Содержание

Условные обозначения

В этом курсе используются следующие стандартные обозначения:

$\forall$	для любого, любой; («квантор»);
$\exists$	существует; («квантор»);
!	единственный;
: или |	такой, что;
$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	$\begin{cases} \text{из } A \text{ следует } B, \quad A \text{ влечет } B, \\ A \text{ является достаточным условием для } B, \\ B \text{ является необходимым условием для } A; \end{cases}$
$\Leftrightarrow$	равносильно, тогда и только тогда, необходимо и достаточно;
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Утв. 1} \\ \text{Утв. 2} \end{array} \right.$	верны оба утверждения: Утв. 1 и Утв. 2;
$\left[\begin{array}{l} \text{Утв. 1} \\ \text{Утв. 2} \end{array} \right.$	верно одно из утверждений: либо Утв. 1, либо Утв. 2;
$\square$	окончание доказательства;
$k = \overline{1, n}$	число k принимает все целые значения от 1 до n;
$f(x) \in C(D)$	функция $f(x)$ непрерывна в области $x \in D$;
$f(x) \in C^k(D)$	функция $f(x)$ непрерывна в области $x \in D$ вместе со своими k первыми производными;
∂D	граница области D;
$\overline{D}$	объединение области D и ее границы ∂D : $\overline{D} = D \bigcup \partial D$;
$G \subset D$	область G – подобласть области D;
$D \supset G$	область G – подобласть области D;
$D \times G$	множество пар $(x,\ y)$ таких, что $x \in D$, $y \in G$;
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$;
$\mathbb{Z}$	множество целых чисел $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$;
$\mathbb{Q}$	множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$;
$\mathbb{R}$	множество действительных чисел, множество точек прямой;
$\mathbb{R}^n$	n – мерное координатное пространство
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел $\mathbb{C} = \{a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}, \text{ символ } i : \ i^2 = -1\}$;
$\langle a,\ b \rangle$	промежуток – одно из множеств: (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$.

1. Основные понятия

1.1. ОДУ n-ого порядка

Опр. 1.1. **Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)** называется равенство вида:

$$F\left(x;\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\right) = 0, \qquad x \in \langle a,\ b\rangle \tag{1.1}$$

в котором F – заданная функция, x – независимая переменная, а $y(x)$ – искомая функция. При этом **порядком ОДУ** (1.1) называется число n – порядок старшей производной от функции $y(x)$, входящей в уравнение, при условии, что $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$ на $x \in \langle a,\ b\rangle$.
В частности, равенство

$$F\left(x;\ y(x),\ y'(x)\right) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0, \qquad x \in \langle a,\ b\rangle \tag{1.2}$$

называется **ОДУ 1-го порядка**.

Пример 1.1. Обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка являются, например, равенства:

$$\textbf{1)}\ \ xy' + y = 0; \quad \textbf{2)}\ \ y' = y - x^2; \quad \textbf{3)}\ \ y\dot{y} = \ln t, \quad \text{где}\ \ \dot{y} \equiv \frac{dy(t)}{dt}.$$

Равенство

$$y'' + 2y' + y = e^x$$

является ОДУ 2-го порядка.

Бывают дифференциальные уравнения, не являющиеся ОДУ, например, равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = xy^2, \qquad \text{где} \quad u = u(x,\ y) \quad \text{искомая функция,}$$

является **уравнением в частных производных (УЧП)**.

Опр. 1.2. **Решением (частным решением) ОДУ** (1.1) называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество (верное равенство):

$$F\left(x;\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(x)\right) = 0, \qquad x \in \langle a,\ b\rangle. \tag{1.3}$$

Общим решением ОДУ (1.1) называется множество всех его частных решений.
Интегральной кривой для уравнения (1.1) называется график любого его частного решения $y = \varphi(x)$.

1.2. ОДУ 1-ого порядка

Опр. 1.3. Решением (частным решением) уравнения (1.2) называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество (верное равенство):

$$F(x;\ \varphi(x),\ \varphi'(x)) = 0, \qquad x \in \langle a,\ b\rangle. \tag{1.4}$$

Общим решением уравнения (1.2) называется множество всех его частных решений.
Интегральной кривой для уравнения (1.2) называется график любого его частного решения $y = \varphi(x)$.

Опр. 1.4. Частным интегралом уравнения (1.2) называется соотношение вида

$$\Phi(x,\ y) = 0,$$

которое определяет некоторое частное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения как неявную функцию. **Общим интегралом уравнения** (1.2) называется соотношение вида

$$\Phi(x,\ y;\ c) = 0,$$

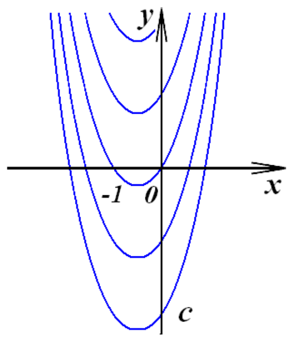
которое

1) при произвольном выборе параметра $c \in [-\infty,\ +\infty]$ определяет некоторое частное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения как неявную функцию;

2) для любого частного решения $y = \varphi(x)$ этого уравнения можно указать такое значение параметра $c \in [-\infty,\ +\infty]$, что $y = \varphi(x)$ неявно задаётся соотношением $\Phi(x,\ y;\ c) = 0$.

Пример 1.2.
Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y' - 2x = 1.$$



Мы можем его решить, поскольку оно явно задаёт производную искомой функции $y(x)$:

$$y' = 2x + 1.$$

Проинтегрировав обе части этого равенства, получим

$$y(x) = \int (2x+1)dx = x^2 + x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Таким образом,

1) общим решением уравнения $y' - 2x = 1$ является множество функций $y(x) = x^2 + x + c$, где $c \in \mathbb{R}$;

2) частными решениями являются, например, при $c = 1$ – функция x^2+x+1, и при $c = 5$– функция $x^2 + x + 5$;

3) общим интегралом уравнения $y' - 2x = 1$ является соотношение

$$\Phi(x,\ y;\ c) = y - (x^2 + x + c) = 0;$$

4) частными интегралами являются, например, при $c = 1$ – соотношение $y-(x^2+x+1) = 0$, и при $c = 5$ – равенство $y - (x^2 + x + 5) = 0$;

5) интегральными кривыми являются параболы вида $y(x) = x^2 + x + c$, при условии, что параметр c пробегает все значения от $(-\infty)$ до $(+\infty)$.

Опр. 1.5. ОДУ 1-го порядка называется **разрешённым относительно производной**, если производную $y'(x)$ можно выразить явно через x и y, то есть это уравнение можно записать в виде

$$y' = f(x,\ y).$$

Пример 1.3. Уравнения

$$y' = y\sin x + y^4\cos x, \qquad y' = y(x + \ln y), \qquad y' = xy + x^2\cos\frac{y}{x}$$

являются разрешёнными относительно производной, а уравнения

$$y'e^{y'} + y\ln x = 0, \qquad y' = \sin y' + x$$

не являются.

2. Задача Коши

Опр. 2.1. **Задачей Коши** для уравнения $y' = f(x,\ y)$ называется задача вида

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,\ y), & x \in \langle a,\ b\rangle; \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $x_0 \in \langle a,\ b\rangle$ и $y_0 \in \mathbb{R}$ – заданные числа.
При этом условие $y(x_0) = y_0$ называется **начальным условием** или **условием Коши**, а числа x_0 и y_0 – **начальными данными** или **данными Коши**.

Пример 2.1. *Найти решение уравнения $y' - 2x = 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.*
Записав эти требования вместе, получим задачу Коши:

$$\begin{cases} y'(x) - 2x = 1, & x \in [0,\ +\infty); \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Уравнение $y' - 2x = 1$ мы уже решили в примере 1.2, стр. 5, и нашли его общее решение:

$$y(x) = x^2 + x + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Осталось выбрать из множества всех решений то, которое удовлетворяет начальному условию $y(0) = 1$. Для этого подставим в (2.3) $x = x_0 = 0$ и $y = y_0 = 1$:

$$\underbrace{y}_{1} = \underbrace{x^2}_{0^2} + \underbrace{x}_{0} + c,$$

откуда получаем условие на величину константы c:

$$1 = 0^2 + 0 + c, \qquad \Longrightarrow \qquad c = 1.$$

Итак, единственным решением заданного уравнения $y' - 2x = 1$, удовлетворяющим начальному условию $y(0) = 1$ (то есть решением задачи Коши (2.2)), является функция

$$y(x) = x^2 + x + 1.$$

Замечание 2.1 *(Геометрическая интерпретация задачи Коши).* Если решить ОДУ геометрически означает найти множество его интегральных кривых, то решить задачу Коши значит **найти интегральную кривую, проходящую через точку** $(x_0,\ y_0)$.

Теорема 2.1 (Существование и единственность решения задачи Коши).

Усл. *$f(x,\ y) \in C^1\left(\overline{\Pi}\right)$, где $\overline{\Pi} = \{(x,\ y): \ |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$. Кроме того, число $M = \max\limits_{\Pi} |f(x,\ y)|$.*

Утв. *$\exists\,!$ решение $y = y(x)$ задачи Коши (2.1), определённое при $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$, где*

$$h = \min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\}.$$

Без доказательства.

Замечание 2.2. Для существования решения достаточно требовать непрерывности (и, следовательно, ограниченности) $f(x,\ y)$ в $\overline{\Pi}$. Для доказательства единственности решения мы потребовали непрерывности (и, следовательно, ограниченности) частных производных $f(x,\ y)$ в $\overline{\Pi}$.
На самом деле этот результат можно несколько усилить, заменив условие теоремы на

Усл. 1. *$f(x,\ y) \in C\left(\overline{\Pi}\right)$. Число M определяется формулой $M = \max\limits_{\Pi} |f(x,\ y)|$. Кроме того, $f(x,\ y)$ удовлетворяет в $\overline{\Pi}$ условию Липшица:*

$$\exists\, L > 0: \quad \forall (x,\ \tilde{y}),\ (x,\ \bar{y}) \in \Pi \quad \text{вып. нер-во} \quad |f(x,\ \tilde{y}) - f(x,\ \bar{y})| \leqslant L\,|\tilde{y} - \bar{y}|\,.$$

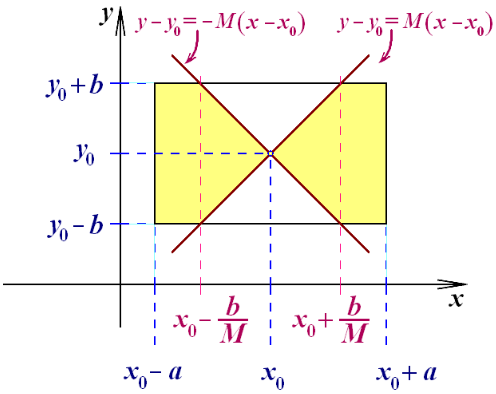
Замечание 2.3 *(Пояснения в ТСЕ).* Появления в формулировке теоремы существования и единственности (ТСЕ) решения задачи Коши параметра h является абсолютно естественным. В самом деле, если $M = \max\limits_{\Pi} |f(x,\ y)|$, то поскольку мы ищем решения уравнения $y' = f(x,\ y)$, все они удовлетворяют оценке

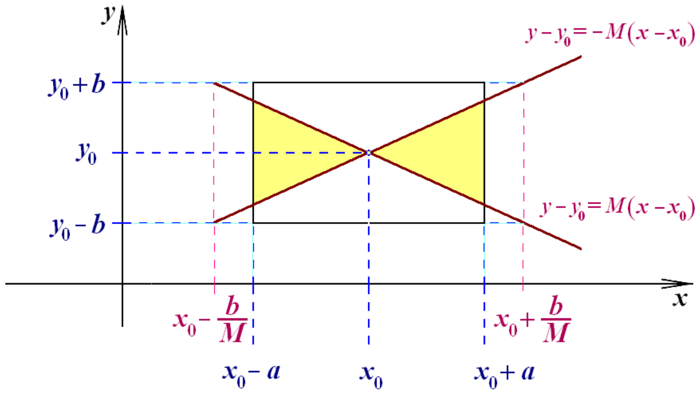
$$|y'| \leqslant M.$$

Следовательно, максимальная скорость роста (убывания) решения не превышает скорости функции

$$y_1(x) = y_0 + M(x - x_0) \qquad (y_2(x) = y_0 - M(x - x_0)) .$$

Нарисовав графики функций y_1 и y_2, заметим, что они выходят за пределы прямоугольника Π в точках $x_0 \pm \min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\}$. Но решения нашего уравнения, проходящих через среднюю точку $(x_0,\ y_0)$ прямоугольника Π, не могут расти (убывать) быстрее, чем y_1 и y_2, поэтому их графики зажаты между прямыми $y = y_0 \pm M(x - x_0)$ в жёлтой области на рисунках. Именно поэтому гарантировать существование решения можно только в пределах отрезка $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$, ибо за его пределами (как на рисунке слева) оно может выйти из прямоугольника Π.





3. Способы решения ОДУ первого порядка

3.1. Уравнение с разделяющимися переменными (УРП)

Простейшим уравнением первого порядка являются ОДУ следующего типа:

Опр. 3.1. Уравнением с разделяющимися переменными (УРП) называется уравнение вида

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}, \qquad g(y) \neq 0, \tag{3.1}$$

где $f(x)$ и $g(y)$ – заданные функции.

Теорема 3.1 (ТСЕ решения задачи Коши для УРП).

Усл. *$f(x)$ и $g(y)$ – интегрируемые функции, причём $g(y) \neq 0$.*

Утв. $\forall\, x_0 \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R}, \quad \exists\,!$ *решение $y = y(x)$ задачи Коши*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}, & x \in (-\infty,\ +\infty); \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Доказательство.

Шаг 1. Нахождение общего решения уравнения

Представим производную $y'(x)$ в виде отношения дифференциалов: $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ и домножим уравнение

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

на $g(y)dx$. Получим равенство двух дифференциалов:

$$g(y)dy = f(x)dx. \tag{3.3}$$

Поскольку функции $f(x)$ и $g(y)$ – интегрируемые, то они имеют первообразные:

$$F(x) \text{ и } G(y): \qquad F'(x) = f(x) \text{ и } G'(y) = g(y).$$

Но тогда дифференциалы dF и dG записываются так:

$$dF = F'(x)dx = f(x)dx \quad \text{и} \quad dG = G'(y)dy = g(y)dy.$$

Поэтому уравнение (3.3) можно переписать в виде:

$$dG = dF, \qquad \text{или} \qquad d\Big(G(y) - F(x)\Big) = 0.$$

Из второго семестра мы знаем, что если дифференциал функции двух переменных равен нулю, то сама функция равна константе. Поэтому

$$G(y) - F(x) = c. \tag{3.4}$$

Формула (3.4) и даёт общее решение уравнения $y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}$, а равенство $G(y) - F(x) - c = 0$ есть его общий интеграл.

Шаг 2. Нахождение решения, удовлетворяющего начальному условию

Найдём теперь среди всех решений уравнения то, которое удовлетворяет условию Коши $y(x_0) = y_0$. Для этого подставим

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

в выражение для общего решения (3.4), чтобы найти c. Получим:

$$c = G(y_0) - F(x_0).$$

Заметим, что как и указывается в утверждении данной теоремы, для любых значений $x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$ константу c мы всегда можем найти, и притом единственным образом.

Итак, единственным решением уравнения, удовлетворяющим условию Коши, является функция, определяемая равенством (3.4) со значением константы $c = G(y_0) - F(x_0)$:

$$G(y) - F(x) = G(y_0) - F(x_0).$$

$\square$

Замечание 3.1. Перейдя от исходного уравнения $y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}$ к равенству (3.3) мы добились, чтобы в каждой части уравнения стояла только одна переменная – либо y, либо x. Поэтому уравнения, которые позволяют так себя преобразовать называются уравнениями с разделяющимися переменными, а метод их решения – методом разделения переменных.

Замечание 3.2. Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в так называемом симметричном виде:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(y)}\,dx + \frac{g_2(y)}{f_2(x)}\,dy = 0$$

или

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0.$$

Замечание 3.3. В теореме 3.1 рассмотрен случай, когда $g(y) \neq 0$ при всех $y \in \mathbb{R}$. Если же в каких-то точках y_k имеет место равенство $g(y_k) = 0$, то утверждение теоремы и метод построения решения (предложенный в доказательстве) остаются в силе для любых прямоугольников, не содержащих точек с ординатами, равными y_k.

Пример 3.1. *Решить уравнение:*

$$\begin{cases} (x^2-1)\,y' + 2xy^2 = 0; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Шаг 1. Решение уравнения

Перенесём слагаемое, не зависящее от y' в правую часть. Представим y' в виде $\frac{dy}{dx}$. Получим:

$$(x^2-1)\,\frac{dy}{dx} = -2xy^2$$

Чтобы в левой части не осталось x, а в правой y, домножим последнее равенство на $\left(-\frac{dx}{y^2(x^2-1)}\right)$. Очень важно заметить, что записав выражения y^2 и (x^2-1) в знаменатель, мы предполагаем, что они не обращаются в нуль. Однако из условия задачи это никак не следует. Поэтому **мы, возможно, потеряли при этом действии решения** $y^2 = 0$ **и** $x^2 - 1 = 0$. К вопросу, являются ли эти функции решениями, мы вернёмся чуть позже, а пока разберёмся со случаем $y^2(x^2-1) \neq 0$. Итак, после домножения нашего уравнения на $\left(-\frac{dx}{y^2(x^2-1)}\right)$ оно примет вид:

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{2x\,dx}{x^2-1}.$$

Слева стоит дифференциал функции, зависящей только от y, справа – только от x. Проинтегрируем обе части полученного уравнения.

$$-\int\frac{dy}{y^2} = \int\frac{2x\,dx}{x^2-1}. \tag{3.5}$$

Взяв интегралы в левой и правой частях:

$$-\int\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{y} + c_1, \qquad \text{и}$$

$$\int\frac{2x\,dx}{x^2-1} = \begin{bmatrix} t = x^2-1 \\ dt = 2xdx \end{bmatrix} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + c_2 = \ln\left|x^2-1\right| + c_2,$$

получим, что равенство (3.5) принимает вид:

$$\frac{1}{y} = \ln\left|x^2-1\right| + c, \tag{3.6}$$

где через c обозначена новая произвольная константа $c = c_2 - c_1$.

Итак, мы получили общее решение уравнения (3.5). Но при переходе к нему от исходного уравнения мы делили на $y^2\,(x^2-1)$. Пора выяснить, потерялись ли при этом решения.

Проверим функцию $y\equiv 0$. Подставив её в исходное уравнение, наблюдаем, что оно превратилось в истинное равенство:

$$\left(x^2-1\right)\underbrace{y'}_{0}+2x\underbrace{y^2}_{0}=0,$$

поэтому кроме функций, заданных (3.6), ещё и **функция** $y\equiv 0$ **– также является решением исходного уравнения**.

Теперь посмотрим, какие функции определяются равенством $x^2-1=0$. Это равенство возможно в двух случаях – при $x=-1$ и при $x=1$. Могут ли эти равенства давать решения нашего уравнения? Подстатвив их в $(x^2-1)\,y'+2xy^2=0$, мы получаем *не тождество, а новое уравнение*

$$\pm 2y^2=0,$$

значит, по определению 1.3, функции $x=\pm 1$ не являются решениями рассматриваемого уравнения.

Ответ к Шагу 1: $\quad \frac{1}{y}=\ln\left|x^2-1\right|+c, \qquad y\equiv 0.$

Щаг 2. Использование начального условия

Подставим теперь начальные данные $x_0=0$ и $y_0=1$ в полученное на первом шаге решения уравнения. Сразу видно, что функция $y\equiv 0$ уначальному условию $y(0)=1$ не удовлетворяет. С другой равенство

$$\underbrace{\frac{1}{y}}_{1}=\overbrace{\ln\underbrace{\left|x^2-1\right|}_{1}}^{0}+c$$

справедливо при значении $c=1$. Поэтому решением исходной задачи Коши является функция $\frac{1}{y}=\ln\left|x^2-1\right|+1$. Осталось выяснить, на каком промежутке эта функция является решением исходной задачи Коши. Она не определена в точках $x=\pm 1$, поскольку $\ln 0$ – неопределён. Эти точки делят числовую прямую $\mathbb{R}$ на три промежутка $(-\infty,\ -1)$, $\ (-1,\ 1)$, $\ (1,\ +\infty)$. Какой (или какие) из них надо выбрать? Ответ подскажет условие Коши: $y(0)=1$. Раз оно задано в точке $x=0$, которая лежит на $(-1,\ 1)$, то и решение всей задачи Коши имеет смысл рассматривать именно на этом промежутке:

$$\frac{1}{y}=\ln\left|x^2-1\right|+1, \qquad x\in(-1,\ 1).$$

Ну а на этом промежутке, поскольку на нём $x^2-1<0$, можно раскрыть скобки модуля:

$$\frac{1}{y}=\ln\left(1-x^2\right)+1.$$

Ответ: $\quad \frac{1}{y}=\ln\left(1-x^2\right)+1, \qquad x\in(-1,\ 1).$

Пример 3.2. *Решить уравнение:*

$$xydx+(x+1)dy=0.$$

Уравнение записано в симметричном виде. Для разделения переменных сначала перенесём слагаемое с dx в правую часть:

$$(x+1)dy=-xydx$$

а затем поделим на $(x+1)y$:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{xdx}{x+1}.$$

При этом **мы, возможно, потеряли решения** $y = 0$ **и** $x + 1 = 0$. Про них вспомним потом, а пока проинтегрируем полученное равенство:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x dx}{x+1}$$

$$\ln|y| = -\int \frac{(x+1)-1}{x+1}\,dx = -\int dx + \int \frac{dx}{x+1} = -x + \ln|x+1| + \ln|c|, \qquad c \neq 0.$$

Мы записали константу интегрирования в виде $\ln|c|$ – логарифма модуля произвольной константы – для удобства. В полученном равенстве и x, и y стоят под знаками логарифма, поэтому для упрощения равенства мы его пропотенцируем[1]. Тогда

$$\ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln|c|, \qquad c \neq 0$$

превратится в

$$|y| = \Big|c(x+1)\Big|\, e^{-x}, \qquad c \neq 0.$$

Снимем модули в обеих частях, ведь константа c – произвольна и, следовательно, меняя её знак, мы можем добиться чтобы последнее равенство было равносильно следующему:

$$y = c(x+1)e^{-x}, \qquad c \neq 0.$$

Осталось разобраться с решениями, которые мы, возможно, потеряли, когда делили на $(x+1)y$. **Функция** $y \equiv 0$, очевидно, удовлетворяет уравнению, значит, **является решением**. В самом деле:

$$x \underbrace{y}_{0}\, dx + (x+1) \underbrace{dy}_{0} = 0.$$

Функция $x = -1$ также обращает наше уравнение в тождество:

$$\underbrace{x}_{-1}\, y \underbrace{dx}_{0} + \underbrace{(x+1)}_{0}\, dy = 0,$$

значит, тоже **является решением**.

Прежде чем окончательно записать ответ, заметим, что если мы разрешим константе c принимать значение 0 в выражении $y = c(x+1)e^{-x}$, то в это выражение войдёт также потерянное решение $y \equiv 0$.

Ответ: $\quad y = c(x+1)e^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}; \qquad x = -1.$

3.2. Однородное уравнение (ОУ)

Опр. 3.2. Однородным уравнением (ОУ) называется уравнение вида

$$y'(x) = F\left(\frac{y}{x}\right), \tag{3.7}$$

где $F(t)$ – заданная функция.

[1] то есть возведём e в степень, равную левой и правой частям этого равенства:

$$e^{\text{левая часть}} = e^{\text{правая часть}}.$$

Теорема 3.2 (ТСЕ решения задачи Коши для ОУ).

Усл. $F(t) \in C(a,\ b);\quad \forall\, t \in (a,\ b)\quad F(t) \neq t.$

Утв. $\forall\, x_0 \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R}$, *таких что* $\frac{y_0}{x_0} \in (a,\ b)\quad \exists\,!$ *решение* $y = y(x)$ *задачи Коши*

$$\begin{cases} y'(x) = F\left(\frac{y}{x}\right); \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Доказательство.
Сделаем в уравнении замену неизвестной функции $y(x)$ на новую неизвестную функцию $t(x)$ по закону

$$y(x) = xt(x), \qquad y'(x) = xt'(x) + t(x), \qquad dy = xdt + tdx, \qquad F\left(\frac{y}{x}\right) = F(t). \tag{3.9}$$

Тогда уравнение примет вид:

$$xt'(x) + t(x) = F(t),$$

а это – уравнение с разделяющимся переменными.

Как обычно с УРП, представим t' в виде $\frac{dt}{dx}$ и разделим переменные:

$$\frac{dt}{F(t) - t} = \frac{dx}{x}.$$

Заметим, что при делении на $x\,\big(F(t) - t\big)$ мы не потеряли ни одного решения, ибо по условию $F(t) \neq t$, а x в исходном уравнении и так стоял в знаменателе. Поняв это, вернёмся к задаче Коши. В новых переменных она примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dt}{F(t)-t} = \frac{dx}{x}; \\ t(x_0) = t_0 = \frac{y_0}{x_0}. \end{cases}$$

Так как это - задача Коши для уравнения с разделяющимися переменными, а функция $\frac{1}{F(t)-t}$ непрерывна (и, следовательно, итегрируема), при $t \in (a,\ b)$ то по теореме 3.1, стр. 8, эта задача имеет единственное решение на $t \in (a,\ b)$. □

Пример 3.3. *Решить уравнение*

$$\left(2x^2 + y^2\right) dx + xydy = 0.$$

Легко убедиться[2], что данное уравнение приводится к виду $y'(x) = F\left(\frac{y}{x}\right)$, то есть является однородным. Поделим его на $xydx$, чтобы выразить y':

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{2x}{y} + \frac{y}{x}\right) = -\left(\frac{2}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Итак, наше уравнение – ОУ, поэтому решать его надо стандартной заменой (3.9). Подставим в исходное уравнение $(2x^2 + y^2)\,dx + xydy = 0$

$$y(x) = xt(x), \qquad dy = xdt + tdx.$$

[2] Вместо проверки, приводится ли уравнение к виду $y'(x) = F\left(\frac{y}{x}\right)$, можно проверить, что степени всех слагаемых одинаковы. Например, слагаемое $2x^2$ имеет степень 2, слагаемое y^2 – тоже, так же как и слагаемое xy.

Получим:

$$\left(2x^2 + x^2t^2\right) dx + x^2t \left(xdt + tdx\right) = 0.$$

Соберём слагаемые с dx и с dt:

$$\left(2x^2 + 2x^2t^2\right) dx + x^3tdt = 0.$$

Мы, как и гарантирует наша стандартная замена, получили УРП. Разделим переменные, поделив его на $x^3\left(t^2+1\right)$:

$$\frac{tdt}{t^2+1} = -\frac{2dx}{x}$$

Проинтегрировав это равенство, получим:

$$\int \frac{tdt}{t^2+1} = -\int \frac{2dx}{x}, \qquad \text{или}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| = -2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|c|, \qquad c \neq 0.$$

Домножим на 2 и воспользуемся свойствами логарифма $a\ln b = \ln\left(b^a\right)$ и $\ln a + \ln b = \ln(ab)$:

$$\ln\left|t^2+1\right| = \ln\frac{|c|}{x^4}, \qquad c \neq 0.$$

Потенцируем и снимаем модуль:

$$t^2 + 1 = \frac{c}{x^4}, \qquad c \neq 0.$$

Вспоминаем, что деля на $x^3\left(t^2+1\right)$ мы могли потерять решения $x \equiv 0$ и $t^2 + 1 = 0$.

Функция $x \equiv 0$, очевидно, является решением, тогда как равенство $t^2+1 = 0$ не выполнено ни при каких $t \in \mathbb{R}$.

Вернувшись к переменным $(x,\ y)$, получаем

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{c}{x^4}, \quad c \neq 0; \qquad x = 0.$$

Домножив на x^4, получаем, что $\left(y^2+x^2\right)x^2 = c$. При этом, очевидно, c не только не равна нулю, она ещё и неотрицательна.

Ответ: $\qquad \left(y^2 + x^2\right)x^2 = c, \quad c > 0; \qquad x = 0.$

Пример 3.4. *Решить уравнение*

$$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$$

Поделив на x (и, возможно, потеряв решение $x \equiv 0$), убеждаемся, что данное уравнение – однородное:

$$y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}.$$

Поэтому решать его надо стандартной заменой (3.9):

$$y(x) = xt(x), \qquad y' = xt' + t.$$

Получим:

$$xt' + t = t - e^t.$$

После сокращения t разделим переменные, умножив полученное равенство на $\frac{-e^{-t}dx}{x}$:

$$-e^{-t}dt = \frac{dx}{x}$$

Проинтегрировав это равенство, получим:

$$-\int e^{-t}dt = \int \frac{dx}{x}, \qquad \text{или}$$

$$e^{-t} = \ln|x| + \ln|c|, \qquad c \neq 0.$$

Воспользуемся свойством логарифма $\ln a + \ln b = \ln(ab)$:

$$e^{-t} = \ln|cx|, \qquad c \neq 0.$$

Снимем модуль полагая, что знак c подобран так, чтобы под знаком логарифма стояло положительное выражение:

$$e^{-t} = \ln(cx), \qquad c \neq 0.$$

Вспоминаем, что деля на x умножая на $\frac{-e^{-t}dx}{x}$ мы могли потерять решение $x \equiv 0$.

Функция $x \equiv 0$ не является решением, поскольку при подстановке его в исходное уравнение мы получаем не тождество, а новое уравнение.

Вернувшись к переменным $(x,\ y)$, получаем

Ответ: $\quad e^{-\frac{y}{x}} = \ln(cx), \qquad c \neq 0.$

3.3. Линейное уравнение (ЛУ)

Опр. **3.3.** **Линейным уравнением (ЛУ)** называется уравнение вида

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{3.10}$$

где $a(x),\ b(x)$ – заданные функции.
При этом, если $b(x) \equiv 0$, то уравнение (3.10) принимает вид

$$y' + a(x)y = 0 \tag{3.11}$$

и называется **однородным линейным уравнением (ОЛУ)** **(не путать с однородным уравнением (ОУ)!!!)**.
Если же $b(x) \not\equiv 0$, то уравнение (3.10) называется **неоднородным линейным уравнением (НОЛУ)**.

Замечание 3.4. Однородное линейное уравнение **всегда** является **уравнением с разделяющимися переменными**.

Теорема **3.3 (ТСЕ решения задачи Коши для ЛУ).**

Усл. $\quad a(x),\ b(x) \in C(a,\ b).$

Утв. $\quad \forall\, x_0 \in (a,\ b),\ y_0 \in \mathbb{R} \quad \exists\,!$ *решение* $y = y(x)$ *задачи Коши*

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y = b(x), & x \in (a,\ b); \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Это решение $y(x)$ *определено и непрерывно на всём* $(a,\ b)$.

Доказательство.

Шаг 1. Решение однородного линейного уравнения

Вместо заданного нам неоднороного уравнения $y'(x) + a(x)y = b(x)$ рассмотрим соответствующее ему однородное:

$$y_0'(x) + a(x)y_0 = 0. \tag{3.13}$$

Так как это уравнение с разделяющимися переменными, мы уже умеем его решать: представим y_0' в виде $\frac{dy_0}{dx}$ и домножим (3.13) на $\frac{dx}{y_0}$.

$$\frac{dy_0}{y_0} = -a(x)dx.$$

Проинтегрировав, получаем общее решение:

$$y_0 = ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

где выражение $\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt$ есть первообразная функции $a(x)$ (см. 2-ой семестр), а позволив константе c принимать значение 0, мы добавляем ко множеству решений однородного ЛУ функцию $y_0 \equiv 0$, которую мы потеряли чуть раньше, когда делили на y_0.

Шаг 2. Метод вариации постоянной

Теперь, когда нам известно решение однородного ЛУ, можно попытаться найти решение неоднородного уравнения похожее на решение однородного. А именно,
будем искать решение задачи Коши (3.12) **в виде**

$$y(x) = c(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}, \tag{Почти Ответ}$$

где $c(x)$ – неизвестная пока функция. (Заменив константу c на функцию $c(x)$, мы осуществили «вариацию постоянной», что и дало название данному методу.)

Продифференцируем $y(x) = c(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}$

$$y'(x) = c'(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} - c(x)\,a(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

и подставим найденную производную и (Почти Ответ) в исходное уравнение $y'(x) + a(x)y = b(x)$:

$$\underbrace{c'(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} - c(x)\,a(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}}_{y'(x)} + \underbrace{a(x)c(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}}_{a(x)y(x)} = b(x). \tag{3.14}$$

На данном этапе **всегда** сократятся слагамые, содержащие $c(x)$ без производной, и у нас останется простейшее уравнение для $c'(x)$:

$$c'(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} = b(x), \qquad c'(x) = b(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}.$$

С другой стороны, начальное условие $y(x_0) = y_0$ для функции вида (Почти Ответ) означает, что $c(x_0) = y_0$. Таким образом, для функции $c(x)$ мы имеем задачу Коши для УРП:

$$\begin{cases} c'(x) = b(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}, \qquad x \in (a,\ b); \\ c(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Теорема 3.1, стр. 8, гарантирует существование и единственность решения задачи Коши (3.15). Найдя общее решение уравнения $c'(x) = b(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}$:

$$c(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \left(b(s)e^{\int\limits_{x_0}^{s} a(t)dt} \right) ds + c_1,$$

используем начальное условие $c(x_0) = y_0$, откуда получаем, что $c_1 = y_0$. Итак, (единственным) решением задачи Коши (3.15) является функция

$$c(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \left(b(s)e^{\int\limits_{x_0}^{s} a(t)dt} \right) ds + y_0.$$

Подставляем её в (Почти Ответ) и получаем, что функция

$$y(x) = \left[\int\limits_{x_0}^{x} \left(b(s)e^{\int\limits_{x_0}^{s} a(t)dt} \right) ds + y_0 \right] \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}. \qquad \text{(Совсем Ответ)}$$

и есть решение исходной задачи Коши (3.12).

Шаг 3. Единственность

Строго говоря, мы пока только построили какое-то решение исходной задачи, а именно – решение вида (Почти Ответ). То, что другого решения этого вида нет, следует из предыдущих шагов доказательства. Но надо убедиться, что нет других решений иного вида. Такие факты, как правило, доказывают от противного:

Предположим, что $\exists\ y(x)$ и $\tilde{y}(x)$ – различные решения исходной задачи Коши (3.12). Тогда функция

$$u(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$$

есть решение задачи

$$\begin{cases} u'(x) + a(x)u = 0, & x \in (a,\ b); \\ u(x_0) = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Из результатов шага 1 данного доказательства мы знаем, что общее решение уравнения $u'(x) + a(x)u = 0$ имеет вид

$$u = ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Найдём величину c из условия Коши:

$$u(x_0) = 0 = c\,e^0 = c \qquad \Longrightarrow \qquad c = 0.$$

Подставим $c = 0$ в (3.17) и получим, что

$$u \equiv 0, \qquad x \in (a,\ b).$$

А так как $u(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$, то

$$y(x) \equiv \tilde{y}(x), \qquad x \in (a,\ b).$$

Мы пришли к противоречию с предположением, что $y(x)$ и $\tilde{y}(x)$ – различные решения исходной задачи. Следовательно, наше предположение неверно, и разных решений задача (3.12) иметь не может. □

Пример 3.5. *Решить уравнение*

$$y'(x) + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Шаг 1. Решение однородного линейного уравнения
Вместо заданного нам неоднороного уравнения рассмотрим соответствующее ему однородное:

$$y_0'(x) + y_0 \operatorname{tg} x = 0. \tag{3.18}$$

Это – уравнение с разделяющимися переменными, поэтому представим y_0' в виде $\frac{dy_0}{dx}$ и домножим (3.18) на $\frac{dx}{y_0}$.

$$\frac{dy_0}{y_0} = -\operatorname{tg} x dx.$$

Проинтегрировав, получаем

$$\int \frac{dy_0}{y_0} = -\int \operatorname{tg} x dx.$$

$$\ln|y_0| = -\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| + \ln|c|, \qquad c \neq 0.$$

Пропотенцировав, получаем общее решение:

$$y_0 = c\cos x, \qquad c \in \mathbb{R},$$

позволив константе c принимать значение 0, мы добавили ко множеству решений однородного ЛУ функцию $y_0 \equiv 0$, которую мы потеряли чуть раньше, когда делили на y_0.

Шаг 2. Метод вариации постоянной
Теперь, когда нам известно решение однородного ЛУ, можно попытаться найти решение неоднородного уравнения похожее на решение однородного. А именно,
будем искать решение уравнения $y'(x) + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ **в виде**

$$y(x) = c(x)\cos x, \tag{ПО}$$

где $c(x)$ – неизвестная пока функция. (Заменив константу c на функцию $c(x)$, мы осуществили «вариацию постоянной», что и дало название данному методу.)
Продифференцируем $y(x) = c(x)\cos x$

$$y'(x) = c'(x)\cos x - c(x)\,\sin x$$

и подставим найденную производную и (ПО) в исходное уравнение $y'(x) + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$:

$$\underbrace{c'(x)\cos x - c(x)\,\sin x}_{y'(x)} + \underbrace{c(x)\cos x \cdot \operatorname{tg} x}_{y(x)\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\cos x}. \tag{3.19}$$

На данном этапе **всегда** сократятся слагамые, содержащие $c(x)$ без производной, и у нас останется простейшее уравнение для $c'(x)$:

$$c'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}, \qquad c'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Интегрируя обе части, находим общее решение этого уравнения:

$$c(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Осталось подставить найденную $c(x)$ в (ПО), и мы получаем

$$y(x) = y(x) = (\operatorname{tg} x + c_1)\cos x = \sin x + c_1 \cos x, \qquad c_1 \in \mathbb{R}. \qquad \text{(Совсем Ответ)}$$

Обычно, перед тем, как записать ответ, новую константу для упрощения записи снова обозначают c.

Ответ: $\quad y = \sin x + c\cos x.$

Замечание 3.5. К линейному уравнению сводится уравнение Бернулли:

$$y'(x) + a(x)y = b(x)y^n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1. \tag{3.20}$$

(Значение $n = 0$ исключается, поскольку иначе данное уравнение уже было бы линейным, а $n \neq 1$ так как иначе уравнение было бы уравнением с разделяющимся переменными.)

