{1 - 2z - \frac{z^2}{\ddots}}}$$

On a $C(z) = \frac{1}{1 - z - \Delta(z)}$ et $F(z) = \frac{1}{1 - \Delta(z)}$ ou encore $F(z) = \frac{C(z)}{1 + zC(z)}$.

Ainsi, on obtient :

$$F(z) = \frac{\frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}}{1 + \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{z(3 - \sqrt{1 - 4z})} = \frac{2 - 2\sqrt{1 - 4z} + 4z}{z(8 + 4z)} = \frac{1 + \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}}{2 + z}$$

■

Proposition 1.5.3. *Pour tout $n \geq 2$,*

$$F_n = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^p C_{n-p}$$

Preuve : D'après la Proposition 1.5.2, on a

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2+z}(1+C(z)) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} (1+C(z)) = \frac{1}{2} \left(\sum_{p \geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^p z^p \right) \left(1 + \sum_{m \geq 0} C_m z^m \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{p \geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^p z^p + \sum_{k,m \geq 0} C_m \left(-\frac{1}{2}\right)^k z^{m+k} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{p \geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^p z^p + \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k C_{n-k} \right] \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} [z^n]F(z) &= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k C_{n-k} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k C_{n-k} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k C_{n-k} \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k C_{n-k} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 1.5.4. *On a*

$$\forall n \geq 1, C_n = 2F_n + F_{n-1}$$

Preuve : On en déduit de la Proposition 1.5.2 que $C(t) = (2+t)F(t) - 1$. Par conséquent, on obtient

$$C(z) = (2+z) \sum_{n \geq 0} F_n z^n - 1 = \sum_{n \geq 0} 2F_n z^n + \sum_{n \geq 0} F_n z^{n+1} - 1 = \sum_{n \geq 1} 2F_n z^n + \sum_{n \geq 1} F_{n-1} z^n + 1$$

D'où le résultat \blacksquare

Définition 1.5.1. Un chemin de Dyck de longueur $2n$ est un chemin dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de $(0, 0)$ vers $(2n, 0)$ formé par les pas montées $(1, 1)$ et descentes $(1, -1)$.

Il est bien connu que le nombre de Catalan C_n est égal au nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$. Dans toute la suite, on pose $\overline{\text{Dyck}}(n)$ l'ensemble des chemins de Dyck qui vérifient la condition si $p_i = m$ et $\gamma_{i-1} = 0$, alors $p_{i+1} = m$.

Proposition 1.5.5. *La transformation $\theta : \mathcal{F}_n \longrightarrow \overline{\text{Dyck}}(n) ; c \longrightarrow p = p_1 \cdots p_{2n}$ défini comme suit, pour tout $i \in [n]$,*

$$p_{2i-1}p_{2i} = \begin{cases} mm & \text{si } c_i = m \\ dd & \text{si } c_i = d \\ md & \text{si } c_i = b \\ dm & \text{si } c_i = r \end{cases}$$

est une application bijective.

Preuve : Soit $c \in \mathcal{F}_n$ et $\theta(c) := p$. Nous allons voir que $p \in \overline{\text{Dyck}}(n)$.

Par définition de \mathcal{F}_n , on a $|c|_d = |c|_m$ ou encore $\#\{i; p_{2i-1}p_{2i} = mm\} = \#\{i; p_{2i-1}p_{2i} = dd\}$. Par construction, à chaque palier bleu (resp. palier rouge) de c est transformé en md (resp. en dm) ; ce qui implique que $|p|_m = |p|_d$.

Vérifions ensuite la relation $|p_1 \cdots p_j|_m \geq |p_1 \cdots p_j|_d$, ($\forall j \leq 2n$).

Fixons j et étudions le cas où j impair et j pair.

Supposons que j est pair. Il existe $i \in [n]$ tel que $j = 2i$. On a

$$|p_1 \cdots p_{2i-1}p_{2i}|_m = |c_1 \cdots c_i|_m \geq |c_1 \cdots c_i|_d = |p_1 \cdots p_{2i-1}p_{2i}|_d$$

Supposons ensuite que j est impair. Il existe $i \in [n]$ tel que $j = 2i - 1$.

Nous allons distinguer le cas où $c_i = m$ (resp. $c_i = r, c_i = b, c_i = d$).

Si $c_i = m$, alors on a

$$\begin{aligned} |p_1 \cdots p_{2i-1}|_m &= |p_1 \cdots p_{2i-1}p_{2i}|_m - 1 \\ &= |c_1 \cdots c_i|_m - 1 \\ &= |c_1 \cdots c_{i-1}|_m \\ &\geq |c_1 \cdots c_{i-1}|_d = |p_1 \cdots p_{2i-2}|_d = |p_1 \cdots p_{2i-2}p_{2i-1}|_d \end{aligned}$$

Si $c_i = r$, alors on a

$$\begin{aligned} |p_1 \cdots p_{2i-1}|_m &= |p_1 \cdots p_{2i-2}|_m \\ &= |c_1 \cdots c_{i-1}|_m \\ &\geq |c_1 \cdots c_{i-1}|_d = |c_1 \cdots c_i|_d = |p_1 \cdots p_{2i-1}p_{2i}|_d = |p_1 \cdots p_{2i-1}|_d \end{aligned}$$

Si $c_i = d$ ou $c_i = b$, alors on a

$$\begin{aligned} |p_1 \cdots p_{2i-1}|_m &= |p_1 \cdots p_{2i}|_m \\ &= |c_1 \cdots c_i|_m \\ &\geq |c_1 \cdots c_i|_d = |p_1 \cdots p_{2i-1}p_{2i}|_d > |p_1 \cdots p_{2i-1}|_d \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $j \leq 2n$, $|p_1 \cdots p_j|_m \geq |p_1 \cdots p_j|_d$. Ainsi, $p \in \text{Dyck}(n)$

De plus, s'il existe j tel que $p_j = m$ et $\gamma_{j-1} = 0$, nécessairement ce j est impair i.e il existe $i \leq n$ tel que $j = 2i - 1$. Cela implique que $|p_1 \cdots p_{2i-2}|_m = |p_1 \cdots p_{2i-2}|_d$ ou encore

$|c_1 \cdots c_{i-1}|_m = |c_1 \cdots c_{i-1}|_d$. Comme c est un élément \mathcal{F}_n , alors c_i ne peut pas être égal à d , r ou b . D'où, $c_i = m$ ou encore, $p_{2i} = p_{j+1} = m$. Ainsi $p \in \overline{\text{Dyck}}(n)$. Ce qui prouve que θ est bien définie.

Réciproquement ; soit $p \in \overline{\text{Dyck}}(n)$ et c son antécédent par θ (s'il existe).

On note que $\#\{i; p_{2i-1}p_{2i} = mm\} = \#\{i; p_{2i-1}p_{2i} = dd\}$. Cela implique que $|c|_m = |c|_d$. Fixons $j \in [n]$ et montrons que $|c_1 \cdots c_j|_m \geq |c_1 \cdots c_j|_d$. On a

$$|c_1 \cdots c_j|_m = |p_1 \cdots p_{2j-1}p_{2j}|_m \geq |p_1 \cdots p_{2j-1}p_{2j}|_d = |c_1 \cdots c_j|_d$$

Enfin montrons que c ne contient pas ni palier bleu ni palier rouge de niveau zéro.

Soit $i \in [n]$. Si $c_i = b$ (resp $c_i = r$) alors on a $\gamma_{i-1} \neq 0$ parce que $p_{2i-1}p_{2i} = md$ (resp. $p_{2i-1}p_{2i} = dm$) avec le niveau du pas p_{2i} différent de 1 (resp. différent de 0).

Ainsi, $c \in \mathcal{F}_n$. Enfin l'application θ est bijective ■

Proposition 1.5.6. On a : $F_n = \sum_{i=2}^n C_{i-1}F_{n-i}$

Preuve :

Soit $p \in \overline{\text{Dyck}}(n)$ et $i \leq 2n$ le plus petit entier qui vérifie :

$$|p_1p_2 \cdots p_{2i}|_m = |p_1p_2 \cdots p_{2i}|_d \text{ et } \forall j < 2i, |p_1p_2 \cdots p_j|_m > |p_1p_2 \cdots p_j|_d$$

Nécessairement, $i > 1$. On note par $\overline{\text{Dyck}}_i(n)$ l'ensemble des éléments $\overline{\text{Dyck}}(n)$ qui vérifient les conditions précédentes.

Soit $p = p_1p_2 \cdots p_{2n} \in \overline{\text{Dyck}}_i(n)$. On a $p_1 = p_2 = m$, $p_{2i-1} = p_{2i} = d$. Soit $p' = p'_1 \cdots p'_{2(i-1)}$ et $p'' = p''_1 \cdots p''_{2(n-i)}$ obtenu à partir de p tel que

- $p'_k = p_{k+1}$, ($k \leq 2(i-1)$)
- $p''_k = p_{2i+k}$, ($k \leq 2(n-i)$)

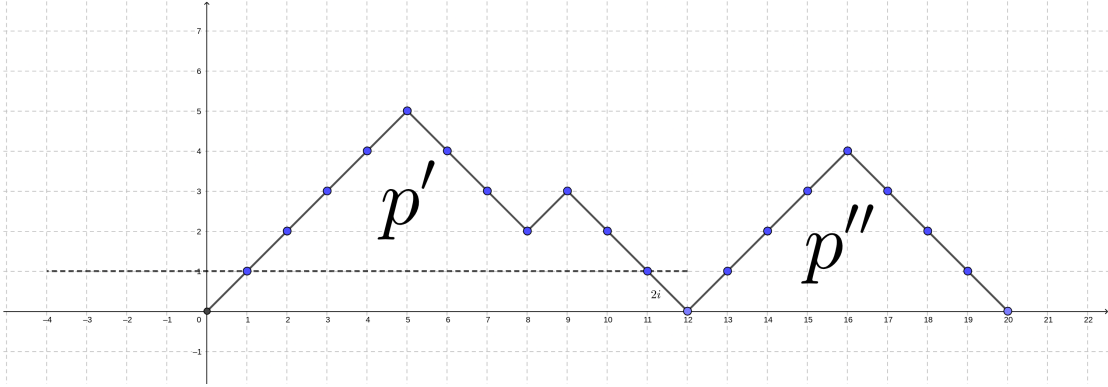
On a $p' \in \overline{\text{Dyck}}(i-1)$ et $p'' \in \overline{\text{Dyck}}(n-i)$.

Considérons l'application $\alpha : \overline{\text{Dyck}}_i(n) \longrightarrow \overline{\text{Dyck}}(i-1) \times \overline{\text{Dyck}}(n-i)$, $p \mapsto (p', p'')$, défini par la transformation ci-dessus. On voit que α est une application bijective.

Par conséquent,

$$\# \bigcup_{i=2}^n \text{Dyck}(i-1) \times \overline{\text{Dyck}}(n-i) = \# \bigcup_{i=2}^n \overline{\text{Dyck}}_i(n) = \# \overline{\text{Dyck}}(n)$$

D'après la Proposition 1.5.5, on a $F_n = \# \overline{\text{Dyck}}(n)$ et le fait que $C_n = \# \text{Dyck}(n)$, on obtient le résultat. Ci-dessous une illustration.



Chapitre 2

Nombres de Fine, relations de similarité et permutations

Dans toute la suite, on note par S_n l'ensemble des permutations de $[n]$. Soit $m \leq n$ et $x = x_1x_2 \cdots x_m$ une permutation qui n'est pas nécessairement un élément de S_m .

On pose $\text{st}(x) = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_m$ la permutation obtenue à partir de x en remplaçant la plus petite lettre de x par 1, la 2^e plus petite lettre de x par 2 et ainsi de suite. Donc la plus grande lettre de x par m . Soit $\pi \in S_n$. On dit que π contient le motif $\alpha \in S_m$, s'il existe i_1, i_2, \dots, i_m tel que $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ et $\text{st}(\pi_{i_1}\pi_{i_2} \cdots \pi_{i_m}) = \alpha$. Dans le cas contraire, on dit que π évite le motif α . Soit $i \in [n]$. On dit que, i est un point fixe de π si $\pi_i = i$ et note $\text{fix}(\pi)$ le nombre des points fixes de π .

On note par $S_n(\alpha)$ l'ensemble de toutes les permutations $\pi \in S_n$ qui évitent le motif α et on désigne par $s_n(\alpha)$ son cardinal. Par suite, on note par $S_n^k(\alpha)$ l'ensemble des permutations $\pi \in S_n(\alpha)$ qui ont exactement k points fixes et son cardinal est désigné $s_n^k(\alpha)$.

2.1 Relations de similarité

Définition 2.1.1. Une relation de similarité \mathcal{R} sur $[n]$ est une relation binaire, réflexive et symétrique vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x, y, z \in [n], ((x < y \leq z \text{ et } x\mathcal{R}z) \implies (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z))$$

2.1.1 Points isolés

Définition 2.1.2. Soit $i \in [n]$. On dit que i est un point isolé de \mathcal{R} si

$$\forall j \in [n], (i\mathcal{R}j \implies i = j)$$

Définition 2.1.3. Une relation de similarité \mathcal{R} est non-singulière si elle n'a aucun point isolé.

On note par $\text{RS}_n(k)$ l'ensemble des éléments de RS_n ayant exactement k points isolés. On note par Sim_n l'ensemble des mots $r = r_1r_2 \cdots r_n$, avec les $r_i \in \mathbb{N}$, tel que $\forall i \leq n, 0 \leq r_i \leq i - 1$ et $r_{i+1} \leq r_i + 1$ avec la convention $r_{n+1} = 0$

Proposition 2.1.1.

La transformation $\Phi : \text{RS}_n \rightarrow \text{Sim}_n$, $\mathcal{R} \rightarrow r = r_1 r_2 \cdots r_n$ où, pour $1 \leq i \leq n$, r_i est égal au nombre d'entiers j tels que $j < i$ et $j\mathcal{R}i$, est une application bijective.

