МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №2

по дисциплине «Цифровая обработка сигналов»

Тема: Частотный анализ полиномиальных приближений

Студент гр. 7381	____________________	Вологдин М.Д.
Студент гр. 7381	____________________	Трушников А.П.
Преподаватель	____________________	Сучков А.И.

Санкт-Петербург
2020

Цель работы.

Анализ частотных характеристик известных формул полиномиального сглаживания временных рядов и формул численного интегрирования.

Основные теоретические положения.

В качестве временного ряда рассматривается дискретный сигнал с шагом дискретизации, равным единице.

Под полиномиальным сглаживанием понимается аппроксимация в смысле МНК значений конечного (нечетного) числа элементов сглаживаемого ряда полиномом заданного порядка с присвоением среднему из этих элементов значения сглаживающего полинома в центре выбранного временного отрезка. Такой подход соответствует так называемому сглаживанию в скользящем окне.

В качестве исследуемых формул численного интегрирования используются квадратурные формулы Ньютона-Котеса.

Постановка задачи.

Получить формулы для передаточных функций нерекурсивных фильтров, соответствующих полиномиальному сглаживанию дискретного сигнала для полиномов различного порядка и построить графики $\tilde{H}(f)$. Проинтерпретировать частотные свойства передаточных функций. Провести сопоставительный анализ частотных характеристик передаточных функций для различных степеней полиномов. Получить формулы для передаточных функций рекурсивных фильтров, соответствующих квадратурным формулам Ньютона-Котеса различного порядка. Проинтерпретировать частотные свойства передаточных функций. Провести сопоставительный анализ частотных характеристик передаточных функций для различных квадратурных формул.

Порядок выполнения работы.

1. Вывести формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию прямой линией по 3, 5, 7 и 9 точкам. Построить графики $\tilde{H}(f)$. Проинтерпретировать частотные свойства передаточных функций для различного количества точек.

2. Вывести формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию полиномом второй степени по 7, 9, 11 и 13 точкам. Построить графики $\tilde{H}(f)$. Проинтерпретировать частотные свойства передаточных функций для различного количества точек.

3. Вывести формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию полиномом четвёртой степени по 9, 11, 13 и 15 точкам. Построить графики $\tilde{H}(f)$. Проинтерпретировать частотные свойства передаточных функций для различного количества точек.

4. Вывести формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию по формулам Спенсера по 13, 15 и 21 точкам. Построить графики $\tilde{H}(f)$. Проинтерпретировать частотные свойства передаточных функций для различного количества точек.

5. Построить графики из предыдущих пунктов в логарифмической шкале (Дб). Объясните, чем отличаются данные графики от полученных ранее и объясните их смысл.

6. Провести сопоставительный анализ свойств передаточных функций, полученных при выполнении пп. 1-4.

7. Вывести формулы передаточных функций рекурсивных фильтров, соответствующих квадратурным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона. Построить графики передаточных функций и графики отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному. Проинтерпретировать частотные свойства полученных передаточных функций.

8. Вывести формулу передаточной функции рекурсивного фильтра, соответствующего квадратурной формуле:

$$y_{n+2} = y_{n-1} + \frac{1}{8}\left(x_{n+2} + 3x_{n+1} + 3x_n + x_{n-1}\right)$$

Построить график передаточной функции и график отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному. Проинтерпретировать частотные свойства передаточной функции.

9. Провести сопоставительный анализ частотных характеристик передаточных функций, полученных при выполнении пп. 7 и 8.

Ход работы.

Моделирование и построение графиков производилось с помощью программного пакета R. Исходный код представлен в приложении А.

1. Выведем формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию прямой линией:

Входной сигнал: $s(t)$

Выходной сигнал: $y(t) = A + Bt$

Приближение по МНК прямой линией по m точкам:

$$F(A,B) = \sum_{k=-m}^{m}\left(s_k - y_k\right)^2 = \sum_{k=-m}^{m}\left(s_k - A - Bk\right)^2 \Rightarrow \min \quad (1)$$

Посчитаем частные производные по А и В, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(A,B)}{\partial A} = 0 \\ \dfrac{\partial F(A,B)}{\partial B} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sum\limits_{k=-m}^{m}\left(s_k - A - Bk\right) = 0 \\ -2\sum\limits_{k=-m}^{m}\left(ks_k - kA - Bk^2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\sum\limits_{k=-m}^{m} s_k + \sum\limits_{k=-m}^{m} A + \sum\limits_{k=-m}^{m} Bk = 0 \\ -\sum\limits_{k=-m}^{m} ks_k + \sum\limits_{k=-m}^{m} kA + \sum\limits_{k=-m}^{m} Bk^2 = 0 \end{cases}$$

Тогда система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2m+1}\sum\limits_{k=-m}^{m} s_k \\ B = \dfrac{\sum\limits_{k=-m}^{m} k s_k}{\sum\limits_{k=-m}^{m} k^2} \end{cases} \tag{2}$$

В итоге получаем:

$$y_0 = A = \frac{1}{2m+1}\sum_{k=-m}^{m} s_k = \frac{1}{2m+1}\left(s_{-m} + s_{-m+1} + \ldots + s_{m-1} + s_m\right) \tag{3}$$

В общем случае:

$$y_n = \frac{1}{2m+1}\sum_{k=-m+n}^{m+n} s_k = \frac{1}{2m+1}\left(s_{-m+n} + s_{-m+1+n} + \ldots + s_{m-1+n} + s_{m+n}\right) \tag{4}$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

$$y_n = \frac{1}{2m+1}\left(e^{-mi\omega} + e^{(-m+1)i\omega} + \ldots + 1 + \ldots + e^{(m-1)i\omega} + e^{mi\omega}\right)e^{i\omega n} = H(\omega)e^{i\omega n} \tag{5}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2m+1}\left(e^{-mi\omega} + e^{(-m+1)i\omega} + \ldots + 1 + \ldots + e^{(m-1)i\omega} + e^{mi\omega}\right) \tag{6}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2m+1}\left(1 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega) + \ldots + 2\cos(m\omega)\right) \tag{7}$$

или

$$H(\omega) = \frac{\sin\left(\dfrac{(2m+1)\omega}{2}\right)}{(2m+1)\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)} \tag{8}$$

$$H(\omega) = H(2\pi f) = \tilde{H}(f) \tag{9}$$

Формула для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию прямой линией по 3 точкам:

$$\tilde{H}(f) = \frac{\sin(3\pi f)}{3\sin(\pi f)} \tag{10}$$

По 5 точкам:

$$\tilde{H}(f)=\frac{\sin(5\pi f)}{5\sin(\pi f)} \tag{11}$$

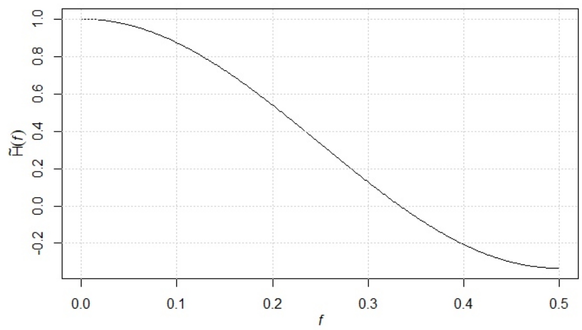
По 7 точкам:

$$\tilde{H}(f)=\frac{\sin(7\pi f)}{7\sin(\pi f)} \tag{12}$$

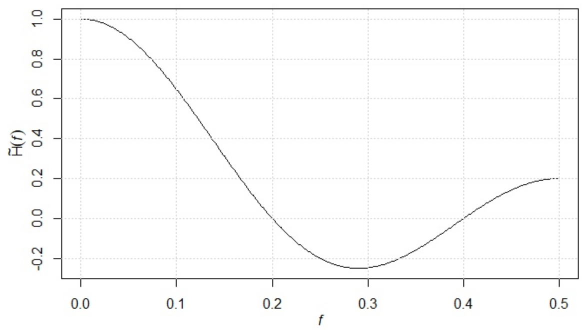
По 9 точкам:

$$\tilde{H}(f)=\frac{\sin(9\pi f)}{9\sin(\pi f)} \tag{13}$$

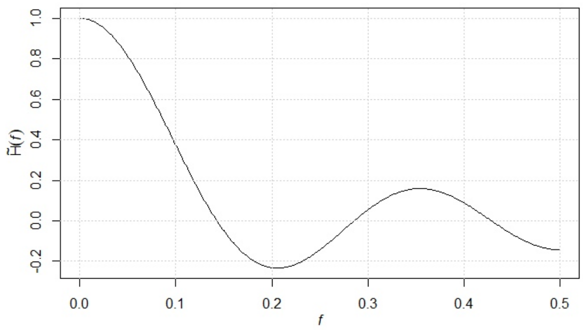
Графики для передаточных функций на интервале $f \in [0;0.5]$ представлены рис. 1.



