Статистический анализ
Индивидуальное домашнее задание №3
Вариант 8

Киреев Константин

18.12.2020

Результаты статистического эксперимента приведены в таблице 1. Требуется оценить характер (случайной) зависимости переменной Y от переменной X.

Таблица 1. $\alpha_1 = 0.05; h = 1.70$

```
##  [,1]  [,2] [,3]  [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12] [,13] [,14]
## x 3.00  2.00 1.00  2.00  0.0 2.00 3.00 1.00 1.00  2.00  3.00   3.0  3.00  3.00
## y 8.89 10.33 8.22 12.15  6.6 7.65 8.64 4.05 6.68  2.27 10.63   5.7  8.92  4.59
##  [,15] [,16] [,17] [,18] [,19] [,20] [,21] [,22] [,23] [,24] [,25] [,26] [,27]
## x  2.00  0.00  3.00  1.00  1.00  2.00  2.00  3.00  2.00  1.00  1.00  4.00  2.00
## y 10.82 11.09  2.14  6.63  8.02  6.99  8.28  7.01  4.09  8.52  5.48  9.92  7.35
##  [,28] [,29] [,30] [,31] [,32] [,33] [,34] [,35] [,36] [,37] [,38] [,39] [,40]
## x  2.00  2.00  1.00   1.0  1.00  1.00  3.00  2.00  2.00  3.00  4.00  4.00  3.00
## y  9.92 10.16 10.49   9.1  7.29  5.29  5.06  8.32  7.64 10.25  9.02  8.92  4.98
##   [,41] [,42] [,43] [,44] [,45] [,46] [,47] [,48] [,49] [,50]
## x  3.00  4.00  3.00  2.00  2.00  3.00  2.00  3.00  1.00  2.00
## y  8.33  6.61  9.19 11.52  9.74  6.55  5.67  6.01  4.57  2.29
```

Задание 1

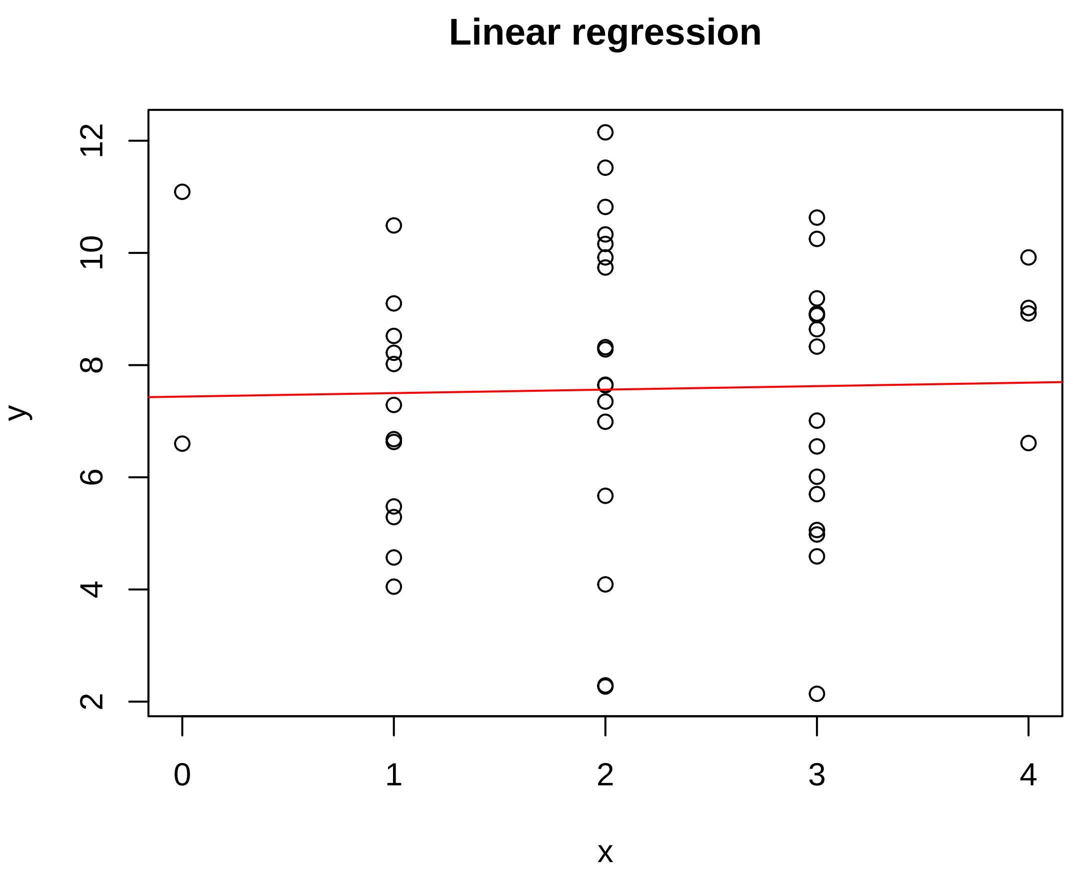
Построить графически результаты эксперимента. Сформулировать линейную регрессионную модель переменной Y по переменной X. Построить МНК оценки параметров сдвига β_0 и масштаба β_1. Построить полученную линию регрессии. Оценить визуально соответствие полученных данных и построенной оценки.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i - N(0, \sigma^2) \tag{1}$$

