МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №5

по дисциплине «Теория принятия решений»

Тема: Вычисление расстояния между кривыми на плоскости

Студентка гр. 7381	____________________	Алясова А.Н.
Преподаватель	____________________	Попова Е.В.

Санкт-Петербург

2021

Цель работы.

Использование инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе нахождения минимального расстояния между кривыми.

Основные теоретические положения.

Метод множителей Лагранжа

Стандартная условно-экстремальная задача формулируется следующим образом: найти минимум функции (критерия) $J = f(x_1, \dots, x_n)$ при наличия ограничений:

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \qquad i = 1..m,$$

или коротко:

$$J = f(X) \to \min_X; \quad \varphi(X) = 0, \qquad X \in \mathbb{R}^n.$$

Основной аналитический метод решения связан с введением вектора множителей Лагранжа $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ и построением составного критерия (функции Лагранжа):

$$L = f(X) + \Lambda\varphi(X) \to \min$$

или в более подробной записи:

$$L = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i$$

Экстремум этой функции ищется обычным образом путем взятия производных и приравнивания их нулю. Тем самым исходная условно-экстремальная задача сводится к задаче отыскания безусловного экстремума.

Применение вариационного исчисления

Методы Ферма и Лагранжа позволяют аналитически решать конечномерные экстремальные задачи, когда критерий зависит от конечного числа неизвестных. Более трудны для решения бесконечномерные экстремальные задачи, когда критерий зависит от неизвестной функции $f(x)$. Такие задачи решают методами вариационного исчисления.

Простейшая задача вариационного исчисления формулируется следующим образом. Требуется найти кривую $y = f(x)$, проходящую через две заданные точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и доставляющую экстремум функционалу:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

Эйлер доказал, что искомая кривая удовлетворяет уравнению (уравнение Эйлера):

$$F'y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$$

где через F'_y и $F'_{y'}$ обозначены частные производные от подынтегральной функции:

$$F'y = \frac{\partial}{\partial y}F(x, y, y'), \qquad F'_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'}F(x, y, y')$$

Уравнение Эйлера представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, семейство решений которого содержит экстремальную кривую $y = f(x)$.

Следует заметить, что уравнение Эйлера не дает окончательного решения поставленной задачи, а лишь выделяет класс кривых, подозрительных на экстремум. Ситуация здесь вполне аналогична поиску экстремума функции путем ее дифференцирования, когда экстремум может оказаться либо в одной из точек, где производная равна нулю, либо на краях интервала.

Постановка задачи.

Найти двумя способами расстояние между двумя фигурами на плоскости (методом множителей Лагранжа и при помощи вариационного исчисления).

Индивидуализация.

Вариант 1.

Фигура 1 = 1.

№ фигуры	Уравнение
1	$(x-5)^2+(y-10)^2=16$

Фигура 2 = 1.

№ фигуры	Уравнение
1	$y-\frac{x^2}{8}-2x+3=0$

Выполнение работы.

С помощью инструментального средства согласно варианту были построены фигуры в одной плоскости (см. рис. 1).

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-10)^2 = 16 \\ y - \dfrac{x^2}{8} - 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

