МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №2
по дисциплине «Теория принятия решений»
Тема: Бесконечные антагонистические игры
Вариант 8

Студент гр. 8383	____________________	Киреев К.А.
Преподаватель	____________________	Попова Е.В.

Санкт-Петербург
2022

Цель работы

Использование инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе бесконечных антагонистических игр.

Основные теоретические положения

В данной работе рассматриваются антагонистические игры, которые отличаются от матричных тем, что в них один или оба игрока имеют бесконечное (счётное или континуум) множество стратегий. С теоретико-игровой точки зрения это отличие малосущественно, поскольку игра остаётся антагонистической и проблема состоит в использовании более сложного аналитического аппарата исследования.

Таким образом, исследуются общие антагонистические игры, т.е. системы вида (1)

$$\Gamma = (X, Y, H), \tag{1}$$

где X и Y – произвольные бесконечные множества, элементы которых являются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно, а $H: X \times Y \to \mathbb{R}^1$ – функция выигрыша игрока 1. Выигрыш игрока 2 в ситуации (x, y) равен $[-H(x, y)], x \in X, y \in Y$ (игра антагонистическая). Далее рассматриваются такие игры, у которых функция H ограничена.

Одновременная игра преследования на плоскости.

Пусть S_1и S_2 – множества на плоскости. Игра Γ заключается в следующем. Игрок 1 выбирает некоторую точку $x \in S_1$, а игрок 2 выбирает точку $y \in S_2$. При совершении выбора игроки 1 и 2 не имеют информации о действиях противника, поэтому подобный выбор удобно интерпретировать как одновременный. В этом случае точки $x \in S_1$, $y \in S_2$ являются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно. Таким образом, множества стратегий игроков совпадают с множествами S_1 и S_2 на плоскости.

Целью игрока 2 является минимизация расстояния между ним и игроком 1 (игрок 1 преследует противоположную цель). Поэтому под выигрышем $H(x, y)$

игрока 1 в этой игре понимается евклидово расстояние $\rho(x, y)$ между точками $x \in S_1$ и $y \in S_2$, т.е. $H(x, y) = \rho(x, y), x \in S_1, y \in S_2$. Выигрыш игрока 2 полагаем равным выигрышу игрока 1, взятому с обратным знаком, а именно $[-\rho(x, y)]$ (игра антагонистическая).

Модель покера с одним кругом ставок и одним размером ставки.

В начале партии каждый из двух игроков A и B ставит по единице. После того, как каждый из игроков получит карту, ходит игрок A: он может или поставить ещё c единиц или спасовать и потерять свою начальную ставку. Если A ставит, то у B две альтернативы: он может или спасовать (теряя при этом свою начальную ставку), или уровнять, поставив c единиц. Если B уравнивает, то игроки открывают свои карты и игрок с лучшей картой выигрывает.

Стратегии строятся следующим образом. Пусть

- $\alpha(x)$ – вероятность того, что если A получит x, то он поставит c,
- $1 - \alpha(x)$ – вероятность того, что если A получит x, то он спасует,
- $\beta(y)$ – вероятность того, что если B получит y, то он уравняет ставку c,
- $1 - \beta(y)$ – вероятность того, что если B получит y, то он спасует.

Если игроки применяют эти стратегии, то ожидаемый чистый выигрыш $H(\alpha, \beta)$ представляет собой сумму выигрышей.

Постановка задачи

Используя инструментальные средства компьютерной алгебры решить задачи преследования и покера.

Выполнение работы

Одновременная игра преследования на плоскости.

Для задачи преследования были отображены фигуры на плоскости. Согласованные с вариантом фигуры представлены на рис. 1.

Были рассмотрены два случая задачи: центр масс фигуры S_1 принадлежит фигуре S_2 и центр масс фигуры S_1 не принадлежит фигуре S_2.