$$\beta_1 = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x^2} - \bar{x}^2} = 0.0621511 \tag{2}$$

$$\beta_0 = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X} = 7.4385966 \tag{3}$$

$$Y = \hat{\beta}_1 X + \beta_0 = 0.0621511X + 7.4385966 \tag{4}$$



Задание 2

Построить и интерпретировать несмещенную оценку дисперсии. На базе ошибок построить гистограмму с шагом h. Проверить гипотезу нормальности ошибок на уровне α_1 по χ^2. Оценить расстояние полученной оценки до класса нормальных распределений по Колмогорову. Визуально оценить данный факт.

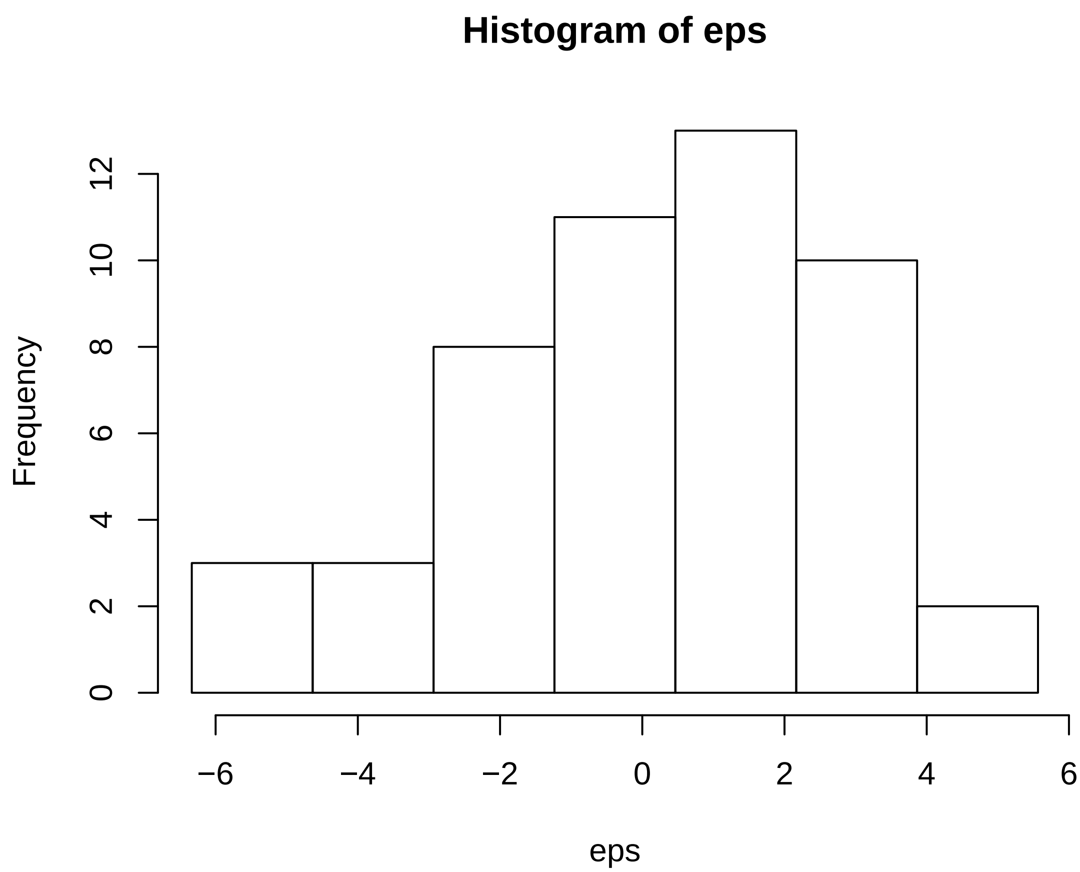
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{1}^{n}(Y-\bar{Y})^2 = 6.1827473 \tag{5}$$

