МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по домашнему заданию №1
по дисциплине «Элементы функционального анализа»

Студентка гр. 8382 ________________ Звегинцева Е.Н.

Преподаватель ________________ Коточигов А.М.

Санкт-Петербург
2021

Задание.

Вариант 6.

Многогранник симметричен по координатным плоскостям, заданы вершины в первом октанте(положительном):

{A{5, 6, 0}, B{7, 0, 4}, H{0, 6, 4}, AA {10, 0, 0}, BB {0, 0, 0}, HH{0, 0, 5}}

Проверить неравенство треугольника для векторов W1 (-4, 8, -7), W2 (7, -8, -5)

Найти наибольшее и наименьшее значение евклидовой нормы на векторах, имеющих норму 1 в норме, порожденной многогранником.

Выполнение работы.

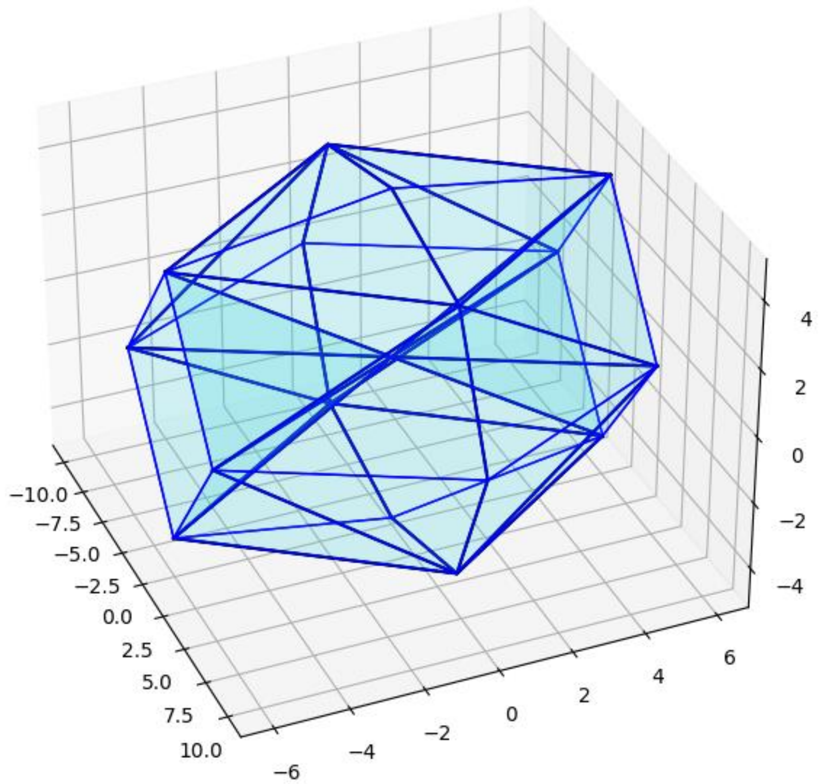
Для построения многогранника нужно трижды отразить известные координаты относительно координатных плоскостей.

W1 → W2 $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, z)$

W2 → W3 $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$

W3 → W$(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$

Результат представлен на рисунке



Для нахождения норм векторов заданных точек, мы рассмотрим угол OABH(нам нужен угол, в котором коэффициенты разложения вектора будут положительны), в котором построим биортогональный базис для $O\ A$, $O\ B$, $O\ H$:

$$OA' = \frac{1}{(OA_1, OA)} OA_1$$

$$OB' = \frac{1}{(OB_1, OB)} OB_1$$

$$OH' = \frac{1}{(OH_1, OH)} OH_1$$

$$OA_1 = OB \times OH$$

$$OB_1 = OA \times OH$$

$$OH_1 = OA \times OB$$

Следовательно, раскладываем вектор по базису

$OW \quad = k_1 OA + k_2 OB + k_3 OH$, *где*

$$k_1 = (OW \quad , OA'), k_2 = (OW \quad , OB'), k_2 = (OW \quad , OH')$$

Норма в данном случае, считается как:

$$||W \quad || = k_1 + k_2 + k_3$$

Найдем нормы для заданных векторов:

- Для точки $W_1(-4, 8, -7)$

  Координаты базисных векторов:

  $OA_1 = (-5, 6, 0)$

  $OB_1 = (-7, 0, -4)$

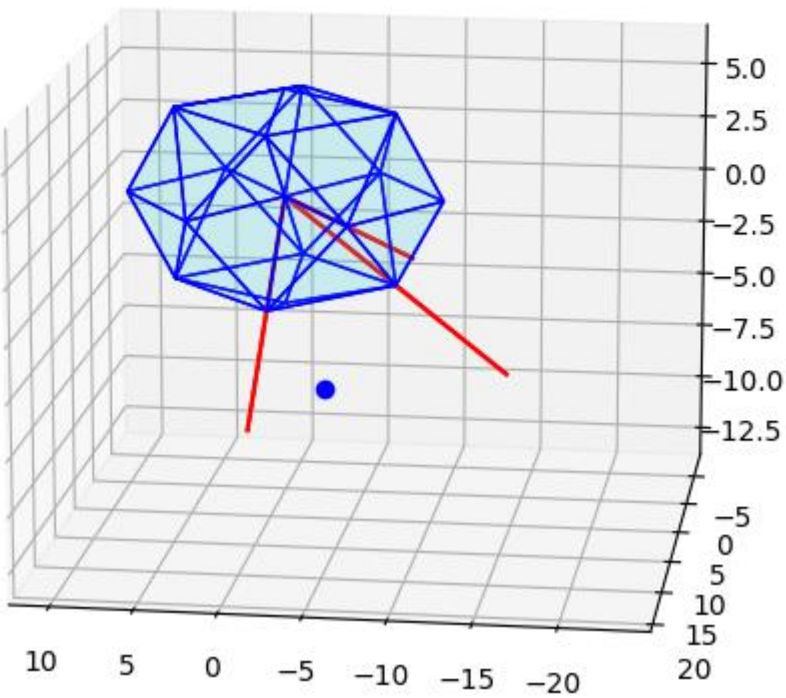
  $OH_1 = (0, 6, -4)$

  Коэффициенты разложения и норма:

  $OW_1 = 0.090278 * OA + 0.50694 * OB + 1.243056 * OH$

  $||W_1|| = 1.840278$

На графике показана заданная точка с базисными векторами



- Для точки $W_2(7, -8, -5)$

  Координаты базисных векторов:

  $OA_2 = (5, -6, 0)$

  $OB_2 = (7, 0, -4)$

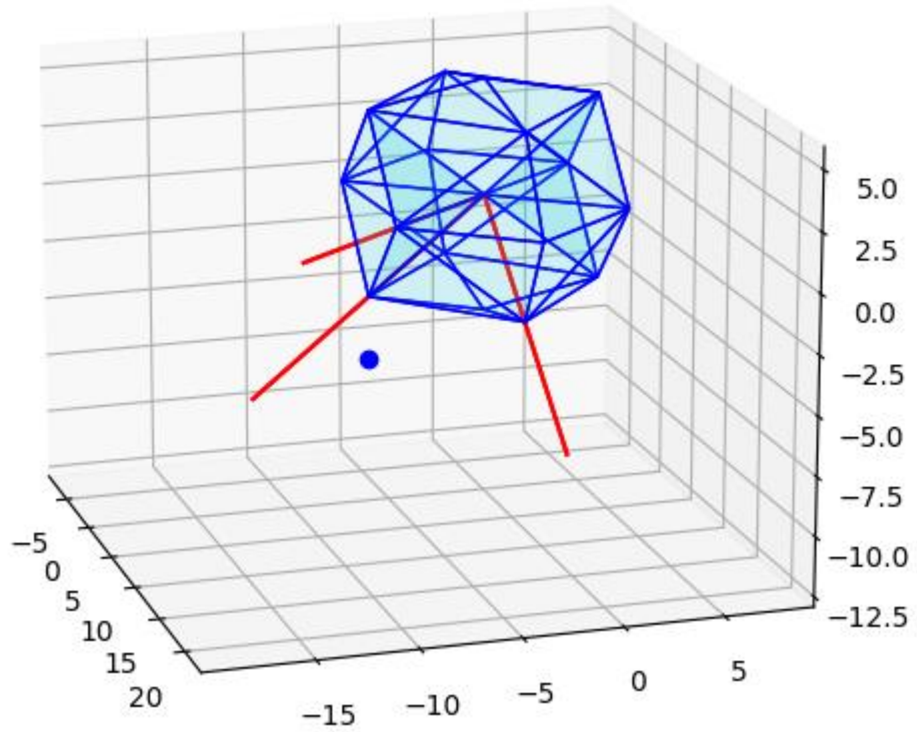
  $OH_2 = (0, -6, -4)$

  Коэффициенты разложения и норма:

  $OW_2 = 0.63194 * \mathrm{OA} + 0.54861 * \mathrm{OB} + 0.701389 * \mathrm{OH}$

  $||W_2|| = 1.88194$

  На графике показана заданная точка с базисными векторами



- Для точки $W_1+W_2 = (3, 0, -12)$ (аналогично предыдущим пунктам, только для угла $OHBHH$)

  Координаты базисных векторов:

  $OB_3 = (7, 0, -4)$

  $OH_3 = (0, -6, -4)$

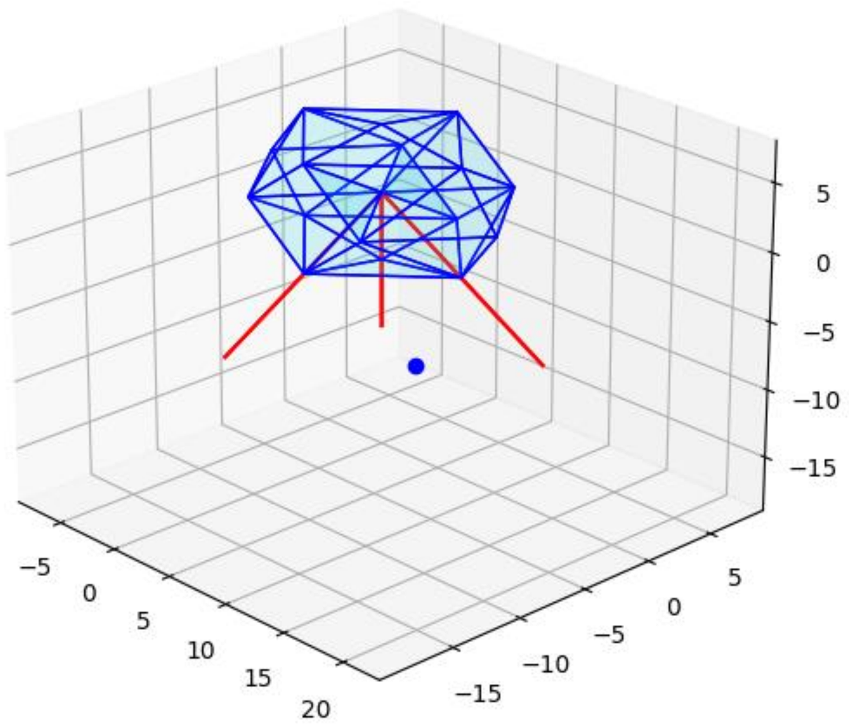
  $OHH_3 = (0, 0, -5)$

  Коэффициенты разложения и норма:

  $OW_3 = 0.42857142857142855 * OB + 0.0 * OH + 2.0571428571428574 * OHH$

  $||W_3|| = 2.4857142857142858$

  На графике показана заданная точка с базисными векторами



Проверка неравенства треугольника.

Для проверки неравенства треугольника для векторов, используется вектор W_3, вычисленный ранее

Неравенство векторов:

$$||W_1|| + ||W_2|| \geq ||W_1 + W_2|| = ||W_3||$$

1.8819444444444444 + 1.8402777777777778 ≥ 2.4857142857142858

Неравенство выполняется.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения евклидовой нормы на векторах, имеющих норму 1 в норме, порожденной многогранником.