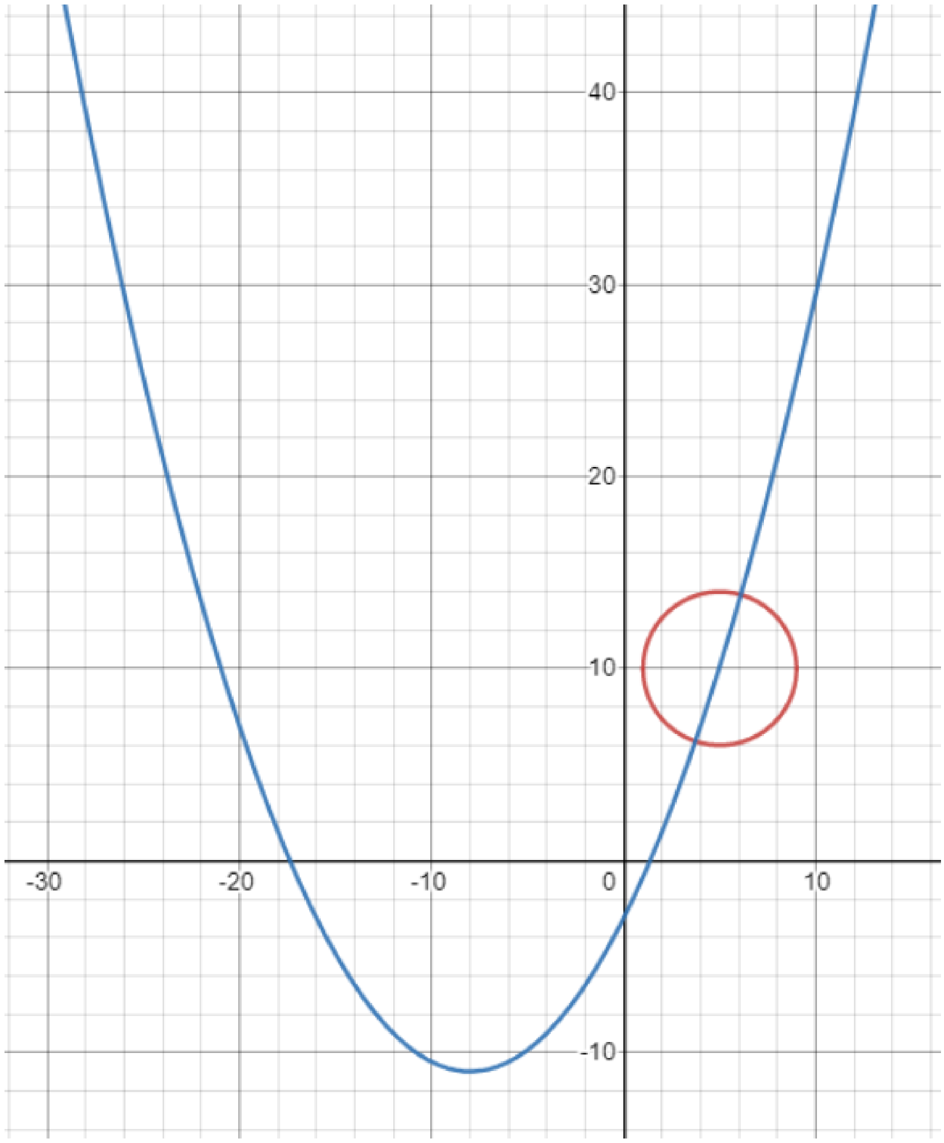

Рисунок 1 – Построение фигур

Так как фигуры пересекаются, путем переноса центра окружности в точку (10; 10) получено расстояние между фигурами (рис. 2). Измененные уравнения:

$$\begin{cases} (x-10)^2 + (y-10)^2 = 16 \\ y - \dfrac{x^2}{8} - 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

