Интервальные статистические оценки параметров распределения случайной величины

Интервальной называется статистическая оценка, которая задается двумя числами – концами интервала (в котором может находиться значение параметра Θ).

Точностью Θ^* - статистической оценки параметра Θ называется значение δ, удовлетворяющее неравенству:

$$\delta > \left|\Theta^* - \Theta\right| \qquad (4.1)$$

Чем меньше значение δ, тем точнее оценка Θ^*.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки Θ^* называется вероятность γ , с которой выполняется неравенство (4.1):

$$\gamma = P\left\{\delta > \left|\Theta - \Theta^*\right|\right\} \qquad (4.2)$$

Интервальные статистические оценки параметров распределения случайной величины

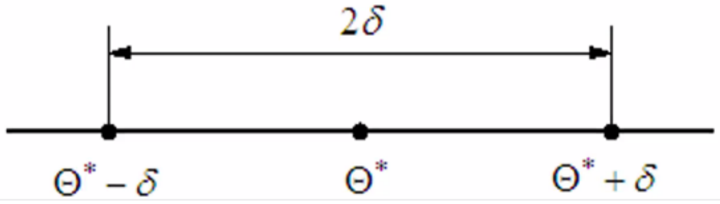
или

$$\gamma = P\left\{\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta\right\} \qquad (4.3)$$

Выражения (4.2) и (4.3) следует понимать в том смысле, что интервал

$$\left(\Theta^* - \delta; \Theta^* + \delta\right) \qquad (4.4)$$

с вероятностью (надежностью) γ содержит в себе (покрывает) истинное значение оцениваемого параметра Θ



Интервальные статистические оценки параметров распределения случайной величины

Интервал (4.4) называется **доверительным интервалом** и является интервальной оценкой параметра Θ .

Существует 2 вида интервальных оценок: **односторонние и двусторонние**. При двусторонней оценке задаются обе границы доверительного интервала, зависящие от доверительной вероятности γ : левая $\beta_1(\gamma)$ и правая $\beta_2(\gamma)$.

$$P\{\beta_1(\gamma) < \Theta < \beta_2(\gamma)\} = p$$

Для одностороннего доверительного интервала границы интервалов задаются так, чтобы

$$P\{\Theta < \beta(\gamma)\} = \gamma \quad или \quad P\{\Theta > \beta(\gamma)\} = \gamma$$

Значение $q = 1 - \gamma$ называют уровнем значимости.

Значение γ задают обычно равным 0.95, 0.99, 0.995, 0.999.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания при известном СКВО

Пусть имеется выборка объема N значений нормально распределенной случайной величины X и известно значение $\sigma = \sigma(X)$.

Может быть вычислено $\overline{x}_в$ - выборочное среднее - статистическая оценка a - математического ожидания X .

Требуется определить доверительный интервал, покрывающий значение a с надежностью γ .

Как известно $\overline{x}_в$ является случайной величиной. Также известно, что если исследуемая выборка представлена значениями нормально распределенной случайной величины X, то $\overline{x}_в$ также распределена нормально.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания при известном СКВО

При этом параметры распределения $\overline{x}_в$ следующие:

$$M(\overline{x}_в) = a;\ \sigma(\overline{x}_в) = \sigma / \sqrt{N}, \qquad (4.5)$$

где: $a = M(X)$; $\sigma = \sigma(X)$; N – объем выборки.

Для построения доверительного интервала для параметра a, потребуем выполнение соотношения:

$$P\left\{\left|\overline{x}_в - a\right| < \delta\right\} = \gamma \qquad (4.6)$$

Для нормально распределенной случайной величины справедливо соотношение:

$$P\left\{\left|X - a\right| < \delta\right\} = 2\Phi(\delta / \sigma), \qquad (4.7)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа. Значения этой нечетной функции затабулированы (см. таблицы Приложение 4).