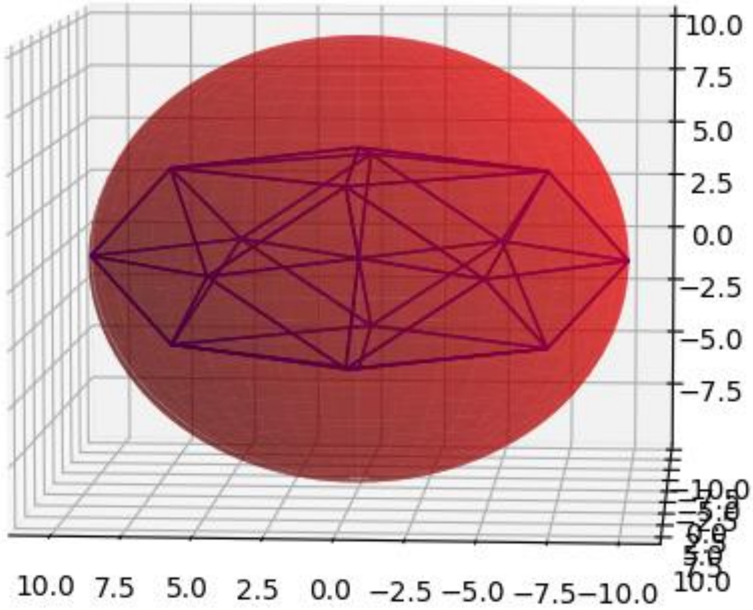
Вектор с наибольшим значением евклидовой нормы - это вектор от начала координат к вершине многогранника, следовательно нам нужно найти максимум среи векторов, соединяющих вершины и начало координат.

Евклидова норма:

$$\|OW\| = \quad \left(\sqrt{x^2 \ + y^2 \ + z^2}\right)$$

$$\|OW\|(\max) = 10$$

Изобразим данную сферу на графике



Минимум евклидовой нормы можно взять из центров масс, в связи с тем, что многогранник можно разбить на треугольники.

$$C_1 = \frac{1}{3}(OA + OB + OH)$$

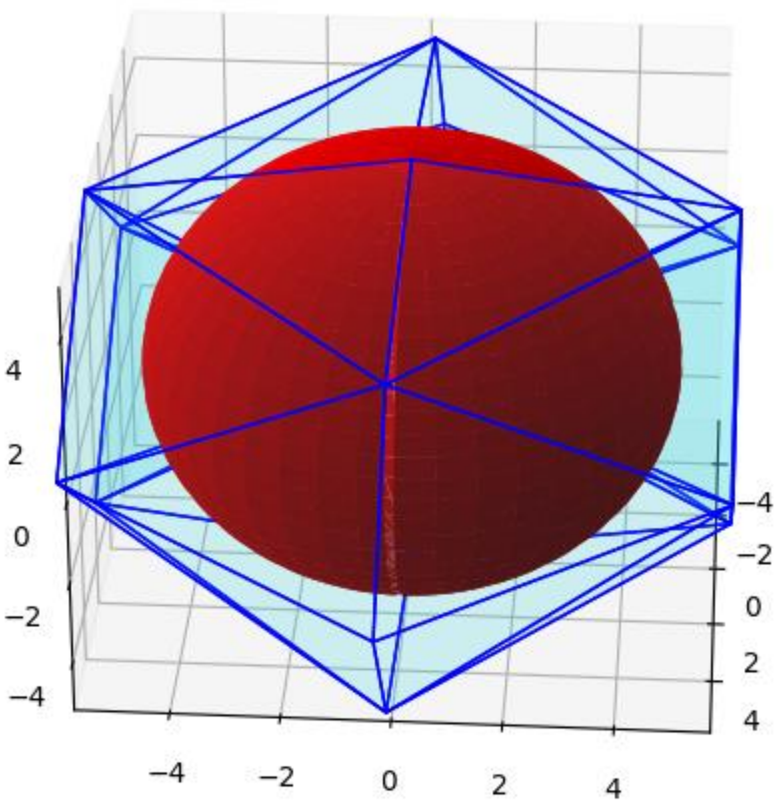
$$C_2 = \frac{1}{3}(OA + OB + OAA)$$

$$C_3 = \frac{1}{3}(OA + OH + OBB),$$

$$C_4 = \frac{1}{3}(OH + OB + OHH)$$

$$\|OW\|(\min) = 5$$

Изобразим данную сферу на графике


4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
−4
−2
0
2
4