

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ
по практической работе №1
по дисциплине «Теория принятия решений»
Тема: Принятие решений в матричных играх

Студентка гр. 7381

Алясова А.Н.

Преподаватель

Попова Е.В.

Санкт-Петербург

2021

Цель работы.

Изучение различных инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе матричных игр.

Основные теоретические положения.

Рассмотрим простейшую математическую модель конечной конфликтной ситуации, в которой имеется два участника и выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется антагонистической игрой двух лиц с нулевой суммой. Игра состоит из двух ходов: игрок А выбирает одну из возможных a_i , $i = 1..m$ стратегий, а игрок Б выбирает одну из возможных стратегий b_j , $j = 1..n$. Каждый выбор производится при полном незнании выбора соперника. В результате выигрыш игроков составит соответственно a_{ij} и $-a_{ij}$. Цель игрока А – максимизировать величину a_{ij} , а игрока Б – минимизировать эту величину. Критерием принятия решения является функция, выражающая предпочтение лица, принимающего решение, и определяющая правило, по которому выбирается приемлемый или оптимальный вариант решения.

Матрица, составленная из величин a_{ij} , $i = 1..m$, $j = 1..n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Матрица (1) называется платежной матрицей, или матрицей игры. Каждый элемент платежной матрицы a_{ij} , $i = 1..m$, $j = 1..n$, равен выигрышу А (проигрышу Б), если он выбрал стратегию A_i , $i = 1..m$, а игрок Б выбирал стратегию B_j , $j = 1..n$.

Задача каждого из игроков – найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший доход.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Если игрок А выбрал стратегию A_i , $i = 1..m$, то в худшем случае (например, если его ход известен Б) он

получит выигрыш $\alpha_i = \min_j a_{ij}$. Предвидя такую возможность, игрок А должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш.

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \{\min_j a_{ij}\}. \quad (2)$$

Представленная в (2) величина α – гарантированный выигрыш игрока А называется нижней ценой игры. Стратегия A_i , обеспечивающая получение выигрыша α , называется максиминной. Если первый игрок будет придерживаться своей максиминной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае выиграет не меньше α . Аналогично определяется наилучшая стратегия второго игрока. Игрок Б при выборе стратегии B_j , $j = 1..n$, в худшем случае получит проигрыш $\beta_j = \max_i a_{ij}$. Он выбирает стратегию B_j при которой его проигрыш будет минимальным и составит

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \{\max_i a_{ij}\}. \quad (3)$$

Представленная в (3) величина β – гарантированный проигрыш игрока Б называется верхней ценой игры. Стратегия B_j , обеспечивающая получение проигрыша β , называется минимаксной. Если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае проиграет не больше β . Фактический выигрыш игрока А (проигрыш игрока Б) при разумных действиях партнеров ограничен верхней и нижней ценой игры. Для матричной игры справедливо неравенство $\alpha \leq \beta$. Если $\alpha = \beta = v$, т.е.

$$\max_i \left\{ \min_j a_{ij} \right\} = \min_j \max_i a_{ij} = v, \quad (4)$$

то выигрыш игрока А (проигрыш игрока Б) определяется числом v . Оно называется ценой игры.

В соответствии с (4), если $\alpha = \beta = v$, то такая игра называется игрой с седловой точкой. Элемент матрицы a_{ij} , соответствующий паре оптимальных стратегий (A_i, B_j) , называется седловой точкой матрицы. Этот элемент является ценой игры.

Седловой точке соответствуют оптимальные стратегии игроков. Их совокупность – решение игры, которое обладает свойством: если один из игроков придерживается оптимальной стратегии, то второму отклонение от своей оптимальной стратегии не может быть выгодным. Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$ и $\alpha \leq v \leq \beta$ то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами.

Сложная стратегия, состоящая в случайном применении всех стратегий с определенными частотами, называется смешанной.

Постановка задачи.

Используя инструментальные средства компьютерной алгебры решить матричные задачи.

Вариант.

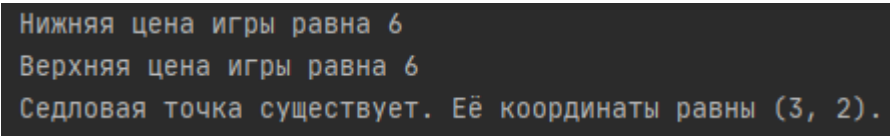
Вариант 30.