$$\varepsilon_i = Y_i - \hat{\beta}_1 X_i - \hat{\beta}_0 \tag{6}$$

$\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$:

```
## [1] 1.26495002 2.76710116 0.71925230 4.58710116 -0.83859656 0.08710116
## [7] 1.01495002 -3.45074770 -0.82074770 -5.29289884 3.00495002 -
1.92504998
## [13] 1.29495002 -3.03504998 3.25710116 3.65140344 -5.48504998 -
0.87074770
```

```
## [19]  0.51925230 -0.57289884  0.71710116 -0.61504998 -3.47289884  1.01925230
## [25] -2.02074770  2.23279888 -0.21289884  2.35710116  2.59710116  2.98925230
## [31]  1.59925230 -0.21074770 -2.21074770 -2.56504998  0.75710116  0.07710116
## [37]  2.62495002  1.33279888  1.23279888 -2.64504998  0.70495002 -1.07720112
## [43]  1.56495002  3.95710116  2.17710116 -1.07504998 -1.89289884 -1.61504998
## [49] -2.93074770 -5.27289884
```



$$H_0 : \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \sim N(0, \sigma^2) \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i - np_i(0, \sigma^2))^2}{np_i(0, \sigma^2)} \to \chi^2 \tag{8}$$

Метод минимизации хи-квадрат

$$\underset{\sigma^2}{argmin} \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i - np_i(0, \sigma^2))^2}{np_i(0, \sigma^2)} \tag{9}$$

Разделим выборку на 6 зон:

Интервал	$(-\infty;-3.4)$	$(-3.4;-1.7)$	$(-1.7;0)$	$(0;1.7)$	$(1.7;3.4)$	$(3.4;\infty)$
m_i	5	8	10	15	9	3

Задача реализована в R с помощью скрипта:

```
csq <- function(sgm.sq){
  prob <- pnorm(up, 0, sgm.sq) - pnorm(lw, 0, sgm.sq)
  return (sum((m-n*prob)^2)/prob/n)
}
XM <- nlm(csq, sqrt(s))
XM$estimate^2; XM$minimum
```

