МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №1
по дисциплине «Теория принятия решений»
Тема: Принятие решений в матричных играх
Вариант 10

Студент гр. 8383	____________________	Костарев К.В.
Преподаватель	____________________	Попова Е.В.

Санкт-Петербург
2022

Цель работы

Изучение различных инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе матричных игр.

Основные теоретические положения

Рассмотрим простейшую математическую модель конечной конфликтной ситуации, в которой имеется два участника и выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется антагонистической игрой двух лиц с нулевой суммой. Игра состоит из двух ходов: игрок А выбирает одну из возможных $a_i,\ i = 1..m$ стратегий, а игрок Б выбирает одну из возможных стратегий $b_j,\ j = 1..n$. Каждый выбор производится при полном незнании выбора соперника. В результате выигрыш игроков составит соответственно a_{ij} и $-a_{ij}$. Цель игрока А – максимизировать величину a_{ij}, а игрока Б – минимизировать эту величину. Критерием принятия решения является функция, выражающая предпочтение лица, принимающего решение, и определяющая правило, по которому выбирается приемлемый или оптимальный вариант решения.

Матрица, составленная из величин $a_{ij},\ i = 1..m,\ j = 1..n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица выше называется платежной матрицей, или матрицей игры. Каждый элемент платежной матрицы $a_{ij},\ i = 1..m,\ j = 1..n$, равен выигрышу А (проигрышу Б), если он выбрал стратегию $A_i,\ i = 1..m$, а игрок Б выбирал стратегию $B_j,\ j = 1..n$.

Задача каждого из игроков – найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший доход.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Если игрок А выбрал стратегию $A_i,\ i = 1..m$, то в худшем случае (например, если его ход известен Б) он получит выигрыш $\alpha_i = \min_j a_{ij}$. Предвидя такую возможность, игрок А должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш.

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \{\min_j \alpha_{ij}\}.$$

Представленная выше величина α – гарантированный выигрыш игрока А называется нижней ценой игры. Стратегия A_i, обеспечивающая получение выигрыша α, называется максиминной. Если первый игрок будет придерживаться своей максиминной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае выиграет не меньше α. Аналогично определяется наилучшая стратегия второго игрока. Игрок Б при выборе стратегии B_j, $j = 1..n$, в худшем случае получит проигрыш $\beta_j = \max_i a_{ij}$. Он выбирает стратегию B_j при которой его проигрыш будет минимальным и составит

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \{\max_i \alpha_{ij}\}.$$

Представленная выше величина β – гарантированный проигрыш игрока Б называется верхней ценой игры. Стратегия β_j, обеспечивающая получение проигрыша β, называется минимаксной. Если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае проиграет не больше β. Фактический выигрыш игрока А (проигрыш игрока Б) при разумных действиях партнеров ограничен верхней и нижней ценой игры. Для матричной игры справедливо неравенство $\alpha \leq \beta$. Если $\alpha = \beta = \nu$, т.е.

$$\max_i \left\{\min_j \alpha_{ij}\right\} = \min_j \max_i \alpha_{ij} = \nu,$$

то выигрыш игрока А (проигрыш игрока Б) определяется числом ν. Оно называется ценой игры. В соответствии с выражением, если $\alpha = \beta = \nu$, то такая игра называется игрой с седловой точкой. Элемент матрицы α_{ij}, соответствующий паре оптимальных стратегий (A_i, B_j), называется седловой точкой матрицы. Этот элемент является ценой игры.

Седловой точке соответствуют оптимальные стратегии игроков. Их совокупность – решение игры, которое обладает свойством: если один из игроков придерживается оптимальной стратегии, то второму отклонение от своей оптимальной стратегии не может быть выгодным. Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$ и $\alpha \leq \nu \leq \beta$ то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами.

Сложная стратегия, состоящая в случайном применении всех стратегий с определенными частотами, называется смешанной.

Постановка задачи

Используя инструментальные средства компьютерной алгебры решить матричные задачи.

Выполнение работы

1) С помощью инструментального средства определить границы выигрыша и наличие седловой точки для матрицы C_1.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 & -2 \\ 5 & 9 & 3 & 2 \\ 5 & -7 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Результат выполнения программы, представленной в приложении А, показан на рис. 1.