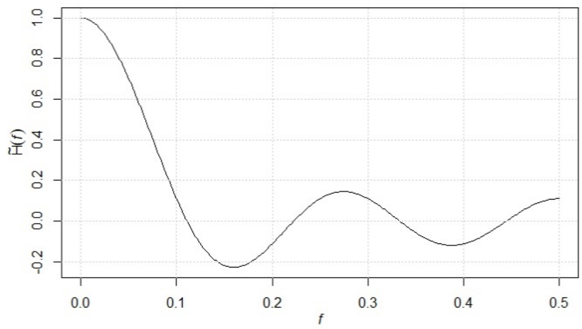
a



b



c



d

Рисунок 1 – Графики передаточной функции при сглаживании прямой линией по 3(a), 5(b), 7(c) и 9(d) точкам

2. Выведем формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию полиномом второй степени:

Входной сигнал: $s(t)$

Выходной сигнал: $y(t) = A + Bt + Ct^2$

Приближение по МНК прямой линией по m точкам:

$$F(A,B,C) = \sum_{k=-m}^{m} \left(s_k - y_k\right)^2 = \sum_{k=-m}^{m} \left(s_k - A - Bk - Ck^2\right)^2 \Rightarrow \min \tag{14}$$

Посчитаем частные производные по A и B, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(A,B,C)}{\partial A} = 0 \\ \dfrac{\partial F(A,B,C)}{\partial C} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sum\limits_{k=-m}^{m} \left(s_k - A - Bk - Ck^2\right) = 0 \\ -2\sum\limits_{k=-m}^{m} \left(k^2 s_k - k^2 A - Bk^3 - Ck^4\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\sum\limits_{k=-m}^{m} s_k + \sum\limits_{k=-m}^{m} A + \sum\limits_{k=-m}^{m} Bk + \sum\limits_{k=-m}^{m} Ck^2 = 0 \\ -\sum\limits_{k=-m}^{m} k^2 s_k + \sum\limits_{k=-m}^{m} k^2 A + \sum\limits_{k=-m}^{m} Bk^3 + \sum\limits_{k=-m}^{m} Ck^4 = 0 \end{cases}$$

Система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} (2m+1)A + \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{3} C = \sum\limits_{k=-m}^{m} s_k \\ \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{3} A + \dfrac{m(m+1)(2m+1)\left(3m^2+3m-1\right)}{15} C = \sum\limits_{k=-m}^{m} k^2 s_k \end{cases} \tag{15}$$

Подставим $\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{3} C$ во второе уравнение:

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{3} A + \frac{\left(3m^2+3m-1\right)}{5} \left(\sum_{k=-m}^{m} s_k - (2m+1) A \right) = \sum_{k=-m}^{m} k^2 s_k \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{m(m+1)(2m+1)}{3} - \frac{\left(3m^2+3m-1\right)(2m+1)}{5} \right) A = \sum_{k=-m}^{m} k^2 s_k - \frac{\left(3m^2+3m-1\right)}{5} \sum_{k=-m}^{m} s_k$$

Тогда:

$$A=\frac{\sum_{k=-m}^{m}k^2s_k-\frac{\left(3m^2+3m-1\right)}{5}\sum_{k=-m}^{m}s_k}{\left(\frac{m\left(m+1\right)\left(2m+1\right)}{3}-\frac{\left(3m^2+3m-1\right)\left(2m+1\right)}{5}\right)}$$

В итоге получаем:

$$y_0=A=\frac{\sum_{k=-m}^{m}k^2s_k-\frac{\left(3m^2+3m-1\right)}{5}\sum_{k=-m}^{m}s_k}{\left(\frac{m\left(m+1\right)\left(2m+1\right)}{3}-\frac{\left(3m^2+3m-1\right)\left(2m+1\right)}{5}\right)} \tag{16}$$

Для 7 точек:

$$y_0=\frac{\sum_{k=-3}^{3}k^2s_k-7\sum_{k=-3}^{3}s_k}{\left(28-49\right)}=\frac{1}{21}\left(7\sum_{k=-2}^{2}s_k-\sum_{k=-2}^{2}k^2s_k\right)=$$

$$=\frac{1}{21}\left(7\left(s_{-3}+s_{-2}+s_{-1}+s_0+s_1+s_2+s_3\right)-\left(9s_{-3}+4s_{-2}+s_{-1}+s_1+4s_2+9s_3\right)\right)$$

$$y_0=\frac{1}{21}\left(-2s_{-3}+3s_{-2}+6s_{-1}+7s_0+6s_1+3s_2-2s_{-3}\right) \tag{17}$$

В общем случае:

$$y_n=\frac{1}{21}\left(-2s_{n-3}+3s_{n-2}+6s_{n-1}+7s_n+6s_{n+1}+3s_{n+2}-2s_{n+3}\right) \tag{18}$$

$$s_n=e^{i\omega n}$$

$$y_n=\frac{1}{21}\left(-2e^{-3i\omega}+3e^{-2i\omega}+6e^{-i\omega}+7+6e^{i\omega}+3e^{2i\omega}-2e^{3i\omega}\right)e^{i\omega n}=H\left(\omega\right)e^{i\omega n} \tag{19}$$

$$H\left(\omega\right)=\frac{1}{21}\left(-2e^{-3i\omega}+3e^{-2i\omega}+6e^{-i\omega}+7+6e^{i\omega}+3e^{2i\omega}-2e^{3i\omega}\right) \tag{20}$$

$$H\left(\omega\right)=\frac{1}{21}\left(7+12\cos\left(\omega\right)+6\cos\left(2\omega\right)-4\cos\left(3\omega\right)\right) \tag{21}$$

$$H\left(\omega\right)=H\left(2\pi f\right)=\tilde{H}\left(f\right) \tag{22}$$

$$\tilde{H}(f)=\frac{1}{21}\left(7+12\cos(2\pi f)+6\cos(4\pi f)-4\cos(6\pi f)\right) \tag{23}$$

Аналогично посчитаем для 9, 11, 13 точек.

Формула для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию полиномом второй степени по 9 точкам:

$$\tilde{H}(f)=\frac{1}{231}(59+108\cos(2\pi f)+78\cos(4\pi f)+28\cos(6\pi f)-$$
$$-42\cos(8\pi f)) \tag{24}$$

По 11 точкам:

$$\tilde{H}(f)=\frac{1}{429}(89+168\cos(2\pi f)+138\cos(4\pi f)+88\cos(6\pi f)+$$
$$+18\cos(8\pi f)-72\cos(10\pi f)) \tag{25}$$

По 13 точкам:

$$\tilde{H}(f)=\frac{1}{143}(25+48\cos(2\pi f)+42\cos(4\pi f)+32\cos(6\pi f)+$$
$$+18\cos(8\pi f)-22\cos(10\pi f)) \tag{26}$$

Графики для передаточных функций на интервале $f\in[0;0.5]$ представлены рис. 2.