Выполнение работы.

1) С помощью инструментального средства определить границы выигрыша и наличие седловой точки для матрицы C_1 . Матрица C_1 представлена в (5).

$$C_1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Результат выполнения программы, представленной в приложении А, показан на рис. 1.



```

Нижняя цена игры равна 6
Верхняя цена игры равна 6
Седловая точка существует. Её координаты равны (3, 2).
    
```

Рисунок 1 – Результат выполнения программы для матрицы C_1

2) Графически и аналитически решить матричную игру 2×2 для матрицы C_2 . Матрица C_2 представлена в (6).

$$C_2 = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Решим данную задачу аналитически.

Требуется проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо написать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю (7) и верхнюю (8) цену игры.

$$\alpha = \max_i \{ \min_j \alpha_{ij} \} = \max \{ (-2, 3) \} = 3 \quad (7)$$

$$\beta = \min_j \{ \max_i \alpha_{ij} \} = \min \{ (9, 6) \} = 6 \quad (8)$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры v . Известно, что $3 \leq v \leq 6$.

В таком случае игрок А должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить максимальный средний выигрыш. Аналогично, игрок Б должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать средний выигрыш игрока А.

Для этого запишем две системы (9) и (10) уравнений и решим их.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 9p_1 + 3p_2 = v \\ -2p_1 + 6p_2 = v \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{30}{7} \\ p_1 = \frac{3}{14} \\ p_2 = \frac{11}{14} \end{cases} \quad (9)$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 9q_1 - 2q_2 = v \\ 3q_1 + 6q_2 = v \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{30}{7} \\ q_1 = \frac{4}{7} \\ q_2 = \frac{3}{7} \end{cases} \quad (10)$$

Оптимальная стратегия игрока А: $P = \left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14} \right)$.

Оптимальная стратегия игрока Б: $Q = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7} \right)$.

Цена игры: $v = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$.

Решим данную задачу графически. Результаты представлены на рис. 2 и 3.

