ВУ на отрезке

Кирсов К.
8383

(1) $\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{— волновое уравнение} \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) & \text{— начальные условия} \\ u|_{x=0} = u|_{x=L} = 0 & \text{— краевые условия} \end{cases}$ (L — произвольная длина отрезка)

Сначала ищем решение уравнения, удовл. краевым условиям, кот. разб. на части:

$$u(x,t) = v(x)\,w(t)$$

подст. в уравнение:

$$v\ddot{w} = c^2 v'' w \Rightarrow \frac{\ddot{w}}{wc^2} = \frac{v''}{v} = \lambda$$

$$v(0) = v(L) = 0$$

дальше решаем краевую задачу

$\begin{cases} v'' = \lambda v \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases}$ [зад. на собств. ф. см. и 2 произв.)

для разделения $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} v_k(x)\, w_k(t)$;

получается несколько уравнений:

$\sum v_k(x)(\lambda_k w_k + \ddot{w}_k) = f$ -> раскл. в ряд Фурье

$\sum v_k(x) w_k(0) = \varphi(x)$ -> раскл. в ряд Фурье

$\sum v_k(x) \dot{w}_k(0) = \psi(x)$ -> раскл. в ряд Фурье

$\Downarrow$

приравниваем коэффициенты

$\Downarrow$

получаем семейство ДУ с начальными условиями на w_k

② Уравнение Штурма-Лиувилля:

ур. Штурма-Лиувилля - это ДУ 2-го порядка вида:

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a,b]$$

$$\begin{cases} p(x) \geq \delta > 0 \\ q(x) \geq 0 \end{cases}$$

задачей Штурма-Лиувилля называется нахождение решения уравнения Ш-Л с соблюдением КУ

КУ для ур. ШЛ:

КУ для уравнения Штурма-Лиувилля м.б. разными в любых комбинациях:

например:

условия Дирихле $u(a) = u(b) = 0$; усл. Неймана $u'(a) = u'(b) = 0$;

усл. Робена $u'(a) - hu(a) = 0$, $u'(b) + Hu(b) = 0$;

периодические усл: $u(a) = u(b)$, $u'(a) = u'(b)$

модельная задача Ш-Л:

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

с усл. Дирихле:

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

функция Грина:

ф. Грина используется при построении решений краевых задач.

с помощью этой функции выделяется интегральное представление решения общей задачи Ш-Л (т.е. происходит переход от реш ДУ к выч. интегр

$$u(x) = \int_0^x \Gamma(x,y) f(y)\, dy$$

функция Грина

ф. Грина чувствительна ко <u>всем</u> компонентам краевой задачи:

к уравнению, к краевым условиям, к области.

Поэтому для каждой задачи функция Грина имеет разный вид, т.к. при изменении хоть какого-то компонента задачи вид функции меняется. В большинстве случаев известно про ф. Грина то, что она существует и удовлетворяет каким-то условиям

③ Изопараметрическая задача:

$$\int_D F(x,u,u') \to \min$$

← ищется ~~среди~~ среди непр. дифф. ф. на D, удовлетвор. изопарам. усл + КУ

$$\int_D G(x,u,u') = C$$

+ КУ

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\Phi = F - \underline{\lambda} G$$

множитель Лагранжа

$$\Phi_u - \frac{d}{dx}(\Phi_{u'}) = 0$$

множитель Лагранжа – доп. множитель, преобразующий целевую ф. экстр. задачи линейного программирования при её решении методом разреш. множ. (Лагранжа)

④ Минимиз. функц.

$$\int_0^{\pi} \underbrace{[(u')^2 + 4u^2 - u\cos^2(2x)]}_{\Phi} dx$$

$$u(0) = u(\pi) = 0$$

$$\Phi'_u = 8u - \cos^2(2x)$$

$$\Phi'_{u'} = 2u'$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\Phi'_u - \frac{d}{dx}(\Phi'_{u'}) = 0$$

$$8u - \cos^2(2x) - \frac{d}{dx}(2u') = 0$$

$$u'' - 4u = -\frac{1}{2}\cos^2 2x$$

$$\underline{u'' - 4u = -\tfrac{1}{4}(1 + \cos 4x)}$$

$$\lambda^2 - 4 = 0\ ; \quad \lambda_{1,2} = \pm 2$$

$$u_{общ.} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}\ ; \quad u_{частн.} = A + B\cos 4x - 4C\sin 4x\ ;$$

подст. в ур. Эйлера-Лагранжа:

$$-16B\cos 4x - 16C\sin 4x - 4A - 4B\cos 4x - 4C\sin 4x = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\cos 4x$$

$$-20B\cos 4x - 20C\sin 4x - 4A = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4x$$

$$\begin{cases} -20B = -\frac{1}{4} \\ -20C = 0 \\ -4A = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{80} \\ C = 0 \\ A = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$u_{частн.} = \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{80}\cos 4x$$

$$u = u_{общ} + u_{частн} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{80}\cos 4x$$

$u(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{80} = 0$

$u(\pi) = C_1 e^{2\pi} + C_2 e^{-2\pi} + \frac{1}{80}\cos(4\pi) = 0$

$\Rightarrow C_1 = -\dfrac{1}{80 + 80e^{2\pi}}; \quad C_2 = -\dfrac{e^{2\pi}}{80+80e^{2\pi}}$

Допустимая экстремаль:

$$u^* = -\frac{1}{80+80e^{2\pi}} \cdot e^{2x} - \frac{e^{2\pi}}{80+80e^{2\pi}} \cdot e^{-2x} + \frac{1}{16} + \frac{1}{80}\cos 4x$$

Усл. Лежандра: $F_{u'u'}''\Big|_{u} = 2 > 0 \Rightarrow$ на u^* дост. сильн. минимум.

Ответ: $u^* = -\dfrac{1}{80+80e^{2\pi}} \cdot e^{2x} - \dfrac{e^{2\pi}}{80+80e^{2\pi}} \cdot e^{-2x} + \frac{1}{16} + \frac{1}{80}\cos 4x$