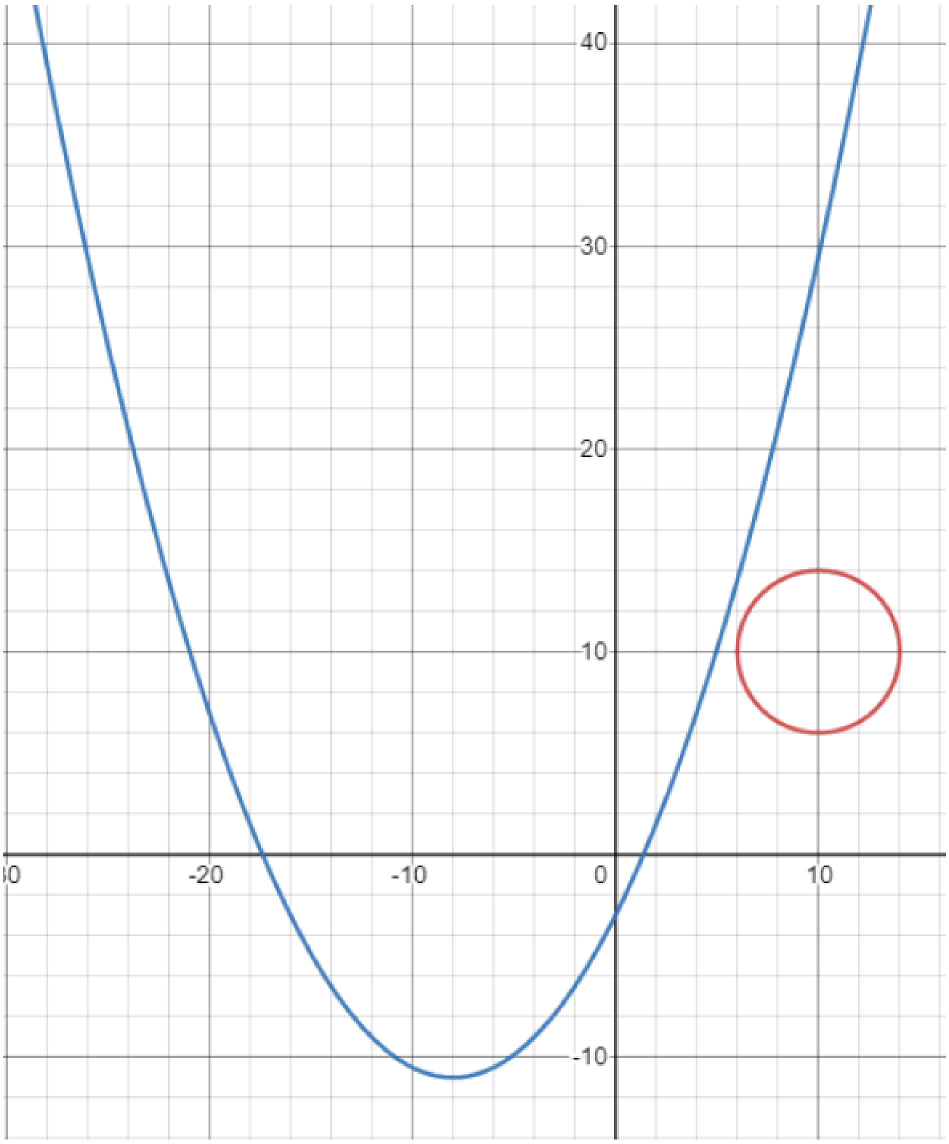

Рисунок 2 – Построение измененных фигур

1) Решим задачу с помощью вариационного исчисления.

Для того, чтобы найти минимальное расстояние методом вариационного исчисления требуется минимизировать функционал:

$$J(y) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + y'^2},$$

где начало кратчайшего отрезка (на фигуре 1), соединяющего фигуры находится в точке $(\alpha; c\alpha + d)$, конец кратчайшего отрезка (на фигуре 2) - $(\beta; c\beta + d)$.

Условие трансверсальности:

$$\sqrt{(1+y'^2)}+({y_0}'-y')\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}=0$$

Начальная система:

$$\begin{cases}(x-10)^2+(y-10)^2=16\\ y-\dfrac{x^2}{8}-2x+3=0\end{cases}$$

Упростим уравнения и найдем производные по x:

$$\begin{cases}x^2+y^2-20x-20y+184=0\\ -\dfrac{1}{8}x^2-2x+y+3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+2yy'-20-20y'=0\\ -\dfrac{2}{8}x-2+y'=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y'=\dfrac{10-x}{y-10}\\ y'=\dfrac{1}{4}x+2\end{cases}$$

Прямая, на которой находится минимальный отрезок, соединяющий кривые, имеет вид:

$$y=cx+d$$

Её производная:

$$y'=c$$

Будем решать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}y=cx+d\\ \left((x-10)^2+(y-10)^2-16=0\right)_{x=\alpha}\\ \left(y-\dfrac{x^2}{8}-2x+3=0\right)_{x=\beta}\\ \left(\sqrt{(1+y'^2)}+\left(\dfrac{10-x}{y-10}-y'\right)\dfrac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}=0\right)_{x=\alpha}\\ \left(\sqrt{(1+y'^2)}+\left(\dfrac{1}{4}x+2-y'\right)\dfrac{y'}{\sqrt{\left(1+y'^2\right)}}=0\right)_{x=\beta}\end{cases}$$

$$x = \alpha; y = c\alpha + d$$

$$x = \beta; y = c\beta + d$$

$$y' = c$$

$$\begin{cases} y = cx + d \\ (\alpha - 10)^2 + (c\alpha + d - 10)^2 - 16 = 0 \\ y - \dfrac{\beta^2}{8} - 2\beta + 3 = 0 \\ \sqrt{(1 + c^2)} + \left(\dfrac{10 - \alpha}{c\alpha + d - 10} - c\right)\dfrac{c}{\sqrt{(1 + c^2)}} = 0 \\ \sqrt{(1 + c^2)} + (\dfrac{1}{4}\beta + 2 - c)\ \dfrac{c}{\sqrt{(1 + c^2)}} = 0 \end{cases}$$