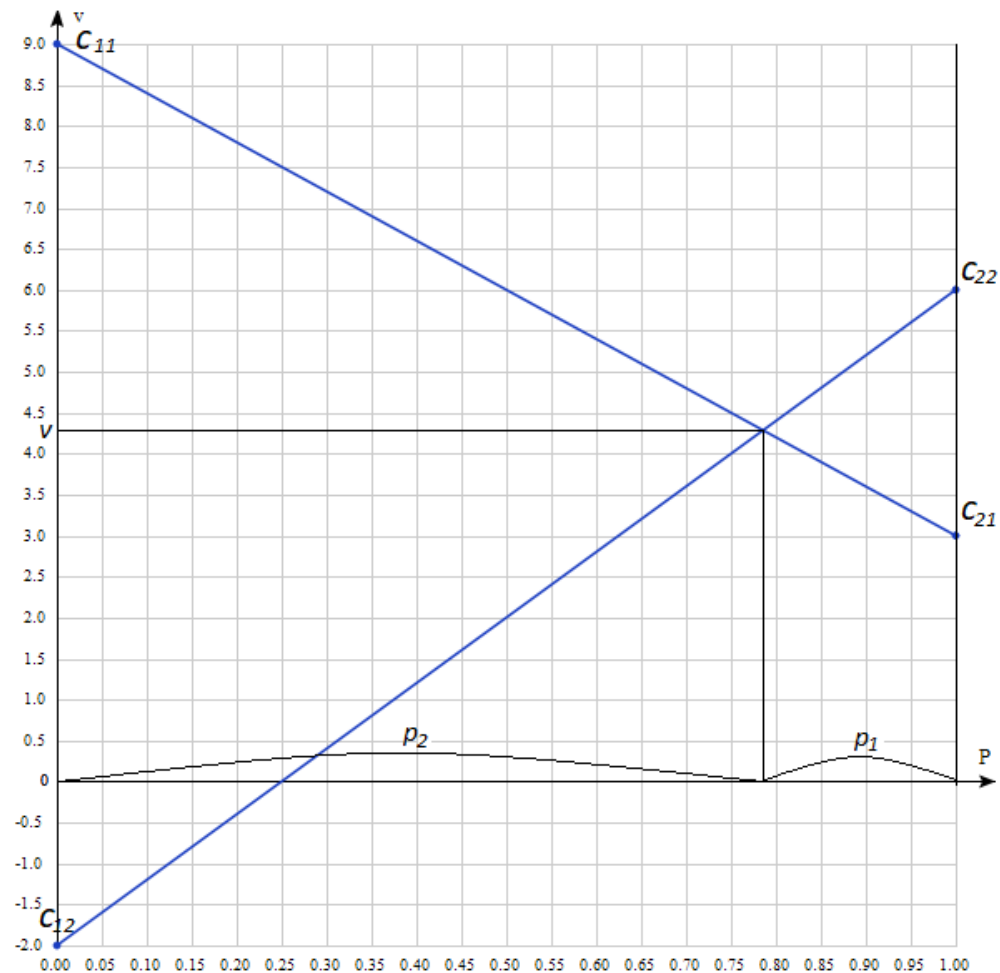


Рисунок 2 – Гарантированный выигрыш первого игрока в матрице платежей C_2

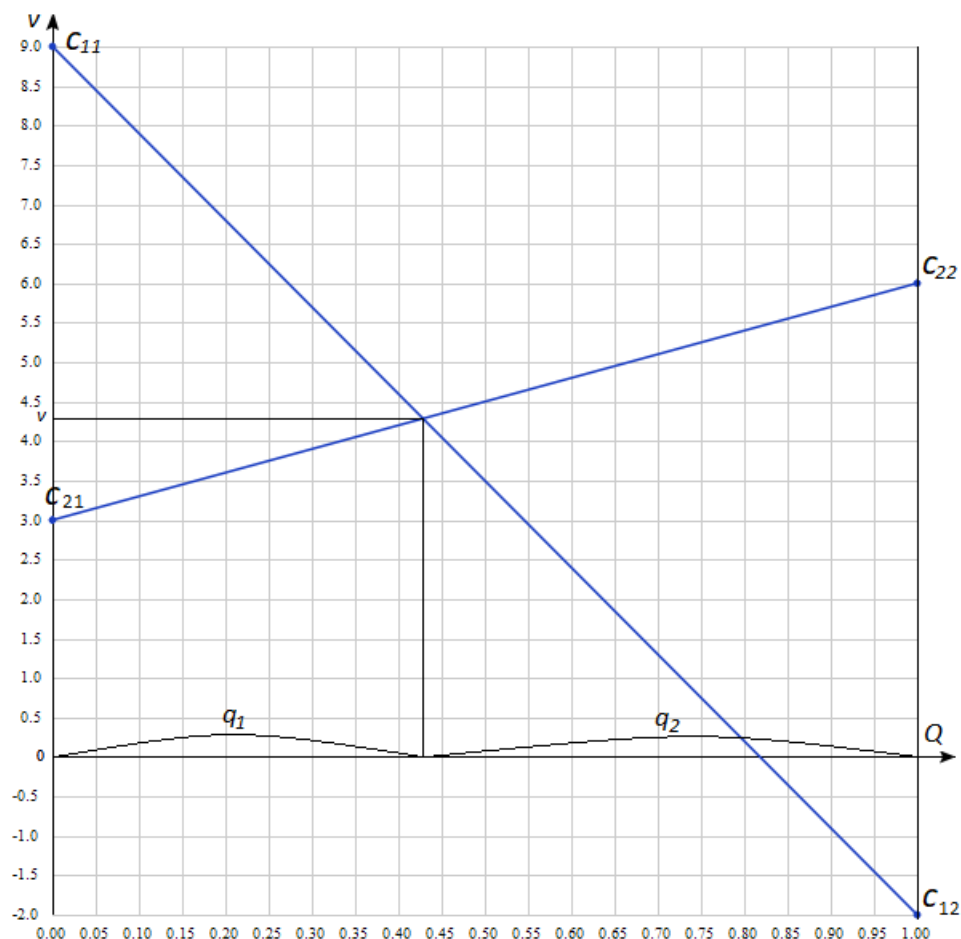


Рисунок 3 – Гарантированный проигрыш второго игрока в матрице платежей C_2

По рис. 2 и 3 можно определить, что стратегии игроков А и Б приблизительно равны $P = \left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14}\right)$, $Q = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$, цена игры – $v = 4\frac{2}{7}$, $\alpha = 3, \beta = 6$. Так как $\alpha \neq \beta$, можем сделать вывод о том, что седловой точки не существует.