Решается уравнение Бернулли так: сначала уравнение делится на y^n, а затем стандартной заменой

$$z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}, \qquad \frac{y'(x)}{y^n} = \frac{z'(x)}{1-n} \tag{3.21}$$

оно приводится к виду

$$z'(x) + \tilde{a}(x)z = \tilde{b}(x), \qquad \tilde{a}(x) = (1-n)a(x), \quad \tilde{b}(x) = (1-n)b(x),$$

а это уже – линейное уравнение.

Замечание 3.6. Другим уравнением, сводящимся (при определённых условиях) к линейному, является уравнение Риккати:

$$y'(x) + a(x)y + b(x)y^2 = c(x). \tag{3.22}$$

В общем случае это уравнение не разрешимо «в квадратурах» (то есть его решение нельзя представить в виде алгебраического выражения от коэффициентов и интегралов от выражений, содержащих коэффициенты). Однако, если известно какое-либо частное решение $y_1(x)$ уравнения (3.22), то заменой

$$z(x) = y(x) - y_1(x) \tag{3.23}$$

оно приводится к виду

$$z'(x) + \Big(a(x) + 2b(x)y_1(x)\Big)\, z = -b(x)z^2,$$

а это уже – уравнение Бернулли со значением $n = 2$.

3.4. Уравнение в полных дифференциалах (УПД). Интегрирующий множитель

Опр. 3.4. Уравнением в полных дифференциалах (УПД) называется уравнение вида

$$M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0, \tag{3.24}$$

в том и только в том случае, когда его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции:

$$dF(x,\ y) \equiv \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy. \tag{3.25}$$

Теорема 3.4 (Критерий полного дифференциала).

Усл. *$M(x,\ y)$, $N(x,\ y)$, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x} \in C(D)$, где D – некоторая односвязная область в пространстве переменных $(x,\ y)$.*

Утв. *Выражение $M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy$ есть полный дифференциал $\iff$ в области D выполнено равенство*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad (x,\ y) \in D. \tag{3.26}$$

Без доказательства.

Теорема 3.5 (ТСЕ решения задачи Коши для УПД).

Усл. *M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x} \in C(D)$, где D – некоторая односвязная область в пространстве переменных $(x,\ y)$. В области D выполнены равенства*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad (x,\ y) \in D; \tag{3.26}$$

$$M^2(x,\ y) + N^2(x,\ y) \neq 0, \qquad (x,\ y) \in D.$$

Утв. $\forall\ (x_0,\ y_0) \in D \quad \exists\,!$ *решение $y = y(x)$ задачи Коши*

$$\begin{cases} M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0; \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Доказательство.

По теореме 3.4, левая часть уравнения $M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy = 0$ есть полный дифференциал. То есть $\exists\ F(x,\ y)$ такая, что

$$dF(x,\ y) \equiv \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

Но тогда для этой функции наше уравнение (3.24) принимает вид:

$$dF = 0, \qquad (x,\ y) \in D.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$F(x,\ y) = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Подставив его в начальное условие $y(x_0) = y_0$, получим значение c:

$$c = F(x_0,\ y_0).$$

Итак, единственным решением задачи Коши (3.27) является функция $y(x)$, неявно заданная равенством

$$F(x,\ y) - F(x_0,\ y_0) = 0.$$

$\square$

Пример 3.6. *Решить уравнение*

$$\frac{y}{x}dx + \left(y^3 + \ln x\right) dy = 0.$$

Шаг 0. Убедимся, что это – уравнение в полных дифференциалах
С учётом обозначений для функции $M(x,\ y)$ и $N(x,\ y)$,

$$\underbrace{\frac{y}{x}}_{M(x,\,y)}\ dx + \underbrace{\left(y^3 + \ln x\right)}_{N(x,\,y)}dy = 0,$$

получаем, что

$$M(x,\ y) = \frac{y}{x}, \qquad \text{а} \quad N(x,\ y) = y^3 + \ln x.$$

Проверим, выполняется ли для них критерий полного дифференциала (3.26):

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad x \neq 0,\ y \in \mathbb{R}.$$

Итак, наше уравнение – УПД, следовательно его решение имеет вид

$$F(x,\ y) = c, \qquad \text{где} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,\ y),\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,\ y).$$

Шаг 1. Найдём зависимость функции F от x
Для этого проинтегрируем равенство $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,\ y) = \frac{y}{x}$ по x:

$$F(x,\ y) = \int \frac{\partial F}{\partial x}\,dx = \int \frac{ydx}{x} = y\int \frac{dx}{x} = y\ln|x| + \varphi(y).$$

Важный момент: *вместо константы интегрирования мы написали функцию от переменной y. Это было обязательно надо сделать, так как при дифференцировании последнего равенства снова по x в обеих его частях пропадёт любое слагаемое, зависящее только от y, а не только константа.*
Ещё заметим, что модуль под знаком логарифма можно не писать, так как в исходном уравнении уже был $\ln x$, следовательно, оно рассматривается только при $x > 0$. Поэтому мы можем записать вид F, содержащий всю информацию о зависимости F от переменной x:

$$F(x,\ y) = y\ln x + \varphi(y). \tag{3.28}$$

Шаг 2. Найдём зависимость функции F от y
Продифференцируем (3.28) по y и подставим в равенство $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,\ y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \ln x + \varphi'(y) = N(x,\ y) = y^3 + \ln x,$$

откуда получаем уравнение для неизвестной пока функции $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = y^3.$$

Проинтегрировав это равенство по y, получаем:

$$\varphi(y) = \frac{y^4}{4} + c_1.$$

Объединяя это равенство и (3.28), мы полностью получаем функцию $F(x,\ y)$:

$$F(x,\ y) = y\ln x + \frac{y^4}{4} + c_1.$$

Прежде чем записать ответ в виде $F(x,\ y) = y\ln x + \frac{y^4}{4} + c_1 = c$ заметим, что если перенести c_1 в правую часть и обозначить выражение $4(c - c_1)$ как новую произвольную константу c, то вид ответа упростится[3]:

Ответ: $\quad 4y\ln x + y^4 = c.$

Пример 3.7. Краткий способ
Решить уравнение

$$\left(2 - 9xy^2\right)xdx + \left(4y^2 - 6x^3\right)ydy = 0.$$

Шаг 1. Разбиение слагаемых на полные дифференциалы
Выделим в уравнении слагаемые, где есть только x, слагаемые, где есть только y и остальные.

$$2xdx + 4y^3dy - \left(9x^2y^2dx + 6x^3ydy\right) = 0.$$

Шаг 2. Узнавание полных дифференциалов «в лицо»
Как нетрудно видеть,

$$2xdx = d(x^2), \qquad 4y^3dy = d\left(y^4\right), \qquad 9x^2y^2dx + 6x^3ydy = d\left(3x^3y^2\right),$$

поэтому наше уравнение переписывается так:

$$d\left(x^2 + y^4 - 3x^3y^2\right) = 0.$$

Отсюда сразу получаем

Ответ: $\quad x^2 + y^4 - 3x^3y^2 = c.$

Опр. 3.5. Интегрирующим множителем для уравнения $M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0$ называется функция $\mu(x,\ y)$ такая, что уравнение

$$\mu(x,\ y)M(x,\ y)dx + \mu(x,\ y)N(x,\ y)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах.

[3]Это будет справедливо всегда при решении УПД, поэтому обычно на втором шаге при нахождении функции $\varphi(y)$ константу интегрирования не пишут.

Замечание 3.7. Существует теорема, утверждающая, что для любого уравнения вида $M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0$ с функциями $M,\ N \in C^1(D)$, такими что $M^2 + N^2 \neq 0$, существует интегрирующий множитель (и даже их бесконечно много). Однако в общем случае задача его нахождения сводится к уравнению

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

которое является уравнением в частных производных. А эта задача гораздо сложнее исходного обыкновенного дифференциального уравнения. Поэтому интегрирующий множитель ищут, как правило, в одном из простых видов:

$$\mu = f(x), \quad \mu = f(y), \quad \mu = f(x^2 + y^2), \quad \mu = f(x)g(y), \quad \mu = f(xy), \quad \mu = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad \ldots$$

Но в любом случае поиск интегрирующего множителя – в большой степени искуство.

Пример 3.8. *Решить уравнение*

$$y^2 dx + \Big(e^x - y\Big)\, dy = 0.$$

Шаг 0. Поиск интегрирующего множителя
Попробуем найти интегрирующий множитель в виде

$$\mu = f(x)g(y).$$

Из уловия, что

$$\underbrace{\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}}_{f(x)g'(y)y^2 + 2f(x)g(y)y} = \underbrace{\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}}_{f'(x)g(y)\left(e^x - y\right) + f(x)g(y)e^x}$$

получаем:

$$f(x)g'(y)y^2 + 2f(x)g(y)y = f'(x)g(y)\Big(e^x - y\Big) + f(x)g(y)e^x.$$

Попробуем (нам ведь надо найти лишь какое-нибудь решение, а не все!) подобрать решение так, чтобы взаимно сократились салгаемые, закрашенные одним и тем же цветом:

$$f(x)g'(y)y^2 + 2f(x)g(y)y = f'(x)g(y)e^x - f'(x)g(y)y + f(x)g(y)e^x.$$

У нас получается система:

$$\begin{cases} f(x)(g'(y)y + 2g(y))y = -f'(x)g(y)y \\ f'(x)g(y)e^x + f(x)g(y)e^x = 0 \end{cases}$$

Последнее уравнение после сокращения на $g(y)e^x$ превращается в $f'(x) + f(x) = 0$, это – УРП, решив его, возьмём одно из его решений:

$$f(x) = e^{-x}.$$

Подставим его в первое уравнение системы:

$$e^{-x}(g'(y)y + 2g(y))y = e^{-x}g(y)y.$$

Сократим на $e^{-x}y$ и перенеся всё в левую часть, получим уравнение для $g(x)$:

$$g'(y)y + g(y) = 0.$$

Это - также УРП, решив которое, мы получим общее решение

$$g(y) = \frac{c}{y}.$$

Нам нужно какое-то одно (ненулевое) решение, поэтому возьмём $g(y) = \frac{1}{y}$. Итак, нам удалось найти интегрирующий множитель:

$$\mu(x,\ y) = \frac{e^{-x}}{y}.$$

Шаг 1. Получение УПД

Домножаем исходное уравнение $y^2dx + \left(e^x - y\right)dy = 0$ на $\frac{e^{-x}}{y}$:

$$e^{-x}ydx + \left(\frac{1}{y} - e^{-x}\right)dy = 0$$

и убеждаемся, что получилось действительно уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial\left(e^{-x}y\right)}{\partial y} = e^{-x}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{y} - e^{-x}\right)}{\partial x} = e^{-x}.$$

Шаг 2. Быстрое решение УПД

Разделив слагаемые на группы: без x, без y, и с x и y, получаем

$$\underbrace{\frac{1}{y}}_{d\ln|y|} + \underbrace{\left(e^{-x}ydx - e^{-x}dy\right)}_{d(-e^{-x}y)} = 0,$$

$$d\left(\ln|y| - e^{-x}y\right) = 0.$$

Отсюда сразу получаем

Ответ: $\qquad \ln|y| - e^{-x}y = c.$

Пример 3.9. *Решить уравнение*

$$ydy = \left(xdy + ydx\right)\sqrt{1+y^2}.$$

Шаг 0. Поиск интегрирующего множителя

В данном уравнении легко заметить, что выражение $xdy + ydx$ есть полный дифференциал:

$$d(xy) = xdy + ydx.$$

А всё остальное в этом уравнении не зависит от x. Поэтому интегрирующим множителем в данном случае будет функция

$$\mu(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

домножение на которую даст полный дифференциал $d\left(\sqrt{1+y^2}\right)$ в левой части и $d(xy)$ – в правой:

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = xdy + ydx \qquad \Longleftrightarrow \qquad d\left(\sqrt{1+y^2}\right) = d(xy).$$

Шаг 1. Быстрое решение УПД

В данном случае нам нет необходимости повторять весь алгоритм по поиску $F(x,\ y)$, поскольку мы сразу можем переписать уравнение в виде

$$d\left(\sqrt{1+y^2} - xy\right) = 0.$$

Отсюда

Ответ: $\qquad \sqrt{1+y^2} - xy = c.$

3.5. Уравнения 1-го порядка, неразрешённые относительно y' (УНОП). Метод введения параметра

3.5.1. Задача Коши для уравнения, неразрешённого относительно производной

Опр. 3.6. **Уравнением 1-го порядка, неразрешённым относительно производной (УПД)** называется уравнение вида

$$F(x;\ y,\ y') = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0. \tag{3.29}$$

Замечание 3.8. Если для однозначной разрешимости уравнения, разрешённого относительно производной, то есть уравнения вида $y\prime = f(x;\ y)$, достаточно (см. теорему 2.1, стр. 7) задать условия Коши $y(x_0) = y_0$, то для уравнения (3.29) этого условия может быть недостаточно. Например, решениями задачи

$$\begin{cases} y'^2 - 1 = 0; \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

являются две различные функции

$$y_1(x) = x, \qquad \text{и} \qquad y_2(x) = 2 - x.$$

Таким образом, единственности задача Коши **в такой постановке** не обеспечивает.

Опр. 3.7. **Задачей Коши для уравнения 1-го порядка, неразрешённого относительно производной**, называется задача

$$\begin{cases} F(x;\ y,\ y') = 0; \\ y(x_0) = y_0; \\ y'(x_0) = p_0, \end{cases}$$

где числа $x_0,\ y_0$ и p_0 удовлетворяют соотношению

$$F(x_0;\ y_0,\ p_0) = 0.$$

Теорема 3.6 (ТСЕ решения задачи Коши).

Усл. *D – некоторая область в пространстве переменных $(x,\ y,\ p) \in \mathbb{R}^3$. Функция $F(x,\ y,\ p) \in C^1(D)$, причём в точке $(x_0,\ y_0,\ p_0) \in D$ выполнены условия:*

$$F(x_0,\ y_0,\ p_0) = 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial F}{\partial p}(x_0,\ y_0,\ p_0) \neq 0.$$

Утв. *$\exists\, \delta > 0$ такая, что на промежутке $\big(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\big)$ существует и при том единственное решение задачи Коши*

$$\begin{cases} F(x;\ y,\ y') = 0; \\ y(x_0) = y_0; \\ y'(x_0) = p_0, \end{cases}$$

Без доказательства.

3.5.2. Метод введения параметра

Опр. 3.8. Методом введения параметра называется способ решения УНОП по следующему алгоритму:

1) Вводится новая переменная $p = y'$, называемая **параметром**, и уравнение (3.29) записывается в виде
$$F(x;\ y,\ p) = 0.$$

2) Берётся полный дифференциал от полученного уравнения:
$$dF \equiv \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial p}\,dp = 0.$$

3) Из полученного уравнения исключается одна из переменных x или y, при этом dx заменяется на $\frac{dy}{p}$, либо dy заменяется на pdx:
$$y' = p = \frac{dy}{dx} \qquad \Longrightarrow \qquad dx = \frac{dy}{p}, \quad dy = pdx.$$

4) Ответ записывается в парметрическом виде:
$$\begin{cases} \Phi(y,\ p;\ c) = 0; \\ F(x;\ y,\ p) = 0, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \Phi(x,\ p;\ c) = 0; \\ F(x;\ y,\ p) = 0, \end{cases}$$
где $\Phi(y,\ p;\ c) = 0$ либо $\Phi(x,\ p;\ c) = 0$ – общий интеграл уравнения, полученного на шаге 3).

Пример 3.10. *Решить уравнение:*
$$y' = e^{\frac{xy'}{y}}.$$

Шаг 1. Введём параметр $p = y'$. Наше уравнение превратится в алгебраическое равенство:

$$p = e^{\frac{px}{y}}. \tag{i}$$

Шаг 2. Возьмём дифференциал от обеих частей равенства (i):

$$dp = e^{\frac{px}{y}} \left(\frac{p}{y} dx + \frac{x}{y} dp - \frac{px}{y^2} dy \right). \tag{ii}$$

Шаг 3. Равенство (ii) не является ОДУ, так как в нём присутствуют дифференциалы не двух, а трёх переменных. Поэтому одну из переменных (но не p, иначе зачем же её было вводить?) надо исключить. Так как

$$y' = p = \frac{dy}{dx} \qquad \Longrightarrow \qquad dy = pdx,$$

а из (i) мы можем выразить y через x и p:

$$p = e^{\frac{px}{y}} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{px}{\ln p},$$

то подставив в (ii) вместо dy выражение pdx, а вместо y – выражение $\frac{px}{\ln p}$, получим ОДУ:

$$dp = p \left(\frac{\ln p}{x} dx + \frac{\ln p}{p} dp - \frac{\ln^2 p}{px} pdx \right).$$

Приведём подобные:

$$(1 - \ln p) dp = p(\ln p - \ln^2 p) \frac{dx}{x}. \tag{iii}$$

Это уже – уравнение с разделяющимися переменными. Поделим его на $p(\ln p - \ln^2 p)$ (при этом мы могли потерять решения $p = 0,\ \ln p = 0,\ \ln p = 1$):

$$\frac{dp}{p \ln p} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$\ln |\ln p| = \ln |x| + \ln |c|, \qquad c \neq 0.$$

Пропотенцируем и снимем модуль:

$$cx = \ln p, \qquad c \neq 0.$$

Разберёмся с решениями, которые могли быть потеряны при делении на $p \ln p (1 - \ln p)$. Функция $p \equiv 0$ не может быть решением (iii), так как в этом уравнении есть $\ln p$, что подразумевает, что $p > 0$. Равенство $\ln p = 0$, или $p \equiv 1$ задаёт решение (iii), и его легко включить в общую формулу, разрешив константе c принимать значение $c = 0$. И, наконец, равенство $1 - \ln p = 0$, или $p \equiv e$ также задаёт решение (iii).
Итак, общее решение уравнения (iii) имеет вид:

$$\text{первое решение:} \quad cx = \ln p, \quad c \in \mathbb{R}; \qquad \text{второе решение:} \quad p \equiv e. \tag{iv}$$

Можно уже записать ответ, составив его из равенств (iv) и (i):

$$\text{первое решение:} \ \begin{cases} cx = \ln p; \\ p = e^{\frac{px}{y}}; \end{cases} \qquad \text{второе решение:} \ \begin{cases} p \equiv e; \\ p = e^{\frac{px}{y}}. \end{cases} \tag{v}$$

Однако в данном конкретном случае можно вместо параметрической записи ответа (v) получить явное представление функции $y = y(x)$. Изучим первое решение[4]:

$$\left\{\begin{array}{l} cx = \ln p; \\ p = e^{\frac{px}{y}}; \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} p = e^{cx}; \\ p = e^{\frac{px}{y}}; \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left[\frac{px}{y} = cx \quad \Longrightarrow \quad p = cy\right] \quad \Longrightarrow \quad cy = e^{cx}.$$

Второе решение нам даст

$$\left\{\begin{array}{l} p \equiv e; \\ p = e^{\frac{px}{y}}. \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \frac{ex}{y} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = ex.$$

Таким образом,

Ответ: первое решение: $cy = e^{cx}$, $c \in \mathbb{R}$; второе решение: $y = ex$.

Пример 3.11. *Решить уравнение:*

$$y = (y' - 1)e^{y'}.$$

Шаг 1. Введём параметр $p = y'$. Наше уравнение превратится в алгебраическое равенство:

$$y = (p - 1)e^{p}. \tag{i}$$

Шаг 2. Возьмём дифференциал от обеих частей равенства (i):

$$dy = e^{p}dp + (p - 1)e^{p}\,dp = pe^{p}\,dp. \tag{ii}$$

Шаг 3. В равенстве (ii) присутствуют дифференциалы только двух переменных. Однако, если мы не выразим в нём y через x и p, то решив это уравнение, мы придём лишь к старому равенству (i) и не получим новой информации. Так как

$$y' = p = \frac{dy}{dx} \qquad \Longrightarrow \qquad dy = pdx,$$

то подставив в (ii) вместо dy выражение pdx, получим ОДУ:

$$pdx = pe^{p}\,dp. \tag{iii}$$

Это уже – уравнение с разделяющимися переменными. Поделим его на p (при этом мы могли потерять решение $p = 0$):

$$dx = e^{p}\,dp.$$

Проинтегрировав, получим:

$$x = e^{p} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Разберёмся с решением, которое могло быть потеряно при делении на p. Функция $p \equiv 0$ является решением (iii), так как обращает его в тождественно равенство $0 \equiv 0$. Итак, общее решение уравнения (iii) имеет вид:

$$\text{первое решение:}\quad x = e^{p} + c, \quad c \in \mathbb{R}; \qquad \text{второе решение:}\quad p \equiv 0. \tag{iv}$$

[4]**Стандатрной ошибкой** было бы в этом месте вспомнить, что $p = y'$ и из равенства $cx = \ln p$ прийти к выводу, что $y' = e^{cx}$, откуда $y = \frac{e^{cx}}{c} + c_1$. На самом деле равенство $p = y'$ уже сослужило свою роль в начале шага 3) и больше **нигде** в решении применяться не должно. Ведь после того, как мы им воспользовались для исключения переменной y, параметр p стал простой переменной и его единственная связь с y выражается в равенстве (i).

Можно уже записать ответ, составив его из равенств (iv) и (i):

$$\text{первое решение:} \quad \begin{cases} x = e^p + c; \\ y = (p-1)e^p; \end{cases} \qquad \text{второе решение:} \quad \begin{cases} p \equiv 0; \\ y = (p-1)e^p. \end{cases} \tag{v}$$

Однако в данном конкретном случае второе решение можно вместо параметрической формы (v) записать в явном виде $y = y(x)$. Изучим второе решение:

$$\begin{cases} p \equiv 0; \\ y = (p-1)e^p; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y \equiv -1.$$

Таким образом,

Ответ:

$$\text{первое решение:} \quad \begin{cases} x = e^p + c; \\ y = (p-1)e^p, \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}; \qquad \text{второе решение:} \quad y \equiv -1.$$

3.5.3. Уравнения Клеро и Лагранжа

Два важных типа уравнений, неразрешённых относительно производной, это уравнения Клеро и Лагранжа. Их мы можем решить в общем виде.

Опр. 3.9. **Уравнением Клеро** называется уравнение, неразрешённое относительно производной, следующего вида:

$$y = xy' + \psi(y'),$$

где $\psi(p)$ – заданная функция.

Пример 3.12. *Решить уравнение Клеро:*

$$y = xy' + \psi(y'),$$

где $\psi(p)$ – заданная функция из $C^1\langle a,\ b\rangle$.
Шаг 1. Введём параметр $p = y'$. Наше уравнение превратится в алгебраическое равенство:

$$y = px + \psi(p). \tag{i}$$

Шаг 2. Возьмём дифференциал от обеих частей равенства (i):

$$dy = pdx + xdp + \psi'(p)dp \tag{ii}$$

Шаг 3. В равенстве (ii) присутствуют дифференциалы только двух переменных. Однако, если мы не выразим в нём y через x и p, то решив это уравнение, мы придём лишь к старому равенству (i) и не получим новой информации. Так как

$$y' = p = \frac{dy}{dx} \qquad \Longrightarrow \qquad dy = pdx,$$

то подставив в (ii) вместо dy выражение pdx, получим ОДУ:

$$pdx = pdx + xdp + \psi'(p)dp.$$

После сокращения pdx получим

$$\left(x + \psi'(p)\right) dp = 0. \tag{iii}$$

Поскольку произведение двух выражений обращается в ноль тогда и только тогда, когда одно из них равно нулю, равенство (iii) равносильно совокупности

$$\text{первое решение:}\quad \psi'(p) = -x; \qquad \text{вторoе решение:}\quad dp = 0.$$

Первое решение – уже не дифференциальное (ведь функция ψ – задана, значит, и ψ' – тоже) уравнение, поэтому оно уже готово для подстановки в ответ. Рассмотрим второе:

$$dp = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p = c.$$

Итак, общее решение уравнения (iii) имеет вид:

$$\text{первое решение:}\quad x = -\psi'(p); \qquad \text{второе решение:}\quad p \equiv c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{iv}$$

Можно уже записать ответ, составив его из равенств (iv) и (i):

$$\text{первое решение:}\quad \begin{cases} x = -\psi'(p); \\ y = px + \psi(p); \end{cases} \qquad \text{второе решение:}\quad \begin{cases} p \equiv c; \\ y = px + \psi(p). \end{cases} \tag{v}$$

Преобразуем ответ. Первое решение представляется в параметрическом виде, если мы избавимся от x в правой части:

$$\begin{cases} x = -\psi'(p); \\ y = px + \psi(p); \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = -\psi'(p); \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p). \end{cases}$$

Второе решение моментально упрощается в явно заданное семейство функций:

$$\begin{cases} p \equiv c; \\ y = px + \psi(p). \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y = cx + \psi(c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Таким образом,

Ответ:

$$\text{первое решение:}\quad \begin{cases} x = -\psi'(p); \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p); \end{cases} \qquad \text{второе решение:}\quad y = cx + \psi(c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Опр. 3.10. **Уравнением Лагранжа** называется уравнение, неразрешённое относительно производной, следующего вида:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

где $\varphi(p)$ и $\psi(p)$ – заданные функции.

Пример 3.13. *Решить уравнение Лагранжа:*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

где $\varphi(p)$ и $\psi(p)$ – заданные функции из $C^1\langle a,\ b\rangle$.

Шаг 1. Введём параметр $p = y'$. Наше уравнение превратится в алгебраическое равенство:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{i}$$

Шаг 2. Возьмём дифференциал от обеих частей равенства (i):

$$dy = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp \tag{ii}$$

Шаг 3. В равенстве (ii) присутствуют дифференциалы только двух переменных. Однако, если мы не выразим в нём y через x и p, то решив это уравнение, мы придём лишь к старому равенству (i) и не получим новой информации. Так как

$$y' = p = \frac{dy}{dx} \qquad \Longrightarrow \qquad dy = pdx,$$

то подставив в (ii) вместо dy выражение pdx, получим ОДУ:

$$pdx = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp.$$

После приведения подобных получим

$$(p - \varphi(p))\, dx + (x\varphi'(p) + \psi'(p))\, dp = 0. \tag{iii}$$

Здесь надо рассмотреть два случая:

1) $p - \varphi(p) \neq 0$, тогда уравнение (iii) – линенйное: $\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}\, x = -\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$;

2) в точке p_0 выполнено равенство $p_0 = \varphi(p_0)$.

В первом случае решаем линейное уравнение, получаем его общее решение

$$x = \mu(p,\ c).$$

Во втором случае, в каждой точке p_0, где выполнено равенство $p_0 = \varphi(p_0)$ получаем уравнение

$$(x\varphi'(p_0) + \psi'(p_0))\, dp_0 = 0.$$

Это тождество, так как $dp_0 \equiv 0$, поэтому не даёт информации. Рассмотрим, что следует из самого равенства $p_0 = \varphi(p_0)$. Из (i) в точке p_0 получаем:

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Это – также решение (прямая линия) исходного уравнения Лагранжа. Таким образом,

Ответ:

$$\text{первое решение:} \quad \begin{cases} x = \mu(p,\ c), \quad c \in \mathbb{R}; \\ y = x\varphi(p) + \psi(p); \end{cases}$$

$$\text{второе решение:} \quad \forall\, p_0 : \quad p_0 = \varphi(p_0) \quad \text{прямая} \quad y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Пример 3.14. *Решить уравнение Лагранжа:*

$$y = 2xy' - \ln y'.$$

Шаг 1. Введём параметр $p = y'$. Наше уравнение превратится в алгебраическое равенство:

$$y = 2xp - \ln p. \tag{i}$$

Шаг 2. Возьмём дифференциал от обеих частей равенства (i):

$$dy = 2pdx + 2xdp - \frac{1}{p}\,dp. \tag{ii}$$

Шаг 3. В равенстве (ii) присутствуют дифференциалы только двух переменных. Однако, если мы не выразим в нём y через x и p, то решив это уравнение, мы придём лишь к старому равенству (i) и не получим новой информации. Так как

$$y' = p = \frac{dy}{dx} \qquad \Longrightarrow \qquad dy = pdx,$$

то подставив в (ii) вместо dy выражение pdx, получим ОДУ:

$$pdx = 2pdx + 2xdp - \frac{1}{p}\,dp.$$

После приведения подобных получим

$$pdx + \left(2x - \frac{1}{p}\right)dp = 0. \tag{iii}$$

Здесь надо рассмотреть два случая:

1) $p \neq 0$, тогда уравнение (iii) – линенйное: $\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}\,x = \frac{1}{p^2}$;

2) $p = 0$.

Второй случай невозможен, так как уже в равенстве (i) переменная p стоит под знаком логарифма, то есть имеет смысл рассматривать только $p > 0$. Поэтому рассмотрим первый случай. Решим полученное линейное уравнение:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}\,x = \frac{1}{p^2}. \tag{iv}$$

Общим решением соответствущего однородного уравнения

$$\frac{dx_o}{dp} + \frac{2}{p}\,x_o = 0$$

является функция

$$x_o(p) = \frac{c}{p^2}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

В соответствии с методом вариации постоянной будем искать решение (iv) в виде

$$x(p) = \frac{c(p)}{p^2}, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{dx}{dp} = \frac{pc'(p) - 2c(p)}{p^3}.$$

Подставив это в (iv), получим уравнение для $c(p)$:

$$c'(p) = 1.$$

Поэтому $c(p) = p + c_1$, и общее решение линейного уравнения (iv) имеет вид

$$x = \frac{1}{p} + \frac{c_1}{p^2}, \qquad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Объединяя это равенство с (i), получим

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p} + \frac{c}{p^2}, \quad c \in \mathbb{R}; \\ y = 2xp - \ln p, \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{p} + \frac{c}{p^2}, \quad c \in \mathbb{R}; \\ \\ y = 2 + \frac{2c}{p} - \ln p. \end{cases}$$

Таким образом,

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p} + \frac{c}{p^2}, \quad c \in \mathbb{R}; \\ \\ y = 2 + \frac{2c}{p} - \ln p. \end{cases}$$

3.6. Особые решения

Опр. 3.11. Решение $y = \varphi(x)$ ОДУ $F(x;\ y,\ y') = 0$ называется **особым решением**, если через каждой точки его графика касается график другого решения, отличающегося от $y = \varphi(x)$ в сколь угодно малой окрестности точки касания.

Теорема 3.7 (Условия касания).

Усл. *Функции $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ непрерывны на $\langle a,\ b\rangle$ и дифференцируемы в точке $x_0 \in \langle a,\ b\rangle$.*

Утв. *Графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ касаются в точке x_0* $\iff$

$$\iff \begin{cases} \varphi(x_0) = \psi(x_0); \\ \varphi'(x_0) = \psi'(x_0). \end{cases}$$

Замечание 3.9. Здесь под касанием кривых мы понимаем как случай, когда один из графиков пересекает другой, и имеет в точке пересечения такую же касательную, так и случай, когда один из графиков остаётся только с одной стороны от другого, но имеет с ним общую точку, в которой их касательные совпадают.

Наличие двух интегральных кривых, проходящих через одну точку, означает нарушение единственности решения задачи Коши с начальными условиями в этой точке. Поэтому если решение $y = \varphi(x)$ – особое решение, то должно нарушаться одно из условий теоремы 3.6, стр. 26, а именно, условие $\frac{\partial F}{\partial p}(x_0,\ y_0,\ p_0) \neq 0$, отвечающее за единственность решения задачи Коши. Сформулируем это в виде теоремы:

Теорема 3.8 (Необходимое условие особого решения).

Усл. *Функция $y = \varphi(x)$ – особое решение уравнения $F(x;\ y,\ y') = 0$.*

Утв. *$y = \varphi(x)$ является решением системы уравнений*

$$\begin{cases} F(x;\ y,\ y') = 0; \\ \frac{\partial F(x,\ y,\ y')}{\partial y'} = 0. \end{cases} \tag{3.30}$$

Замечание 3.10. Существенно отметить, что данная теорема – лишь **необходимое условие** особого решения. То есть любое особое решение обязано удовлетворять системе (3.30), но не каждая функция, удовлетворяющая этой системе обязана быть особым решением.
Если исключить из системы (3.30) переменную y', то получится соотношение вида $\Psi(x,\ y)=0$, задающее решение уравнения, для которого нарушается условие единственности. График такого решения назывется **дискриминантной кривой**.
В этих терминах наше замечание звучит так:
каждое особое решение задаёт дискриминантную кривую, но не каждая дискриминантная кривая есть график особого решения.

Таким образом, мы уже готовы предъявить

Алгоритм поиска особых решений

1) Найти общий интеграл уравнения

$$\Phi(x,\ y;\ c)=0$$

2) Решить систему (3.30)

$$\begin{cases} F(x;\ y,\ y')=0; \\ \frac{\partial F(x,\,y,\,y')}{\partial y'}=0 \end{cases} \tag{3.30}$$

путём исключения переменной y'. В результате получаем уравнение дискриминантной кривой

$$\Psi(x,\ y_\partial)=0.$$

3) Проверить условия касания:

$$\begin{cases} \Phi(x,\ y;\ c)=0, \\ \Psi(x,\ y_\partial)=0. \end{cases} \qquad \text{(из этой системы получаем } c \text{ как функцию } x);$$

$$\frac{dy(x,c)}{dx}\equiv-\frac{\frac{\partial\Phi(x,\,y;\,c)}{\partial x}}{\frac{\partial\Phi(x,\,y;\,c)}{\partial y}}=\frac{dy_\partial(x)}{dx}\equiv-\frac{\frac{\partial\Psi(x,\,y_\partial)}{\partial x}}{\frac{\partial\Psi(x,\,y_\partial)}{\partial y}}$$

если это равенство верно при найденной $c(x)$, то y_∂ – особое решение.

Пример 3.15. *Решить уравнение:*

$$y=xy'-\sin y'.$$

Данное уравнение – уравнение Клеро, поэтому решать его будем как в общем примере 3.12 (стр. 29).
Шаг 1. Введём параметр $p=y'$. Наше уравнение превратится в алгебраическое равенство:

$$y=px-\sin p. \tag{i}$$

Шаг 2. Возьмём дифференциал от обеих частей равенства (i):

$$dy=pdx+xdp-\cos pdp \tag{ii}$$

Шаг 3. Выразим y через x и p, пользуясь тем, что

$$y'=p=\frac{dy}{dx}\qquad\Longrightarrow\qquad dy=pdx.$$

Подставив в (ii) вместо dy выражение pdx, получим ОДУ:

$$pdx = pdx + xdp - \cos p dp.$$

После сокращения pdx получим

$$(x - \cos p)\, dp = 0. \tag{iii}$$

Поскольку произведение двух выражений обращается в ноль тогда и только тогда, когда одно из них равно нулю, равенство (iii) равносильно совокупности

$$\text{первое решение:} \quad x = \cos p; \qquad \text{второе решение:} \quad dp = 0.$$

Первое решение – уже не дифференциальное (а алгебраическое) уравнение, поэтому оно уже готово для подстановки в ответ. Рассмотрим второе:

$$dp = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p = c.$$

Итак, общее решение уравнения (iii) имеет вид:

$$\text{первое решение:} \quad x = \cos p; \qquad \text{второе решение:} \quad p \equiv c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{iv}$$

Можно уже записать ответ, составив его из равенств (iv) и (i):

$$\text{первое решение:} \quad \begin{cases} x = \cos p; \\ y = px - \sin p; \end{cases} \qquad \text{второе решение:} \quad \begin{cases} p \equiv c; \\ y = px - \sin p. \end{cases} \tag{v}$$

Преобразуем ответ. Первое решение представляется в параметрическом виде, если мы избавимся от x в правой части:

$$\begin{cases} x = \cos p; \\ y = px - \sin p; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = \cos p; \\ y = p\cos p - \sin p. \end{cases}$$

Второе решение моментально упрощается в явно заданное семейство функций:

$$\begin{cases} p \equiv c; \\ y = px - \sin p. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y = cx - \sin c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Таким образом,

Общее решение:

$$\text{первое решение:} \quad \begin{cases} x = \cos p; \\ y = p\cos p - \sin p, \end{cases} \qquad \text{второе решение:} \quad y = cx - \sin c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Шаг 4. Ищем особые решения. Система (3.30) в данном случае приобретает вид

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ y') = y - xy' + \sin y' = 0; \\ \frac{\partial F(x,\, y,\, y')}{\partial y'} = -x + \cos y' = 0. \end{cases} \tag{vi}$$

Нам нужно найти функции, удовлетворяющие обоим равенствам. Выражать y' через x из второго уравнения и подставлять в первое не очень удобно[5], поэтому представим решение

[5] Мы бы в этом случае получили

$$\begin{cases} y - x\arccos x \pm \sqrt{1-x^2} = 0 & \text{на отрезке} \quad y' \in [0,\ \pi]; \\ y - x(2\pi - \arccos x) \pm \sqrt{1-x^2} = 0 & \text{на отрезке} \quad y' \in [\pi,\ 2\pi]; \\ y - x(2\pi + \arccos x) \pm \sqrt{1-x^2} = 0 & \text{на отрезке} \quad y' \in [2\pi,\ 3\pi]; \\ y - x(4\pi - \arccos x) \pm \sqrt{1-x^2} = 0 & \text{на отрезке} \quad y' \in [3\pi,\ 4\pi]; \\ \qquad \dots \end{cases}$$

системы (vi) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \cos t; \\ y_\partial = t\cos t - \sin t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{vii}$$

Во первых заметим, что мы получили «первое решение», соответственно, касаться его будут графики «второго решения». Проверим условия касания для **дискриминантной кривой** (vii).

$$\begin{cases} y = cx - \sin c, \quad c \in \mathbb{R}; \\ \begin{cases} x = \cos t; \\ y_\partial = t\cos t - \sin t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{(из этой системы получаем } c \text{ как функцию параметра } t) :$$

$$c(t) = t. \tag{viii}$$

Найдём теперь производные $y'(x)$:

$$\begin{cases} y = cx - \sin c, \quad c \in \mathbb{R}; \\ \begin{cases} x = \cos t; \\ y_\partial = t\cos t - \sin t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y' = c = \Big[\text{в силу (viii)}\Big] = t; \\ \frac{\partial y_\partial}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y_\partial}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} = \frac{\cos t - t\sin t - \cos t}{-\sin t} = t. \end{cases}$$

Таким образом, при произвольном значении параметра t, то есть в любой точке $\big(x(t),\ y(t)\big)$ графика функции (vii), найдётся такое значение константы $c = t$, при котором график функции

$$y = cx - \sin c$$

касается графика функции (vii) именно в этой точке. Поэтому, по определению 3.11, стр. 33, решение (vii) – особое.