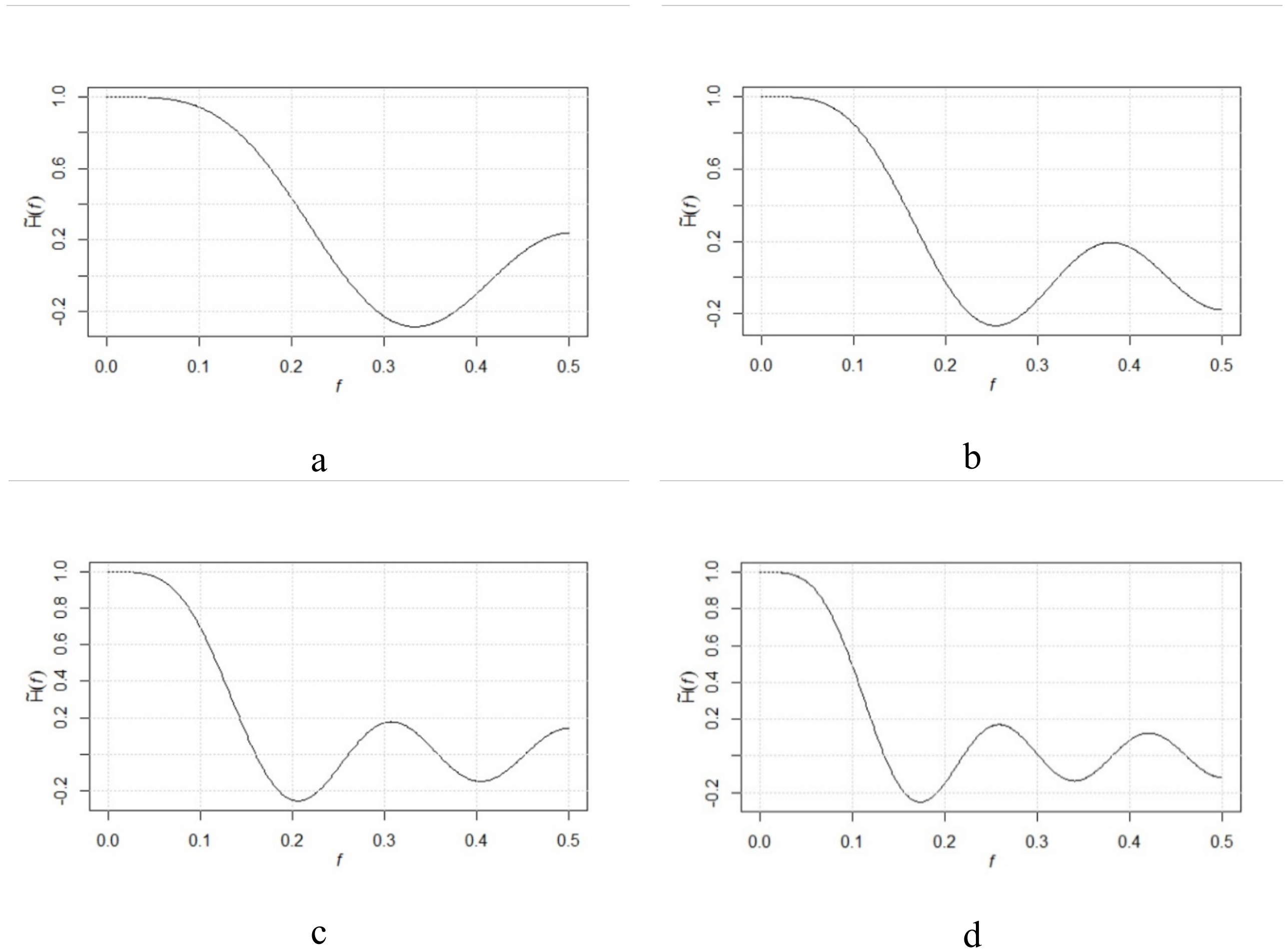


Рисунок 2 – Графики передаточной функции при сглаживании полиномом второй степени по 7(a), 9(b), 11(c) и 13(d) точкам

3. Выведем формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию полиномом четвертой степени:

Входной сигнал: $s(t)$

Выходной сигнал: $y(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4$

Приближение по МНК прямой линией по m точкам:

$$F(A,B,C) = \sum_{k=-m}^{m} (s_k - y_k)^2 = \sum_{k=-m}^{m} \left(s_k - A - Bt - Ct^2 - Dt^3 - Et^4\right)^2 \Rightarrow \min \quad (27)$$

Посчитаем частные производные по A, C и E, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(A,B,C,D,E)}{\partial A} = 0 \\ \dfrac{\partial F(A,B,C,D,E)}{\partial C} = 0 \\ \dfrac{\partial F(A,B,C,D,E)}{\partial E} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sum\limits_{k=-m}^{m}\left(s_k - A - Bk - Ck^2 - Dk^3 - Ek^4\right) = 0 \\ -2\sum\limits_{k=-m}^{m}\left(k^2 s_k - k^2 A - Bk^3 - Ck^4 - Dk^5 - Ek^6\right) = 0 \\ -2\sum\limits_{k=-m}^{m}\left(k^4 s_k - k^4 A - Bk^5 - Ck^6 - Dk^7 - Ek^8\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\sum\limits_{k=-m}^{m} s_k + \sum\limits_{k=-m}^{m} A + \sum\limits_{k=-m}^{m} Bk + \sum\limits_{k=-m}^{m} Ck^2 + \sum\limits_{k=-m}^{m} Dk^3 + \sum\limits_{k=-m}^{m} Ek^4 = 0 \\ -\sum\limits_{k=-m}^{m} k^2 s_k + \sum\limits_{k=-m}^{m} k^2 A + \sum\limits_{k=-m}^{m} Bk^3 + \sum\limits_{k=-m}^{m} Ck^4 + \sum\limits_{k=-m}^{m} Dk^5 + \sum\limits_{k=-m}^{m} Ek^6 = 0 \\ -\sum\limits_{k=-m}^{m} k^4 s_k + \sum\limits_{k=-m}^{m} k^4 A + \sum\limits_{k=-m}^{m} Bk^5 + \sum\limits_{k=-m}^{m} Ck^6 + \sum\limits_{k=-m}^{m} Dk^7 + \sum\limits_{k=-m}^{m} Ek^8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\sum\limits_{k=-m}^{m} s_k + \sum\limits_{k=-m}^{m} A + \sum\limits_{k=-m}^{m} Ck^2 + \sum\limits_{k=-m}^{m} Ek^4 = 0 \\ -\sum\limits_{k=-m}^{m} k^2 s_k + \sum\limits_{k=-m}^{m} k^2 A + \sum\limits_{k=-m}^{m} Ck^4 + \sum\limits_{k=-m}^{m} Ek^6 = 0 \\ -\sum\limits_{k=-m}^{m} k^4 s_k + \sum\limits_{k=-m}^{m} k^4 A + \sum\limits_{k=-m}^{m} Ck^6 + \sum\limits_{k=-m}^{m} Ek^8 = 0 \end{cases}$$

Система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} A(1+2m) + \frac{1}{3}C\cdot m(1+m)(1+2m) + \frac{1}{15}F\cdot m(1+m)(1+2m)\left(3m^2+3m-1\right) = \sum\limits_{k=-m}^{m} s_k \\ \frac{1}{3}A\cdot m(1+m)(1+2m) + \frac{1}{15}C\cdot m(1+m)(1+2m)\left(3m^2+3m-1\right) + \\ +\frac{1}{21}F\cdot m(1+m)(1+2m)\left(1-3m+6m^3+3m^4\right) = \sum\limits_{k=-m}^{m} k^2 s_k \\ \frac{1}{15}A\cdot m(1+m)(1+2m)\left(3m^2+3m-1\right) + \frac{1}{21}C\cdot m(1+m)(1+2m)\left(1-3m+6m^3+3m^4\right) + \\ +\frac{1}{45}C\cdot m(1+m)(1+2m)\left(-3+9m-m^2-15m^3+5m^4+15m^5+5m^6\right) = \sum\limits_{k=-m}^{m} k^4 s_k \end{cases} \tag{28}$$

Выразим С из первого уравнения системы нормальных уравнении:

$$C = \frac{-15A - 30A\cdot m + E\cdot m - 10E\cdot m^3 - 15E\cdot m^4 - 6E\cdot m^5 + 15\sum\limits_{k=-m}^{m} s_k}{5m(1+m)(1+2m)}$$

Подставим теперь C во второе и третье уравнение:

$$\begin{cases} \frac{1}{525}\left(-3-2m+12m^2+8m^3\right)\left(-35A+3E\cdot m\left(-2-m+2m^2+m^3\right)\right)+ \\ +\frac{1}{5}\left(-1+3m+3m^2\right)\sum_{k=-m}^{m}s_k=\sum_{k=-m}^{m}k^2s_k \\ -\frac{1}{315}\left(-3-2m+12m^2+8m^3\right)(3A\left(-5+6m+6m^2\right)+ \\ +Em\left(-6+m+12m^2+m^3-6m^4-2m^5\right))+\frac{1}{7}\left(1-3m+6m^3+3m^4\right)\sum_{k=-m}^{m}s_k=\sum_{k=-m}^{m}k^4s_k \end{cases}$$

Выразим из 2 уравнения E и подставим в 3 уравнение

$$\begin{cases} E=\frac{35\left(A\left(-3-2m+12m^2+8m^3\right)+\left(3-9m-9m^2\right)\sum\limits_{k=-m}^{m}s_k+15\sum\limits_{k=-m}^{m}k^2s_k\right)}{3m\left(-2-m+2m^2+m^3\right)\left(-3-2m+12m^2+8m^3\right)} \\ 4A\left(45+18m-200m^2-80m^3+80m^4+32m^5\right)- \\ -15\left(12-50m-35m^2+30m^3+15m^4\right)\sum_{k=-m}^{m}s_k+ \\ +525\left(-3+2m+2m^2\right)\sum_{k=-m}^{m}k^2s[k]=945\sum_{k=-m}^{m}k^4s_k \end{cases}$$

И выразим из 3 уравнения A:

$$A=\frac{15\left(12+5m\left(1+m\right)\left(-10+3m\left(1+m\right)\right)\right)\sum\limits_{k=-m}^{m}s_k}{4\left(-3+2m\right)\left(-1+2m\right)\left(1+2m\right)\left(3+2m\right)\left(5+2m\right)}-$$
$$-\frac{15\cdot\left(35\left(-3+2m\left(1+m\right)\right)\sum\limits_{k=-m}^{m}k^2s_k-63\sum\limits_{k=-m}^{m}k^4s_k\right)}{4\left(-3+2m\right)\left(-1+2m\right)\left(1+2m\right)\left(3+2m\right)\left(5+2m\right)}$$