3) Графически и аналитически решить матричную игру $2 \times N$ для матрицы C_3 . Матрица C_3 представлена в (11).

$$C_3 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 7 \\ 3 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Решим данную задачу аналитически.

Требуется проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо написать решение игры в чистых стратегиях.

Результат выполнения программы на матрице C_3 , представленной в приложении А, показан на рис. 4.

Нижняя цена игры равна 5
Верхняя цена игры равна 5
Седловая точка существует. Её координаты равны (1, 1).

Рисунок 4 – Результат выполнения программы для матрицы C_3

Решим данную задачу графически. Результат представлен на рис. 5.

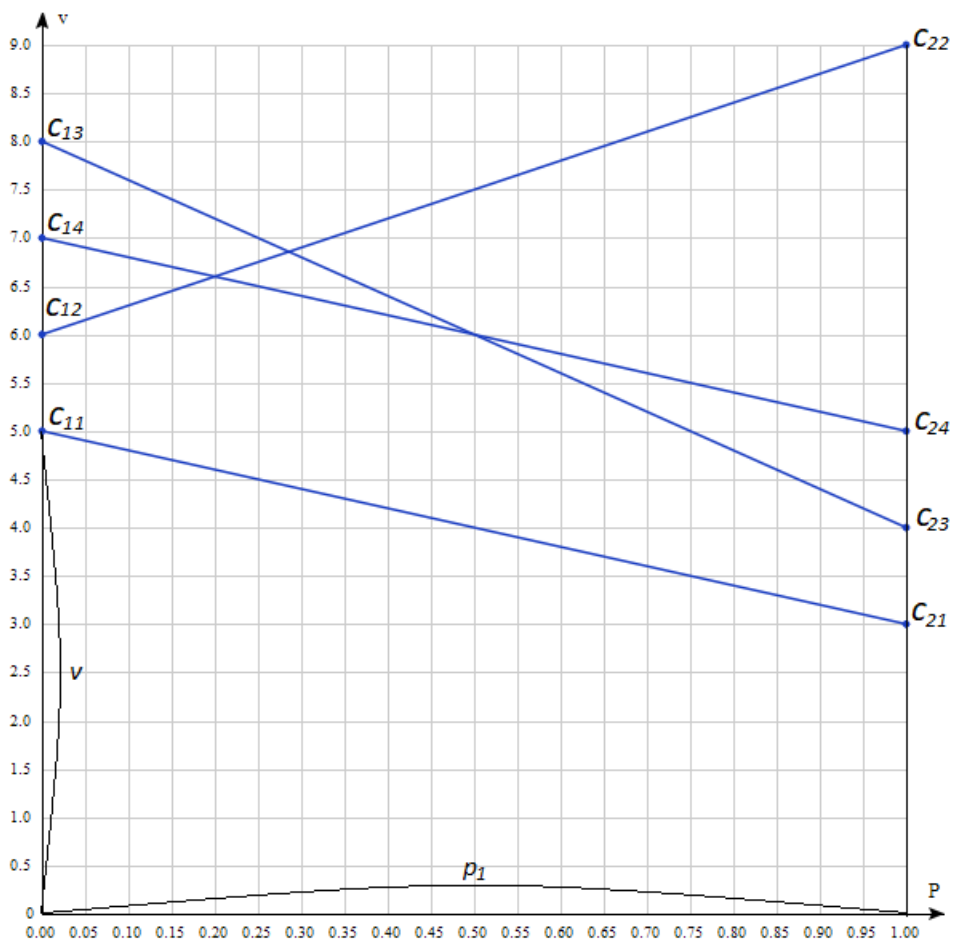


Рисунок 5 – Гарантированный выигрыш первого игрока при различном выборе смешанной стратегии

По рис. 5 можно определить, что стратегия игрока А равна $P = (1, 0)$, т.е. игроку А следует придерживаться 1 стратегии, цена игры – $v = 5$, $\alpha = 5$, $\beta = 5$. Так как $\alpha = \beta$, можем сделать вывод о том, что седловая точка существует.