<u>Ответ:</u>

первое решение: $\begin{cases} x = \cos p; \\ y = p\cos p - \sin p, \end{cases}$ второе решение: $y = cx - \sin c, \quad c \in \mathbb{R};$

особое решение: $\begin{cases} x = \cos p; \\ y = p\cos p - \sin p. \end{cases}$

Отметим, что хотя в первом решении параметр $p \in \mathbb{R}$ и во втором решении константа $c \in \mathbb{R}$, их смысл совершенно различен. Тогда как каждому значению p соответствует лишь одна точка, каждому значению c соответствует одна функция (одно частное решение).

<u>*Замечание*</u> 3.11. На самом деле, «первое решение» уравнения Клеро (см. общий пример 3.12, стр. 29) всегда будет особым.
Для того, чтобы решение уравнения Лагранжа

$$y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

было особым, необходимо, чтобы оно определялось системой уравнений:

$$\begin{cases} y = x\varphi(p) + \psi(p); \\ p = \varphi(p), \end{cases}$$

то есть только «вторые решения» уравнения Лагранжа могут быть его особыми решениями (см. общий пример 3.13, стр. 30).

4. Уравнения, допускающие понижение порядка (УДПП)

Опр. 4.1. ОДУ n-ого порядка

$$F\left(x;\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\right) = 0$$

называется **уравнением, допускающим понижение порядка (УДПП)**, если подходящей заменой переменных его можно свести к уравнению меньшего порядка.

Мы рассмотрим четыре частных случая, когда стандартные замены приводят к снижению порядка уравнения.

4.1. Уравнение не содержит y и его первые производные

Правило 1. ОДУ n-ого порядка не содержит искомой функции $y(x)$ и всех её производных вплоть до $(k-1)$-го порядка включительно:

$$F\left(x;\ y^{(k)}(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\right) = 0.$$

Тогда заменой

$$z(x) = y^{(k)}$$

это уравнение сводится к уравнению порядка $(n-k)$:

$$F\left(x;\ z(x),\ \ldots,\ z^{(n-k)}(x)\right) = 0.$$

Пример 4.1. *Решить уравнение:*

$$xy^{(5)} - y^{(4)} = 0.$$

Самая младшая производная, встречающаяся в данном уравнении, – это $y^{(4)}$. Поэтому обозначим её за новую неизвестную функцию:

$$z(x) = y^{(4)}.$$

Уравнение примет вид:

$$xz' - z = 0.$$

Это – уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$$

(и, возможно, потеряв решения $x \equiv 0$, $z \equiv 0$), мы получаем:

$$z(x) = cx, \qquad c \neq 0.$$

Позволив постоянной c принимать значение 0, мы добавим к этому множеству решений потерянное решение $z \equiv 0$.
Итак, мы знаем $z(x)$. Теперь надо найти y. Поскольку $z(x) = y^{(4)}$, то

$$y^{(4)} = cx, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Проинтегрировав это равенство 4 раза, мы получим

Ответ: $\quad y(x) = c_1x^5 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5, \qquad c_1,\ \ldots,\ c_5 \in \mathbb{R}.$

4.2. Уравнение не содержит независимую переменную x

Правило 2. ОДУ n-ого порядка не содержит независимую переменную x:

$$F\left(y(x);\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\right) = 0.$$

Тогда введением новой неизвестной функции от y (!)

$$p(y) = y'$$

это уравнение сводится к уравнению порядка $(n-1)$. В самом деле,

$$y' = \frac{dy}{dx} = p(y), \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{d}{dx}p(y(x)) = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'\cdot y' = p'p,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(p'p) = p\,\frac{d}{dx}p'(y(x)) + p'\frac{d}{dx}p(y(x)) = p''p^2 + {p'}^2 p$$

и так далее. При замене производной $y^{(k)}(x)$ мы получаем выражение, зависящее от $p(y)$ и её производных до порядка $(k-1)$ включительно.

Пример 4.2 (Первый способ). *Решить уравнение:*

$$yy'' - {y'}^2 = 0.$$

Так как в этом уравнении отсутсвует переменная x, то по правилу вводим новую неизвестную функцию:

$$p(y) = y', \quad \Rightarrow \quad y'' = p'p.$$

Уравнение примет вид:

$$yp'p - p^2 = 0. \tag{i}$$

Это – уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

(и, возможно, потеряв решения $y \equiv 0$, $p(y) \equiv 0$), мы получаем:

$$p(y) = c_1 y, \qquad c \neq 0.$$

Позволив постоянной c_1 принимать значение 0, мы добавим к этому множеству решений потерянное решение $p \equiv 0$. А функция $y \equiv 0$ не является потерянным решением уравнения (i). Итак, мы знаем $p(y)$. Теперь надо найти y. Поскольку $p(y) = y'$, то

$$y' = c_1 y, \qquad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Это – также уравнение с разделяющимися переменными. Домножим на $\frac{dx}{y}$, теряя решение $y \equiv 0$:

$$\frac{dy}{y} = c_1 dx \quad \Longrightarrow \quad y = c_2 e^{c_1 x}, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \;\; c_2 \neq 0.$$

Разрешив константе c_2 принимать значение 0, мы добавляем ко множеству решений потерянное ранее решение $y \equiv 0$.

Ответ: $\qquad y(x) = c_2 e^{c_1 x}, \qquad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$

4.3. Уравнение удаётся привести к такому виду, что левая часть является производной некоторого дифференциального выражения

Правило 3. Если уравнение

$$F\left(x,\ y(x);\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\right) = 0$$

удаётся привести к виду

$$\frac{d}{dx}\,\Phi\left(x,\ y(x);\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\right) = 0, \tag{4.1}$$

то, проинтегрировав (4.1), получаем уравнение порядка $(n-1)$:

$$\Phi\left(x,\ y(x);\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\right) = c_1.$$

Пример 4.3 (Второй способ). *Решить уравнение:*

$$yy'' - y'^2 = 0.$$

Если это уравнение поделить на y^2 (при этом мы потеряем решение $y \equiv 0$), то мы получим в левой части полную производную:

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0.$$

Проинтегрировав, получаем уравнение первого порядка

$$\frac{y'}{y} = c_1.$$

Это – уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y} = c_1 dx \quad \Longrightarrow \quad y = c_2 e^{c_1 x}, \quad c_1 \in \mathbb{R},\ \ c_2 \neq 0.$$

Разрешив константе c_2 принимать значение 0, мы добавляем ко множеству решений потерянное ранее решение $y \equiv 0$.

Ответ: $\qquad y(x) = c_2 e^{c_1 x}, \qquad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$

4.4. Уравнение однородно относительно y и его производных

Правило 4. Если уравнение однородно относительно $y;\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}$, то есть справедливо равенство

$$F\left(x,\ ky;\ ky',\ \ldots,\ ky^{(n)}\right) = k^m\, F\left(x,\ y;\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}\right),$$

то введение новой неизвестной функции $z(x)$ по правилу

$$y' = z(x)y$$

приводит к снижению порядка уравнения на единицу. При этом:

$$y'' = \frac{d}{dx}\,\Big(z(x)y(x)\Big) = yz' + zy' = yz' + z^2y = y\left(z' + z^2\right),$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\,\Big(y\left(z' + z^2\right)\Big) = y'\left(z' + z^2\right) + y\left(z'' + 2zz'\right) = y\left(z'' + 3zz' + z^3\right),\ \ldots$$

Пример 4.4. *Решить уравнение:*

$$yy'' - y'^2 = 6xy^2.$$

Выясним, является ли уравнение однородным относительно $y;\ y',\ y''$. Для этого совершим подстановку

$$y \rightarrowtail ky; \qquad y' \rightarrowtail ky'; \qquad y'' \rightarrowtail ky''.$$

Получим:

$$k^2yy'' - k^2y'^2 = 6k^2y^2.$$

После сокращения на k^2 уравнение примет свой изначальный вид, следовательно, оно однородно относительно $y;\ y',\ y''$. Введём новую неизвестную функцию $z(x)$ по правилу

$$y' = z(x)y, \qquad y'' = y\left(z' + z^2\right).$$

Уравнение пимет вид:

$$y^2\left(z' + z^2\right) - z(x)y^2 = 6xy^2.$$

Сократим на y^2 (при этом потеряв решение $y \equiv 0$) и получим:

$$z' + z^2 - z^2 = 6x \qquad \Longrightarrow \qquad z'(x) = 6x.$$

Проинтегрировав по x, получим

$$z(x) = 3x^2 + c_1.$$

Вновь вспоминаем про y и замену $y' = z(x)y$. Получаем

$$y' = \left(3x^2 + c_1\right)y.$$

Разделяем переменные (деля на y и опять теряя решение $y \equiv 0$):

$$\frac{dy}{y} = \left(3x^2 + c_1\right)dx \quad \Longrightarrow \quad y = c_2e^{x^3 + c_1x}, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 \neq 0.$$

Разрешив константе c_2 принимать значение 0, мы добавляем ко множеству решений потерянное ранее решение $y \equiv 0$.

Ответ: $\qquad y(x) = c_2e^{x^3 + c_1x}, \qquad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$

5. Системы ОДУ

5.1. Основные понятия

Опр. 5.1. **Системой ОДУ** называется задача нахождения k неизвестных функций $y_1(x),\ \ldots,\ y_k(x)$ из условий

$$\begin{cases} F_1\left(x;\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(n_{11})};\ \ldots;\ y_k,\ y_k',\ \ldots,\ y_k^{(n_{1k})}\right) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m\left(x;\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(n_{m1})};\ \ldots;\ y_k,\ y_k',\ \ldots,\ y_k^{(n_{mk})}\right) = 0, \end{cases}$$

где $F_1,\ \ldots,\ F_m$ – известные функции. При этом число

$$n = \max_{l=\overline{1,\,m}}\{n_{l1}\} + \ldots + \max_{l=\overline{1,\,m}}\{n_{lk}\}$$

называется **порядком системы**.

Опр. 5.2. **Канонической системой ОДУ** называется система уравнений, разрешённых относительно старшей производной:

$$\begin{cases} y_1^{(n_1)} = f_1\left(x;\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(n_1-1)};\ \ldots;\ y_k,\ y_k',\ \ldots,\ y_k^{(n_k-1)}\right); \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_k^{(n_k)} = f_k\left(x;\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(n_1-1)};\ \ldots;\ y_k,\ y_k',\ \ldots,\ y_k^{(n_k-1)}\right), \end{cases}$$

где $f_1,\ \ldots,\ f_k$ – известные функции. Число $n = n_1 + \ldots + n_k$ также называется **порядком системы**.

Опр. 5.3. **Нормальной системой ОДУ** называется система

$$\begin{cases} y_1' = f_1\left(x;\ y_1,\ \ldots,\ y_n\right); \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n\left(x;\ y_1,\ \ldots,\ y_n\right), \end{cases} \tag{5.1}$$

где $f_1,\ \ldots,\ f_k$ – известные функции. Число n также называется **порядком системы**.

Теорема 5.1.

Утв. *Каноническую систему порядка n всегда можно свести к нормальной системе порядка n.*

Опр. 5.4. **Вектор-функцией** $\vec{\varphi}$ называется упорядоченный набор функций $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$. Его удобно записывать в виде вектора:

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Введём вектор-функции, участвующие в системе (5.1):

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}, \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях система (5.1) может быть записана в виде

$$\vec{y}' = \vec{f}\left(x;\ \vec{y}\right). \tag{5.2}$$

Поэтому часто нормальную систему ОДУ называют просто «уравнением», подразумевая векторную запись (5.2) системы (5.1).

Опр. 5.5. Решением (частным решением) системы (5.1) (уравнения (5.2)) на промежутке $x \in \langle a,\ b\rangle$ называется упорядоченный набор функций $\varphi_1(x),\ \dots,\ \varphi_n(x)$, то есть вектор-функция

$$\vec{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix},$$

обращающая это уравнение в тождество

$$\vec{\varphi}'(x) \equiv \vec{f}\left(x;\ \vec{\varphi}(x)\right). \tag{5.3}$$

Замечание 5.1. Естественно, чтобы равенство (5.3) имело смысл, функция $\varphi(x)$ должна быть дифференцируема на $x \in \langle a,\ b\rangle$, а область определения D функции $\vec{f}$ должна $\forall\ x \in \langle a,\ b\rangle$ содержать точку $\left(x;\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_n(x)\right) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Опр. 5.6. Общим решением системы (5.1) (уравнения (5.2)) на промежутке $x \in \langle a,\ b\rangle$ называется множество всех его частных решений.

Опр. 5.7. Интегральной кривой системы (5.1) (уравнения (5.2)) называется кривая в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, задаваемая частным решением системы (5.1).

Опр. 5.8. Задачей Коши для системы (5.1) (уравнения (5.2)) называется задача:

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = \vec{f}\left(x;\ \vec{y}\right), & x \in \langle a,\ b\rangle; \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0. \end{cases} \tag{5.4}$$

При этом пара $(x_0,\ \vec{y}_0)$ называется **начальным условием** или **условием Коши**.

Замечание 5.2 *(Геометрическая интерпретация).* Пусть координатами вектора $\vec{y}_0$ являются числа $y_{01},\ y_{02},\ \dots,\ y_{0n}$. Тогда задача Коши (5.4) означает с геометрической точки зрения задачу *найти интегральную кривую, проходящую через точку* $\left(x_0;\ y_{01},\ y_{02},\ \dots,\ y_{0n}\right)$.

Теорема 5.2 (Существование и единственность решения задачи Коши).

Усл. $f_1(x,\ \vec{y}),\ \ldots,\ f_n(x,\ \vec{y}) \in C^1\left(\overline{\Pi}\right)$, *где*

$$\overline{\Pi} = \left\{(x,\ y):\quad |x - x_0| \leqslant a,\quad |y_i - y_{0i}| \leqslant b_i,\quad i = \overline{1,\ n},\right\}.$$

Кроме того, число $M = \max\limits_{i,\ \overline{\Pi}} |f_i(x,\ \vec{y})|$.

Утв. $\exists\,!$ *решение* $\vec{y} = \vec{y}(x)$ *задачи Коши* (2.1), *определённое при* $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$, *где*

$$h = \min\left\{a,\ \frac{b_1}{M},\ \ldots,\ ,\ \frac{b_n}{M}\right\}.$$

Доказательство приводится в разделе 8, стр. 110 и далее, для более сильного утверждения – теоремы 8.1.

Замечание 5.3. Для существования решения достаточно требовать непрерывности (и, следовательно, ограниченности) $f(x,\ \vec{y})$ в $\overline{\Pi}$. Для доказательства единственности решения мы потребовали непрерывности (и, следовательно, ограниченности) частных производных $f(x,\ \vec{y})$ в $\overline{\Pi}$.
На самом деле этот результат можно несколько усилить, заменив условие теоремы на

Усл. 1. $f(x,\ y) \in C\left(\overline{\Pi}\right)$. *Число* M *определяется формулой* $M = \max\limits_{i,\ \overline{\Pi}} |f_i(x,\ \vec{y})|$. *Кроме того,* $\vec{f}(x,\ \vec{y})$ *удовлетворяет в* $\overline{\Pi}$ *условию Липшица:*

$$\exists\, L > 0:\quad \forall (x;\ \tilde{y}_1,\ \ldots,\ \tilde{y}_n),\ (x;\ \bar{y}_1,\ \ldots,\ \bar{y}_n) \in \Pi,\quad \forall\, j = \overline{1,\ n}\quad \textit{вып. нер-во}$$

$$\Big| f_j(x;\ \tilde{y}_1,\ \ldots,\ \tilde{y}_n) - f_j(x;\ \bar{y}_1,\ \ldots,\ \bar{y}_n) \Big| \leqslant L \left| \tilde{\vec{y}} - \bar{\vec{y}} \right|.$$

5.2. Линейные системы ОДУ

Пусть $\vec{y}(x)$, $\vec{f}(x)$ – вектор-функции, а $A = A(x)$ – матрица:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},\qquad \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},\qquad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Опр. 5.9. Нормальная система, имеющая вид

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x); \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x); \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{5.6}$$

или, в обозначениях (5.5),

$$\vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x), \tag{5.7}$$

называется **линейной системой ОДУ**.

Опр. 5.10. Линейная система ОДУ (5.7) называется **однородной**, если $\vec{f}(x) \equiv \vec{0}$, и **неоднородной** в противном случае.

Напомним одно из основных понятий линейной алгебры – понятие линейного оператора – в удобной для нас форме:

Опр. 5.11. Отображение L множества H функций (вектор-функций) называется **линейным оператором**, если оно сохраняет операции сложения и умножения на число, то есть

$$\begin{array}{lll} 1) & \forall\, f,\, g \in H & L[f+g] = L[f] + L[g]; \\ 2) & \forall\, f \in H,\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R} & L[\alpha f] = \alpha L[f]. \end{array}$$

Заметим, что выражение

$$L[\vec{y}] = \vec{y}\,'(x) - A(x)\vec{y}(x) \tag{5.8}$$

является линейным оператором на множестве вектор-функций. В самом деле, в силу свойств производной и произведения матриц,

$$1) \qquad L[\vec{y}_1 + \vec{y}_2] = (\vec{y}_1 + \vec{y}_2)' - A(x)\,[\vec{y}_1 + \vec{y}_2] = \vec{y}_1\,' + \vec{y}_2\,' - A(x)\vec{y}_1 - A(x)\vec{y}_2 = L[\vec{y}_1] + L[\vec{y}_2];$$

$$2) \qquad L[\alpha\vec{y}\,] = (\alpha\vec{y}\,)' - A(x)\,[\alpha\vec{y}\,] = \alpha\vec{y}\,' - \alpha A(x)\vec{y} = \alpha L[\vec{y}\,].$$

Используя обозначение (5.8), можно записать неоднородную линейную систему (5.6) в виде

$$L[\vec{y}] = \vec{f}(x), \tag{5.9}$$

а однородную – в виде

$$L[\vec{y}] = \vec{0}. \tag{5.10}$$

Теорема 5.3 (ТСЕ решения задачи Коши линейной системы).

Усл. *Все элементы $a_{ij}(x)$ матрицы $A(x)$ и $f_i(x)$ вектор-функции $\vec{f}(x)$ непрерывны:*

$$a_{ij}(x) \in C\langle a,\ b\rangle, \qquad f_i(x) \in C\langle a,\ b\rangle, \qquad i,\ j \in \overline{1,\ n}.$$

Утв. $\exists\,!$ *решение $\vec{y} = \vec{y}(x)$ задачи Коши*

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x), & x \in \langle a,\ b\rangle; \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0. \end{cases}$$

определённое на $x \in \langle a,\ b\rangle$.

Доказательство приводится в параграфе 8.6, стр. 119 и далее, теорема 8.5.

5.3. Однородные линейные системы ОДУ

В этом параграфе мы изучим свойства решений однородной линейной системы ОДУ

$$\vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y}(x) \qquad \left(L[\vec{y}] = \vec{0}\right). \tag{5.11}$$

В первую очередь заметим, что вектор-функция $\vec{\Theta}(x) \equiv \vec{0}$ всегда является решением однородной системы (5.11). Это решение называется тривиальным решением.

Теорема 5.4 (О линейной комбинации решений однородной системы).

Усл. $\vec{\varphi}_1(x),\ \ldots,\ \vec{\varphi}_k(x)$ – *решения однородной системы* (5.11).

Утв. $\forall\ c_1,\ \ldots,\ c_k \in \mathbb{R}$ *вектор-функция* $\vec{\varphi}(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i\varphi_i(x)$ *также является решением системы* (5.11).

Доказательство. Так как $\vec{\varphi}_1(x),\ \ldots,\ \vec{\varphi}_k(x)$ – решения однородной системы (5.11), то

$$L[\vec{\varphi}_1] = \vec{0}, \quad \ldots, \quad L[\vec{\varphi}_k] = \vec{0}.$$

Рассмотрим $L[\vec{\varphi}]$:

$$L[\vec{\varphi}] = L\left[c_1\varphi_1 + \ldots + c_k\varphi_k\right] = \Big[\text{по свойству 1) линейного оператора}\Big] =$$
$$= L\left[c_1\varphi_1\right] + \ldots + L\left[c_k\varphi_k\right] = \Big[\text{по свойству 2) линейного оператора}\Big] =$$
$$= c_1 L\left[\varphi_1\right] + \ldots + c_k L\left[\varphi_k\right] = c_1\vec{0} + \ldots + c_k\vec{0} = \vec{0}.$$

Итак, $L[\vec{\varphi}] = \vec{0}$, что и требовалось доказать. □

5.3.1. Линейная независимость системы функций

Опр. 5.12. Функции (вектор-функции) $\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_k(x)$ называются **линейно независимыми на** $x \in \langle a,\ b\rangle$, если только тривиальная линейная комбинация этих функций равна нулю на всём промежутке $x \in \langle a,\ b\rangle$, то есть если равенство

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_k\varphi_k(x) \equiv 0 \qquad \text{на всём промежутке } x \in \langle a,\ b\rangle$$

выполнено только при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Функции (вектор-функции) $\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_k(x)$ называются **линейно зависимыми на** $x \in \langle a,\ b\rangle$, если существует нетривиальная линейная комбинация этих функций, равная нулю на всём промежутке $x \in \langle a,\ b\rangle$, то есть:

$$\exists\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k \in \mathbb{R}: \qquad |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_k| \neq 0$$

такие, что

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_k\varphi_k(x) \equiv 0 \qquad \text{на всём промежутке } x \in \langle a,\ b\rangle.$$

Пример 5.1. Функции $\left\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ 1\right\}$ образуют линейно зависимую на $x \in (-\infty,\ +\infty)$ систему, так как в силу основного тригонометрического тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ можно указать их нетривиальную линейную комбинацию, всюду равную нулю:

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0.$$

Пример 5.2. С другой стороны, функции $\{\sin x,\ \cos x,\ 1\}$ – линейно независимы на $x \in (-\infty,\ +\infty)$, так как из равенства нулю их линейной комбинации $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 = 0$ следует, что

1) либо $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$;

2) либо $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \neq 0$, а тогда

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos_x + \alpha_3 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \sin x + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \cos x \right) + \alpha_3 =$$

$$= \left[\exists\, \beta : \quad \begin{cases} \sin \beta = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}; \\ \cos \beta = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \end{cases} \right] = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot \big(\sin x \cos \beta + \cos x \sin \beta \big) + \alpha_3 = 0 =$$

$$= \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot \sin (x + \beta) + \alpha_3 = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \sin (x + \beta) = \frac{-\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}},$$

а данное равенство не может быть выполнено при всех $x \in (-\infty,\ +\infty)$. Поэтому второй случай невозможен, и равенство нулю линейной функций $\sin x,\ \cos x,\ 1$ влечёт равенство нулю всех её коэффициентов.

Пример 5.3. Функции $\{1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n\}$ – линейно независимы на $x \in (-\infty,\ +\infty)$, так как равенство нулю их линейной комбинации

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0 \tag{i}$$

является уравнением не более, чем n-ой степени, а по основной теореме алгебры такое уравнение имеет не более n действительных корней

$$x_1,\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{R}.$$

Поэтому, если хоть один из коэффициентов $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ не равен нулю, то равенство (i) не может выполняться на всей прямой $x \in (-\infty,\ +\infty)$.

5.3.2. Определитель Вронского однородной системы ОДУ

Опр. 5.13. Определителем Вронского (Вронскианом) системы вектор-функций $\{\vec{\varphi}_1,\ \ldots,\ \vec{\varphi}_n\}$

$$\vec{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \varphi_{21}(x) \\ \cdots \\ \varphi_{n1}(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{12}(x) \\ \varphi_{22}(x) \\ \cdots \\ \varphi_{n2}(x) \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \vec{\varphi}_n = \begin{pmatrix} \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{2n}(x) \\ \cdots \\ \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

заданных на промежутке $x \in \langle a,\ b \rangle$, называется функция

$$W\left[\vec{\varphi}_1,\ \ldots,\ \vec{\varphi}_n\right](x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \ldots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \ldots & \varphi_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \ldots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}, \qquad x \in \langle a,\ b \rangle. \tag{5.12}$$

Теорема 5.5 (Вронскиан линейно зависимых функций).

Усл. $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ – *линейно зависимы на* $x \in \langle a, b \rangle$.

Утв. $W[\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n](x) \equiv 0, \qquad x \in \langle a, b \rangle.$

Доказательство. Так как $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_k(x)$ – линейно зависимы на $x \in \langle a, b \rangle$, то столбцы определителя Вронского при каждом $x \in \langle a, b \rangle$ образуют линейно зависимую систему векторов. По свойству определителей, определитель, составленный из линейно зависимых столбцов (строк), равен нулю. □

Следствие 5.1.

Усл. $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ *определены на* $x \in \langle a, b \rangle$. *В некоторой точке* $x_0 \in \langle a, b \rangle$ *выполнено неравенство* $W[\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n](x_0) \neq 0$.

Утв. $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ – *линейно независимы на* $x \in \langle a, b \rangle$.

Доказательство. Предположим противное: $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ – *линейно зависимы на* $x \in \langle a, b \rangle$. Тогда по теореме 5.5

$$W[\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n](x) \equiv 0, \qquad x \in \langle a, b \rangle,$$

что противоречит условию $W[\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n](x_0) \neq 0$. Следовательно, наше предположение неверно. □

Теорема 5.6.

Усл. $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ – *решения однородной линейной системы*

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) \qquad \left(L[\vec{y}] = \vec{0}\right), \qquad x \in \langle a, b \rangle. \tag{5.11}$$

В некоторой точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$ *выполнено равенство* $W[\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n](x_0) = 0$.

Утв. $\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ – *линейно зависимы на* $x \in \langle a, b \rangle$.

Доказательство. Так как $W[\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n](x_0) = 0$, столбцы этого определителя линейно зависимы, то есть:

$$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}: \qquad |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_k| \neq 0$$

такие, что

$$\alpha_1\vec{\varphi}_1(x_0) + \alpha_2\vec{\varphi}_2(x_0) + \ldots + \alpha_n\vec{\varphi}_n(x_0) = \vec{0}.$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$\vec{y}(x) = \alpha_1\vec{\varphi}_1(x) + \alpha_2\vec{\varphi}_2(x) + \ldots + \alpha_n\vec{\varphi}_n(x).$$

Она, очевидно, является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x), & x \in \langle a,\ b\rangle; \\ \vec{y}(x_0) = \vec{0}. \end{cases}$$

У этой задачи, безусловно, есть тривиальное решение $\vec{\varphi}(x) \equiv \vec{0}, \quad x \in \langle a,\ b\rangle$. Но по ТСЕ решения задачи Коши, стр. 44, это решение – единственно. Следовательно,

$$\vec{y}(x) = \vec{\varphi}(x) \equiv \vec{0}, \qquad x \in \langle a,\ b\rangle.$$

По определению 5.12, функции $\vec{\varphi}_1(x),\ \ldots,\ \vec{\varphi}_n(x)$ – линейно зависимы на $x \in \langle a,\ b\rangle$. □

Теорема 5.7 (Вронскиан решений однородной линейной системы).

Усл. $\vec{\varphi}_1(x),\ \ldots,\ \vec{\varphi}_n(x)$ – *решения однородной линейной системы*

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) \qquad \left(L[\vec{y}] = \vec{0}\right), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle. \tag{5.11}$$

Утв. *1) либо* $W\left[\vec{\varphi}_1,\ \ldots,\ \vec{\varphi}_n\right](x) \equiv 0,$ *всюду на* $x \in \langle a,\ b\rangle$;

2) либо $W\left[\vec{\varphi}_1,\ \ldots,\ \vec{\varphi}_n\right](x) \neq 0,$ *ни в одной точке* $x \in \langle a,\ b\rangle$.

Доказательство. Предположим, что в некоторой точке $x_0 \in \langle a,\ b\rangle$ выполнено равенство $W\left[\vec{\varphi}_1,\ \ldots,\ \vec{\varphi}_n\right](x_0) = 0$. Тогда по теореме 5.6 вектор-функции $\vec{\varphi}_1(x),\ \ldots,\ \vec{\varphi}_n(x)$ – линейно зависимы на $x \in \langle a,\ b\rangle$. Отсюда по теореме 5.5

$$W\left[\vec{\varphi}_1,\ \ldots,\ \vec{\varphi}_n\right](x) \equiv 0, \qquad x \in \langle a,\ b\rangle.$$

Итак, если Вронскиан системы решений (5.11) обащается в нуль хотя бы в одной точке $x_0 \in \langle a,\ b\rangle$, то он тождественно равен нулю на всём $\langle a,\ b\rangle$. □

Теорема 5.8.

Усл. $\vec{\varphi}_1(x),\ \ldots,\ \vec{\varphi}_n(x),\ \vec{\varphi}_{n+1}(x)$ – *решения однородной системы* (5.11) *порядка* n.

Утв. $\vec{\varphi}_1(x),\ \ldots,\ \vec{\varphi}_n(x),\ \vec{\varphi}_{n+1}(x)$ – *линейно зависимы.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную систему вектор-функций с $n+1$ компонентой

$$\left\{\vec{\tilde{\varphi}}_1(x),\ \vec{\tilde{\varphi}}_2(x),\ \ldots,\ \vec{\tilde{\varphi}}_n(x),\ \vec{\tilde{\varphi}}_{n+1}(x)\right\}$$

построенную так:

$$\vec{\tilde{\varphi}}_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \varphi_{21}(x) \\ \cdots \\ \varphi_{n1}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots \qquad \vec{\tilde{\varphi}}_{n+1}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{1(n+1)}(x) \\ \varphi_{2(n+1)}(x) \\ \cdots \\ \varphi_{n(n+1)}(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(к каждому из векторов $\vec{\varphi}_1(x),\ \ldots,\ \vec{\varphi}_n(x),\ \vec{\varphi}_{n+1}(x)$ мы приписали снизу нуль).

Все построенные вектор-функции есть решения однородной системы

$$\vec{\tilde{y}}' = \tilde{A}\,\vec{\tilde{y}}$$

с матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

С другой стороны, их Вронскиан, поскольку одна из его строк – нулевая, равен нулю на всём $\langle a,\ b\rangle$:

$$W\left[\vec{\tilde{\varphi}}_1,\ \dots,\ \vec{\tilde{\varphi}}_{n+1}\right](x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1(n+1)}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2(n+1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{n(n+1)}(x) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \text{всюду на} \quad x \in \langle a,\ b\rangle.$$

По теореме 5.6 вектор-функции $\left\{\vec{\tilde{\varphi}}_1(x),\ \vec{\tilde{\varphi}}_2(x),\ \dots,\ \vec{\tilde{\varphi}}_{n+1}(x)\right\}$ линейно зависимы на промежутке $x \in \langle a,\ b\rangle$. Тогда, по определению 5.12,

$$\exists\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}: \qquad |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_{n+1}| \neq 0$$

такие, что

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \varphi_{21}(x) \\ \cdots \\ \varphi_{n1}(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \varphi_{12}(x) \\ \varphi_{22}(x) \\ \cdots \\ \varphi_{n2}(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{n+1} \begin{pmatrix} \varphi_{1(n+1)}(x) \\ \varphi_{2(n+1)}(x) \\ \cdots \\ \varphi_{n(n+1)}(x) \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0 \qquad \text{на всём промежутке } x \in \langle a,\ b\rangle.$$

Но верхние n строк этих векторов образуют векторы $\vec{\varphi}_1(x),\ \dots,\ \vec{\varphi}_n(x),\ \vec{\varphi}_{n+1}(x)$, следовательно, для них верно равенство

$$\alpha_1\vec{\varphi}_1(x)+\alpha_2\vec{\varphi}_2(x)+\ldots+\alpha_{n+1}\vec{\varphi}_{n+1}(x) = \alpha_1 \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \varphi_{21}(x) \\ \cdots \\ \varphi_{n1}(x) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \varphi_{12}(x) \\ \varphi_{22}(x) \\ \cdots \\ \varphi_{n2}(x) \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{n+1} \begin{pmatrix} \varphi_{1(n+1)}(x) \\ \varphi_{2(n+1)}(x) \\ \cdots \\ \varphi_{n(n+1)}(x) \end{pmatrix} \equiv 0$$

на $x \in \langle a,\ b\rangle$ с теми же коэффициентами $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_{n+1}$. □

5.3.3. ФСР и структура общего решения однородной линейной системы ОДУ

Опр. 5.14. Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы ОДУ порядка n

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) \qquad \left(L[\vec{y}] = \vec{0}\right), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle \tag{5.11}$$

называется набор любых n её линейно независимых решений.

Теорема 5.9 (Существование ФСР однородной линейной системы).

Усл. *Все элементы $a_{ij}(x)$ матрицы $A(x)$ непрерывны:*

$$a_{ij}(x) \in C\langle a,\ b\rangle, \qquad i,\ j \in \overline{1,\ n}.$$

Утв. *Существует ФСР однородной системы ОДУ (5.11).*

Доказательство. Фиксируем некоторую точку $x_0 \in \langle a,\ b\rangle$. Рассмотрим n задач Коши с векторами начальных условий взятыми из столбцов единичной матрицы[6]:

$$\begin{cases} \vec{\varphi}_1'(x) = A(x)\vec{\varphi}_1(x); \\ \vec{\varphi}_1(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\varphi}_2'(x) = A(x)\vec{\varphi}_2(x); \\ \vec{\varphi}_2(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \qquad \dots \qquad \begin{cases} \vec{\varphi}_n'(x) = A(x)\vec{\varphi}_n(x); \\ \vec{\varphi}_n(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

По теореме 5.3, стр. 44, каждая из этих задач имеет единственное решение, определённое на всём промежутке $x \in \langle a,\ b\rangle$. Таким образом, у нас есть n решений $\{\vec{\varphi}_1(x),\ \vec{\varphi}_2(x),\ \dots,\ \vec{\varphi}_n(x)\}$ нашей однородной системы. Убедимся, что они линейно независимы. Рассмотрим Вронскиан $W[\vec{\varphi}_1,\ \dots,\ \vec{\varphi}_n](x)$ в точке x_0:

$$W[\vec{\varphi}_1,\ \dots,\ \vec{\varphi}_n](x_0) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x_0) & \varphi_{12}(x_0) & \dots & \varphi_{1n}(x_0) \\ \varphi_{21}(x_0) & \varphi_{22}(x_0) & \dots & \varphi_{2n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x_0) & \varphi_{n2}(x_0) & \dots & \varphi_{nn}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тогда по следствию 5.1, стр. 47, функции $\{\vec{\varphi}_1(x),\ \vec{\varphi}_2(x),\ \dots,\ \vec{\varphi}_n(x)\}$ линейно независимы. Итак, мы построили n линейно независимых решений $\{\vec{\varphi}_1(x),\ \vec{\varphi}_2(x),\ \dots,\ \varphi_n(x)\}$ нашей однородной системы, то есть её ФСР. □

Теорема 5.10 (О структуре общего решения однородной линейной системы).

Усл. *Все элементы $a_{ij}(x)$ матрицы $A(x)$ непрерывны:*

$$a_{ij}(x) \in C\langle a,\ b\rangle, \qquad i,\ j \in \overline{1,\ n}.$$

Функции $\{\vec{\varphi}_1(x),\ \vec{\varphi}_2(x),\ \dots,\ \vec{\varphi}_n(x)\}$ образуют ФСР однородной системы

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) \qquad \left(L[\vec{y}] = \vec{0}\right), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle \tag{5.11}$$

Утв. *Общее решение однородной системы ОДУ (5.11) имеет вид:*

$$\vec{y}_{oo}(x) = c_1\vec{\varphi}_1(x) + c_2\vec{\varphi}_2(x) + \dots + c_n\vec{\varphi}_n(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle, \quad c_1,\ \dots,\ c_n \in \mathbb{R}. \tag{5.13}$$

Доказательство. Для доказательства этого факта нам нужно убедиться в справедливости утверждений:

[6]Разумеется, вместо единичной можно взять любую невырожденную матрицу.

1) $\forall\ c_1,\ \ldots,\ c_n \in \mathbb{R}$ вектор-функция $c_1\vec{\varphi}_1(x) + c_2\vec{\varphi}_2(x) + \ldots + c_n\vec{\varphi}_n(x)$ является решением (5.11);

2) для любого решения $\vec{y}(x)$ существуют $\tilde{c}_1,\ \ldots,\ \tilde{c}_n \in \mathbb{R}$, такие что

$$\vec{y}(x) = \tilde{c}_1\vec{\varphi}_1(x) + \tilde{c}_2\vec{\varphi}_2(x) + \ldots + \tilde{c}_n\vec{\varphi}_n(x).$$

Первое утверждение сразу следует из теоремы о линейной комбинации решений однородной системы (стр. 45).
Для доказательства второго предположим противное: *найдётся такая вектор-функция $\vec{y}(x)$ – решение* (5.11)*, которую нельзя представить линейной комбинацией элементов ФСР.* Тогда наша система n-ого порядка имеет $n+1$ линейно независимое решение:

$$\left\{\vec{y}(x);\ \vec{\varphi}_1(x),\ \vec{\varphi}_2(x),\ \ldots,\ \vec{\varphi}_n(x)\right\}.$$

Но по теореме 5.8, стр. 48 любые $n+1$ решения линейной однородной системы (5.11) n-ого порядка линейно зависимы. Полученное противоречие означает, что наше предположение является ложным. □

5.3.4. Структура общего решения неоднородной линейной системы ОДУ

Пусть нам задана неоднородная линейная система

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x) \qquad \left(L[\vec{y}] = \vec{f}\right), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle. \tag{5.14}$$

Вместе с ней будем рассматривать соответствующую однородную:

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) \qquad \left(L[\vec{y}] = \vec{0}\right), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle. \tag{5.15}$$

Теорема 5.11.

Усл. *$\vec{\psi}(x)$ – решение неоднородной линейной системы* (5.14)*, $\vec{\varphi}(x)$ – решение соответствующей однородной системы* (5.15).

Утв. *Вектор-функция $\vec{\psi}(x) + \vec{\varphi}(x)$ есть решение неоднородной системы* (5.14).

Доказательство. По условию,

$$L\left[\vec{\psi}\right] = \vec{f}(x); \qquad L\left[\vec{\varphi}\right] = \vec{0}, \qquad x \in \langle a,\ b\rangle.$$

Воспользуемся свойствами линейного оператора L (определение 5.11, стр. 44). Получаем:

$$L\left[\vec{\psi} + \vec{\varphi}\right] = L\left[\vec{\psi}\right] + L\left[\vec{\varphi}\right] = \vec{f}(x) + \vec{0} = \vec{f}(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle.$$

□

Теорема 5.12.

