МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №1
по дисциплине «Теория принятия решений»
Тема: Принятие решений в матричных играх
Вариант 2

Студент гр. 8383	____________________	Бабенко Н.С.
Преподаватель	____________________	Попова Е.В.

Санкт-Петербург
2022

Цель работы

Изучение различных инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе матричных игр.

Основные теоретические положения

Рассмотрим простейшую математическую модель конечной конфликтной ситуации, в которой имеется два участника и выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется антагонистической игрой двух лиц с нулевой суммой. Игра состоит из двух ходов: игрок А выбирает одну из возможных $a_i,\ i = 1..m$ стратегий, а игрок Б выбирает одну из возможных стратегий $b_j,\ j = 1..n$. Каждый выбор производится при полном незнании выбора соперника. В результате выигрыш игроков составит соответственно a_{ij} и $-a_{ij}$. Цель игрока А – максимизировать величину a_{ij}, а игрока Б – минимизировать эту величину. Критерием принятия решения является функция, выражающая предпочтение лица, принимающего решение, и определяющая правило, по которому выбирается приемлемый или оптимальный вариант решения.

Матрица, составленная из величин $a_{ij},\ i = 1..m,\ j = 1..n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Матрица (1) называется платежной матрицей, или матрицей игры. Каждый элемент платежной матрицы $a_{ij},\ i = 1..m,\ j = 1..n$, равен выигрышу А (проигрышу Б), если он выбрал стратегию $A_i,\ i = 1..m$, а игрок Б выбирал стратегию $B_j,\ j = 1..n$.

Задача каждого из игроков – найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший доход.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Если игрок А выбрал стратегию $A_i,\ i = 1..m$, то в худшем случае (например, если его ход известен Б) он получит выигрыш $\alpha_i = \min_j a_{ij}$. Предвидя такую возможность, игрок А должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш.

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \{\min_j \alpha_{ij}\}. \qquad (2)$$

Представленная в (2) величина α – гарантированный выигрыш игрока А называется нижней ценой игры. Стратегия A_i, обеспечивающая получение выигрыша α, называется максиминной. Если первый игрок будет придерживаться своей максиминной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае выиграет не меньше α. Аналогично определяется наилучшая стратегия второго игрока. Игрок Б при выборе стратегии B_j, $j = 1..n$, в худшем случае получит проигрыш $\beta_j = \max_i a_{ij}$. Он выбирает стратегию B_j при которой его проигрыш будет минимальным и составит

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \{\max_i \alpha_{ij}\}. \qquad (3)$$

Представленная в (3) величина β – гарантированный проигрыш игрока Б называется верхней ценой игры. Стратегия β_j, обеспечивающая получение проигрыша β, называется минимаксной. Если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае проиграет не больше β. Фактический выигрыш игрока А (проигрыш игрока Б) при разумных действиях партнеров ограничен верхней и нижней ценой игры. Для матричной игры справедливо неравенство $\alpha \leq \beta$. Если $\alpha = \beta = \mathrm{v}$, т.е.

$$\max_i \left\{\min_j \alpha_{ij}\right\} = \min_j \max_i \alpha_{ij} = \mathrm{v}, \qquad (4)$$

то выигрыш игрока А (проигрыш игрока Б) определяется числом ν. Оно называется ценой игры.

В соответствии с (4), если $\alpha = \beta = \mathrm{v}$, то такая игра называется игрой с седловой точкой. Элемент матрицы α_{ij}, соответствующий паре оптимальных стратегий $(A_i,\ B_j)$, называется седловой точкой матрицы. Этот элемент является ценой игры.

Седловой точке соответствуют оптимальные стратегии игроков. Их совокупность – решение игры, которое обладает свойством: если один из игроков придерживается оптимальной стратегии, то второму отклонение от своей оптимальной стратегии не может быть выгодным. Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$ и $\alpha \leq \nu \leq \beta$ то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами.

Сложная стратегия, состоящая в случайном применении всех стратегий с определенными частотами, называется смешанной.