De plus, le nombre de points isolés de \mathcal{R} est égal au nombre d'entiers i tels que $r_i = r_{i+1} = 0$

Preuve : Soit $\mathcal{R} \in \text{RS}_n$ et $\Phi(\mathcal{R}) := r = r_1 r_2 \cdots r_n$. Pour tout $1 \leq j \leq n$, notons $E_j(\mathcal{R}) = \{k < j; k\mathcal{R}j\}$. On a $\#E_j(\mathcal{R}) = r_j$ et $r_j \leq j - 1$ pour tout j .

Soit $1 \leq i < n$. Si $r_{i+1} = 0$ on a toujours $r_{i+1} \leq r_i + 1$.

Si $r_{i+1} > 0$, alors $i\mathcal{R}(i+1)$ d'après la définition d'une relation de similarité. De plus, si $k \in E_{i+1}(\mathcal{R})$ et $k < i$, alors $k\mathcal{R}i$, i.e $k \in E_i(\mathcal{R})$. Par conséquent, $r_{i+1} - 1 \leq r_i$.

Ce qui prouve que Φ est bien définie.

D'autre part, soit $r = r_1 r_2 \cdots r_n \in \text{Sim}_n$ et $p_k = k - r_k$ pour tout k . On a $1 \leq p_k \leq p_{k+1}$ si $k < n$. Soit \mathcal{R} un antécédent de r par Φ . D'après la définition de \mathcal{R} , p_k est la plus petite lettre $\leq k$ telle que $p_k \mathcal{R} k$. Ainsi, pour tout couple (i, j) tel que $i \leq j$, on a l'équivalence $(i\mathcal{R}j \iff i \geq p_j)$. Ce qui prouve que Φ est bijective.

Enfin, soit $1 \leq i \leq n$. Si $i = n$, alors i est un point isolé de \mathcal{R} si et seulement si $r_i = 0$.

Si $i < n$, alors i est un point isolé de \mathcal{R} si et seulement si $r_i = 0$ et i n'est pas en relation avec $i+1$ ou encore $r_i = r_{i+1} = 0$. ■

Posons $\text{Sim}_n(k) = \{r \in \text{Sim}_n; \#\{i; r_i = r_{i+1} = 0\} = k\}$

Corollaire 2.1.2.

On a $\#\text{RS}_n(k) = \#\text{Sim}_n(k)$

Proposition 2.1.3.

Soit la transformation $\varphi : \text{Dyck}(n) \rightarrow \text{Sim}_n$, $p = p_1 p_2 \cdots p_{2n} \rightarrow r = r_1 r_2 \cdots r_n$ définie comme suit :

Soit $\text{Mont}(p) = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ l'ensemble des entiers i tels que $p_i = m$. Alors pour tout $1 \leq j \leq n$, $r_j = \gamma_{i_j-1}$ où γ_{i-1} est le niveau du i -ième pas de p . Alors φ est une application bijective.

De plus, $|\text{Sim}_n(k)| = \#\{p \in \text{Dyck}(n); |\{i \in \text{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0 \text{ et } p_{i+1} = d\}| = k\}$

Preuve : Soit $p = p_1 p_2 \cdots p_{2n} \in \text{Dyck}(n)$ et $\varphi(p) := r$. Notons que

$$\gamma_{i_j-1} = |p_1 p_2 \cdots p_{i_j-1}|_m - |p_1 p_2 \cdots p_{i_j-1}|_d$$

Cela implique que $\gamma_{i_j-1} = r_j \leq |p_1 p_2 \cdots p_{i_j-1}|_m = j - 1$.

De plus, $|p_1 p_2 \cdots p_{i_j-1}|_m - |p_1 p_2 \cdots p_{i_j-1}|_d = (j - 1) - [(i_j - 1) - (j - 1)] = 2(j - 1) - i_j + 1$.

Donc $r_j = \gamma_{i_j-1} = 2(j - 1) - i_j + 1$

Ainsi, $r_{j+1} = 2j - i_{j+1} + 1 < 2j - i_j + 1$ ou encore $r_{j+1} \leq 2j - i_j = r_j + 1$.

D'où $r \in \text{Sim}_n$. Ce qui prouve φ est bien définie.

Réciproquement, soit $r = r_1 r_2 \cdots r_n \in \text{Sim}_n$ et soit $p = p_1 p_2 \cdots p_{2n}$ un antécédent de r par φ (s'il existe). On note par $E = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ l'ensemble des i tels que $p_i = m$ avec $i_j = 2j - 1 - r_j$ et $\gamma_{i_j-1} = 2j - i_j - 1$.

Par suite, soit $j \in [n]$ tel que le nombre de descentes entre p_{i_j} et $p_{i_{j+1}}$ est

$$r_j - r_{j+1} + 1 = i_{j+1} - i_j - 1$$

On en déduit alors que $p_1 = m$ et $\gamma_0 = 0$.

Enfin, montrons que $p \in \text{Dyck}(n)$.

Il suffit de montrer que, pour tout $1 \leq k \leq 2n$, $|p_1 \cdots p_k|_m \geq |p_1 \cdots p_k|_d$

Si $k = 2n$, on a $|p|_d = \sum_{j=1}^n (r_j - r_{j+1} + 1) = r_1 - r_{n+1} + n = n$. Par conséquent, $|p|_m = |p|_d$.

Supposons que $k \neq 2n$

- Si $p_k = m$, alors il existe $i_j \in E$ tel que $k = i_j$. On a $|p_1 p_2 \cdots p_k|_m = j$ et

$$|p_1 p_2 \cdots p_k|_d = \sum_{p=1}^{j-1} (r_p - r_{p+1} + 1) = r_1 - r_j + (j-1) = (j-1) - r_j < j.$$

- Si $p_k = d$. Soit i_j le plus grand entier élément de E tel que $i_j < k$.

On a $|p_1 p_2 \cdots p_{i_j} \cdots p_k|_m = j$ et $|p_1 p_2 \cdots p_{i_j} \cdots p_k|_d \leq |p_1 p_2 \cdots p_{i_j} \cdots p_k \cdots p_{i_{j+1}}|_d$ avec

$$|p_1 p_2 \cdots p_{i_j} \cdots p_k \cdots p_{i_{j+1}}|_d = \sum_{p=1}^j (r_p - r_{p+1} + 1) = r_1 - r_{j+1} + j = j - r_{j+1} \leq j$$

On en déduit que, pour tout $k \leq 2n$, $|p_1 p_2 \cdots p_k|_d \leq |p_1 p_2 \cdots p_k|_m$.

Ainsi, $p \in \text{Dyck}(n)$. Ce qui prouve que φ est bijective.

Soit $p = p_1 p_2 \cdots p_{2n} \in \text{Dyck}(n)$ et $\varphi(p) = r$. Soit $k \in [2n-1]$ tel que $\gamma_{k-1} = 0$ et $p_{k+1} = d$. Il existe $i_j \in \text{Mont}(p) = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ tel que $k = i_j$. Donc, $\gamma_{k-1} = \gamma_{i_j-1} = 0 = r_j$. De plus k ne peut pas être pair.

- Si $k = 2n-1$, alors on a $k = i_n$. Donc $\gamma_{i_n-1} = 0 = r_n$ et avec la convention $r_{n+1} = 0$

- Si $k \neq 2n-1$, on a $p_{k+2} = m$ avec $\gamma_{(k+2)-1} = 0$. Cela implique que $i_{j+1} = k+2$ et on en déduit que $\gamma_{(k+2)-1} = \gamma_{i_{j+1}-1} = 0 = r_{j+1}$.

D'où, $|\text{Sim}_n(k)| = \#\{p \in \text{Dyck}(n); |\{i \in \text{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0 \text{ et } p_{i+1} = d\}| = k\}$. ■

Corollaire 2.1.4.

On a $\#\text{RS}_n(k) = \#\{p \in \text{Dyck}(n); |\{i \in \text{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0 \text{ et } p_{i+1} = d\}| = k\}$.

Preuve : En utilisant le Corollaire 2.1.2 et la Proposition 2.1.3, on a le résultat.

Corollaire 2.1.5. On a : $|\text{RS}_n| = C_n$.

Notons que $\overline{\text{Dyck}}(n) = \{p \in \text{Dyck}(n); |\{i \in \text{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0 \text{ et } p_{i+1} = d\}| = 0\}$

Corollaire 2.1.6. On a, $F_n = |\text{RS}_n(0)|$

Preuve : En utilisant la Proposition 1.5.5 et le Corollaire 2.1.4, on obtient le résultat.

2.1.2 Relation entre $S_n^k(321)$ et $\text{RS}_n(k)$

Définition 2.1.4. Soit π une permutation de $[n]$. On note $D(\pi)$ l'ensemble des i tels que $\pi_{n-i+1} = i$. Pour toute permutation $\sigma = x_1 x_2 \cdots x_n$, on note $r(\sigma)$ sa permutation miroir : $r(\sigma) = x_n \cdots x_2 x_1$.

Proposition 2.1.7. Soit Σ la transformation $S_n(321) \longrightarrow S_n(123)$, $\sigma \longrightarrow \pi$ définie par $\Sigma(\sigma) := r(\sigma)$. Alors φ est une application bijective.
De plus, $\text{fix}(\sigma) = |D(r(\sigma))|$

Preuve : Soit $\sigma \in S_n(321)$ et $\Sigma(\sigma) := \pi$. Supposons qu'il existe $i < j < k$ tels que $st(\pi_i \pi_j \pi_k) = 123$. Alors $st(\sigma_{n-k+1} \sigma_{n-j+1} \sigma_{n-i+1}) = 321$, qui est en contradiction avec $\sigma \in S_n(321)$.

Ce qui prouve que Σ est bien définie.

Soit $\pi \in S_n(123)$. On pose σ l'antécédent de π par Σ tel que $\sigma = r(\pi) \in S_n(321)$.

Ainsi Σ est bijective.

De plus, soit $i \in \text{Fix}(\sigma)$. On a $\pi_{n-i+1} = i$. Ainsi $\text{fix}(\sigma) = |D(r(\sigma))|$. ■

Définition 2.1.5. Soit $\sigma \in S_n$ et $i \in [n]$.

On dit que σ_i est un saillant supérieur gauche (*ssg*) (resp saillant supérieur droite (*ssd*)) de σ si $\forall j < i, \sigma_j < \sigma_i$ (resp $\forall j > i, \sigma_j < \sigma_i$)

Définition 2.1.6. Soit π une permutation de $[n]$. On appelle *ssd-décomposition* de π l'expression $\pi = w_1 u_1 w_2 u_2 \cdots w_s u_s$ où les u_i sont les *ssd* de π et les w_i sont des sous-mots (éventuellement vide) de π .

Lemme 2.1.1. Soit $\sigma \in S_n$ et $\sigma = w_1 u_1 w_2 u_2 \cdots w_s u_s$ sa *ssd-décomposition*. Alors $\sigma \in S_n(123)$ si et seulement si, $w_1 w_2 \cdots w_s$ est un mot décroissant.

Preuve :

On a $w_1 w_2 \cdots w_s$ n'est pas décroissant

ssi il existe $k \in [s-1]$ tel que $w_k w_{k+1}$ n'est pas décroissant

ssi il existe $k \in [s-1]$ tel que $w_k u_k w_{k+1} u_{k+1}$ contient le motif 123

ssi σ contient le motif 123.

Lemme 2.1.2. Soit $\sigma \in S_n(321)$ et $1 \leq j \leq n$.

j est un point fixe de σ si et seulement si, dans la décomposition linéaire de σ , toute lettre à gauche de j est plus petite que j et toute lettre à droite de j est plus grande que j .

Preuve : Soit $\sigma = \sigma(1)\sigma(2) \cdots \sigma(n) \in S_n(321)$ et $1 \leq j \leq n$ tel que $\sigma(j) = j$.

Si $\sigma(1)\sigma(2) \cdots \sigma(j-1)$ n'est pas formé par les éléments de $[j-1]$, alors il existe $i < j$ et $k > j$ tel que $\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)$ est un motif 321.

Proposition 2.1.8. Soit Θ la transformation $S_n(321) \longrightarrow \text{Dyck}(n)$, $\sigma \longrightarrow p$ définie par :
Si $w_1 u_1 w_2 u_2 \cdots w_s u_s$ est la *ssd-décomposition* de $\pi = r(\sigma)$, alors $p = m_1 d_1 m_2 d_2 \cdots m_s d_s$ où m_i (resp. d_i) est un mot formé par la seule lettre m (resp. d) tel que $|m_i| = |w_i| + 1$ (resp. $|d_i| = u_i - u_{i+1}$) avec la convention $u_{s+1} = 0$. Alors Θ est une application bijective.
De plus, $\text{fix}(\sigma) = \#\{i \in \text{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0 \text{ et } p_{i+1} = d\}$

Démonstration : Soit $\sigma \in S_n(321)$ tel que $w_1 u_1 w_2 u_2 \cdots w_s u_s$ est la *ssd-décomposition* de $r(\sigma) = \pi \in S_n(123)$ et $\Theta(\sigma) := p = m_1 d_1 m_2 d_2 \cdots m_s d_s$ où m_i (resp. d_i) est un mot formé par la seule lettre m (resp. d) tel que $|m_i| = |w_i| + 1$ (resp. $|d_i| = u_i - u_{i+1}$) avec la convention $u_{s+1} = 0$.

Premièrement, nous allons voir que $|p|_m = |p|_d$. On a :

$$|p|_m = \sum_{k=1}^s |m_k| = \sum_{k=1}^s (|w_k| + 1) = s + \sum_{k=1}^s |w_k| = s + (n - s) = n$$

et

$$|p|_d = \sum_{k=1}^s |d_k| = \sum_{k=1}^s (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{s+1} = u_1 = n$$

On peut alors écrire p sous la forme $p = p_1 p_2 \cdots p_{2n}$ avec $p_1 = m$ et $\gamma_0 = 0$.

Deuxièmement, nous allons voir que pour tout $k \leq 2n$, $|p_1 p_2 \cdots p_k|_m \geq |p_1 p_2 \cdots p_k|_d$.

On commence par prouver que, pour tout $h \leq s$, $n - u_h \leq |m_1 d_1 \cdots m_{h-1} d_{h-1}|_m$.