В итоге получаем:

$$y_0=A=\frac{15\left(12+5m\left(1+m\right)\left(-10+3m\left(1+m\right)\right)\right)\sum\limits_{k=-m}^{m}s_k}{4\left(-3+2m\right)\left(-1+2m\right)\left(1+2m\right)\left(3+2m\right)\left(5+2m\right)}-$$
$$-\frac{15\cdot\left(35\left(-3+2m\left(1+m\right)\right)\sum\limits_{k=-m}^{m}k^2s_k-63\sum\limits_{k=-m}^{m}k^4s_k\right)}{4\left(-3+2m\right)\left(-1+2m\right)\left(1+2m\right)\left(3+2m\right)\left(5+2m\right)} \tag{29}$$

Для 9 точек:

$$y_0 = A = \frac{1}{429}\left(179\sum_{k=-4}^{4} s_k - \frac{1}{4}\left(185\sum_{k=-4}^{4} k^2 s_k - 9\sum_{k=-4}^{4} k^4 s_k\right)\right)$$

$$y_0 = \frac{1}{429}\left(15s_{-4} - 55s_{-3} + 30s_{-2} + 135s_{-1} + 179s_0 + 135s_1 + 30s_2 - 55s_3 + 15s_4\right) \quad (30)$$

В общем случае:

$$\begin{aligned} y_n = \frac{1}{429}(&15s_{n-4} - 55s_{n-3} + 30s_{n-2} + 135s_{n-1} + \\ &+179s_n + 135s_{n+1} + 30s_{n+2} - 55s_{n+3} + 15s_{n+4}) \end{aligned} \quad (31)$$

$s_n = e^{i\omega n}$

$$\begin{aligned} y_n = \frac{1}{429}(&15e^{-4i\omega} - 55e^{-3i\omega} + 30e^{-2i\omega} + 135e^{-i\omega} + \\ &+179 + 135e^{i\omega} + 30e^{2i\omega} - 55e^{3i\omega} + 15e^{4i\omega})e^{i\omega n} = H(\omega)e^{i\omega n} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} H(\omega) = \frac{1}{429}(&15e^{-4i\omega} - 55e^{-3i\omega} + 30e^{-2i\omega} + 135e^{-i\omega} + \\ &+179 + 135e^{i\omega} + 30e^{2i\omega} - 55e^{3i\omega} + 15e^{4i\omega}) \end{aligned} \quad (33)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{429}\left(179 + 270\cos(\omega) + 60\cos(2\omega) - 110\cos(3\omega) + 30\cos(4\omega)\right) \quad (34)$$

$$H(\omega) = H(2\pi f) = \tilde{H}(f) \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}(f) = \frac{1}{429}(&179 + 270\cos(2\pi f) + 60\cos(4\pi f) - \\ &-110\cos(6\pi f) + 30\cos(8\pi f)) \end{aligned} \quad (36)$$

Аналогично посчитаем для 11, 13, 15 точек.

Формула для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию полиномом четвертой степени по 11 точкам:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(f) = \frac{1}{429}(&143 + 240\cos(2\pi f) + 120\cos(4\pi f) - 20\cos(6\pi f) - \\ &-90\cos(8\pi f) + 36\cos(10\pi f)) \end{aligned} \quad (37)$$

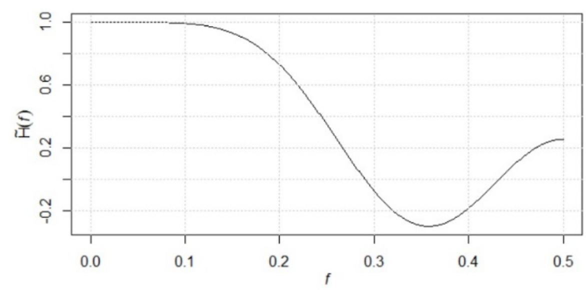
По 13 точкам:

$$\tilde{H}(f)=\frac{1}{2431}(677+1200\cos(2\pi f)+780\cos(4\pi f)+220\cos(6\pi f)-$$
$$-270\cos(8\pi f)-396\cos(10\pi f)+220\cos(12\pi f)) \tag{38}$$

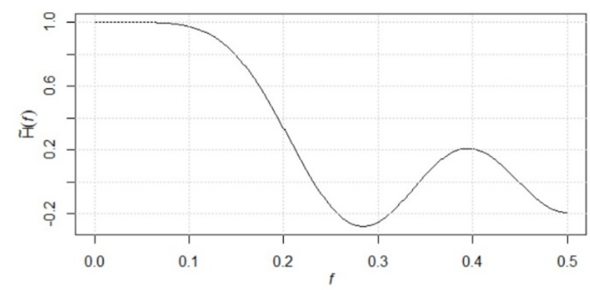
По 15 точкам:

$$\tilde{H}(f)=\frac{1}{46189}(11063+20250\cos(2\pi f)+15000\cos(4\pi f)+$$
$$+7510\cos(6\pi f)-330\cos(8\pi f)-5874\cos(10\pi f)-5720\cos(12\pi f)+ \tag{39}$$
$$+4290\cos(14\pi f))$$

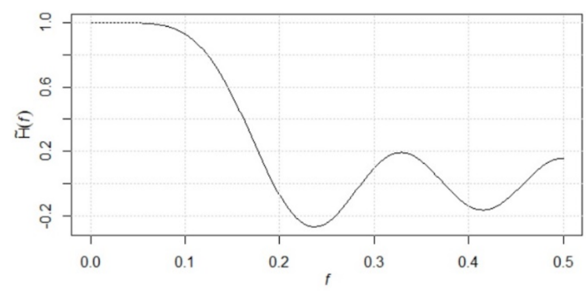
Графики для передаточных функций на интервале $f\in[0;0.5]$ представлены рис. 3.



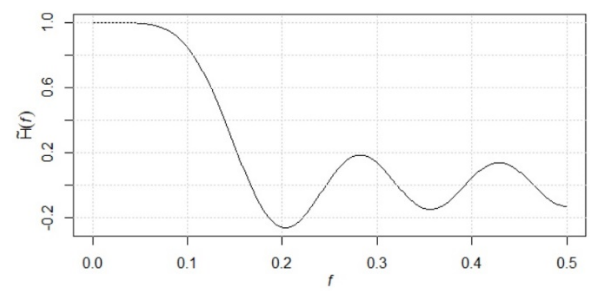
a



b



c



d

Рисунок 3 – Графики передаточной функции при сглаживании полиномом четвертой степени по 9(a), 11(b), 13(c) и 15(d) точкам

4. Выведем формулы для передаточной функции нерекурсивного фильтра, соответствующего сглаживанию по формулам Спенсера.

Формулы сглаживания Спенсера для 15 и 21 точек:

$$y_n = \frac{1}{320}(-3s_{n-7} - 6s_{n-6} - 5s_{n-5} + 3s_{n-4} + 21s_{n-3} + 46s_{n-2} + 67s_{n-1} + \\ +74s_n + 67s_{n+1} + 46s_{n+2} + 21s_{n+3} + 3s_{n+4} - 5s_{n+5} - 6s_{n+6} - 3s_{n+7}) \quad (40)$$

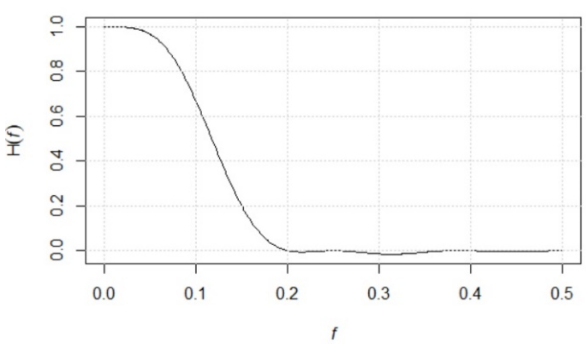
$$y_n = \frac{1}{350}(-s_{n-10} - 3s_{n-9} - 5s_{n-8} - 5s_{n-7} - 2s_{n-6} + 6s_{n-5} + 18s_{n-4} + \\ +33s_{n-3} + 47s_{n-2} + 57s_{n-1} + 60s_n + 57s_{n+1} + 47s_{n+2} + 33s_{n+3} + \\ +18s_{n+4} + 6s_{n+5} - 2s_{n+6} - 5s_{n+7} - 5s_{n+8} - 3s_{n+9} - s_{n+10}) \quad (41)$$

Соответствующие передаточные функции:

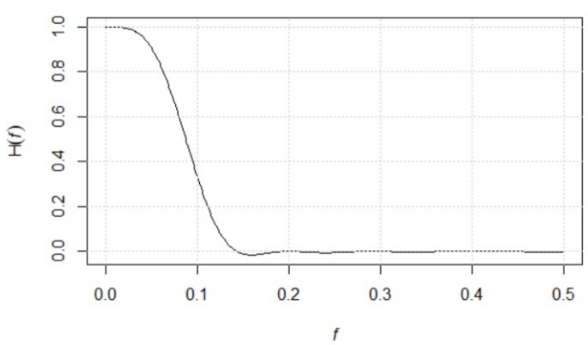
$$\tilde{H}(f) = \frac{1}{320}(74 + 134\cos(2\pi f) + 92\cos(4\pi f) + 42\cos(6\pi f) + \\ +6\cos(8\pi f) - 10\cos(10\pi f) - 12\cos(12\pi f) - 6\cos(14\pi f)) \quad (42)$$

$$\tilde{H}(f) = \frac{1}{350}(60 + 114\cos(2\pi f) + 94\cos(4\pi f) + 66\cos(6\pi f) + \\ +36\cos(8\pi f) + 12\cos(10\pi f) - 4\cos(12\pi f) - 10\cos(14\pi f) - \\ -10\cos(16\pi f) - 6\cos(18\pi f) - 2\cos(20\pi f)) \quad (43)$$

Графики для передаточных функций на интервале $f \in [0; 0.5]$ представлены рис. 4.



c



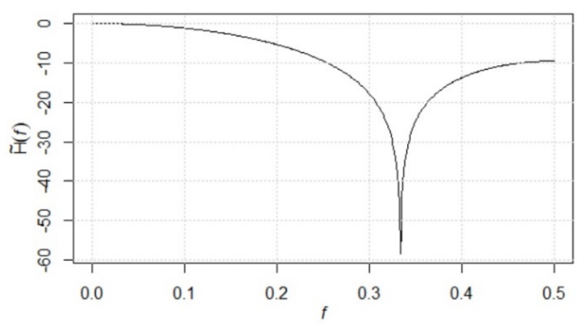
d

Рисунок 4 – Графики передаточной функции при сглаживании по формулам Спенсера по 15(a), 21(b) точкам

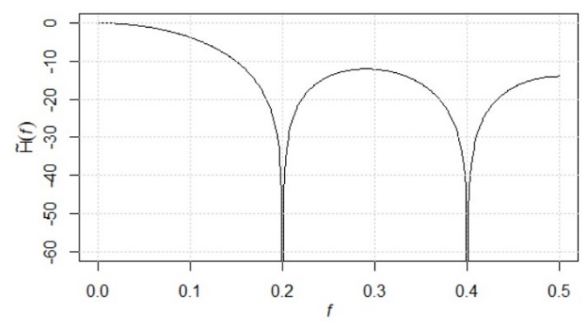
5.	Построим графики из предыдущих пунктов в логарифмической шкале (дБ). Графики представлены на рис. 5-8

Кривые, построенные ранее, недостаточно информативны, так как значения на высоких частотах настолько малы, что невозможно решить насколько они хороши. Поэтому лучше использовать логарифмы чисел $H(\omega)$. Для этой цели используются децибелы:

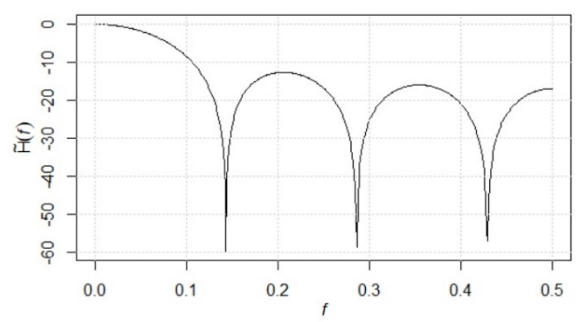
$$\text{\textit{Значение в дБ}} = 20\lg\left(\frac{|y_n|}{|s_n|}\right) \tag{44}$$



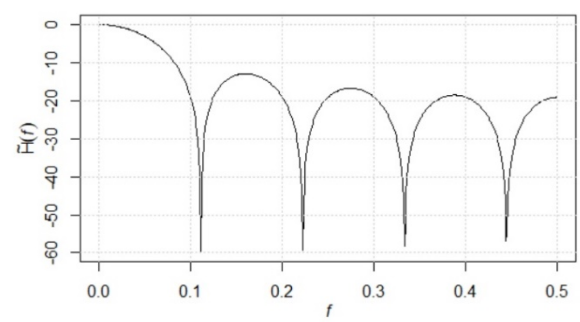
a



b

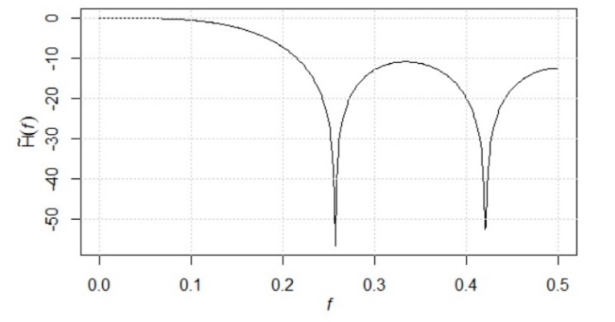


c

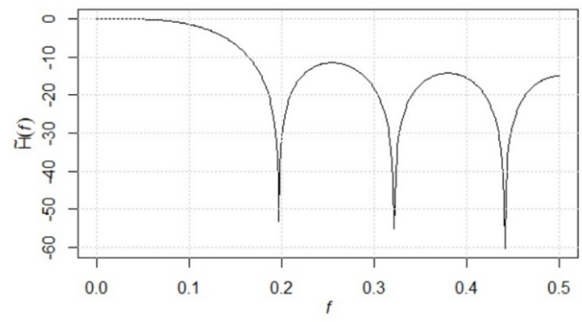


d

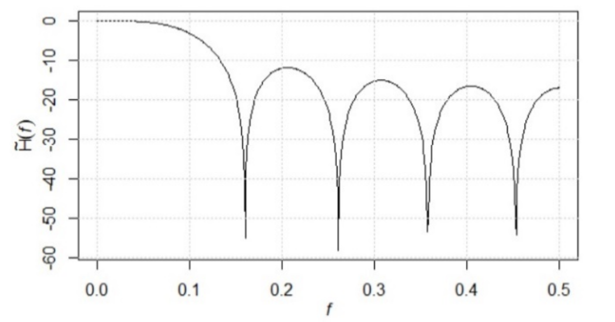
Рисунок 5 – Графики передаточной функции при сглаживании прямой линией по 3(a), 5(b), 7(c) и 9(d) точкам в логарифмической шкале.



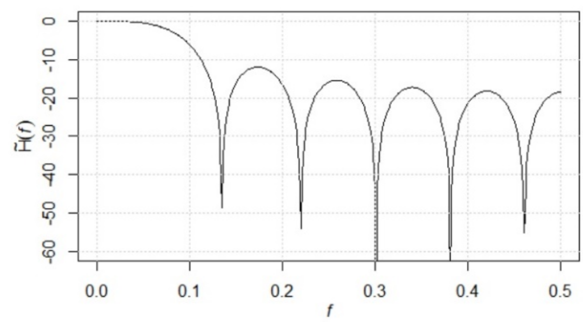
a



b

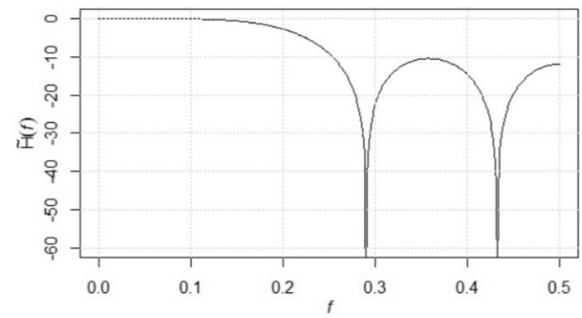


c

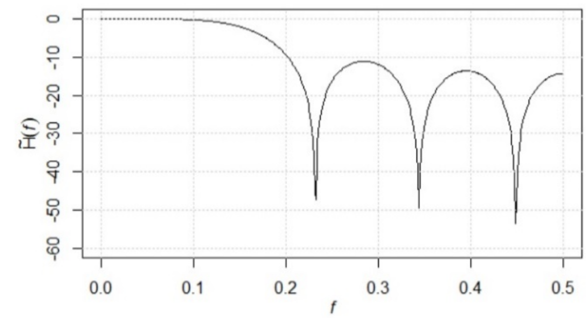


d

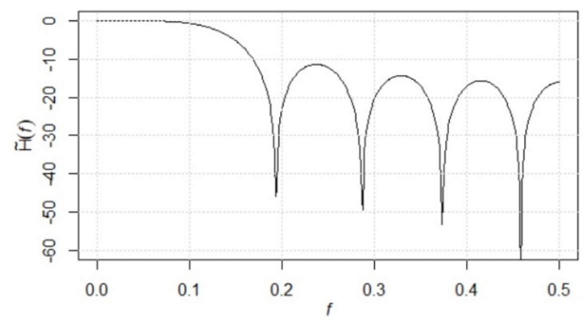
Рисунок 6 – Графики передаточной функции при сглаживании полиномом второй степени по 7(a), 9(b), 11(c) и 13(d) точкам в логарифмической шкале.