Усл. *$\vec{\psi}_1(x)$ и $\vec{\psi}_2(x)$ – решения неоднородной линейной системы (5.14).*

Утв. *Вектор-функция $\vec{\psi}_1(x)-\vec{\psi}_2(x)$ есть решение однородной системы (5.15).*

Доказательство. По условию,

$$L\left[\vec{\psi}_1\right]=L\left[\vec{\psi}_2\right]=\vec{f}(x), \qquad x\in\langle a,\ b\rangle.$$

Воспользуемся свойствами линейного оператора L (определение 5.11, стр. 44). Получаем:

$$L\left[\vec{\psi}_1-\vec{\psi}_2\right]=L\left[\vec{\psi}_1\right]-L\left[\vec{\psi}_2\right]=\vec{f}(x)-\vec{f}(x)=\vec{0}, \qquad x\in\langle a,\ b\rangle.$$

□

Теорема 5.13 (О структуре общего решения неоднородной линейной системы).

Усл. *$\vec{\psi}(x)$ – произвольное частное решение неоднородной линейной системы (5.14), $\vec{\varphi}_1(x),\ \vec{\varphi}_2(x),\ \ldots,\ \vec{\varphi}_n(x)$ – ФСР соответствующей однородной системы (5.15).*

Утв. *Общее решение неоднородной системы ОДУ (5.14) имеет вид:*

$$\vec{y}_{оно}(x)=\vec{\psi}(x)+c_1\vec{\varphi}_1(x)+c_2\vec{\varphi}_2(x)+\ldots+c_n\vec{\varphi}_n(x), \qquad x\in\langle a,\ b\rangle, \tag{5.16}$$

где $c_1,\ \ldots,\ c_n\in\mathbb{R}$ – произвольные постоянные. Пользуясь обозначением из теоремы 5.10, запишем (5.22) короче:

$$\boxed{\vec{y}_{оно}(x)=\vec{y}_{чно}(x)+\vec{y}_{оо}(x),} \qquad x\in\langle a,\ b\rangle \tag{5.17}$$

(Общее решение неоднородной системы есть сумма частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной).

Доказательство. Фиксируем произвольной решение $\vec{\psi}(x)$ неободнородной системы и убедимся в справедливости утверждений:

1) $\forall\ c_1,\ \ldots,\ c_n\in\mathbb{R}$ вектор-функция $\vec{\psi}(x)+c_1\vec{\varphi}_1(x)+c_2\vec{\varphi}_2(x)+\ldots+c_n\vec{\varphi}_n(x)$ является решением (5.14);

2) для любого решения $\vec{y}(x)$ существуют $\tilde{c}_1,\ \ldots,\ \tilde{c}_n\in\mathbb{R}$, такие что

$$\vec{y}(x)=\vec{\psi}(x)+\tilde{c}_1\vec{\varphi}_1(x)+\tilde{c}_2\vec{\varphi}_2(x)+\ldots+\tilde{c}_n\vec{\varphi}_n(x).$$

Первое утверждение сразу следует из теоремы 5.11 о сумме решений однородной и неоднородной систем (стр. 51).
Для доказательства второго введём вектор-функцию

$$\vec{z}(x)=\vec{y}(x)-\vec{\psi}(x).$$

Так как и $\vec{y}(x)$, и $\vec{\psi}(x)$ – решения неоднородной системы, то по теореме 5.12 о разности решений неоднородной системы, $\vec{z}(x)$ есть решение однородной системы (5.15). По тоереме 5.10 о структуре общего решения однородной линейной системы, можно указать такие числа $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n \in \mathbb{R}$, что

$$\vec{z}(x) = \tilde{c}_1\vec{\varphi}_1(x) + \tilde{c}_2\vec{\varphi}_2(x) + \ldots + \tilde{c}_n\vec{\varphi}_n(x).$$

Вспомнив, что $\vec{z}(x) = \vec{y}(x) - \vec{\psi}(x)$ и перенеся $\vec{\psi}(x)$ в правую часть, мы и получим тербуемое равенство:

$$\vec{y}_{\text{оно}}(x) = \vec{\psi}(x) + \tilde{c}_1\vec{\varphi}_1(x) + \tilde{c}_2\vec{\varphi}_2(x) + \ldots + \tilde{c}_n\vec{\varphi}_n(x).$$

□

5.3.5. Производная Вронскиана. Формула Остроградского – Лиувилля

Теорема 5.14.

Усл. *$W[\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n](x)$ составлен из $\vec{\varphi}_j \in C^1\langle a, b\rangle$.*

Утв. *$W'(x) = W_1(x)+W_2(x)+\ldots+W_n(x)$, где определители W_j имеют те же элементы, что и W, только строка с номером j продиффеиренцирована.*

Доказательство. Обозначим через Aij алгебраическое дополнение к элементу φ_{ij} определителя W. Полагая, что элементы определителя являются независимыми переменными, и пользуясь формулой разложения определителя по элементам i-ой строки

$$W(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x)A_{ij}(x),$$

получаем, что частная производная $\frac{\partial}{\partial\varphi_{ij}}W$ равна

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_{ij}}W = A_{ij}(x). \tag{i}$$

Теперь, применяя (i), найдём полную производную $\frac{d}{dx}W$:

$$W'(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial\varphi_{ij}} \cdot \varphi'_{ij}(x) = \Big[(i)\Big] = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \cdot \varphi'_{ij}(x) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x) \cdot \varphi'_{ij}(x)\right)}_{W_i} = W_1(x) + W_2(x) + \ldots + W_n(x).$$

□

Теорема 5.15 (Формула Остроградского – Лиувилля).

Усл. *$W[\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n](x)$ составлен из $\vec{\varphi}_j$, образующих ФСР однородной системы $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$.*

Утв. *Справедлива формула:*

$$W(x) = W(x_0)e^{\int\limits_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(t)dt}. \tag{5.18}$$

где $\operatorname{tr} A(t)$ – след матрицы A, то есть сумма её диагональных элементов:

$$\operatorname{tr} A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \ldots + a_{nn}(t).$$

Доказательство. Так как $\vec{\varphi}_j$ образуют ФСР однородной системы $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$, они удовлетворяют уравнениям

$$\vec{\varphi}_j\,' = A(x)\vec{\varphi}_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\varphi_{kj}\right),$$

а их координаты – уравнениям

$$\varphi_{ij}' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\varphi_{kj}. \tag{i}$$

Обозначим для уменьшения громоздкости изложения строки матрицы

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\chi}_1 \\ \vec{\chi}_2 \\ \vdots \\ \vec{\chi}_n \end{pmatrix}$$

через $\vec{\chi}_1, \ldots, \vec{\chi}_n$ и перепишем (i) для i-ой строки Φ (то есть для всех $j = \overline{1,\, n}$ сразу) в виде вектор-строк:

$$\vec{\chi}_i\,' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\vec{\chi}_k. \tag{ii}$$

Отсюда, так как в W_i строка с номером i равна $\vec{\chi}\,'$, из свойств определителя получаем:

$$W_i = \begin{vmatrix} \vec{\chi}_1 \\ \vec{\chi}_2 \\ \vdots \\ \vec{\chi}_i\,' \\ \vdots \\ \vec{\chi}_n \end{vmatrix} = \Big[\text{в силу (ii)}\Big] = \begin{vmatrix} \vec{\chi}_1 \\ \vec{\chi}_2 \\ \vdots \\ a_{i1}\vec{\chi}_1 + a_{i2}\vec{\chi}_2 + \ldots + a_{in}\vec{\chi}_n \\ \vdots \\ \vec{\chi}_n \end{vmatrix} =$$

$$= a_{i1}\underbrace{\begin{vmatrix} \vec{\chi}_1 \\ \vec{\chi}_2 \\ \vdots \\ \vec{\chi}_1 \\ \vdots \\ \vec{\chi}_n \end{vmatrix}}_{=0} + a_{i2}\underbrace{\begin{vmatrix} \vec{\chi}_1 \\ \vec{\chi}_2 \\ \vdots \\ \vec{\chi}_2 \\ \vdots \\ \vec{\chi}_n \end{vmatrix}}_{=0} + \ldots + a_{ii}\underbrace{\begin{vmatrix} \vec{\chi}_1 \\ \vec{\chi}_2 \\ \vdots \\ \vec{\chi}_i \\ \vdots \\ \vec{\chi}_n \end{vmatrix}}_{=W} + \ldots + a_{in}\underbrace{\begin{vmatrix} \vec{\chi}_1 \\ \vec{\chi}_2 \\ \vdots \\ \vec{\chi}_n \\ \vdots \\ \vec{\chi}_n \end{vmatrix}}_{=0} = a_{ii}\begin{vmatrix} \vec{\chi}_1 \\ \vec{\chi}_2 \\ \vdots \\ \vec{\chi}_i \\ \vdots \\ \vec{\chi}_n \end{vmatrix} = a_{ii}W$$

Итак,

$$W_i = a_{ii}W. \tag{iii}$$

Наконец, из формулы теоремы 5.14, имеем:

$$W' = W_1 + W_2 + \ldots + W_n = \Big[\text{в силу (iii)}\Big] = \underbrace{(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})}_{=\operatorname{tr} A} W = \operatorname{tr} A \cdot W.$$

Решая уравнение с разделяющимися переменными $W' = \operatorname{tr} A \cdot W$, получаем

$$W(x) = ce^{\int\limits_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(t)dt},$$

а подставляя в это равенство начальное условие $W(x_0) = W(x_0)$, находим значение константы: $c = W(x_0)$. □

5.4. Однородные линейные системы ОДУ с постоянными коэффициентами

5.4.1. Комплексные решения

Опр. 5.15. **Комплексным числом** называется выражение вида $z = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а i – символ, называемый **мнимой единицей**, обладающий свойством $i^2 = -1$ и участвующий в алгебраичеких операциях на правах обычной константы. Число a называется **действительной частью числа** z, а b – **мнимой частью числа** z: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.
Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются **равными**, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.
Комплексное число $\bar{z}$ называется **комплексно-сопряжённым к** $z = a + ib$, если $\bar{z} = a - ib$.
Комплекснозначной функцией действительного аргумента называется функция, каждому x области определения ставящая в соответствие комплексное число: $f(x) = u(x) + iv(x)$. Функции $u(x)$ и $v(x)$ называются, соответственно, **действительной и мнимой частью функции** $f(x)$.
Комплекснозначной вектор-функцией действительного аргумента называется вектор-функция, каждому x области определения ставящая в соответствие комплексный вектор: $\vec{f}(x) = \vec{u}(x) + i\vec{v}(x)$. Вектор-функции $\vec{u}(x)$ и $\vec{v}(x)$ называются, соответственно, **действительной и мнимой частью вектор-функции** $\vec{f}(x)$.

Опр. 5.16. Комплекснозначная вектор-функция $\vec{y}(x) = \vec{u}(x) + i\vec{v}(x)$ называется **решением линейной системы ОДУ**

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x),$$

если она обращает это равенство в тождество. $\Big($Считается, что $(\vec{u}(x) + i\vec{v}(x))' = \vec{u}'(x) + i\vec{v}'(x)$.$\Big)$

Лемма 5.1.
Комплекснозначная вектор-функция $\vec{y}(x) = \vec{u}(x) + i\vec{v}(x)$ является решением однородной линейной системы ОДУ
$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}$$
тогда и только тогда, когда её действительная и мнимая части являются решениями этой системы:
$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \vec{u}'(x) = A(x)\vec{u}; \\ \vec{v}'(x) = A(x)\vec{v}, \end{cases}$$

Доказательство. При помощи оператора $L[\vec{y}] = \vec{y}'(x) - A(x)\vec{y}$ запишем, что $\vec{y}(x)$ – решение данной системы:
$$L[\vec{y}] = \vec{0}.$$
В силу свойств линеного оператора (определение 5.11, стр. 44) для суммы $\vec{y} = \vec{u} + i\vec{v}$ получаем:
$$L[\vec{y}] = L\left[\vec{u} + i\vec{v}\right] = L[\vec{u}] + iL[\vec{v}] = \vec{0} + i\vec{0} = \vec{0}.$$
Так как два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, получаем, что
$$L[\vec{y}] = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} L[\vec{u}] = \vec{0}; \\ L[\vec{v}] = \vec{0}. \end{cases}$$
□

Лемма 5.2.
$$\forall\, z \in \mathbb{C} \qquad \textit{справедливо равенство} \qquad e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{5.19}$$
Это соотношение называется ***Формулой Эйлера****.*

5.4.2. Собственные числа и векторы числовой матрицы

Опр. 5.17. Вектор $\vec{h}$ называется **собственным вектором числовой матрицы A**, если

1) $\vec{h} \neq \vec{0}$;

2) $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}: \qquad A\vec{h} = \lambda\vec{h}$.

При этом комплексное число λ называется **собственным числом (собственным значением) матрицы A**, соответствующим собственному вектору $\vec{h}$.

Опр. 5.18. Уравнение
$$\det\left(A - \lambda E\right) = 0 \tag{5.20}$$
называется **характеристическим уравнением для матрицы A**. Здесь E – единичная матрица, то есть матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а в остальных местах – нули.

Лемма 5.3.
Число $\lambda \in \mathbb{C}$ является собственным числом матрицы A $\iff$ λ – корень характеристического уравнения (5.20).

Доказательство. Запишем равенство из определения собствееного вектора при помощи матрицы E:

$$A\vec{h} = \lambda\vec{h} \quad \iff \quad A\vec{h} = \lambda E\vec{h} \quad \iff \quad (A - \lambda E)\,\vec{h} = \vec{0}.$$

По определению 5.17, вектор $\vec{h}$ есть собственный вектор (и, соответственно, λ есть собственное число) матрицы A, если, помимо этого уравнения $\vec{h} \neq \vec{0}$. То есть чтобы λ была собственным числом, однородная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$(A - \lambda E)\,\vec{h} = \vec{0}$$

должна иметь нетривиальное решение. Из теории СЛАУ известно, что это выполняется тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю, то есть выполнено равенство $\det (A - \lambda E) = 0$. □

Лемма 5.4.

Усл. *$\lambda_1 \neq \lambda_2$ – собственные числа матрицы A, а $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$ – соответствующие им собственные вектора.*

Утв. *$\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ линейно независимы.*

Доказательство. Пусть линейная комбинация векторов $\vec{h}_1$ и h_2 равна нулю:

$$\alpha_1\vec{h}_1 + \alpha_2\vec{h}_2 = \vec{0}.$$

Тогда с одной стороны, умножив это равенство на λ_2, получим

$$\alpha_1\lambda_2\vec{h}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{h}_2 = \vec{0}.$$

А с другой стороны, умножив матрицу A на обе части первого равенства, получим

$$A\left(\alpha_1\vec{h}_1 + \alpha_2\vec{h}_2\right) = A \cdot \vec{0}.$$

Так как $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$ – собственные вектора, соответствующие собственным числам λ_1 и λ_2, то

$$\alpha_1 A\vec{h}_1 + \alpha_2 A\vec{h}_2 = \vec{0}, \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1\lambda_1\vec{h}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{h}_2 = \vec{0}.$$

Вычтем отсюда равенство $\alpha_1\lambda_2\vec{h}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{h}_2 = \vec{0}$.

$$\alpha_1\,(\lambda_1 - \lambda_2)\,\vec{h}_1 = \vec{0}.$$

Так как $\vec{h}_1$ – собственный, он, по определению, не имеет права быть равным нулевому вектору. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ по условию теоремы. Тогда остаётся только одна возможность:

$$\alpha_1 = 0.$$

Аналогично, только домножая первое равенство на λ_1, мы получим, что $\alpha_2 = 0$. □

Замечание 5.4.
Справедливо утверждение данной теоремы и для произвольного числа $k \leqslant n$ собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям.

5.4.3. Простейшие решения однородной линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами

Будем искать решение системы

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \cdots \\ y_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdots \\ y_3(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}\,'(x) = A\vec{y}(x) \tag{5.21}$$

с постоянными коэффициентами $a_{ij} \in \mathbb{R}$ в виде

$$\vec{y} = \vec{h} \cdot e^{\lambda x},$$

где координаты вектора $\vec{h}$ и число λ пока неизвестны[7].
Подставив $\vec{y} = \vec{h} \cdot e^{\lambda x}$ и $\vec{y}\,' = \lambda\vec{h} \cdot e^{\lambda x}$ в (5.21), получаем:

$$\lambda\vec{h} \cdot e^{\lambda x} = A\vec{h} \cdot e^{\lambda x}, \qquad \Longrightarrow \qquad A\vec{h} = \lambda\vec{h}.$$

Вывод: Ненулевая вектор-функция $\vec{y} = \vec{h} \cdot e^{\lambda x}$ является решением (5.21) тогда и только тогда, когда

1) $\vec{h}$ есть собственный вектор матрицы A;

2) λ – соответствующее этому вектору собственное значение матрицы A.

Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ есть уравнение n-ого порядка относительно переменной λ. Основная теорема алгебры говорит, что уравнение n-ого порядка всегда имеет ровно n (быть может, совпадающих, кратных) комплексных корней. При этом, если коэффициенты матрицы действительны, то комплексные корни появляются только комплексно-сопряжёнными парами. Рассмотрим отдельно соответствующие случаи:

5.4.4. Все корни характеристического уравнения действительны и различны

Теорема 5.16 (ФСР однородной линейной системы).

Усл. *$\lambda_1, \ \dots, \ \lambda_n \in \mathbb{R}$ – различные n корней характеристического уравнения (5.20) $\det(A - \lambda E) = 0$, а $\vec{h}_1, \ \dots, \ \vec{h}_n$ – соответствующие им собственные векторы.*

Утв. *Вектор-функции $\vec{h}_1 e^{\lambda_1 x}$, $\vec{h}_n e^{\lambda_n x}$ образуют ФСР системы (5.21). Общее решение линейной однородной системы ОДУ (5.21) имеет вид:*

$$\vec{y}_{oo}(x) = c_1\vec{h}_1 e^{\lambda_1 x} + c_2\vec{h}_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n\vec{h}_n e^{\lambda_n x}, \tag{5.22}$$

где $c_1, \ \dots, \ c_n \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные.

Доказательство. То, что каждая из вектор-функций $\vec{h}_i e^{\lambda_i x}$ является решением системы (5.21), мы убедились в предыдущем пункте. Проверим, что они линейно независимы. Рассмотрим

[7] Такой вид имеет решение простейшей системы, состоящей из одного уравнения: $y' = ay$. Это уравнение с разделяющимися переменными, решив которое мы получим $y(x) = ce^{ax}$. Поэтому логично попытаться найти решение системы (5.21) в аналогичном виде, заменив константу c на некоторый вектор.

Вронскиан этой системы вектор-функций в точке $x = 0$:

$$W\left[\vec{h}_1 e^{\lambda_1 x},\ \vec{h}_n e^{\lambda_n x}\right](0) = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы (см. замечание 5.4, стр. 57). Далее, по следствию 5.1, стр. 47, раз Вронскиан отличен от нуля в одной точке, вектор-функции, от которых он берётся, линейно независимы на всём промежутке их определения. □

Пример 5.4. *Найти решение системы:*

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1 + 4y_2; \\ y_2'(x) = y_1 + y_2, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}(x).$$

Шаг 1. Выпишем характеристическое уравнение:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{i}$$

Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3).$$

Таким образом, наше характеристическое уравнение имеет вид

$$(\lambda+1)(\lambda-3) = 0,$$

и имеет два различных действительных корня:

$$\lambda_1 = -1, \quad \text{и} \quad \lambda_2 = 3.$$

Шаг 2. Найдём собственные вектора.
Для $\lambda_1 = -1$. Поскольку вектор $\vec{h}_1$ должен, по опрделению собственного вектора удовлетворять уравнению

$$(A - \lambda_1 E)\,\vec{h}_1 = \vec{0}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1-(-1) & 4 \\ 1 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

его координаты должны удовлетворять следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} 2h_{11} + 4h_{21} = 0; \\ h_{11} + 2h_{21} = 0 \end{cases}$$

Если взять в качестве базисного минора – минор, стоящий в пересечении левого столбца и первой строки, получим, что h_{21} – свободная переменная, и ФСР данной СЛАУ имеет вид[8]:

	h_{11}	h_{21}
$\vec{h}_1$	-2	1

, откуда $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[8] Поскольку выбор базисного минора и значений свободных переменных неоднозначен, получаемые собственные вектора также определены неоднозначно.

Для $\lambda_2 = 3$. Поскольку вектор $\vec{h}_2$ должен, по определению собственного вектора, удовлетворять уравнению

$$(A - \lambda_2 E)\,\vec{h}_2 = \vec{0}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1-3 & 4 \\ 1 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

его координаты должны удовлетворять следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} -2h_{12} + 4h_{22} = 0; \\ h_{12} - 2h_{22} = 0 \end{cases}$$

Если взять в качестве базисного минора – минор, стоящий в пересечении левого столбца и первой строки, получим, что h_{22} – свободная переменная, и ФСР данной СЛАУ имеет вид:

	h_{12}	h_{22}
$\vec{h}_2$	2	1

, откуда $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Шаг 3. Составим ФСР нашей однородной системы ОДУ.
По теореме 5.16 ФСР системы 2-го порядка состоит из двух вектор-функций вида $\vec{h}_1 e^{\lambda_1 x}$ и $\vec{h}_2 e^{\lambda_2 x}$, то есть:

$$\text{ФСР} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{3x} \right\}.$$

Ответ:

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{3x}, \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} y_1(x) = -2c_1 \cdot e^{-x} + 2c_2 \cdot e^{3x}; \\ y_2(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{3x} \end{cases}.$$

5.4.5. Все корни различны, но есть пара комплексно-сопряжённых корней

Пусть характеристическое уравнение (5.20) имеет пару комплексно-сопряжённых корней

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

и эти корни имеют кратность 1, то есть встречаются только по одному разу. Выясним, какие вектор-функции, соответствующие этим корням, войдут в ФСР нашей системы (5.21). Во-первых, заметим, что комплексно-сопряжённым корням (5.20) соответствуют комплексно-сопряжённые собственные векторы[9].

Теорема 5.17 (ФСР однородной линейной системы).

Усл. *$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексно-сопряжённые корни кратности 1 характеристического уравнения (5.20), а $\vec{h}_{1,2} = \vec{u} \pm i\vec{v}$ – соответствующие им собственные векторы.*

Утв. *Часть ФСР системы (5.21), соответствующая корням $\lambda_{1,2}$, может быть записана в виде*

$$\left\{ \vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}, \ \vec{h}_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \right\}, \qquad \textit{либо} \qquad \left\{ \mathrm{Re}\left(\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \right), \ \mathrm{Im}\left(\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \right) \right\}. \tag{5.23}$$

[9]Разумеется, только в случае, когда элементы матрицы A все действительны. Если среди них есть комплексные, то комплексно-сопряжённых корней и комплексно-сопряжённых корней собственных векторов может не быть

Доказательство. То, что вектор-функции $\left\{\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x},\ \ \vec{h}_2 \cdot e^{\lambda_2 x}\right\}$ годятся для включения в ФСР, доказывается дословно так же, как в теореме 5.16 (тот факт, что $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$, никак не повлияет на ход доказательства).
Чтобы доказать, что $\left\{\mathrm{Re}\ \left(\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}\right),\ \ \mathrm{Im}\ \left(\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}\right)\right\}$ также годятся в ФСР, нам нужно убедиться

1) $\mathrm{Re}\ \left(\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}\right),\ \ \mathrm{Im}\ \left(\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}\right)$ – решения $\vec{y}\,' = A\vec{y}$;

2) $\mathrm{Re}\ \left(\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}\right),\ \ \mathrm{Im}\ \left(\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}\right)$ – линейно независимы.

Первый факт следует из леммы 5.1, стр. 56.
Для доказательства второго обозначим $\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x} = \vec{u}(x) + i\vec{v}(x)$ и предположим противное: *пусть* $\exists\, \gamma \in \mathbb{C}: \quad \vec{v} = \gamma\vec{u}$.
Тогда равенство $A\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \equiv A\left(\vec{u} + i\vec{v}\right) = \lambda_1\left(\vec{u} + i\vec{v}\right)$ можно переписать в виде

$$(1 + i\gamma)A\vec{u} = (1 + i\gamma)\lambda_1\vec{u}.$$

Заметим, что $\gamma \neq i$, иначе бы $\vec{h}_1 = \vec{u} + i\vec{v} = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$, а это исключено в силу определения собственного вектора. Тогда на $(1 + i\gamma)$ можно сократить, и мы получим, что в левой части стоит действительное выражение. Чтобы это выражение могло равняться $\lambda_1\vec{u}$ необходимо, чтобы λ_1 было действительным, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие означает, что наше предположение было неверно. □

Пример 5.5. *Найти решение системы:*

$$\begin{cases} y_1'(x) = 3y_1 - 4y_2; \\ y_2'(x) = 2y_1 - y_2, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(x).$$

Шаг 1. Выпишем характеристическое уравнение:

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{i}$$

Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 2\lambda + 5.$$

Таким образом, наше характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0,$$

и имеет два комплексно-сопряжённых корня:

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \text{и} \quad \lambda_2 = 1 - 2i.$$

Шаг 2. Найдём собственный вектор для λ_1.
Поскольку вектор $\vec{h}_1$ должен, по определению собственного вектора, удовлетворять уравнению

$$(A - \lambda_1 E)\,\vec{h}_1 = \vec{0}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 3-(1+2i) & -4 \\ 2 & -1-(1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

его координаты должны удовлетворять следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} (2-2i)h_{11} - 4h_{21} = 0; \\ 2h_{11} - (2+2i)h_{21} = 0 \end{cases}$$

Если взять в качестве базисного минора – минор, стоящий в пересечении левого столбца и второй строки, получим, что h_{21} – свободная переменная, и ФСР данной СЛАУ имеет вид:

	h_{11}	h_{21}
$\vec{h}_1$	$1+i$	1

, откуда $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Шаг 3. Построение действительной ФСР.
Найдём Re $\left(\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}\right)$ и Im $\left(\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}\right)$. Для этого распишем $e^{\lambda_1 x}$ по формуле Эйлера (5.19), стр. 56:

$$e^{(1+2i)x} = e^x \cdot e^{2ix} = e^x \cdot (\cos 2x + i \sin 2x)$$

и подставим это в выражение $\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}$:

$$\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x \cdot (\cos 2x + i \sin 2x) = e^x \cdot \begin{pmatrix} (1+i)(\cos 2x + i \sin 2x) \\ (\cos 2x + i \sin 2x) \end{pmatrix} =$$

$$= e^x \cdot \left[\begin{pmatrix} \cos 2x - \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos 2x + \sin 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} \right] \quad \Longrightarrow$$

$$\text{Re}\left(\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}\right) = \begin{pmatrix} \cos 2x - \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} \cdot e^x, \qquad \text{Im}\left(\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}\right) = \begin{pmatrix} \cos 2x + \sin 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} \cdot e^x.$$

По теореме 5.17 ФСР исходной системы можно записать так:

$$\text{ФСР} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2x - \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} \cdot e^x, \quad \begin{pmatrix} \cos 2x + \sin 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} \cdot e^x \right\}.$$

Ответ:

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos 2x - \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} \cdot e^x + c_2 \begin{pmatrix} \cos 2x + \sin 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} \cdot e^x, \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = (c_1 \cdot (\cos 2x - \sin 2x) + 2c_2 \cdot (\cos 2x + \sin 2x)) \cdot e^x; \\ y_2(x) = (c_1 \cos 2x + 2c_2 \sin 2x) \cdot e^x. \end{cases}$$

Пример 5.6. *Найти решение системы:*

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1 - y_2 - y_3; \\ y_2'(x) = y_1 + y_2; \\ y_3'(x) = 3y_1 + y_3, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}(x).$$

Шаг 1. Выпишем характеристическое уравнение:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{i}$$

Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 1 \cdot (1-\lambda) + 1 \cdot 3 \cdot (1-\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 5\right).$$

Таким образом, наше характеристическое уравнение имеет вид

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda+5\right)=0,$$

и имеет действительный корень $\lambda_1 = 1$ и два комплексно-сопряжённых корня:

$$\lambda_2 = 1+2i, \quad \text{и} \quad \lambda_3 = 1-2i.$$

Шаг 2. Найдём собственный вектор для $\lambda_1 = 1$.
Поскольку вектор $\vec{h}_1$ должен, по определению собственного вектора, удовлетворять уравнению

$$(A-\lambda_1 E)\,\vec{h}_1=\vec{0}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 3 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

его координаты должны удовлетворять следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} 0\cdot h_{11}-h_{21}-h_{31}=0; \\ h_{11}+0\cdot h_{21}+0\cdot h_{31}=0; \\ h_{11}+0\cdot h_{21}+0\cdot h_{31}=0 \end{cases}$$

Преобразуем матрицу этой СЛАУ по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ 0 \;\; 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Если взять в качестве базисного минора – минор, стоящий в пересечении двух левых столбцов с первой и второй строками, получим, что h_{31} – единственная свободная переменная, и ФСР данной СЛАУ имеет вид:

	h_{11}	h_{21}	h_{31}
$\vec{h}_1$	0	-1	1

, откуда $\vec{h}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Шаг 3. Построение части ФСР, соответствующей $\lambda_1 = 1$.
В соответствии с теоремой 5.16, стр. 58, собственному значению λ_1 кратности 1 соответствует элемент ФСР вида $\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}$:

$$\text{Первая часть ФСР} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{x}\right\}. \tag{ii}$$

Шаг 4. Найдём собственный вектор для $\lambda_2 = 1+2i$.
Поскольку вектор $\vec{h}_2$ должен, по определению собственного вектора, удовлетворять уравнению

$$(A-\lambda_2 E)\,\vec{h}_2=\vec{0}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1-(1+2i) & -1 & -1 \\ 1 & 1-(1+2i) & 0 \\ 3 & 0 & 1-(1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \\ h_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

его координаты должны удовлетворять следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} -2ih_{12}-h_{22}-h_{32}=0; \\ h_{12}-2ih_{22}+0\cdot h_{32}=0; \\ 3h_{12}+0\cdot h_{22}-2ih_{32}=0 \end{cases}$$

Преобразуем матрицу этой СЛАУ по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ -2i & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6i & -2i \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2i/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}} & \begin{array}{c} -2i/3 \\ -1/3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} & 0 \end{array} \right)$$

Если взять в качестве базисного минора – минор, стоящий в пересечении двух левых столбцов с первой и второй строками, получим, что h_{32} – единственная свободная переменная (присвоим ей значение 3), и ФСР данной СЛАУ имеет вид:

	h_{12}	h_{22}	h_{32}
$\vec{h}_2$	$2i$	1	3

, откуда $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Шаг 5. Построение действительной части ФСР, соответствующей $\lambda_{2,3}$.
Найдём $\mathrm{Re}\left(\vec{h}_2 \cdot e^{\lambda_2 x}\right)$ и $\mathrm{Im}\left(\vec{h}_2 \cdot e^{\lambda_2 x}\right)$. Для этого распишем $e^{\lambda_2 x}$ по формуле Эйлера (5.19), стр. 56:

$$e^{(1+2i)x} = e^x \cdot e^{2ix} = e^x \cdot (\cos 2x + i \sin 2x)$$

и подставим это в выражение $\vec{h}_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$:

$$\vec{h}_2 \cdot e^{\lambda_2 x} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^x \cdot (\cos 2x + i \sin 2x) = e^x \cdot \begin{pmatrix} 2i\,(\cos 2x + i \sin 2x) \\ \cos 2x + i \sin 2x \\ 3\,(\cos 2x + i \sin 2x) \end{pmatrix} =$$
$$= e^x \cdot \left[\begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix} \right] \qquad \Longrightarrow$$
$$\mathrm{Re}\left(\vec{h}_2 \cdot e^{\lambda_2 x}\right) = \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} \cdot e^x, \qquad \mathrm{Im}\left(\vec{h}_2 \cdot e^{\lambda_2 x}\right) = \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix} \cdot e^x.$$

По теореме 5.17 часть ФСР исходной системы, соответствующую $\lambda_{2,3}$, можно записать так:

$$\text{Вторая часть ФСР} = \left\{ \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} \cdot e^x, \quad \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix} \cdot e^x \right\}. \tag{iii}$$

Объединив (ii) и (iii), получаем ФСР исходной однородной системы ОДУ. Осталось только записать

Ответ:

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x + c_2 \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} \cdot e^x + c_3 \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix} \cdot e^x, \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = (-2c_2 \sin 2x + 2c_2 \cdot \cos 2x) \cdot e^x; \\ y_2(x) = (-c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x) \cdot e^x; \\ y_2(x) = (c_1 + 3c_2 \cos 2x + 3c_3 \sin 2x) \cdot e^x. \end{cases}$$

5.4.6. Случай действительных кратных корней

Пусть первые k собственных чисел матрицы A совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k \in \mathbb{R}$. Выясним, какие вектор-функции, соответсвующие этому корню характеристического уравнения, войдут в ФСР однородной линейной системы ОДУ.
Из курса линейной алгебры известна теорема:

Теорема 5.18.

Усл. *Матрица A имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ кратности $k_1, \ldots, k_s$ соответственно, $k_1 + \ldots + k_s = n$.*

Утв. *$\exists$ базис, в котором матрица A имеет Жорданову форму.*

Опр. 5.19.
Жордановой формой квадратной матрицы $A_{n\times n}$ называется её блочно-диагональный вид:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{D_{\lambda_1}} & & & & \\ & \boxed{J_{\lambda_1}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{D_{\lambda_s}} & \\ & & & & \boxed{J_{\lambda_s}} \end{pmatrix}$$

в котором каждый блок является либо диагональной матрицей D_{λ_j} с λ_j на главной диагонали либо Жордановой клеткой J_{λ_j}, где

$$D_{\lambda_j} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j \end{pmatrix} \qquad J_{\lambda_j} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j \end{pmatrix}$$

При этом для некоторых λ_j может отсутствовать D_{λ_j}, для некоторых – J_{λ_j}.

Лемма 5.5.

1) *Порядок матрицы D_{λ_j} на 1 меньше числа линейно независимых собственных векторов, соответствующих λ_j;*

2) *Число m_j линейно независимых собственных векторов, соответствующих λ_j равно $m_j = n - \operatorname{rang}\ (A - \lambda_j E)$, где n – порядок матрицы A;*

3) *Сумма порядка матрицы D_{λ_j} и порядка матрицы J_{λ_j} равна кратности k_j собственного числа λ_j;*

4) *Порядок матрицы D_{λ_j} равен $m_j - 1$, а порядок матрицы J_{λ_j} равен $k_j - m_j + 1$.*

Теорема 5.19.

Усл. *Матрица A имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ кратности $k_1, \ldots, k_s$ соответственно, $k_1 + \ldots k_s = n$.*

Утв. *ФСР системы ОДУ $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ состоит из столбцов матрицы*

$$e^{Ax} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l x^l}{l!}$$

причём в базисе, в котором матрица оператора имеет Жорданову форму J, ФСР имеет вид

$$\vec{y}_{j,p} = \left[\vec{h}_j + \frac{x}{1!}\,\vec{h}_{j,1} + \frac{x^2}{2!}\,\vec{h}_{j,2} + \ldots + \frac{x^p}{p!}\,\vec{h}_{j,p}\right] \cdot e^{\lambda_j x}, \qquad j = \overline{1,\, s}, \quad p = \overline{0,\, p_j},$$

*где $p_j = k_j - m_j$, а $\vec{h}_{j,1}, \ \ldots, \ \vec{h}_{j,p_j}$ – **присоединённые к $\vec{h}_j$ векторы**, они определяются равенствами:*

$$(A - \lambda_j E)\,\vec{h}_j = \vec{0}, \quad \left(\vec{h}_j \neq \vec{0}\right),$$

$$(A - \lambda_j E)\,\vec{h}_{j,1} = \vec{h}_j, \quad (A - \lambda_j E)\,\vec{h}_{j,2} = \vec{h}_{j,1}, \quad \ldots, \quad (A - \lambda_j E)\,\vec{h}_{j,p_j} = \vec{h}_{j,(p_j-1)}.$$

Обоснование этой теоремы приводится в разделе 9, стр. 121, теорема 9.2. А для наших непосредственных нужд нам будет нужно её очевидное следствие:

Следствие 5.2.

Усл. *Матрица A имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ кратности $k_1, \ldots, k_s$ соответственно, $k_1 + \ldots + k_s = n$.*

Утв. *Общее решение системы ОДУ $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ является линейной комбинацией вектор-функций вида $\vec{h}_j \cdot e^{\lambda_j x}$, где $\vec{h}_j$ – линейно независимые собственные вектора, соответствующие λ_j, и вектор-функций*

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \ldots \\ c_1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ \ldots \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{p_j} \\ b_{p_j} \\ \ldots \\ c_{p_j} \end{pmatrix} \cdot x^{p_j}\right] \cdot e^{\lambda_j x}; \qquad j = \overline{1,\, s}, \tag{5.24}$$

где $a_1, \ \ldots, \ c_{p_j}$ – некоторые числа (среди которых ровно p_j произвольных констант, а остальные через них выражаются), p_j – порядок матрицы J_{λ_j} минус 1, то есть величина $k_j - m_j = k_j - n + r$, где n – порядок A, а число $r = \operatorname{rang}\,(A - \lambda_j E)$.

Пример 5.7. *Найти решение системы:*

$$\begin{cases} y_1'(x) = 2y_1 + y_2; \\ y_2'(x) = 2y_2 + 4y_3; \\ y_3'(x) = y_1 - y_3, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(x).$$

Шаг 1. Выпишем характеристическое уравнение:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{i}$$

Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(-1-\lambda)-1\cdot(-4) = 4-(4-4\lambda+\lambda^2)(1+\lambda) = 4-4+3\lambda^2-\lambda^3 = \lambda^2\cdot(3-\lambda)$$

Таким образом, наше характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 \cdot (3-\lambda) = 0,$$

и имеет простой[10] действительный корень $\lambda_3 = 3$ и корень кратности два:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

<u>Шаг 2.</u> Найдём количество линейно-независимых собственных векторов для $\lambda_{1,2} = 0$. По формуле из леммы 5.5, стр. 65,

$$m = n - r, \qquad \text{где}$$

$n = 3$ – порядок матрицы, а

$$r = \text{rang}\ (A - \lambda_1 E) = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

и мы имеем, что

$$m = n - r = 3 - 2 = 1, \qquad \Longrightarrow \qquad m < k = 2,$$

где $k = 2$ – кратность λ_1. Поскольку вектор $\vec{h}_1$ должен, по определению собственного вектора, удовлетворять уравнению

$$(A - \lambda_1 E)\,\vec{h}_1 = \vec{0}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2-0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-0 & 4 \\ 1 & 0 & -1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

его координаты должны удовлетворять следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} 2h_{11} + h_{21} + 0 \cdot h_{31} = 0; \\ 0 \cdot h_{11} + 2h_{21} + 4h_{31} = 0; \\ h_{11} + 0 \cdot h_{21} - h_{31} = 0 \end{cases}$$

Преобразуем матрицу этой СЛАУ по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}} & \begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} & 0 \end{array} \right)$$

Если взять в качестве базисного минора – минор, стоящий в пересечении двух левых столбцов с первой и второй строками, получим, что h_{31} – единственная свободная переменная (зададим её значение 1), и ФСР данной СЛАУ имеет вид:

	h_{11}	h_{21}	h_{31}
$\vec{h}_1$	1	-2	1

, откуда $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

[10] то есть корень кратности 1.