Supposons que $|w_h u_h \cdots w_s u_s| = q$. Alors, la plus grande lettre de $st(w_h u_h \cdots w_s u_s)$ est égale à q .

Nécessairement $u_h \geq q$ car u_h ssd de π . D'où

$$\begin{aligned} u_h \geq |w_h u_h \cdots w_s u_s| &= n - |w_1 u_1 \cdots w_{h-1} u_{h-1}| \\ &= n - \left[(h-1) + \sum_{i=1}^{h-1} |w_i| \right] \\ &= n - \left[(h-1) + \sum_{i=1}^{h-1} (|m_i| - 1) \right] \\ &= n - \sum_{i=1}^{h-1} |m_i| \\ &= n - |m_1 d_1 \cdots m_{h-1} d_{h-1}|_m \end{aligned}$$

ou encore $|m_1 d_1 \cdots m_{h-1} d_{h-1}|_m \geq n - u_h$.

Passons ensuite à la preuve de $|p_1 p_2 \cdots p_k|_m \geq |p_1 p_2 \cdots p_k|_d$, $\forall k \leq 2n$.

- Si $p_k = m$, alors il existe $l \in [s]$ tel que p_k est une lettre de m_l .

On a $|m_1 d_1 \cdots m_{l-1} d_{l-1}|_m < |p_1 p_2 \cdots p_k|_m$ et $|p_1 p_2 \cdots p_k|_d = |m_1 d_1 \cdots m_{l-1} d_{l-1}|_d = \sum_{i=1}^{l-1} |d_i| = n - u_l$.

On en déduit que $|p_1 p_2 \cdots p_k|_d = n - u_l \leq |m_1 d_1 \cdots m_{l-1} d_{l-1}|_m < |p_1 p_2 \cdots p_k|_m$ ou encore $|p_1 p_2 \cdots p_k|_d < |p_1 p_2 \cdots p_k|_m$.

- Si $p_k = d$, alors il existe $l \in [s]$ tel que p_k est une lettre de d_l .

On a $|p_1 p_2 \cdots p_k|_d \leq |m_1 d_1 \cdots m_l d_l|_d = \sum_{i=1}^l |d_i| = \sum_{i=1}^l (u_i - u_{i+1}) = n - u_{l+1}$ et

$|p_1 p_2 \cdots p_k|_m = |m_1 d_1 \cdots m_l d_l|_m$.

On en déduit que $|p_1 p_2 \cdots p_k|_d \leq n - u_{l+1} \leq |m_1 d_1 \cdots m_l d_l|_m = |p_1 p_2 \cdots p_k|_m$

ou encore $|p_1 p_2 \cdots p_k|_d \leq |p_1 p_2 \cdots p_k|_m$

Par conséquent, $p \in \text{Dyck}(n)$. Ce qui prouve que Θ est bien définie.

Montrons qu'elle est bijective. Soit $p \in \text{Dyck}(n)$. On peut écrire p sous la forme $p = m_1 d_1 m_2 d_2 \cdots m_s d_s$ où m_i (resp. d_i) est un mot formé par la seule lettre m (resp. d).

Posons $u_i = \sum_{k=i}^s |d_k|$ et $1 \leq i \leq s$ et soit w_1, w_2, \dots, w_s s mots tels que $|w_i| = |m_i| - 1$ ($1 \leq i \leq s$) et $w_1 w_2 \cdots w_s$ le mot décroissant formé par les lettres de $[n] \setminus \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$

avec $w_i = e$ si w_i est vide.

Il est évident que $u_s < u_{s-1} < \dots < u_1$.

D'autre part, comme $|w_1 w_2 \dots w_s| = n - s$ alors $|w_i w_{i+1} \dots w_s| = n - s - |w_1 w_2 \dots w_{i-1}| = n - s - (\sum_{k=1}^{i-1} |m_k| - (i-1)) \leq n - s - (\sum_{k=1}^{i-1} |d_k| - (i-1)) = \sum_{k=i}^s |d_k| - (s - i + 1) = u_i - (s - i + 1)$.

Par conséquent, $|w_i w_{i+1} u_{i+1} \dots w_s u_s| \leq u_i - 1 < u_i$.

Dès lors, toutes les lettres du mot $w_i w_{i+1} u_{i+1} \dots w_s u_s$ sont plus petites que u_i . Il s'ensuit que l'antécédent de p est σ dont la ssd-décomposition du miroir est $w_1 u_1 w_2 u_2 \dots w_s u_s$.

Enfin, soit $1 \leq j \leq n$. D'après le Lemme 2.1.2 et par passage au miroir,

$$\sigma(j) = j,$$

$$\iff \exists i, u_i = j, |w_i| = 0, |w_1 u_1 w_2 u_2 \dots w_{i-1} u_{i-1}| = n - j, |w_{i+1} u_{i+1} \dots w_s u_s| = j - 1$$

$$\iff \exists i, u_i = j, |w_i| = 0, |w_1 w_2 \dots w_{i-1}| + i - 1 = n - j, |w_{i+1} \dots w_s| + s - j = j - 1$$

$$\iff \exists i, \sum_{k=1}^{i-1} |d_k| = n - j, |m_i| = 1, \sum_{k=1}^{i-1} |m_k| = n - j, \sum_{k=i+1}^s |m_k| = j - 1$$

Or, comme $j - 1$ se trouve à droite de j dans $r(\sigma)$, alors $u_{i+1} = j - 1$.

Par conséquent,

$$\sigma(j) = j,$$

$$\iff \exists i, \sum_{k=1}^{i-1} |m_k| = \sum_{k=1}^{i-1} |d_k| = n - j, |m_i| = |d_i| = 1, \sum_{k=i+1}^s |m_k| = \sum_{k=i+1}^s |d_k| = j - 1$$

$$\iff \gamma_{2(n-j)} = 0 \text{ et } p_{2(n-j+1)} = d$$

Corollaire 2.1.9. On a $s_n^k(321) = \#\{p \in \text{Dyck}(n); |\{i \in \text{Mont}(p); \gamma_{i-1} = 0 \text{ et } p_{i+1} = d\}| = k\}$

Preuve : En utilisant la Proposition 2.1.8, on a le résultat.

Corollaire 2.1.10. $\forall n \geq 0, s_n^k(321) = \#\text{RS}_n(k)$

Preuve : En utilisant le Corollaire 2.1.9 et le Corollaire 2.1.4, on le résultat.

Corollaire 2.1.11. On a $F_n = s_n^0(321)$.

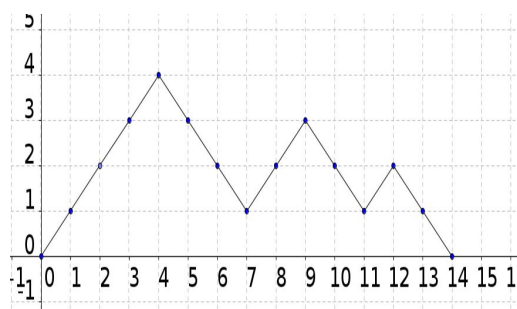
Preuve : En utilisant le Corollaire 2.1.10 et Corollaire 2.1.6, on a le résultat.

2.2 Interprétations des F_n

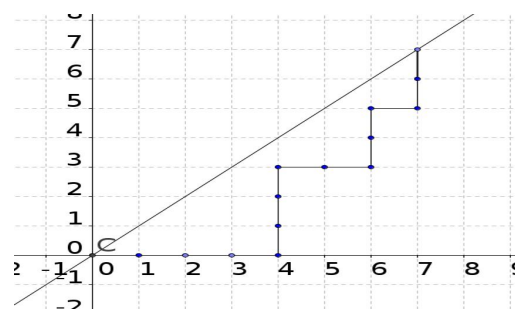
2.2.1 Mots de Catalan

Dans un chemin de Dyck, si on remplace chaque montée (resp. chaque descente) par un pas horizontal (resp. vertical), on obtient une autre définition d'un chemin de Dyck. Un chemin de Dyck de longueur $2n$ est un chemin dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de $(0, 0)$ vers (n, n) formé par les pas horizontaux $(1, 0)$ et verticaux $(0, 1)$ et qui se trouvent au-dessous de la droite $y = x$ (Voir figure ci-dessous).

Un chemin de Dyck de longueur $2n$ peut être représenté par le mot $c_0 c_1 \dots c_{n-1}$ où c_{i-1} est le niveau du i -ème pas horizontal : $0 \leq c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_{n-1}$ avec $c_i \leq i$. Notons que c_{i-1} est égal au nombre de pas verticaux qui se trouvent avant le i -ème pas horizontal.



(a) Chemin de Dyck



(b) Transformé du chemin de Dyck

Définition 2.2.1. A un décalage d'indice, un chemin de Dyck de longueur $2n$ est représenté par un mot $c_1 c_2 \cdots c_n$ tel que $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$ où $c_i \leq i$ pour tout i . Un tel mot est appelé mot de Catalan de longueur n .

Dans toute la suite, on note par $\text{Cat}(n)$ l'ensemble des mots de Catalan de longueur n .

Lemme 2.2.1. *La transformation d'un chemin de Dyck en un mot de Catalan précédente est une application bijective*

Définition 2.2.2. Soit $\psi : S_m(321) \longrightarrow S_{m-1}(321), \pi \longrightarrow \psi(\pi)$ définie par :

- Si $\pi(m) = m - 1$, alors $\psi(\pi) = st(\pi(1)\pi(2) \cdots \pi(m-1))$
- Si $\pi(m) \neq m - 1$, alors $\psi(\pi)$ se déduit de π en supprimant m

On pose $ps(\pi)$ la position de m , i.e $ps(\pi) = \pi^{-1}(m)$.

Proposition 2.2.1.

La transformation $\alpha : S_n(321) \longrightarrow \text{Cat}(n), \pi \longrightarrow c = ps(\pi^{(n-1)})ps(\pi^{(n-2)}) \cdots ps(\pi^{(0)})$ où $\pi^{(0)} = \pi, \pi^{(1)} = \psi(\pi^{(0)}), \dots, \pi^{(i)} = \psi(\pi^{(i-1)})$ est une application bijective.

De plus, $fix(\pi) = \#\{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i + 1\}$ où l'on convient que $c_{n+1} = n + 1$.

Preuve : Soit $\pi \in S_n(321)$ et $\alpha(\pi) := c = c_1c_2 \cdots c_n$ où $c_i = ps(\pi^{(n-i)})$.

Pour tout $0 \leq i \leq n - 1$, on a $\pi^{(i)} \in S_{n-i}(321)$. On en déduit que $ps(\pi^{(i)}) \leq n - i$ ou encore $c_{n-i} \leq n - i$.

En utilisant la définition de ψ précédente, on a :

- si $\pi^{(i)}(n - i) = n - i - 1$, alors $ps(\pi^{(i)}) = ps(\pi^{(i+1)})$
- si $\pi^{(i)}(n - i) \neq n - i - 1$ alors dans la décomposition linéaire de $\pi^{(i)}$, $n - i - 1$ se trouve à gauche de $n - i$ car $\pi^{(i)} \in S_{n-i}(321)$. Cela implique que $ps(\pi^{(i)}) > (\pi^{(i)})^{-1}(n - i - 1) = ps(\psi(\pi^{(i)})) = ps(\pi^{(i+1)})$. D'où $ps(\pi^{(i)}) > ps(\pi^{(i+1)})$

Cela implique que $1 \leq ps(\pi^{(n-1)}) \leq ps(\pi^{(n-2)}) \leq \cdots \leq ps(\pi^{(0)}) \leq n$ ou encore $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n \leq n$.

Il s'ensuit que $c \in \text{Cat}(n)$. Ce qui prouve que α est bien définie.

Montrons qu'elle est bijective. Soit $c \in \text{Cat}(n)$ et $\pi^{(0)}, \pi^{(1)}, \dots, \pi^{(n-1)}$ sont des mots tels que $\pi^{(n-1)} = 1$ et pour tout $2 \leq j \leq n$, $\pi^{(n-j)}$ est un mot obtenue à partir de $\pi^{(n-j+1)}$ comme suit :

- si $c_j = c_{j-1}$, alors on remplace $j - 1$ par j et on ajoute $j - 1$ après la dernière lettre.
- si $c_j > c_{j-1}$, alors on insère j après la $(c_j - 1)$ -ème lettre.

On en déduit que pour tout $1 \leq j \leq n$, $\pi^{(n-j)} \in S_j$.

Vérifions que pour tout $1 \leq j \leq n$, $c_j = ps(\pi^{(n-j)})$. D'après la construction de $\pi^{(n-j)}$ précédente, cette dernière est évidente dans le cas où $c_j > c_{j-1}$ ($j \geq 2$). Supposons alors que $c_j = c_{j-1}$. Soit $k < j - 1$ l'entier qui vérifie (s'il existe) $c_{k+1} > c_k$ et $c_{k+1} = c_{k+2} = \cdots = c_{j-1} = c_j$.

On a $ps(\pi^{(n-(k+1))}) = ps(\pi^{(n-(k+2))}) = \cdots = ps(\pi^{(n-j+1)}) = ps(\pi^{(n-j)})$ avec $ps(\pi^{(n-(k+1))}) = c_{k+1}$

On en déduit que $c_j = ps(\pi^{(n-j)})$

Il nous reste à montrer que pour tout $1 \leq j \leq n$, $\pi^{(n-j)} \in S_j(321)$

Supposons qu'il existe $j \leq n$ tel que $\pi^{(n-j)} \notin S_j(321)$ et pour tout $p < j$, $\pi^{(n-p)} \in S_p(321)$. Soit alors $i < k < l$ tel que $st(\pi^{(n-j)}(i)\pi^{(n-j)}(k)\pi^{(n-j)}(l)) = 321$. On en déduit que $\pi^{(n-j)}(i) = j$.

On a $\pi^{(n-j)}(j) \neq j - 1$ et $j - 1$ se trouve à droite de j dans la décomposition linéaire de

$\pi^{(n-j)}$ car sinon on aura $\pi^{(n-j+1)} \notin S_{j-1}(321)$.

