МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №3
по дисциплине «Методы оптимизации»
Тема: Решение прямой и двойственной задач

Студент гр. 8383 ____________________ Киреев К.А.

Преподаватель ____________________ Мальцева Н.В.

Санкт-Петербург
2021

Цели работы

- Постановка задачи линейного программирования и её решение с помощью стандартной программы.
- Исследование прямой и двойственной задачи.

Краткие теоретические сведения

Если исходная задача линейного программирования представлена в виде: найти минимум функции $f = (c, x)$ на множестве

$$X = \{x \in R^n : Ax \geq B, x \geq 0\},$$

то двойственная задача линейного программирования может быть сформулирована следующим образом: найти максимум функции $(B,\ \lambda)$ на множестве $\lambda = \{\lambda \in R^m : A^T\lambda \leq c, \lambda \geq 0\}$, где A^T - матрица, транспонированная к A. Двойственная к двойственной задаче есть исходная задача.

Известно, что если существует решение исходной задачи, то существует решение и двойственной задачи, причем значения экстремумов совпадают. При этом координаты экстремальной точки для двойственной задачи являются коэффициентами чувствительности результата в исходной задаче по коэффициентам вектора B.

Рассмотрим видоизмененную исходную задачу:

Найти $min(c, x)$ на множестве $\{x: x \geq 0, Ax \geq B + \varepsilon e_i\}$, где $\varepsilon \geq 0$,

Если исходная задача имеет единственное решение, то при малых $\varepsilon > 0$ и видоизмененная задача имеет решение; причем если α_ε^i - значение минимума , то существует $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\alpha_\varepsilon^i - \alpha_0^i\right) / _\varepsilon = \beta_i$. Оказывается, что β есть i-я координата оптимальной точки для двойственной задачи.

Содержательная постановка задачи

Вариант 2

Рассмотрим задачу оптимального использования материалов при условии, что заданный план изготовления может быть выполнен или перевыполнен: при изготовлении обуви используют, в частности, жесткую кожу – черпак, ворот и др. Каждый из видов в свою очередь делится на несколько категорий по средней толщине. ГОСТом предусмотрено изготовление деталей из определенного вида кожи. Одна и та же деталь может быть изготовлена из разных видов кожи, причем из этих же кож изготовляют и другие детали.

В наличии имеется:

- ***0,9*** тыс. кв. м. чепрака толщиной ***4,01 – 4,5*** мм по цене ***14,4*** р. за 1 кв. м.;
- ***0,8*** тыс. кв. м. черпака толщиной ***4,51 - 5,0*** мм по цене ***16*** р. за 1 кв. м.;
- ***5,0*** тыс. кв. м. ворота толщиной ***3,5 – 4,0*** мм по цене ***12,8*** р. за 1 кв. м.;
- ***7,0*** тыс. кв. м. ворота толщиной ***4,51 – 5,0*** мм по цене ***10,5*** р. за 1 кв. м.

Толщиа детали, мм	**Количество деталей по плану, тыс. шт.**	**Количество деталей, которые можно изготовить из 1000 кв. м кожи, тыс. шт., при толщине**			
		чепрака, мм		**ворота, мм**	
		4,01 – 4,5	4,51 – 5,0	3,5 – 4,0	4,51 – 5,0
3,9	21	26,5	7,8	-	-
3,0	30	51,0	26	45,7	-
2,5	500	-	-	5,0	72,5

Формальная постановка задачи

По заданной содержательной постановке задачи поставим задачу формально. Обозначим за x_i количество приобретенной кожи каждого вида.

Целевая функция – это функция стоимости выполнения плана:

$$\varphi(x) = 14.4x_1 + 16x_2 + 12.8x_3 + 10.5x_4 \to min$$

При этом задача имеет следующие ограничения:

$$
\begin{cases}
26.5x_1 + 7.8x_2 \geq 21 \\
51.0x_1 + 26x_2 + 45.7x_3 \geq 30 \\
5.0x_3 + 72.5x_4 \geq 500 \\
-x_1 \geq -0.9 \\
-x_2 \geq -0.8 \\
-x_3 \geq -5.0 \\
-x_4 \geq -7.0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{cases}
$$