4) Графически и аналитически решить матричную игру $M \times 2$ для матрицы C_4 . Матрица C_4 представлена в (12).

$$C_4 = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 4 \\ 3 & 8 \\ 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Решим данную задачу аналитически.

Требуется проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю (13) и верхнюю (14) цену игры.

$$\alpha = \max_i \{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(4, 4, 3, 2, 2)\} = 4 \quad (13)$$

$$\beta = \min_j \{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(5, 9)\} = 5 \quad (14)$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры v . Известно, что $4 \leq v \leq 5$.

В таком случае игрок А должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить максимальный средний выигрыш. Аналогично, игрок Б должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать средний выигрыш игрока А.

Используя инструментальное средство Maxima, найдём симплекс-методом оптимальные стратегии для игроков А и Б. Ввод системы неравенств для игрока А в программу Maxima представлен на рис. 6.

```
(%i5) load(simplex);
W:1*x_1+1*x_2+1*x_3+1*x_4+1*x_5;
e1:4*x_1+5*x_2+3*x_3+2*x_4+3*x_5>=1;
e2:9*x_1+4*x_2+8*x_3+5*x_4+2*x_5>=1;
minimize_lp(W,[e1,e2]),nonnegative_lp=true;
```

Рисунок 6 – Ввод системы неравенств для игрока А

Полученное с помощью Maxima решение представлено на рис. 7.

```
(%o2)  $x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1$ 
(%o3)  $3 x_5 + 2 x_4 + 3 x_3 + 5 x_2 + 4 x_1 \geq 1$ 
(%o4)  $2 x_5 + 5 x_4 + 8 x_3 + 4 x_2 + 9 x_1 \geq 1$ 
(%o5)  $[\frac{6}{29}, [x_5=0, x_4=0, x_3=0, x_2=\frac{5}{29}, x_1=\frac{1}{29}]]$ 
```

Рисунок 7 – Решение вектора X симплекс-методом матрицы C_4

Ввод системы неравенств и расчет вектора Y для игрока Б с помощью программы Maxima представлен на рис. 8.

```
(%i18) load(simplex);
W:1*y_1+1*y_2;
e1:4*y_1+9*y_2<=1;
e2:5*y_1+4*y_2<=1;
e3:3*y_1+8*y_2<=1;
e4:2*y_1+5*y_2<=1;
e5:3*y_1+2*y_2<=1;
maximize_lp(W, [e1,e2,e3,e4,e5]), nonegative_lp=true;

(%o12)  $y_2 + y_1$ 
(%o13)  $9 y_2 + 4 y_1 \leq 1$ 
(%o14)  $4 y_2 + 5 y_1 \leq 1$ 
(%o15)  $8 y_2 + 3 y_1 \leq 1$ 
(%o16)  $5 y_2 + 2 y_1 \leq 1$ 
(%o17)  $2 y_2 + 3 y_1 \leq 1$ 
(%o18)  $[\frac{6}{29}, [y_2=\frac{1}{29}, y_1=\frac{5}{29}]]$ 
```

Рисунок 8 – Решение вектора Y симплекс-методом матрицы C_4

Опираясь на полученные данные, можно найти цену игры (15) и оптимальные смешанные стратегии игроков А (16) и Б (17):

$$v = \frac{1}{(6/29)} = \frac{29}{6} \quad (15)$$

$$P = X \cdot v = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0, 0, 0 \right) \quad (16)$$

$$C_5 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 12 \\ 3 & 7 & 8 \\ 12 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad (18)$$