Постановка задачи

Используя инструментальные средства компьютерной алгебры решить матричные задачи.

Выполнение работы

- С помощью инструментального средства определить границы выигрыша и наличие седловой точки для матрицы C_1. Матрица C_1 представлена в (5).

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Результат выполнения программы, представленной в приложении А, показан на рис. 1.

```
Нижняя цена игры равна 1
Верхняя цена игры равна 3
Седловая точка не существует
```

Рисунок 1 – Результат выполнения программы для матрицы C_1

- Графически и аналитически решить матричную игру 2×2 для матрицы C_2. Матрица C_2 представлена в (6).

$$C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Решим данную задачу аналитически.

Надо проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю (7) и верхнюю (8) цену игры.

$$\alpha = \max_i \{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(1, 2)\} = 2 \quad (7)$$

$$\beta = \min_j \{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(4, 4)\} = 4 \quad (8)$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры ν. Известно, что $2 \leq \nu \leq 4$.

В таком случае игрок А должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить максимальный средний выигрыш. Аналогично, игрок Б должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать средний выигрыш игрока А.

Для этого запишем две системы (9) и (10) уравнений и решим их.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 4p_1 + 2p_2 = \nu \\ p_1 + 4p_2 = \nu \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{14}{5} \\ p_1 = \dfrac{2}{5} \\ p_2 = \dfrac{3}{5} \end{cases} \quad (9)$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 4q_1 + q_2 = \nu \\ 2q_1 + 4q_2 = \nu \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{14}{5} \\ q_1 = \dfrac{3}{5} \\ q_2 = \dfrac{2}{5} \end{cases} \quad (10)$$

Оптимальная стратегия игрока А: $P = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Оптимальная стратегия игрока Б: $Q = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

Цена игры: $\nu = \frac{14}{5}$

Решим данную задачу графически. Результаты представлены на рис. 2 и 3.