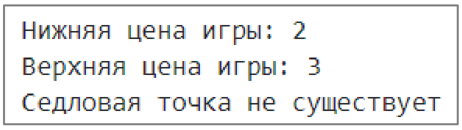


Рисунок 1 – Результат выполнения программы для матрицы C_1

2) Графически и аналитически решить матричную игру 2×2 для матрицы C_2.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Решим данную задачу аналитически.

Надо проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

$$\alpha = \max_i\{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(5,3)\} = 5$$

$$\beta = \min_j\{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(8,9)\} = 8$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры ν. Известно, что $5 \leq \nu \leq 8$.

В таком случае игрок А должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить максимальный средний выигрыш. Аналогично, игрок Б должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать средний выигрыш игрока А.

Для этого запишем две системы уравнений и решим их.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 5p_1 + 8p_2 = \nu \\ 9p_1 + 3p_2 = \nu \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{57}{9} \\ p_1 = \dfrac{5}{9} \\ p_2 = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 5q_1 + 9q_2 = \nu \\ 8q_1 + 3q_2 = \nu \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{57}{9} \\ q_1 = \dfrac{2}{3} \\ q_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Оптимальная стратегия игрока А: $P = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)$.

Оптимальная стратегия игрока Б: $Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Цена игры: $\nu = \frac{57}{9} = 6\frac{1}{3}$

Решим данную задачу графически. Результаты представлены на рис. 2 и 3.