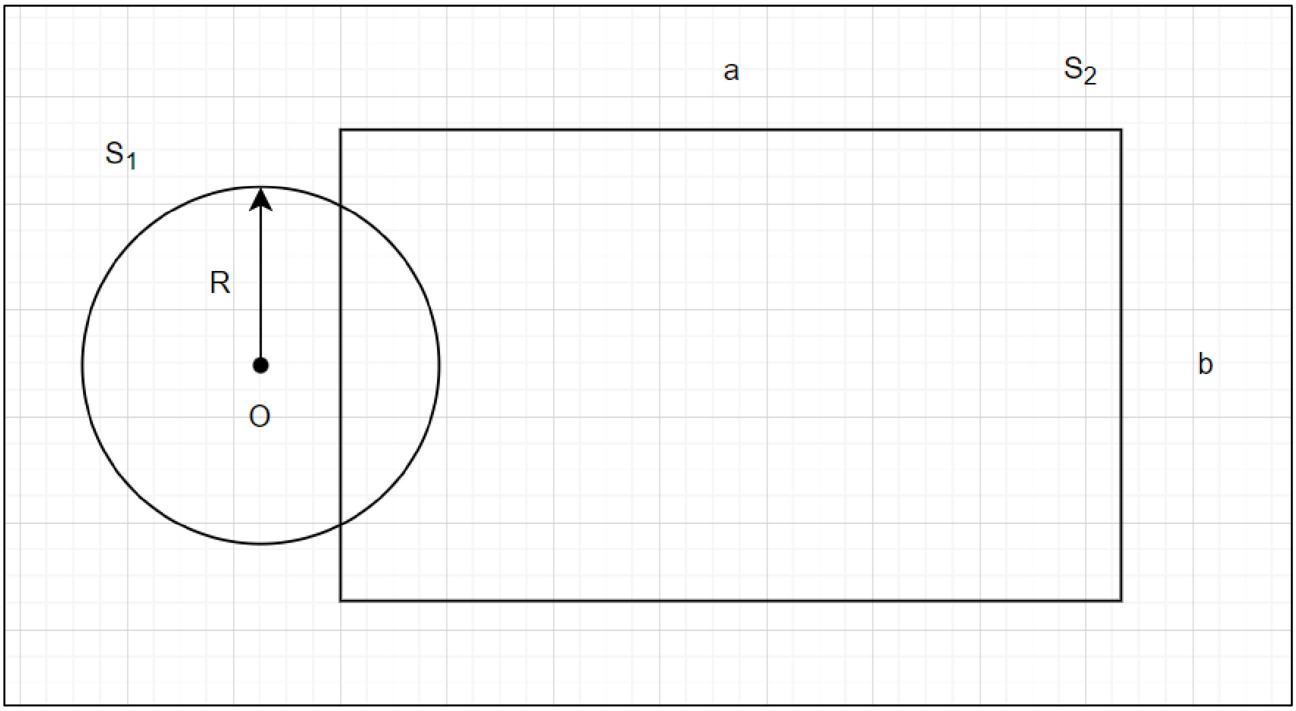

Рисунок 1 – Отображение фигур для случая $O \notin S_2$

- Центр масс фигуры S_1 не принадлежит фигуре S_2

  Найдём нижнюю цену игры.

  Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 2.