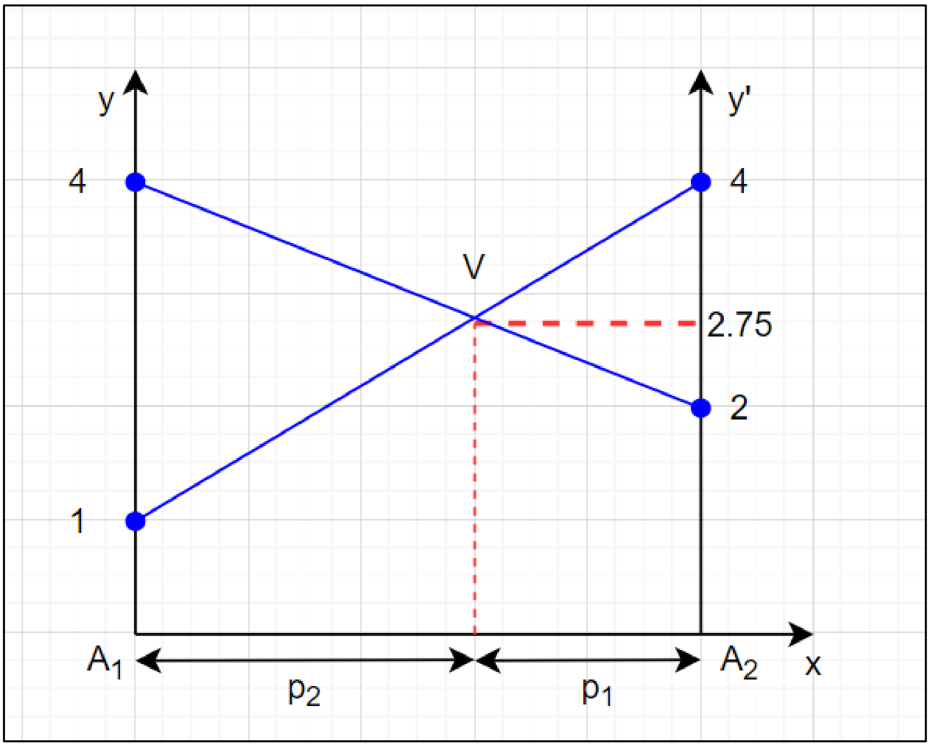

Рисунок 2 – Гарантированный выигрыш первого игрока в матрице платежей C_2

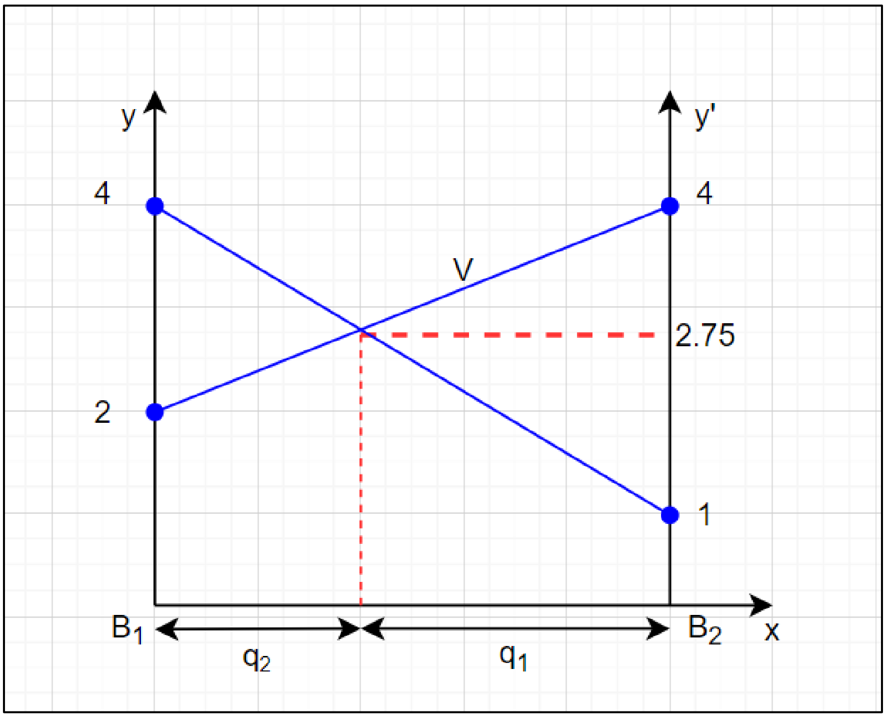

Рисунок 3 – Гарантированный проигрыш второго игрока в матрице платежей C_2

Относительная погрешность равна $\delta(\nu) = \frac{\left|\frac{14}{5} - 2.75\right|}{\frac{14}{5}} * 100\% = 1.79\%$;

По рис. 2 и 3 можно определить, что стратегии игроков А и Б равны $P = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right), Q = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, цена игры – $\nu = 2.75$, $\alpha = 2, \beta = 4$. Так как $\alpha \neq \beta$, можем сделать вывод о том, что седловой точки не существует.

- Графически и аналитически решить матричную игру 2×N для матрицы C_3. Матрица C_3 представлена в (11).

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.9 & 1.1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Решим данную задачу графически. Результат представлен на рис. 5.