Получаем $\hat{\sigma}^2 = 6.0184705$ **и** $\chi^2 = 1.5922697$

$$l = r - d - 1 = 4 \tag{10}$$

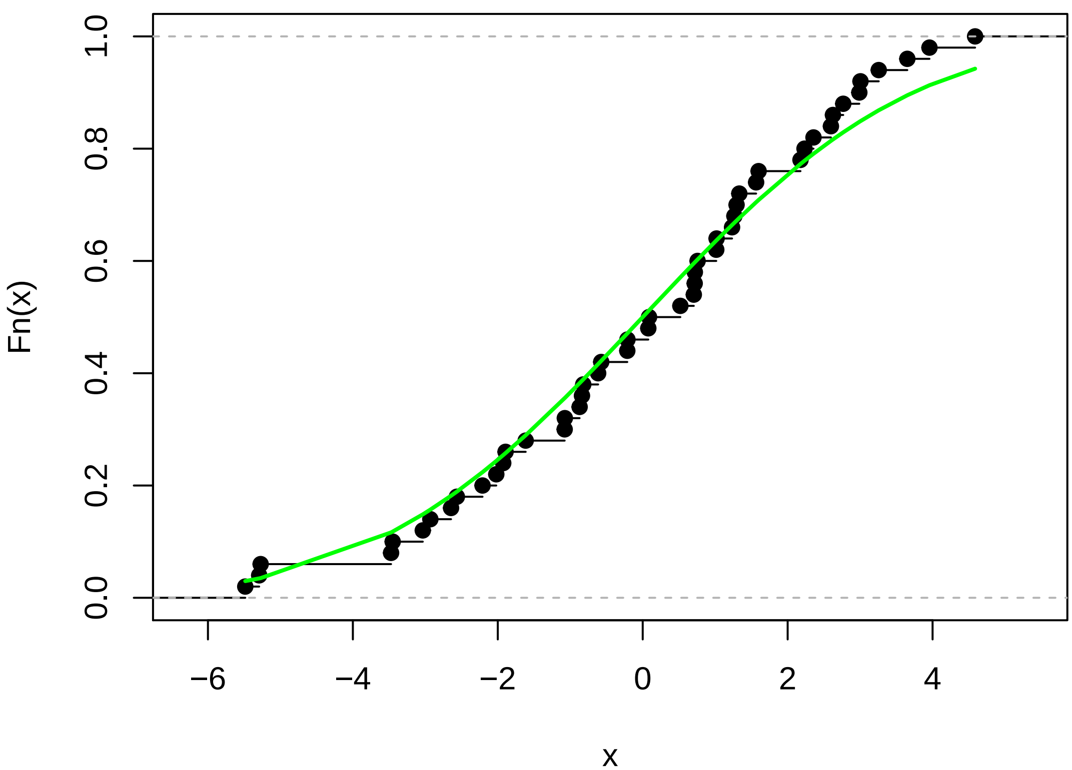
$$\chi^2 = 9.487729 \tag{11}$$

$$\chi^2 = 1.5922697 < \chi^2 = 9.487729 \Rightarrow \text{гипотеза } H_0 \text{ принимается} \tag{12}$$

Оценим расстояние оценки до класса нормальных распределений по Колмогорову. Минимизируем статистику Колмогорова с помощью следующего скрипта:

```
kolm.stat<-function(s){
  sres<-sort(eps)
  fdistr<-pnorm(sres,0,s)
  max(abs(c(0:(n-1))/n-fdistr),abs(c(1:n)/n-fdistr))
}
ks.dist<-nlm(kolm.stat, 2.453257)
```

Получаем расстояние $D = 0.0756747$ **и** $\tilde{\sigma}^2 = 8.4739449$**. Ниже представлены эмпирическая функция распределения ошибок и фукнция распределения** $N(0, \tilde{\sigma}^2)$**.**



Задание 3

В предположении нормальности ошибок построить доверительные интервалы для параметров β_0 и β_1 уровня доверия $1-\alpha_1$. Построить доверительный эллипс уровня доверия $1-\alpha_1$ для (β_0, β_1) (вычислить его полуоси).

$$\psi = C^T\beta \tag{13}$$

$$\hat{\psi} \sim N(\psi, \sigma^2 b), \sigma^2 b = var(\hat{\psi}) = \sigma^2 C^T (XX^T)^{-1} C \tag{14}$$

$$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\sigma\sqrt{b}} \sim N(0,1); \frac{(n-r)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-r} \Rightarrow \frac{\hat{\psi}-\psi}{s\sqrt{b}} \sim S_{n-r} \tag{15}$$

$$x_\alpha : S_{n-r}(x_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \tag{16}$$

$$P(-x_\alpha \leqslant \frac{\hat{\psi}-\psi}{s\sqrt{b}} \leqslant x_\alpha) = P(\hat{\psi} - x_\alpha s\sqrt{b} \leqslant \psi \leqslant \hat{\psi} + x_\alpha s\sqrt{b}) \tag{17}$$

$$x_\alpha = 2.0106348 \tag{18}$$

$$\beta_0 \in (5.7687784; 9.1084148) \text{ - ДИ с уровнем доверия } 1-\alpha \tag{19}$$

$$\beta_1 \in (-0.6447393; 0.7690416) \text{ - ДИ с уровнем доверия } 1-\alpha \tag{20}$$

$$\frac{(\hat{\psi}-\psi)^T(C^T(XX^T)^{-1}C)^{-1}(\hat{\psi}-\psi)}{\sigma^2} \sim \chi^2_q \quad (21)$$

$$\frac{((\hat{\psi}-\psi)^T(C^T(XX^T)^{-1}C)^{-1}(\hat{\psi}-\psi)q\sigma^2)}{\frac{n-r}{n+r}\cdot\frac{s^2}{\sigma^2}} = \frac{(\hat{\psi}-\psi)^T(C^T(XX^T)^{-1}C)^{-1}(\hat{\psi}-\psi)}{qs^2} \sim F_{q,n-r} \quad (22)$$

$$x_\alpha : F_{q,n-r}(x_\alpha) = 1-\alpha \quad (23)$$

$$\left\{\psi : (\hat{\psi}-\psi)^T(C^T(XX^T)^{-1}C)^{-1}(\hat{\psi}-\psi) \leqslant s^2 q x_\alpha\right\} \quad (24)$$

$$x_\alpha = 3.1907273 \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix}\beta_1-\hat{\beta}_1 & \beta_0-\hat{\beta}_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.019992 & -0.0427829\\ -0.0427829 & 0.1115554\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1-\hat{\beta}_1\\ \beta_0-\hat{\beta}_0\end{pmatrix} \leqslant 39.4549219 \quad (26)$$

Собственные числа матрицы: **0.1284342, 0.0031132**
После ортогонального преобразования получаем:

$$0.1284342(\beta_1^*-0.0621511)^2 + 0.0031132(\beta_0^*+7.4385966)^2 \leqslant 39.4549219 \quad (27)$$

$$\frac{(\beta_1^*-0.0621511)^2}{17.5271082^2} + \frac{(\beta_0^*+7.4385966)^2}{112.5765063^2} \leqslant 1 \quad (28)$$

Полуоси эллипса: **17.5271082; 112.5765063**.