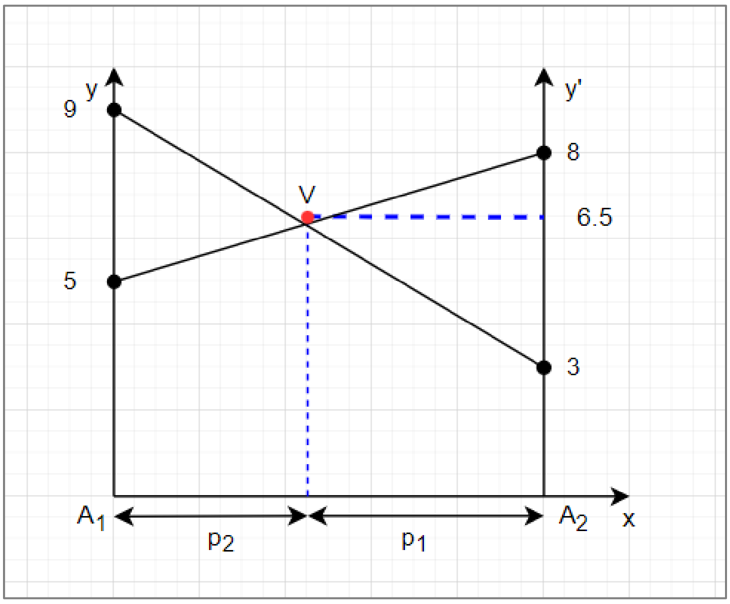


Рисунок 2 – Гарантированный выигрыш первого игрока в матрице платежей C_2

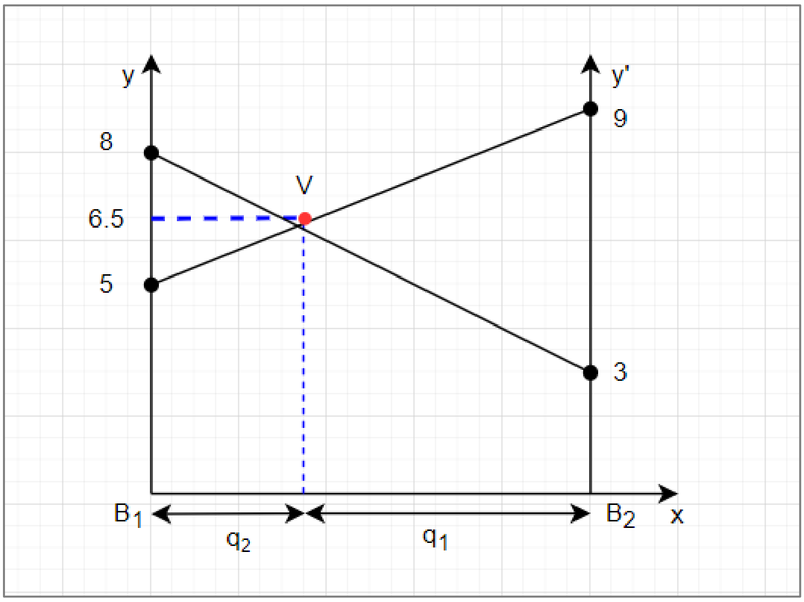


Рисунок 3 – Гарантированный проигрыш второго игрока в матрице платежей C_2

По рис. 2 и 3 можно определить, что стратегии игроков А и Б равны $P = \left(\frac{11}{20}, \frac{9}{20}\right), Q = \left(\frac{13}{20}, \frac{7}{20}\right)$, цена игры – $\nu = 6.5$, $\alpha = 5, \beta = 8$. Так как $\alpha \neq \beta$, можем сделать вывод о том, что седловой точки не существует. Относительная погрешность равна:

$$\delta(p1) = \frac{\left|\frac{5}{9} - \frac{11}{20}\right|}{\frac{5}{9}} * 100\% = 0.99\%;\ \delta(p2) = \frac{\left|\frac{4}{9} - \frac{9}{20}\right|}{\frac{4}{9}} * 100\% = 1.25\%$$

$$\delta(q1) = \frac{\left|\frac{2}{3} - \frac{13}{20}\right|}{\frac{2}{3}} * 100\% = 2.49\%;\ \delta(q2) = \frac{\left|\frac{1}{3} - \frac{7}{20}\right|}{\frac{1}{3}} * 100\% = 4.99\%$$

$$\delta(v) = \frac{\left|\frac{57}{9} - 6.5\right|}{\frac{57}{9}} * 100\% = 2.63\%;$$

3) Графически и аналитически решить матричную игру 2×N для матрицы C_3.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Решим данную задачу графически. Результат представлен на рис. 5.

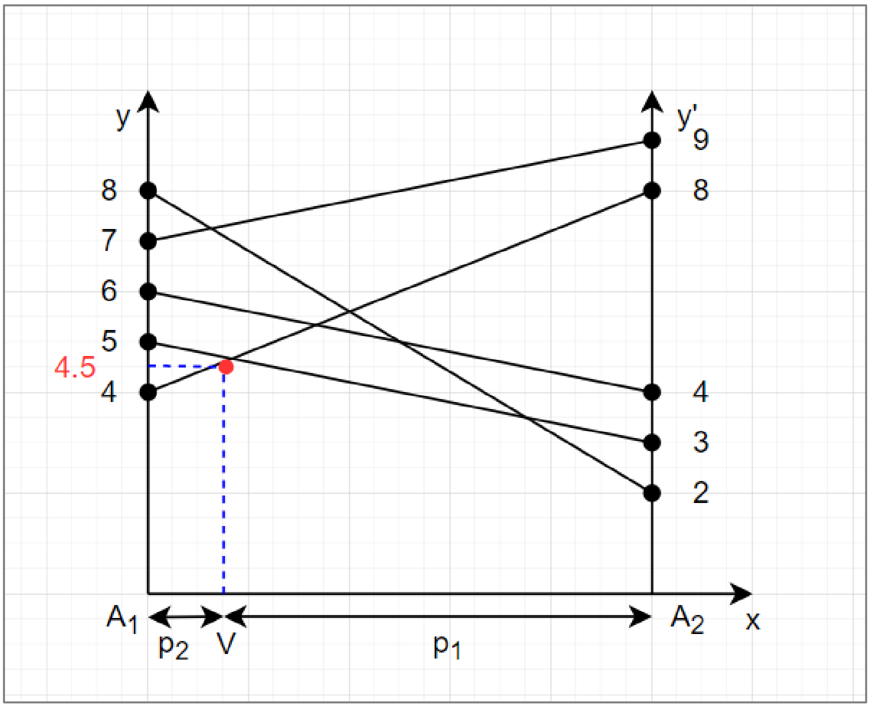


Рисунок 5 – Гарантированный выигрыш первого игрока при различном выборе смешанной стратегии

По рис. 5 можно определить, что смешанная стратегия игрока А приблизительно равна $Q \approx \left(\frac{165}{200}, \frac{35}{200}\right)$ и цена игры $\nu = 4.5$, $\alpha = 4$, $\beta = 5$. Так как $\alpha \neq \beta$, можем сделать вывод о том, что седловая точка отсутствует.

Решим данную задачу аналитически.

