**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**
**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**
**ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)**
**Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ**

# ОТЧЕТ
**по домашнему заданию №2**
**по дисциплине «Элементы функционального анализа»**

| | | |
|---|---|---|
| Студент гр. 8383 | ____________________ | Киреев К.А. |
| Преподаватель | ____________________ | Коточигов А.М. |

Санкт-Петербург
2021

**Выполнение работы.**

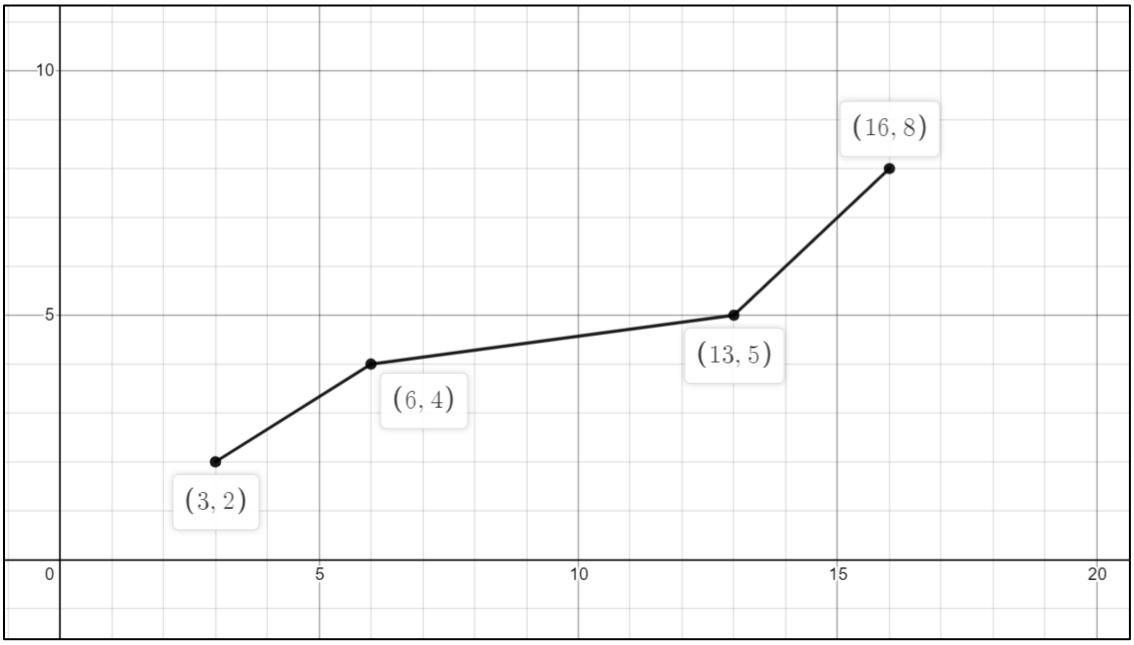
**Вариант 8**

$$f(3) = 2, f(6) = 4, f(13) = 5, f(16) = 8$$

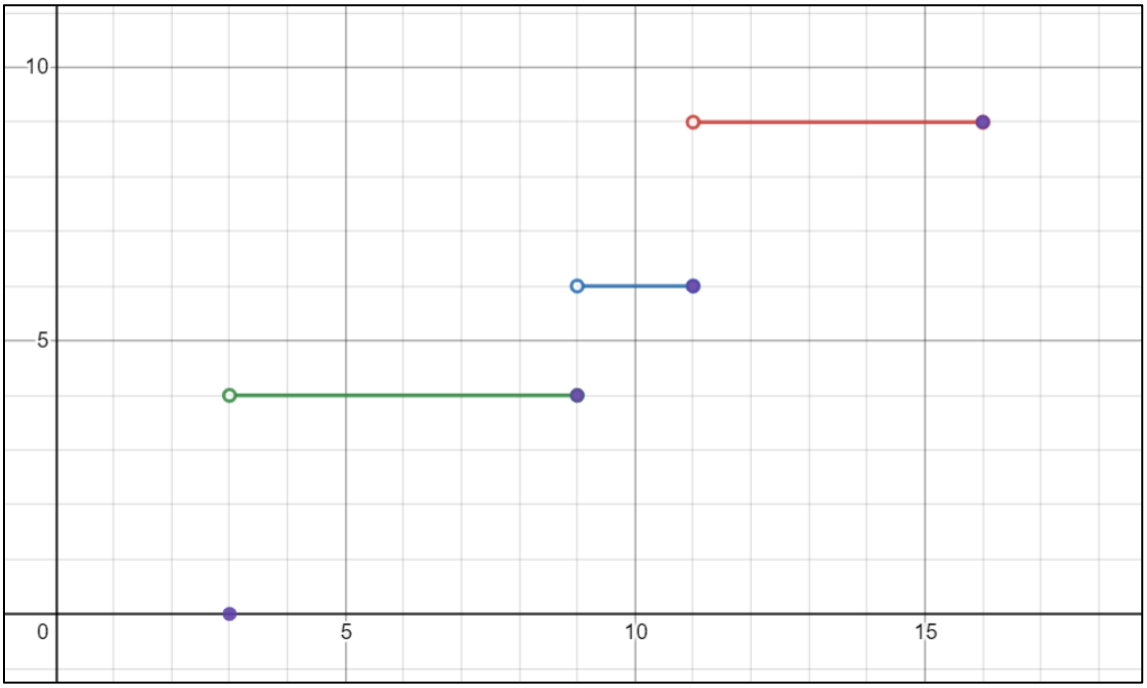
$$g(3) = 0, g(9) = 4, g(11) = 6, g(16) = 9$$