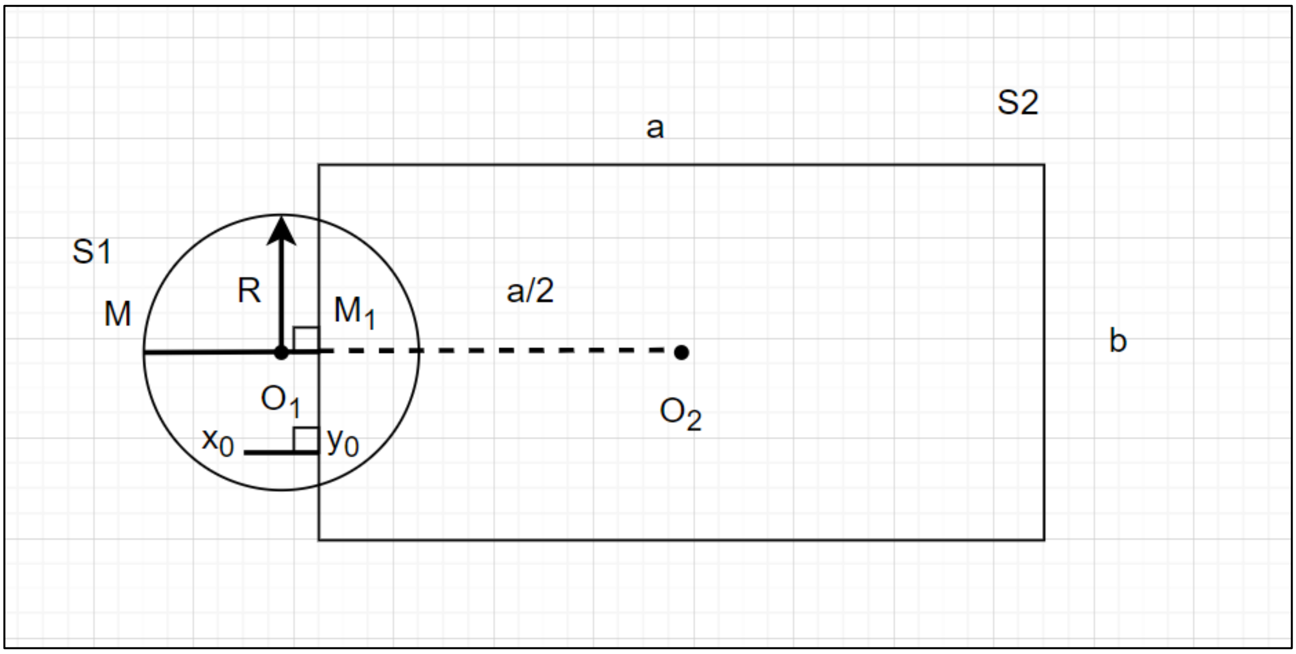

Рисунок 2 – Нахождение нижней цены игры для случая $O \notin S_2$

Поиск нижней цены игры для случая $O \notin S_2$:

1. Для любой точки x_0 принадлежащей S_1 и не принадлежащей S_2 минимальное расстояние до S_2 равно перпендикуляру, опущенному на сторону S_2. На рис. 2 изображен пример поиска минимального расстояния.
2. Для того, чтобы данное расстояние было максимально возможным, точка x_0 должна находиться на окружности S_1 и пересекать центр окружности.
3. Таким образом, согласно рис. 2 определим нижнюю цену игры:

$$\underline{v} = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} p(x, y) = R + (OO_1 - a/2)$$

Найдём верхнюю цену игры для случая $O \notin S_2$:

Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 3.

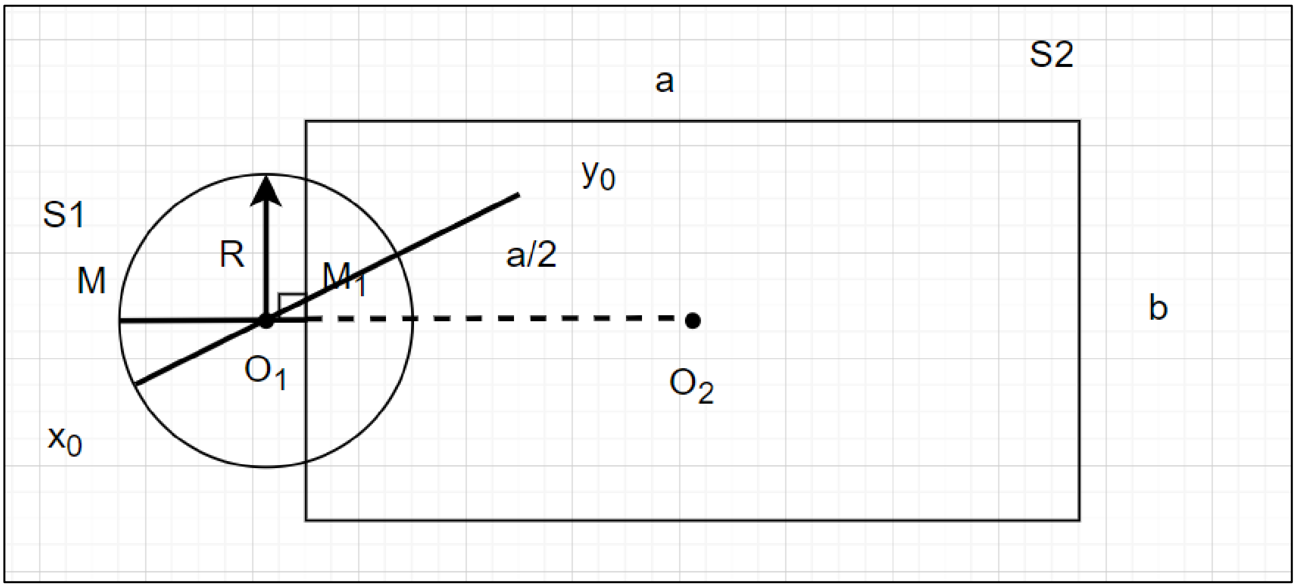

Рисунок 3 – Нахождение верхней цены игры для случая $O \notin S_2$

1. Для любой точки y_0 принадлежащей S_2 расстояние до любой точки x_0, принадлежащей S_1 будет максимальным, только в том случае если x_0 лежит на окружности S_1 и проходит через центр окружности.
2. Для того, чтобы данное расстояние было минимально возможным, точка y_0 должна находится на границе прямоугольника и образовывать перпендикуляр с точкой x_0.
3. Согласно рис. 3 определим верхнюю цену игры:

$$\overline{v} = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} p(x, y) = R + (OO_1 - a/2)$$