Для аналитического решения выберем прямые, на пересечении которых находится седловая точка и построим из них матрицу 2×2:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Надо проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

$$\alpha = \max_i\{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(4,3)\} = 4$$

$$\beta = \min_j\{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(5,8)\} = 5$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры ν. Известно, что $4 \leq \nu \leq 5$.

Запишем две системы уравнений и решим их.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 5p_1 + 3p_2 = \nu \\ 4p_1 + 8p_2 = \nu \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{14}{3} \\ p_1 = \dfrac{5}{6} \\ p_2 = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 5q_1 + 4q_2 = \nu \\ 3q_1 + 8q_2 = \nu \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{14}{3} \\ q_1 = \dfrac{2}{3} \\ q_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Оптимальная стратегия игрока А: $P = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Оптимальная стратегия игрока Б: $Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Цена игры: $\nu = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$

Относительная погрешность равна:

$$\delta(p1) = \frac{\left|\frac{5}{6} - \frac{165}{200}\right|}{\frac{5}{6}} * 100\% = 1.01\%;\ \delta(p2) = \frac{\left|\frac{1}{6} - \frac{35}{200}\right|}{\frac{1}{6}} * 100\% = 4.99\%$$

$$\delta(v) = \frac{\left|\frac{14}{3} - 4.5\right|}{\frac{14}{3}} * 100\% = 3.57\%;$$

4) Графически и аналитически решить матричную игру $M \times 2$ для матрицы C_4.

$$C_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 2 & -8 \\ -1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Решим данную задачу графически. Результат представлен на рис. 6.

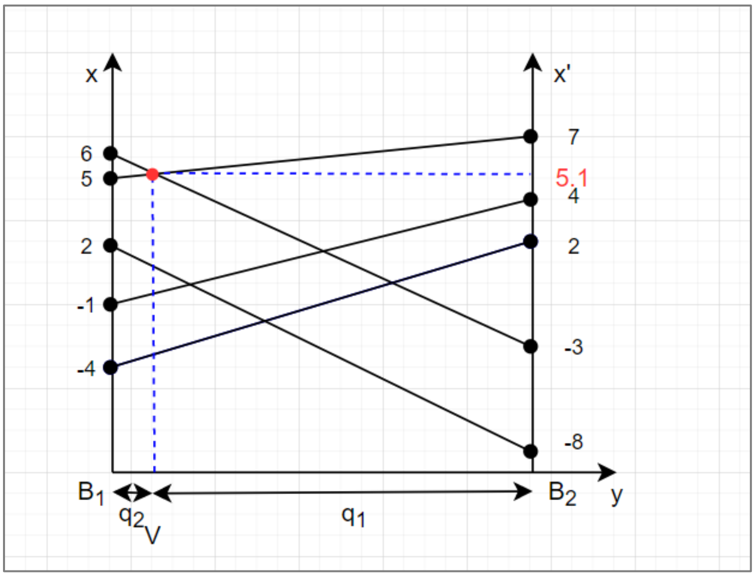


Рисунок 6 – Гарантированный проигрыш второго игрока при различном выборе смешанной стратегии

Исходя из рис. 6 можно определить, что смешанная стратегия игрока Б приблизительно равна $Q \approx \left(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}\right)$, цена игры – $\nu = 5.1, \alpha = 5, \beta = 6.$ Так как $\alpha \neq \beta$, можем сделать вывод о том, что седловой точки не существует.

Решим данную задачу аналитически.

Для аналитического решения выберем прямые, на пересечении которых находится седловая точка и построим из них матрицу 2 × 2:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Требуется проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

$$\alpha = \max_i\{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(5, -3)\} = \ 5$$

$$\beta = \min_j\{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(6, 7)\} = 6$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры ν. Известно, что $5 \leq \nu \leq 6$.