Cela implique que $ps(\pi^{(n-j)}) < ps(\pi^{(n-j+1)})$ ou encore $c_j < c_{j-1}$ qui est en contradiction avec $c \in Cat(n)$.

Ainsi, pour tout $1 \leq j \leq n$, $\pi^{(n-j)} \in S_j(321)$.

$\pi^{(0)}$ est l'antécédent de c par α . Ce qui prouve que α est une application bijective.

Enfin, soit $\pi \in S_n(321)$ et $\alpha(\pi) = c$. Soit $i \in Fix(\pi)$. D'après le Lemme 2.1.2, toute lettre à gauche de i est plus petite que i et toute lettre à droite de i est plus grande que i . D'après la Definition 2.2.2, on a $\pi^{(n-i)}(i) = i$ et $\pi^{(n-i-1)}(i+1) = i+1$ ou encore $c_i = i$ et $c_{i+1} = i+1$

Ainsi $fix(\pi) = \#\{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\}$. ■.

Corollaire 2.2.2. On a $F_n = \#\{c \in Cat(n); |\{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\}| = 0\}$

Preuve :

En utilisant la Proposition 2.2.1, on a $s_n^k(321) = \#\{c \in Cat(n); |\{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\}| = k\}$ et en utilisant le Corollaire 2.1.11, on a le résultat. ■

Dans toute la suite, on pose $A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(321)} x^{fix(\pi)}$.

Proposition 2.2.3. On a $A_n(x) = \sum_{c \in Cat(n)} x^{\#D(c)}$ où $D(c) = \{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\}$.

De plus, $x^{\#D(c)} = \sum_{S \subset D(c)} (x-1)^{\#S}$

Preuve : Soit $c \in Cat(n)$ et $\alpha(c) := \pi \in S_n(321)$ où α est la bijection définit dans la Proposition 2.2.1. On a $fix(\pi) = \#\{i; c_i = i \text{ et } c_{i+1} = i+1\} = \#D(c)$. D'où le résultat.

D'autre part,

$$x^{\#D(c)} = ((x-1) + 1)^{\#D(c)} = \sum_{k=0}^{\#D(c)} 1^{\#D(c)-k} (x-1)^k \binom{\#D(c)}{k} = \sum_{k=0}^{\#D(c)} \sum_{\substack{S \subset D(c) \\ |S|=k}} (x-1)^k = \sum_{S \subset D(c)} (x-1)^{\#S} \quad \blacksquare$$

Posons $E := \{c \in Cat(n); c_2 = 2\}$.

Proposition 2.2.4. Soit η la transformation de $E \rightarrow Cat(n-1)$, $c \rightarrow c^{(1)}$ définie comme suit, pour toute $i \leq n-1$, $c_i^{(1)} = c_{i+1} - 1$. η est bijective.

De plus, $\#D(c) = \#D(c^{(1)}) + 1$

Preuve : Il est évident que η est bijective.

Soit $c \in E$ et $i \in D(c)$ tel que $i \neq 1$. On a $c_{i-1}^{(1)} = c_i - 1 = i - 1$ et $c_i^{(1)} = c_{i+1} - 1 = i + 1 - 1 = i$. D'où $i - 1 \in D(c^{(1)})$. Par définition même de la bijection et le fait qu'on a décalé les indice, on a $\#D(c) = \#D(c^{(1)}) + 1$ ■

Proposition 2.2.5. On a $A_n(x) = (x-1)A_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^n C_{i-1}A_{n-i}(x)$ où l'on convient que $A_0(x) = 1$.

Preuve : On a $A_n(x) = \sum_{c \in \text{Cat}(n)} \sum_{\substack{S \subset D(c) \\ 1 \in S}} (x-1)^{\#S} = \sum_{c \in \text{Cat}(n)} \left(\sum_{\substack{S \subset D(c) \\ 1 \in S}} (x-1)^{\#S} + \sum_{\substack{S \subset D(c) \\ 1 \notin S}} (x-1)^{\#S} \right)$

On pose $A_n^{(1)}(x) = \sum_{c \in \text{Cat}(n)} \sum_{\substack{S \subset D(c) \\ 1 \in S}} (x-1)^{\#S}$ et $A_n^{(2)}(x) = \sum_{c \in \text{Cat}(n)} \sum_{\substack{S \subset D(c) \\ 1 \notin S}} (x-1)^{\#S}$.

Donc $A_n(x) = A_n^{(1)}(x) + A_n^{(2)}(x)$.

Trouvons d'abord l'expression $A_n^{(1)}(x)$.

On a $A_n^{(1)}(x) = \sum_{c \in E} \sum_{\substack{S \subset D(c) \\ 1 \in S}} (x-1)^{\#S}$ car si $c_2 \neq 2$, alors il n'existe aucun $S \subset D(c)$ tel que

$1 \in S$.

Soit $c \in E$ et $c^{(1)} = \eta(c)$. Soit $S \subset D(c)$ tel que $1 \in S$ et on pose S' l'ensemble obtenu à partir de S en supprimant l'élément 1 et on diminuant de 1 les éléments restants (s'il y en a). Cela implique que $S' \subset D(c^{(1)})$. Il est clair que pour tout $i \in S$, $i \neq 1$, on a $i-1 \in D(c^{(1)})$ et $\#S = \#S' + 1$.

De plus,

$$\sum_{\substack{S \subset D(c) \\ 1 \in S}} (x-1)^{\#S} = \sum_{S' \subset D(c^{(1)})} (x-1)^{\#S'+1}$$

Par conséquent,

$$A_n^{(1)}(x) = \sum_{c^{(1)} \in \text{Cat}(n-1)} \sum_{S' \subset D(c^{(1)})} (x-1)^{\#S'+1} = (x-1)A_{n-1}(x)$$

Trouvons ensuite l'expression de $A_n^{(2)}(x)$.

On a $A_n^{(2)}(x) = \sum_{\substack{c \in \text{Cat}(n) \\ c_2=2}} \sum_{\substack{S \subset D(c) \\ 1 \notin S}} (x-1)^{\#S} + \sum_{\substack{c \in \text{Cat}(n) \\ c_2 \neq 2}} \sum_{\substack{S \subset D(c) \\ 1 \notin S}} (x-1)^{\#S}$.

On pose $a_n(x) = \sum_{\substack{c \in \text{Cat}(n) \\ c_2=2}} \sum_{\substack{S \subset D(c) \\ 1 \notin S}} (x-1)^{\#S}$ et $b_n(x) = \sum_{\substack{c \in \text{Cat}(n) \\ c_2 \neq 2}} \sum_{\substack{S \subset D(c) \\ 1 \notin S}} (x-1)^{\#S}$.

Donc $A_n^{(2)}(x) = a_n(x) + b_n(x)$.

Premièrement, trouvons l'expression de $a_n(x)$. Soit $c \in E$ et $c^{(1)} = \eta(c)$. Soit $S \subset D(c)$ tel que $1 \notin S$. Posons S' l'ensemble obtenu à partir de S en diminuant de 1 ses éléments. Il est clair que $S' \subset D(c^{(1)})$ et pour tout $i \in S$, on a $i-1 \in S'$. D'où $\#S' = \#S$ et par conséquent

$$a_n(x) = \sum_{c^{(1)} \in \text{Cat}(n-1)} \sum_{S' \subset D(c^{(1)})} (x-1)^{\#S'} = A_{n-1}(x)$$

Deuxièmement, on va trouver l'expression de $b_n(x)$. Soit $c \in \text{Cat}(n)$ tel que $c_2 \neq 2$. Cela implique que $1 \notin D(c)$ ou encore pour tout $S \subset D(c)$, on a $1 \notin S$. Alors on a

$$b_n(x) = \sum_{\substack{c \in \text{Cat}(n) \\ c_2 \neq 2}} \sum_{S \subset D(c)} (x-1)^{\#S}$$

Posons $\overline{E} := \{c \in \text{Cat}(n); c_2 \neq 2\}$ et soit $i > 1$. On note par $\text{Cat}_i(n)$ l'ensemble des $c \in \overline{E}$ tel que i est le plus petit entier qui vérifie $c_i = i$.

Il est clair que $\text{Cat}_2(n) = \emptyset$ et pour tout $i \neq j$, on a $\text{Cat}_i(n) \cap \text{Cat}_j(n) = \emptyset$

Ensuite, on note par F l'ensemble des $c \in \overline{E}$ tel que pour tout $k > 1$, $c_k < k$.

On en déduit que

$$\left(\bigsqcup_{i=3}^n \text{Cat}_i(n) \right) \cap F = \emptyset \text{ et } \overline{E} = \left(\bigsqcup_{i=3}^n \text{Cat}_i(n) \right) \sqcup F$$

Par conséquent

$$b_n(x) = \sum_{c \in \left(\bigsqcup_{i=3}^n \text{Cat}_i(n) \right) \sqcup F} \sum_{S \subset D(c)} (x-1)^{\#S} = \sum_{i=3}^n \sum_{c \in \text{Cat}_i(n)} \sum_{S \subset D(c)} (x-1)^{\#S} + \sum_{c \in F} \sum_{S \subset D(c)} (x-1)^{\#S}$$

La transformation $\beta : \text{Cat}_i(n) \longrightarrow \text{Cat}(i-2) \times \text{Cat}(n-i+1); c \longmapsto (c', c'')$ définie comme suit $c'_j = c_{j+1}$ et $c''_j = c_{i+j-1} - (i-1)$, est bijective.

De plus, $\#D(c) = \#D(c'')$.

La transformation $\mu : F \longrightarrow \text{Cat}(n-1); c \longmapsto c^{(1)}$ définie comme suit $c_j^{(1)} = c_{j+1}$ est bijective. De plus, pour tout $c \in F$, on a $D(c) = \emptyset$. D'où $\sum_{S \subset D(c)} (x-1)^{\#S} = 1$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} b_n(x) &= \sum_{i=3}^n \sum_{(c', c'') \in \text{Cat}(i-2) \times \text{Cat}(n-i+1)} \sum_{S \subset D(c'')} (x-1)^{\#S} + \sum_{c^{(1)} \in \text{Cat}(n-1)} 1 \\ &= \sum_{i=3}^n C_{i-2} \sum_{c'' \in \text{Cat}(n-i+1)} \sum_{S \subset D(c'')} (x-1)^{\#S} + C_{n-1} \\ &= C_{n-1} + \sum_{i=3}^n C_{i-2} A_{n-i+1}(x) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $A_n^{(2)} = a_n + b_n = A_{n-1}(x) + C_{n-1} + \sum_{i=3}^n C_{i-2} A_{n-i+1}(x) = \sum_{i=1}^n C_{i-1} A_{n-i}(x)$.

Dès lors, on a $A_n(x) = A_n^{(1)} + A_n^{(2)} = (x-1)A_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^n C_{i-1} A_{n-i}(x)$ ■

2.2.2 Expression explicite des coefficients $A_n(x)$

Soit $\sigma \in S_n$ et $1 \leq i \leq n$

Définition 2.2.3. On dit que $\sigma(i)$ est :

- un creux de σ si $\sigma(i-1) > \sigma(i) < \sigma(i+1)$
- un pic de σ si $\sigma(i-1) < \sigma(i) > \sigma(i+1)$
- une double montée de σ si $\sigma(i-1) < \sigma(i) < \sigma(i+1)$

- une double descente de σ si $\sigma(i-1) > \sigma(i) > \sigma(i+1)$

On convient que $\sigma(0) = n+1$ et $\sigma(n+1) = 0$. D'après [8], on a la bijection de J. Françon et G. Viennot ci-dessous.. La démonstration de cette proposition nous sera utile dans toute la suite.

Proposition 2.2.6. *Il existe une bijection ψ_{FV} de S_n sur $HL(n)$ vérifiant :*

- (i) *i creux de σ ssi $c_i = m$*
- (ii) *i pic de σ ssi $c_i = d$*
- (iii) *i double descente de σ ssi $c_i = b$*
- (iv) *i double montée de σ ssi $c_i = r$*

Démonstration : Soit $\sigma \in S_n$ et $M_1 \cdots M_u$ sa décomposition en mots croissants maximaux, i.e pour tout $j < u$, la dernière lettre de M_j est supérieur à la première lettre de M_{j+1} . Dans toute la suite, on note par $D(M_k)$ et $P(M_k)$ la dernière lettre et la première lettres de tout mots M_k . Soit $j \leq u$ et i une lettre de M_j . On a :

$$\begin{cases} i \text{ est un creux de } \sigma & \text{ssi } |M_j| > 1 \text{ et } i = P(M_j) \\ i \text{ est un pic de } \sigma & \text{ssi } |M_j| > 1 \text{ et } i = D(M_j) \\ i \text{ est une double descente de } \sigma & \text{ssi } |M_j| = 1 \\ i \text{ est une double montée de } \sigma & \text{ssi } |M_j| > 1 \text{ et } P(M_j) < i < D(M_j) \end{cases}$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned} |c_1 \cdots c_i|_m - |c_1 \cdots c_i|_d &= |\{l \leq i; l \text{ est un creux de } \sigma\}| - |\{l \leq i; l \text{ est un pic de } \sigma\}| \\ &= |\{M_r; |M_r| > 1, P(M_r) \leq P(M_j) = i\}| - |\{M_r; |M_r| > 1, D(M_r) \leq i\}| \\ &= |\{M_r; |M_r| > 1, P(M_r) \leq i < D(M_r)\}| \\ &\quad + |\{M_r; |M_r| > 1, P(M_r) < D(M_r) \leq i\}| \\ &\quad - |\{M_r; |M_r| > 1, D(M_r) \leq i\}| \\ &= |\{M_r; |M_r| > 1, P(M_r) \leq i < D(M_r)\}| \geq 0 \end{aligned}$$

D'après la Proposition 1.1.2, on a $\gamma_{i-1} = |\{M_r; |M_r| > 1, P(M_r) < i \leq D(M_r)\}|$.