Доверительный интервал для оценки математического ожидания при известном СКВО

Перепишем (4.7) применительно к решаемой задаче, заменяя X на $\overline{x}_в$ и σ на $\sigma(\overline{x}_в) = \sigma / \sqrt{N}$. Получим:

$$P\left\{\left|\overline{x}_в - a\right| < \delta\right\} = 2\Phi(\delta\sqrt{N} / \sigma) = 2\Phi(t),\ t = \delta\sqrt{N} / \sigma\ .$$

Представим δ в виде $\delta = t\sigma / \sqrt{N}$ и получим следующее соотношение:

$$P\left\{\left|\overline{x}_в - a\right| < t\sigma / \sqrt{N}\right\} = 2\Phi(t)$$

Окончательно имеем:

$$P\left\{\overline{x}_в - t\sigma / \sqrt{N} < a < \overline{x}_в + t\sigma / \sqrt{N}\right\} = 2\Phi(t) = \gamma$$

Доверительный интервал для оценки математического ожидания при неизвестном СКВО

Введем в рассмотрение случайную величину t.

$$t = \frac{\bar{x}_в - a}{S / \sqrt{N}} \qquad (4.8)$$

Эта случайная величина распределена по закону $S(t, N)$ - закону Стьюдента с k=N-1 степенями свободы. Это распределение не зависит от неизвестных значений a и σ. Поскольку функция $S(t, N)$ является четной, справедливо соотношение:

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}_в - a}{S / \sqrt{N}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int_0^{t_\gamma} S(t, N)dt = \gamma \qquad (4.9)$$

Доверительный интервал для оценки математического ожидания при неизвестном СКВО

Перепишем (4.9) в виде:

$$P\left(\bar{x}_в - t_\gamma S / \sqrt{N} < a < \bar{x}_в + t_\gamma S / \sqrt{N}\right) = \gamma$$

В результате требуемый доверительный интервал, покрывающий неизвестное значение параметра a с надежностью γ построен:

$$\left(\bar{x}_в - t_\gamma S / \sqrt{N}, \bar{x}_в + t_\gamma S / \sqrt{N}\right) \qquad (4.10)$$

Здесь значение t_γ может быть определено по заданным значениям γ и N по соответствующей таблице (см. таблицу в Приложении 6).

В заключение следует отметить, что при неограниченном возрастании N распределение Стьюдента асимптотически стремится к нормальному распределению.

12

Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения (СКВО)

Пусть имеется выборка объема N значений нормально распределенной случайной величины X.

Может быть вычислен S - «исправленное» выборочное СКВО - статистическая оценка σ - СКВО случайной величины X.

Требуется построить доверительный интервал, покрывающий с надежностью γ неизвестное значение параметра σ.

Запишем соотношение: $P\left(\left|S-\sigma\right|<\delta\right)=\gamma$ и равносильное ему:

$$P\left(S-\delta<\sigma<S+\delta\right)=\gamma \qquad (4.11)$$

13

Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения (СКВО)

Проведем преобразование двойного неравенства

$$S-\delta<\sigma<S+\delta$$

к виду:

$$S(1-\delta/S)<\sigma<S(1+\delta/S)$$

Введем обозначение: $q=\delta/S$. Получим:

$$S(1-q)<\sigma<S(1+q)$$

Предполагая $q<1$, перепишем последнее неравенство в виде:

$$\frac{1}{S(1+q)}<\frac{1}{\sigma}<\frac{1}{S(1-q)}$$

Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения (СКВО)

Умножим последнее неравенство на $S\sqrt{N-1}$:

$$\frac{\sqrt{N-1}}{(1+q)} < \frac{S\sqrt{N-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{N-1}}{(1-q)} \qquad (4.12)$$

Введем в рассмотрение случайную величину

$$\chi = \frac{S\sqrt{N-1}}{\sigma},$$

Функция плотности вероятности $R(\chi, N)$ распределения случайной величины χ зависит только от N.