Решение поставленной задачи с помощью готовой программы

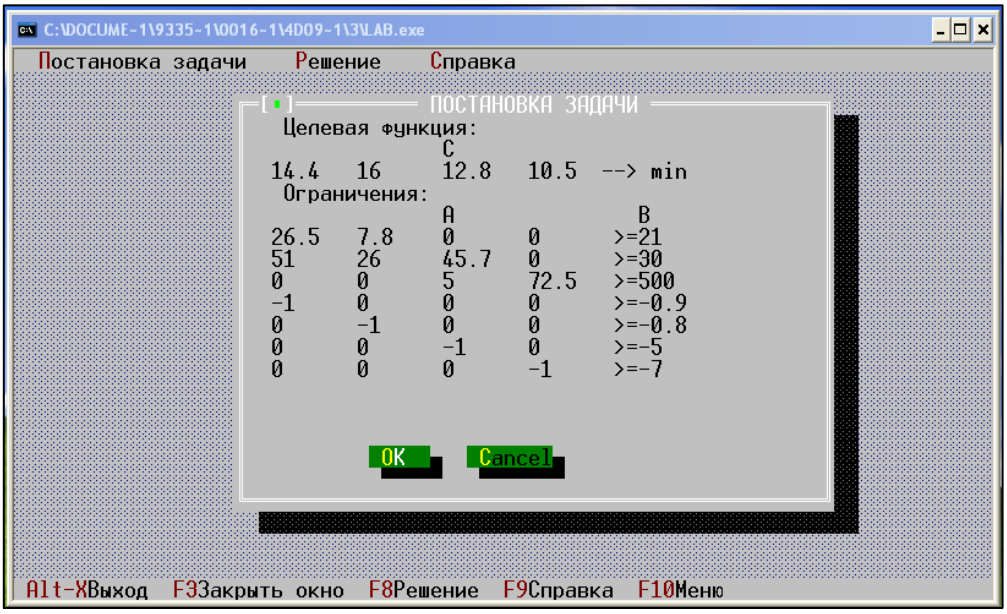

Рисунок 1 – Постановка исходной задачи

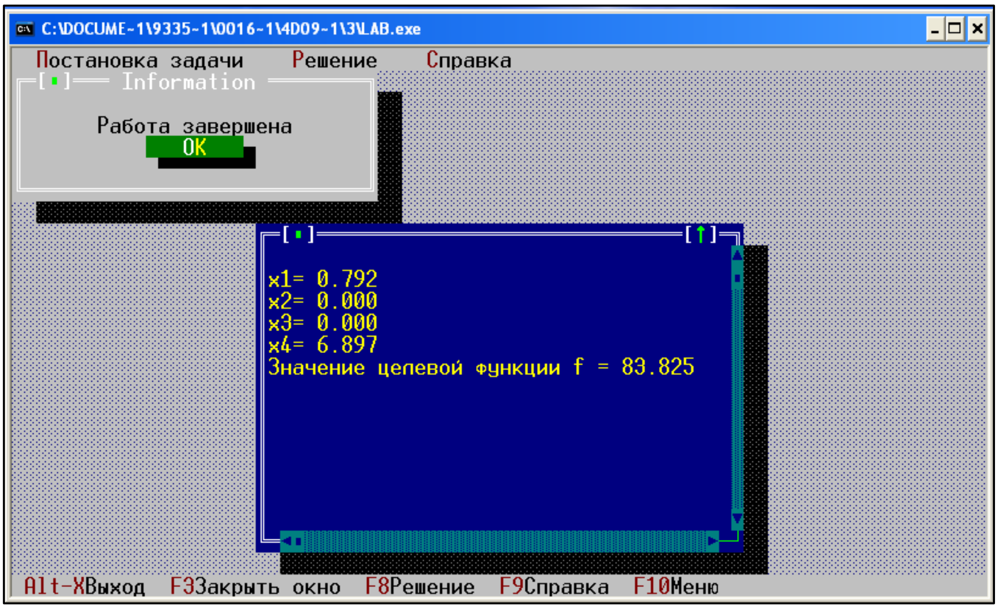

Рисунок 2 – Решение исходной задачи

Координаты оптимальной точки $x^* = (\mathbf{0.792, 0, 0, 6.897})$

Значение целевой функции $\varphi(x^*) = \mathbf{83.825}$

Т.е. минимальная стоимость выполнения плана $\varphi(x^*) = \mathbf{83.825}$ будет получена, если не приобретать кожу второго и третьего видов, а приобрести $\mathbf{0.792}$ кожи первого вида и $\mathbf{6.897}$ кожи четвертого вида.