On pose $p_i = |\{M_r; r < j \text{ et } P(M_r) < i < D(M_r)\}|$. Si i est un creux ou une double descente de σ , alors $0 \leq p_i \leq \gamma_{i-1}$. Et si i est un pic ou une double montée de σ , alors $0 \leq p_i \leq \gamma_{i-1} - 1$.

On a $(c, p) \in HL(n)$.

Pour montrer que ψ_{FV} est bijective, on va construire sa réciproque. Soit $(c, p) \in HL(n)$ et σ un antécédent de (c, p) (s'il existe). $M_1 \cdots M_u$ est la décomposition en mots croissants maximaux de σ . On a $|\{M_r; |M_r| \geq 2\}| = |c|_m$ et $|\{M_r; |M_r| = 1\}| = |c|_b$. D'où, $u = |c|_m + |c|_b$.

Pour construire σ , on procède comme suit.

Soit $Q = \{i_1, \dots, i_p\}$ (resp $P = \{j_1, \dots, j_p\}$, $Dd = \{s_1, \dots, s_{u-p}\}$, $Dm = \{t_1, \dots, t_{n-p-u}\}$) l'ensemble des creux (resp des pics, des doubles descentes, des doubles montées) de σ .

On pose $QP = Q \cup P = \{k_1, \dots, k_{2p}\}$ avec $\forall i < 2p, k_i < k_{i+1}$. Il est évident que k_1 est un creux de σ . Nous allons placer tous les éléments de QP

On pose $\sigma^0 = \star$.

- Si $c_{k_1} = m$ et $p_{k_1} = 0$, alors on place $k_1\star$ après la $(p_{k_1} + 1)$ -ième \star et on pose $\sigma^1 = \star k_1 \star$
- Si $c_{k_2} = m$ et $p_{k_2} = 0$ (resp $p_{k_2} = 1$), alors on place $k_2\star$ après le $(p_{k_2} + 1)$ -ième \star et on pose $\sigma^2 = \star k_2 \star k_1 \star$ (resp $\sigma^2 = \star k_1 \star k_2 \star$)
- Si $c_{k_2} = d$ et $p_{k_2} = 0$, alors on remplace par k_2 le $(p_{k_2} + 2)$ -ième \star et on pose $\sigma^2 = \star k_1 k_2$

Supposons que les lettres k_1, \dots, k_{l-1} sont toutes placées. On va trouver la place de k_l . Si $c_{k_l} = m$, alors on place $k_l\star$ après le $(p_{k_l} + 1)$ -ième \star . Et si $c_{k_l} = d$, alors on remplace par k_l le $(p_{k_l} + 2)$ -ième \star .

On obtient ainsi l'expression $\sigma^{2p} = \star M_1 \cdots M_p$ car $|Q| = |P|$. La présence d'une seule \star est dû au fait que $\sigma^0 = \star$ et $|Q| = |P|$. Supposons que les éléments de P et Q sont tous placés.

Soit i tel que $c_i = r$ ou $c_i = b$. Si $c_i = r$, alors on place i dans M_j où M_j est le $(p_i + 1)$ -ième mot qui vérifie $P(M_j) < i < D(M_j)$. Si $c_i = b$, alors on place i entre M_q et M_{q+1} tel que $D(M_q) > i > P(M_{q+1})$ et $|\{j \leq q; D(M_j) > i > P(M_j)\}| = p_i$. ■

Lemme 2.2.2. *Soit $\sigma \in S_n$ et $(c, p) = \psi_{FV}(\sigma)$. Alors*

$$\sigma \in S_n(123) \iff \forall i \in [n], c_i \neq r$$

$$\text{De plus, } \#S_n(123)(c) = \prod_{c_i=m} m_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=d} d_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=r} r_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=b} b_{\gamma_{i-1}}$$

où $m_q = d_{q+1} = 1$ et $r_{q+1} = 0$ pour tout $q \geq 0$, $b_0 = 1$ et $b_q = 2$ pour tout $q \geq 1$.

Preuve : Soit $\sigma \in S_n$ et $(c, p) = \psi_{FV}(\sigma)$. Soit i une lettre de σ . D'après la construction de ψ_{FV} , i est une double montée de σ ssi $c_i = r$. On en déduit que

$$\sigma \in S_n(123) \iff \forall i \in [n], c_i \neq r$$

car σ ne contient pas une double montée.

D'autre part, on a

$$\#S_n(123)(c) = \#\{\sigma \in S_n(123); (c, p) = \psi_{FV}(\sigma)\} = \prod_{c_i=m} m_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=d} d_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=r} r_{\gamma_{i-1}} \prod_{c_i=b} b_{\gamma_{i-1}}$$

où $m_{\gamma_{i-1}}$ (resp $d_{\gamma_{i-1}}, r_{\gamma_{i-1}}, b_{\gamma_{i-1}}$) est le poids affecté au i^e - pas de c .

Nous allons trouver ces poids.

Soit $\sigma \in S_n(123)(c)$ et $(c, p) = \psi_{FV}(\sigma)$. On pose $M_1 M_1 \cdots M_l$ la décomposition en mots croissants maximaux de σ .

D'abord, pour tout $i \leq l$, $|M_i| \leq 2$ et si $|M_i| = |M_j| = 2$, $i < j \leq l$, alors $D(M_i) > D(M_j)$ et $P(M_i) > P(M_j)$.

Ensuite, soit $j \leq l$ et i une lettre de M_j . Notons que

$$p_i = |\{M_r; r < j \text{ et } P(M_r) < i < D(M_r)\}| \text{ et } \gamma_{i-1} = |\{M_r; |M_r| = 2 \text{ et } P(M_r) < i \leq D(M_r)\}|$$

On a :

(i) Si i est un ceux de σ , alors pour tout $r < j$, $i = P(M_j) < P(M_r)$. Cela implique que $p_i = 0$.

D'où, $m_q = 1$ pour tout $q \geq 0$.

(ii) Si i est un pic de σ i.e $i = D(M_j)$, alors toutes lettres à droite de i sont inférieurs à i .

Cela implique que

$$p_i = |\{M_r; r \neq j \text{ et } P(M_r) < i < D(M_r)\}| = |\{M_r; |M_r| = 2 \text{ et } P(M_r) < i \leq D(M_r)\}| - 1$$

car $P(M_j) < i = D(M_j)$. Ou encore $p_i = \gamma_{i-1} - 1$. D'où $d_{q+1} = 1$ pour tout $q \geq 0$

(iii) Si i est une double descente de σ et s'il existe M_u , $u < j$, tel que $P(M_u) < i$, alors toutes lettres à droite de i sont inférieur à i . Cela implique que $p_i = \gamma_{i-1}$. Il est évident que $p_i = 0$ si $P(M_u) > i$, pour tout $u < j$. D'où $b_0 = 1$ et $b_q = 2$ pour tout $q \geq 1$.

(iv) On en déduit de l'équivalence précédente que $r_{j+1} = 0$ pour tout $j \geq 0$

Proposition 2.2.7. On a $1 + \sum_{n \geq 1} |S_n(123)|t^n = C(t)$

Preuve : En utilisant le Lemme 2.2.2, on a

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n \geq 1} |S_n(123)|t^n &= 1 + \sum_{n \geq 1} t^n \sum_{c \in \Gamma_n} |S_n(123)(c)| \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} t^n \sum_{c \in \Gamma_n} w(c) \\ &= \frac{1}{1 - t - \frac{t^2}{1 - 2t - \frac{t^2}{1 - 2t - \frac{t^2}{\ddots}}}} \\ &= C(t) \end{aligned}$$

■

Dans toute la suite on pose $\phi(x, t) = 1 + \sum_{n \geq 1} A_n(x)t^n$ avec $A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(321)} x^{fix(\pi)}$

Proposition 2.2.8. On a $\phi(x, t) = \frac{1}{1 - xt - \frac{t^2}{1 - 2t - \frac{t^2}{1 - 2t - \frac{t^2}{\ddots}}}}$

Preuve : Notons que l'application φ de $S_n(321)$ vers $S_n(123)$, $\sigma \rightarrow \pi$ définie par $\varphi(\sigma) = r(\sigma)$ où $r(\sigma)$ est la permutation miroir de σ , est bijective. De plus $fix(\sigma) = \#\{i; \pi_{n-i+1} = i\}$.

On en déduit

$$A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(123)} x^{\#\{i; \pi_{n-i+1} = i\}}$$

D'abord, soit $c \in \Gamma_n$ et $\sigma \in S_n(123)(c)$ et soit i tel que $\sigma_{n-i+1} = i$. Dans la décomposition linéaire de σ , toute lettre à gauche de i est plus grande que i et toute lettre à droite de i est plus petite que i . Donc, i est une double descente de σ ou encore $c_i = b$. Posons $M_1 M_1 \cdots M_l$ la décomposition en mots croissants maximaux de σ . On a $\gamma_{i-1} = \#\{M_r; |M_r| > 1 \text{ et } P(M_r) < i \leq D(M_r)\} = 0$.

D'où la relation

$$\sigma(n - i + 1) = i \iff c_i = b \text{ et } \gamma_{i-1} = 0$$

Par conséquent, $\#\{j; \sigma_{n-j+1} = j\} = \#\{j; c_j = b \text{ et } \gamma_{j-1} = 0\}$.

Ainsi, on a

$$A_n(x) = \sum_{\sigma \in S_n(123)} x^{\#\{i; \sigma_{n-i+1}=i\}} = \sum_{c \in \Gamma_n} \sum_{\sigma \in S_n(123)(c)} x^{\#\{i; \sigma_{n-i+1}=i\}}$$

$$\text{où } \sum_{\sigma \in S_n(123)(c)} x^{\#\{i; \sigma_{n-i+1}=i\}} = \sum_{\sigma \in S_n(123)(c)} x^{\#\{i; c_i=b \text{ et } \gamma_{i-1}=0\}} = \prod_{\substack{c_i=b \\ \gamma_{i-1}=0}} x \cdot \#S_n(123)(c) = w(c).$$

En utilisant le Lemme 2.2.2, on obtient $m_q = d_{q+1} = 1$ et $r_{q+1} = 0$ pour tout $q \geq 0$, $b_0 = x$ et $b_q = 2$ pour tout $q \geq 1$. Dès lors, on a

$$\phi(x, t) = 1 + \sum_{n \geq 1} t^n \sum_{c \in \Gamma_n} w(c) = \frac{1}{1 - xt - \frac{t^2}{1 - 2t - \frac{t^2}{1 - 2t - \frac{t^2}{\ddots}}}}$$

Corollaire 2.2.9. On a $\phi(x, t) = \frac{1 - x + C(t)}{2 - x + t(x - 1)^2}$

Preuve :

$$\text{Posons } \kappa(t) = \frac{1}{1 - 2t - \frac{t^2}{1 - 2t - \frac{t^2}{\ddots}}} \text{ ou encore } \kappa(t) = \frac{1}{1 - 2t - t^2 \kappa(t)}$$

Cela implique que $\kappa(t)$ est solution de l'équation $t^2 x^2 - (1 - 2t)x + 1 = 0$.

Donc

$$\kappa(t) = \frac{(1 - 2t) - \sqrt{1 - 4t}}{2t^2} \text{ ou } \kappa(t) = \frac{(1 - 2t) + \sqrt{1 - 4t}}{2t^2}$$

Comme $\kappa(0) = 1$, et au voisinage de 0, $\kappa(t) = \frac{(1 - 2t) + \sqrt{1 - 4t}}{2t^2}$ tend vers $+\infty$,

$$\text{alors } \kappa(t) = \frac{(1-2t) - \sqrt{1-4t}}{2t^2}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \frac{1}{1 - xt - t^2 \frac{1 - 2t - \sqrt{1 - 4t}}{2t^2}} \\ &= \frac{1}{1 - xt - \frac{1}{2}(1 - 2t - \sqrt{1 - 4t})} \\ &= \frac{2}{1 - 2t(x - 1) + \sqrt{1 - 4t}} \\ &= \frac{2(1 - 2t(x - 1) - \sqrt{1 - 4t})}{(1 - 2t(x - 1) + \sqrt{1 - 4t})(1 - 2t(x - 1) - \sqrt{1 - 4t})} \\ &= \frac{-2(x - 1)t + 1 - \sqrt{1 - 4t}}{-2xt + 4t + 2t^2(x - 1)^2} \\ &= \frac{-(x - 1) + \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}}{-x + 2 + t(x - 1)^2} \\ &= \frac{1 - x + C(t)}{2 - x + t(x - 1)^2} \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.10. On a $A_n(x) = \sum_{p=0}^n C_{n-p}(-1)^p \frac{(x-1)^{2p}}{(2-x)^{p+1}} - (-1)^n \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2-x)^{n+1}}$

Preuve : En utilisant la Corollaire 2.2.9, on a :

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \frac{1 - x + C(t)}{2 - x + t(x - 1)^2} \\ &= (C(t) - (x - 1)) \left[\frac{1}{(2 - x) \left[1 + \frac{(x - 1)^2}{2 - x} t \right]} \right] \\ &= [C(t) - (x - 1)] \frac{1}{2 - x} \sum_{p \geq 0} (-1)^p \frac{(x - 1)^{2p}}{(2 - x)^p} t^p \\ &= \sum_{m,p} C_m(-1)^p \frac{(x - 1)^{2p}}{(2 - x)^{p+1}} t^{m+p} - \sum_{p \geq 0} (-1)^p \frac{(x - 1)^{2p+1}}{(2 - x)^{p+1}} t^p \\ &= \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{p=0}^n C_{n-p}(-1)^p \frac{(x - 1)^{2p}}{(2 - x)^{p+1}} - \sum_{p \geq 0} (-1)^p \frac{(x - 1)^{2p+1}}{(2 - x)^{p+1}} t^p \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 2.2.11. On a $A_n(x) = (x-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1-i} C_{j-1} A_{n-i-j}(x) (x-1)^i$

Preuve : D'après la Proposition 2.2.5, $A_n(x) = (x-1)A_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^n C_{i-1} A_{n-i}(x)$

et posons $f(n) = \sum_{i=1}^n C_{i-1} A_{n-i}(x)$.