<u>Шаг 3.</u> Построение части общего решения, соответствующей $\lambda_{1,2} = 0$.
В соответствии со следствием 5.2, стр. 66, собственному значению $\lambda_{1,2}$ кратности 2 соответствует часть общего решения вида:

$$\text{Первая часть ФСР} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot x \right] \cdot e^{0x} \right\} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot x. \tag{ii}$$

Обозначим эту вектор-функцию через $\vec{y}_1(x)$ и, найдя $\vec{y}_1{}'(x)$

$$\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot x \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{y}_1{}'(x) = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

подставим их в равенство $\vec{y}\,' = A\vec{y}$:

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot x \right]$$

Перемножив матрицы в правой части, получаем:

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 + b_1 \\ 2b_1 + 4c_1 \\ a_1 - c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_2 + b_2 \\ 2b_2 + 4c_2 \\ a_2 - c_2 \end{pmatrix} \cdot x.$$

Отсюда получаем СЛАУ из шести уравнений с шестью неизвестными:

$$\text{при } x^0\text{:} \quad \begin{cases} a_2 = 2a_1 + b_1 \\ b_2 = 2b_1 + 4c_1 \\ c_2 = a_1 - c_1 \end{cases} \qquad \text{при } x^1\text{:} \quad \begin{cases} 0 = 2a_2 + b_2 \\ 0 = 2b_2 + 4c_2 \\ 0 = a_2 - c_2 \end{cases}$$

Перепишем эту СЛАУ в обычном матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Методом Гаусса решим эту систему:

$$
\begin{pmatrix}
2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0\\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1
\end{pmatrix}
\sim \left[\begin{array}{c} III \leftrightarrow I \\ IV \leftrightarrow VI \end{array}\right] \sim
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0\\
2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4\\
0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0
\end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{c} III - 2I \\ VI - 2IV \end{array}\right] \sim
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0\\
0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{pmatrix}
\sim \left[\begin{array}{c} II \leftrightarrow III \\ V \leftrightarrow VI \end{array}\right] \sim
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2\\
0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4
\end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{c} III - 2II \\ VI - 2V \end{array}\right] \sim
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -4\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\sim \left[\begin{array}{c} V \to IV \to III \to V \end{array}\right] \sim
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\
0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\sim \left[\begin{array}{c} V - 2III + IV \\ II + III \end{array}\right] \sim
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Если взять в качестве базисного минора – минор, стоящий в пересечении столбцов номер 1, 2, 4 и 5 со строками 1, 2, 3 и 4, получим, что c_1 и c_2 – свободные переменные (поставим на их место строки единичной матрицы), и ФСР данной СЛАУ имеет вид:

a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2
1	−2	1	0	0	0
1	−1	0	1	−2	1

, откуда

$$
\begin{pmatrix} a_1\\ b_1\\ c_1\\ a_2\\ b_2\\ c_2 \end{pmatrix}
= c_1 \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}
+ c_2 \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\\ 1\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} c_1 + c_2\\ -2c_1 - c_2\\ c_1\\ c_2\\ -2c_2\\ c_2 \end{pmatrix}.
$$

Подставляя найденные значения в (ii), получим окончательный вид части общего решения, соответствующей $\lambda_{1,2} = 0$:

$$
\text{Первая часть } \vec{y}_{\text{oo}} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} c_1 + c_2\\ -2c_1 - c_2\\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2\\ -2c_2\\ c_2 \end{pmatrix} \cdot x \right] \cdot e^{0x} \right\} =
$$

$$
= \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 + x\\ -1 - 2x\\ x \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{(iii)}
$$

Отметим на данном этапе три существеные момента:

1) в части общего решения, соответствующей **двум** собственным числам $\lambda_{1,2} = 0$, содержится **две** произвольные константы c_1 и c_2;

2) константы c_1 и c_2 в формуле (iii) – не те же, что в (ii), а просто так же обозначены, дабы не загромождать изложение;

3) вектор, умножаемый в этой части общего решения на c_1 совпадает с $\vec{h}_1$.

Шаг 4. Найдём собственный вектор, соответствующий $\lambda_3 = 3$.
Поскольку вектор $\vec{h}_3$ должен, по определению собственного вектора, удовлетворять уравнению

$$(A - \lambda_3 E)\,\vec{h}_3 = \vec{0}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 0 \\ 0 & 2-3 & 4 \\ 1 & 0 & -1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{13} \\ h_{23} \\ h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

его координаты должны удовлетворять следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} -h_{13} + h_{23} = 0; \\ -h_{23} + 4h_{33} = 0; \\ h_{13} - 4h_{33} = 0 \end{cases}$$

Если взять в качестве базисного минора – минор, стоящий в пересечении столбцов 2 и 3 со строками 1 и 3, получим, что h_{13} – свободная переменная (присвоим ей значение 4), и ФСР данной СЛАУ имеет вид:

	h_{13}	h_{23}	h_{33}
$\vec{h}_3$	4	4	1

, откуда $\vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Теперь мы готовы выписать общее решение исходной системы ОДУ:
Ответ:

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1+x \\ -1-2x \\ x \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{3x}, \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = (c_1 + c_2 + c_2 x) + 4c_3 e^x; \\ y_2(x) = (-2c_1 - c_2 - 2c_2 x) + 4c_3 e^x; \\ y_2(x) = (c_1 + c_2 x) + c_3 e^x. \end{cases}$$

Замечание 5.5.
В некоторых случаях решение системы получается значительно проще, чем в данном примере. Если число линейно независимых собственных векторов, соответствующих корню λ кратности k, равно также k, то рассматриваемая часть ФСР состоит просто из всех собственных векторов, умноженных на $e^{\lambda x}$, и искать неизвестные коэффициенты не нужно. Это иллюстрирует следующий пример.

Пример 5.8. *Найти решение системы:*

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1; \\ y_2'(x) = y_2, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}(x).$$

Шаг 1. Выпишем характеристическое уравнение:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{i}$$

Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Шаг 2. Найдём количество линейно-независимых собственных векторов для $\lambda_{1,2} = 1$.
По формуле из леммы 5.5, стр. 65,

$$m = n - r, \qquad \text{где}$$

$n = 2$ – порядок матрицы, а

$$r = \text{rang } (A - \lambda_1 E) = \text{rang } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

и мы имеем, что

$$m = n - r = 2 - 0 = 2, \qquad \Longrightarrow \qquad m = k = 2.$$

Шаг 3. Найдём собственные вектора для $\lambda_1 = 1$.
Поскольку собственный вектор $\vec{h}$ должен, по определению, удовлетворять уравнению

$$(A - \lambda_1 E)\,\vec{h} = \vec{0}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

его координаты должны удовлетворять следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} 0h_{11} + 0h_{21} = 0; \\ 0h_{11} + 0h_{21} = 0 \end{cases}$$

Базисного минора нет, поэтому обе переменные h_{11} и h_{21} – свободные, и ФСР данной СЛАУ имеет вид:

	h_{11}	h_{21}
$\vec{h}_1$	1	0
$\vec{h}_2$	0	1

, откуда $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Шаг 4. Составим ФСР нашей однородной системы ОДУ.
По теореме 5.16 ФСР системы 2-го порядка состоит из двух вектор-функций вида $\vec{h}_1 e^{\lambda_1 x}$ и $\vec{h}_2 e^{\lambda_2 x}$, то есть:

$$\text{ФСР} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^x, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x \right\}.$$

Ответ:

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^x + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x, \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} y_1(x) = c_1 \cdot e^x; \\ y_2(x) = c_2 \cdot e^x. \end{cases}$$

5.4.7. Есть пара комплексно-сопряжённых корней кратности k

Данный случай представляет из себя естественную комбинацию ситуаций, рассмотренных в двух предыдущих пунктах. Поэтому алгоритм нахождения соответствующей части ФСР получается такой:

1) ищется вектор-функция вида (5.24), стр. 66, только с комплексными неизвестными коэффициентами a_m, ..., c_m;

2) из этих коэффициентов ровно $p_j = k_j - m_j$ оказываются свободными переменными, поэтому все коэффициенты выражаются через p_j произвольных постоянных, которые мы вновь обозначим через $c_1, \; \ldots, \; c_{p_j}$;

3) записав соответствующую чать общего решения в виде

$$\vec{y}_1 = \left[c_1 \vec{h}_1 + c_2 \vec{v}_2(x) + \ldots + c_{p_j} \vec{v}_{p_j}(x) \right] \cdot e^{\lambda x},$$

находим действительную и мнимую часть этого выражения; то же самое делаем с линейной комбинацией остальных собственных векторов, умноженных на $e^{\lambda x}$, входящей в общее решение;

4) выписываем часть общего решения в виде суммы действительной части и мнимой части, в которой константы c_m перенумерованы в c_{m+p_j}.

5.5. Неоднородные линейные системы ОДУ с переменными коэффициентами. Метод вариации постоянных

В этом параграфе мы будем рассматривать неоднородную линейную систему ОДУ с переменными коэффициентами:

$$\vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x), \qquad \Big(L[\vec{y}] = \vec{f}(x)\Big), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle \tag{5.25}$$

и соответствующую однородную линейную систему:

$$\vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y}(x), \qquad \Big(L[\vec{y}] = \vec{0}\Big), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle. \tag{5.26}$$

Теорема 5.20.

Усл. *Вектор-функции $\vec{y}_1,\ \vec{y}_2,\ \ldots,\ \vec{y}_n$ образуют ФСР однородной системы (5.26), а вектор-функция $\vec{f}(x)$ и матрица $A(x)$ непрерывны на $C\langle a,\ b\rangle$.*

Утв. *Общее решение неоднородной системы (5.25) имеет вид*

$$\vec{y}(x) = c_1(x)\vec{y}_1(x) + c_2(x)\vec{y}_2(x) + \ldots + c_n(x)\vec{y}_n(x), \tag{5.27}$$

где функции $c_k(x)$ находятся как решения системы

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \cdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

Доказательство. Так как ТСЕ решения задачи Коши (стр. 44) гарантирует единственность решения, нам достаточно лишь убедиться, что равенства (7.23) – (5.28) действительно определяют некоторое решение системы (5.25). Обозначим матрицу, составленную из вектор-столбцов $\vec{y}_k(x)$, через $\mathbf{Y}(x)$ и перепишем (7.23) в векторном виде:

$$\vec{y}(x) = \mathbf{Y}(x)\vec{c}(x). \tag{5.29}$$

Чтобы подставить (5.29) в исходную систему (5.25), найдём производную $\vec{y}\,'(x)$:

$$\vec{y}\,'(x) = (\mathbf{Y}(x)\vec{c}(x))' = \mathbf{Y}\,'(x)\vec{c}(x) + \mathbf{Y}(x)\vec{c}\,'(x).$$

Матрица $\mathbf{Y}\,'(x)$ составлена из столбцов $\vec{y}_k'(x)$, поэтому справедливо равенство

$$\mathbf{Y}\,'(x) = A(x)\mathbf{Y}.$$

Учитывая это, подставим (5.29) в исходную систему (5.25).

$$\underbrace{\mathbf{Y}\,'(x)}_{=A(x)\mathbf{Y}(x)}\ \vec{c}(x) + \mathbf{Y}(x)\vec{c}\,'(x) = A(x)\mathbf{Y}(x)\vec{c}(x) + \vec{f}(x).$$

Сокращая $A(x)\mathbf{Y}(x)\vec{c}(x)$ получаем, что вектор-функция (5.29) является решением системы (5.25) тогда и только тогда, когда вектор-функция $\vec{c}(x)$ удовлетворяет соотношению (5.28):

$$\mathbf{Y}(x)\vec{c}\,'(x) = \vec{f}(x).$$

Осталось убедиться, что данное равенство всегда позволи нам найти функции $c_1(x),\ \ldots,\ c_n(x)$. Это действительно так, поскольку матрица $\mathbf{Y}(x)$ состоит из столбцов – элементов ФСР однородной системы, а элементы ФСР линейно независимы, и

$$\det \mathbf{Y}(x) \equiv W\left[\vec{y}_1,\ \vec{y}_2,\ \ldots,\ \vec{y}_n\right](x) \neq 0, \qquad x \in \langle a,\ b\rangle.$$

Следовательно, $\exists\ \mathbf{Y}^{-1}(x)$, и

$$\vec{c}\,'(x) = \mathbf{Y}^{-1}(x)\vec{f}(x).$$

Наконец, зная производные $c_1'(x),\ \ldots,\ c_n'(x)$ (а в силу непрерывности $\vec{f}$ и $\vec{y}_k$ они будут непрерывны на $\langle a,\ b\rangle$), мы можем найти $c_1(x),\ \ldots,\ c_n(x)$ обычным интегрированием. Константы интегрирования при этом превратятся в n произвольных постоянных (которые должны быть в общем решении системы n-ого порядка), а в случае задачи Коши, они будут однозначно определяться начальным условием. $\square$

Пример 5.9. *Найти решение неоднородной системы:*

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2 + \operatorname{tg}^2 x - 1; \\ y_2'(x) = -y_1 + \operatorname{tg} x, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\vec{y}(x) + \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2 x - 1 \\ \operatorname{tg} x \end{pmatrix}.$$

ЭТАП 1. Ищем ФСР однородной системы.

Шаг 1. Выпишем характеристическое уравнение:

$$\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{i}$$

Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i.$$

Шаг 2. Найдём собственный вектор для $\lambda_1 = i$.
Поскольку собственный вектор $\vec{h}_1$ должен, по определению, удовлетворять уравнению

$$(A - \lambda_1 E)\,\vec{h}_1 = \vec{0}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

его координаты должны удовлетворять следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} -ih_{11} + h_{21} = 0; \\ -h_{11} - ih_{21} = 0 \end{cases}$$

В качестве базисного минора возьмём стоящий на пересечении столбца номер 1 со строкой номер 2, тогда переменная h_{21} – свободная (зададим её значение равным 1), и ФСР данной СЛАУ имеет вид:

	h_{11}	h_{21}
$\vec{h}_1$	$-i$	1

, откуда $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Шаг 3. Составим действительную ФСР однородной системы ОДУ.
Для этого, в соответствии с теоремой 5.17, стр. 60, возьмём действительную и мнимую части выражения $\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}$:

$$\vec{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (\cos x + i \sin x) \cdot e^0 = \begin{pmatrix} -i\cos x + \sin x \\ \cos x + i \sin x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \operatorname{Re}\left(\vec{h}_1 \cdot e^{ix}\right) + i \cdot \operatorname{Im}\left(\vec{h}_1 \cdot e^{ix}\right).$$

$$\text{ФСР} = \left\{ \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \right\}.$$

ЭТАП 2. Метод вариации постоянной.
Будем искать решение исходной неоднородной системы в виде

$$\vec{y}(x) = c_1(x) \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \tag{i}$$

Тогда по теореме 5.20 функции $c_1(x)$, $c_2(x)$ удовлетворяют системе

$$\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2 x - 1 \\ \operatorname{tg} x \end{pmatrix}$$

Обратив матрицу $\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$, находим

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2 x - 1 \\ \operatorname{tg} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2 x - 1 \\ \operatorname{tg} x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin x(\operatorname{tg}^2 x - 1) + \cos x \operatorname{tg} x \\ -\cos x(\operatorname{tg}^2 x - 1) + \sin x \operatorname{tg} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^3 x / \cos^2 x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

Итак,

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^3 x / \cos^2 x \\ \cos x \end{pmatrix}, \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1(x) = \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x} = \Big[u = \cos x\Big] = \int \frac{(u^2-1)du}{u^2} = u + \frac{1}{u} + \tilde{c}_1 = \cos x + \frac{1}{\cos x} + \tilde{c}_1; \\ c_2(x) = \int \cos x dx = \sin x + \tilde{c}_2. \end{cases}$$

Подставляя найденные $c_1(x)$, $c_2(x)$ в «почти ответ» (i) и обозначая константы интегрирования $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ снова за c_1, c_2, получаем

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin x \cos x + \operatorname{tg} x \\ \cos^2 x + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin x \cos x \\ \sin^2 x \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{tg} x \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{y}_{\text{OO}} + \vec{y}_{\text{ЧНО}}.$$

Ответ:

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{tg} x \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{y}_{\text{оо}} + \vec{y}_{\text{чно}}, \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1 \sin x - c_2 \cos x + \operatorname{tg} x; \\ y_2(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2. \end{cases}$$

5.6. Неоднородные линейные системы ОДУ с постоянными коэффициентами. Случай квазиполинома в правой части

Мы продолжаем рассматривать неоднородную линейную систему ОДУ

$$\vec{y}\,'(x) = A\vec{y}(x) + \vec{f}(x), \qquad \Big(L[\vec{y}] = \vec{f}(x)\Big), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle \tag{5.25}$$

Теорема 5.21.

Усл. *Вектор-функция* $\vec{f}(x)$ *имеет вид* $\vec{f}_1(x) + \ldots + \vec{f}_m(x)$, *а вектор-функции* $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_m(x)$ *являются решениями неоднородных систем*

$$\vec{y}_1'(x) = A(x)\vec{y}_1 + \vec{f}_1(x), \quad \ldots \quad \vec{y}_m'(x) = A(x)\vec{y}_m + \vec{f}_m(x).$$

Утв. *Вектор-функция* $\vec{y} = \vec{y}_1(x) + \ldots + \vec{y}_m(x)$ *является решением неоднородной системы*

$$\vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x) = A(x)\vec{y} + \vec{f}_1(x) + \ldots + \vec{f}_m(x).$$

Доказательство.
Сложив равенства

$$\vec{y}_1'(x) = A(x)\vec{y}_1 + \vec{f}_1(x), \quad \ldots \quad \vec{y}_m'(x) = A(x)\vec{y}_m + \vec{f}_m(x),$$

получим, что $\vec{y} = \vec{y}_1(x) + \ldots + \vec{y}_m(x)$ является решением неоднородной системы

$$\vec{y}\,'(x) = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x).$$

□

Опр. 5.20. Вектор-функция $\vec{f}(x)$ называется **квазиполиномом (квазимногочленом)**, если она имеет вид

$$\vec{f}(x) = \vec{p}(x)\cdot e^{\mu x}, \tag{5.30}$$

где $\vec{p}(x)$ – **векторный полином**, то есть вектор-функция, каждая компонента которой есть полином от x. Максимальная из степеней этих полиномов называется **степенью полинома** $\vec{p}(x)$.

Сумма квазиполиномов также считается квазиполиномом, в частности, вектор функция $\vec{p}_1(x)\cos\beta x \cdot e^{\alpha x} + \vec{p}_2(x)\sin\beta x \cdot e^{\alpha x}$ есть квазиполином, так как, пользуясь формулой Эйлера

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \qquad \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i},$$

её можно представить в виде

$$\vec{p}_1(x)\frac{e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}}{2} + \vec{p}_2(x)\frac{e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}}{2i} = \begin{bmatrix} \mu = \alpha + i\beta \\ \bar{\mu} = \alpha - i\beta \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{\vec{p}_1(x) + \vec{p}_2(x)}{2} \cdot e^{\mu x} + \frac{\vec{p}_1(x) + i\vec{p}_2(x)}{2} \cdot e^{\bar{\mu}x}.$$

Поэтому одним из важных частных случаев квазиполинома является

$$\vec{f}(x) = \vec{p}_1(x) \cdot \cos\beta x e^{\alpha x} + \vec{p}_2(x) \cdot \sin\beta x e^{\alpha x} = \tilde{\vec{p}}_1(x) \cdot e^{\mu x} + \tilde{\vec{p}}_2(x) \cdot e^{\bar{\mu}x}. \tag{5.31}$$

Замечание 5.6. В дальнейшем для упрощения текстовых формулировок мы будем часто говорить «полином имеет степень r», подразумевая, что его степень не превосходит r.

Теорема 5.22.

Усл. *Число μ является корнем характеристического уравнения кратности k. (Если μ – не корень, то будем полагать $k = 0$.) $\vec{p}(x)$, $\vec{p}_1(x)$, $\vec{p}_2(x)$ – полиномы степени r.*

Утв 1. *Если $\vec{f}(x) = \vec{p}(x) \cdot e^{\mu x}$, то существует $\vec{g}(x)$ – полином степени $r + k$ такой, что вектор-функция*

$$\vec{y}(x) = \vec{g}(x) \cdot e^{\mu x} \tag{5.32}$$

является частным решением неоднородной линейной системы (5.25).

Утв 2. *Если $\vec{f}(x) = \vec{p}_1(x) \cdot \cos\beta x e^{\alpha x} + \vec{p}_2(x) \cdot \sin\beta x e^{\alpha x}$, то существуют $\vec{g}_1(x)$ и $\vec{g}_2(x)$ – полиномы степени $r + k$ такие, что вектор-функция*

$$\vec{y}(x) = \vec{g}_1(x) \cdot \sin\beta x \cdot e^{\alpha x} + \vec{g}_2(x) \cdot \cos\beta x \cdot e^{\alpha x} \tag{5.33}$$

является частным решением неоднородной линейной системы (5.25).

Доказательство.
Докажем утверждение 1. Подставив (5.32) в равенство

$$\vec{y}\,'(x) = A\vec{y}(x) + \vec{p}(x) \cdot e^{\mu x},$$

получим:

$$\Big(\vec{g}\,'(x) + \mu\vec{g}(x)\Big) \cdot e^{\mu x} = A\vec{g}(x) \cdot e^{\mu x} + \vec{p}(x) \cdot e^{\mu x}.$$

На $e^{\mu x}$ можно сократить[11], и мы получим:

$$\vec{g}\,'(x) + \mu\vec{g}(x) = A\vec{g}(x) + \vec{p}(x). \tag{i}$$

Это – нормальная линейная система порядка n. По теореме 5.2, стр. 44, она имеет решение. Осталось убедиться, что это решение – вектор-полином степени не выше $(r+k)$. Итак, **пусть**

[11]Это возможно даже для $\mu \in \mathbb{C}$, так как $e^z \neq 0$ ни при каких $z \in \mathbb{C}$, что хорошо видно из формулы Эйлера (5.19).

$\vec{g}(x)$ – **то самое решение (i)**. Обозначив

$$\vec{p}(x) = \vec{b}_0 + \vec{b}_1\, x + \ldots + \vec{b}_r x^r,$$

подставив это представление в (i) и перенеся $\mu\vec{g}(x)$ в правую часть, получим:

$$\vec{g}\,'(x) = (A - \mu E)\,\vec{g}(x) + \vec{b}_0 + \vec{b}_1\, x + \ldots + \vec{b}_r x^r. \tag{ii}$$

Продифференцируем (ii) $r+1$ раз по x:

$$\vec{g}^{\,(r+2)}(x) = (A - \mu E)\,\vec{g}^{\,(r+1)}(x) + \vec{0}.$$

Получается, что вектор-функция $\vec{u}(x) \equiv \vec{g}^{\,(r+1)}(x)$ есть решение однородной системы

$$\vec{u}\,'(x) = (A - \mu E)\,\vec{u}(x), \tag{iii}$$

причём матрица этой системы $(A - \mu E)$ имеет собственное число $\lambda = 0$ кратности k (если $k = 0$, то 0 – не собственное число матрицы $(A - \mu E)$). В соответствии со следствием 5.2, стр. 66, система (iii) имеет общее решение, представляющее собой линейную комбинацию числовых векторов (собственных с собственным числом $\lambda = 0$), выражений, содержащих в качестве множителя $e^{\lambda_j x}$, где $\lambda_j \neq 0$ – остальные собственные числа матрицы $(A - \mu E)$, и решения, соответствующего $\lambda = 0$:

$$\vec{u}(x) = (\vec{a}_0 + \vec{a}_1 \cdot x + \ldots + \vec{a}_s \cdot x^s) \cdot e^{0\,x}, \qquad s = k - m, \tag{iv}$$

где m – число линейно независимых собственных векторов матрицы $(A - \mu E)$, соответствующих $\lambda = 0$, а вектора $\vec{a}_j$ зависят от $s+1 = k-m+1$ произвольной постоянной. (Заметим, что если $k = 0$, то (iv) даёт нам $\vec{u}(x) = \vec{0}$.)
Очень важно отметить, что остальные решения (iii) не могут нам пригодиться, так как они содежат экспоненты вида $e^{\lambda x}$ с $\lambda \neq 0$, которые никак не могут быть множителем в частном решении (ii). Итак, **единственный вид** приемлемого решения (iii) даётся формулой (iv). Поэтому, **если $\vec{g}(x)$ – решение (i), то его $r+1$-ая производная $\vec{u}(x) \equiv \vec{g}^{\,(r+1)}(x)$ имеет вид (iv)**, то есть

$$\vec{g}^{\,(r+1)}(x) = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 \cdot x + \ldots + \vec{a}_s \cdot x^s, \qquad s = k - m \leqslant k - 1.$$

Проинтегрировав это равенство $r+1$ раз, получим, что

$$\vec{g}(x) = \vec{c}_0 + \vec{c}_1\, x + \ldots + \vec{c}_r\, x^r + \tilde{\vec{a}}_0\, x^{r+1} + \tilde{\vec{a}}_1\, x^{r+2} + \ldots + \tilde{\vec{a}}_s\, x^{r+s+1}, \tag{v}$$

где $\vec{c}_j$ – произвольные вектора, а $\tilde{\vec{a}}_j = \frac{j!}{(r+j+1)!}\, \vec{a}_j$.
Осталось подставить $\vec{g}(x)$ в (ii) и найти $\vec{c}_j$. То, что $\vec{c}_j$ существуют, следует из двух фактов:

1) все операции мы проводили с функцией $\vec{g}(x)$, которая и есть единственное решение (i), существование которого гарантировано теоремой 5.3;

2) $r+1$-ая производная этого решения – функция $\vec{u}(x)$ – есть решение (iii), а все решения (iii), кроме частного решения вида (iv), не могут никак появиться в $\vec{g}(x)$, так как либо содержат в качестве множителей $e^{\lambda x}, \quad \lambda \neq 0$, либо являются просто числовыми векторами, и поэтому не могут быть решениями неоднородного уравнения (ii).

То есть любое решение (i) обязано иметь вид (v), а так как существование решения следует из теоремы 5.2, то вектора $\vec{c}_j$ и значения произвольных постоянных, от которых зависят $\tilde{\vec{a}}_i$, всегда можно найти.
Осталось отметить, что степень полинома $\vec{g}(x)$ получилась равной $r + s + 1$, а так как $s = k - m \leqslant k - 1$, то эта степень не превосходит числа $r + k$.

Докажем утверждение 2. В соответствии с равенством 5.31, стр. 76, правую часть

$$\vec{f}(x) = \vec{p}_1(x) \cdot \cos\beta x e^{\alpha x} + \vec{p}_2(x) \cdot \sin\beta x e^{\alpha x}$$

можно представить в виде

$$\vec{f}(x) = \tilde{\vec{p}}_1(x) \cdot e^{\mu x} + \tilde{\vec{p}}_2(x) \cdot e^{\bar{\mu} x},$$

где $\mu = \alpha + i\beta$, а $\bar{\mu} = \alpha - i\beta$.
Рассмотрим две вспомогательные неоднородные системы:

$$\vec{y}\,'(x) = A\vec{y}(x) + \tilde{\vec{p}}_1(x) \cdot e^{\mu x}, \qquad \text{и} \qquad \vec{y}\,'(x) = A\vec{y}(x) + \tilde{\vec{p}}_2(x) \cdot e^{\bar{\mu} x}.$$

Применим к каждой из них уже доказанное утверждение 1. с комплексными $\mu,\ \bar{\mu}$ и $\tilde{\vec{p}}_1(x)$ $\tilde{\vec{p}}_2(x)$.
Получим частные решения рассматриваемых систем

$$\vec{y}_1(x) = \vec{g}_1(x) \cdot e^{\mu x}, \qquad \text{и} \qquad \vec{y}_2(x) = \vec{g}_2(x) \cdot e^{\bar{\mu} x},$$

где вектор-полиномы $\vec{g}_1(x)$ и $\vec{g}_2(x)$ имеют степень не более $r+k$, где k – кратность комплексно-сопряжённых корней $\mu,\ \bar{\mu}$. По теореме 5.21, стр. 75, сумма этих частных решений вспомогательных систем есть частное решение исходной системы. Таким образом, частным решением (5.25) является

$$\vec{y}_1(x)+\vec{y}_2(x) = \vec{g}_1(x)\cdot e^{\mu x}+\vec{g}_2(x)\cdot e^{\bar{\mu} x} = \left[\text{по формуле Эйлера } e^{(\alpha\pm i\beta)x} = \Big(\cos\beta x \pm i\sin\beta x\Big)\, e^{\alpha x}\right] =$$
$$= \vec{g}_1(x) \cdot \Big(\cos\beta x + i\sin\beta x\Big)\, e^{\alpha x} + \vec{g}_2(x) \cdot \Big(\cos\beta x - i\sin\beta x\Big)\, e^{\alpha x} =$$
$$= \Big(\vec{g}_1(x) + \vec{g}_2(x)\Big) \cos\beta x \cdot e^{\alpha x} + \Big(i\vec{g}_1(x) - i\vec{g}_2(x)\Big) \sin\beta x \cdot e^{\alpha x} = \tilde{\vec{g}}_1(x)\cdot\cos\beta x\cdot e^{\alpha x} + \tilde{\vec{g}}_2(x)\cdot\sin\beta x\cdot e^{\alpha x}.$$

□

Пример 5.10. *Найти решение системы:*

$$\begin{cases} y_1'(x) = 4y_1 - y_2 + (x+\sin x)e^{3x}; \\ y_2'(x) = y_1 + 2y_2 + x\cos x\; e^{3x}, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(x) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot xe^{3x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \sin x \cdot e^{3x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x\cos x \cdot e^{3x}.$$

ЭТАП 1. Ищем общее решение однородной системы.
Шаг 1. Выпишем характеристическое уравнение:

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 1 = (\lambda-3)^2 = 0.$$

Таким образом, наше характеристическое уравнение имеет действительный корень кратности два:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Шаг 2. Найдём количество линейно-независимых собственных векторов для $\lambda_{1,2} = 0$.
По формуле из леммы 5.5, стр. 65,

$$m = n - r, \qquad \text{где}$$

$n = 2$ – порядок матрицы, а

$$r = \text{rang}\ (A - \lambda_1 E) = \text{rang}\ \begin{pmatrix} 4-3 & -1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} = \text{rang}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

и мы имеем, что

$$m = n - r = 2 - 1 = 1, \qquad \Longrightarrow \qquad m < k = 2,$$

где $k = 2$ – кратность λ_1.

Шаг 3. Построение общего решения однородной системы.
В соответствии со следствием 5.2, стр. 66, собственному значению $\lambda_{1,2}$ кратности 2 соответствует часть общего решения (в данном случае совпадающее со всем решением) вида:

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot x\right] \cdot e^{3x} \tag{i}$$

Обозначим эту вектор-функцию через $\vec{y}_\circ(x)$ и, найдя $\vec{y}_\circ\,'(x)$

$$\vec{y}_\circ(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot e^{3x} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot x \cdot e^{3x} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{y}_\circ\,'(x) = \left[\begin{pmatrix} 3a_1 + a_2 \\ 3b_1 + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a_2 \\ 3b_2 \end{pmatrix} \cdot x\right] \cdot e^{3x},$$

подставим их в равенство $\vec{y}\,' = A\vec{y}$:

$$\left[\begin{pmatrix} 3a_1 + a_2 \\ 3b_1 + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a_2 \\ 3b_2 \end{pmatrix} \cdot x\right] \cdot e^{3x} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot x\right] \cdot e^{3x}$$

Сократив на e^{3x} и перемножив матрицы в правой части, получаем:

$$\left[\begin{pmatrix} 3a_1 + a_2 \\ 3b_1 + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a_2 \\ 3b_2 \end{pmatrix} \cdot x\right] = \begin{pmatrix} 4a_1 - b_1 \\ a_1 + 2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4a_2 - b_2 \\ a_2 + 2b_2 \end{pmatrix} \cdot x.$$

Правнивая вектора при соответствующих степенях x, получаем СЛАУ из четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\text{при } x^0\colon \quad \begin{cases} 3a_1 + a_2 = 4a_1 - b_1 \\ 3b_1 + b_2 = a_1 + 2b_1 \end{cases} \qquad \text{при } x^1\colon \quad \begin{cases} 3a_2 = 4a_2 - b_2 \\ 3b_2 = a_2 + 2b_2 \end{cases}$$

Приведя подобные, получим:

$$\text{при } x^0\colon \quad \begin{cases} a_1 - b_1 - a_2 = 0 \\ a_1 - b_1 - b_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{при } x^1\colon \quad \begin{cases} a_2 - b_2 = 0 \\ a_2 - 2b_2 = 0 \end{cases}$$

Перепишем эту СЛАУ в обычном матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Методом Гаусса решим эту систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} II - I \\ IV - III \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} III - II \\ I + II \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Если взять в качестве базисного минора – минор, стоящий в пересечении столбцов номер 1 и 3 со строками 1 и 2, получим, что b_1 и b_2 – свободные переменные (поставим на их место строки единичной матрицы), и ФСР данной СЛАУ имеет вид:

a_1	b_1	a_2	b_2
1	1	0	0
1	0	1	1

, откуда

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Подставляя найденные значения в (i), получим окончательный вид общего решения:

$$\vec{y}_\circ = \left[\begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot x \right] \cdot e^{3x} = \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 + x \\ x \end{pmatrix} \right] \cdot e^{3x} \tag{ii}$$

Отметим, что как всегда на данном этапе вектор, умножаемый в этой части общего решения на c_1 является собственным.