Задание 4

Сформулировать гипотезу независимости переменной Y от переменной X. Провести проверку значимости.

$$\psi = C^T\beta; \hat{\psi} \sim N(\psi, \sigma^2 C^T(XX^T)^{-1}C) \quad (29)$$

$$H_0 : \psi = 0 \quad (30)$$

Статистика F-критерия: (31)

$$F = \frac{\psi^T(C^T(X\hat{X}^T)^{-1}C)^{-1}\hat{\psi}}{qs^2} \overset{H_0}{\sim} F_{q,n-r} \quad (32)$$

$$F = 0.0056005 \quad (33)$$

$$x_\alpha : F_{q,n-r}(x_\alpha) = 1-\alpha; \phi(Y,X) = 1_{F>x_\alpha} \quad (34)$$

$$x_\alpha = 4.0426521 \quad (35)$$

$$H_1 : \hat{\psi} = \beta_1 \quad (36)$$

$F < x_\alpha \Rightarrow$ Принимаем гипотезу H_0, переменная Y независима с переменной X на уровне значимости α (37)

0.9406559 – наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу. (38)

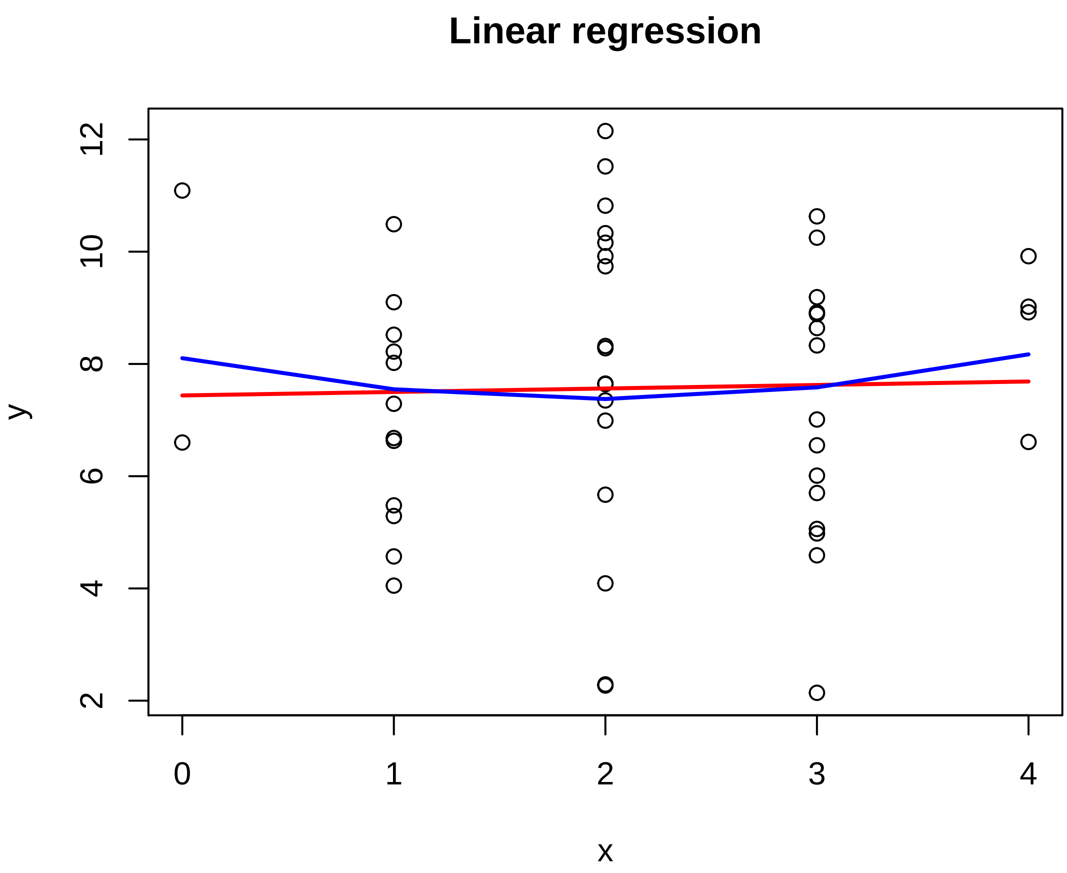
Задание 5

Сформулировать модель, включающую дополнительный член с X^2. Построить МНК оценки параметров $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ в данной модели. Изобразить графически полученную регрессионную зависимость.

