МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по домашнему заданию №3

по дисциплине «Элементы функционального анализа»

Студентка гр. 8383 ____________________

Преподаватель ____________________ Коточигов А.М.

Санкт-Петербург

2021

Задание.

Вариант 5.

Вершины:

{A, {3, 7, 0}, B, {4, 0, 4}, H, {0, 3, 3}, AA, {10, 0, 0}, BB, {0, 4, 0}, HH, {0, 0, 3}}

1) Опишите все функционалы (с нормой 1), принимающие наибольшее значение на образе грани ABH и найдите это значение
2) Проведите такое же описание для вершины A

Выполнение работы.

Выпуклый многогранник в банаховом пространстве X может быть описан:

$$W = \bigcap_{j=1}^{n} x; f_j(x) \le c_j$$

Где f_j – линейные функционалы на пространстве X, а c_j – вещественные числа.

Для заданного функционала h максимум достигается в тех и только тех точках x^*, где выполняется утверждение

$$h = \sum_{j \in J} \lambda_j f_j \,, \lambda_j > 0, J = \{j: f_j(x^*) = c_j\}$$

Можно заметить, что данное выражение можно согласовать с нормалью плоскости:

$$ax^* + bx^* + cx^* = f(x^*) = d, x^* \in P$$

Уравнение плоскости с точками A, B, H:

$$x + 3y + 5z - 24 = 0$$

Нормированный вектор нормали и есть функционал:

$$h^* = (0.1690308509457033, 0.50709255283711, 0.8451542547285166)$$

Максимальное значение функционала может быть получено в любой точки грани ABH:

$$\max f^* = f^*(B) = 4.6528$$

3) Проведите такое же описание для вершины A

В первом квадранте к вершине A примыкает 3 грани:

$$(A, AA, B), (A, B, H), (A, BB, H)$$

Пусть грани $(A, AA, B), (A, B, H), (A, BB, H)$ имеют соответственно нормали:

$$n_1 = (n_{11}, n_{12}, n_{13}), n_2 = (n_{21}, n_{22}, n_{23}), n_1 = (n_{21}, n_{22}, n_{23})$$

Тогда нормали отраженных относительно оси X граней:

$$n_4 = (n_{11}, n_{12}, -n_{13}), n_5 = (n_{21}, n_{22}, -n_{23}), n_6 = (n_{21}, n_{22}, -n_{23})$$

Если $h = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i f_{ji}$, то максимум достигается на пересечении соответствующих граней, чем в нашем случае и является точка A.

Если при разложении вектора g по нормалям, то есть:

$$g = \sum_{i=1}^{n} k_i n_i$$

найдется такое решение, где $k_j \geq 0$, то функционал достигает максимума в вершине A.

Для упрощения задачи будем рассматривать базис вектора g по трем нормалям, полагая $k_j = 0$ для других нормалей.

Определим нормированные нормали $n_1, \dots, n_6$ тем же образом, как в п. 1 (через уравнение плоскости по трем точкам)

$$n_1 = (0.48507125007266594, 0.48507125007266594, 0.7276068751089989)$$

$$n_2 = (0.1690308509457033, 0.50709255283711, 0.8451542547285166)$$

$$n_3 = (0.5144957554275265, -0.5144957554275265, -0.6859943405700353)$$

$$n_4 = (0.48507125007266594, 0.48507125007266594, -0.7276068751089989)$$

$$n_5 = (0.1690308509457033, 0.50709255283711, -0.8451542547285166)$$

$$n_6 = (0.5144957554275265, -0.5968485337951032, 0.9811429286638925)$$

Выберем вектор $g = (0.3, 0.4, 0.2)$

Найдем его координаты во всех комбинациях базисов $\{n_i, n_j, n_k\}$, которые покрывают коническую поверхность, образованную нормалями. Это углы из нормалей:

$$(n_1, n_2, n_4), (n_4, n_2, n_5), (n_5, n_2, n_3), (n_3, n_5, n_6)$$

$\boldsymbol{i\ j\ k}$	$\boldsymbol{k1}, \quad \boldsymbol{k2}, \quad \boldsymbol{k3}$
$\mathbf{1\ 2\ 4}$	$\mathbf{0.223\ 0.296\ 0.292}$
2 3 5	$0.735\ 0.243\ -0.301$
2 4 5	$0.488\ 0.515\ -0.192$
3 5 6	$-0.662\ 1.035\ 0.905$

Вектор g имеет разложения одному из базисов нормалей примыкающих граней, в котором все $k_j \geq 0$

$$g = \mathbf{0.223} * n_1 + \ \mathbf{0.296} * n_2 + 0 * n_3 + \mathbf{0.292} * n_4 + 0 * n_5 + 0 * n_6$$

Функционалы, достигающие максимума в вершине A, можно описать таким образом: это вектора, имеющие разложение в базисе трех различных нормалей примыкающих граней с положительными коэффициентами.