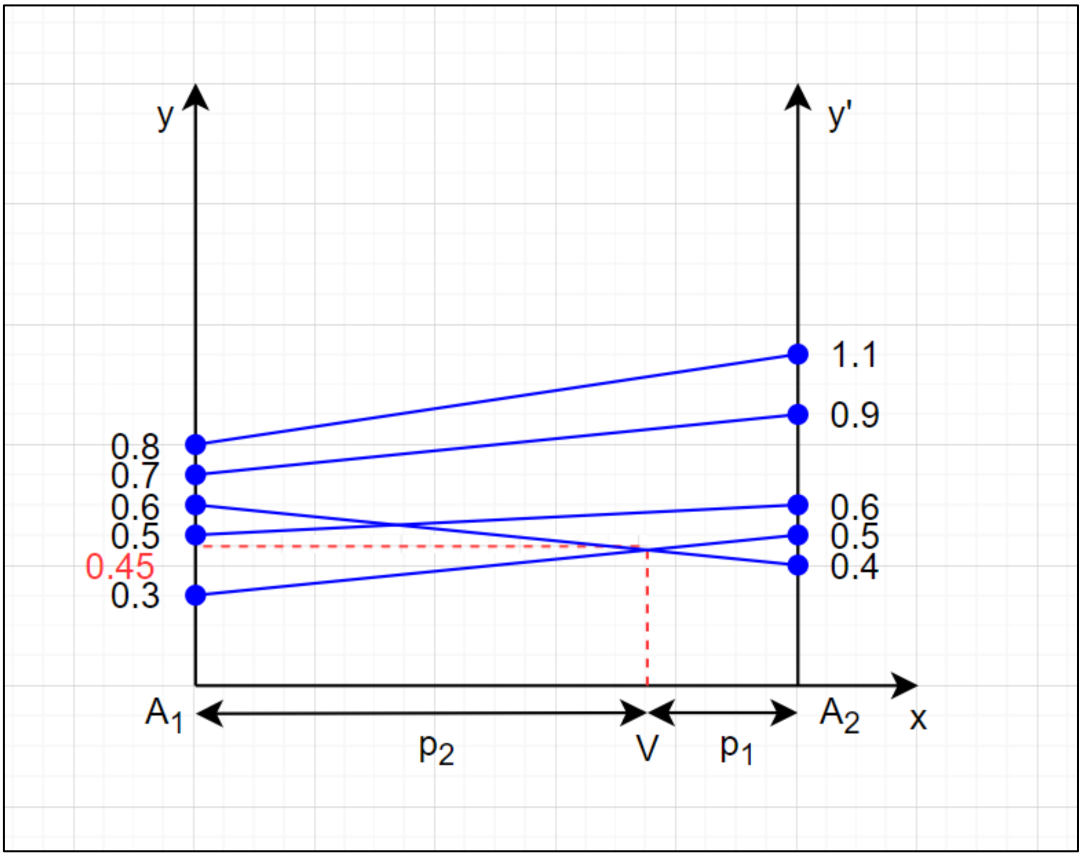

Рисунок 5 – Гарантированный выигрыш первого игрока при различном выборе смешанной стратегии

По рис. 5 можно определить цена игры $\nu = 0.45$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.5$. Так как $\alpha \neq \beta$, можем сделать вывод о том, что седловая точка отсутствует. Первому игроку заведомо невыгоды стратегии 4 и 5.

Решим данную задачу аналитически.

Для аналитического решения выберем прямые, на пересечении которых находится седловая точка и построим из них матрицу 2×2:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Надо проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю (12) и верхнюю (13) цену игры.

$$\alpha = \max_i\{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(0.3, 0.4)\} = 0.4 \tag{12}$$

$$\beta = \min_j\{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(0.5, 0.6)\} = 0.5 \tag{13}$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры ν. Известно, что $0.4 \leq \nu \leq 0.5$.

Запишем две системы (14) и (15) уравнений и решим их.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 0.3p_1 + 0.5p_2 = \nu \\ 0.6p_1 + 0.4p_2 = \nu \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{9}{20} \\ p_1 = \dfrac{1}{4} \\ p_2 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \tag{14}$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 0.3q_1 + 0.6q_2 = \nu \\ 0.5q_1 + 0.4q_2 = \nu \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{9}{20} \\ q_1 = \dfrac{1}{2} \\ q_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{15}$$

Оптимальная стратегия игрока А: $P = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

Оптимальная стратегия игрока Б: $Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Цена игры: $\nu = \frac{9}{20} = 0.45$

- Графически и аналитически решить матричную игру $M\times2$ для матрицы C_4. Матрица C_4 представлена в (16).

$$C_4 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 6 \\ 4 & 5 \\ 9 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Решим данную задачу графически. Результат представлен на рис. 9.