Проверим, существуют ли такие значения, при которых $\overline{\nu} = \underline{\nu}$.

Формулы для $\overline{\nu}$ и $\underline{\nu}$ совпадают, поэтому нижняя цена игры равна верхней цене игры, поэтому данный случай является игрой в чистых стратегиях.

$$\underline{\nu} = R + (OO_1 - a/2) = R + (OO_1 - a/2) = \overline{\nu}$$

- Центр масс фигуры S_1 принадлежит фигуре S_2.

Найдём нижнюю цену игры.

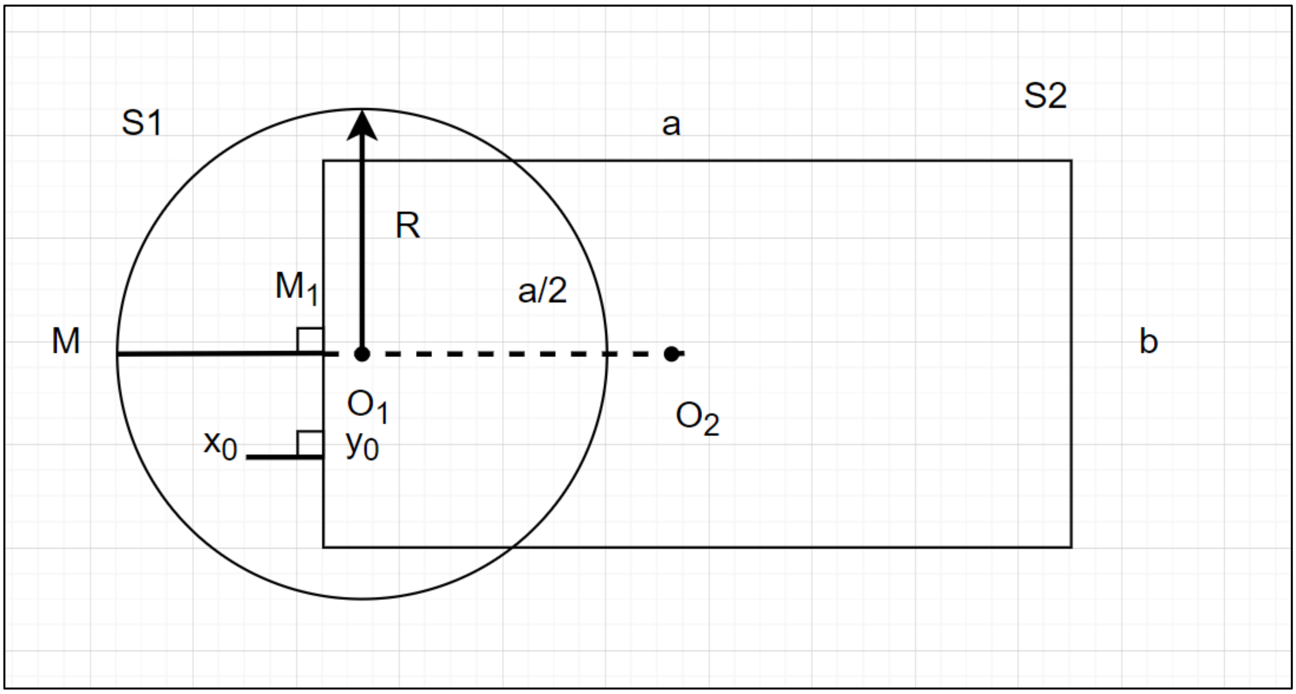

Рисунок 4 – Нахождение нижней цены игры для случая $O \in S_2$

Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 4.