$$Y_i = \beta_3 + \beta_2 X_i + \beta_1 X_i^2 + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \tag{39}$$

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{40}$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.190431 \\ -0.744725 \\ 8.1027066 \end{pmatrix} \tag{41}$$



Задание 6

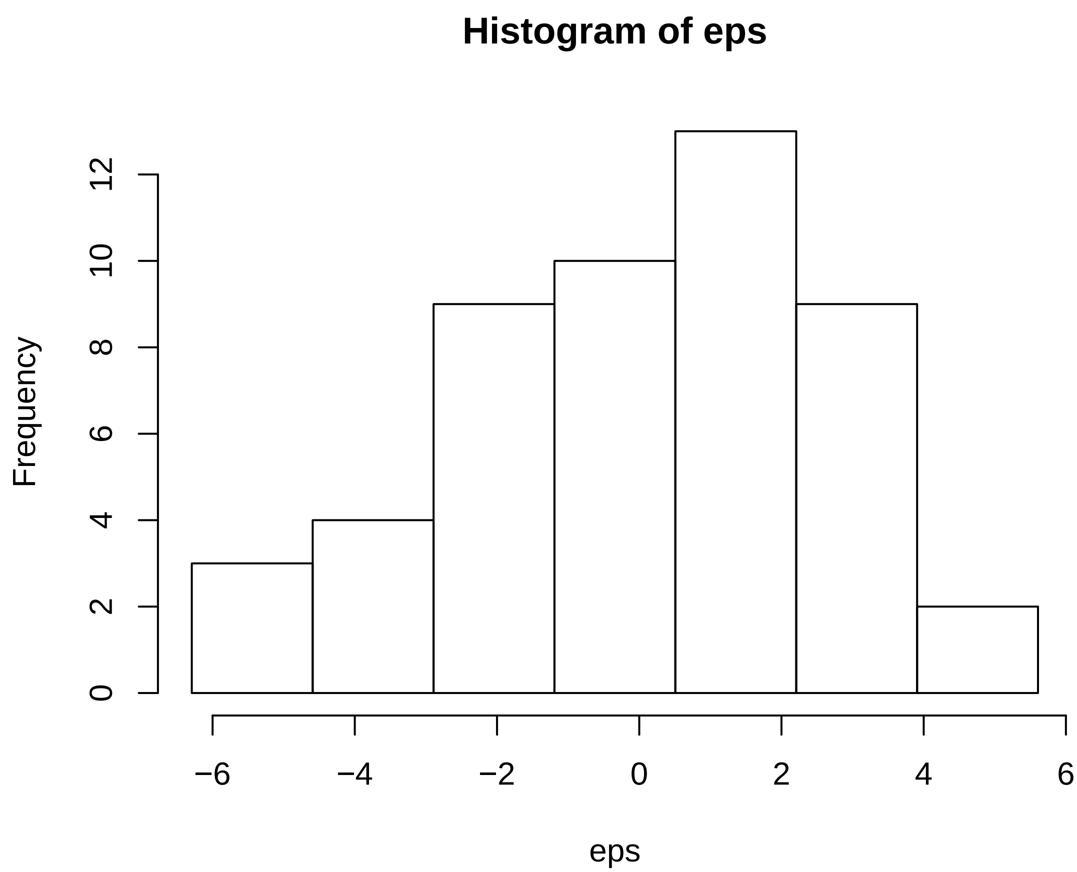
Построить несмещенную оценку дисперсии. Провести исследование нормальности ошибок как в п.3.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-3}\sum_{1}^{n}(Y_i - \hat{\beta}_1 X_i^2 - \hat{\beta}_2 X_i - \hat{\beta}_3)^2 = 6.2575876 \quad (42)$$

