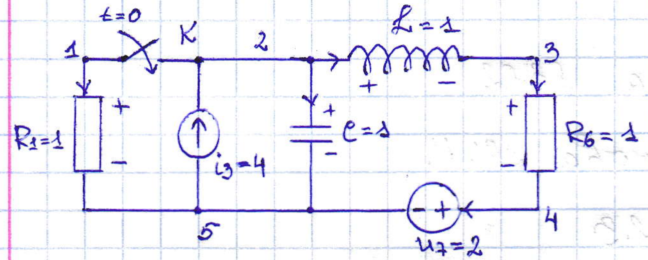
Вариант 12.

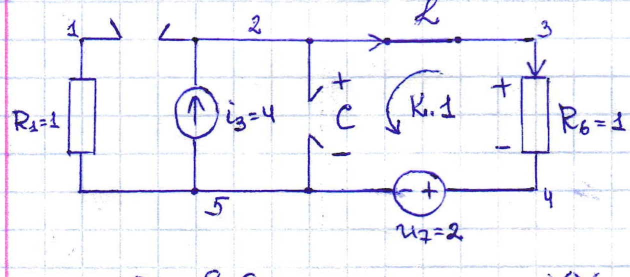
Цепь: 115 – $R_1 = 1$; 212 – К, замыкается; 352 – ИТ $i_3 = 4$;
425 – $C = 1$; 523 – $L = 1$; 634 – $R_6 = 1$; 745 – ИН $u_7 = 2$.

При $t=0$ в цепи замыкается ключ К. Найти независимые начальные условия, составить уравнения состояния. Для $t>0$ найти u_C и i_L, использовав аналитическое решение уравнений состояния. Затем найти u_L и i_C, использовав уравнения связи, и провести проверку полученных результатов по ВАХ накопителей.



Решение

1. Определим независимые начальные условия $i_L(0-)$ и $u_C(0-)$ по эквивалентной схеме замещения. Разомкнутый ключ можно заменить на ХХ. Т.к. до коммутации в цепи наблюдается установившийся режим, L-элемент заменяем на КЗ, а C-элемент – на ХХ.



В ветвях, содержащих ХХ, токов нет, поэтому

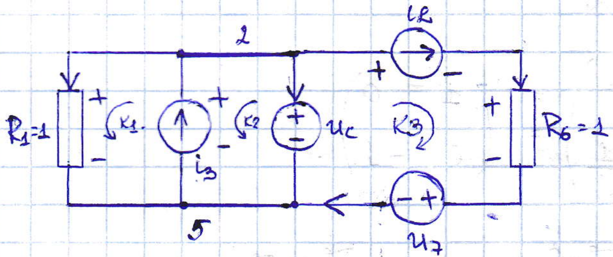
$$i_L(0-) = i_{R_6}(0-) = i_3 = 4$$

Найдем $u_C(0-)$ по ЗНК для контура 1:

$$u_C(0-) = u_7 + i_{R_6}(0-) R_6 = 6$$

Итак, $i_L(0-) = 4$; $u_C(0-) = 6$. (выделено, чтобы не потерять)

2. Для $t>0$ составим уравнения состояния, используя метод вспомогательных источников. Замыкаем ключ, заменяем C-элемент на ИН, а L-элемент – на ИТ.



Выразим i_C и u_L через u_C, i_L, i_3 и u_7. Воспользуемся методом уравнений Кирхгофа, т.к. он не требует дополнительных преобразований цепи.

ЗТК для уз. 2
ЗНК для к. 1
ЗНК для к. 2
ЗНК для к. 3

$$\begin{cases} i_L + i_C + i_{R_1} - i_3 = 0 \\ i_{R_1} R_1 - u_3 = 0 \\ u_3 - u_C = 0 \\ u_L + i_L R_6 + u_7 - u_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_3 = u_C \\ i_{R_1} = u_C / R_1 \\ i_C = -u_C/R_1 - i_L + i_3 \\ u_L = u_C - R_6 i_L - u_7 \end{cases}$$

Тогда уравнения состояния

$$\boxed{\begin{cases} u_C'(t) = \dfrac{i_C(t)}{C} = -\dfrac{u_C(t)}{CR_1} - \dfrac{i_L(t)}{C} + \dfrac{i_3}{C} \\[2ex] i_L'(t) = \dfrac{u_L(t)}{L} = \dfrac{u_C(t)}{L} - \dfrac{R_6 i_L(t)}{L} - \dfrac{u_7}{L} \end{cases}}$$

В матричной форме система имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_C' \\ i_L' \end{pmatrix} = [A]\begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + [B]\begin{pmatrix} i_3 \\ u_7 \end{pmatrix},$$

где $[A] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{CR_1} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_6}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$

$$[B] = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Найдем частоты собственных колебаний цепи, т.е. корни характеристического многочлена матрицы A.

$$\det(A - pE) = \begin{vmatrix} -1-p & -1 \\ 1 & -1-p \end{vmatrix} = (-1-p)^2 + 1 = p^2 + 2p + 2 = 0$$

Получим $p_{1,2} = -1 \pm 1i$, где $i^2 = -1$.