On a :

$$\begin{aligned}
 A_n(x) &= (x-1)A_{n-1}(x) + f(n) \\
 &= (x-1)^2 A_{n-2}(x) + (x-1)f(n-1) + f(n) \\
 &\vdots \\
 &= (x-1)^n A_0(x) + (x-1)^{n-1} f(1) + \dots + (x-1)^2 f(n-2) + (x-1)f(n-1) + f(n) \\
 &= (x-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (x-1)^i f(n-i) \\
 &= (x-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (x-1)^i \sum_{j=1}^{n-i} C_{j-1} A_{n-i-j}(x)
 \end{aligned}$$

■

On peut alors écrire $A_n(x)$ sous la forme $A_n(x) = \sum_{k=0}^n b(n, k) (x-1)^k$

Proposition 2.2.12. On a $(x-1)^k [A_n(x)] := b(n; k) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} C_{j-1} b(n-i-j; k-i)$

Preuve : Cette relation est obtenue en utilisant la Proposition 2.2.11.

Corollaire 2.2.13. On a $b(n; k) = \sum_{p=1}^n C_{p-1} \sum_{i=1}^{n-p+1} b(n-p-i+1; k-i+1)$

Preuve : En utilisant la proposition 2.2.12, on a $b(n; k) = \sum_{p=0}^{n-1} C_p \sum_{i=1}^{n-p} b(n-p-i; k-i+1)$.

D'où le résultat. ■

Proposition 2.2.14. On a :

$$b(n, k) = \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p} (-1)^p \binom{k-p}{p} + (-1)^n \binom{k-n-1}{n-1}$$

Preuve : Le résultat suivant est obtenu dans le semestre S8 du parcours combinatoire :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(1-z)^k} &= \sum_{n_1, \dots, n_k} z^{n_1 + \dots + n_k} \\
 &= \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} 1 \\
 &= \sum_{n \geq 0} z^n \binom{n+k-1}{k-1}
 \end{aligned}$$

Posons $z = x - 1$ ou encore $2 - x = 1 - z$. On a :

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{p=0}^n C_{n-p} (-1)^p (x-1)^{2p} \sum_{q \geq 0} \binom{q+p}{q} (x-1)^q - (-1)^n (x-1)^{2n+1} \sum_{q \geq 0} \binom{q+n}{n} (x-1)^q \\ &= \sum_{p=0}^n \left(\sum_{q \geq 0} C_{n-p} (-1)^p \binom{q+p}{q} (x-1)^{2p+q} \right) + (-1)^{n+1} \sum_{q \geq 0} \binom{q+n}{n} (x-1)^{2n+q+1} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} b(n, k) &= \sum_{p=0}^n C_{n-p} (-1)^p \binom{k-p}{p} + (-1)^{n+1} \binom{k-n-1}{n} \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p} (-1)^p \binom{k-p}{p} + (-1)^n \left[\binom{k-n}{n} - \binom{k-n-1}{n} \right] \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p} (-1)^p \binom{k-p}{p} + (-1)^n \binom{k-n-1}{n-1} \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.15. *Soit $n \geq 1$ et $k \leq n$. On a*

$$b(n, k) = b(n, k+1) + b(n-1, k-1) \text{ où } b(0, 0) = 1 \quad (2.1)$$

Preuve : En utilisant la Proposition 2.2.14, on en déduit la relation suivante :

$$\begin{aligned} b(n, k+1) + b(n-1, k-1) &= C_n + \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p C_{n-p} \left[\binom{k-p+1}{p} - \binom{k-p}{p-1} \right] + (-1)^n \left[\binom{k-n}{n-1} - \binom{k-n-1}{n-2} \right] \\ &= C_n + \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p C_{n-p} \binom{k-p}{p} + (-1)^n \binom{k-n-1}{n-1} \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p} (-1)^p \binom{k-p}{p} + (-1)^n \binom{k-n-1}{n-1} \\ &= b(n, k) \end{aligned}$$

■

En utilisant la forme explicite de $b(n, k)$, cette relation n'est pas vérifiée pour $n < k$. Par convention, si $n < k$, alors on pose $b(n, k) = 0$. De plus, si $k < 0$ ou $n < 0$ on a $b(n, k) = 0$.

Corollaire 2.2.16. *Pour tout $k \leq n$, on a :*

$$b(n, k) = \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p} (-1)^p \binom{k-p}{p}$$

Corollaire 2.2.17. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$b(n, 0) = C_n \text{ et } b(0, 0) = 1$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} b(n, k) &= \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-p} (-1)^p \binom{k-p}{p} \\ &= C_n + \sum_{p=1}^{n-1} C_{n-p} (-1)^p \binom{k-p}{p} \end{aligned}$$

Si $k = 0$, alors on a le résultat. ■

Proposition 2.2.18. On a $b(n; k) = \sum_{i=0}^n b(n-i; k-i+1)$

Preuve : On en déduit de la relation $b(n; k) = b(n; k+1) + b(n-1; k-1)$

Corollaire 2.2.19. On a $b(n; k) = \sum_{p=1}^n C_{p-1} b(n-p; k-1)$

Preuve : D'après le Corollaire 2.2.13,

$$b(n, k) = \sum_{p=1}^n C_{p-1} \sum_{i=1}^{n-p+1} b(n-p-i+1; k-i+1)$$

En utilisant la Proposition 2.2.18, on a

$$\sum_{i=1}^{n-p+1} b(n-p-i+1; k-i+1) = \sum_{i=0}^{n-p} b(n-p-i; k-i) = b(n-p; k-1)$$

D'où le résultat. ■

Proposition 2.2.20. Soit $n \geq 1$. On a :

$$b(n, k) = \frac{k+1}{n+1} \binom{2n-k}{n} \quad (2.2)$$

Preuve : On va montrer par récurrence sur k . Pour $k = 0$, le résultat est obtenu en utilisant le Corollaire 2.2.17. Supposons que c'est vrai pour k et montrons que c'est aussi vrai pour $k+1$. En utilisant la relation (2.1), on a

$$\begin{aligned} b(n, k+1) &= b(n, k) - b(n-1, k-1) \\ &= \binom{2n-k}{n} \frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n} \binom{2n-2-k+1}{n-1} \\ &= \binom{2n-k}{n} \frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n} \binom{2n-k-1}{n-1} \end{aligned}$$

D'après la formule de Pascal :

$$\binom{2n-k}{n} = \binom{2n-k-1}{n-1} + \binom{2n-k-1}{n}$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
b(n, k+1) &= \binom{2n-k-1}{n-1} \frac{k+1}{n+1} + \binom{2n-k-1}{n} \frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n} \binom{2n-k-1}{n-1} \\
&= \frac{n-k}{(n+1)n} \binom{2n-k-1}{n-1} + \frac{k+1}{n+1} \binom{2n-k-1}{n} \\
&= \frac{k+2}{n+1} \binom{2n-k-1}{n} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

D'après [6], les indices n et k de $c_{n,k}$ commencent chacun par 1. Mais nous allons les redéfinir dans ce memoire.

Définition 2.2.4. Soit $c_{n,k}$ le triangle de Catalan défini comme suit :

$$\begin{cases} c_{n,0} = 1, \forall n \geq 0 \\ c_{n,k} = 0, \text{ si } n < k \text{ ou } n < 0 \text{ ou } k < 0 \\ c_{n,k} = c_{n-1,k} + c_{n,k-1}, \forall k, n \geq 1 \end{cases}$$

En utilisant la Definition 2.2.4 et d'après le Théorème 2.2 de [6], on le lemme suivant.

Lemme 2.2.3. Soit $s_{n,k}(p)$ le nombre des permutations σ dans $S_n(p)$ et $\sigma(1) = k$. On a pour tout $n, k \geq 1$, $s_{n,k}(123) = s_{n,k}(132) = s_{n,n-k+1}(321) = c_{n-1,k-1}$

A partir des deux tableaux suivants, on déduit la proposition ci-dessous.

Le tableau de $b(n, k)$ est

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
2 & 2 & 1 & & & & \\
5 & 5 & 3 & 1 & & & \\
14 & 14 & 9 & 4 & 1 & &
\end{array}$$

et le tableau de $c_{n,k}$ est

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 2 & & & & \\
1 & 3 & 5 & 5 & & & \\
1 & 4 & 9 & 14 & 14 & &
\end{array}$$

Proposition 2.2.21. Pour tout $n \geq k$, on a $c_{n,k} = b(n, n-k)$

Preuve : Nous allons montre par récurrence sur n et k . D'abord, fixons n .
Si $k = 0$, on a $c_{n,0} = 1 = b(n, n)$.
Si $k = 1$ on a $c_{n,1} = c_{n-1,1} + c_{n,0} = c_{n-1,1} + 1 = \dots = c_{1,1} + n - 1 = n$
et $b(n, n-1) = b(n, n) + b(n-1, n-2) = 1 + b(n-1, n-2) = \dots = n-1 + b(1, 0) = n$.

D'où $c_{n,1} = b(n, n-1)$.

Supposons que $c_{n,k-1} = b(n, n-k+1)$

Ensuite, fixons k et faire varié n .

On a $c_{0,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $b(0, -k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

D'où $c_{0,k} = b(0, -k)$.

Supposons que $c_{n-1,k} = b(n-1, n-k-1)$

Par conséquent,

$$c_{n,k} = c_{n-1,k} + c_{n,k-1} = b(n-1, n-k-1) + b(n, n-k+1) = b(n, n-k) \quad \blacksquare$$

Dans la suite, nous allons voir que $A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(132)} x^{fix(\pi)}$

2.2.3 Permutations sans le motif 132

Posons $\mathcal{E}_{n,r} = \{\pi : [n] \longrightarrow \{r+1, r+2, \dots, n+r\}; \pi \text{ bijective et ne contient pas le motif 132}\}$
et $E_{n,r}(x) = \sum_{\pi \in \mathcal{E}_{n,r}} x^{fix(\pi)}$

Lemme 2.2.4. Soit $\sigma \in S_n(132)$. On a $\sigma^{-1} \in S_n(132)$

Preuve : Supposons le contraire i.e il existe $i < j < k$ tel que $st(\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)\sigma^{-1}(k)) = 132$. Comme $\sigma^{-1}(p)$ est la position de p dans σ , alors ikj sera un motif 132 de σ . ■

On pose $\mathcal{E}_{n,r} = \{\pi : [n] \longrightarrow \{r+1, r+2, \dots, r+n; \pi \text{ bijective et ne contient pas le motif 132}\}$
et $E_{n,r}(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{n,r}} x^{fix(\sigma)}$. On convient que $E_{0,r}(x) = 1$

Proposition 2.2.22. La transformation $\rho : \mathcal{E}_{n,r} \longrightarrow \mathcal{E}_{n,-r}$, $\pi \longrightarrow \pi'$ définie par :

Soit $\pi \in \mathcal{E}_{n,r}$ et $\sigma \in S_n(132)$ définie par $\sigma(i) = \pi(i) - r$ et $\rho(\pi) := \pi'$ la permutation obtenue par $\pi'(i) = \sigma^{-1}(i) + r$. Alors ρ est bijective.

De plus, $fix(\pi) = fix(\pi')$.

Preuve : En utilisant le Lemme 2.2.4, on a $\sigma^{-1} \in S_n(132)$. On en déduit que $\pi' \in \mathcal{E}_{n,-r}$. Ainsi ρ est bien définie.

Montrons qu'elle est bijective. Soit $\pi' \in \mathcal{E}_{n,-r}$ et $\tau \in S_n(132)$ définie par $\tau(i) = \pi'(i) + r$. π est obtenue par $\pi(i) = \tau^{-1}(i) + r$. Comme $\tau \in S_n(132)$, donc d'après le Lemme 2.2.4 on a $\tau^{-1} \in S_n(132)$; on en déduit que $\pi \in \mathcal{E}_{n,r}$. Ce qui prouve que ρ est bijective.

D'autre part, soit $\pi \in \mathcal{E}_{n,r}$, $\rho(\pi) = \pi' \in \mathcal{E}_{n,-r}$ et $\sigma \in S_n(132)$ tel que $\sigma(i) = \pi(i) - r$. Soit $k \in Fix(\pi)$. On a :

$$\begin{aligned} \pi(k) = k = \sigma(k) + r &\iff \sigma(k) = k - r \\ &\iff k - r = \sigma^{-1}(k - r) - r \\ &\iff k - r = \pi'(k - r) \end{aligned}$$

Corollaire 2.2.23. On a $E_{n,r}(x) = E_{n,-r}(x)$

Dans toute la suite on pose $r \geq 0$ et on pose $\mathcal{E}_{n,r}^i = \{\pi \in \mathcal{E}_{n,r}; \pi(i) = n+r\}$.

Proposition 2.2.24. La transformation $\mu : \mathcal{E}_{n,r}^i \longrightarrow \mathcal{E}_{i-1,n-i+r} \times \mathcal{E}_{n-i,r-i}$, $\pi \longrightarrow (\pi', \pi'')$ définie par :

- Pour tout $1 \leq l \leq i-1$, $\pi'(l) = \pi(l)$
- Pour tout $1 \leq l \leq n-i$, $\pi''(l) = \pi(i+l) - i$

est bijective.

De plus,

- Si $r > 0$, alors $fix(\pi) = fix(\pi') + fix(\pi'')$.
- Si $r = 0$ et $i < n$ (resp $i = n$) alors $fix(\pi) = fix(\pi') + (\pi'')$ (resp, $fix(\pi) = fix(\pi') + 1$)

Preuve : Il est évident que μ est bijective.