Постановка двойственной задачи линейного программирования

Двойственная задача имеет семь переменных.

Задача имеет вид:

$$\psi(y) = 21y_1 + 30y_2 + 500y_3 - 0.9y_4 - 0.8y_5 - 5.0y_6 - 7.0y_7 \to max$$

При этом двойственная задача имеет следующие ограничения:

$$\begin{cases} 26.5y_1 + 51.0y_2 - y_4 \leq 14.4 \\ 7.8y_1 + 26y_2 - y_5 \leq 16 \\ 45.7y_2 + 5.0y_3 - y_6 \leq 12.8 \\ 72.5y_3 - y_7 \leq 10.5 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 \geq 0 \end{cases}$$

Решение двойственной задачи с помощью программы.

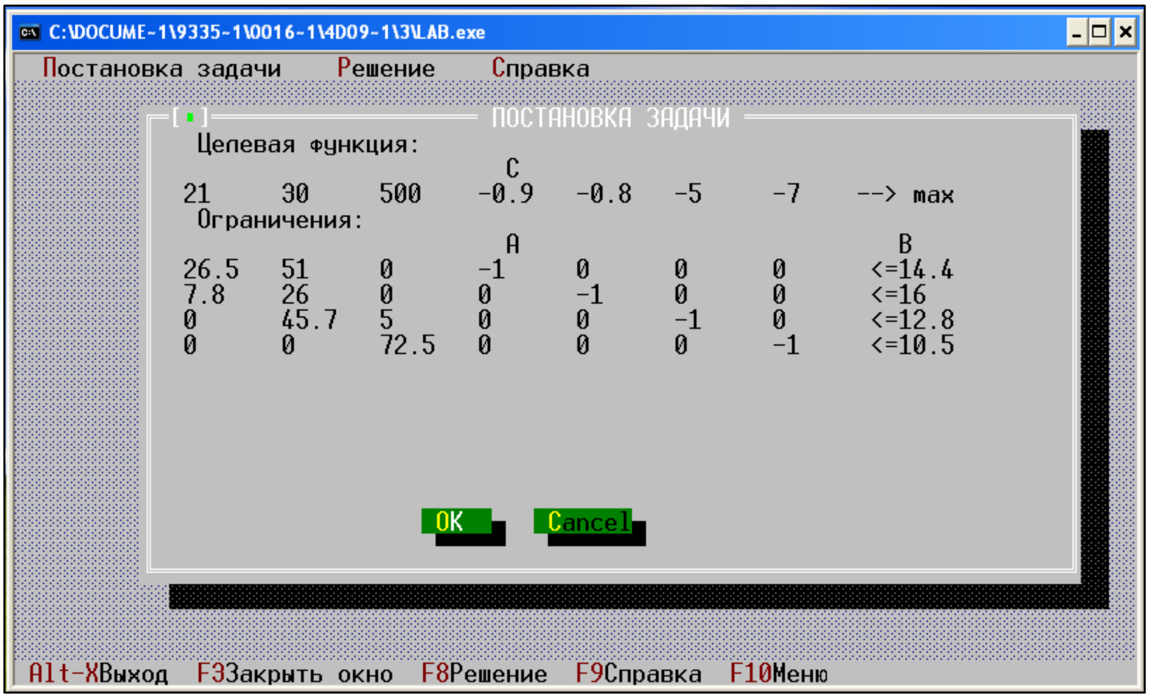

Рисунок 3 – Постановка двойственной задачи

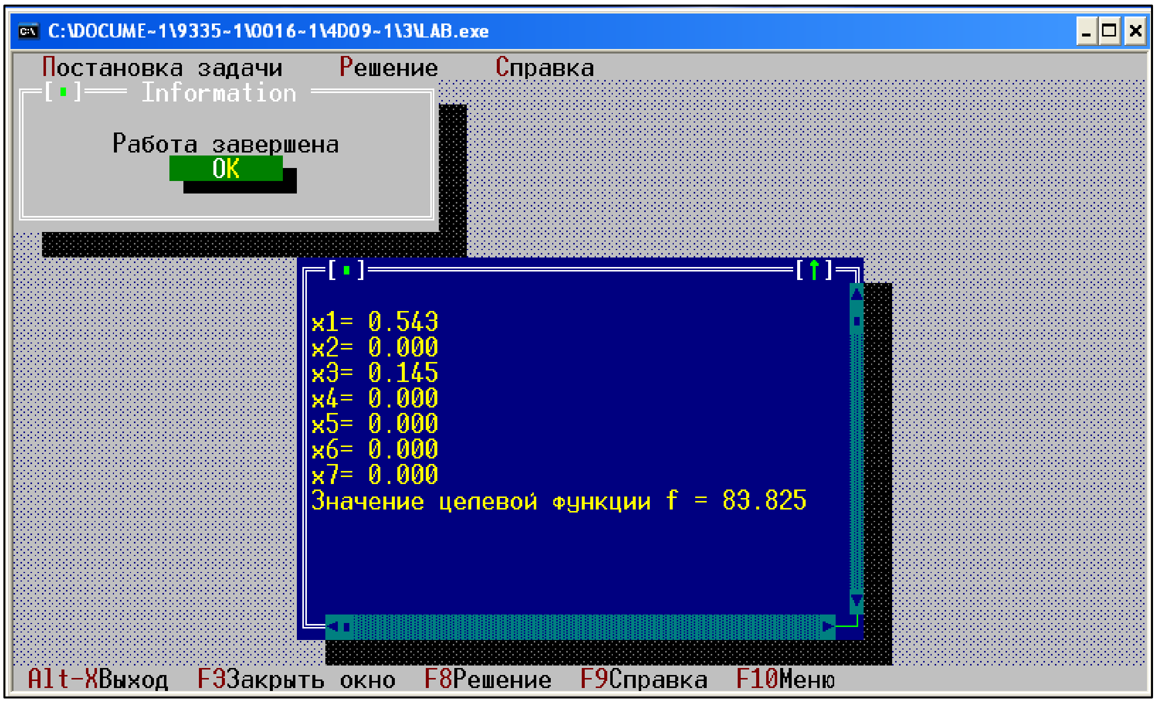

Рисунок 4 – Решение двойственной задачи

Решив двойственную задачу, получили $y^* = (\mathbf{0.543, 0, 0.145, 0, 0, 0, 0})$

Значение целевой функции $\psi(y^*) = \mathbf{83.825}$

Видно, что $\varphi(x^*) = \psi(y^*) = \mathbf{83.825}$. Экстремумы целевых функций совпадают.

Определение коэффициентов чувствительности исходной задачи по координатам правой части ограничений

- Увеличить i- ю координату вектора ограничений правой части на $\varepsilon = 10^{-2}$;
- Решить задачу с новым вектором $B = B + \varepsilon e_i$, ответ – $\varphi_i(\varepsilon)$;
- Вычислить $\widetilde{x_i} = \frac{\varphi_i(\varepsilon) - \varphi_i(0)}{\varepsilon}$;
- Сравнить полученное число с i-й координатой оптимальной точки двойственной задачи.

Ход работы приведен в таблице:

b_i	Постановка задачи	Результат
$b_1 += 0.01$	Целевая функция: C 14.4 16 12.8 10.5 --> min Ограничения: A B 26.5 7.8 0 0 >=21.01 51 26 45.7 0 >=30 0 0 5 72.5 >=500 -1 0 0 0 >=-0.9 0 -1 0 0 >=-0.8 0 0 -1 0 >=-5 0 0 0 -1 >=-7	x1= 0.793 x2= 0.000 x3= 0.000 x4= 6.897 Значение целевой функции f = 83.831
$b_2 += 0.01$	Целевая функция: C 14.4 16 12.8 10.5 --> min Ограничения: A B 26.5 7.8 0 0 >=21 51 26 45.7 0 >=30.01 0 0 5 72.5 >=500 -1 0 0 0 >=-0.9 0 -1 0 0 >=-0.8 0 0 -1 0 >=-5 0 0 0 -1 >=-7	x1= 0.792 x2= 0.000 x3= 0.000 x4= 6.897 Значение целевой функции f = 83.825
$b_3 += 0.01$	Целевая функция: C 14.4 16 12.8 10.5 --> min Ограничения: A B 26.5 7.8 0 0 >=21 51 26 45.7 0 >=30 0 0 5 72.5 >=500.01 -1 0 0 0 >=-0.9 0 -1 0 0 >=-0.8 0 0 -1 0 >=-5 0 0 0 -1 >=-7	x1= 0.792 x2= 0.000 x3= 0.000 x4= 6.897 Значение целевой функции f = 83.827
$b_4 += 0.01$	Целевая функция: C 14.4 16 12.8 10.5 --> min Ограничения: A B 26.5 7.8 0 0 >=21 51 26 45.7 0 >=30 0 0 5 72.5 >=500 -1 0 0 0 >=-0.89 0 -1 0 0 >=-0.8 0 0 -1 0 >=-5 0 0 0 -1 >=-7	x1= 0.792 x2= 0.000 x3= 0.000 x4= 6.897 Значение целевой функции f = 83.825
$b_5 += 0.01$	Целевая функция: C 14.4 16 12.8 10.5 --> min Ограничения: A B 26.5 7.8 0 0 >=21 51 26 45.7 0 >=30 0 0 5 72.5 >=500 -1 0 0 0 >=-0.9 0 -1 0 0 >=-0.79 0 0 -1 0 >=-5 0 0 0 -1 >=-7	x1= 0.792 x2= 0.000 x3= 0.000 x4= 6.897 Значение целевой функции f = 83.825

$b_6 += 0.01$	Целевая функция: C 14.4 16 12.8 10.5 --> min Ограничения: A B 26.5 7.8 0 0 >=21 51 26 45.7 0 >=30 0 0 5 72.5 >=500 -1 0 0 0 >=-0.9 0 -1 0 0 >=-0.8 0 0 -1 0 >=-4.99 0 0 0 -1 >=-7	x1= 0.792 x2= 0.000 x3= 0.000 x4= 6.897 Значение целевой функции f = 83.825
$b_7 += 0.01$	Целевая функция: C 14.4 16 12.8 10.5 --> min Ограничения: A B 26.5 7.8 0 0 >=21 51 26 45.7 0 >=30 0 0 5 72.5 >=500 -1 0 0 0 >=-0.9 0 -1 0 0 >=-0.8 0 0 -1 0 >=-5 0 0 0 -1 >=-6.99	x1= 0.792 x2= 0.000 x3= 0.000 x4= 6.897 Значение целевой функции f = 83.825

- Вычислим $\boldsymbol{\widetilde{x_i} = \frac{\varphi_i(\varepsilon)-\varphi_i(0)}{\varepsilon}}$:

$\widetilde{x_1} = \frac{\varphi_1(\varepsilon)-\varphi_1(0)}{\varepsilon} = \frac{83.831 - 83.825}{10^{-2}} = \frac{0.006}{0.010} = \mathbf{0.6}$
$\widetilde{x_2} = \frac{\varphi_2(\varepsilon)-\varphi_2(0)}{\varepsilon} = \frac{83.825 - 83.825}{10^{-2}} = \frac{0.000}{0.010} = \mathbf{0}$
$\widetilde{x_3} = \frac{\varphi_3(\varepsilon)-\varphi_3(0)}{\varepsilon} = \frac{83.827 - 83.825}{10^{-2}} = \frac{0.002}{0.010} = \mathbf{0.2}$
$\widetilde{x_4} = \frac{\varphi_4(\varepsilon)-\varphi_4(0)}{\varepsilon} = \frac{83.825 - 83.825}{10^{-2}} = \frac{0.000}{0.010} = \mathbf{0}$
$\widetilde{x_5} = \frac{\varphi_5(\varepsilon)-\varphi_5(0)}{\varepsilon} = \frac{83.825 - 83.825}{10^{-2}} = \frac{0.000}{0.010} = \mathbf{0}$
$\widetilde{x_6} = \frac{\varphi_6(\varepsilon)-\varphi_6(0)}{\varepsilon} = \frac{83.825 - 83.825}{10^{-2}} = \frac{0.000}{0.010} = \mathbf{0}$
$\widetilde{x_7} = \frac{\varphi_7(\varepsilon)-\varphi_7(0)}{\varepsilon} = \frac{83.825 - 83.825}{10^{-2}} = \frac{0.000}{0.010} = \mathbf{0}$

- Сравним полученные результаты с координатами оптимальной точки двойственной задачи:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.6} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0.2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$y^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0.543} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0.145} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Полученные результаты с небольшой разницей совпали с координатами оптимальной точки двойственной задачи.