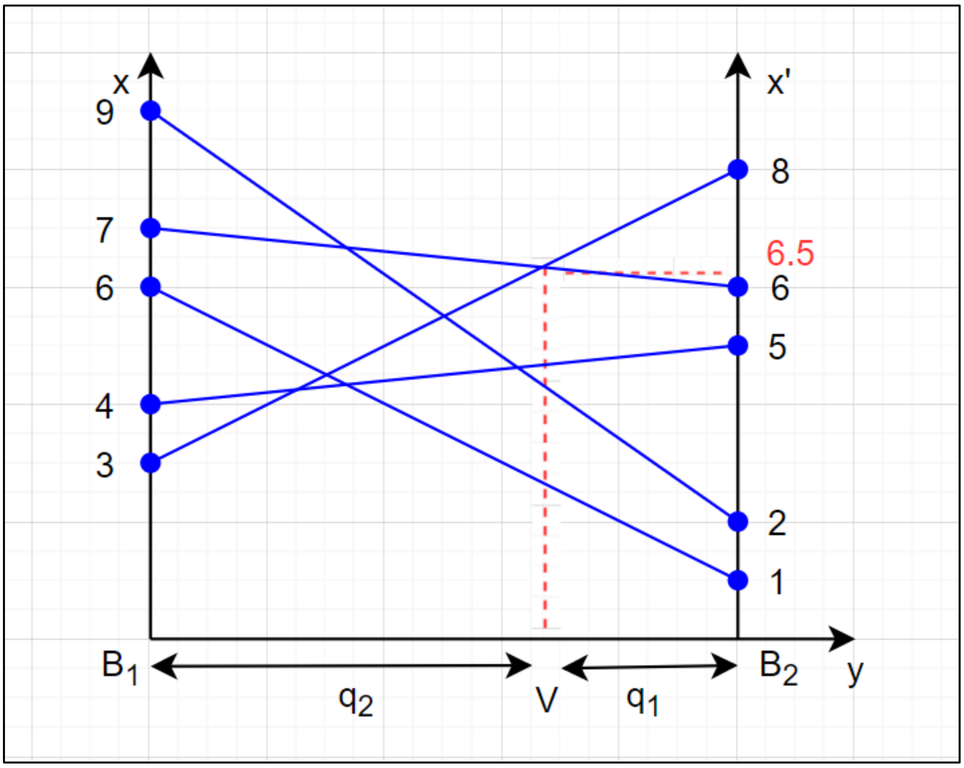

Рисунок 6 – Гарантированный проигрыш второго игрока при различном выборе смешанной стратегии

Исходя из рис. 6 можно определить, что смешанная стратегия игрока Б приблизительно равна $Q \approx \left(\frac{65}{200}, \frac{135}{200}\right)$, цена игры – $\nu = 6.5, \alpha = 6, \beta = 8$. Так как $\alpha \neq \beta$, можем сделать вывод о том, что седловой точки не существует. Второму игроку заведомо невыгодны стратегии 3 и 5.

Решим данную задачу аналитически.

Для аналитического решения выберем прямые, на пересечении которых находится седловая точка и построим из них матрицу 2×2:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Требуется проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю (17) и верхнюю (18) цену игры.

$$\alpha = \max_i \{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(3, 6)\} = \ 6 \tag{17}$$

$$\beta = \min_j \{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(7, 8)\} = 7 \tag{18}$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры ν. Известно, что $6 \leq \nu \leq 7$.