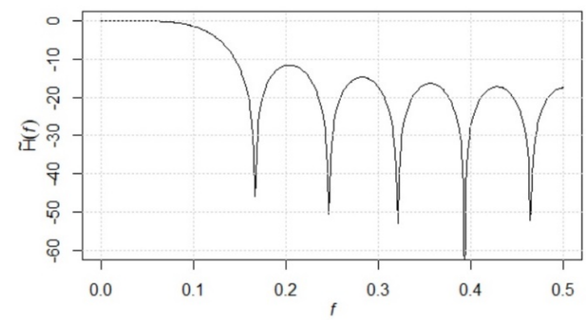
a



b

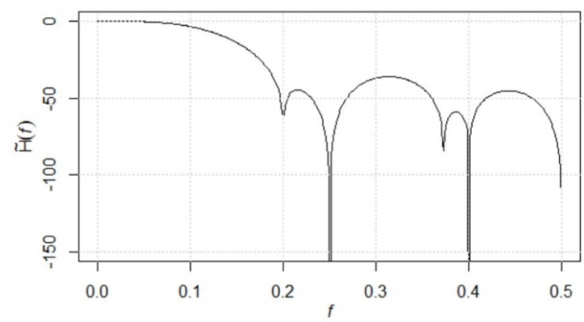


c

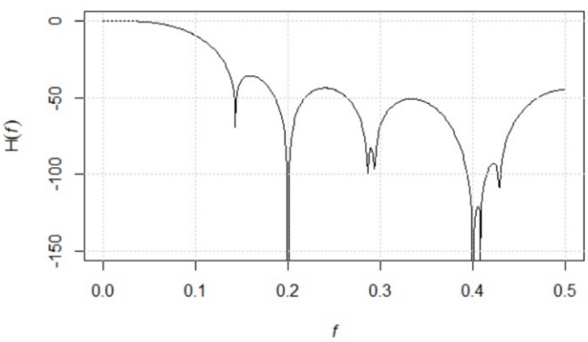


d

Рисунок 7 – Графики передаточной функции при сглаживании полиномом четвертой степени по 9(a), 11(b), 13(c) и 15(d) точкам в логарифмической шкале.



a



b

Рисунок 8 – Графики передаточной функции при сглаживании по формулам Спенсера по 15(a), 21(b) точкам в логарифмической шкале.

6. Проведем сопоставительный анализ свойств передаточных функций, полученных при выполнении пп. 1-4.

Были получены графики (рис. 1-4) передаточных функций нерекурсивных фильтров, соответствующих сглаживанию прямой линией, полиномом второй степени, полиномом четвёртой степени и формулам Спенсера. Графики соответствуют ожиданиям.

7. Выведем формулы передаточных функций рекурсивных фильтров, соответствующих квадратурным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Формула прямоугольников:

$$y_{n+1} = y_n + s_{n+\frac{1}{2}},\ y_0 = 0 \tag{45}$$

Пусть $s_n = e^{i\omega n}$ и $y_n = H(\omega)e^{i\omega n}$, тогда:

$$\begin{cases} y_{n+1} = H(\omega)e^{i\omega n} + e^{i\omega(n+0.5)} \\ y_{n+1} = H(\omega)e^{i\omega(n+1)} \end{cases}$$

$$H(\omega)\left(e^{i\omega n}e^{i\omega}\right) = H(\omega)e^{i\omega n} + e^{i\omega n}e^{0.5i\omega}$$

$$H(\omega)\left(e^{i\omega n}e^{i\omega} - e^{i\omega n}\right) = e^{i\omega n}e^{0.5i\omega}$$

$$H(\omega)\left(e^{i\omega} - 1\right) = e^{0.5i\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{e^{\frac{i\omega}{2}} - e^{-\frac{i\omega}{2}}} = \frac{1}{2i\sin\frac{\omega}{2}} \tag{46}$$

$$\tilde{H}(f) = \frac{1}{2i\sin\pi f} \tag{47}$$

Точное значение интеграла $e^{i\omega t}$ равно $\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}$, тогда отношение значений:

$$\gamma = \frac{\textit{Вычисленное}}{\textit{Точное}} = \frac{i\omega}{2i\sin\frac{\omega}{2}} = \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} = 1 + \frac{x^2}{24} + \frac{7x^4}{5760} + \dots \tag{48}$$

$$\gamma = \frac{\pi f}{\sin \pi f} = 1 + \frac{\pi^2 f^2}{6} + \frac{7\pi^4 f^4}{360} + \dots \tag{49}$$

Формула трапеций:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left(s_n + s_{n+1}\right),\ y_0 = 0 \tag{50}$$

Пусть $s_n = e^{i\omega n}$ и $y_n = H(\omega)e^{i\omega n}$, тогда:

$$\begin{cases} y_{n+1} = H(\omega)e^{i\omega n} + \dfrac{e^{i\omega n} + e^{i\omega(n+1)}}{2} \\ y_{n+1} = H(\omega)e^{i\omega(n+1)} \end{cases}$$

$$H(\omega)\left(e^{i\omega n}e^{i\omega}\right) = H(\omega)e^{i\omega n} + e^{i\omega n}\frac{1 + e^{i\omega}}{2}$$

$$H(\omega)\left(e^{i\omega} - 1\right) = \frac{1 + e^{i\omega}}{2}$$

$$H(\omega) = \frac{e^{i\omega} + 1}{2\left(e^{i\omega} - 1\right)} = \frac{\cos\frac{\omega}{2}}{2i\sin\frac{\omega}{2}} \tag{51}$$

$$\tilde{H}(f) = \frac{\cos \pi f}{2i \sin \pi f} \tag{52}$$

Точное значение интеграла $e^{i\omega t}$ равно $\dfrac{e^{i\omega t}}{i\omega}$, тогда отношение значений:

$$\gamma = \frac{\textit{Вычисленное}}{\textit{Точное}} = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\frac{\omega}{2}}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = 1 - \frac{\omega^2}{12} - \frac{\omega^4}{720} + \dots \tag{53}$$

$$\gamma = \cos\left(\pi f\right)\frac{\pi f}{\sin\left(\pi f\right)} = 1 - \frac{\pi^2\omega^2}{3} - \frac{\pi^4\omega^4}{45} + \dots \tag{54}$$

Формула Симпсона:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{1}{3}\left(s_{n-1} + 4s_n + s_{n+1}\right),\ y_0 = 0 \tag{55}$$

Пусть $s_n = e^{i\omega n}$ и $y_n = H(\omega)e^{i\omega n}$, тогда:

$$\begin{cases} y_{n+1} = H(\omega)e^{i\omega(n-1)} + \dfrac{e^{i\omega(n-1)} + 4e^{i\omega n} + e^{i\omega(n+1)}}{3} \\ y_{n+1} = H(\omega)e^{i\omega(n+1)} \end{cases}$$

$$H(\omega)\left(e^{i\omega n}e^{i\omega}\right) = H(\omega)e^{i\omega n}e^{-i\omega} + e^{i\omega n}\,\frac{e^{-i\omega} + 4 + e^{i\omega}}{3}$$

$$H(\omega)\left(e^{i\omega} - e^{-i\omega}\right) = \frac{e^{-i\omega} + 4 + e^{i\omega}}{3}$$

$$H(\omega) = \frac{e^{-i\omega} + 4 + e^{i\omega}}{3\left(e^{i\omega} - e^{-i\omega}\right)} = \frac{\cos\omega + 2}{3i\sin\omega} \tag{56}$$