Экстремальная точка λ^* двойственной задачи является векторным коэффициентом чувствительности исходной задачи по вектору b.

Определение коэффициентов чувствительности исходной задачи по координатам целевой функции

Повторим процедуру, описанную в пункте выше, но будем варьировать на этот раз коэффициенты целевой функции – компоненты вектора C.

Ход работы приведен в таблице:

c_i	Постановка задачи	Результат
$c_1 += 0.01$	Целевая функция: C 14.41 16 12.8 10.5 --> min Ограничения: A B 26.5 7.8 0 0 >=21 51 26 45.7 0 >=30 0 0 5 72.5 >=500 -1 0 0 0 >=-0.9 0 -1 0 0 >=-0.8 0 0 -1 0 >=-5 0 0 0 -1 >=-7	x1= 0.792 x2= 0.000 x3= 0.000 x4= 6.897 Значение целевой функции f = 83.833

$c_2 += 0.01$	Целевая функция: C 14.4 16.01 12.8 10.5 --> min Ограничения: A B 26.5 7.8 0 0 >=21 51 26 45.7 0 >=30 0 0 5 72.5 >=500 -1 0 0 0 >=-0.9 0 -1 0 0 >=-0.8 0 0 -1 0 >=-5 0 0 0 -1 >=-7	x1= 0.792 x2= 0.000 x3= 0.000 x4= 6.897 Значение целевой функции f = 83.825
$c_3 += 0.01$	Целевая функция: C 14.4 16 12.81 10.5 --> min Ограничения: A B 26.5 7.8 0 0 >=21 51 26 45.7 0 >=30 0 0 5 72.5 >=500 -1 0 0 0 >=-0.9 0 -1 0 0 >=-0.8 0 0 -1 0 >=-5 0 0 0 -1 >=-7	x1= 0.792 x2= 0.000 x3= 0.000 x4= 6.897 Значение целевой функции f = 83.825
$c_4 += 0.01$	Целевая функция: C 14.4 16 12.8 10.51 --> min Ограничения: A B 26.5 7.8 0 0 >=21 51 26 45.7 0 >=30 0 0 5 72.5 >=500 -1 0 0 0 >=-0.9 0 -1 0 0 >=-0.8 0 0 -1 0 >=-5 0 0 0 -1 >=-7	x1= 0.792 x2= 0.000 x3= 0.000 x4= 6.897 Значение целевой функции f = 83.894

- Вычислим $\boldsymbol{\widetilde{y_i} = \frac{\psi_i(\varepsilon)-\psi_i(0)}{\varepsilon}}$:

$\widetilde{\boldsymbol{y_1}} = \frac{\psi_1(\varepsilon)-\psi_1(0)}{\varepsilon} = \frac{83.833 - 83.825}{10^{-2}} = \frac{0.008}{0.010} = \mathbf{0.8}$
$\widetilde{\boldsymbol{y_2}} = \frac{\psi_2(\varepsilon)-\psi_2(0)}{\varepsilon} = \frac{83.825 - 83.825}{10^{-2}} = \frac{0.000}{0.010} = \mathbf{0}$
$\widetilde{\boldsymbol{y_3}} = \frac{\psi_3(\varepsilon)-\psi_3(0)}{\varepsilon} = \frac{83.825 - 83.825}{10^{-2}} = \frac{0.000}{0.010} = \mathbf{0}$
$\widetilde{\boldsymbol{y_4}} = \frac{\psi_4(\varepsilon)-\psi_4(0)}{\varepsilon} = \frac{83.894 - 83.825}{10^{-2}} = \frac{0.069}{0.010} = \mathbf{6.9}$

- Сравним полученные результаты и координаты вектора-решения исходной задачи:

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0,8} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{6,9} \end{pmatrix}$$

$$x^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0,792} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{6,897} \end{pmatrix}$$

Полученные результаты с небольшой разницей совпали с координатами оптимальной точки исходной задачи.

Выводы.

В ходе лабораторной работы были изучены прямая и двойственная задачи линейного программирования. Кроме того, экспериментальным путем была подтверждена теорема двойственности и утверждение, что экстремальная точка двойственной задачи является векторным коэффициентом чувствительности исходной задачи по вектору B.