С помощью системы компьютерной алгебры «Maxima» симплекс-методом вычислены векторы X и Y (см. рис. 10, 11).

```
(%i38) load(simplex);
W:1·x_1+1·x_2+1·x_3+1·x_4+1·x_5;
e1:6·x_1+8·x_2+4·x_3+3·x_4+12·x_5>=1;
e2:3·x_1+5·x_2+9·x_3+7·x_4+4·x_5>=1;
e3:7·x_1+1·x_2+12·x_3+8·x_4+6·x_5>=1;
minimize_lp(W,[e1,e2,e3]),nonnegative_lp=true;
```

$$(\%o34) \quad x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1$$

$$(\%o35) \quad 12x_5 + 3x_4 + 4x_3 + 8x_2 + 6x_1 \geq 1$$

$$(\%o36) \quad 4x_5 + 7x_4 + 9x_3 + 5x_2 + 3x_1 \geq 1$$

$$(\%o37) \quad 6x_5 + 8x_4 + 12x_3 + x_2 + 7x_1 \geq 1$$

$$(\%o38) \quad \left[\frac{13}{92}, \left[x_5 = \frac{5}{92}, x_4 = 0, x_3 = \frac{2}{23}, x_2 = 0, x_1 = 0 \right] \right]$$

Рисунок 10 – Решение вектора X симплекс-методом матрицы C_5

```
(%i63) load(simplex);
W:1·y_1+1·y_2+1·y_3;
e1:6·y_1+3·y_2+7·y_3<=1;
e2:8·y_1+5·y_2+1·y_3<=1;
e3:4·y_1+9·y_2+12·y_3<=1;
e4:3·y_1+7·y_2+8·y_3<=1;
e5:12·y_1+4·y_2+6·y_3<=1;
maximize_lp(W,[e1,e2,e3,e4,e5]),nonnegative_lp=true;
```

$$(\%o20) \quad y_3 + y_2 + y_1$$

$$(\%o21) \quad 7y_3 + 3y_2 + 6y_1 \leq 1$$

$$(\%o22) \quad y_3 + 5y_2 + 8y_1 \leq 1$$

$$(\%o23) \quad 12y_3 + 9y_2 + 4y_1 \leq 1$$

$$(\%o24) \quad 8y_3 + 7y_2 + 3y_1 \leq 1$$

$$(\%o25) \quad 6y_3 + 4y_2 + 12y_1 \leq 1$$

$$(\%o26) \quad \left[\frac{13}{92}, \left[y_3 = 0, y_2 = \frac{2}{23}, y_1 = \frac{5}{92} \right] \right]$$

Рисунок 11 – Решение вектора Y симплекс-методом матрицы C_5

Опираясь на полученные данные, можно найти цену игры (19) и оптимальные смешанные стратегии игроков А (20) и Б (21):

$$v = \frac{1}{(13/92)} = \frac{92}{13} \quad (19)$$

$$P = X \cdot v = \left(0, 0, \frac{8}{13}, 0, \frac{5}{13} \right) \quad (20)$$

$$Q = Y \cdot v = \left(\frac{5}{13}, \frac{8}{13}, 0 \right) \quad (21)$$

Выводы.

В ходе выполнения практической работы было реализовано инструментальное средство для нахождения нижней и верхней цен игры и для нахождения координат седловой точки на языке программирования Python, а также были получены навыки работы с системой компьютерной алгебры «Maxima».

Для нахождения оптимальных стратегий в матричных играх были изучены метод нахождения границ выигрыша и седловой точки. При её существовании матричная игра решается в чистых стратегиях. В случае, когда седловой точки не существует, матричная игра решается в смешанных стратегиях.

При решении матричных игр были применены графический и аналитический методы нахождения оптимальных смешанных стратегий, а также был применён симплекс-метод. Решения матричных игр обоими способами дали одинаковый результат, что может свидетельствовать о правильности нахождения оптимальных смешанных стратегий.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ИСХОДНЫЙ КОД

```
import numpy as np

a = np.array([[5, 6, 8, 7], [3, 9, 4, 5]])

amin = a.min(axis=1)
bmax = a.max(axis=0)

alpha = max(amin)
beta = min(bmax)

print("Нижняя цена игры равна " + str(alpha))
print("Верхняя цена игры равна " + str(beta))

if alpha == beta:
    print("Седловая точка существует.", end = " ")

for i in range(np.size(amin)):
    for j in range(np.size(bmax)):
        if amin[i]==bmax[j]:
            print("Её координаты равны (" + str(i+1) + ", " + str(j+1) +
").")
```