$$\varepsilon_i = \hat{Y} - X^T\hat{\beta} \quad (43)$$

$\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$:

```
## [1] 1.30758951 2.95501947 0.67158744 4.77501947 -1.50270658 0.27501947
## [7] 1.05758951 -3.49841256 -0.86841256 -5.10498053 3.04758951 -
1.88241049
## [13] 1.33758951 -2.99241049 3.44501947 2.98729342 -5.44241049 -
0.91841256
## [19] 0.47158744 -0.38498053 0.90501947 -0.57241049 -3.28498053 0.97158744
## [25] -2.06841256 1.74929755 -0.02498053 2.54501947 2.78501947 2.94158744
## [31] 1.55158744 -0.25841256 -2.25841256 -2.52241049 0.94501947 0.26501947
## [37] 2.66758951 0.84929755 0.74929755 -2.60241049 0.74758951 -
1.56070245
## [43] 1.60758951 4.14501947 2.36501947 -1.03241049 -1.70498053 -
1.57241049
## [49] -2.97841256 -5.08498053
```



$$H_0 : \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \sim N(0, \sigma^2) \tag{44}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i - np_i(0,\sigma^2))^2}{np_i(0,\sigma^2)} \to \chi^2 \tag{45}$$

Метод минимизации хи-квадрат

$$\underset{\sigma^2}{argmin} \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i - np_i(0,\sigma^2))^2}{np_i(0,\sigma^2)} \tag{46}$$

Разделим выборку на 6 зон:

Интервал	$(-\infty; -3.4)$	$(-3.4; -1.7)$	$(-1.7; 0)$	$(0; 1.7)$	$(1.7; 3.4)$	$(3.4; \infty)$
m_i	4	9	10	15	9	3

Получаем $\hat{\sigma}^2 = 5.5559278$ **и** $\chi^2 = 1.4170828$

$$l = r - d - 1 = 4 \tag{47}$$

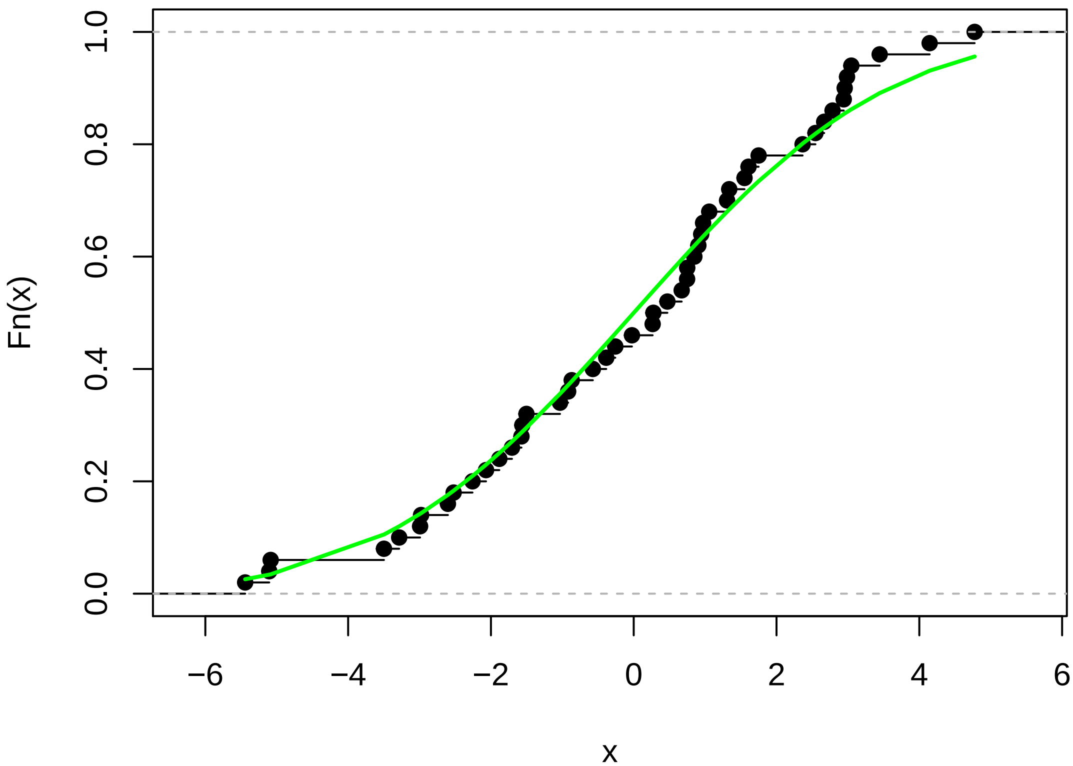
$$\chi^2 = 9.487729 \tag{48}$$

$$\chi^2 = 1.4170828 < \chi^2 = 9.487729 \Rightarrow \text{гипотеза } H_0 \text{ принимается} \tag{49}$$