Поиск нижней цены игры для случая $O \in S_2$:

1. Для любой точки x_0 принадлежащей S_1 и не принадлежащей S_2 минимальное расстояние до S_2 равно перпендикуляру, опущенному на сторону S_2. На рис. 4 изображен пример поиска минимального расстояния.
2. Для того, чтобы данное расстояние было максимально возможным, точка x_0 должна находиться на окружности S_1 и пересекать продолжение центра окружности.
3. Таким образом, согласно рис. 4 определим нижнюю цену игры:

$$\underline{\nu} = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} p(x, y) = R - (\frac{a}{2} - OO_1)$$

Найдём верхнюю цену игры.

Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 5.

Поиск верхней цены игры для случая $O \in S_2$:

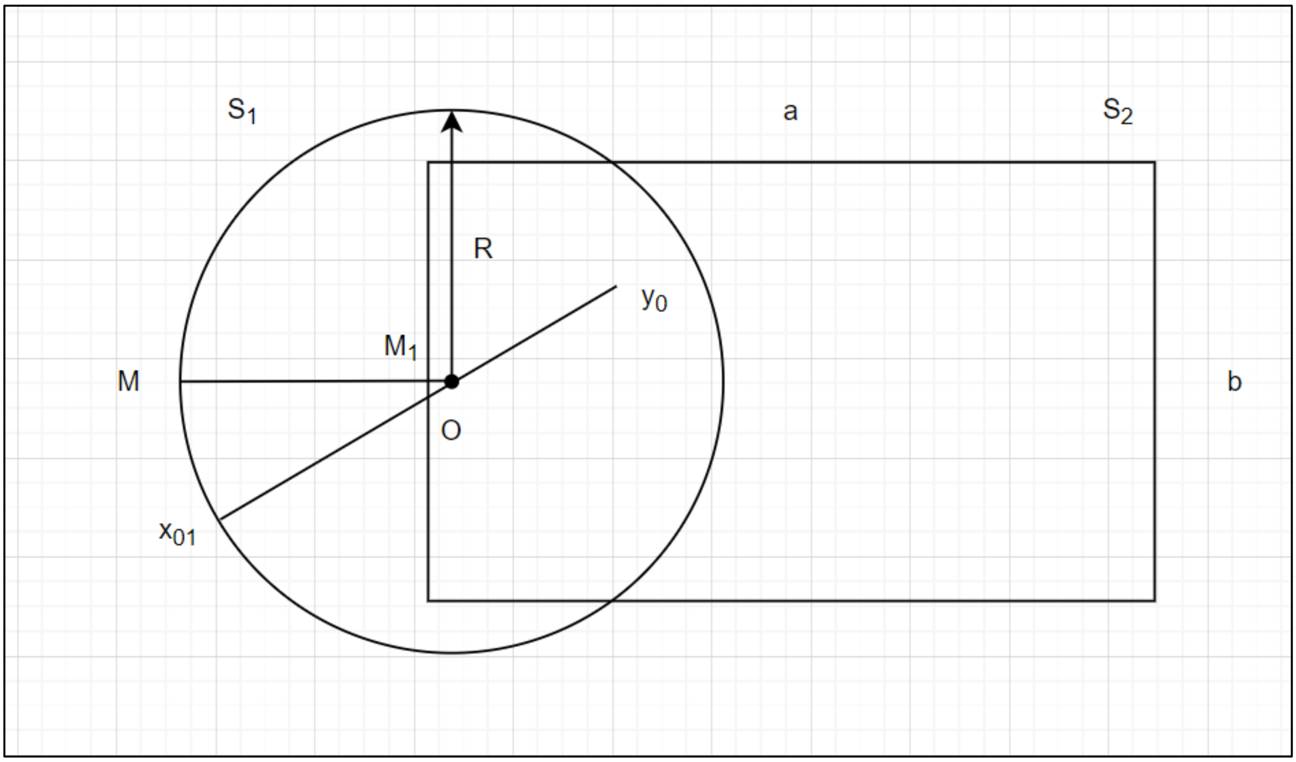

Рисунок 5 – Нахождение верхней цены игры для случая $O_1 \in S_2$

1. Для любой точки y_0 принадлежащей S_2 расстояние до любой точки $x_{0,}$ принадлежащей S_1 будет максимальным, только в том случае если x_0 лежит на окружности S_1 и отрезок пересекает центр. Но в зависимости от расположения точки y_0 точка x_0 будет меняться, на рис. 5 показан один из примеров расположения x_0. Можно увидеть, что при любом расположении x_0 расстояние до y_0 будет всегда больше или равно радиусу окружности R.
2. Для нахождения минимального расстояния можно заметить, что так как расстояние всегда $\geq R$, то минимум этого расстояние это и есть R.
3. Согласно рис. 5 определим верхнюю цену игры:

$$\overline{v} = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} p(x, y) = R$$