ЭТАП 2. Ищем частное решение неоднородной системы для

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot xe^{3x} = \vec{p}_1(x) \cdot e^{3x}.$$

По теореме 5.22, поскольку $\mu = 3$ – корень характеристического уравнения кратности 2, а степень полинома $\vec{p}_1(x)$ равна 1, то частное решение неоднородной системы

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(x) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot xe^{3x} \tag{iii}$$

имеет вид квазиполинома с многочленом степени $r + k = 3$:

$$\vec{y}_1(x) = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} \cdot x^3 \right] \cdot e^{3x} \tag{iv}$$

Найдём производную:

$$\vec{y}_1\,'(x) = \left[\begin{pmatrix} 3a_1 + a_2 \\ 3b_1 + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a_2 + 2a_3 \\ 3b_2 + 2b_3 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 3a_3 + 3a_4 \\ 3b_3 + 3b_4 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \begin{pmatrix} 3a_4 \\ 3b_4 \end{pmatrix} \cdot x^3 \right] \cdot e^{3x}$$

Подставим $\vec{y}_1\,'(x)$ и $\vec{y}_1(x)$ в (iii):

$$\left[\begin{pmatrix} 3a_1 + a_2 \\ 3b_1 + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a_2 + 2a_3 \\ 3b_2 + 2b_3 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 3a_3 + 3a_4 \\ 3b_3 + 3b_4 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \begin{pmatrix} 3a_4 \\ 3b_4 \end{pmatrix} \cdot x^3 \right] \cdot e^{3x} =$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} \cdot x^3 \right] \cdot e^{3x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot xe^{3x}$$

Перемножим матрицы в правой части и сократим на e^{3x}:

$$\begin{pmatrix} 3a_1 + a_2 \\ 3b_1 + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a_2 + 2a_3 \\ 3b_2 + 2b_3 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 3a_3 + 3a_4 \\ 3b_3 + 3b_4 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \begin{pmatrix} 3a_4 \\ 3b_4 \end{pmatrix} \cdot x^3 =$$
$$= \begin{pmatrix} 4a_1 - b_1 \\ a_1 + 2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4a_2 - b_2 \\ a_2 + 2b_2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 4a_3 - b_3 \\ a_3 + 2b_3 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \begin{pmatrix} 4a_4 - b_4 \\ a_4 + 2b_4 \end{pmatrix} \cdot x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x$$

Приравняем вектора при соответствующих степенях x:

$$\text{при } x^0: \begin{cases} 3a_1 + a_2 = 4a_1 - b_1 \\ 3b_1 + b_2 = a_1 + 2b_1 \end{cases} \qquad \text{при } x^1: \begin{cases} 3a_2 + 2a_3 = 4a_2 - b_2 + 1 \\ 3b_2 + 2b_3 = a_2 + 2b_2 \end{cases}$$

$$\text{при } x^2\text{:}\quad \begin{cases} 3a_3+3a_4=4a_3-b_3 \\ 3b_3+3b_4=a_3+2b_3 \end{cases} \qquad \text{при } x^3\text{:}\quad \begin{cases} 3a_4=4a_4-b_4 \\ 3b_4=a_4+2b_4 \end{cases}$$

В векторном виде эта неоднородная СЛАУ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы по методу Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} II-I \\ IV-III \\ VI-V \\ VIII-VII \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} III-II+IV \\ IV \leftrightarrow V \\ VI\cdot\frac{1}{3} \\ VII-VI \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} III\cdot\frac{-1}{2} \\ V-2IV-6VI \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{c} III\leftrightarrow IV\\ V\leftrightarrow VI\end{array}\right]\sim\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{c} I+II\\ III+IV+3V+VI\cdot\frac{1}{2}\\ V+VI\cdot\frac{1}{6}\\ VI\cdot\frac{1}{6}\end{array}\right]\sim\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cccccccc|c}
\boxed{1} & -1 & \boxed{0} & -1 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & 0\\
\boxed{0} & 0 & \boxed{1} & -1 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & 0\\
\boxed{0} & 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & -\frac{1}{2}\\
\boxed{0} & 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & 0\\
\boxed{0} & 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & -\frac{1}{6}\\
\boxed{0} & 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & -\frac{1}{6}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Взяв базисный минор на пересечении строк номер 1, 2, 3, 4, 5, 6 со столбцами номер 1, 3, 5, 6, 7, 8, получаем, что $b_1,\ b_2$ – свободные переменные, ФСР однородной СЛАУ имеет вид

a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	a_4	b_4
1	$\boxed{1}$	0	$\boxed{0}$	0	0	0	0
1	$\boxed{0}$	1	$\boxed{1}$	0	0	0	0

А частное решение неоднородной СЛАУ, например, при $b_1=b_2=0$, вид

a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	a_4	b_4
0	$\boxed{0}$	0	$\boxed{0}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$

Итак, мы нашли значения переменных $a_{1,2,3,4},\ b_{1,2,3,4}$:

$$\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\\ a_2\\ b_2\\ a_3\\ b_3\\ a_4\\ b_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_3+c_4\\ c_3\\ c_4\\ c_4\\ -\frac{1}{2}\\ 0\\ -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

Теперь мы можем переписать (iv) окончательно:

$$\vec{y}_1(x)=\left[\begin{pmatrix}c_3+c_4\\ c_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_4\\ c_4\end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}\cdot x^2+\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot x^3\right]\cdot e^{3x}\tag{v}$$

<u>ЭТАП 3.</u> Ищем частное решение неоднородной системы для

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot \sin x\cdot e^{3x} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot x\cos x\cdot e^{3x} = \vec{p}_1(x)\cdot e^{(3+i)x} + \vec{p}_2(x)\cdot e^{(3-i)x}.$$

По теореме 5.22, поскольку $\mu = 3\pm i$ – не корень характеристического уравнения, то $k=0$, а степень полиномов $\vec{p}_{1,2}(x)$ равна 1, то частное решение неоднородной системы

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix}4 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}\vec{y}(x) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\sin x\cdot e^{3x} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot x\cos x\cdot e^{3x} \tag{vi}$$

имеет вид суммы двух квазиполиномов с многочленомами степени $r+k=1$:

$$\vec{y}_2(x) = \left[\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}\cdot x\right]\cdot\cos x\cdot e^{3x} + \left[\begin{pmatrix}a_3\\b_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_4\\b_4\end{pmatrix}\cdot x\right]\cdot\sin x\cdot e^{3x} \tag{vii}$$

Найдём производную:

$$\vec{y}_1\,'(x) = \left[\begin{pmatrix}3a_1+a_2+a_3\\3b_1+b_2+b_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3a_2+a_4\\3b_2+b_4\end{pmatrix}\cdot x\right]\cdot\cos x\cdot e^{3x}+$$
$$+\left[\begin{pmatrix}3a_3+a_4-a_1\\3b_3+b_4-b_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3a_4-a_2\\3b_4-b_2\end{pmatrix}\cdot x\right]\cdot\sin x\cdot e^{3x}$$

Подставим $\vec{y}_1\,'(x)$ и $\vec{y}_1(x)$ в (iii):

$$\left[\begin{pmatrix}3a_1+a_2+a_3\\3b_1+b_2+b_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3a_2+a_4\\3b_2+b_4\end{pmatrix}\cdot x\right]\cdot\cos x\cdot e^{3x} + \left[\begin{pmatrix}3a_3+a_4-a_1\\3b_3+b_4-b_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3a_4-a_2\\3b_4-b_2\end{pmatrix}\cdot x\right]\cdot\sin x\cdot e^{3x} =$$
$$= \begin{pmatrix}4 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}\cdot x\right]\cdot\cos x\cdot e^{3x} + \begin{pmatrix}4 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}a_3\\b_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_4\\b_4\end{pmatrix}\cdot x\right]\cdot\sin x\cdot e^{3x}+$$
$$+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\sin x\cdot e^{3x} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot x\cos x\cdot e^{3x}$$

Перемножим матрицы в правой части и сократим на e^{3x}:

$$\left[\begin{pmatrix}3a_1+a_2+a_3\\3b_1+b_2+b_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3a_2+a_4\\3b_2+b_4\end{pmatrix}\cdot x\right]\cdot\cos x + \left[\begin{pmatrix}3a_3+a_4-a_1\\3b_3+b_4-b_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3a_4-a_2\\3b_4-b_2\end{pmatrix}\cdot x\right]\cdot\sin x =$$
$$= \left[\begin{pmatrix}4a_1-b_1\\a_1+2b_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4a_2-b_2\\a_2+2b_2\end{pmatrix}\cdot x\right]\cdot\cos x + \left[\begin{pmatrix}4a_3-b_3\\a_3+2b_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4a_4-b_4\\a_4+2b_4\end{pmatrix}\cdot x\right]\cdot\sin x+$$
$$+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\sin x + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot x\cos x$$

Приравняем вектора при соответствующих степенях x при синусах и при косинусах:

при $\left(x^0\cos x\right)$: $\begin{cases}3a_1+a_2+a_3 = 4a_1-b_1\\3b_1+b_2+b_3 = a_1+2b_1\end{cases}$ при $\left(x^1\cos x\right)$: $\begin{cases}3a_2+a_4 = 4a_2-b_2\\3b_2+b_4 = a_2+2b_2+1\end{cases}$

при $\left(x^0\sin x\right)$: $\begin{cases}3a_3+a_4-a_1 = 4a_3-b_3+1\\3b_3+b_4-b_1 = a_3+2b_3\end{cases}$ при $\left(x^1\sin x\right)$: $\begin{cases}3a_4-a_2 = 4a_4-b_4\\3b_4-b_2 = a_4+2b_4\end{cases}$

В векторном виде эта неоднородная СЛАУ выглядит так:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1\\1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\a_2\\b_2\\a_3\\b_3\\a_4\\b_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы по методу Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} I \leftrightarrow V \\ II \leftrightarrow VI \\ III \leftrightarrow VII \\ IV \leftrightarrow VIII \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} V - I + II + III \\ VI - I + II + IV \\ VII - III + IV \\ VIII - III + IV \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} I - V + VI + VII \\ II - V + VI + VIII \\ III - VII + VIII \\ IV - VII + VIII \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} V + 2VII - 2VIII \\ VI + 2VII - 2VIII \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Поскольку матрица систмы после данных элементарных преобразований стала единичной, то правый столбец полученной расширенной матрицы задаёт решение (единственное) нашей

СЛАУ. Итак, мы нашли значения переменных $a_{1,2,3,4}$, $b_{1,2,3,4}$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Теперь мы можем переписать (vii) окончательно:

$$\vec{y}_2(x) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x \right] \cdot \cos x \cdot e^{3x} + \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x \right] \cdot \sin x \cdot e^{3x} \qquad \text{(viii)}$$

Теперь, зная общее решение однородной системы

$$\vec{y}_\circ = \left[\begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot x \right] \cdot e^{3x}, \qquad \text{(ii)}$$

частное решение, соответствующее правой части $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot xe^{3x} = \vec{p}_1(x) \cdot e^{3x}$:

$$\vec{y}_1(x) = \left[\begin{pmatrix} c_3 + c_4 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_4 \\ c_4 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot x^3 \right] \cdot e^{3x} \qquad \text{(v)}$$

и частное решение (viii), соответствующее правой части $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \sin x \cdot e^{3x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x \cos x \cdot e^{3x}$, мы готовы выписать общее решение исходной системы ОДУ:

<u>Ответ:</u>

$$\vec{y}(x) = \left[\begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot x \right] \cdot e^{3x} + \left[\begin{pmatrix} c_3 + c_4 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_4 \\ c_4 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot x^3 \right] \cdot e^{3x} +$$
$$+ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x \right] \cdot \cos x \cdot e^{3x} + \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x \right] \cdot \sin x \cdot e^{3x}, \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = \left(c_1 + c_2 + c_2 x + c_3 + c_4 + c_4 x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + (1 - x)\cos x + 3\sin x \right) e^{3x}; \\ y_2(x) = \left(c_1 + c_2 x + c_3 + c_4 x - \frac{x^3}{6} - (1 + x)\cos x + (3 - x)\sin x \right) e^{3x}. \end{cases}$$

6. Общие ОДУ n-ого порядка

6.1. Основные понятия

Вспомним определения 1.1 и 1.2, стр. 4:

Определение. Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) называется равенство вида:

$$F\left(x;\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\right) = 0, \qquad x \in \langle a,\ b\rangle \tag{6.1}$$

в котором F – заданная функция, x – независимая переменная, а $y(x)$ – искомая функция.

При этом **порядком ОДУ** (6.1) называется число n – порядок старшей производной от функции $y(x)$, входящей в уравнение, при условии, что $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$ на $x \in \langle a,\ b\rangle$.

Решением (частным решением) ОДУ (1.1) называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество (верное равенство):

$$F\left(x;\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(x)\right) = 0, \qquad x \in \langle a,\ b\rangle. \tag{6.2}$$

Общим решением ОДУ (6.1) называется множество всех его частных решений.

Интегральной кривой для уравнения (6.1) называется график любого его частного решения $y = \varphi(x)$.

Замечание 6.1. Естественно, чтобы равенство (6.2) имело смысл, функция $\varphi(x)$ должна быть n раз дифференцируема на $x \in \langle a,\ b\rangle$, а область определения D функции F должна $\forall\ x \in \langle a,\ b\rangle$ содержать точку $\left(x;\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n)}(x)\right) \in D \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

Опр. 6.1. Частным интегралом уравнения (6.1) называется соотношение вида

$$\Phi(x,\ y) = 0,$$

которое определяет некоторое частное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения как неявную функцию. **Общим интегралом уравнения** (6.1) называется соотношение вида

$$\Phi(x,\ y;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n) = 0,$$

которое

1) при произвольном выборе параметров $c_k \in [-\infty,\ +\infty]$, $\quad k = \overline{1,\ n}$, определяет некоторое частное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения как неявную функцию;

2) для любого частного решения $y = \varphi(x)$ этого уравнения можно указать такое значение параметров $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$, что $y = \varphi(x)$ неявно задаётся соотношением

$$\Phi(x,\ y;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n) = 0.$$

В задаче Коши для уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной, к уравнению добавлялось одно начальное условие $y(x_0) = y_0$, и этого было достаточно для однозначной разрешимости такой задачи. С ОДУ n-ого порядка ситуация сложнее: поскольку общий интеграл для ОДУ n-ого порядка содержит n произвольных постоянных $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$, то для того, чтобы они определялись единственным образом, необходимо задать n условий:

6.2. Сведение ОДУ n-ого порядка к системе n-ого порядка

Наряду с уравнением n-ого порядка, разрешённым относительно старшей производной:

$$y^{(n)}(x) = f\left(x;\ y,\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\right), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle, \tag{6.3}$$

рассмотрим вспомогательную нормальную систему ОДУ:

$$\begin{cases} u_0'(x) = u_1(x); \\ u_1'(x) = u_2(x); \\ \qquad \ldots \\ u_{n-2}'(x) = u_{n-1}(x); \\ u_{n-1}'(x) = f\left(x;\ u_0(x),\ u_1(x),\ \ldots,\ u_{n-1}(x)\right), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle, \end{cases} \tag{6.4}$$

Теорема 6.1 (О сведении ОДУ n-ого порядка к системе n-ого порядка).

Утв. *Каждому решению $y(x)$ ОДУ n-ого порядка (6.3) соответствует одно решение $\vec{u}(x)$*

$$\vec{u}(x) \equiv \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \ldots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \ldots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \equiv \underset{\downarrow}{y}(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle, \tag{6.5}$$

системы (6.4) и наоборот, каждому решению $\vec{u}(x)$ системы (6.4) соответствует одно решение $y(x)$ ОДУ n-ого порядка (6.3).

Доказательство. Пусть $y(x)$ – решение ОДУ n-ого порядка (6.3). Тогда, обозначив $y^{(k)}(x) = u_k(x)$, $k = \overline{0,\ n-1}$, получаем, что справедливы все равенства системы (6.4).
Пусть, наоборот, $\vec{u}(x)$ – решение системы (6.4). Обозначив $u_0(x)$ через $y(x)$, из первых $n-1$ уравнений (6.4) получаем:

$$y' = u_1, \quad y'' = u_2, \quad \ldots \quad y^{(n-2)} = u_{n-2}, \quad y^{(n-1)} = u_{n-1}.$$

Тогда последнее уравнение (6.4) принимает вид

$$y^{(n)}(x) = f\left(x;\ y,\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\right).$$

□

Пользуясь этой фундаментальной связью между уравнениями и системами вида (6.4), мы в дальнейшем получим существенное упрощение доказательств многих теорем. Также эта связь позволят нам естественным образом перенести понятие задачи Коши для системы на ОДУ n-ого порядка:

Опр. 6.2. Задачей Коши для ОДУ n-го порядка, разрешённого относительно $y^{(n)}$, называется задача

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x;\ y,\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\right), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle; \\ y(x_0) = y_{0,0}; \\ y'(x_0) = y_{0,1}; \\ \qquad \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}, \end{cases} \tag{6.6}$$

где числа x_0, $y_{0,0}$, $\ldots$, $y_{0,n-1}$ задают координаты некоторой точки из области определения функции f.

Замечание 6.2 *(Геометрический смысл задачи Коши при $n = 2$).*
При $n = 2$ задача Коши принимает вид: найти функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} y'' = f\left(x;\ y,\ y'(x)\right), & x \in \langle a,\ b\rangle; \\ y(x_0) = y_{0,0}; \\ y'(x_0) = y_{0,1}, \end{cases}$$

где числа $x_0,\ y_{0,0},\ y_{0,1}$ заданы. Геометрически это означает: *найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку $(x_0,\ y_{0,0})$ в заданном направлении (определяемом угловым коэффициентом $\operatorname{tg}\alpha = y'(x_0) = y_{0,1}$).*

Теорема 6.2 (Существование и единственность решения задачи Коши).

Усл. $f\left(x;\ y,\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)\right) \in C^1\left(\overline{D}\right)$*, где* $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *– некоторая область, содержащая точку* $(x_0,\ y_{0,0},\ \ldots,\ y_{0,n-1})$*.*

Утв. $\exists\ !$ *решение* $y = y(x)$ *задачи Коши* (6.6)*, определённое в некоторой окрестности точки* x_0*.*

Доказательство. Обозначив $y^{(k)}(x) = u_k(x),\ \ k = \overline{0,\ n-1}$, получаем, что задача Коши (6.6) превратится в задачу Коши

$$\begin{cases} \vec{u}\,'(x) = \vec{F}(x;\ \vec{u}); \\ \vec{u}(x_0) = \vec{u}^{\,0}, \end{cases}$$

где $\vec{u}^{\,0}$ имеет координаты $y_{0,0},\ \ldots,\ y_{0,n-1}$. В силу ТСЕ решения задачи Коши для системы (стр. 43), на отрезке $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$ с некоторым $h > 0$ существует единственное решение полученной задачи Коши. По теореме 6.1, между множествами решений уравнения и вспомогательной системы существует взаимно-однозначное соответствие, поэтому решение задачи Коши (6.6) также существует и единственно на отрезке $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$. $\square$

Замечание 6.3. Из условия $f \in C(\overline{D})$ следует лишь существование решения, а условие $f \in C^1(\overline{D})$ гарантирует (с избытком) его единственность.
Теорема останется верна, если вместо $f \in C^1(\overline{D})$ потребовать, чтобы $f \in C(\overline{D})$ и чтобы f удовлетворяла в D условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго, то есть

$$\exists\, L > 0: \quad \forall \text{ пары точек } (x;\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}),\ (x;\ \tilde{a}_0,\ \tilde{a}_1,\ \ldots,\ \tilde{a}_{n-1}) \in \overline{D}$$

$$|f(x;\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}) - f(x;\ \tilde{a}_0,\ \tilde{a}_1,\ \ldots,\ \tilde{a}_{n-1})| \leqslant L \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - \tilde{a}_k|.$$

7. Линейные уравнения n-ого порядка

Опр. 7.1. **Линейным ОДУ n-го порядка** называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle, \tag{7.1}$$

где функция f задана на промежутке $x \in \langle a,\ b\rangle$.
Если $f(x) \equiv 0$ на $x \in \langle a,\ b\rangle$, то уравнение (7.1) называется **однородным**, в противном случае – **неоднородным**.

Рассмотрим вспомогательную линейную систему ОДУ:

$$\begin{cases} u_0'(x) = u_1(x); \\ u_1'(x) = u_2(x); \\ \qquad \ldots \\ u_{n-2}'(x) = u_{n-1}(x); \\ u_{n-1}'(x) = -a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - \ldots - a_2(x)y'' - a_1(x)y' - a_0(x)y + f(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle, \end{cases} \tag{7.2}$$

Теорема 7.1 (О сведении линейного ОДУ n-ого порядка к линейной системе).

Утв. *Каждому решению $y(x)$ линейного ОДУ n-ого порядка (7.1) соответствует одно решение $\vec{u}(x)$*

$$\vec{u}(x) \equiv \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \ldots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \ldots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \equiv \underset{\downarrow}{y}(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle, \tag{6.5}$$

линейной системы (7.2) и наоборот, каждому решению $\vec{u}(x)$ системы (7.2) соответствует одно решение $y(x)$ уравнения (7.1).

Доказательство. Так как и $\underset{\downarrow}{y}(x)$, и $\vec{u}(x)$ являются решением системы

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-3)} \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-3)} \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

то утверждение теоремы очевидно. □

7.1. Задача Коши

Опр. 7.2. Задачей Коши для линейного ОДУ (7.1) называется задача

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle; \\ y(x_0) = y_{0,0}; \\ y'(x_0) = y_{0,1}; \\ \quad \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}, \end{cases} \tag{7.4}$$

где $x_0,\ y_{0,0},\ \ldots,\ y_{0,n-1}$ – некоторые заданные числа.

Теорема 7.2 (Существование и единственность решения задачи Коши).

Усл. $a_0,\ \ldots,\ a_{n-1};\ f \in C\langle a,\ b\rangle$. *Точка* $x_0 \in \langle a,\ b\rangle$

Утв. $\exists\,!$ *решение* $y = y(x) \in C^n\langle a,\ b\rangle$ *задачи Коши* (7.4).

Доказательство. Сведём данное уравнение к линейной системе (7.3). В силу ТСЕ решения задачи Коши для линейной системы (стр. 44), на всём промежутке $\langle a,\ b\rangle$ существует единственное решение полученной задачи Коши для этой системы (с произвольными начальными данными). Оно и определяет единственное решение $y(x)$ задачи Коши (7.4).
Убедимся, что $y(x) \in C^n\langle a,\ b\rangle$. Так как уравнение выполняется, то $y^{(n)}(x)$ имеет смысл в каждой точке $\langle a,\ b\rangle$, а поэтому $y^{(n-1)}$ – по крайней мере непрерывна на $\langle a,\ b\rangle$. То же можно сказать и про $y^{(n-2)},\ \ldots,\ y$. Тогда, переписав уравнение так:

$$y^{(n)} = -a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - \ldots - a_2(x)y'' - a_1(x)y' - a_0(x)y + f(x),$$

получаем, что его левая часть $y^{(n)}$ равна непрерывной на $\langle a,\ b\rangle$ функции. □

Лемма 7.1 (О линейности оператора левой части).

Усл. *Отображение* $L[y]$ *ставит каждой функции* $y(x) \in C^n\langle a,\ b\rangle$ *в соответствие функцию*

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

Утв. *Отображение* $L[y]$ *– линейный оператор.*

Доказательство. В соответствии с определением линейного оператора 5.11, стр. 44, нам надо убедиться, что для всех $y,\ y_1,\ y_2 \in C^n\langle a,\ b\rangle$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнены равенства:

1) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$;

2) $L[\alpha y] = \alpha L[y]$.

Оба эти равенства следуют из соответствующих свойств производной. Действительно, сложим $L[y_1]$ и $L[y_2]$ и воспользуемся тем, что сумма производных равна производной суммы:

$$+\begin{array}{r} L[y_1] = y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 \\ L[y_2] = y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 \\ \hline L[y_1] + L[y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + a_{n-1}(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + \\ + a_2(x)(y_1 + y_2)'' + a_1(x)(y_1 + y_2)' + a_0(x)(y_1 + y_2) \equiv L[y_1 + y_2] \end{array}$$

Аналогично, домножим $L[y]$ на α и воспользуемся тем, что константу можно вносить под знак производной:

$$\alpha L[y] = (\alpha y)^{(n)} + a_{n-1}(x)(\alpha y)^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)(\alpha y)'' + a_1(x)(\alpha y)' + a_0(x)(\alpha y) \equiv L[\alpha y].$$

□

Пользуясь результатом этой леммы, ниже мы будем записывать уравнение (7.1):

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle \tag{7.1}$$

в более коротком эквивалентном виде:

$$L[y] = f(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle. \tag{7.5}$$

7.2. Вронскиан системы скалярных функций. Формула Остроградского – Лиувилля

Опр. 7.3. Определителем Вронского (Вронскианом) системы скалярных (то есть не вектор-) функций $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$, заданных на промежутке $x \in \langle a,\ b\rangle$, называется функция

$$W\left[\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n\right](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \qquad x \in \langle a,\ b\rangle. \tag{7.6}$$

Замечание 7.1. Если по системе скалярных функций $\{\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ построить систему вектор-функций следующим образом:

$$\vec{\psi}_1(x) \equiv \underset{\downarrow}{\varphi_1}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_2(x) \equiv \underset{\downarrow}{\varphi_2}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_2' \\ \vdots \\ \varphi_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{\psi}_n(x) \equiv \underset{\downarrow}{\varphi_n}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_n' \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

то мы получим явную взаимосвязь Вронскианов системы скалярных функций (опр. 7.3) и системы вектор-функций (опр. 5.13, стр. 46):

$$W\left[\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n\right](x) = W\left[\vec{\psi}_1,\ \ldots,\ \vec{\psi}_n\right](x) = W\left[\underset{\downarrow}{\varphi_1},\ \ldots,\ \underset{\downarrow}{\varphi_n}\right](x). \tag{7.7}$$

Поэтому на для определителя Вронского системы скалярных функций легко переносятся все свойства определителя Вронского системы вектор-функций, в частности, теоремы 5.5 – 5.7 (стр. 47 – 48). Надо лишь в формулировках этих теорем заменить вектор-функции на функции, а решения линейной однородной системы – на решения линейного однородного уравнения.

Теорема 7.3 (Формула Остроградского – Лиувилля).

Усл. *$W[y_1, \ldots, \vec{y}_n](x)$ – вронскиан системы решений, образующих ФСР однородного уравнения (7.1)*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \qquad (L[y] = 0). \tag{7.8}$$

Утв. *Справедлива формула:*

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)dt}. \tag{7.9}$$

Доказательство. Составим по уравнению (7.1) соответствующую ему однородную систему вида (7.3):

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-3)} \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-3)} \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.10}$$

и применим к этой системе формулу Остроградского – Лиувилля для однородных систем (5.18), стр. 54:

$$W(x) = W(x_0)e^{\int\limits_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(t)dt}, \tag{ii}$$

где $\operatorname{tr} A(t)$ – след (сумма диагональных элементов) матрицы системы. На главной диагонали матрицы нашей системы всего один ненулевой элемент, и

$$\operatorname{tr} A(t) = -a_{n-1}.$$

Подставляя это в (ii), получаем утверждение теоремы. □

7.3. ФСР и структура общего решения однородного линейного уравнения

Лемма 7.2.

Утв. *Линейная независимость системы Функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ равносильна линейной независимости соответствующей ей системы вектор-функций $\left\{\underset{\downarrow}{\varphi_1}, \ldots, \underset{\downarrow}{\varphi_n}\right\}$.*

Доказательство. Выпишем определение линейной независимости $\left\{\underset{\downarrow}{\varphi_1}, \ldots, \underset{\downarrow}{\varphi_n}\right\}$: их линейная комбинация есть нулевой вектор, только когда все её коэффициенты равны нулю:

$$\alpha_1\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_2^{(n-1)} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Заметим, что для векторов такой структуры из первой строчки следуют все остальные. В самом деле, пусть $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_n\varphi_n = 0$. Продифференцировав это равенство k раз, получим $\alpha_1\varphi_1^{(k)} + \alpha_2\varphi_2^{(k)} + \ldots + \alpha_n\varphi_n^{(k)} = 0$. Таким образом, равенство

$$\alpha_1\underset{\downarrow}{\varphi_1} + \alpha_2\underset{\downarrow}{\varphi_2} + \ldots + \alpha_n\underset{\downarrow}{\varphi_n}$$

выполняется тогда и только тогда, когда выполняется $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_n\varphi_n = 0$. Поэтому линейная независимость $\left\{\underset{\downarrow}{\varphi_1},\ \ldots,\ \underset{\downarrow}{\varphi_n}\right\}$ равносильна линейной независимости их первых координат:

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_n\varphi_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

$\square$

Опр. 7.4. Фундаментальной системой решений (ФСР) однородного линейного уравнения порядка n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \qquad (L[y] = 0) \qquad (7.8)$$

называется набор любых n его линейно независимых решений.

Теорема 7.4 (Существование ФСР однородного линейного уравнения).

Усл. *Функции $a_j(x)$ непрерывны: $a_j(x) \in C\langle a,\ b\rangle$, $\quad j \in \overline{1,\ n}$.*

Утв. *Существует ФСР однородного линейного уравнения (7.1).*

Доказательство. Сведём уравнение (7.8) к однородной линейной системе (7.10) и применим к этой системе теорему 5.9 (стр. 50). По ФСР системы $\left\{\underset{\downarrow}{y_1},\ \ldots,\ \underset{\downarrow}{y_n}\right\}$ строим систему n решений $\{y_1,\ \ldots,\ y_n\}$ уравнения (7.8). Осталось убедиться в их линейной независимости. Поскольку $\left\{\underset{\downarrow}{y_1},\ \ldots,\ \underset{\downarrow}{y_n}\right\}$ линейно независимы, то в силу леммы 7.2, их первые координаты также линейно независимы:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Итак мы построили n линейно независимых решений уравнения (7.8), следовательно, они и образую его ФСР. $\square$

Теорема 7.5 (О структуре общего решения однородного линейного уравнения).

Усл. *Функции $a_j(x)$ непрерывны: $a_j(x) \in C\langle a,\ b\rangle$, $\quad j \in \overline{1,\ n}$. Функции $\{\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)\}$ образуют ФСР однородного линейного уравнения*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \qquad (L[y] = 0) \qquad (7.8)$$

Утв. *Общее решение однородного линейного уравнения (7.8) имеет вид:*

$$y_{oo}(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle, \quad c_1,\ \ldots,\ c_n \in \mathbb{R}. \qquad (7.11)$$

Доказательство. Сведём уравнение (7.8) к однородной линейной системе (7.10) и применим к этой системе теорему 5.10 (стр. 50). Одной из ФСР этой системы является набор вектор-функций

$$\left\{\underset{\downarrow}{\varphi_1},\ \ldots,\ \underset{\downarrow}{\varphi_n}\right\}$$

(В самом деле, каждому решению уравнения (7.8) соответствует единственное решение системы (7.10) и наоборот, а в силу леммы 7.2, линейная независимость системы вектор-функций такого вида – когда каждая следующая строчка есть производная предыдущей – равносильна линейной независимости первых координат.)
Поэтому общее решение системы (7.10) имеет вид

$$\underset{\downarrow}{y_{oo}}(x) = c_1\underset{\downarrow}{\varphi_1} + c_2\underset{\downarrow}{\varphi_2} + \ldots + c_n\underset{\downarrow}{\varphi_n}.$$

В силу взаимно-однозначного соответствия множеств решений системы (7.10) и уравнения (7.8), общее решение уравнения имеет вид (7.11). □

7.4. Структура общего решения неоднородной линейной системы ОДУ

Рассмотрим два линейных уравнения: неоднородное

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \qquad (L[y] = f(x)) \qquad x \in \langle a,\ b\rangle \tag{7.12}$$

и соответствующее ему однородное:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \qquad (L[y] = 0) \qquad x \in \langle a,\ b\rangle. \tag{7.13}$$

Теорема 7.6 (О структуре общего решения неоднородной линейной системы).

Усл. *$\psi(x)$ – произвольное частное решение неоднородного линейного уравнения (7.12), $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$ – ФСР соответствующего однородного уравнения (7.13).*

Утв. *Общее решение неоднородного уравнения (7.12) имеет вид:*

$$y_{оно}(x) = \psi(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle, \tag{7.14}$$

где $c_1,\ \ldots,\ c_n \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные. Пользуясь обозначением из теоремы 7.5, запишем (7.18) короче:

$$\boxed{y_{оно}(x) = y_{чно}(x) + y_{oo}(x),} \qquad x \in \langle a,\ b\rangle. \tag{7.15}$$

(Общее решение неоднородной системы есть сумма частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной).

Доказательство. В силу леммы 6.1, стр. 87, существует взаимно-однозначное соответствие множеств решений системы

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-3)} \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-3)} \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \qquad (7.3)$$

и уравнения (7.12), причём решение $y(x)$ уравнения совпадает с первой координатой y решения $\underset{\downarrow}{y}$ системы. Поэтому частному решению $\psi(x)$ уравнения соответствует частное решение $\underset{\downarrow}{\psi}$ системы, а ФСР $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_n(x)$ однородного уравнения (как мы выяснили в доказательстве предфдущей теоремы) соответствует ФСР однородной системы

$$\left\{\underset{\downarrow}{\varphi_1},\ \dots,\ \underset{\downarrow}{\varphi_n}\right\}.$$

Поэтому общему решению неоднородной системы (7.3)

$$\vec{y}_{\text{оно}}(x) = \vec{\psi}(x) + c_1\vec{\varphi}_1(x) + c_2\vec{\varphi}_2(x) + \ldots + c_n\vec{\varphi}_n(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle$$

соответствует общее решение уравнения (7.12)

$$y_{\text{оно}}(x) = \underset{\downarrow}{\psi}(x) + c_1\underset{\downarrow}{\varphi_1}(x) + c_2\underset{\downarrow}{\varphi_2}(x) + \ldots + c_n\underset{\downarrow}{\varphi_n}(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle.$$

□

7.5. Однородные линейного уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами

Здесь мы будем рассматривать однородные линейные уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0, \qquad (L[y] = 0) \qquad x \in \langle a,\ b\rangle, \qquad (7.16)$$

где $a_k \in \mathbb{R}$ – действительные постоянные.
Поставим этому уравнению в соответствие систему

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-3)} \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-3)} \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7.10)$$

Характеристическое уравнение для этой системы имеет вид:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & (-a_{n-1}-\lambda)\end{pmatrix} = \Big[\text{разложим по последней строке}\Big] =$$

$$= -\left[a_0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1\end{vmatrix} - a_1\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1\end{vmatrix} + a_2\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1\end{vmatrix} -\right.$$

$$\left. -\dots-(-1)^n a_{n-2}\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{vmatrix} + (-1)^n(a_{n-1}-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda\end{vmatrix}\right] =$$

$$= -\left[a_0\cdot 1 - a_1\cdot(-\lambda) + a_2\cdot(-\lambda)^2 - \dots - (-1)^n a_{n-2}\cdot(-\lambda)^{n-2} + (-1)^n(a_{n-1}-\lambda)\cdot(-\lambda)^{n-1}\right] =$$

$$= -\left[a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-2}\lambda^{n-2} + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n\right] = 0.$$

Поэтому естественно ввести определение:

Опр. 7.5. Характеристическим уравнением для однородного линейного ОДУ с постоянными коэффициентами (7.16) называется уравнение

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{7.17}$$

При таком определении корни характеристического уравнения (7.17) совпадают с корнями характеристического уравнения соответствующей системы (7.10) с сохранением их кратности.

Это наблюдение очень поможет нам доказывать теоремы о ФСР уравнения (7.16) в различных случаях.

7.5.1. Простейшие решения однородного линейного ОДУ с постоянными коэффициентами

Как мы выяснили в пункте 5.4.3, стр. 58, ненулевая вектор-функция $\vec{y} = \vec{h}\cdot e^{\lambda x}$ является решением системы с постоянными коэффициентами тогда и только тогда, когда

1) $\vec{h}$ есть собственный вектор матрицы A;

2) λ – соответствующее этому вектору собственное значение матрицы A – корень характеристического уравнения.

Поэтому первая координата y вектор функции $\underset{\downarrow}{y} = \vec{h} \cdot e^{\lambda x}$, в силу теоремы 7.1 (стр. 89), является решением однородного линейного ОДУ с постоянными коэффициентами (7.16) тогда и только тогда, когда λ – корень характеристического уравнения. Итак,

Вывод: Функция $y(x) = e^{\lambda x}$ является решением (5.21) тогда и только тогда, когда λ – корень характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

есть уравнение n-ого порядка относительно переменной λ. Основная теорема алгебры говорит, что уравнение n-ого порядка всегда имеет ровно n (быть может, совпадающих, кратных) комплексных корней. При этом, если коэффициенты уравнения действительны, то комплексные корни появляются только комплексно-сопряжёнными парами. Рассмотрим отдельно соответствующие случаи:

7.5.2. Все корни характеристического уравнения действительны и различны

Теорема 7.7 (ФСР однородного линейного уравнения).

Усл. *$\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n \in \mathbb{R}$ – различные n корней характеристического уравнения* (7.17)

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Утв. *Функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_n = e^{\lambda_n x}$ образуют ФСР уравнения* (7.16)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0, \qquad (L[y] = 0) \qquad x \in \langle a, \ b\rangle. \tag{7.16}$$

Общее решение однородного линейного уравнения (7.16) *имеет вид:*

$$y_{oo}(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_ne^{\lambda_n x}, \tag{7.18}$$

где $c_1, \ \ldots, \ c_n \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные.

Доказательство. Поскольку соответствующие вектор-функции $\left\{\underset{\downarrow}{y_1}, \ \ldots, \ \underset{\downarrow}{y_n}\right\}$ составляют ФСР системы (7.10), то (в силу леммы 7.2, стр. 92, линейная независимость решений уравнения равносильна линейной независимости решений соответствующей системы, а в силу теоремы 7.1, стр. 89 между множествами их решений существует взаимно-однозначное соответствие) функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_n = e^{\lambda_n x}$ образуют ФСР уравнения (7.16). А по теореме 7.5 о структуре общего решения однородного линейного уравнения, общее решение есть линейная комбинация элементов ФСР с произвольными коэффициентами. □

Пример 7.1. *Найти решение уравнения:*

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Шаг 1. Решаем характеристическое уравнение.

Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2. \tag{i}$$

Шаг 2. Составляем ФСР.
Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$ действительны и различны, поэтому (по теореме 7.7) ФСР имеет вид

$$\left\{y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{2x}\right\}. \tag{ii}$$

Шаг 3. Выписываем общее решение.
В соответствии с теоремой 7.7,

$$y_{oo}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Ответ: $\qquad y_{oo}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$

7.5.3. Все корни характеристического уравнения различны, но есть пара комплексно-спряжённых

Теорема 7.8 (Часть ФСР для комплексных корней).

Усл. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – *комплексно-сопряжённые корни кратности 1 характеристического уравнения* (7.17).

Утв. *Часть ФСР уравнения* (7.16), *соответствующая корням* $\lambda_{1,2}$, *может быть записана в виде*

$$\left\{e^{\lambda_1 x}, \ e^{\lambda_2 x}\right\}, \qquad \textit{либо} \qquad \left\{\mathrm{Re}\,(\cos\beta x \cdot e^{\alpha x}), \ \mathrm{Im}\,(\sin\beta x \cdot e^{\alpha x})\right\}. \tag{7.19}$$

Доказательство. По теореме 5.17, стр. 60, о части ФСР линейной системы для пары простых комплексно-сопряжённых корней, действительная и мнимая часть соответствующей вектор-функции –

$$\left\{\mathrm{Re}\,\underset{\downarrow}{y_1} = \mathrm{Re}\,\vec{h}_1 e^{\lambda_1 x}, \ \mathrm{Im}\,\underset{\downarrow}{y_2} = \mathrm{Im}\,\vec{h}_1 e^{\lambda_1 x}\right\}$$

составляют часть ФСР системы (7.10), отвечающую корням $\lambda_{1,2}$, то их первые координаты – функции

$$y_1 = \mathrm{Re}\,e^{\lambda_1 x} = \cos\beta x \cdot e^{\alpha x}, \ y_2 = \mathrm{Im}\,e^{\lambda_1 x} = \sin\beta x \cdot e^{\alpha x}$$

образуют соответствующую часть ФСР уравнения (7.16). □

Пример 7.2. *Найти решение уравнения:*

$$y'' + y = 0.$$

Шаг 1. Решаем характеристическое уравнение.
Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид:

$$\lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i) = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i. \tag{i}$$

Шаг 2. Составляем ФСР.
Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$ комплексно-сопряжённые, поэтому (по теореме 7.8) ФСР имеет вид

$$\left\{y_1 = \operatorname{Re} e^{ix} = \cos x, \quad y_2 = \operatorname{Im} e^{\lambda_1 x} = \sin x\right\}. \tag{ii}$$

Шаг 3. Выписываем общее решение.
В соответствии с теоремой 7.5, стр. 93,

$$y_{oo}(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Ответ: $\quad y_{oo}(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$

7.5.4. Случай действительных кратных корней

Теорема 7.9.

Усл. *Характеристическое уравнение имеет корни* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *кратности* $k_1, \ldots, k_s$ *соответственно,* $k_1 + \ldots + k_s = n$.