Запишем две системы (19) и (21) уравнений.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 3p_1 + 7p_2 = \nu \\ 8p_1 + 6p_2 = \nu \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{19}{3} \\ p_1 = \dfrac{1}{6} \\ p_2 = \dfrac{5}{6} \end{cases} \tag{20}$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 3q_1 + 8q_2 = \nu \\ 7q_1 + 6q_2 = \nu \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{19}{3} \\ q_1 = \dfrac{1}{3} \\ q_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \tag{22}$$

Оптимальная стратегия игрока А: $P = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$

Оптимальная стратегия игрока Б: $Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Цена игры: $\nu = \frac{19}{3} = 6.33$

Относительная погрешность равна

$$\delta(q1) = \frac{\left|\frac{1}{3} - \frac{65}{200}\right|}{\frac{1}{3}} * 100\% = \left(\frac{0.005}{0.33}\right) * 100\% = 1.52\%$$

$$\delta(q2) = \frac{\left|\frac{2}{3} - \frac{135}{200}\right|}{\frac{2}{3}} * 100\% = \left(\frac{0.0015}{0.67}\right) * 100\% = 2.24\%$$

- С помощью симплекс-метода решить матричную игру $M \times N$ для матрицы C_5. Матрица C_5 представлена в (23).

$$C_5 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Требуется проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю (24) и верхнюю (25) цену игры.

$$\alpha = \max_i\{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(4, 2, 1)\} = 4 \tag{24}$$

$$\beta = \min_j\{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(7, 5, 8)\} = 5 \tag{25}$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры ν. Известно, что $4 \leq \nu \leq 5$

Запишем две системы (26) и (27) уравнений.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 4p_1 + 7p_2 + 2p_3 \geq \nu \\ 5p_1 + 3p_2 + p_3 \geq \nu \\ 6p_1 + 2p_2 + 8p_3 \geq \nu \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \tag{26}$$

$$x_i = \frac{p_i}{\nu}$$

Чтобы найти решение данной задачи относительно первого игрока А надо:

найти минимум функции $F(x) = x_1 + x_2 + x_3$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 \geq 1 \end{cases} \quad (24)$$

С помощью библиотеки SciPy для оптимизации и поиска корней в линейном программировании симплекс-методом вычислен вектор X (рис. 7).

```
[57]: from scipy.optimize import linprog
      obj = [1,1,1]
      lhs_ineq = [[-4,-7,-2],[-5,-3,-1],[-6,-2,-8]]
      rhs_ineq = [-1,-1,-1]
      bnd = [(0, float("inf")),(0, float("inf")),(0, float("inf"))]
      opt = linprog(c=obj, A_ub=lhs_ineq, b_ub=rhs_ineq, bounds=bnd,method="simplex")
      opt.fun.round(3)
      opt.x.round(3)
      (1/opt.fun) * opt.x
      (1/opt.fun).round(3)

[57]: 0.217

[57]: array([0.174, 0.043, 0.   ])

[57]: array([0.8, 0.2, 0. ])

[57]: 4.6
```

Рисунок 7 – Решение вектора X симплекс-методом матрицы C_5

Получаем $F(x) = 0.217$ при $x_1 = 0.174, x_2 = 0.043, x_3 = 0$. Цена игры при этом $\nu = \frac{1}{0.217} \approx 4.6$, что соотносится с первоначальной оценкой $4 \leq \nu \leq 5$.

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 4q_1 + 5q_2 + 6q_3 \leq \nu \\ 7q_1 + 3q_2 + 2q_3 \leq \nu \\ 2q_1 + q_2 + 8q_3 \leq \nu \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{cases} \quad (27)$$

Чтобы найти решение данной задачи относительно второго игрока Б надо найти максимум функции $F(y) = y_1 + y_2 + y_3$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \leq 1 \\ 7y_1 + 3y_2 + 2y_3 \leq 1 \\ 2y_1 + y_2 + 8y_3 \leq 1 \end{cases}$$

С помощью библиотеки SciPy симплекс-методом вычислен вектор Y.

```
[63]:  0.217

[63]:  array([0.087, 0.13 , 0.   ])

[63]:  array([0.4, 0.6, 0. ])

[63]:  4.6
```

Рисунок 8 – Решение вектора Y симплекс-методом матрицы C_5

Получаем $F(y) = 0.217$ при $y_1 = 0.087, y_2 = 0.13, y_3 = 0$. Цена игры при этом $\nu = \frac{1}{0.217} \approx 4.6$, что соотносится с первоначальной оценкой $4 \leq \nu \leq 5$.