Проверим, существуют ли такие значения, при которых $\overline{v} = \underline{v}$.

$$R - (\frac{a}{2} - OO_1) = R$$

$$(\frac{a}{2} - OO_1) = 0$$
$$a/2 = OO_1$$

Таким образом, чтобы $\overline{v} = \underline{v}$ расстояние между центрами масс окружности S_1 и прямоугольника S_2 должно быть равно половине стороны, то есть большей стороне прямоугольника. Значит при данном условии, нижняя цена игры будет равна верхней цене игры, поэтому данный случай является игрой в чистых стратегиях.

$$\underline{v} = R - (\frac{a}{2} - OO_1) = R = \overline{v}$$

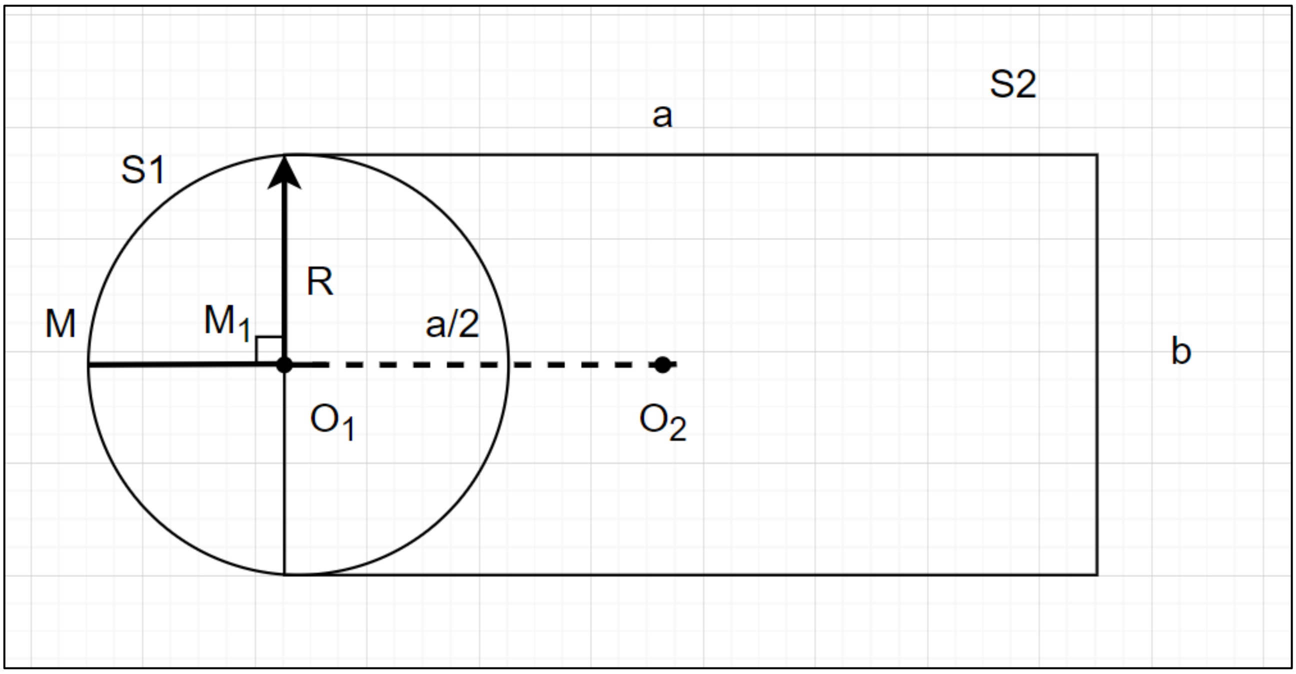

Рисунок 6 – Чистая стратегия

Модель покера с одним кругом ставок и одним размером ставки

Найдено значение игры покера с одним кругом ставок при значении ставки c, равной 9.

