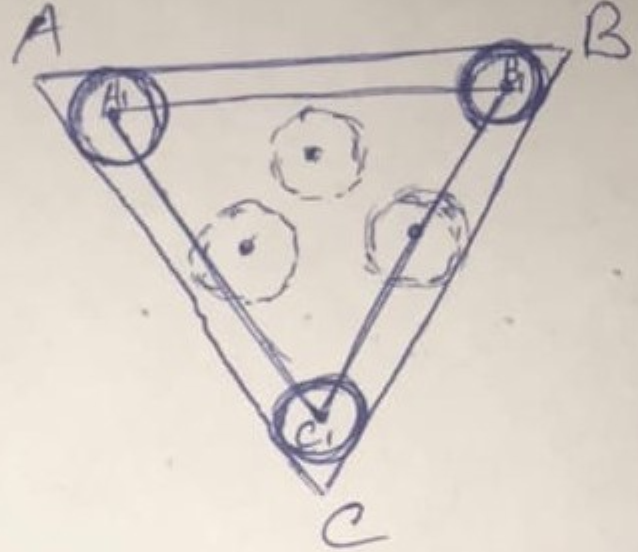
ИДЗ-2 Киреев К.

Вариант 7 8381

① Прямые разбивают плоскость на равносторонние треугольники со стороной 16. Определить вероятность того, что монета диаметра 2, наугад брошенная на плоскость, не пересечёт ни одной прямой.



Чтобы монета не пересекла прямые, её центр должен быть внутри $\Delta A_1B_1C_1$

$$P(\text{монета не перес. прямых}) = \frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$S_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

1.) $\Delta ABC: a = 16 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{16^2\sqrt{3}}{4} = 64\sqrt{3}$

2.) $\Delta A_1B_1C_1: a = 16 - 2 = 14 \Rightarrow S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{14^2\sqrt{3}}{4} = 49\sqrt{3}$

$$P = \frac{49\sqrt{3}}{64\sqrt{3}} = 49/64$$

Ответ: $P = 49/64$

②

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,-2]\\ 1/6, & x\in(-2,-1]\\ 1/3, & x\in(-1,1]\\ 2/3, & x\in(1,2]\\ 1, & x\in(2,\infty)\end{cases}$$

Вычислить $E\xi$, $D\xi$, распределение $\eta=\sin\left(\frac{\pi\xi}{3}\right)$

ξ	-2	-1	1	2
P	$1/6$	$1/6$	$1/3$	$1/3$

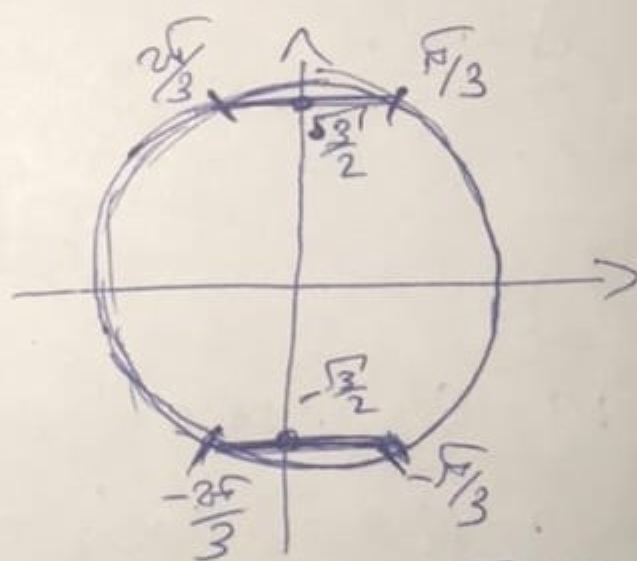
$$E\xi=-2\cdot\frac{1}{6}+(-1)\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\underline{\frac{1}{2}}$$

$$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=(-2)^2\cdot\frac{1}{6}+(-1)^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8+2+4+16-3}{12}=\underline{\frac{9}{4}}$$

$\eta(-2)=\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\eta(-1)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\eta(1)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\eta(2)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

η	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
P	$1/3$	$2/3$



$$F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\le-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1/3, & x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\\ 1, & x>\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$\operatorname{supp}\eta=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Ответ: $E\xi=1/2$; $D\xi=9/4$; $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\le-\sqrt{3}/2\\ 1/3, & x\in(-\sqrt{3}/2;\sqrt{3}/2]\\ 1, & x>\sqrt{3}/2\end{cases}$

③ Дана плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины ξ:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} C, & x \in [-3; -1] \\ 2C, & x \in [-1; 1] \\ 0, & \text{в ост. сл.} \end{cases}$$

Вычислить C, $E\xi$, $D\xi$ и распределение $\eta = (\xi+1)^4$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-3}^{-1} C\,dx + \int_{-1}^{1} 2C\,dx = 1 \Rightarrow C \cdot x \Big|_{-3}^{-1} + 2C \cdot x \Big|_{-1}^{1} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\,(-1+3) + 2C \cdot (1+1) = 1 \Rightarrow 2C + 4C = 1 \Rightarrow 6C = 1 \Rightarrow \underline{C = 1/6}$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1/6, & x \in [-3; -1] \\ 1/3, & x \in [-1; 1] \\ 0, & \text{в ост. случ.} \end{cases}$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_\xi(x)\,dx = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{6} \cdot x\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{3} \cdot x\,dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)}_{=0} = \underline{-2/3}$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_\xi(x)\,dx = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{6} \cdot x^2\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{3} \cdot x^2\,dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{3} - \left(-\frac{27}{3}\right)\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{26}{18} + \frac{2}{9} = \frac{30}{18} = \underline{5/3}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{5}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{{}^{3/}5}{3} - \frac{4}{9} = \frac{15-4}{9} = \underline{11/9}$$

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P((\xi+1)^4 < x) = P\left(|\xi+1| < \sqrt[4]{x}\right) =$$

$$= P\left(-\sqrt[4]{x} < \xi + 1 < \sqrt[4]{x}\right) = P\left(-\sqrt[4]{x} - 1 < \xi < \sqrt[4]{x} - 1\right)$$

$$F_\eta(x) = \int_{\sqrt[4]{x}-1}^{\sqrt[4]{x}-1} p_\xi(x)\,dx$$