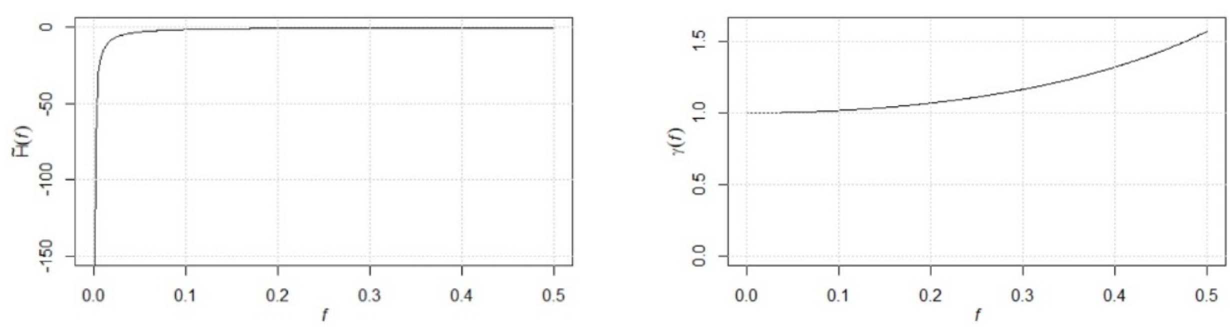
$$\tilde{H}(f) = \frac{\cos 2\pi f + 2}{3i\sin 2\pi f} \tag{57}$$

Точное значение интеграла $e^{i\omega t}$ равно $\dfrac{e^{i\omega t}}{i\omega}$, тогда отношение значений:

$$\gamma = \frac{\textit{Вычисленное}}{\textit{Точное}} = \frac{(\cos\omega + 2)i\omega}{3i\sin\omega} = \frac{\cos\omega + 2}{3}\cdot\frac{\omega}{\sin\omega} = 1 + \frac{\omega^4}{180} + \ldots \tag{58}$$

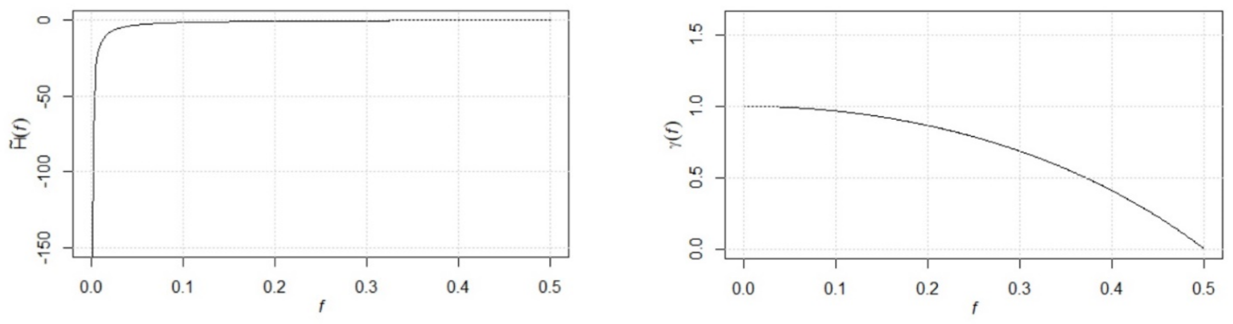
$$\gamma = \frac{\cos 2\pi f + 2}{3}\cdot\frac{2\pi f}{\sin 2\pi f} = 1 + \frac{4\pi^4 f^4}{45} + \ldots \tag{59}$$

Графики передаточных функций и графики отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному для формул прямоугольников, трапеций и Симпсона представлены на рис. 9, 10, 11 соответственно.



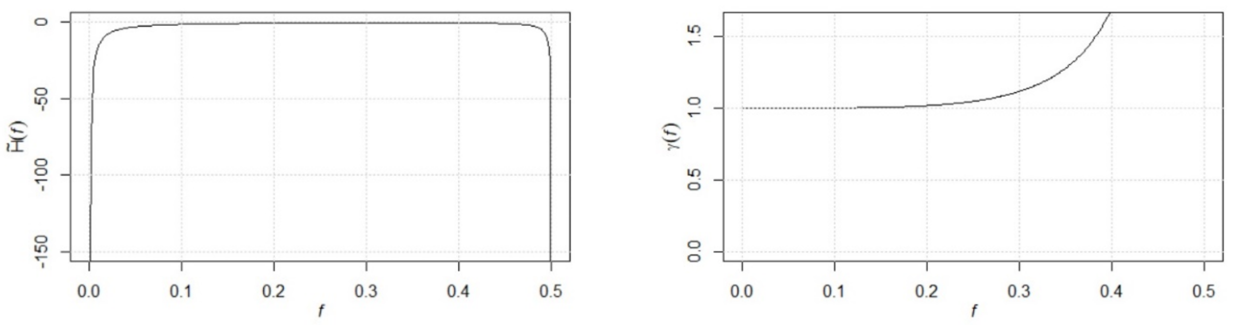
a b

Рисунок 9 – График передаточной функции(a) и график отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному(b) для формул прямоугольников



a b

Рисунок 10 – График передаточной функции(a) и график отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному(b) для формул трапеций



a b

Рисунок 11 – График передаточной функции(a) и график отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному(b) для формул Симпсона

8. Выведем формулу передаточной функции рекурсивного фильтра, соответствующего квадратурной формуле:

$$y_{n+2} = y_{n-1} + \frac{1}{8}\left(s_{n+2} + 3s_{n+1} + 3s_n + s_{n-1}\right) \tag{60}$$

Пусть $s_n = e^{i\omega n}$ и $y_n = H(\omega)e^{i\omega n}$, тогда:

$$\begin{cases} y_{n+2} = H(\omega)e^{i\omega(n-1)} + \dfrac{e^{i\omega(n+2)} + 3e^{i\omega(n+1)} + 3e^{i\omega n} + e^{i\omega(n-1)}}{8} \\ y_{n+2} = H(\omega)e^{i\omega(n+2)} \end{cases}$$

$$H(\omega)\left(e^{i\omega n}e^{2i\omega}\right)=H(\omega)e^{i\omega n}e^{-i\omega}+e^{i\omega n}\frac{e^{2i\omega}+3e^{i\omega}+3+e^{-i\omega}}{8}$$

$$H(\omega)\left(e^{2i\omega}-e^{-i\omega}\right)=\frac{e^{2i\omega}+3e^{i\omega}+3+e^{-i\omega}}{8}$$

$$H(\omega)=\frac{e^{2i\omega}+3e^{i\omega}+3+e^{-i\omega}}{8\left(e^{2i\omega}-e^{-i\omega}\right)}\cdot\frac{e^{\frac{-i\omega}{2}}}{e^{\frac{-i\omega}{2}}}$$

$$H(\omega)=\frac{e^{\frac{3i\omega}{2}}+3e^{\frac{i\omega}{2}}+3e^{-\frac{i\omega}{2}}+e^{-\frac{3i\omega}{2}}}{8\left(e^{\frac{3i\omega}{2}}-e^{-\frac{3i\omega}{2}}\right)}=\frac{2\cos\frac{3\omega}{2}+6\cos\frac{\omega}{2}}{16i\sin\frac{3\omega}{2}} \tag{61}$$

$$\tilde{H}(f)=\frac{\cos 3\pi f+3\cos\pi f}{8i\sin 3\pi f} \tag{62}$$

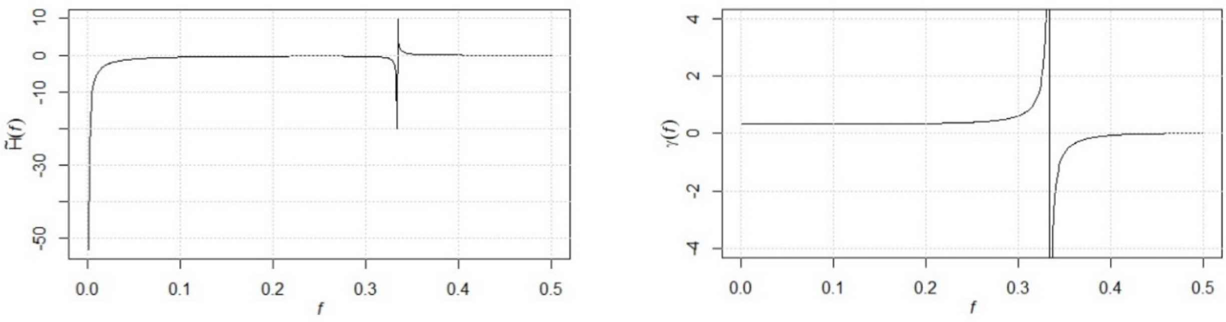
Точное значение интеграла $e^{i\omega t}$ равно $\dfrac{e^{i\omega t}}{i\omega}$, тогда отношение значений:

$$\gamma=\frac{\textit{Вычисленное}}{\textit{Точное}}=\omega\frac{\cos\frac{3\omega}{2}+3\cos\frac{\omega}{2}}{8\sin\frac{3\omega}{2}}=$$

$$=\frac{1}{12}\left(\cos\frac{3\omega}{2}+3\cos\frac{\omega}{2}\right)\frac{\frac{3\omega}{2}}{\sin\frac{3\omega}{2}}=\frac{1}{3}+\frac{\omega^4}{240}+\ldots \tag{63}$$

$$\gamma=\frac{1}{12}\left(\cos 3\pi f+3\cos\pi f\right)\frac{3\pi f}{\sin 3\pi f}=\frac{1}{3}+\frac{\pi^4 f^4}{15}+\ldots \tag{64}$$

Соответствующие график передаточных функций и график отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному представлены на рис. 12.



a b

Рисунок 12 – График передаточной функции(a) и график отношения вычисляемого в результате фильтрации значения к истинному(b) для квадратурной формулы (60)

9. Проведем сопоставительный анализ частотных характеристик передаточных функций, полученных при выполнении пп. 7 и 8.