Запишем две системы уравнений.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 5p_1 + 6p_2 = \nu \\ 7p_1 - 3p_2 = \nu \\ \ \ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{57}{11} \\ p_1 = \dfrac{9}{11} \\ p_2 = \dfrac{2}{11} \end{cases}$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 5q_1 + 7q_2 = \nu \\ 6q_1 - 3q_2 = \nu \\ \ \ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{57}{11} \\ q_1 = \dfrac{10}{11} \\ q_2 = \dfrac{1}{11} \end{cases}$$

Оптимальная стратегия игрока А: $P = \left(\frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$

Оптимальная стратегия игрока Б: $Q = \left(\frac{10}{11}, \frac{1}{11}\right)$

Цена игры: $\nu = \frac{57}{11} = 5\frac{2}{11}$

Относительная погрешность равна:

$$\delta(q1) = \frac{\left|\frac{10}{11} - \frac{9}{10}\right|}{\frac{10}{11}} * 100\% = 0.99\%;\ \delta(q2) = \frac{\left|\frac{1}{11} - \frac{1}{10}\right|}{\frac{1}{11}} * 100\% = 9.99\%$$

$$\delta(\nu) = \frac{\left|\frac{57}{11} - 5.1\right|}{\frac{57}{11}} * 100\% = 3.5\%;$$

5) С помощью симплекс-метода решить матричную игру $M \times N$ для матрицы C_5.

$$C_5 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Требуется проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

$$\alpha = \max_i\{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(2, 1, 2)\} = 2$$

$$\beta = \min_j\{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(7, 6, 6, 5)\} = 5$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры ν. Известно, что $2 \leq \nu \leq 5$.

Запишем две системы уравнений.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 2p_1 + 7p_2 + 5p_3 \geq \nu \\ 6p_1 + 2p_2 + 3p_3 \geq \nu \\ 4p_1 + 3p_2 + 6p_3 \geq \nu \\ 5p_1 + p_2 + 2p_3 \geq \nu \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_i = \frac{p_i}{\nu}$$

Чтобы найти решение данной задачи относительно первого игрока А надо:

найти минимум функции $F(x) = x_1 + x_2 + x_3$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 \geq 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geq 1 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \end{cases}$$

С помощью библиотеки SciPy вычислен вектор X (рис. 7).

```
obj = [1,1,1]
lhs_ineq = [[-2,-7,-5],[-6,-2,-3],[-4,-3,-6], [-5,-1,-2]]
rhs_ineq = [-1,-1,-1,-1]
bnd = [(0, float("inf")),(0, float("inf")),(0, float("inf"))]
opt = linprog(c=obj, A_ub=lhs_ineq, b_ub=rhs_ineq, bounds=bnd,method="simplex")
opt.fun.round(3)
opt.x.round(3)

0.273

array([0.182, 0.091, 0.   ])

(1/opt.fun).round(3)
(1/opt.fun) * opt.x

3.667

array([0.66666667, 0.33333333, 0.        ])
```

Рисунок 7 – Решение вектора X симплекс-методом матрицы C_5

Получаем $F(x) = 0.273$ при $x_1 = 0.182, x_2 = 0.091, x_3 = 0$. Цена игры при этом $\nu = \frac{1}{0.273} \approx 3.667$, что соотносится с первоначальной оценкой $2 \leq \nu \leq 5$.

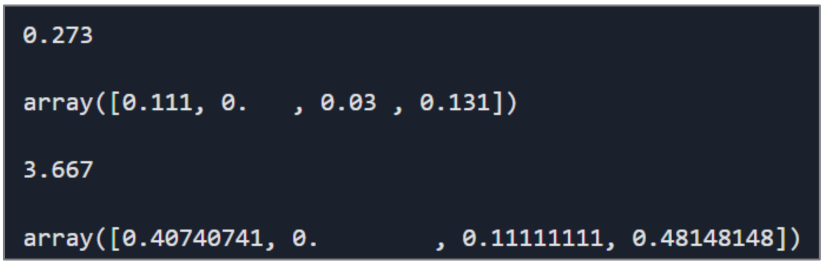
Для игрока Б:

$$\begin{cases} 2q_1 + 6q_2 + 4q_3 + 5q_4 \leq \nu \\ 7q_1 + 2q_2 + 3q_3 + q_4 \leq \nu \\ 5q_1 + 3q_2 + 6q_3 + 2q_4 \leq \nu \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1 \end{cases}$$

Чтобы найти решение данной задачи относительно второго игрока Б надо найти максимум функции $F(y) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 2y_1 + 6y_2 + 4y_3 + 5y_4 \leq 1 \\ 7y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 1 \\ 5y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 2y_4 \leq 1 \end{cases}$$

С помощью SciPy симплекс-методом вычислен вектор Y (рис. 8).



```
0.273

array([0.111, 0.   , 0.03 , 0.131])

3.667

array([0.40740741, 0.        , 0.11111111, 0.48148148])
```

Рисунок 8 – Решение вектора Y симплекс-методом матрицы C_5

Получаем $F(y) = 0.273$ при $y_1 = 0.111, y_2 = 0, y_3 = 0.03, y_3 = 0.131$. Цена игры при этом $\nu = \frac{1}{0.273} \approx 3.667$, что соотносится с первоначальной оценкой $2 \leq \nu \leq 5$.