D'autre part, soit $\pi \in \mathcal{E}_{n,r}^i$ et $\mu(\pi) = (\pi', \pi'')$. On a toujours $fix(\pi') = fix(\pi(1) \cdots \pi(i-1))$ et

- Si $r > 0$, alors $i \notin Fix(\pi)$. Soit $q \geq i+1$, $q \in Fix(\pi)$. Il existe $1 \leq p \leq n-i$ tel que $q = i+p$. On a $\pi''(p) = \pi(i+p) - i = i+p-i = p$. Donc $p \in Fix(\pi'')$. D'où $fix(\pi) = fix(\pi') + fix(\pi'')$
- Si $r = 0$, alors $\mathcal{E}_{n,0} = S_n(132)$. De plus, si $i < n$ (resp $i = n$) alors $i \notin Fix(\pi)$ (resp $i \in Fix(\pi)$) et on a $fix(\pi) = fix(\pi') + fix(\pi'')$ (resp $fix(\pi) = fix(\pi') + 1$)

Proposition 2.2.25. On a $E_{n,0} = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i-1,n-i}(x)E_{n-i,-i}(x) + xE_{n-1,0}(x)$

Preuve : On a

$$\begin{aligned}
E_{n,0}(x) &= \sum_{\pi \in \mathcal{E}_{n,0}} x^{fix(\pi)} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{E}_{n,0} \\ \pi(i)=n}} x^{fix(\pi)} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{E}_{n,0} \\ \pi(i)=n}} x^{fix(\pi)} + \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{E}_{n,0} \\ \pi(n)=n}} x^{fix(\pi)} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\pi \in \mathcal{E}_{n,0}^i} x^{fix(\pi)} + \sum_{\pi \in \mathcal{E}_{n-1,0}} x^{fix(\pi)+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{(\pi', \pi'') \in \mathcal{E}_{i-1,n-i} \times \mathcal{E}_{n-i,-i}} x^{fix(\pi') + fix(\pi'')} + xE_{n-1,0}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sum_{\pi' \in \mathcal{E}_{i-1,n-i}} x^{fix(\pi')} \sum_{\pi'' \in \mathcal{E}_{n-i,-i}} x^{fix(\pi'')} \right] + xE_{n-1,0}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} E_{i-1,n-i}(x)E_{n-i,-i}(x) + xE_{n-1,0}(x)
\end{aligned}$$

Proposition 2.2.26. Pour tout $r > 0$, on a $E_{n,r}(x) = \sum_{i=1}^n E_{i-1,n-i+r}(x)E_{n-i,r-i}(x)$

Preuve : On a $E_{n,r}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{E}_{n,r} \\ \pi_i = n+r}} x^{fix(\pi)}$. En utilisant la Proposition 2.2.24, on a

$$\begin{aligned} E_{n,r}(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{(\pi', \pi'') \in \mathcal{E}_{i-1, n-i+r} \times \mathcal{E}_{n-i, r-i}} x^{fix(\pi') + fix(\pi'')} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{\pi' \in \mathcal{E}_{i-1, n-i+r}} x^{fix(\pi')} \sum_{\pi'' \in \mathcal{E}_{n-i, r-i}} x^{fix(\pi'')} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n E_{i-1, n-i+r}(x) E_{n-i, r-i}(x) \end{aligned}$$

Corollaire 2.2.27. On a $E_{n,r}(x) = \sum_{i=1}^n E_{i-1, n-i+r}(x) E_{n-i, r-i}(x) + (x-1)E_{n-1,0}(x)\mathbb{1}_{\{r=0\}}$

Proposition 2.2.28. On a $\forall r \geq n$, $E_{n,r}(x) = C_n$

Démonstration :

D'abord, pour tout $\pi \in \mathcal{E}_{n,r}$, $fix(\pi) = 0$. Alors, on a $E_{n,r}(x) = \sum_{i=1}^n |\mathcal{E}_{i-1, n-i+r}| |\mathcal{E}_{n-i, r-i}|$. Le nombre $|\mathcal{E}_{n,r}|$ dépend seulement de n . On convient $|\mathcal{E}_{0,r}| = 1$. On a $|\mathcal{E}_{1,r}| = 1$ et $|\mathcal{E}_{2,r}| = 2$. Comme $E_{n,r}(x)$ et C_n ont même relation de récurrence, alors $E_{n,r}(x) = C_n$, $\forall r \geq n$ ■

Il est important de faire quelques modifications sur les indices pour prouver la proposition ci-dessous. On change $E_{n-i, r-i}(x)$ par $E_{n-i, i-r}(x)$ si $i > r$ et on utilise le fait que $E_{i-1, n-i+r}(x) = C_{i-1}$ si $n-i+r \geq i-1$ ou encore $n+r+1 \geq 2i$ ou encore $i \leq \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor$ (avec $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x). Et $E_{n-i, i-r}(x) = C_{n-i}$ si $i-r \geq n-i$ ie $i \geq \lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor$. On obtient ainsi la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} E_{n,r}(x) &= \sum_{i=1}^r C_{i-1} E_{n-i, r-i}(x) \\ &\quad + \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor} C_{i-1} E_{n-i, i-r}(x) \\ &\quad + \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1}^n C_{n-i} E_{i-1, n-i+r}(x) \\ &\quad + (x-1)E_{n-1,0}(x)\mathbb{1}_{\{r=0\}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

On pose $F_{n,r}(x) = A_n(x) + (1-x) \sum_{i=1}^r C_{i-1} A_{n-i}$. Alors on peut écrire $F_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n f(n, k)(x-1)^k$

Lemme 2.2.5. $[(x-1)^k]F_{n,r}(x) = f(n, k) = b(n, k) - \sum_{i=1}^r C_{i-1} b(n-i, k-1)$

Proposition 2.2.29. Pour tout $r \geq n$, on a $F_{n,r}(x) = C_n$

Preuve : On a $F_{n,r}(x) = f(n, 0) + \sum_{k=1}^n f(n, k)(x-1)^k = f(n, 0) = b(n, 0) = C_n$

car $b(n, k) = \sum_{i=1}^n C_{i-1} b(n-i, k-1)$ et

pour tout $r \geq n$ et $k \neq 0$, $f(n, k) = b(n, k) - \sum_{i=1}^n C_{i-1} b(n-i, k-1) = 0$

Corollaire 2.2.30. Pour tout $r \geq n$, on $F_{n,r}(x) = E_{n,r}(x)$

Dans toute la suite on pose $r < n$.

Proposition 2.2.31. On a
$$\begin{cases} f(n, 0) &= C_n, \forall n \geq 0 \\ f(n, k) &= 0 \text{ si } k, n < 0 \text{ ou } k > n \\ f(n, k) &= f(n, k+1) + f(n-1, k-1), \forall k \leq n \end{cases}$$

Preuve : En utilisant le Lemme 2.2.5, on a $f(n, 0) = C_n$ et $f(n, k) = 0$ si $n, k < 0$ et aussi $f(n, k) = 0$ si $k > n$ car pour tout $1 \leq i \leq r$, on a $n - i < k - 1$ et donc $b(n - i, k - 1) = 0$.

De plus,

$$\begin{aligned} f(n, k+1) + f(n-1, k-1) &= b(n, k+1) - \sum_{i=1}^r C_{i-1} b(n-i, k) + b(n-1, k-1) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r C_{i-1} b(n-i-1, k-2) \\ &= b(n, k) - \sum_{i=1}^r C_{i-1} [b(n-i, k) + b(n-i-1, k-2)] \\ &= b(n, k) - \sum_{i=1}^r C_{i-1} b(n-i, k-1) \end{aligned}$$

■

On pose

$$\begin{aligned} F_{n,r}^{(1)}(x) &= \sum_{i=1}^r C_{i-1} F_{n-i, r-i}(x) \\ &\quad + \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor} C_{i-1} F_{n-i, i-r}(x) \\ &\quad + \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1}^n C_{n-i} F_{i-1, n-i+r}(x) \\ &\quad + (x-1) F_{n-1, 0}(x) \mathbb{1}_{\{r=0\}} \end{aligned}$$

Alors on peut écrire $F_{n,r}^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^n f^{(1)}(n, k)(x-1)^k$

Lemme 2.2.6. *On a*

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(n, k) &= \sum_{i=1}^r C_{i-1} \left[b(n-i, k) - \sum_{p=1}^{r-i} C_{p-1} b(n-i-p, k-1) \right] \\
&+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor} C_{i-1} \left[b(n-i, k) - \sum_{p=1}^{i-r} C_{p-1} b(n-i-p, k-1) \right] \\
&+ \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1}^n C_{n-i} \left[b(i-1, k) - \sum_{p=1}^{n+r-i} C_{p-1} b(i-p-1, k-1) \right] \\
&+ b(n-1, k-1) \mathbb{1}_{\{r=0\}}
\end{aligned}$$

Proposition 2.2.32. *On a $f^{(1)}(n, k) = f^{(1)}(n, k+1) + f^{(1)}(n-1, k-1)$*

Preuve : En utilisant le Lemme 2.2.6, on a

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(n, k+1) &= \sum_{i=1}^r C_{i-1} \left[b(n-i, k+1) - \sum_{p=1}^{r-i} C_{p-1} b(n-i-p, k) \right] \\
&+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor} C_{i-1} \left[b(n-i, k+1) - \sum_{p=1}^{i-r} C_{p-1} b(n-i-p, k) \right] \\
&+ \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1}^n C_{n-i} \left[b(i-1, k+1) - \sum_{p=1}^{n+r-i} C_{p-1} b(i-p-1, k) \right] \\
&+ b(n-1, k) \mathbb{1}_{\{r=0\}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(n-1, k-1) &= \sum_{i=1}^r C_{i-1} \left[b(n-i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{r-i} C_{j-1} b(n-i-j-1, k-2) \right] \\
&+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor} C_{i-1} \left[b(n-i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{i-r} C_{j-1} b(n-i-j-1, k-2) \right] \\
&+ \sum_{i=\lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor + 1}^{n-1} C_{n-i-1} \left[b(i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{n+r-i-1} C_{j-1} b(i-j-1, k-2) \right] \\
&+ b(n-2, k-2) \mathbb{1}_{\{r=0\}}
\end{aligned}$$

Si on arrive à montrer que

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(n-1, k-1) &= \sum_{i=1}^r C_{i-1} \left[b(n-i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{r-i} C_{j-1} b(n-i-j-1, k-2) \right] \\
&+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor} C_{i-1} \left[b(n-i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{i-r} C_{j-1} b(n-i-j-1, k-2) \right] \\
&+ \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1}^n C_{n-i} \left[b(i-2, k-1) - \sum_{j=1}^{n+r-i} C_{j-1} b(i-j-2, k-2) \right] \\
&+ b(n-2, k-2) \mathbb{1}_{\{r=0\}}
\end{aligned} \tag{E}$$

alors, le résultat se déduit en utilisant la relation $b(n, k) = b(n-1, k-1) + b(n, k+1) (\forall k \leq n)$.

Nous allons étudier séparément le cas où $n+r$ est impair et $n+r$ pair.

D'abord, supposons que $n+r$ est impair. Alors, il existe p tel que $n+r = 2p+1$.

Cela implique que

$$\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor + 1$$

et

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(n-1, k-1) &= \sum_{i=1}^r C_{i-1} \left[b(n-i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{r-i} C_{j-1} b(n-i-j-1, k-2) \right] \\
&+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1} C_{i-1} \left[b(n-i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{i-r} C_{j-1} b(n-i-j-1, k-2) \right] \\
&+ \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor}^{n-1} C_{n-i-1} \left[b(i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{n+r-i-1} C_{j-1} b(i-j-1, k-2) \right] \\
&+ b(n-2, k-2) \mathbb{1}_{\{r=0\}}
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(n-1, k-1) &= \sum_{i=1}^r C_{i-1} \left[b(n-i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{r-i} C_{j-1} b(n-i-j-1, k-2) \right] \\
&+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor} C_{i-1} \left[b(n-i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{i-r} C_{j-1} b(n-i-j-1, k-2) \right] \\
&- C_{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1} \left[b(n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1, k-1) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - r} C_{j-1} b(n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - j - 1, k-2) \right] \\
&+ \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1}^n C_{n-i} \left[b(i-2, k-1) - \sum_{j=1}^{n+r-i} C_{j-1} b(i-j-2, k-2) \right] \\
&+ b(n-2, k-2) \mathbb{1}_{\{r=0\}}
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que

$$C_{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1} \left[b(n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1, k-1) - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - r} C_{j-1} b(n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - j - 1, k-2) \right] = 0$$

On a

$$\begin{aligned}
n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1 &= n - (p+1) - 1 \\
&= 2p+1-r-p-2 \\
&= p-1-r \\
&= p+1-r-2 \\
&= \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - r - 2
\end{aligned}$$

ou encore $\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - r = n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1$.

Cela implique que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - r} C_{j-1} b(n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - j - 1, k-2) &= \sum_{j=1}^{n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1} C_{j-1} b(n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - j - 1, k-2) \\
&= \sum_{j=1}^{n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1} C_{j-1} b(n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - j - 1, k-2) \\
&= b(n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1, k-1)
\end{aligned}$$

D'où, la relation (E)

Ensuite, supposons que $n + r$ est pair. Alors, il existe p tel que $n + r = 2p$. Cela implique que

$$\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor$$

et

$$\begin{aligned} f^{(1)}(n-1, k-1) &= \sum_{i=1}^r C_{i-1} \left[b(n-i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{r-i} C_{j-1} b(n-i-j-1, k-2) \right] \\ &+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor} C_{i-1} \left[b(n-i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{i-r} C_{j-1} b(n-i-j-1, k-2) \right] \\ &+ \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1}^{n-1} C_{n-i-1} \left[b(i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{n+r-i-1} C_{j-1} b(i-j-1, k-2) \right] \\ &+ b(n-2, k-2) \mathbb{1}_{\{r=0\}} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} f^{(1)}(n-1, k-1) &= \sum_{i=1}^r C_{i-1} \left[b(n-i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{r-i} C_{j-1} b(n-i-j-1, k-2) \right] \\ &+ \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor} C_{i-1} \left[b(n-i-1, k-1) - \sum_{j=1}^{i-r} C_{j-1} b(n-i-j-1, k-2) \right] \\ &+ \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1}^n C_{n-i} \left[b(i-2, k-1) - \sum_{j=1}^{n+r-i} C_{j-1} b(i-j-2, k-2) \right] \\ &- C_{n-\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1} \left[b(\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1, k-1) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{n+r-\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1} C_{j-1} b(\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - j - 1, k-2) \right] \\ &+ b(n-2, k-2) \mathbb{1}_{\{r=0\}} \end{aligned}$$

Il reste à montrer que

$$C_{n-\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1} \left[b(\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1, k-1) - \sum_{j=1}^{n+r-\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1} C_{j-1} b(\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - j - 1, k-2) \right] = 0$$

On a

$$\begin{aligned}
n - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + r - 1 &= n + r - p - 1 \\
&= 2p - p - 1 \\
&= p - 1 \\
&= \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+r-\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor-1} C_{j-1} b(\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - j - 1, k - 2) &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor-1} C_{j-1} b(\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - j - 1, k - 2) \\
&= b(\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor - 1, k - 1)
\end{aligned}$$

D'où, la relation (E)

Corollaire 2.2.33. On a $F_{n,r}(x) = F_{n,r}^{(1)}(x)$

Preuve : On en déduit du Lemme 2.2.6 que $f^{(1)}(n, 0) = \sum_{i=1}^n C_{i-1} C_{n-i} = C_n$ et $f^{(1)}(n, k) = 0$ si $n, k < 0$ ou $n < k$. En utilisant la Proposition 2.2.31 et la Proposition 2.2.32, on a $f(n, k) = f^{(1)}(n, k)$

Corollaire 2.2.34. On a $F_{n,r}(x) = E_{n,r}(x)$

Preuve : Nous allons montrer par récurrence sur n .