Утв. *Общее решение линейного однородного уравнения* $L[y] = 0$ *является линейной комбинацией функций вида*

$$y_{m,0} = e^{\lambda_m x}, \quad y_{m,1} = x \cdot e^{\lambda_m x}, \quad y_{m,2} = x^2 \cdot e^{\lambda_m x}, \quad \ldots, \\ y_{m,(k_m-1)} = x^{k_m-1} \cdot e^{\lambda_m x}, \qquad m = \overline{1,\ s}. \tag{7.20}$$

Доказательство. По следствию 5.2, стр. 66, об общем решении линейной системы для случая действительных кратных корней, общее решение соответствующей системы (7.10), стр. 92, есть линейная комбинация всех линейно-независимых собственных векторов, умноженных на соответствующие $e^{\lambda_m x}$, и выражений вида

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ \ldots \\ c_1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ \ldots \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot x^2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{p_j} \\ b_{p_j} \\ \ldots \\ c_{p_j} \end{pmatrix} \cdot x^{p_j}\right] \cdot e^{\lambda_j x}; \qquad j = \overline{1,\ s}, \tag{5.24}$$

где $a_1, \ \ldots, \ c_{p_s}$ – некоторые числа, $p_j = k_j - m_j = k_j - n + r$, а число $r = \operatorname{rang}\ (A - \lambda_j E)$. В силу теоремы 7.1, стр. 89, общее решение нашего линейного уравнения (7.16) есть первая строчка из общего решения системы (7.10), откуда вытекает, что m_j при всех j равно единице, иначе общее решение уравнения (и системы) n-ого порядка состояло бы менее, чем из n частных решений. Составляя линейную комбинацию элементов первой строки общего решения системы (7.10), получаем общее решение уравнения (7.16) вида (7.20). □

Пример 7.3. *Найти решение уравнения:*

$$y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0.$$

Шаг 1. Решаем характеристическое уравнение.
Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид:

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = \lambda^3(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda^3(\lambda - 3)^2 = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_{1,2,3} = 0, \quad \lambda_{4,5} = 3. \tag{i}$$

Шаг 2. Составляем часть ФСР для $\lambda_{1,2,3} = 0$.
Корень характеристического уравнения $\lambda = 0$ имеет кратность 3, поэтому (по теореме 7.9) соответствующая ему часть ФСР имеет вид

$$\left\{e^{\lambda_1 x} = 1, \quad x \cdot e^{\lambda_1 x} = x, \quad x^2 \cdot e^{\lambda_1 x} = x^2\right\}. \tag{ii}$$

Шаг 3. Составляем часть ФСР для $\lambda_{4,5} = 3$.
Корень характеристического уравнения $\lambda = 3$ имеет кратность 2, поэтому (по теореме 7.9) соответствующая ему часть ФСР имеет вид

$$\left\{e^{\lambda_4 x} = e^{3x}, \quad x \cdot e^{\lambda_4 x} = xe^{3x}\right\}. \tag{iii}$$

Шаг 4. Выписываем общее решение.
В соответствии с теоремой 7.5, стр. 93,

$$y_{oo}(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4 + c_5y_5.$$

Ответ: $\quad y_{oo}(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \big(c_4 + c_5x\big) \cdot e^{3x}.$

7.5.5. Есть пара комплексно-сопряжённых корней кратности k

Данный случай представляет из себя естественную комбинацию ситуаций, рассмотренных в двух предыдущих пунктах. Поэтому соответствующая часть ФСР имеет вид:

$$\left\{\operatorname{Re} e^{\lambda x}, \ \operatorname{Re} x \cdot e^{\lambda x}, \ \ldots, \operatorname{Re} x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}; \ \operatorname{Im} e^{\lambda x}, \ \operatorname{Im} x \cdot e^{\lambda x}, \ \ldots, \operatorname{Im} x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}\right\} =$$
$$= \left\{\cos\beta x \cdot e^{\alpha x}, \ \cos x \cdot xe^{\alpha x}, \ \ldots, \cos x \cdot x^{k-1} e^{\alpha x}; \ \sin\beta x \cdot e^{\alpha x}, \ \sin x \cdot xe^{\alpha x}, \ \ldots, \sin x \cdot x^{k-1} e^{\alpha x}\right\}.$$

Пример **7.4.** *Найти решение уравнения:*

$$y^V + 8y''' + 16y' = 0.$$

Шаг 1. Решаем характеристическое уравнение.
Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид:

$$\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = \lambda(\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16) = \lambda(\lambda^2 + 4)^2 = 0, \quad \Longrightarrow$$
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = 2i, \quad \lambda_{4,5} = -2i. \tag{i}$$

Шаг 2. Составляем часть ФСР для $\lambda_1 = 0$.
Корень характеристического уравнения $\lambda = 0$ имеет кратность 1, поэтому (по теореме 7.9) соответствующая ему часть ФСР имеет вид

$$\left\{e^{\lambda_1 x} = 1\right\}. \tag{ii}$$

Шаг 3. Составляем часть ФСР для $\lambda_{2,3,4,5} = \pm 2i$.
Корень характеристического уравнения $\lambda = 2i$ имеет кратность 2, поэтому соответствующая ему часть ФСР имеет вид

$$\left\{\operatorname{Re} e^{\lambda_2 x} = \cos 2x, \quad \operatorname{Re} x \cdot e^{\lambda_2 x} = x\cos 2x; \quad \operatorname{Im} e^{\lambda_2 x} = \sin 2x, \quad \operatorname{Im} x \cdot e^{\lambda_2 x} = x\sin 2x\right\}. \tag{iii}$$

Шаг 4. Выписываем общее решение.
В соответствии с теоремой 7.5, стр. 93,

$$y_{oo}(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4 + c_5y_5.$$

Ответ: $\quad y_{oo}(x) = c_1 + \big(c_2 + c_3x\big) \cdot \cos 2x + \big(c_4 + c_5x\big) \cdot \sin 2x.$

7.6. Неоднородные линейные ОДУ n-ого порядка. Метод вариации постоянных

Рассмотрим два линейных уравнения: неоднородное

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x),\qquad (L[y]=f(x))\qquad x\in\langle a,\ b\rangle \tag{7.21}$$

и соответствующее ему однородное:

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0,\qquad (L[y]=0)\qquad x\in\langle a,\ b\rangle. \tag{7.22}$$

Теорема 7.10.

Усл. *Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ образуют ФСР однородного линейного уравнения (7.22), а функция $f(x)$ и коэффициенты $a_0(x)$, $\ldots$, $a_{n-1}(x)$ непрерывны на $C\langle a,\ b\rangle$.*

Утв. *Общее решение неоднородного линейного уравнения (7.21) имеет вид*

$$\vec{y}(x)=c_1(x)\vec{y}_1(x)+c_2(x)\vec{y}_2(x)+\ldots+c_n(x)\vec{y}_n(x), \tag{7.23}$$

где функции $c_k(x)$ находятся как решения системы

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \ldots \\ c_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ f(x) \end{pmatrix} \tag{7.24}$$

Доказательство. Поставим нашему неоднородному уравнению в соответствие систему

$$\begin{cases} u_0'(x)=u_1(x); \\ u_1'(x)=u_2(x); \\ \qquad\ldots \\ u_{n-2}'(x)=u_{n-1}(x); \\ u_{n-1}'(x)=-a_{n-1}(x)y^{(n-1)}-\ldots-a_2(x)y''-a_1(x)y'-a_0(x)y+f(x), \qquad x\in\langle a,\ b\rangle, \end{cases} \tag{7.25}$$

По теореме 7.1, стр. 7.1, общему решению $y(x)$ ОДУ (7.21) соответствует общее решение $\vec{u}(x)$

$$\vec{u}(x)\equiv\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \ldots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \ldots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}\equiv \underset{\downarrow}{y}(x),\qquad x\in\langle a,\ b\rangle. \tag{6.5}$$

В силу теоремы 5.20, стр. 5.20, общее решение системы (7.25) имеет вид

$$\vec{u}_{\text{оно}}=c_1(x)\vec{u}_1+\ldots+c_n(x)\vec{u}_n,$$

где $\vec{u}_k(x)=\underset{\downarrow}{y_k}(x)$ – элементы ФСР соответствующей однородной системы, а функции $c_k(x)$ находятся из

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \ldots \\ c_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

Но в нашем случае $\vec{u}_k(x) = \underset{\downarrow}{y_k}(x)$ в силу (6.5), а вектор-функция правой части имеет только одну ненулевую компоненту:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы. □

Пример 7.5. *Найти решение уравнения:*

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

ЭТАП 1. РЕШАЕМ ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ.

$$y_o'' - 2y_o' + y_o = 0.$$

Шаг 1. Решаем характеристическое уравнение.
Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_{1,2} = 1. \tag{i}$$

Шаг 2. Составляем ФСР однородного уравнения.
Корень характеристического уравнения $\lambda = 1$ имеет кратность 2, поэтому (по теореме 7.9) соответствующая ему часть ФСР имеет вид

$$\{e^x, \ \ x \cdot e^x\}. \tag{ii}$$

Шаг 3. Выписываем общее решение однородного уравнения.
В соответствии с теоремой 7.5, стр. 93,

$$y_{oo}(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 x \cdot e^x. \tag{iii}$$

ЭТАП 2. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ.
Составим систему (7.24) для нашего случая:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{x} \end{pmatrix}$$

Сократив на e^x и обратив матрицу системы, получаем:

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & (x+1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+1) & -x \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x}, \end{pmatrix}$$

откуда находим

$$\begin{cases} c_1' = -1 \\ c_2' = \frac{1}{x} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} c_1(x) = -x + c_3 \\ c_2(x) = \ln|x| + c_4. \end{cases}$$

Осталось подставить найденные $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в (iii) вместо констант c_1 и c_2. При этом, как всегда переименуем наши новые произвольные постоянные обратно в c_1 и c_2.

$$y_{оно}(x) = c_3 e^x + c_4 x \cdot e^x - xe^x + \ln|x| \cdot xe^x = \underbrace{c_3}_{c_1} e^x + \underbrace{(c_4 - 1)}_{c_2} x \cdot e^x + x \ln|x| \cdot e^x.$$

Ответ: $\qquad y_{оно}(x) = c_1 e^x + c_2 x \cdot e^x + x \ln|x| \cdot e^x.$

7.7. Неоднородные линейные ОДУ с постоянными коэффициентами. Случай квазиполинома в правой части

7.7.1. Дифференциальный полином

Опр. 7.6. Выражение $M\left(\frac{d}{dx}\right)$ называется **дифференциальным полиномом**, если заменив в нём оператор дифференцирования на переменную λ, мы получим полином от λ, например:

$$M\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{d}{dx}\right) + a_0, \tag{7.26}$$

есть дифференциальный полином, соответствующий полиному

$$M(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0. \tag{7.27}$$

Заметим, что пользуясь этими обозначениями, мы можем переписать линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \qquad (L[y] = f(x)) \qquad x \in \langle a,\ b\rangle \tag{7.28}$$

в виде

$$M\left(\frac{d}{dx}\right) y(x) = f(x),$$

а соответствующее ему характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

в виде

$$M(\lambda) = 0.$$

Поэтому эти обозначения исключительно удобны для отслеживания связи между линейным уравнением с постоянными коэффициентами и его характеристическим уравнением. Эта связь будет использована нами в доказательстве теоремы 7.12, стр. 106. А пока несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 7.3.

Усл. *Число μ является корнем кратности k характеристического уравнения.*

Утв. *Оператор L левой части уравнения (7.28) можно представить в виде*

$$M\left(\frac{d}{dx}\right) = M_{n-k}\left(\frac{d}{dx}\right) \cdot \left(\frac{d}{dx} - \mu\right)^k,$$

где M_{n-k} – дифференциальный полином такого же вида, но степени $n-k$. При этом $M_{n-k}(\mu) \neq 0$.

Доказательство.
Запишем характеристическое уравнение в виде $M(\lambda) = 0$. Так как μ является его корнем кратности k, то полином левой части распадается на множители:

$$M(\lambda) = M_{n-k}(\lambda) \cdot (\lambda - \mu)^k, \qquad M_{n-k}(\mu) \neq 0,$$

где M_{n-k} – некоторый полином степени $n-k$. Соответствующий дифференциальный полином $M_{n-k}\left(\frac{d}{dx}\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}-\mu\right)^k$, если раскрыть скобки, даст в результате $M\left(\frac{d}{dx}\right)$, поскольку его коэффициенты получатся из коэффициентов $M_{n-k}\left(\frac{d}{dx}\right)$ в результате в точности тех же действий, что и коэффициенты $M(\lambda)$ из коэффициентов $M_{n-k}(\lambda)$. □

Лемма 7.4.

Усл. *Функция* $f(x)\in C^n\langle a,\ b\rangle$.

Утв. *Справедливо равенство*

$$M\left(\frac{d}{dx}\right)[f(x)e^{\mu x}] = e^{\mu x}\cdot M\left(\frac{d}{dx}+\mu\right)[f(x)]\,.$$

Доказательство.
Воспользуемся формулами Лейбница[12]

$$(f(x)g(x))^{(l)} = \sum_{m=1}^{l} C_l^m f^{(m)}(x)g(x)^{(l-m)}$$

и бинома Ньютона

$$(a+b)^l = \sum_{m=1}^{l} C_l^m a^m b^{l-m}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^l [f(x)e^{\mu x}] = \sum_{m=1}^{l} C_l^m f^{(m)}(x)\left[e^{\mu x}\right]^{(l-m)} = e^{\mu x}\sum_{m=1}^{l} C_l^m f^{(m)}(x)\mu^{l-m} =$$
$$= e^{\mu x}\sum_{m=1}^{l} C_l^m \left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x)\cdot\mu^{l-m} = \Big[\text{по формуле бинома Ньютона}\Big] = e^{\mu x}\cdot\left(\frac{d}{dx}+\mu\right)^l [f(x)]\,.$$

Подставляя это в выражение $M\left(\frac{d}{dx}\right)[f(x)e^{\mu x}] = \sum\limits_{l=1}^{n} a_l\left(\frac{d}{dx}\right)^l [f(x)e^{\mu x}]$, где $a_n = 1$, получим требуемое равенство. □

7.7.2. Частное решение линейного ОДУ с постоянными коэффициентами в случае квазиполинома в правой части

Мы продолжаем рассматривать неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x), \qquad (L[y] = f(x)) \qquad x\in\langle a,\ b\rangle \tag{7.28}$$

и соответствующее ему однородное:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0, \qquad (L[y] = 0) \qquad x\in\langle a,\ b\rangle. \tag{7.29}$$

[12] Число $C_l^m = \frac{l!}{(l-m)!\,m!}$ называется «число сочетаний из l по m».

Теорема 7.11.

Усл. *Функция $f(x)$ имеет вид $f_1(x)+\ldots+f_m(x)$, а функции $y_1(x)$, …, $y_m(x)$ являются решениями неоднородных линейных уравнений*

$$L[y_1]=f_1(x), \quad \ldots \quad \vec{L}[y_m]=f_m(x).$$

Утв. *Функция $y(x)=y_1(x)+\ldots+y_m(x)$ является решением неоднородного уравнения*

$$L[y]=f(x)=f_1(x)+\ldots+f_m(x).$$

Доказательство.
Сложив равенства

$$L[y_1]=f_1(x), \quad \ldots \quad \vec{L}[y_m]=f_m(x)$$

и воспользовавшись свойствами линейности оператора $L[y]$ (см. определение 5.11, стр. 44, и лемму 7.1, стр. 90), получим, что $y(x)=y_1(x)+\ldots+y_m(x)$ является решением неоднородноого уравнения $L[y]=f(x)$. □

Опр. 7.7. Функция $f(x)$ называется **квазиполиномом (квазимногочленом)**, если

$$f(x)=p(x)\cdot e^{\mu x}, \tag{7.30}$$

где $p(x)$ – полином от x.
Сумма квазиполиномов также считается квазиполиномом, в частности, функция $p_1(x)\cos\beta x\ \cdot\ e^{\alpha x}\ +\ p_2(x)\sin\beta x\ \cdot\ e^{\alpha x}$ есть квазиполином, так как, пользуясь формулой Эйлера

$$\cos\beta x=\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}, \qquad \sin\beta x=\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i},$$

её можно представить в виде

$$p_1(x)\frac{e^{(\alpha+i\beta)x}+e^{(\alpha-i\beta)x}}{2}+p_2(x)\frac{e^{(\alpha+i\beta)x}-e^{(\alpha-i\beta)x}}{2i}=\left[\begin{array}{l}\mu=\alpha+i\beta\\ \bar{\mu}=\alpha-i\beta\end{array}\right]=$$
$$=\frac{p_1(x)+p_2(x)}{2}\cdot e^{\mu x}+\frac{p_1(x)+ip_2(x)}{2}\cdot e^{\bar{\mu}x}.$$

Поэтому одним из важных частных случаев квазиполинома является

$$f(x)=p_1(x)\cdot\cos\beta x e^{\alpha x}+p_2(x)\cdot\sin\beta x e^{\alpha x}=\tilde{p}_1(x)\cdot e^{\mu x}+\tilde{p}_2(x)\cdot e^{\bar{\mu}x}. \tag{7.31}$$

Замечание 7.2. В дальнейшем для упрощения текстовых формулировок мы будем часто говорить «полином имеет степень r», подразумевая, что его степень не превосходит r.

Теорема 7.12.

Усл. *Функция $p(x)$ – полином степени r, а число μ является корнем характеристического уравнения кратности k. (Если μ – не корень, то будем полагать $k = 0$.)*

Утв 1. *Если $f(x) = p(x) \cdot e^{\mu x}$, то существует $g(x)$ – полином степени r такой, что вектор-функция*

$$y(x) = x^k g(x) \cdot e^{\mu x} \tag{7.32}$$

является частным решением неоднородного линейного уравнения (7.28).

Утв 2. *Если $f(x) = p_1(x) \cdot \cos \beta x e^{\alpha x} + p_2(x) \cdot \sin \beta x e^{\alpha x}$, то существуют $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – полиномы степени r такие, что функция*

$$y(x) = x^k g_1(x) \cdot \sin \beta x \cdot e^{\alpha x} + x^k g_2(x) \cdot \cos \beta x \cdot e^{\alpha x} \tag{7.33}$$

является частным решением неоднородного линейного уравнения (7.28).

Доказательство.

Докажем Утв. 1. В силу леммы 7.3, стр. 103, поскольку μ – корень характеристического уравнения кратности k, оператор левой части (7.28) можно представить в виде

$$M\left(\frac{d}{dx}\right) = M_{n-k}\left(\frac{d}{dx}\right) \cdot \left(\frac{d}{dx} - \mu\right)^k, \tag{i}$$

где M_{n-k} – дифференциальный полином степени $n-k$. Пусть он имеет вид

$$M_{n-k}\left(\frac{d}{dx}\right) = b_{n-k}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k} + \ldots + b_1\left(\frac{d}{dx}\right) + b_0. \tag{ii}$$

Пусть, кроме того, функция $f(x) = p(x)e^{\mu x}$ имеет вид

$$f(x) = e^{\mu x} \cdot (f_r x^r + \ldots + f_1 x + f_0). \tag{iii}$$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения (7.28) в виде

$$x^k g(x) \cdot e^{\mu x} = x^k (c_r x^r + \ldots + c_1 x + c_0) \cdot e^{\mu x}.$$

Подставив его в уравнение

$$M\left(\frac{d}{dx}\right) y(x) = f(x) = p(x)e^{\mu x}.$$

По лемме 7.4, стр. 104, в левой части уравнения получаем:

$$M\left(\frac{d}{dx}\right)\left[x^k g(x) \cdot e^{\mu x}\right] = e^{\mu x} M\left(\frac{d}{dx} + \mu\right)\left[x^k g(x)\right].$$

Поэтому после сокращения на $e^{\mu x}$ равенство $M\left(\frac{d}{dx}\right)\left[x^k g(x) \cdot e^{\mu x}\right] = p(x)e^{\mu x}$ примет вид

$$M\left(\frac{d}{dx} + \mu\right)\left[x^k g(x)\right] = p(x). \tag{iv}$$

Подставив сюда (i), получаем

$$M_{n-k}\left(\frac{d}{dx} + \mu\right) \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^k \left[x^k g(x)\right] = p(x).$$

Так как $g(x)$ – полином степени r, то $\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left[x^k g(x)\right]$ – полином степени r, причём (по формуле Лейбница) его старший коэффициент будет равен старшему коэффициенту $g(x)$ – числу c_r. Тогда (iv) принимает вид

$$M_{n-k}\left(\frac{d}{dx}+\mu\right)[c_r x^r + g_1(x)] = p(x), \tag{v}$$

где $g_1(x)$ – полином степени $r-1$. Из равенства (v), очевидно, единственным образом находится коэффициент c_r – он просто равен старшему коэффициенту $p(x)$, делённому на $M_{n-k}(\mu)$[13]. Далее, из (v), перенеся $M_{n-k}\left(\frac{d}{dx}+\mu\right)[c_r x^r]$ в правую часть и приведя подобные, получим в правой части полином $p_1(x)$ степени $r-1$, коэффициенты которого однозначно опеределяются по коэффициентам $p(x)$, M_{n-k} и найденному числу c_r. И у нас получается задача точно такого же вида, как (v), только степень неизвестного подинома $g_1(x)$ и полинома правой части на единицу меньше:

$$M_{n-k}\left(\frac{d}{dx}+\mu\right)[g_1(x)] = p_1(x).$$

Старший коэффициент $g_1(x)$ определяется как отношение старшего коэффициента $p_1(x)$ к $M_{n-k}(\mu)$. Продолжая этот процесс, на шаге с номером $r+1$ получим последний коэффициент $g_1(x)$.
Осталось по $g_1(x)$ восстановить $g(x)$. Вспомним, какая между ними связь.

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left[x^k g(x)\right] = c_r x^r + g_1(x).$$

Отсюда, проинтегрировав k раз, получим $x^k g(x)$, причём, если положить все появляющиеся константы интегрирования равными нулю, то однозначно. Тогда, поделив на x^k, мы получим именно полином $\Big($от слагаемых типа $\frac{c}{x^m}$ мы избавились, когда занулили константы интегрирования$\Big)$, и степень этого полинома равна r.

Докажем утверждение 2. В соответствии с равенством 7.31, стр. 105, правую часть

$$f(x) = p_1(x)\cdot\cos\beta x e^{\alpha x} + p_2(x)\cdot\sin\beta x e^{\alpha x}$$

можно представить в виде

$$f(x) = \tilde{p}_1(x)\cdot e^{\mu x} + \tilde{p}_2(x)\cdot e^{\bar{\mu} x},$$

где $\mu = \alpha + i\beta$, а $\bar{\mu} = \alpha - i\beta$.
Рассмотрим два вспомогательных неоднородных уравнения:

$$L[y] = \tilde{p}_1(x)\cdot e^{\mu x}, \qquad \text{и} \qquad L[y] = \tilde{p}_2(x)\cdot e^{\bar{\mu} x}.$$

Применим к каждой из них уже доказанное утверждение 1. с комплексными μ, $\bar{\mu}$ и $\tilde{\vec{p}}_1(x)$ $\tilde{\vec{p}}_2(x)$. Получим частные решения рассматриваемых систем

$$y_1(x) = x^k g_1(x)\cdot e^{\mu x}, \qquad \text{и} \qquad y_2(x) = x^k g_2(x)\cdot e^{\bar{\mu} x},$$

где полиномы $g_1(x)$ и $g_2(x)$ имеют степень r, а k – кратность комплексно-сопряжённых корней μ, $\bar{\mu}$. По теореме 7.11, стр. 105, сумма этих частных решений вспомогательных систем есть

[13] Из утверждения леммы 7.3 мы знаем, что $M_{n-k}(\mu) \neq 0$, поэтому данная операция правомочна.

частное решение исходной системы. Таким образом, частным решением уравнения $L[y] = f(x)$ является

$$\begin{aligned}
y_1(x) + y_2(x) &= x^k g_1(x) \cdot e^{\mu x} + x^k g_2(x) \cdot e^{\bar{\mu} x} = \\
&= \left[\text{по формуле Эйлера } \; e^{(\alpha \pm i\beta)x} = \Big(\cos\beta x \pm i \sin\beta x\Big)\, e^{\alpha x}\right] = \\
&= x^k g_1(x) \cdot \Big(\cos\beta x + i\sin\beta x\Big)\, e^{\alpha x} + x^k g_2(x) \cdot \Big(\cos\beta x - i \sin\beta x\Big)\, e^{\alpha x} = \\
&= x^k \Big(g_1(x) + g_2(x)\Big) \cos\beta x \cdot e^{\alpha x} + x^k \Big(i g_1(x) - i g_2(x)\Big) \sin\beta x \cdot e^{\alpha x} = \\
&= x^k\, \tilde{g}_1(x) \cdot \cos\beta x \cdot e^{\alpha x} + x^k\, \tilde{g}_2(x) \cdot \sin\beta x \cdot e^{\alpha x}.
\end{aligned}$$

□

Пример 7.6. *Найти решение уравнения:*

$$y'' - 3y' + 2y = e^x + 10 \sin x = f_1(x) + f_2(x).$$

Этап 1. ИЩЕМ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ
Шаг 1. Решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Шаг 2. Составляем ФСР однородного уравнения
В нашем случае корни действительны и различны, поэтому ФСР имеет вид:

$$\left\{e^{\lambda_1 x} = e^x; \quad e^{\lambda_2 x} = e^{2x}\right\}.$$

Шаг 3. Выписываем общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{оо}}(x) = c_1 y_{o1}(x) + c_2 y_{o2}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}. \tag{i}$$

Этап 2. ИЩЕМ ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ $f_1 = e^x$
На этом этапе мы будем решать вспомогательное уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = f_1(x) = e^x. \tag{ii}$$

Шаг 1. Определяем вид частного решения
Так как e^x – квазиполином с полиномом $p(x) \equiv 1$ степени $r = 0$, а $\lambda = 1$ – корень характеристического уравнения кратности $k = 1$, то, по теореме 7.12, существует квазиполином вида $y_1 = x^k g_1(x) e^x$ с полиномом $g(x)$ степени $r = 0$, то есть $g_1(x) \equiv a_1 = const$:

$$y_{\text{ч}1} = x\, a_1\, e^x. \tag{iii}$$

Шаг 2. Находим коэффициенты полинома $g_1(x)$
Подставляем (iii) в уравнение (ii), получаем

$$a_1\left((x + 2) - 3(x + 1) + 2x\right) e^x = e^x.$$

Сокращая на e^x и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x:

$$\text{при } x^0: \quad a_1(2 - 3) = 1, \qquad \text{при } x^1: \quad a_1(1 - 3 + 2) = 0,$$

находим $a_1 = -1$ и наше первое частное решение:

$$y_{ч1} = -x\,e^x. \tag{iv}$$

Этап 3. ИЩЕМ ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ $f_2 = 10\sin x$
На этом этапе мы будем решать вспомогательное уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = f_2(x) = 10\sin x. \tag{v}$$

Шаг 1. Определяем вид частного решения
Так как $10\sin x$ – квазиполином с полиномом $p(x) \equiv 10$ степени $r = 0$, а $\lambda = i$ – не корень характеристического уравнения ($k = 0$), то, по теореме 7.12, существует квазиполином вида $y_{ч2} = x^k g_1(x)\cos x + x^k g_2(x) cosx \sin x$[14] с полиномами $g_{1,2}(x)$ степени $r = 0$, то есть $g_1(x) \equiv b_1 = const, \qquad g_2(x) \equiv b_2 = const:$

$$y_{ч2} = b_1\,\cos x + b_2\sin x. \tag{vi}$$

Шаг 2. Находим коэффициенты полинома $g_{1,2}(x)$
Подставляем (vi) в уравнение (v), получаем

$$b_1\,(-cosx + 3\sin x + 2\cos x) + b_2\,(-\sin x - 3\cos x + 2\sin x) = 10\sin x.$$

Приравнивая коэффициенты синусах и косинусах (а вобщем случае ещё и при соответствующих степенях x):

$$\text{при } \cos x: \quad b_1 - 3b_2 = 0, \qquad \text{при } \sin x: \quad 3b_1 + b_2 = 10,$$

находим $b_1 = 3, \ \ b_3 = 1$ и наше второе частное решение:

$$y_{ч2} = 3\cos x + \sin x. \tag{vii}$$

Этап 4. ПОЛУЧАЕМ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ
Для этого сложим общее решение однородного уравнения (i) с частным (iv), соответствующим $f_1(x)$, и со вторым частным (vii), соответствующим $f_2(x)$:
Ответ: $y_{оно} = c_1e^x + c_2e^{2x} - x\,e^x + 3\cos x + \sin x.$

[14] Важно отметить, что хотя квазиполином правой части уравнения содержит лишь $\sin x$, нам обязательно надо искать решение, содержащее и $\sin x$, и $\cos x$, а решения только с sin можно и не найти. Однако, можно было бы искать $y_{ч2}$ как мнимую часть частного решения для $f_1(x) = 10e^{ix}$ – результат был бы тот же самый.

8. Доказательство ТСЕ

Теорема 8.1 (Существование и единственность решения задачи Коши).

Усл. *$f_1(x,\ \vec{y}),\ \ldots,\ f_n(x,\ \vec{y}) \in C\left(\overline{\Pi}\right)$, где*

$$\overline{\Pi} = \left\{(x,\ y):\quad |x - x_0| \leqslant a,\ \ |y_i - y_{0i}| \leqslant b_i,\quad i = \overline{1,\ n},\right\}.$$

Кроме того, число $M = \max\limits_{i,\ \Pi} |f_i(x,\ \vec{y})|$, а функции $f_1,\ \ldots,\ f_n$ удовлетворяют условию Липшица:

$$\exists\, L > 0: \quad \forall (x;\ \tilde{y}_1,\ \ldots,\ \tilde{y}_n),\ (x;\ \bar{y}_1,\ \ldots,\ \bar{y}_n) \in \Pi, \quad \forall\, j = \overline{1,\ n} \quad \text{вып. нер-во}$$

$$\Big| f_j(x;\ \tilde{y}_1,\ \ldots,\ \tilde{y}_n) - f_j(x;\ \bar{y}_1,\ \ldots,\ \bar{y}_n) \Big| \leqslant L \left| \tilde{\vec{y}} - \bar{\vec{y}} \right|.$$

Утв. *$\exists\,!$ решение $\vec{y} = \vec{y}(x)$ задачи Коши (2.1), определённое при $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$, где*

$$h = \min\left\{a,\ \frac{b_1}{M},\ \ldots,\ \frac{b_n}{M}\right\}.$$

В этом разделе мы приведём для полноты картины доказательство ТСЕ решения задачи Коши в самом общем случае – для нормальной системы ОДУ, то есть системы вида (стр. 41)

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x;\ y_1,\ \ldots,\ y_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x;\ y_1,\ \ldots,\ y_n), \end{cases} \tag{8.1}$$

где $f_1,\ \ldots,\ f_n$ – известные функции. Эту систему мы в векторном виде записываем так:

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x;\ \vec{y}). \tag{8.2}$$

8.1. Теорема Арцела – Асколи

Напомним классическую теорему математического анализа (см. 1 семестр):

Теорема 8.2 (Больцано – Вейерштрасса в $\mathbb{R}$).

Усл. *Числовая последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.*

Утв. *$\exists$ её сходящаяся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.*

Следствие 8.1 (Больцано – Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$).

Усл. *Последовательность векторов $\{\vec{\alpha}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена по модулю.*

Утв. *$\exists$ её сходящаяся подпоследовательность $\{\vec{\alpha}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.*

Опр. 8.1. Множество Φ функций $\vec{\varphi}(x)$ называется **равномерно ограниченым на** $x \in \langle a,\ b\rangle$ если

$$\exists\, M > 0: \quad \forall\, \vec{\varphi} \in \Phi \quad \forall\, x \in \langle a,\ b\rangle \qquad |\vec{\varphi}(x)| < M. \tag{8.3}$$

Опр. 8.2. Множество Φ функций $\vec{\varphi}(x)$ называется **равностепенно непрерывным на** $x \in \langle a,\ b\rangle$ если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall \vec{\varphi} \in \Phi \quad \forall\, x',\ x'' \in \langle a,\ b\rangle : \quad |x' - x''| < \delta \qquad |\vec{\varphi}(x') - \vec{\varphi}(x'')| < \varepsilon. \tag{8.4}$$

Теорема 8.3 (Арцела – Асколи).

Усл. *Бесконечное множество Φ функций $\vec{\varphi}(x)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на $x \in \langle a,\ b\rangle$ – промежутке конечной длины.*

Утв. *$\exists$ последовательность $\{\vec{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{\vec{\varphi}(x)\}$, равномерно сходящаяся на $x \in \langle a,\ b\rangle$.*

Доказательство. Занумеруем все рациональные числа промежутка $\langle a,\ b\rangle$ в произвольном порядке[15]:

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots$$

Рассмотрим числовое множество Φ_1 значений функций $\vec{\varphi}(r_1)$. Оно ограничено числом M. По следствию8.1 (Больцано – Вейерштрасса), существует сходящаяся числовая последовательность

$$\{\vec{\varphi}_{n1}(r_1)\} : \qquad \exists \lim_{n\to\infty} \vec{\varphi}_{n1}(r_1).$$

Рассмотрим числовое множество Φ_2 значений функций $\{\vec{\varphi}_{n1}(r_2)\}$. Оно также ограничено числом M. По теореме8.2 существует сходящаяся числовая последовательность

$$\{\vec{\varphi}_{n2}(r_2)\} : \qquad \exists \lim_{n\to\infty} \vec{\varphi}_{n2}(r_2).$$

Продолжая этот процесс, построим последовательность

$$\{\vec{\varphi}_{nk}(x)\}_{n,k=1}^{\infty} \subset \Phi : \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \lim_{n\to\infty} \vec{\varphi}_{nk}(r_k).$$

Теперь введём последовательность функций

$$\vec{\varphi}_n(x) = \vec{\varphi}_{nn}(x), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что поскольку каждая следующая выбранная нами последовательность $\{\vec{\varphi}_{nk}(x)\}$ содержится в предыдущей $\left\{\vec{\varphi}_{n(k-1)}(x)\right\}$ и, следовательно, сходится во всех точках

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,$$

то для $\{\vec{\varphi}_n(x)\}$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \exists \lim_{n\to\infty} \vec{\varphi}_n(r_k).$$

Тогда по критерию Коши сходимости последовательности числовых векторов,

$$\forall\, r_k \ \ \forall\, \varepsilon \ \ \exists\, N = N(\varepsilon,\ r_k) \in \mathbb{N} : \forall\, n \geqslant N,\ \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad |\varphi_n(r_k) - \varphi_{n+p}(r_k)| < \varepsilon. \tag{8.5}$$

С другой стороны, в силу равностепенной непрерывности, для того же ε

$$\exists\, \delta > 0 : \quad \forall \vec{\varphi} \in \Phi \quad \forall\, x',\ x'' \in \langle a,\ b\rangle : \quad |x' - x''| < \delta \qquad |\vec{\varphi}(x') - \vec{\varphi}(x'')| < \varepsilon. \tag{8.6}$$

Поскольку $\langle a,\ b\rangle$ – промежуток конечной длины, его можно разбить на конечное число m полуинтервалов

$$\langle a,\ b\rangle = \langle a,\ b_1) \cup [b_1,\ b_2) \cup \ldots \cup [b_{m-1},\ b\rangle = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m$$

[15] Поскольку множество $\mathbb{Q}$ счётно, это можно сделать.

На каждом построенном промежутке $I_k = [b_{k-1},\ b_k)$ выберем рациональное число:

$$\tilde{r}_1 \in I_1 = \langle a,\ b_1), \quad \tilde{r}_2 \in I_2 = [b_1,\ b_2), \quad \ldots, \quad \tilde{r}_m \in I_m = [b_{m-1},\ b\rangle.$$

Теперь для произвольного значения $x \in \langle a,\ b\rangle$ найдём полуинтервал I_k, которому x принадлежит, и выбрав

$$N = \max\left\{N(\varepsilon,\ \tilde{r}_1),\ N(\varepsilon,\ \tilde{r}_2),\ \ldots,\ N(\varepsilon,\ \tilde{r}_m)\right\},$$

применим полученные выше неравенства (8.5) и (8.6) для оценки:

$$\begin{aligned}|\vec{\varphi}_n(x) - \vec{\varphi}_{n+p}(x)| &= |\vec{\varphi}_n(x) - \vec{\varphi}_n(\tilde{r}_k) + \vec{\varphi}_n(\tilde{r}_k) - \vec{\varphi}_{n+p}(\tilde{r}_k) + \vec{\varphi}_{n+p}(\tilde{r}_k) - \vec{\varphi}_{n+p}(x)| \leqslant \\ &\leqslant |\vec{\varphi}_n(x) - \vec{\varphi}_n(\tilde{r}_k)| + |\vec{\varphi}_n(\tilde{r}_k) - \vec{\varphi}_{n+p}(\tilde{r}_k)| + |\vec{\varphi}_{n+p}(\tilde{r}_k) - \vec{\varphi}_{n+p}(x)| < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Отсюда по критерию Коши равномерной сходимости функциональной последовательности получаем, что построенная последовательность $\vec{\varphi}_n(x) = \vec{\varphi}_{nn}(x)$ сходится равномерно на $\langle a,\ b\rangle$. $\square$

8.2. Сведение задачи Коши к интегральному уравнению

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \vec{y}\,' = \vec{f}\,(x;\ \vec{y}\,); \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0. \end{cases} \tag{8.7}$$

Проинтегрируем обе части уравнения по промежутку $[x_0,\ x]$ и учтём начальное условие:

$$\vec{y}(x) - \vec{y}(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}\,(t;\ \vec{y}(t))\,dt. \tag{8.8}$$

Легко заметить, что задача нахождения функции $y(x)$ из уравнения (8.8) эквивалентна задаче Коши (8.7), то есть:

1) каждое решение (8.8) является решением (8.7);

2) каждое решение (8.7) является решением (8.8).

Заметим, что каждое решение (8.8) является дифференцируемым, поскольку правая часть (8.8) дифференцируема по x.

8.3. Построение последовательности приближённых решений

Рассмотрим задачу

$$\vec{y}(x) - \vec{y}(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}\,(t;\ \vec{y}(t))\,dt. \tag{8.8}$$

Пусть величина h определена формулой в теореме 5.2, стр. 43. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ разобьём отрезки $[x_0,\ x_0 + h]$ и $[x_0 - h,\ x_0]$ на частичные отрезки длины $\frac{h}{k}$ точками

$$b_{km} = x_0 + \frac{hm}{k}, \qquad a_{km} = x_0 - \frac{hm}{k}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad m = \overline{1,\ k}.$$

Затем вектор-функцию $\vec{\varphi}_k(x)$ с координатами $\varphi_{1k},\ \ldots \varphi_{nk}$ строим по следующему алгоритму ломаных Эйлера:

1) Для каждого $i = \overline{1,\ n}$ из точки $(x_0,\ y_{i0})$ выпускаем отрезок под углом $\operatorname{tg}\alpha = f_i\,(x_0,\ \vec{y}_0)$ до точек с абсциссами a_{k1} и b_{k1}. Так мы получаем вектор-функцию $\vec{\varphi}_k(x)$ на отрезке $[a_{k1},\ b_{k1}]$.

2) Для каждого $i = \overline{1,\ n}$ из правого конца построенного отрезка – точки с абсциссой b_{k1} выпускаем отрезок под углом $\operatorname{tg}\alpha = f_i\left(b_{k1},\ \vec{f}(b_{k1},\ \vec{\varphi}_k(b_{k1})\right)$ до точки с абсциссой b_{k2}. Аналогично из левого конца – точки с абсциссой a_{k1} выпускаем отрезок под углом $\operatorname{tg}\alpha = f_i\left(a_{k1},\ \vec{f}(a_{k1},\ \vec{\varphi}_k(a_{k1})\right)$ до точки с абсциссой a_{k2}. Так мы получаем вектор-функцию $\vec{\varphi}_k(x)$ на отрезке $[a_{k2},\ b_{k2}]$.