Опираясь на полученные данные, можно найти цену игры и оптимальные смешанные стратегии игроков А и Б:

$$\nu = \frac{1}{0.273} = 3.667$$

$$P = X \cdot \nu = (\, 0.67, 0.33, 0 \,)$$

$$Q = Y \cdot \nu = (\, 0.41, 0, 0.11, 0.48 \,)$$

Выводы

В ходе выполнения практической работы было реализовано инструментальное средство для нахождения нижней и верхней цен игры и для нахождения координат седловой точки на языке программирования Python, а также были получены навыки работы с библиотекой SciPy для линейного программирования.

При решении матричных игр были применены графический и аналитический методы нахождения оптимальных смешанных стратегий, а также был применён симплекс-метод. Решения матричных игр обоими способами дали одинаковый результат.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

```
#!/usr/bin/env python
# coding: utf-8

# In[1]:



import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from IPython.core.interactiveshell import InteractiveShell
InteractiveShell.ast_node_interactivity = "all"



# In[16]:



def default(c):
    amin = c.min(axis=1)
    bmax = c.max(axis=0)
    alpha = max(amin)
    beta = min(bmax)
    print(f'Нижняя цена игры: {alpha}')
    print(f'Верхняя цена игры: {beta}')
    print(f'Седловая точка существует') if alpha == beta else
print(f'Седловая точка не существует')
    if alpha == beta:
        print(f'Координаты седловой точки равны ({np.argmax(amin)+1},
{np.argmin(bmax)+1})')
    p1 = (c[1,1]-c[1,0])/(c[0,0]+c[1,1]-(c[0,1]+c[1,0]))
    p2 = 1-p1
    q1 = (c[1,1]-c[0,1])/(c[0,0]+c[1,1]-(c[0,1]+c[1,0]))
```

```
    q2 = 1-q1
    v = c[0,0]*p1+c[1,0]*p2
    print(p1,p2,q1,q2,v)


# In[26]:


c1 = np.array([[4,8,-1,-2], [5,9,3,2], [5,-7,-2,4]])
c2 = np.array([[5,9],[8,3]])
c3 = np.array([[5,8,6,4,7], [3,2,4,8,9]])
c31 = np.array([[5,4],[3,8]])
c4 = np.array([[-4,2],[5,7],[2,-8],[-1,4],[6,-3]])
c41 = np.array([[5,7],[6,-3]])
c5 = np.array([[2,6,4,5], [7,2,3,1], [5,3,6,2]])
# c1,c2,c3,c4,c5


# In[41]:


default(c5)


# In[40]:


ist = 57/11
schit = 5/1
(np.abs(ist-schit)/ist)*100
(np.abs((1-ist)-(1-schit))/(1-ist))*100


# In[44]:
```

```
from scipy.optimize import linprog


# In[47]:


obj = [1,1,1]
lhs_ineq = [[-2,-7,-5],[-6,-2,-3],[-4,-3,-6], [-5,-1,-2]]
rhs_ineq = [-1,-1,-1,-1]
bnd = [(0, float("inf")),(0, float("inf")),(0, float("inf"))]
opt = linprog(c=obj, A_ub=lhs_ineq, b_ub=rhs_ineq, bounds=bnd,method="sim-
plex")
opt.fun.round(3)
opt.x.round(3)


# In[50]:


(1/opt.fun).round(3)
(1/opt.fun) * opt.x


# In[54]:


obj = [-1,-1,-1,-1]
lhs_ineq = [[2,6,4,5],[7,2,3,1],[5,3,6,2]]
rhs_ineq = [1,1,1]
bnd = [(0, float("inf")),(0, float("inf")),(0, float("inf")), (0,
float("inf"))]
```

```
opt = linprog(c=obj, A_ub=lhs_ineq, b_ub=rhs_ineq, bounds=bnd,method="sim-
plex")
-opt.fun.round(3)
opt.x.round(3)
(-1/opt.fun).round(3)
(-1/opt.fun) * opt.x


# In[ ]:
```