Упростим 4е уравнение:

$$\sqrt{(1 + c^2)} + \left(\frac{10 - \alpha}{c\alpha + d - 10} - c\right)\frac{c}{\sqrt{(1 + c^2)}} = 0$$

$$1 + c^2 + c\left(\frac{10 - \alpha}{c\alpha + d - 10} - c\right) = 0$$

$$1 + c\left(\frac{10 - \alpha}{c\alpha + d - 10} - c\right) = 0$$

$$\frac{10c - \alpha c}{c\alpha + d - 10} = -1$$

$$\frac{\alpha c - 10c}{c\alpha + d - 10} = 1$$

$$\alpha c - 10c = c\alpha + d - 10$$

$$d = 10 - 10c$$

Упростим 5е уравнение:

$$\sqrt{(1 + c^2)} + (\frac{1}{4}\beta + 2 - c)\ \frac{c}{\sqrt{(1 + c^2)}} = 0$$

$$1 + c^2 + c(\frac{1}{4}\beta + 2 - c) = 0$$

$$\beta = -\frac{4 + 8c}{c}$$

Решим систему уравнений с помощью Wolfram Alpha:

$$\begin{cases} (\alpha-10)^2+(c\alpha+d-10)^2-16=0 \\ c\beta+d-\dfrac{\beta^2}{8}-2\beta+3=0 \\ d=10-10c \\ \beta=-\dfrac{4+8c}{c} \end{cases}$$

solve	$(a-10)^2+(c\,a+d-10)^2-16=0$
	$c\,b+d-\dfrac{b^2}{8}-2\,b+3=0$
	$d=10-10\,c$
	$b=\dfrac{4+8\,c}{c}$

Results:

$a\approx 6.03459 \land b\approx -22.2168 \land c\approx -0.132377 \land d\approx 11.3238$

$a\approx 13.9654 \land b\approx -22.2168 \land c\approx -0.132377 \land d\approx 11.3238$

Итоговые решения системы:

$$\begin{cases} \alpha=6{,}03459 \\ \beta=-22{,}2168 \\ c=-0{,}132377 \\ d=11{,}3238 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha=13{,}9654 \\ \beta=-22{,}2168 \\ c=-0{,}132377 \\ d=11{,}3238 \end{cases}$$

Получаем прямую:

$$y=-0{,}132377x+11{,}3238$$

Точка на первой кривой имеет координаты:

$$(6{,}035\ ;\ 10{,}525)$$

Точка на второй кривой имеет координаты

$$(5{,}158;\ 10{,}641)$$

Полученная прямая представлена на рис. 3.

