МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра АМ

ОТЧЕТ
по домашней работе №1
по дисциплине «Элементы функционального анализа»
Тема: Многоугольники и нормы

Студентка гр. 8382	____________________	Кулачкова М.К.
Преподаватель	____________________	Коточигов А.М.

Санкт-Петербург
2021

Постановка задачи

Вариант 12

- Вычислить норму, заданную выпуклым, центрально симметричным многогранником $\mathbb{R}^3$. Вершины в первом октанте:
$$A(5,6,0), B(3,0,3), H(0,7,6), AA(5,0,0), BB(0,4,0), HH(0,0,6).$$
- Проверить неравенство треугольника для векторов $(-4,8,-7)$ и $(7,-8,-5)$.
- Найти наибольшее и наименьшее значение евклидовой нормы на векторах, имеющих норму 1 в норме, порожденной многогранником.

Выполнение работы

1. Построение многогранника

Трижды отразим заданные точки относительно координатных плоскостей:

$$W_1 \to W_2(x,y,z) \to (x,-y,z)$$
$$W_2 \to W_3(x,y,z) \to (-x,y,z)$$
$$W_3 \to W(x,y,z) \to (x,y,-z)$$

Получили замкнутую, симметричную относительно координатных плоскостей поверхность W. Многогранник W должен быть выпуклым, но точка BB, а также точки, полученные при ее отражении, оказываются «вдавленными» в многогранник. Чтобы многогранник был выпуклым, необходимо, чтобы ордината этой точки была не меньше наибольшей из ординат других точек, поэтому заменим точку BB на точку $BB'(0,7,0)$. Полученный многогранник представлен на рисунке 1.

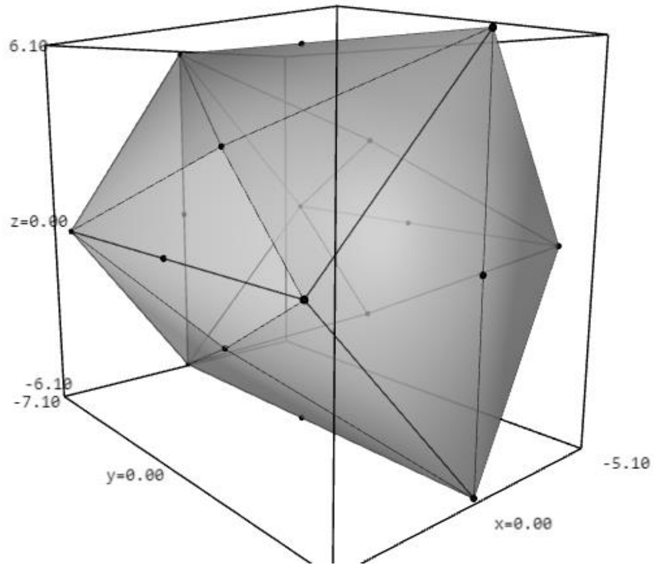

Рисунок 1

2. Вычисление нормы

Для вычисления нормы вектора OP необходимо рассмотреть все трехгранные углы в $\{(x, y, z) : z > 0\}$ и найти угол, в базисе которого коэффициенты разложения вектора будут положительны.

Рассмотрим угол $OABH$. Для базиса OA, OB, OH построим биортогональный:

$$OA' = \frac{1}{(OA_1, OA)} OA_1, OA_1 = OB \times OH,$$

$$OB' = \frac{1}{(OB_1, OB)} OB_1, OB_1 = OA \times OH,$$

$$OH' = \frac{1}{(OH_1, OH)} OH_1, OH_1 = OA \times OB.$$

Тогда вектор OP можно разложить по базису OA, OB, OH как $OP = k_1 OA + k_2 OB + k_3 OH$, где $k_1 = (OP, OA')$, $k_2 = (OP, OB')$, $k_3 = (OP, OC')$. Если $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ и $k_3 \geq 0$, то $\|OP\|_W = k_1 + k_2 + k_3$.

Описанным образом найдем нормы векторов $v_1 = (-4, 8, -7)$ и $v_2 = (7, -8, -5)$. Получим коэффициенты разложения для v_1 – $k_1 = 0.38028, k_2 =$

$0.69953, k_3 = 0.8169$ и норму $\|v_1\|_W = 1.89671$, для $v_2 - k_1 = 0.87324, k_2 = 0.87793, k_3 = 0.39437$ и норму $\|v_2\|_W = 2.14554$.

Для проверки неравенства треугольника найдем вектор $v_{12} = v_1 + v_2 = (3, 0, -12)$, его коэффициенты разложения $k_1 = 0.0, k_2 = 1.0, k_3 = 1.5$ и норму $\|v_{12}\|_W = 2.5$. Тогда сравним величины $\|v_1 + v_2\|_W = \|v_{12}\|_W$ и $\|v_1\|_W + \|v_2\|_W$.

$$\|v_{12}\|_W = 2.5$$

$$\|v_1\|_W + \|v_2\|_W = 1.89671 + 2.14554 = 4.04225$$

$$\|v_{12}\|_W < \|v_1\|_W + \|v_2\|_W,$$

т. е. неравенство треугольника выполняется.

На рис. 2 и 3 оранжевым обозначены векторы v_1 и v_2, а красным – вектор v_{12}.