Двойное неравенство (4.12) перепишется в виде:

$$\frac{\sqrt{N-1}}{(1+q)} < \chi < \frac{\sqrt{N-1}}{(1-q)} \qquad (4.13)$$

Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения (СКВО)

Потребуем, чтобы вероятность выполнения двойного неравенства (4.13) равнялась γ. Для этого должно выполняться условие:

$$\int_{\sqrt{N-1}/(1+q)}^{\sqrt{N-1}/(1-q)} R(\chi, N)\, d\chi = \gamma \qquad (4.14)$$

Значение q, при котором, при заданных значениях γ и N, уравнение (4.14) выполняется, может быть определено по соответствующей таблице (см. таблицу Приложения 7).

В результате требуемый доверительный интервал $\left(S(1-q), S(1+q)\right)$, покрывающий неизвестное значение параметра σ с надежностью γ, будет построен.

16

Статистические гипотезы

Статистической гипотезой называют гипотезу о виде неизвестного распределения исследуемой случайной величины или о значении параметров известных распределений.

Например, статистическими гипотезами являются утверждения:

- генеральная совокупность распределена по нормальному закону распределения;
- математическое ожидание случайной величины не равно нулю.

С другой стороны гипотеза о том, что на Венере нет жизни статистической не является.

Проверка статистических гипотез является инструментом принятия статистических решений, позволяющих с нужной вероятностью сделать выводы о параметрах генеральной совокупности по выборке соответствующих экспериментальных данных.

17

Статистические гипотезы

Выдвинутую гипотезу называют **нулевой или основной гипотезой и обозначают** H_0.

Конкурирующей или альтернативной называют гипотезу H_1 , которая противоречит основной гипотезе.

Различают **простые гипотезы** (содержат только одно предположение) и **сложные гипотезы** (содержат более одного предположения).

Выдвинутые статистические гипотезы могут быть верны или не верны. Поэтому возникает необходимость их проверки. При проверке могут иметь место ошибки первого и второго рода.

Ошибка первого рода состоит в том, что нулевая гипотеза отвергается, хотя она верна.

Ошибка второго рода состоит в том, что нулевая гипотеза принимается, хотя она неверна.

Вероятность совершения ошибки первого рода называют уровнем значимости и обозначают через α . Как правило, **уровень значимости** назначают равным от 0.001 до 0.2.

Статистические гипотезы

Гипотеза H_0	Решение	Вероятность	Примечание
Верна	Принимается	$1-a$	Доверительная вероятность
	Отвергается	a	Вероятность ошибки первого рода
Неверна	Принимается	β	Вероятность ошибки второго рода
	Отвергается	$1-\beta$	Мощность критерия

Статистические гипотезы

Величину $1-\beta$ - вероятность того, что гипотеза отвергается, когда она неверна, называют мощностью критерия.

Проверку статистической гипотезы проводят для принятого уровня значимости α.
Так если $\alpha = 0.05$, то это означает, что выдвинутая нулевая гипотеза может быть принята с доверительной вероятностью 1- α, равной 0.95. При этом есть вероятность, равная 0.05, совершить ошибку первого рода.

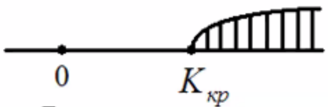
Следует отметить, что принятие гипотезы не означает ее справедливость, а лишь констатирует, что, в соответствии с используемым критерием и уровнем значимости, гипотеза согласуется с данными наблюдений.

Статистические гипотезы

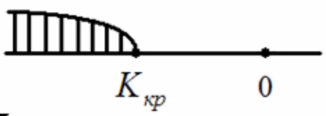
Для проверки статистических гипотез предлагаются различные критерии, которые представляют собой значения случайных величин, имеющих те или иные известные законы распределения.
При проверке статистических гипотез на основе выборочных данных вычисляются значения этих случайных величин (**наблюденные значения**), которые сопоставляются с некоторыми, так называемыми, **критическими** (зависящими от заданного уровня значимости α) **значениями** этих случайных величин.
На основании этого сопоставления принимается решение о принятии или не принятии нулевой гипотезы.
Областью принятия нулевой гипотезы называют совокупность значения критерия, при которых нулевую гипотезу принимают. **Критической областью** называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Статистические гипотезы

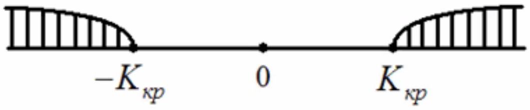
Область принятия гипотезы и критическая область разделены точками, которые называются **критическими значениями критерия** $K_{кр}$.
Для каждого критерия существуют таблицы критических значений или правила, по которым их можно рассчитать.
Область непринятия гипотезы может быть односторонней (правосторонней или левосторонней) и двусторонней.
Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K_{набл} > K_{кр}$.