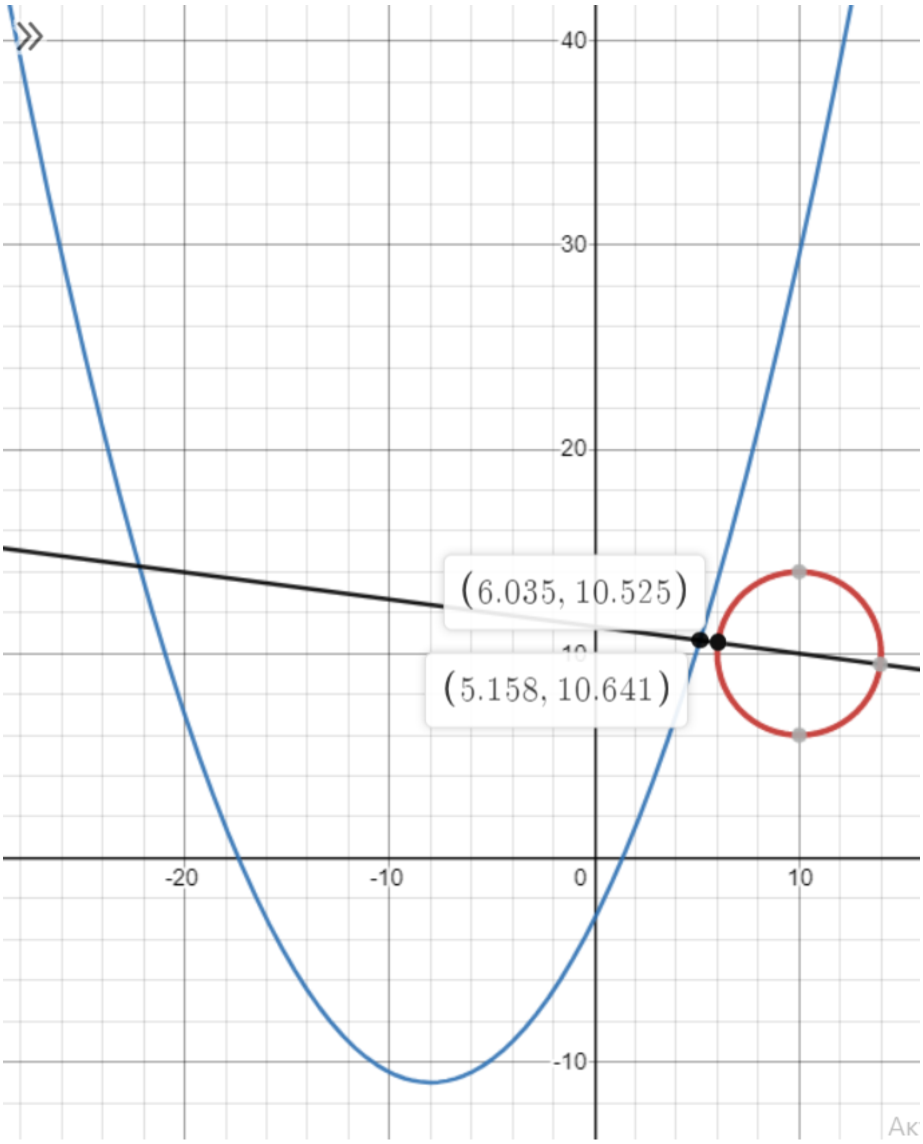

Рисунок 3

2) Решим задачу с помощью метода множителей Лагранжа.

Для нахождения минимального расстояния между прямыми было использовано евклидово расстояние:

$$d(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Составим целевую функцию для перехода к задаче безусловной минимизации и использованием метода множителей Лагранжа:

$$L = d^2(x_1, x_2, y_1, y_2) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, y_1) + \lambda_2 \varphi_2(x_2, y_2),$$

где

$$\varphi_1(x_1, y_1) = (x_1 - 10)^2 + (y_1 - 10)^2 - 16$$

$$\varphi_2(x_2, y_2) = y_2 - \frac{{x_2}^2}{8} - 2x_2 + 3$$

Построим функцию Лагранжа:

$$L = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \lambda_1((x_1 - 10)^2 + (y_1 - 10)^2 - 16)$$
$$+ \lambda_2\left(y_2 - \frac{{x_2}^2}{8} - 2x_2 + 3\right)$$

Найдем решения системы уравнений из частных производных целевой функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2 - 2\lambda_1 x_1 - 20\lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2x_1 - \dfrac{1}{4}\lambda_2 x_2 - 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_1} = 2y_1 - 2y_2 + 2\lambda_1 y_1 - 20\lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_2} = 2y_2 - 2y_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = (x_1 - 10)^2 + (y_1 - 10)^2 - 16 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = y_2 - \dfrac{{x_2}^2}{8} - 2x_2 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - \lambda_1 x_1 - 10\lambda_1 = 0 \\ x_2 - x_1 - \dfrac{1}{8}\lambda_2 x_2 - \lambda_2 = 0 \\ y_1 - y_2 + \lambda_1 y_1 - 10\lambda_1 = 0 \\ 2y_2 - 2y_1 + \lambda_2 = 0 \\ (x_1 - 10)^2 + (y_1 - 10)^2 - 16 = 0 \\ y_2 - \dfrac{{x_2}^2}{8} - 2x_2 + 3 = 0 \end{cases}$$

Для решения данной системы была составлена программа, код приложения представлен в приложении А. Результат нахождения программой расстояния с использованием метода множителей Лагранжа представлен на рис. 4.

```
Точки:
На фигуре 1: (6.035, 10.525)
На фигуре 2: (5.158, 10.641)
Множители Лагранжа: (0.063, -0.600)
Расстояние: 0.885
```

Рисунок 4

Решением системы является:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0{,}063 \\ \lambda_2 = -0{,}600 \\ x_1 = 6{,}035 \\ y_1 = 10{,}525 \\ x_2 = 5{,}158 \\ y_2 = 10{,}641 \end{cases}.$$

Изображение представлено на рис. 5.