Оценим расстояние оценки до класса нормальных распределений по Колмогорову. Минимизируем статистику Колмогорова с помощью следующего скрипта:

```
kolm.stat<-function(s){
  sres<-sort(eps)
  fdistr<-pnorm(sres,0,s)
  max(abs(c(0:(n-1))/n-fdistr),abs(c(1:n)/n-fdistr))
}
ks.dist<-nlm(kolm.stat, 2.357102)
```

Получаем расстояние $D = 0.0777714$ **и** $\tilde{\sigma}^2 = 7.8117778$**. Ниже представлены эмпирическая функция распределения ошибок и фукнция распределения** $N(0, \tilde{\sigma}^2)$**.**



Задание 7

В предположении нормальности ошибок построить доверительные интервалы для параметров $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ уровня $1 - \alpha_1$. Написать уравнение доверительного эллипсоида уровня доверия $1 - \alpha_1$.

$$\psi = C^T\beta; \hat{\psi} \sim N(\psi, \sigma^2 C^T(XX^T)^{-1}C) \tag{50}$$

$$x_\alpha : S_{n-r}(x_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \tag{51}$$

$$P(\hat{\psi} - x_\alpha s\sqrt{b} \leqslant \psi \leqslant \hat{\psi} + x_\alpha s\sqrt{b}) \tag{52}$$

$$x_\alpha = 2.0117405 \tag{53}$$

$$\beta_1 \in (-0.4190854; 0.7999474) \text{ - ДИ с уровнем доверия } 1-\alpha \tag{54}$$

$$\beta_2 \in (-3.4235389; 1.9340889) \text{ - ДИ с уровнем доверия } 1-\alpha \tag{55}$$

$$\beta_3 \in (5.3928258; 10.8125874) \text{ - ДИ с уровнем доверия } 1-\alpha \tag{56}$$

$$x_\alpha : F_{q,n-r}(x_\alpha) = 1 - \alpha \tag{57}$$
$$\left\{\psi : (\hat{\psi} - \psi)^T (C^T (XX^T)^{-1} C)^{-1} (\hat{\psi} - \psi) \leqslant s^2 q x_\alpha \right\} \tag{58}$$
$$x_\alpha = 2.8023552 \tag{59}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 - \hat{\beta}_1 & \beta_2 - \hat{\beta}_2 & \beta_3 - \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0146697 & -0.0621569 & 0.051159 \\ -0.0621569 & 0.2833572 & -0.2595491 \\ 0.051159 & -0.2595491 & 0.2899676 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 - \hat{\beta}_1 \\ \beta_2 - \hat{\beta}_2 \\ \beta_3 - \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} \leqslant 52.607949 \tag{60}$$

Собственные числа матрицы: **0.5580359, 0.0296035,** 3.5505965×10^{-4}
После ортогонального преобразования получаем:

$$0.5580359(\beta_1^* - 0.190431)^2 + 0.0296035(\beta_2^* - (-0.744725))^2 + 3.5505965 \times 10^{-4}(\beta_3^* - 8.1027066)^2 \leqslant 52.607949 \tag{61}$$
$$\frac{(\beta_1^* - 0.190431)^2}{9.7094494^2} + \frac{(\beta_2^* - (-0.744725))^2}{42.1555085^2} + \frac{(\beta_3^* - 8.1027066)^2}{384.9240317^2} \leqslant 1 \tag{62}$$

Полуоси эллипсоида: **9.7094494; 42.1555085; 384.9240317**.

Задание 8

Сформулировать гипотезу линейной регрессионной зависимости переменной Y от переменной X и проверить ее значимость на уровне α_1.

$$\psi = C^T \beta; \hat{\psi} \sim N(\psi, \sigma^2 C^T (XX^T)^{-1} C) \tag{63}$$
$$H_0 : \psi = 0 \tag{64}$$

Статистика F-критерия: (65)

$$F = \frac{\psi^T (C^T (X\hat{X^T})^{-1} C)^{-1} \hat{\psi}}{q s^2} \overset{H_0}{\sim} F_{q,n-r} \tag{66}$$
$$F = 0.0199857 \tag{67}$$
$$x_\alpha : F_{q,n-r}(x_\alpha) = 1 - \alpha; \phi(Y, X) = 1_{F > x_\alpha} \tag{68}$$
$$x_\alpha = 4.0470999 \tag{69}$$
$$H_1 : \hat{\psi} = \beta_1 \tag{70}$$

$F < x_\alpha \Rightarrow$ Принимаем гипотезу H_0, переменная Y линейно регрессионно зависима с переменной X на уровне значимости α (71)

0.8881813 – наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу. (72)