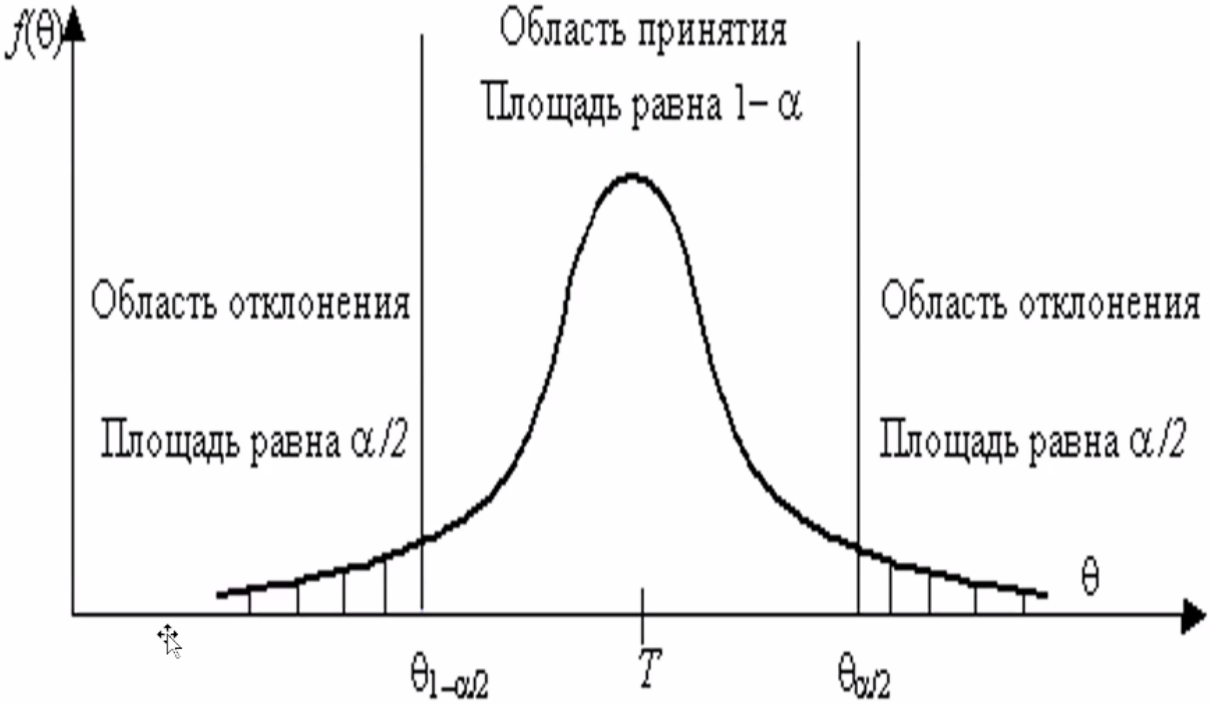
Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K_{набл} < K_{кр}$.



Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $K_{набл} < K_{кр1}$ и $K_{набл} > K_{кр2}$

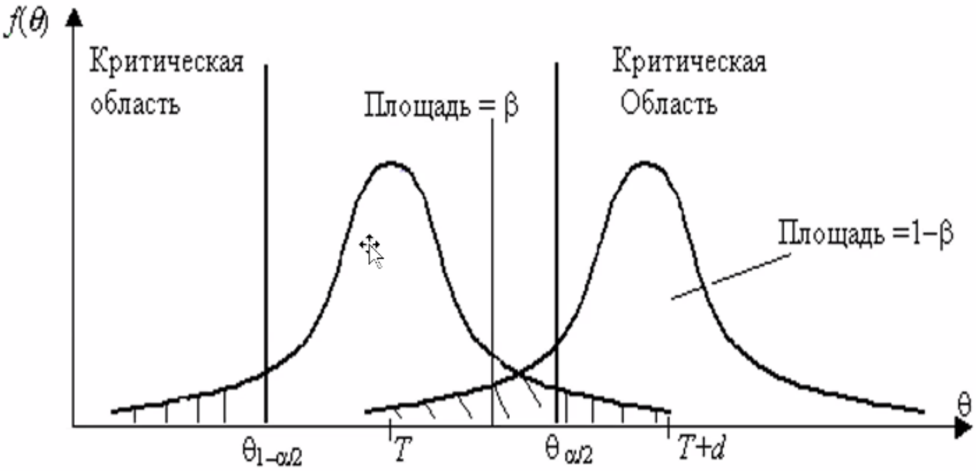


Статистические гипотезы



Статистические гипотезы

Пусть предполагается (гипотеза H_0), что значение параметра равно T, а на самом деле оно равно $T+d$.



При заданном объеме выборки вероятность совершения ошибки первого рода можно уменьшить, снижая уровень значимости *a*. Однако при этом увеличивается вероятность ошибки второго рода *b* (снижается мощность критерия).

Проверка статистической гипотезы о законе распределения

Рассмотрим этот вопрос на примере проверки статистической гипотезы о нормальном распределении случайной величины, представленной выборочными данными.

Пусть имеется выборка объемом N, представленная интервальным рядом с K интервалами:

Границы интервалов	Середины интервалов	Частота попадания в интервал	Относительная частота
$[x_i; x_{i+1})$	$\tilde{x}_i$	n_i	$\tilde{n}_i$

Проверка статистической гипотезы о законе распределения

Выдвигаем гипотезу H_0 - выборочные данные представляют значения случайной величины, распределенной по нормальному закону распределения.

В качестве критерия проверки гипотезы будем использовать так называемый критерий χ^2 или иначе - критерий Пирсона. Это правосторонний критерий.

Согласно этому критерию на основании выборочных данных вычисляется «наблюденное» значение случайной величины χ^2:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{K} \frac{(n_i - n_i')^2}{n'} \qquad (4.15)$$

Здесь n_i' - теоретические частоты - частоты, с которыми нормально распределенная величина с параметрами $\overline{x}_в$ и S попадала бы в i-й интервал интервального ряда при проведении N испытаний.

Проверка статистической гипотезы о законе распределения

Распределение случайной величины χ^2 при возрастании N асимптотически приближается к распределению хи-квадрат. В этой связи критерий Пирсона рекомендуют использовать при N>200, но допускается и при N>40. При этих условиях критерий как правило отвергает неверную гипотезу.

Распределение хи-квадрат зависит от числа степеней свободы k, которое в данном случае вычисляется по формуле:

$$k = K - 3 \tag{4.16}$$

По числу степеней свободы и уровню значимости вычисляется значение $\chi^2_{\text{крит}} = \chi^2(\alpha, k)$. Это значение можно определить из таблиц (см. таблицу Приложения 5)

Область принятия гипотезы H_0 определяется условием:

$$\chi^2_{\text{набл}} \le \chi^2_{\text{крит}} \tag{4.17}$$

Проверка статистической гипотезы о законе распределения

Здесь $\Phi(z)$ функция Лапласа: $\Phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Значения этой функции можно взять из таблицы Приложения 4. Нужно учитывать нечетность этой функции и то, что $\Phi(-\infty) = -0.5; \quad \Phi(+\infty) = 0.5$.

3. Вычислить значения «теоретических» частот:

$$n_i' = N \cdot p_i, i = 1, 2, 3, \ldots, K$$

Вычисления удобно представить в табличной форме:

x_i	x_{i+1}	n_i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	p_i	n_i'