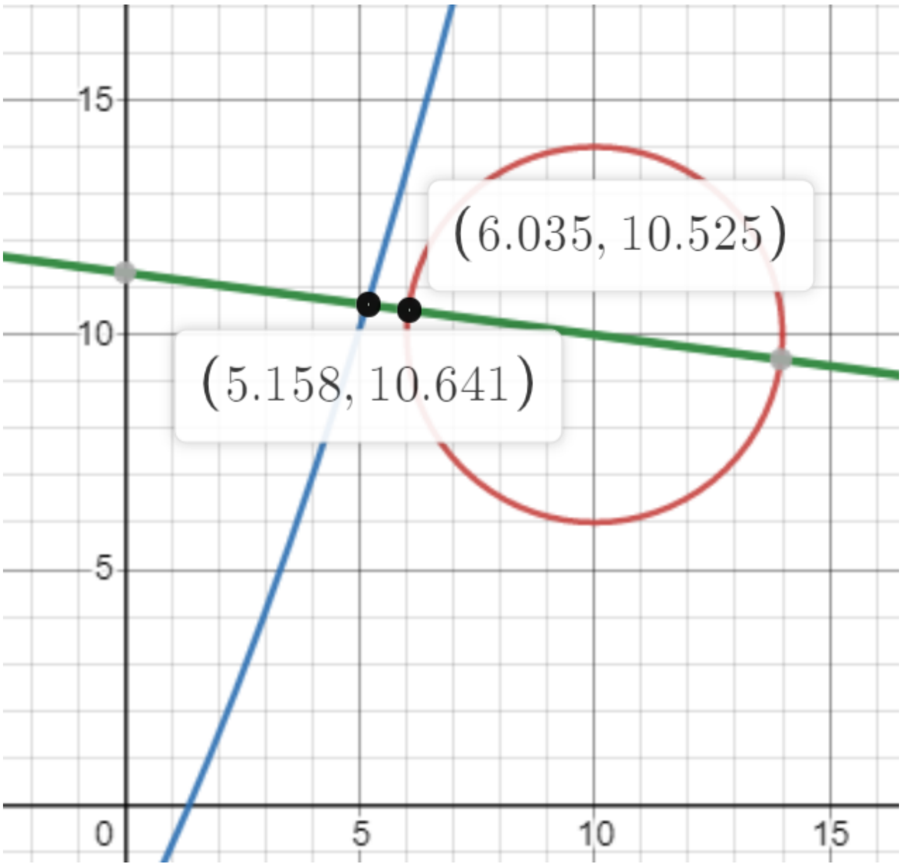

Рисунок 5

Получили результаты, аналогичные предыдущему пункту, что говорит о точности и рациональности использования обоих методов.

Выводы.

В ходе данной лабораторной работы были использованы инструментальные средства для решения задач поддержки принятия решения, а также получены навыки принятия решения на основе нахождения минимального расстояния между кривыми.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Код для метода множителей Лагранжа

```
import numpy as np
from scipy.optimize import fsolve

def fig_1(x, y):
    return (x - 10) ** 2 + (y - 10) ** 2 - 16

def fig_2(x, y):
    return (y-(x**2)/8 - 2*x + 3)

def point_dist(x1, x2, y1, y2):
    return np.sqrt((x1 - x2) ** 2 + (y1 - y2) ** 2)

def system_lagrange(x):
    x1, x2, y1, y2, λ1, λ2 = x
    dx1 = 2*x1 - 2*x2 - 2*x1*λ1 - 20*λ1
    dx2 = 2*x2 - 2*x1 - (1/4)*x2*λ2 - 2*λ2
    dy1 = 2*y1 - 2*y2 + 2*λ1*y1 - 20*λ1
    dy2 = 2*y2 - 2*y1 + λ2
    dλ1 = fig_1(x1, y1)
    dλ2 = fig_2(x2, y2)
    return np.array([dx1, dx2, dy1, dy2, dλ1, dλ2])

if __name__ == "__main__":
    x0 = np.array([5, 2, 0, -2.5, 1, 1])
    result = fsolve(system_lagrange, x0)
    x1, x2, y1, y2, λ1, λ2 = result

    print("Точки:\nНа фигуре 1: ({0:.3f}, {1:.3f})".format(x1, y1))
    print("На фигуре 2: ({0:.3f}, {1:.3f})".format(x2, y2))
    print('Множители Лагранжа: ({0:.3f}, {1:.3f})'.format(λ1, λ2))
    print('Расстояние: {:.3f} '.format(point_dist(x1, x2, y1, y2)))
```