Si $n = 0$, on a $F_{0,r}(x) = 1$ et $E_{0,r}(x) = 1$

Si $n = 1$, on a $F_{1,r}(x) = \begin{cases} x & \text{si } r = 0 \\ 1 & \text{si } r \neq 0 \end{cases}$ et $E_{1,r}(x) = \sum_{\pi \in \mathcal{E}_{1,r}} x^{fix(\pi)} = \begin{cases} x & \text{si } r = 0 \\ 1 & \text{si } r \neq 0 \end{cases}$

Supposons que $F_{k,r}(x) = E_{k,r}(x)$ pour tout $k \leq n$, et montrons que $F_{n+1,r}(x) = E_{n+1,r}(x)$.

On a

$$\begin{aligned}
E_{n+1,r}(x) &= \sum_{i=1}^r C_{i-1} E_{n+1-i,r-i}(x) \\
&\quad + \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+2}{2} \rfloor} C_{i-1} E_{n+1-i,i-r}(x) \\
&\quad + \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+2}{2} \rfloor+1}^{n+1} C_{n+1-i} E_{i-1,n+1-i+r}(x) \\
&\quad + (x - 1) E_{n,0}(x) \mathbb{1}_{\{r=0\}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F_{n+1,r}(x) &= \sum_{i=1}^r C_{i-1} F_{n+1-i,r-i}(x) \\
&\quad + \sum_{i=r+1}^{\lfloor \frac{n+r+2}{2} \rfloor} C_{i-1} F_{n+1-i,i-r}(x) \\
&\quad + \sum_{i=\lfloor \frac{n+r+2}{2} \rfloor + 1}^{n+1} C_{n+1-i} F_{i-1,n+1-i+r}(x) \\
&\quad + (x-1)F_{n,0}(x)\mathbb{1}_{\{r=0\}}
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on le résultat. ■

Corollaire 2.2.35. On a $E_{n,0}(x) = A_n(x) = \sum_{\pi \in S_n(132)} x^{fix(\pi)}$

Proposition 2.2.36. On a $C_n = 2A_n(x) - xA_n(x) + (1-x)^2 A_{n-1}(x)$

Preuve : Prenons $r = n$. Par définition de $F_{n,r}(x)$ et en utilisant le Corollaire 2.2.30, on a

$$C_n = A_n(x) + (1-x) \sum_{i=1}^n C_{i-1} A_{n-i}(x)$$

Et en utilisant la Proposition 2.2.5. on a :

$$\sum_{i=1}^n C_{i-1} A_{n-i}(x) = A_n(x) + (1-x)A_{n-1}(x)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
C_n &= A_n(x) + (1-x)[A_n(x) + (1-x)A_{n-1}(x)] \\
&= 2A_n(x) - xA_n(x) + (1-x)^2 A_{n-1}(x) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Dans toute la suite, pour tout $0 \leq k \leq n$, on pose $F_n^k = s_n^k(\alpha)$, $\alpha \in \{132, 321\}$ et convient que $F_n^{-1} = 0$.

Proposition 2.2.37. Pour tout $n \geq 2$, on a

$$2F_n^k + F_{n-1}^k = F_n^{k-1} + 2F_{n-1}^{k-1} - F_{n-1}^{k-2}$$

Preuve : Comme

$$\begin{aligned}
A_n(x) &= \sum_{\pi \in S_n(\alpha)} x^{fix(\pi)} \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\pi \in S_n^k(\alpha)} x^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^n s_n^k(\alpha) x^k
\end{aligned}$$

En extrayant le coefficient de x^k dans la Proposition 2.2.36. on a :

$$0 = 2s_n^k(\alpha) - s_n^{k-1}(\alpha) + s_{n-1}^k(\alpha) - 2s_{n-1}^{k-1}(\alpha) + s_{n-1}^{k-2}(\alpha) \quad \blacksquare$$

Proposition 2.2.38. Soit $\alpha \in \{132, 321\}$. Pour tout $n \geq 1$,

$$s_n^1(\alpha) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^i (C_{n-i} + 3F_{n-i-1})$$

Preuve : En utilisant la Proposition 2.2.37 et pour $k = 1$, on a

$$2F_n^1 + F_{n-1}^1 = F_n^0 + 2F_{n-1}^0$$

On pose $s(t) = \sum_{n \geq 0} s_n^1(\alpha) t^n$. Comme $F_n^0 = s_n^0(\alpha) = F_n$, alors

$$\sum_{n \geq 1} 2F_n^1 t^n + \sum_{n \geq 1} F_{n-1}^1 t^n = \sum_{n \geq 1} F_n^0 t^n + \sum_{n \geq 1} 2F_{n-1}^0 t^n$$

D'où

$$2[-s_0^1 + s(t)] + ts(t) = -F_0 + F(t) + 2tF(t)$$

ou encore

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{F(t)(1+2t) - 1}{2+t} \\ &= \frac{F(t)}{2+t}(1+2t) - \frac{1}{2+t} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{i=0}^n F_{n-i} \left(-\frac{1}{2}\right)^i * (1+2t) - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^n t^n \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n \geq 0} t^n \sum_{i=0}^n F_{n-i} \left(-\frac{1}{2}\right)^i - \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^n t^n \right] + \sum_{n \geq 1} t^n \sum_{i=0}^{n-1} F_{n-i-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^i \end{aligned}$$

Cela implique que :

$$\begin{aligned} s_n^1(\alpha) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^n F_{n-i} \left(-\frac{1}{2}\right)^i - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] + \sum_{i=0}^{n-1} F_{n-i-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{F_{n-i}}{2} + F_{n-i-1} \right] \left(-\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} [2F_{n-i} + F_{n-i-1} + 3F_{n-i-1}] \left(-\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} [C_{n-i} + 3F_{n-i-1}] \left(-\frac{1}{2}\right)^i \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 2.2.39. Soit $\alpha \in \{132, 321\}$. Pour $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, on a :

$$s_n^k(\alpha) = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{j+k}{k} b(n, k+j)$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=0}^n b(n, k)(x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} b(n, k)(-1)^{k-i} x^i \right) \end{aligned}$$

Ainsi le coefficient de x^k est

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} b(n, j)(-1)^{j-k}$$

D'où,

$$s_n^k(\alpha) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{j+k}{k} b(n, j+k)(-1)^j$$

Proposition 2.2.40. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$C_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{j+k}{k} b(n, j+k)$$

Preuve : Comme $S_n(\alpha) = \bigcup_{k=0}^n S_n^k(\alpha)$ avec $|S_n(\alpha)| = C_n$ alors, on a $C_n = \sum_{k=0}^n s_n^k(\alpha)$ ■

Proposition 2.2.41. Pour tout $n \geq 1$, $F_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j b(n, j)$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} F_n &= s_n^0(\alpha) \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{j}{0} b(n, j)(-1)^j \\ &= \sum_{j=0}^n b(n, j)(-1)^j \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 2.2.42. On a $F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{n-1, n-2k}$

Preuve : Dans la Proposition 2.2.31, on a $F_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j b(n, j)$. Rappelons que, pour tout $n \geq k$,

$c_{n,k} = b(n, k)$. Cela implique que $F_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j c_{n, n-j}$. Nous allons distinguer le cas où n

est pair et n impair.

Si n est pair, alors il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $n = 2p$.

On a

$$F_{2p} = \sum_{j=0}^{2p} (-1)^j c_{2p,2p-j} = (c_{2p,2p} - c_{2p,2p-1}) + (c_{2p,2p-2} - c_{2p,2p-3}) + \cdots + (c_{2p,2} - c_{2p,1}) + c_{2p,0}$$

D'après la définition de $c_{n,k}$, on en déduit,

$$\begin{aligned} F_{2p} &= c_{2p-1,2p} + c_{2p-1,2p-2} + \cdots + c_{2p-1,2} + c_{2p,0} \\ &= \sum_{i=0}^p c_{2p-1,2i} \\ &= \sum_{i=0}^p c_{2p-1,2p-2i} \end{aligned}$$

Si n est impair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$.

On a

$$F_{2p+1} = \sum_{j=0}^{2p+1} (-1)^j c_{2p+1,2p+1-j} = (c_{2p+1,2p+1} - c_{2p+1,2p}) + (c_{2p+1,2p-1} - c_{2p+1,2p-2}) + \cdots + (c_{2p+1,1} - c_{2p+1,0})$$

D'après la définition de $c_{n,k}$, on en déduit,

$$\begin{aligned} F_{2p+1} &= c_{2p,2p+1} + c_{2p,2p-1} + \cdots + c_{2p,1} \\ &= \sum_{i=0}^p c_{2p,2i+1} \\ &= \sum_{i=0}^p c_{2p,2p+1-2i} \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Corollaire 2.2.43. *Pour tout $x \in \{123, 132\}$, on a $F_{2n} = \#\{\sigma \in S_{2n}(x); \sigma(1) \text{ impair} \}$ et $F_{2n+1} = \#\{\sigma \in S_{2n+1}(x); \sigma(1) \text{ pair} \}$*

Preuve : Soit $x \in \{123, 132\}$. Il est à noter que, pour tout $n, k \geq 1$, $s_{n,k}(x) = c_{n-1,k-1}$.

On a

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^n c_{2n-1,2n-2k} = \sum_{k=0}^n s_{2n,2(n-k)+1}(x) = \sum_{k=0}^n s_{2n,2k+1}(x) = \#\{\sigma \in S_{2n}(x); \sigma(1) \text{ impair} \}$$

et

$$F_{2n+1} = \sum_{k=0}^n c_{2n,2n-2k+1} = \sum_{k=0}^n s_{2n+1,2(n-k)+2}(x) = \sum_{k=0}^n s_{2n+1,2(n-k+1)}(x) = \#\{\sigma \in S_{2n+1}(x); \sigma(1) \text{ pair}\}$$

■

Soit $x \in \{132, 321\}$. On pose $T_n(x) = \{\pi \in S_n(x); \text{Fix}(\sigma) \cap [n-1] \neq \emptyset\}$

Proposition 2.2.44. *Pour tout $n \geq 1$, on a $|T_n(x)| = F_n$.*

Preuve : Soit $n \geq 1$, on pose $U_n(x) = \{\pi \in S_n(x); \forall i < n, \pi(i) \neq i \text{ et } \pi(n) = n\}$. Les ensembles $S_n^0(x)$, $T_n(x)$ et $U_n(x)$ forment une partition de $S_n(x)$. De plus, l'ensemble $U_n(x)$ est en bijection avec l'ensemble $S_{n-1}^0(x)$, via la bijection $\pi \mapsto \pi'$ où π' est obtenue en supprimant n dans π .

On a $|S_n(x)| = C_n = |S_n^0(x)| + |T_n(x)| + |S_{n-1}^0(x)| \iff C_n = F_n + F_{n-1} + |T_n(x)|$.

Rappelons que $C_n = 2F_n + F_{n-1}$ (D'après la Proposition 1.4.4). Dès lors, $|T_n(x)| = F_n$

Bibliographie

- [1] C. Krattenthaler, *Advances in Applied Mathematics* 27, *Permutations with Restricted Patterns and Dyck Paths*
- [2] RODICA SIMION AND FRANK W. SCHMIDT, *Restricted Permutations*, *Europ.l. Combinatorics* (1985) 6, 383-406
- [3] Aaron Robertson, Dan Saracino, Doron Zeilberger, *REFINED RESTRICTED PERMUTATIONS*
- [4] Gi-Sang Cheon, Sang-Gu Lee, Louis W. Shapiro *The Fine numbers refined*, *European Journal of Combinatorics* 31 (2010) 120-128
- [5] Volker STREHL *A NOTE ON SIMILARITY RELATIONS*, *Discrete Mathematics* 19 (W7) 99-101.
- [6] DEREK DESANTIS, REBECCA FIELD, WESLEY HOUGH, BRANT JONES, REBECCA MEISSEN, AND JACOB ZIEFLE *PERMUTATION PATTERN AVOIDANCE AND THE CATALAN TRIANGLE*, *MISSOURI J. OF MATH. SCI.*, Vol. 25, 2010
- [7] Emeric Deutsch, Louis Shapiro *A survey of the Fine numbers*, *Discrete Mathematics*, pp 241-265, 2001
- [8] J. Françon, G. Viennot *Permutations selon leurs pics, creux, doubles montées et double descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi*, *Discrete Mathematics*, pp 21-35, 1979
- [9] SHISHUO FU, DAZHAO TANG, BIN HAN, AND JIANG ZENG *(q, t)-CATALAN NUMBERS*, *Discrete Mathematics*, pp 9, 2018
- [10] SERGI ELZALDE *Fixed Points and Excedances in Restricted Permutations*, *Dartmouth College*, pp 6, 2012
- [11] T. Fine. *Extrapolation when very little is known about the source*, *Inform and Control* 331 - 359