Опираясь на полученные данные, можно найти цену игры (2) и оптимальные смешанные стратегии игроков А (26) и Б (27):

$$\nu = \frac{1}{0.217} = 4.6 \tag{25}$$

$$P = X \cdot \nu = (\ 0.8, 0.2, 0\ ) \tag{26}$$

$$Q = Y \cdot \nu = (\ 0.4, 0.6, 0\ ) \tag{27}$$

Выводы

В ходе выполнения практической работы было реализовано инструментальное средство для нахождения нижней и верхней цен игры и для нахождения координат седловой точки на языке программирования Python, а также были получены навыки работы с библиотекой SciPy для линейного программирования.

При решении матричных игр были применены графический и аналитический методы нахождения оптимальных смешанных стратегий, а также был применён симплекс-метод. Решения матричных игр обоими способами дали одинаковый результат.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРОГРАММА ПОИСКА СТАЦИОНАРНОЙ ТОЧКИ

```
# %%
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from IPython.core.interactiveshell import InteractiveShell
InteractiveShell.ast_node_interactivity = "all"

# %%
def default(c):
    amin = c.min(axis=1)
    bmax = c.max(axis=0)
    alpha = max(amin)
    beta = min(bmax)
    print(f'Нижняя цена игры равна {alpha}')
    print(f'Верхняя цена игры равна {beta}')
    print(f'Седловая точка существует') if alpha == beta else
print(f'Седловая точка не существует')
    if alpha == beta:
        print(f'Координаты седловой точки равны ({np.argmax(amin)+1},
{np.argmin(bmax)+1})')
    p1 = (c[1,1]-c[1,0])/(c[0,0]+c[1,1]-(c[0,1]+c[1,0]))
    p2 = 1-p1
    q1 = (c[1,1]-c[0,1])/(c[0,0]+c[1,1]-(c[0,1]+c[1,0]))
    q2 = 1-q1
    v = c[0,0]*p1+c[1,0]*p2
    print(p1,p2,q1,q2,v)

# %%
c1 = np.array([[2,3,-1,4], [3,2,4,1], [-4,3,-1,-2], [-5,5,-3,-4]])
c2 = np.array([[4,1],[2,4]])
c3 = np.array([[0.5,0.3,0.6,0.7,0.8], [0.6,0.5,0.4,0.9,1.1]])
```

```
c31 = np.array([[0.3,0.6],[0.5,0.4]])
c4 = np.array([[3,8],[7,6],[4,5],[9,2],[6,1]])
c41 = np.array([[3,8],[7,6]])
c5 = np.array([[4,5,6], [7,3,2], [2,1,8]])

# %%
default(c5)

# %%
from scipy.optimize import linprog
obj = [1,1,1]
lhs_ineq = [[-4,-7,-2],[-5,-3,-1],[-6,-2,-8]]
rhs_ineq = [-1,-1,-1]
bnd = [(0, float("inf")),(0, float("inf")),(0, float("inf"))]
opt = linprog(c=obj, A_ub=lhs_ineq, b_ub=rhs_ineq, bounds=bnd,method="sim-
plex")
opt.fun.round(3)
opt.x.round(3)
(1/opt.fun) * opt.x
(1/opt.fun).round(3)

# %%
from scipy.optimize import linprog
obj = [-1,-1,-1]
lhs_ineq = [[4,5,6],[7,3,2],[2,1,8]]
rhs_ineq = [1,1,1]
bnd = [(0, float("inf")),(0, float("inf")),(0, float("inf"))]
opt = linprog(c=obj, A_ub=lhs_ineq, b_ub=rhs_ineq, bounds=bnd,method="sim-
plex")
-opt.fun.round(3)
opt.x.round(3)
(-1/opt.fun) * opt.x
(-1/opt.fun).round(3)
```