- Первая стратегия

Известно, что A использует стратегию $\alpha(x)$ с порогом a. Далее при преобразовании $H(\alpha, \beta)$ можно получить порог $b = \frac{1}{2(c+1)}[a(c+2) + c]$. И подставив b в $H(\alpha, \beta)$ можно найти минимальный проигрыш B, который рассчитывается по формуле:

$$H(a) = \frac{(\mathrm{c}+2)^2}{4(\mathrm{c}+1)}\left[-a^2 + 2a\frac{c^2}{(c+2)^2} - \frac{c^2}{(c+2)^2}\right] \text{где } a \text{ стратегия } A$$

Нужно максимизировать минимальный проигрыш B, поэтому находим максимум параболы, который равен:

$$a = \left(\frac{c}{c+2}\right)^2 = \left(\frac{9}{11}\right)^2 = \frac{81}{121}$$

$$b = \frac{c}{c+2} = \frac{9}{11}$$

Подсчитаем значение выигрыша первого игрока, подставим a и b в формулу $H(\alpha, \beta)$:

$$H(\alpha, \beta) = \frac{(\mathrm{c}+2)^2}{4(\mathrm{c}+1)}\left[\frac{c^4}{(c+2)^4} - \frac{c^2}{(c+2)^2}\right] = -\frac{c^2}{(c+2)^2}$$

Следовательно выигрыш A равен:

$$H(\alpha, \beta) = -\frac{9^2}{(9+2)^2} = -\frac{81}{121}$$

Проверим ответ, решив задачу с помощью программы, код программы представлен в приложении А.

```
[22]:   'Порог игрока A = 0.6694214876033059'

[22]:   'Порог игрока B = 0.8181818181818182'

[22]:   'Выигрыш игрока A = -0.6694214876033057'
```

Рисунок 7 – Результат выполнения программы

Игрок B находится в выигрышном положении, так как порог игрока A = $\frac{81}{121} = 0.67$ меньше порога игрока B = $\frac{9}{11} = 0.82$, игрок A должен быть более осторожен.

- Другая стратегия с блефом

  При использовании оптимальной стратегии $\alpha(x)$ игроком A, наилучший ответ B – использование $\beta(y)$ с порогом b.

  Вычислим Q(x) для данного b.

- $x \leq b \qquad Q(x) = 1 + \int_0^b 1\,dy - \int_b^1 (c+1)dy =$

$$= 1 + b - (c + 1)(1 - b) = 0$$

- $x > b$ $\quad Q(x) = 1 + b + \int_b^x (c + 1)\, dy - \int_x^1 (c + 1) dy =$

$$= 2(c + 1)x - c(b + 1) > 0$$

Действия игрока А:

- $x \geq b$ – делает ставку,
- $x < b$ – с вероятностью $p = \frac{c}{c+2} = \frac{9}{11}$ пасует, и начинает блефовать с вероятностью $1 - p = \frac{2}{11}$.

Выводы

В ходе выполнения практической работы по изучению бесконечных игр были использованы инструментальные средства для решения задач поддержки принятия решения, а также освоены навыки принятия решения на основе бесконечных антагонистических игр. При этом были освоены метод поиска оптимальных стратегий для одновременной игры преследования на плоскости, а также способ расчёта цены игры в покере с одним и двумя кругами ставок.

При поиске оптимальных стратегий для одновременной игры преследования на плоскостях, которыми являются две фигуры: круг и прямоугольник, было выяснено, что данная игра решается в чистых стратегиях при случае, когда центр масс первой фигуры не принадлежит второй фигуре, а в случае, когда центр масс принадлежит второй фигуре игра решается в чистых стратегия только при условии, что радиус круга равен стороне прямоугольника.

При поиске оптимальных стратегий для покера с одним кругом ставок при значении ставки $c = 9$ было выявлено, что при реализации оптимальных стратегий α и β ожидаемый чистый выигрыш $H = -\frac{81}{121}$, что свидетельствует о том, что после первого круга ставок игрок А окажется в проигрышном положении.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ИСХОДНЫЙ КОД ДЛЯ ПОКЕРА С ОДНИМ КРУГОМ СТАВОК

```
# %%
from IPython.core.interactiveshell import InteractiveShell
InteractiveShell.ast_node_interactivity = "all"

# %%
c = 9

# %%
a = pow(c/(c+2), 2)
b = c/(c+2)

# %%
H = (pow((c+2),2)/(4*(c+1)))*(-pow(a,2)+2*a*(pow(c,2)/pow(c+2,2))-(pow(c,2)/pow(c+2,2)))

# %%
f'Порог игрока A = {a}'
f'Порог игрока B = {b}'
f'Выигрыш игрока A = {H}'
```