Построим графики функций:

$\boldsymbol{f(x)}$




$\boldsymbol{g(x)}$



Мера, порожденная возрастающей функцией $F(x)$:

- Если функция непрерывна, то концы интервала не влияют на меру
  $m_F([c,d]) = F(d) - F(c)$
- Модификация определения, существенная только в точках разрыва
  $m_F\big((c,d)\big) = F(d) - F(c+0)$
  $m_F\big((c,d]\big) = F(d+0) - F(c+0)$

- Обозначим через $m$ – меру Лебега, и через $\delta_a$ – дельта меру – единичную нагрузку в точке $a$:

$$\delta_a(E) = 1, a \in E,$$
$$\delta_a(E) = 0, a \notin E$$

Подберем коэффициенты $\beta_i$ так, чтобы для любого измеримого множества $A$

$$m_g(A) = \sum_i \beta_i \delta_{ai}(A)$$

Функция $g$ имеет разрывы в точках $3, 9, 11$, к которым производится «стягивание» отрезков:

$$\boldsymbol{\beta_1} = g(9) - g(3) = 4 - 0 = \mathbf{4}$$
$$\boldsymbol{\beta_2} = g(11) - g(9) = 6 - 4 = \mathbf{2}$$
$$\boldsymbol{\beta_3} = g(16) - g(11) = 9 - 6 = \mathbf{3}$$

- $\int f(x)\, dm_g$

$$\int f(x)\, d\delta_a = f(a), m_g(A) = \sum_i \beta_i \delta_{ai}(A) \to \int f(x)\, dm_g = \sum_i \beta_i f(a_i)$$

$$\int \boldsymbol{f(x)}\, \boldsymbol{dm_g} = 4 * f(3) + 2 * f(9) + 3 * f(11) =$$

$$= 4 * 2 + 3 * 4.43 + 3 * 4.72 = \mathbf{35.45}$$

- Проведем аналогичное описание меры $m_f, m_f(A) = \sum_i \alpha_i\, m(A \cap B_i)$

На каждом из промежутков $[3,6], [6,13], [13,16]$ функция $f(x) = kx + b$

Тогда, например, $\forall (\mathrm{c}, d) \subset [6,13] \to m_f\big((c,d)\big) = f(d) - f(c) = k(d - c)$

$$\forall E\ E = (E \cap [3,6)) \cup (E \cap [6,13)) \cup (E \cap [13,16))$$

$$\boldsymbol{\alpha_1} = \frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

$$\boldsymbol{\alpha_2} = \frac{f(13) - f(6)}{13 - 6} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$$

$$\boldsymbol{\alpha_3} = \frac{f(16) - f(13)}{16 - 13} = \mathbf{1}$$

- $\int g(x)\, dm_f$

$$\forall (\mathrm{c}, d) \subset [6,13], \text{где } g|_{(c,d)} = const$$

$$\int_{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})} \boldsymbol{g(x) dm_f} = \int_{(c,d)} const\ dm_f = const\big(f(d) - f(c)\big)$$

$$\int g(x)\, dm_f = \alpha_1 \int_3^6 g(x) dm + \alpha_2 \left( \int_6^9 g(x) dm + \int_9^{11} g(x) dm + \int_{11}^{13} g(x) dm \right) + \alpha_3 \left( \int_{13}^{16} g(x) dm \right) =$$

$$= \frac{2}{3} * 4 * (4 - 2) + \frac{1}{7}\big(4 * (4.43 - 4) + 6 * (4.72 - 4.43) + 9 * (5 - 4.72)\big) + 1 * 9 * (8 - 5) \approx \mathbf{33.2}$$

- Подберите постоянные $c_1, c_2$ такие, что $\forall E\colon c_1 m(E) \le m_f(E) \le c_2 m(E)$

Из определений меры Лебега и меры, порожденной возрастающей функцией:

$$\boldsymbol{c_1} = \min(a_i) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$$

$$\boldsymbol{c_2} = \max(a_i) = \mathbf{1}$$

Тогда для $\forall E\ E = (E \cap [3,6)) \cup (E \cap [6,13)) \cup (E \cap [13,16))$

$$c_1 m(E) \le m_f(E) \le c_2 m(E)$$

Для $m_g$ невозможно подобрать ограничение сверху.

- Опишите все множества $A$ такие, что $m_g(A) = 0$

$m_g(A) = 0$ на множествах, на которых нет разрыва функции $g(x)$:

$$\forall A, \text{кроме } A = \mathbf{3, 9, 11}$$

- Вычислите норму функции $f$ в пространстве $L^{\infty}\big([a,b], m_g\big)$

$$||\boldsymbol{f}||_{\infty} = \sup_{E}\left(\sup_{x}(|f(x)|;\ x \in E) : m_g([a,b]\backslash E) = 0\right) = f(11) \approx \mathbf{4.72}$$