Описание дз 3 – симплекс метод

Одно из следствий теоремы Хана-Банаха дает конструктивное решение задачи линейного программирования в самой общей форме

Рассмотрим выпуклый многогранник в банаховом пространстве X

$W = \bigcap_{j=1}^{n} \{x; f_j(x) \leq c_j\}$,

здесь f_j линейные функционалы на пространстве X, а c_j – вещественные числа

для заданного линейного функционала h требуется вычислить его наибольшее значение на многоугольнике W

$\max(h(x): \ x \in W)$

Можно показать, что максиму функционала достигается в тех и только тех точках x^*, где справедливо следующее утверждение
$h = \sum_{j \in J} \lambda_j f_j$

ПРИЧЕМ

$\lambda_j > 0, \quad J = \{j : f_j(\mathbf{x}^*) = c_j\}$

загадочное множество индексов имеет простой геометрический смысл

Посмотрим, что но означает, когда множество состоит из одного элемента, тогда

$h = \lambda f_j$

это означает, что h является нормалью (внешней) к оной из граней –
максимум достигается в любой точке на грани

Если $h = \lambda_1 f_{j_1} + \lambda_2 f_{j_2}$,то

максимум достигается на пересечении соответствующей пары граней и так далее.

Если число элементов в J больше либо равно размерности пространства, то в пересечении граней окажется одна точка – вершина многогранника

Остается заменить, что множество J состоит номеров нормалей к граням нашего многоугольника,

!! **примыкающих к одной вершине**

таких, что вектор h попадает в положительный конус этих нормалей

Если многоугольник W ограничен, то всякий вектор попадает в один из положительных конусов

Задача его отыскания, такая же как в дз-1, только вместо конусов вершин, надо перебирать конуса нормалей **примыкающих к одной вершине**

Вопросы задания

рассмотрите в качестве многоугольника W многоугольник из дз-1

в обозначениях вершин H **заменено** на C

то есть банахово пространство X это R^3 с евклидовой метрикой

согласно теореме Рисса-Фишера все функционалы имеют $f = (f_1, f_2, f_3)$

$f : X \to R,\ (x_1, x_2, x_3) \to f(x) = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3$

если $n_{j,1}x_1 + n_{j,2}x_2 + n_{j,3}x_3 = c_j$ плоскость, содержащая грань многоугольника W то

$W = \bigcap_{j=1}^{n}\{x; n_j(x) \leq c_j\}$,

где функционалы определяются равенствами $n_j(x) = n_{j,1}x_1 + n_{j,2}x_2 + n_{j,3}x_3$

1) Опишите все функционалы (с нормой 1), принимающие наибольшее значение на образе грани ABC и найдите это значение

2) Проведите такое же описание для вершины A

базис нормалей граней, примыкающих к вершине A

грани в первом квадранте (A, CC, C) (A, C, B) (A, B, AA)

их нормали $n_1 = (n_{1,1}, n_{1,2}, n_{1,3})$ $n_2 = (n_{2,1}, n_{2,2}, n_{2,3})$ $n_3 = (n_{3,1}, n_{3,2}, n_{3,3})$

кроме того, грани симметричные относительно плоскости Oxz $((x, y, z) \to (x, -y, z))$

и их нормали $n_4 = (n_{1,1}, -n_{1,2}, n_{1,3})$ $n_5 = (n_{2,1}, -n_{2,2}, n_{2,3})$ $n_6 = (n_{3,1}, -n_{3,2}, n_{3,3})$

ВЫБЕРИТЕ любой вектор (функционал) g с положительными координатам

и выясните достигает ли это функционал максимума в вершине A

надо раскладывать вектор $g = k_1n_1 + \cdots + k_6n_6$ по базису нормалей,

если среди решений найдется такое, у которого все $k_j \geq 0$,то функционал достигает максимума в вершине A

этот способ решения искусственный – проще перебрать вершины но его можно использовать для решения дополнительной задачи

описать все функционалы (различные, с единичной нормой), достигающие максимума в вершине A