Были получены графики (рис 9-12) передаточных функций рекурсивных фильтров, соответствующих квадратурным формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона, а также квадратурной формуле (60). Графики соответствуют ожиданиям.

Выводы.

В ходе выполнения лабораторной работы был проведен анализ частотных характеристик известных формул полиномиального сглаживания временных рядов и формул численного интегрирования, были построены соответствующие графики.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ИСХОДНЫЙ КОД

```
m = 4
w <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)
w1<-w*(2*pi)
H<-sin(((2*m+1)*w1)/2)/((2*m+1)*sin(w1/2))
par(mgp=c(2,1,0))
plot(w,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)
H7<-(1/21)*(7+12*cos(2*pi*f)+6*cos(4*pi*f)-4*cos(6*pi*f))
H9<-(1/231)*(59+108*cos(2*pi*f)+78*cos(4*pi*f)+28*cos(6*pi*f)-
42*cos(8*pi*f))
H11<-
(1/429)*(89+168*cos(2*pi*f)+138*cos(4*pi*f)+88*cos(6*pi*f)+18*cos(8*pi
*f)-72*cos(10*pi*f))
H13<-
(1/143)*(25+48*cos(2*pi*f)+42*cos(4*pi*f)+32*cos(6*pi*f)+18*cos(8*pi*f
)-22*cos(12*pi*f))
par(mgp=c(2,1,0))
plot(f,H7,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
plot(f,H9,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
plot(f,H11,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
plot(f,H13,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
```

```
f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)
H9<-(1/429)*(179+270*cos(2*pi*f)+60*cos(4*pi*f)-
110*cos(6*pi*f)+30*cos(8*pi*f))
H11<-(1/429)*(143+240*cos(2*pi*f)+120*cos(4*pi*f)-20*cos(6*pi*f)-
90*cos(8*pi*f)+36*cos(10*pi*f))
H13<-
(1/2431)*(677+1200*cos(2*pi*f)+780*cos(4*pi*f)+220*cos(6*pi*f)-
270*cos(8*pi*f)-396*cos(10*pi*f)+220*cos(12*pi*f))
H15<-
(1/46189)*(11063+20250*cos(2*pi*f)+15000*cos(4*pi*f)+7510*cos(6*pi*f)-
330*cos(8*pi*f)-5874*cos(10*pi*f)-5720*cos(12*pi*f)+4290*cos(14*pi*f))
par(mgp=c(2,1,0))
plot(f,H9,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
plot(f,H11,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
plot(f,H13,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
plot(f,H15,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)
H15<-
(1/320)*(74+134*cos(2*pi*f)+92*cos(4*pi*f)+42*cos(6*pi*f)+6*cos(8*pi*f
)-10*cos(10*pi*f)-12*cos(12*pi*f)-6*cos(14*pi*f))
H21<-
(1/350)*(60+114*cos(2*pi*f)+94*cos(4*pi*f)+66*cos(6*pi*f)+36*cos(8*pi*
f)+12*cos(10*pi*f)-4*cos(12*pi*f)-10*cos(14*pi*f)-10*cos(16*pi*f)-
6*cos(18*pi*f)-2*cos(20*pi*f))
```

```
plot(f,H15,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
plot(f,H21,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
m = 2
w <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)
w1<-w*(2*pi)
H<-20*log(abs(sin(((2*m+1)*w1)/2)/((2*m+1)*sin(w1/2))),10)
par(mgp=c(2,1,0))
plot(w,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))), ylim = c(-60,0))
grid()
f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)
H7<-(1/21)*(7+12*cos(2*pi*f)+6*cos(4*pi*f)-4*cos(6*pi*f))
H9<-(1/231)*(59+108*cos(2*pi*f)+78*cos(4*pi*f)+28*cos(6*pi*f)-42*cos(8*pi*f))
H11<-(1/429)*(89+168*cos(2*pi*f)+138*cos(4*pi*f)+88*cos(6*pi*f)+18*cos(8*pi*f)-72*cos(10*pi*f))
H13<-(1/143)*(25+48*cos(2*pi*f)+42*cos(4*pi*f)+32*cos(6*pi*f)+18*cos(8*pi*f)-22*cos(12*pi*f))
par(mgp=c(2,1,0))
plot(f,20*log(abs(H7),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
plot(f,20*log(abs(H9),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
plot(f,20*log(abs(H11),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
```

```
plot(f,20*log(abs(H13),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))), ylim = c(-60,0))
grid()
f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)
H9<-(1/429)*(179+270*cos(2*pi*f)+60*cos(4*pi*f)-110*cos(6*pi*f)+30*cos(8*pi*f))
H11<-(1/429)*(143+240*cos(2*pi*f)+120*cos(4*pi*f)-20*cos(6*pi*f)-90*cos(8*pi*f)+36*cos(10*pi*f))
H13<-(1/2431)*(677+1200*cos(2*pi*f)+780*cos(4*pi*f)+220*cos(6*pi*f)-270*cos(8*pi*f)-396*cos(10*pi*f)+220*cos(12*pi*f))
H15<-(1/46189)*(11063+20250*cos(2*pi*f)+15000*cos(4*pi*f)+7510*cos(6*pi*f)-330*cos(8*pi*f)-5874*cos(10*pi*f)-5720*cos(12*pi*f)+4290*cos(14*pi*f))
par(mgp=c(2,1,0))
plot(f,20*log(abs(H9),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))), ylim = c(-60,0))
grid()
plot(f,20*log(abs(H11),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))), ylim = c(-60,0))
grid()
plot(f,20*log(abs(H13),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))), ylim = c(-60,0))
grid()
plot(f,20*log(abs(H15),10),type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))), ylim = c(-60,0))
grid()
```

```
f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)
H15<-
(1/320)*(74+134*cos(2*pi*f)+92*cos(4*pi*f)+42*cos(6*pi*f)+6*cos(8*pi*f
)-10*cos(10*pi*f)-12*cos(12*pi*f)-6*cos(14*pi*f))
H21<-
(1/350)*(60+114*cos(2*pi*f)+94*cos(4*pi*f)+66*cos(6*pi*f)+36*cos(8*pi*
f)+12*cos(10*pi*f)-4*cos(12*pi*f)-10*cos(14*pi*f)-10*cos(16*pi*f)-
6*cos(18*pi*f)-2*cos(20*pi*f))
plot(f,20*log(abs(H15),10),type = "l", pch = 10 , xlab =
expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))),ylim
= c(-150,0))
grid()
plot(f,20*log(abs(H21),10),type = "l", pch = 10 , xlab =
expression(italic("f")), ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))),ylim
= c(-150,0))
grid()
f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)
H<- Im(1/(2*1i*sin(pi*f)))
par(mgp=c(2,1,0))
plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))),ylim = c(-150,0))
grid()
H<- Im(cos(pi*f)/(2*1i*sin(pi*f)))
plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))),ylim = c(-150,0))
grid()
H<- Im((cos(2*pi*f)+2)/(3*1i*sin(2*pi*f)))
plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))),ylim = c(-150,0))
grid()
```

```
f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)
H<-(pi*f)/(sin(pi*f))
plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(gamma(italic("f"))),ylim = c(0,1.6))
grid()
H<-cos(pi*f)*((pi*f)/(sin(pi*f)))
plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(gamma(italic("f"))),ylim = c(0,1.6))
grid()
H<-((cos(2*pi*f)+2)/3)*((2*pi*f)/sin(2*pi*f))
plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(gamma(italic("f"))),ylim = c(0,1.6))
grid()
f <- seq(from = 0, to = 0.5, by = 0.001)
H<-Im((cos(3*pi*f)+3*cos(pi*f))/(8i*sin(3*pi*f)))
plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(tilde(H)(italic("f"))))
grid()
H<-(1/12)*(cos(3*pi*f)+3*cos(pi*f))*((3*pi*f)/sin(3*pi*f))
plot(f,H,type = "l", pch = 10 , xlab = expression(italic("f")),
ylab = expression(gamma(italic("f"))),ylim = c(-4,4))
grid()
```