Тогда свободные составляющие решения будут иметь вид:

$$\boxed{\begin{cases} u_{Cсв}(t) = A_1 e^{-t}\cos(t) + A_2 e^{-t}\sin(t) \\ i_{Lсв}(t) = B_1 e^{-t}\cos(t) + B_2 e^{-t}\sin(t) \end{cases}}$$

4. Определим вынужденные составляющие решения, т.е. u_C и i_L при $t \to \infty$, из уравнений состояния. Т.к. в цепи будет установившийся режим при постоянных воздействиях, $u_C' = 0$ и $i_L' = 0$.

Подставив значения производных, а также известные параметры цепи, получим и решим систему уравнений:

$$+\begin{cases} 0 = -u_{C\text{вын}} - i_{L\text{вын}} + 4 \\ 0 = u_{C\text{вын}} - i_{L\text{вын}} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2i_{L\text{вын}} + 2 = 0 \\ u_{C\text{вын}} = 4 - i_{L\text{вын}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_{L\text{вын}} = 1 \\ u_{C\text{вын}} = 3 \end{cases}$$

Получим $i_{L\text{вын}} = 1$; $u_{C\text{вын}} = 3$.

5. Найдем значения производных переменных состояния при $t = 0+$.

По законам коммутации $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 6$ и $i_L(0+) = i_L(0-) = 4$. Подставим эти значения в уравнения состояния:

$$\begin{cases} u_C'(0+) = -6 - 4 + 4 = -6 \\ i_L'(0+) = 6 - 4 - 2 = 0 \end{cases}$$

6. Определим постоянные интегрирования A_1, A_2, B_1, B_2.

Переменные состояния можно представить в виде:

$$\begin{cases} u_C(t) = u_{C\text{вын}} + u_{C\text{св}}(t) \\ i_L(t) = i_{L\text{вын}} + i_{L\text{св}}(t) \end{cases}$$

Постоянные интегрирования можно найти, продифференцировав эти уравнения и подставив в полученные 4 выражения значения переменных состояния и их производных при $t = 0+$.

$$\begin{cases} u_c(t) = u_{c\,вын} + A_1 e^{-t}\cos(t) + A_2 e^{-t}\sin(t) \\ u_c'(t) = -A_1 e^{-t}\cos(t) - A_1 e^{-t}\sin(t) - A_2 e^{-t}\sin(t) + A_2 e^{-t}\cos(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow \; t = 0^+$$

$$\begin{cases} 6 = 3 + A_1 \\ -6 = -A_1 + A_2 \end{cases}$$

Получим $A_1 = 3$ и $A_2 = -3$.

$$\begin{cases} i_L(t) = i_{L\,вын} + B_1 e^{-t}\cos(t) + B_2 e^{-t}\sin(t) \\ i_L'(t) = -B_1 e^{-t}\cos(t) - B_1 e^{-t}\sin(t) - B_2 e^{-t}\sin(t) + B_2 e^{-t}\cos(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow \; t = 0^+$$

$$\begin{cases} 4 = 1 + B_1 \\ 0 = -B_1 + B_2 \end{cases}$$

Получим $B_1 = 3$ и $B_2 = 3$.

Теперь, при известных константах, можно найти переменные состояния $u_c(t)$ и $i_L(t)$ при $t > 0$:

$$\boxed{\begin{aligned} u_c(t) &= 3 + 3e^{-t}\cos(t) - 3e^{-t}\sin(t) \\ i_L(t) &= 1 + 3e^{-t}\cos(t) + 3e^{-t}\sin(t) \end{aligned}}$$

7. Рассчитаем реакции i_c и u_L, воспользовавшись выражениями, полученными в п. 2:

$$i_c(t) = -\frac{u_c(t)}{R_1} - i_L(t) + i_3$$

$$u_L(t) = u_c(t) - R_6 i_L(t) - u_7$$

$$i_C(t) = -\cancel{3} - 3e^{-t}\cos(t) + \cancel{3e^{-t}\sin(t)} - \cancel{1} - 3e^{-t}\cos(t) -$$

$$- \cancel{3e^{-t}\sin(t)} + \cancel{4} = -6e^{-t}\cos(t)$$

$$u_L(t) = \cancel{3} + \cancel{3e^{-t}\cos(t)} - 3e^{-t}\sin(t) - \cancel{1} - \cancel{3e^{-t}\cos(t)} -$$

$$- 3e^{-t}\sin(t) - \cancel{2} = -6e^{-t}\sin(t)$$

Получили

$$\boxed{\begin{aligned} i_C(t) &= -6e^{-t}\cos(t) \\ u_L(t) &= -6e^{-t}\sin(t) \end{aligned}}$$

8. Проверка.

Найдем $i_C(t)$ и $u_L(t)$ через вольт-амперные характеристики элементов.

$$i_C(t) = C u_C'(t) = -3e^{-t}\cos(t) - 3e^{-t}\cancel{\sin(t)} + 3e^{-t}\cancel{\sin(t)} -$$

$$- 3e^{-t}\cos(t) = -6e^{-t}\cos(t)$$

$$u_L(t) = L i_L'(t) = -3e^{-t}\cancel{\cos(t)} - 3e^{-t}\sin(t) - 3e^{-t}\sin(t) +$$

$$+ 3e^{-t}\cancel{\cos(t)} = -6e^{-t}\sin(t)$$

Получили

$$i_C(t) = -6e^{-t}\cos(t)$$

$$u_L(t) = -6e^{-t}\sin(t)$$

Значения совпадают с полученными через уравнения связи.