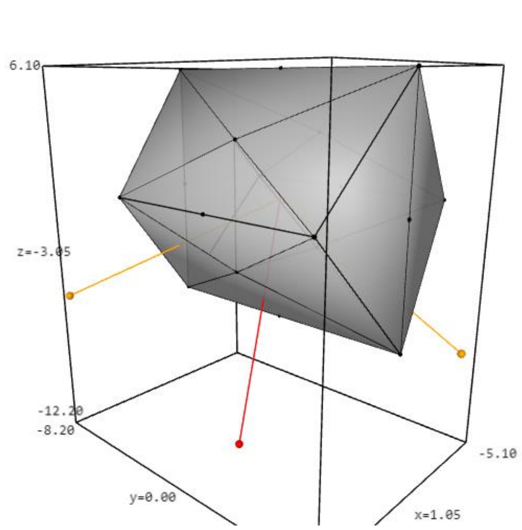

Рисунок 2

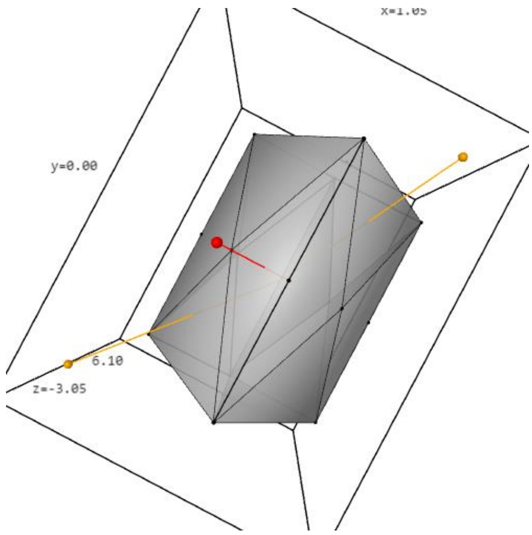

Рисунок 3

3. Вычисление максимума и минимума евклидовой нормы на векторах, имеющих норму 1 в норме, порожденной многогранником

Концы векторов, имеющих норму 1 в норме, порожденной многогранником, лежат на его поверхности, поэтому очевидно, что вектор с наибольшей евклидовой нормой будет проведен из начала координат в одну из вершин многогранника, а вектор с наибольшей евклидовой нормой будет расстоянием от начала координат до одной из плоскостей, образующих грани многогранника.

Евклидова норма вектора $OP(x, y, z)$ рассчитывается по формуле $\|OP\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Найдем максимум евклидовой нормы среди векторов, соединяющих вершины многогранника в первом октанте с началом координат. Наибольшая евклидова норма является нормой вектора $OH(0, 7, 6)$: $\|OH\| = 9.21954$. На рис. 4 изображена сфера с радиусом OH и центром в начале координат. Видно, что поверхность многогранника касается сферы, что свидетельствует о правильности найденного решения.

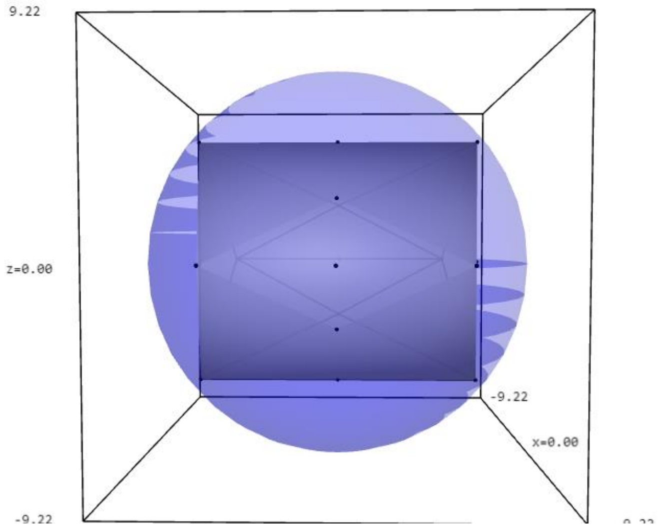

Рисунок 4

Для нахождения минимума евклидовой нормы нужно построить нормали к плоскостям, образующим грани многогранника. Рассмотрим грань ABH. Уравнение соответствующей ей плоскости можно записать в виде $N_x(x - x_a) + N_y(y - y_a) + N_z(z - z_a) = 0$, где (x_a, y_a, z_a) – координаты точки A, (N_x, N_y, N_z) – координаты вектора нормали $n = AB \times AH$. Расстоянием от начала координат до плоскости ABH будет длина вектора, соединяющего начало координат с точкой пересечения плоскости ABH и нормали n. Координаты (x_0, y_0, z_0) точки пересечения будут решением системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{N_x} = \dfrac{y}{N_y} \\ \dfrac{y}{N_y} = \dfrac{z}{N_z} \\ N_x x + N_y y + N_z z = D, \end{cases}$$

где $D = N_x x_a + N_y y_a + N_z z_a$. Проведем такие вычисления для каждой из граней, лежащих в первом октанте, и найдем минимум $\sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2}$. Получим $ON(3.46154, 0, 2.30769)$ и $\|ON\| = 4.16025$. Сфера с радиусом ON и центром в начале координат изображена на рис. 5.

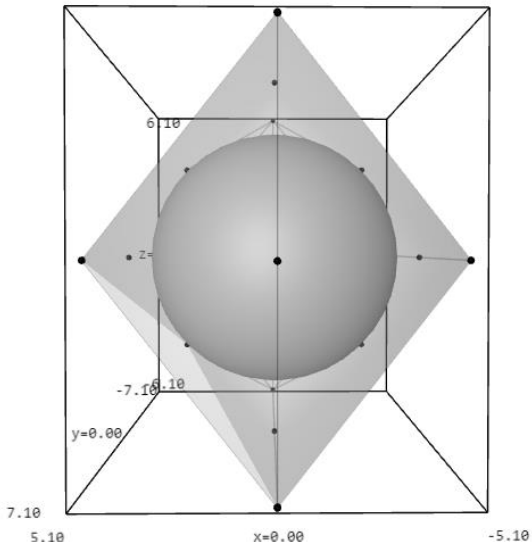

Рисунок 5