3) Для каждого $i = \overline{1,\ n}$ из правого конца построенной ломаной – точки с абсциссой b_{k2} выпускаем отрезок под углом $\operatorname{tg}\alpha = f_i\left(b_{k2},\ \vec{f}(b_{k2},\ \vec{\varphi}_k(b_{k2})\right)$ до точки с абсциссой b_{k3}. Аналогично из левого конца ломаной – точки с абсциссой a_{k2} выпускаем отрезок под углом $\operatorname{tg}\alpha = f_i\left(a_{k2},\ \vec{f}(a_{k2},\ \vec{\varphi}_k(a_{k2})\right)$ до точки с абсциссой a_{k3}. Так мы получаем вектор-функцию $\vec{\varphi}_k(x)$ на отрезке $[a_{k3},\ b_{k3}]$.

4) и так далее

5) На шаге с номером m для каждого $i = \overline{1,\ n}$ из правого конца построенной ломаной – точки с абсциссой $b_{k(m-1)}$ выпускаем отрезок под углом $\operatorname{tg}\alpha = f_i\left(b_{k(m-1)},\ \vec{f}(b_{k(m-1)},\ \vec{\varphi}_k(b_{k(m-1)})\right)$ до точки с абсциссой b_{km}. Аналогично из левого конца ломаной – точки с абсциссой $a_{k(m-1)}$ выпускаем отрезок под углом $\operatorname{tg}\alpha = f_i\left(a_{k(m-1)},\ \vec{f}(a_{k(m-1)},\ \vec{\varphi}_k(a_{k(m-1)})\right)$ до точки с абсциссой a_{km}. Так мы получаем вектор-функцию $\vec{\varphi}_k(x)$ на отрезке $[a_{km},\ b_{km}]$.

6) После шага с номером k мы получим вектор-функцию $\vec{\varphi}_k(x)$ на отрезке $[a_{kk},\ b_{kk}] = [x_0 - h,\ x_0 + h]$.

Заметим, что продолжать этот алгоритм дальше (более, чем на один шаг) мы уже не можем, так как функция $\vec{f}\left(x,\ \vec{\varphi}_k(b_{k(k+1)})\right)$ и $\vec{f}\left(x,\ \vec{\varphi}_k(a_{k(k+1)})\right)$ может быть неопределена, так как точки $\left(b_{k(k+1)},\ \varphi_{ik}(b_{k(k+1)})\right)$ и $\left(a_{k(k+1)},\ \varphi_{ik}(a_{k(k+1)})\right)$ могут оказаться за пределами параллелепипеда

$$\overline{\Pi} = \left\{(x,\ y): \quad |x - x_0| \leqslant a,\quad |y_i - y_{0i}| \leqslant b_i,\quad i = \overline{1,\ n},\right\}.$$

Они, например, наверняка окажутся за его пределами, если $f_i(x,\ \vec{y}(x)) \equiv M$ для всех $i = \overline{1,\ n}$ и всюду в $\overline{\Pi}$.

Изучим построенную последовательность функций. Обозначим через D_k отрезок $[x_0 - h,\ x_0 + h]$, из которого выкинуты точки $a_{km},\ b_{km}$ при всех $m = \overline{1,\ k}$:

$$D_k = [x_0 - h,\ x_0 + h] \diagdown \left\{a_{k1},\ \ldots,\ a_{k(k-1)};\ b_{k1},\ \ldots,\ b_{k(k-1)}\right\}.$$

Утверждение 8.1.

1) $\vec{\varphi}_k(x) \in C[x_0 - h,\ x_0 + h]$;

2) $\vec{\varphi}_k'(x) \in C(D_k)$;

3) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k \in \mathbb{N}: \quad \forall\, x \in D_k \qquad \left|\vec{\varphi}_k(x) - \vec{y}_0 - \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}\,(t,\ \vec{\varphi}_k(t))\,dt\right| < \varepsilon.$

Доказательство. Непрерывность функций $\vec{\varphi}_k(x)$ следует из алгоритма: мы строили функции φ_{ik} как ломаные, каждый следующий отрезок выпуская из конца предыдущего.

Непрерывность производных $\vec{\varphi}_k'(x)$ всюду, кроме точек a_{km} и b_{km}, также следует из алгоритма: на каждом прямолинейном куске ломаной функция, её задающая – линейна и, следовательно, бесконечно дифференцируема.

Теперь оценим в точке $x \in (b_{k(m-1)},\ b_{km})$ разность $\left|\vec{\varphi}_k'(x) - \vec{f}\,(x,\ \vec{\varphi}_k(x))\,dt\right|$. Для этого вспомним, что для всех x на интервале $x \in (b_{k(m-1)},\ b_{km})$

$$\vec{\varphi}_k'(x) = \vec{f}\left(b_{k(m-1)},\ \vec{\varphi}_k(b_{k(m-1)})\right). \tag{8.9}$$

Теперь фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и в силу равномерной непрерывности[16] $f\,(x,\ \vec{\varphi}_k(x))$ в $\overline{\Pi}$ и оценки для построенных функций $\vec{\varphi}_k(x)$

$$|\vec{\varphi}_k(x') - \vec{\varphi}_k(x'')| \leqslant M_1|x' - x''| = \underbrace{\sqrt{M^2 + \ldots + M^2}}_{n\ \text{раз}}\,|x' - x''| = M\sqrt{n}\,|x' - x''|, \tag{8.10}$$

где n – порядок системы, получаем при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\exists\,\delta > 0: \quad \forall\,x',\ x'': \quad |x' - x''| < \delta \qquad \left|\vec{f}\,(x',\ \vec{\varphi}_k(x')) - \vec{f}\,(x'',\ \vec{\varphi}_k(x''))\right| < \frac{\varepsilon}{h}. \tag{8.11}$$

Заметим, что δ не зависит от k, поскольку оценка (8.10) получается для всех k сразу. Выберем теперь k так, чтобы

$$\frac{h}{k} \leqslant \delta.$$

Тогда для всех $x \in (b_{k(m-1)},\ b_{km})$ выполнено неравенство

$$\left|x - b_{k(m-1)}\right| < \delta.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left|\vec{\varphi}_k'(x) - \vec{f}\,(x,\ \vec{\varphi}_k(x))\right| &= \Big[\text{в силу (8.9)}\Big] = \\ &= \left|\vec{f}\left(b_{k(m-1)},\ \vec{\varphi}_k(b_{k(m-1)})\right) - \vec{f}\,(x,\ \vec{\varphi}_k(x))\right| < \Big[\text{в силу (8.11)}\Big] < \frac{\varepsilon}{h}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Наконец, оценим разность:

$$\begin{aligned} \left|\vec{\varphi}_k(x) - \vec{y}_0 - \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}\,(t,\ \vec{\varphi}_k(t))\,dt\right| &\equiv \left|\int\limits_{x_0}^{x} \left(\vec{\varphi}_k'(t) - \vec{f}\,(t,\ \vec{\varphi}_k(t))\right)dt\right| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} \left|\vec{\varphi}_k'(t) - \vec{f}\,(t,\ \vec{\varphi}_k(t))\right|dt < \\ &< \Big[\text{в силу (8.12)}\Big] < \frac{\varepsilon}{h}\cdot\int\limits_{x_0}^{x} dt \leqslant \frac{\varepsilon h}{h} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично эту оценку получаем и для всех $x \in (a_{km},\ a_{k(m-1)})$. $\square$

[16] Равномерная непрерывность на компакте следует из обычной непрерывности по известной теореме Кантора, а отрезок $[x_0 - h,\ x_0 + h]$, так же как и переллелепипед $\overline{\Pi}$ – компакты, то есть ограниченные замкнутые множества.

8.4. Доказательство существования

Утверждение 8.2.
Последовательности $\{\vec{\varphi}_k(x)\}$ *и* $\left\{\vec{f}\,(x;\ \vec{\varphi}_k(x))\right\}$ *равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на* $[x_0 - h,\ x_0 + h]$.

Доказательство.

Равномерная ограниченность. Для последовательности $\left\{\vec{f}\,(x;\ \vec{\varphi}_{k_m}(x))\right\}$ в силу условия $M = \max\limits_{i,\,\Pi} |f_i(x,\ \vec{y})|$ справедлива оценка:

$$\left|\vec{f}(x,\ \vec{\varphi}_{k_m})\right| \leqslant M_1 = \underbrace{\sqrt{M^2 + \ldots + M^2}}_{n \text{ раз}} = M\sqrt{n},$$

где n – порядок системы.
Поэтому для поледовательности $\{\vec{\varphi}_k(x)\}$ из формулы

$$|\vec{\varphi}_k(x') - \vec{\varphi}_k(x'')| \leqslant M_1|x' - x''| \tag{8.10}$$

и условия $\vec{\varphi}(x_0) = \vec{y}_0$ (оно выполняется по пункту 1 алогитма построения $\vec{\varphi}_k(x)$) получаем оценку

$$|\vec{\varphi}_k(x) - \vec{\varphi}_k(x_0)| \leqslant M_1|x - x_0| \leqslant M_1 h, \qquad \Longrightarrow \qquad |\vec{\varphi}_k(x)| \leqslant |\vec{y}_0| + M_1 h.$$

Равностепенная непрерывность. Поскольку в силу (8.10),

$$|\vec{\varphi}_k(x') - \vec{\varphi}_k(x'')| \leqslant M_1|x' - x''|,$$

то для всех $k \in \mathbb{N}$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \frac{\varepsilon}{M_1} > 0$ такое, что для произвольных x' и x'', расстояние между которыми меньше δ, выполняется неравненство

$$|\vec{\varphi}_k(x') - \vec{\varphi}_k(x'')| \leqslant M_1|x' - x''| < M_1\,\frac{\varepsilon}{M_1} = \varepsilon.$$

С другой стороны для последовательности $\left\{\vec{f}\,(x;\ \vec{\varphi}_{k_m}(x))\right\}$ в силу равномерной непрерывности $\vec{f}$ в $\overline{\Pi}$ и неравенства (8.10) имеем:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta > 0: \quad \forall\,x',\,x'': \quad |x' - x''| < \delta \quad \text{выполняется} \quad \left|\vec{f}\,(x';\ \vec{\varphi}_k(x')) - \vec{f}\,(x'';\ \vec{\varphi}_k(x''))\right| < \varepsilon.$$

□

Утверждение 8.3.
Последовательности $\{\vec{\varphi}_k(x)\}$ *и* $\left\{\vec{f}\,(x;\ \vec{\varphi}_k(x))\right\}$ *имеют равномерно на* $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ *сходящиеся подпоследовательности* $\{\vec{\varphi}_{k_m}(x)\}_{m=1}^{\infty}$ *и* $\left\{\vec{f}\,(x;\ \vec{\varphi}_{k_m}(x))\right\}$.

Доказательство. По теореме Арцела – Асколи (стр. 111) из равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности последовательности $\{\vec{\varphi}_k(x)\}$ следует наличие подпоследовательности $\{\vec{\varphi}_{k_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$, сходящейся равномерно на $[x_0 - h,\ x_0 + h]$. Рассмотрим соответствующую ей подпоследовательность $\left\{\vec{f}\,(x;\ \vec{\varphi}_{k_l}(x))\right\}_{l=1}^{\infty}$. Она, будучи подмножеством равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на $[x_0-h,\ x_0+h]$ последовательности $\left\{\vec{f}\,(x;\ \vec{\varphi}_k(x))\right\}$, также обладает этими свойствами. Поэтому, по теореме Арцела – Асколи (стр. 111) найдётся подпоследовательность $\left\{\vec{f}\,(x;\ \vec{\varphi}_{k_{l_s}}(x))\right\}$, сходящаяся равномерно на $[x_0-h,\ x_0+h]$. Обозначим $m = l_s$ и получим, что подпоследовательности $\{\vec{\varphi}_{k_m}(x)\}_{m=1}^{\infty}$ и $\left\{\vec{f}\,(x;\ \vec{\varphi}_{k_m}(x))\right\}$ сходятся равномерно на $[x_0-h,\ x_0+h]$. (Здесь существенным моментом является то, что номера k_m элементов этих подпоследовательностей – общие.) □

Утверждение 8.4.
Предел последовательности $\{\vec{\varphi}_{k_m}(x)\}$ является решением задачи (8.8) (и, следовательно, задачи Коши (8.7)).

Доказательство. Обозначим предельную функцию последовательности $\{\vec{\varphi}_{k_m}(x)\}$ через $\varphi(x)$. Равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции:

$$\vec{\varphi}_{k_m}(x)\ \rightrightarrows\ \vec{\varphi}(x) \in C[x_0-h,\ x_0+h].$$

Функциональную последовательность, сходящуюся равномерно, можно интегрировать почленно, поэтому:

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{x_0}^{x}\vec{f}\,(t;\ \vec{\varphi}_{k_m}(t))\,dt = \int\limits_{x_0}^{x}\lim_{m\to\infty}\vec{f}\,(t;\ \vec{\varphi}_{k_m}(t))\,dt = \int\limits_{x_0}^{x}f\,(t;\ \vec{\varphi}(t))\,dt.$$

Поэтому в

$$\vec{\varphi}_{k_m}(x) = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x}\vec{f}\,(t_1;\ \vec{\varphi}_{k_m}(t))\,dt$$

можно перейти к пределу при $m\to\infty$, и мы получим, что

$$\vec{\varphi}(x) = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x}\vec{f}\,(t;\ \vec{\varphi}(t))\,dt.$$

□

Замечание 8.1. Несмотря на то, что элементы последовательности $\{\vec{\varphi}_{k_m}(x)\}$ были всего лишь непрерывны, а их производные были неопределены в точках $\left\{a_{k_m1},\ \ldots,\ a_{k_m(k_m-1)};\ b_{k_m1},\ \ldots,\ b_{k_m(k_m-1)}\right\}$, предельная функция $\varphi(x)$ является непрерывно дифференцируемой:

$$\varphi(x) \in C^1[x_0-h,\ x_0+h].$$

Это справедливо, поскольку правая часть равенства

$$\vec{\varphi}(x) = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x}\vec{f}\,(t;\ \vec{\varphi}(t))\,dt$$

является дифференцируемой, а её производная $\vec{f}\,(x;\ \vec{\varphi}(x))$ – непрерывной на $[x_0-h,\ x_0+h]$.

8.5. Доказательство единственности

Теорема 8.4 (Лемма Гронуолла).

Усл. *Вектор-функция* $\vec{y}(x) \in C[a,\ b]$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\vec{y}(x)| \leqslant A + K \left| \int\limits_{x_0}^{x} |\vec{y}(t)|\, dt \right|, \qquad A,\ K \geqslant 0, \quad x,\ x_0 \in [a,\ b]. \tag{8.13}$$

Утв.

$$|\vec{y}(x)| \leqslant A e^{K|x-x_0|}. \tag{8.14}$$

Доказательство. Для определённости положим $x > x_0$. Обозначим $|\vec{y}(x)|$ через $z(x) \geqslant 0$. Это – обычная (не вектор) функция, и для неё выполнено неравенство

$$z(x) \leqslant A + K \int\limits_{x_0}^{x} z(t) dt.$$

Обозначим правую часть этого неравенства через

$$V(x) = A + K \int\limits_{x_0}^{x} z(t) dt, \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, V'(x) = K z(x).$$

Отсюда, так как $z(x) \leqslant V(x)$

$$V'(x) = K z(x) \leqslant K V(x). \tag{8.15}$$

Далее возможно два случая:

1) $V(x) > 0$ на всём $[x_0,\ b]$;

2) $V(\bar{x}) = 0$ в некоторой точке $\bar{x} \in [x_0,\ b]$.

(Случай $V(x) < 0$ исключён, так как $A,\ K,\ z(x) \geqslant 0$.)
В случае 1) неравенство (8.15) равносильно

$$\frac{V'(x)}{V(x)} \leqslant K, \qquad \Longrightarrow \qquad \ln V(x) - \underbrace{\ln V(x_0)}_{=\ln A} \leqslant K(x - x_0),$$

откуда

$$V(x) \leqslant A e^{K(x-x_0)}.$$

Случай 2) возможен только при $A = 0$ (иначе при $A,\ K,\ z(x) \geqslant 0$ выражение $V(x)$ строго положительно всюду на $[x_0,\ b]$), то есть $z(x) \leqslant K \int\limits_{x_0}^{x} z(t) dt$. А отсюда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad z(x) < \varepsilon + K \int\limits_{x_0}^{x} z(t) dt.$$

По доказанному пункту 1), для каждого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка:

$$V(x) \leqslant \varepsilon e^{K(x-x_0)}, \qquad \overset{\varepsilon \to +0}{\Longrightarrow} \qquad V(x) \leqslant 0.$$

Так как $V(x)$ не может быть меньше нуля, последнее неравенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$V(x) \equiv 0, \qquad x \in [x_0,\ b].$$

А поскольку $0 \leqslant z(x) \leqslant V(x)$ выполняется лишь при $z(x) \equiv 0$, мы получили оценку (8.14) и в случае 2).
На отрезке $[a,\ x_0]$ оценка (8.14) доказывается полностью аналогично. □

Доказательство единственности, в отличие от доказательства существования, проводится в дополнительном предположении о Липшицевости вектор-функции $\vec{f}\,(x,\ \vec{y})$ по $\vec{y}$, то есть:

$$\exists\, L > 0: \quad \forall (x;\ \tilde{y}_1,\ \ldots,\ \tilde{y}_n),\ (x;\ \bar{y}_1,\ \ldots,\ \bar{y}_n) \in \Pi, \quad \forall\, j = \overline{1,\ n} \quad \text{вып. нер-во}$$

$$\Big| f_j(x;\ \tilde{y}_1,\ \ldots,\ \tilde{y}_n) - f_j(x;\ \bar{y}_1,\ \ldots,\ \bar{y}_n) \Big| \leqslant L \left| \tilde{\vec{y}} - \bar{\vec{y}} \right|.$$

Докажем от противного. Предположим, что есть два различных решения $\tilde{\vec{y}}$ и $\bar{\vec{y}}$ задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}\,' = \vec{f}\,(x;\ \vec{y})\,; \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0, \end{cases} \tag{8.7}$$

или эквивалентного ей интегрального уравнения

$$\vec{y}(x) - \vec{y}(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}\,(t;\ \vec{y}(t))\, dt. \tag{8.8}$$

Так как $\tilde{\vec{y}}$ и $\bar{\vec{y}}$ – решения (8.8), то

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{y}}(x) - \vec{y}(x_0) &= \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}\left(t;\ \tilde{\vec{y}}(t)\right) dt; \\ \bar{\vec{y}}(x) - \vec{y}(x_0) &= \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}\left(t;\ \bar{\vec{y}}(t)\right) dt. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Вычтем из первого равенства (8.16) второе и получим

$$\tilde{\vec{y}}(x) - \bar{\vec{y}}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \left(\vec{f}\left(t;\ \tilde{\vec{y}}(t)\right) - \vec{f}\left(t;\ \bar{\vec{y}}(t)\right)\right) dt. \tag{8.17}$$

Оценим эту разность по модулю:

$$\begin{aligned} \left|\tilde{\vec{y}}(x) - \bar{\vec{y}}(x)\right| &= \left| \int\limits_{x_0}^{x} \left(\vec{f}\left(t;\ \tilde{\vec{y}}(t)\right) - \vec{f}\left(t;\ \bar{\vec{y}}(t)\right)\right) dt \right| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} \left| \vec{f}\left(t;\ \tilde{\vec{y}}(t)\right) - \vec{f}\left(t;\ \bar{\vec{y}}(t)\right)\right| \cdot |dt| \leqslant \\ &\leqslant \Big[\text{в силу условия Липшица}\Big] \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} L \left|\tilde{\vec{y}}(t) - \bar{\vec{y}}(t)\right| |dt| = L \left| \int\limits_{x_0}^{x} \left|\tilde{\vec{y}}(t) - \bar{\vec{y}}(t)\right| dt \right|. \end{aligned}$$

Таким образом, для функции

$$\vec{y}(x) = \tilde{\vec{y}}(x) - \bar{\vec{y}}(x)$$

справедливо неравенство

$$|\vec{y}(x)| \leqslant L \left| \int\limits_{x_0}^{x} |\vec{y}(t)|\, dt \right|,$$

являющееся частным случаем (8.13) с $A = 0$ и $K = L$. По лемме Гронуолла (стр. 117) получаем $|\vec{y}(x)| \leqslant 0$, что возможно только в случае

$$|\vec{y}(x)| = \left|\tilde{\vec{y}}(x) - \bar{\vec{y}}(x)\right| \equiv 0.$$

Итак, предположение о существовании двух различных решений $\tilde{\vec{y}}$ и $\bar{\vec{y}}$ задачи Коши (8.7) приводит нас к противоречию.

8.6. ТСЕ для нормальной линейной системы

Рассмотрим нормальную линейную систему

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x); \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x); \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{8.18}$$

или, в векторном виде:

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x). \tag{8.19}$$

Докажем теорему 5.3:

Теорема 8.5 (ТСЕ решения задачи Коши линейной системы).

Усл. *Все элементы $a_{ij}(x)$ матрицы $A(x)$ и $f_i(x)$ вектор-функции $\vec{f}(x)$ непрерывны:*

$$a_{ij}(x) \in C\langle a,\ b\rangle, \qquad f_i(x) \in C\langle a,\ b\rangle, \qquad i,\ j \in \overline{1,\ n}.$$

Утв. $\exists\,!$ *решение $\vec{y} = \vec{y}(x)$ задачи Коши*

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle; \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0. \end{cases} \tag{8.20}$$

определённое на $x \in \langle a,\ b\rangle$.

Выполнение условий ТСЕ задачи Коши общей нормальной системы
Убедимся, что при выполнении условий теоремы 5.3, стр. 44, выполняются также условия теоремы 8.1, стр. 110. Действительно, так как $A(x), \vec{f}(x) \in C\langle a,\ b\rangle$, то правая часть (8.19) непрерывна при всех $x \in \langle a,\ b\rangle$ и $y_k \in (-\infty,\ +\infty)$. Следовательно, в любом прямоугольном параллелепипеде $\overline{\Pi}$, содержащем точки с абсциссой x_0, таком что

$$\overline{\Pi} \subset \left\{(x,\ \vec{y}): \quad x \in \langle a,\ b\rangle; \quad y_k \in (-\infty,\ +\infty), \quad k = \overline{1,\ n}\right\},$$

выполняются все условия 8.1, кроме, возможно Липшицевости.
Проверим, что условие Липшица также выполнено в каждом таком $\overline{\Pi}$. Для этого введём обозначение[17]:

$$\|A\|_{\overline{\Pi}} = \max_{\overline{\Pi}} \max_{i,j} |a_{ij}(x)|\,.$$

Тогда в каждом $\overline{\Pi}$ для любых $\tilde{\vec{y}},\ \bar{\vec{y}}$ выполнено неравенство

$$\left|\left(A(x)\tilde{\vec{y}} + \vec{f}\right) - \left(A(x)\bar{\vec{y}} + \vec{f}\right)\right| = \left|A(x)\left(\tilde{\vec{y}} - \bar{\vec{y}}\right)\right| \leqslant \|A\|_{\overline{\Pi}} \left|\tilde{\vec{y}} - \bar{\vec{y}}\right|,$$

[17] Строго говоря, максимум надо брать не по $\overline{\Pi}$, а по отрезку оси Ox, который является проекцией $\overline{\Pi}$ на Ox, но мы будем использовать это обозначение, чтобы не вводить новых обозначений для границ этого отрезка.

то есть условие Липшица с постоянной $L = \|A\|_{\overline{\Pi}}$.

Доказательство существования
Докажем существование решения на $[x_0,\ b\rangle$ (для $\langle a,\ x_0]$ доказательство аналогично). Для этого фиксируем произвольную точку $M \in [x_0,\ b\rangle$ и убедимся, что существует решение задачи Коши (8.20) на $[x_0,\ M]$. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $\overline{\Pi}_1$, содержащий точку с абсциссой x_0 [18] и остальными координатами, определяемыми равенством $\vec{y}_1(x_0)$, а также точку с абсциссой M. В нём выполняются все условия теоремы 8.1, поэтому на отрезке $[x_0,\ x_0{+}h_1]$ решение $\vec{y}_1(x)$ существует. Теперь рассмотрим $\overline{\Pi}_2$, содержащий точки с абсциссами $x_1 = x_0 + h_1$ и M. В нём также выполнены все условия теоремы 8.1 но уже для задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x), & x \in [x_0,\ M]; \\ \vec{y}(x_0 + h_1) = \vec{y}_1(x_0 + h_1) = \vec{y}_1(x_1), & \end{cases}$$

поэтому решение $\vec{y}_1(x)$ можно продолжить на отрезок $[x_0,\ x_0 + h_1 + h_2] = [x_0,\ x_2]$, где мы его обозначим $\vec{y}_2(x)$.
Продожая этот процесс, мы можем столкнуться с двумя вариантами развития событий:

1) За конечное число шагов мы дойдём до точки M, и существование вплоть до этой точки доказано.

2) Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k = H$ сходится к числу $H < |M - x_0|$, и

   либо решение можно продолжить, начиная с точки $x_0 + H$ и процесс повторяется с новой последовательностью $\overline{\Pi}_k$,

   либо решение продолжается только до точки $x_0 + H$.

Убедимся, что последний случай невозможен. Рассмотрим произвольный прямоугольный параллелепипед $\overline{\Pi}_\infty$, содержащий точку с абсциссой $x_0 + H$ и остальными координатами, полученными как предел $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{y}_k(x_0 + h_1 + \ldots + h_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \vec{y}_k(x_k)$. В первую очередь заметим, что этот предел существует. Действительно, если рассмотреть полосу P, содежащую точки с абсциссами x_0 и $x_0 + H$ и остальными координатами $\vec{y}_k(x_k)$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то (так как A зависит только от x, то и $\|A\|$ во всех $\overline{\Pi} \subset P$ не превосходит $\|A\|_P$) во всех $\overline{\Pi}_k \cap P$ выполнено условие Липшица с одной постоянной $L = \|A\|_P$. Поэтому при любых $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{gathered}
\Big|\vec{y}_{k+p}(x_{k+p}) - \vec{y}_k(x_k)\Big| = \\
= \Big|\vec{y}_{k+p}(x_{k+p}) - \vec{y}_{k+p-1}(x_{k+p-1}) + \vec{y}_{k+p-1}(x_{k+p-1}) - \vec{y}_{k+p-2}(x_{k+p-2}) + \ldots + \vec{y}_{k+1}(x_{k+1}) - \vec{y}_k(x_k)\Big| \leqslant \\
\leqslant \Big|\vec{y}_{k+p}(x_{k+p}) - \vec{y}_{k+p-1}(x_{k+p-1})\Big| + \Big|\vec{y}_{k+p-1}(x_{k+p-1}) - \vec{y}_{k+p-2}(x_{k+p-2})\Big| + \ldots + \Big|\vec{y}_{k+1}(x_{k+1}) - \vec{y}_k(x_k)\Big| \leqslant \\
\leqslant \|A\|_P \Big[\Big|(x_0 + h_1 + \ldots + h_{k+p}) - (x_0 + h_1 + \ldots + h_{k+p-1})\Big| + \\
+ \Big|(x_0 + h_1 + \ldots + h_{k+p-1}) - (x_0 + h_1 + \ldots + h_{k+p-2})\Big| + \ldots + \\
+ \Big|(x_0 + h_1 + \ldots + h_{k+1}) - (x_0 + h_1 + \ldots + h_k)\Big| \Big] = \\
= \leqslant \|A\|_P \left[h_{k+p} + h_{k+p-1} + \ldots + h_k\right].
\end{gathered}$$

[18] Для полной сторогости нам следовало бы выбрать такой $\overline{\Pi}_1$, чтобы точка x_0 была серединой его проекции на Ox, так как теорема 8.1 сформулирована для этого случая. Однако заметим, что доказательство теоремы 8.1 нигде не использует то, что x_0 – посередине. Эту теорему точно так же можно доказать для случая произвольного положения точки x_0 от левой границы $\overline{\Pi}$ до правой включительно.

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ сходится, то по критерию Коши $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, k > N, \ \ \forall\, p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\Big| h_k + h_{k+1} + \ldots + h_{k+p-1} + h_{k+p} \Big| < \varepsilon.$$

Поэтому, для последовательности точек $\{\vec{y}_m(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$ пространства $\mathbb{R}^n$ выполняется условие фундаментальности:

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, k > N, \ \forall\, p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\quad |\vec{y}_{k+p}(x_{k+p}) - \vec{y}_k(x_k)| < \varepsilon.$

По критерию Коши сходимости последовательности в $\mathbb{R}^n$, получаем, что предел $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{y}_k(x_k)$ существует и конечен.
Теперь продолжая предполагать, что решение нашей системы, удовлетворяющее условию $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$, нельзя продолжить правее точки $x_0 + H$, рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x), & x \in [x_0,\ x_0 + M]; \\ \vec{y}(x_0 + h_1) = \lim\limits_{k\to\infty} \vec{y}_k(x_0 + h_1 + \ldots + h_k). & \end{cases}$$

По теореме 8.1 решение этой задачи Коши существует в некоторой окрестности точки $x_0 + H$, и мы приходим к противоречию. Следовательно, решение существует на $[x_0,\ M]$ для любого $M \in (x_0,\ b\rangle$.

Доказательство единственности
Предположим, что существует два различных решения задачи Коши (8.20) – вектор-функции $\vec{y}_1(x)$ и $\vec{y}_2(x)$. Раз они решения данной задачи, значит их интегральные кривые проходят хотя бы через одну общую точку: $(x_0,\ \vec{y}_0)$. А поскольку они различны, то найдётся такая точка $x' \in \langle a,\ b\rangle$, что в самой этой точке они совпадают: $\vec{y}_1(x') = \vec{y}_2(x') = \tilde{\vec{y}}_0$, а в любой её окрестности – нет. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x), & x \in [x' - l,\ x' + l]; \\ \vec{y}(x') = \tilde{\vec{y}}_0, & \end{cases}$$

где $l > 0$ – некоторе число, такое что $a < x_1 - l < x_1 + l < b$.
По теореме 8.1 решение этой задачи Коши существует и единственно в некоторой окрестности точки x', и мы приходим к противоречию. Поэтому наше предположение о существовании различных решений задачи Коши (8.20) неверно.

9. ФСР однородной системы в случае кратных корней

Пусть первые k собственных чисел матрицы A совпадают: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k \in \mathbb{R}$. Выясним, какие вектор-функции, соответсвующие этому корню характеристического уравнения, войдут в ФСР однородной линейной системы ОДУ.
Из курса линейной алгебры известна теорема:

Теорема 9.1.

Усл. *Матрица A имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ кратности $k_1, \ldots, k_s$ соответственно, $k_1 + \ldots + k_s = n$.*

Утв. *$\exists$ базис, в котором матрица A имеет Жорданову форму.*

Опр. 9.1.
Жордановой формой квадратной матрицы $A_{n\times n}$ называется её блочно-диагональный вид:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{D_{\lambda_1}} & & & & \\ & \boxed{J_{\lambda_1}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{D_{\lambda_s}} & \\ & & & & \boxed{J_{\lambda_s}} \end{pmatrix}$$

в котором каждый блок является либо диагональной матрицей D_{λ_j} с λ_j на главной диагонали либо **Жордановой клеткой** J_{λ_j}, где

$$D_{\lambda_j} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix} \qquad J_{\lambda_j} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix}$$

При этом для некоторых λ_j может отсутствовать D_{λ_j}, для некоторых – J_{λ_j}.

Лемма 9.1.

1) *Порядок матрицы D_{λ_j} на 1 меньше числа линейно независимых собственных векторов, соответствующих λ_j;*

2) *Число m_j линейно независимых собственных векторов, соответствующих λ_j равно $m_j = n - \operatorname{rang}\,(A - \lambda_j E)$, где n – порядок матрицы A;*

3) *Сумма порядка матрицы D_{λ_j} и порядка матрицы J_{λ_j} равна кратности k_j собственного числа λ_j;*

4) *Порядок матрицы D_{λ_j} равен $m_j - 1$, а порядок матрицы J_{λ_j} равен $k_j - m_j + 1$.*

Теорема 9.2.

Усл. *Матрица A имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ кратности $k_1, \ldots, k_s$ соответственно, $k_1 + \ldots k_s = n$.*

Утв. *ФСР системы ОДУ $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ состоит из столбцов матрицы*

$$e^{Ax} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l x^l}{l!}$$

причём в базисе, в котором матрица оператора имеет Жорданову форму J, ФСР имеет вид

$$\vec{y}_{j,p} = \left[\vec{h}_j + \frac{x}{1!}\,\vec{h}_{j,1} + \frac{x^2}{2!}\,\vec{h}_{j,2} + \ldots + \frac{x^p}{p!}\,\vec{h}_{j,p}\right] \cdot e^{\lambda_j x}, \qquad j = \overline{1,\, s}, \quad p = \overline{0,\, p_j},$$

*где $p_j = k_j - m_j$, а $\vec{h}_{j,1}, \ \ldots, \ \vec{h}_{j,p_j}$ – **присоединённые к $\vec{h}_j$ векторы**, они определяются равенствами:*

$$(A - \lambda_j E)\,\vec{h}_j = \vec{0}, \quad \left(\vec{h}_j \neq \vec{0}\right),$$

$$(A - \lambda_j E)\,\vec{h}_{j,1} = \vec{h}_j, \quad (A - \lambda_j E)\,\vec{h}_{j,2} = \vec{h}_{j,1}, \quad \ldots, \quad (A - \lambda_j E)\,\vec{h}_{j,p_j} = \vec{h}_{j,(p_j-1)}.$$

Доказывать мы эту теорему не станем, но кое-какие соображения приведём.
Во-первых, обясним, почему матрица e^{Ax} состоит из столбцов – решений системы $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.
Воспользуемся определением експоненты от матрицы через ряд

$$e^{Ax} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l x^l}{l!}, \qquad \text{где} \quad A^l = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n\ \text{раз}}.$$

Поскольку суммирование матриц – операция покоординатная, то данное равенство распадается на n^2 степенных рядов, которые (всюду в области их сходимости) можно дифференцировать почленно. Поэтому

$$\frac{d}{dx}\left(e^{Ax}\right) = \frac{d}{dx}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l x^l}{l!} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{A^l x^{l-1}}{(l-1)!} = \Big[m = l - 1\Big] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{m+1} x^m}{m!} = A\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m x^m}{m!} \equiv Ae^{Ax}.$$

Поэтому матрица $\mathbf{Y} = e^{Ax}$ есть решение матричного уравнения $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$. Это означает, что столбцы матриц, стоящих в левой и правой частях этого равенства также связаны соотношением $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.
Во-вторых, выясним, какой вид имеет матрица $e^{J_\lambda \cdot x}$, где J_λ – Жорданова клетка $(p+1) \times (p+1)$. Для этого представим J_λ в виде суммы

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Z}_\lambda + \mathbf{Z}.$$

В силу свойства матричной экспоненты $e^{(\mathbf{Z}_\lambda + \mathbf{Z}) \cdot x} = e^{\mathbf{Z}_\lambda \cdot x} \cdot e^{\mathbf{Z} \cdot x}$,

$$e^{J_\lambda \cdot x} = e^{\mathbf{Z}_\lambda \cdot x} \cdot e^{\mathbf{Z} \cdot x},$$

а эти матрицы легко найти по определению:

$$e^{\mathbf{Z}_\lambda \cdot x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda x} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda x} \end{pmatrix} \equiv E \cdot e^{\lambda x};$$

$$e^{\mathbf{Z} \cdot x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Z}^m x^m}{m!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{x}{1!} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{x^p}{p!} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} & \frac{x^p}{p!} \\ 0 & 1 & \frac{x}{1!} & \ddots & \frac{x^{p-2}}{(p-2)!} & \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{x}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому для $e^{(\mathbf{Z}_\lambda + \mathbf{Z}) \cdot x} = e^{\mathbf{Z}_\lambda \cdot x} \cdot e^{\mathbf{Z} \cdot x}$ получаем:

$$e^{J_\lambda \cdot x} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} & \frac{x^p}{p!} & \\ 0 & 1 & \frac{x}{1!} & \ddots & \frac{x^{p-2}}{(p-2)!} & \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{x}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x}$$

Пользуясь тем, что при вычислении экспоненты от блочно-диагональной матрицы получается аналогичная блочно-диагональная матрица, каждый блок которой есть экспонента от соответствующего блока исходной матрицы, мы можем сделать вывод, который и утверждается в теореме.

Вопросы к экзамену

1) Понятие ОДУ. Порядок ОДУ. Общее и частное решение ОДУ. Общий и частный интеграл ОДУ.
2) Уравнения с разделяющимися переменными. Определение и ТСЕ решения задачи Коши.
3) Однородные уравнения 1-го порядка. Определение и ТСЕ решения задачи Коши.
4) Линейные уравнения 1-го порядка. Определение и ТСЕ решения задачи Коши*. Метод вариации постоянной на примере.
5) Уравнения в полных дифференциалах. Критерий полного дифференциала* и ТСЕ решения задачи Коши. Понятие интегрирующего множителя.
6) Уравнения, неразрешённые относительно производной. Постановка задачи Коши.
7) Уравнения, неразрешённые относительно производной. Общий метод введения параметра.
8) Уравнения Клеро и Лагранжа.
9) Особые решения. Алгоритм их нахождения.
10) Уравнения, допускающие понижение порядка. Четыре случая.
11) Нормальные системы ОДУ. Частное и общее решение. Задача Коши. ТСЕ решения задачи Коши*.
12) Линейные системы ОДУ. Запись при помощи линейного оператора. ТСЕ решения задачи Коши*.
13) Линейная зависимость и независимость системы функций*.
14) Понятие Вронскиана. Вронскиан линейно зависимых вектор-функций.
15) Вронскиан решений однородной линейной системы.
16) Понятие ФСР и теорема о существовании ФСР однородной линейной системы*.
17) Теорема о структуре общего решения однородной линейной системы.
18) Теорема о сумме решения неоднородной линейной системы и решения соответствующей однородной.
19) Теорема о разности двух решений неоднородной линейной системы.
20) Теорема о структуре общего решения неоднородной линейной системы.
21) Комплекснозначные решения однородной линейной системы.
22) Собственные числа и векторы числовой матрицы. Характеристическое уравнение*.
23) Простейшие решения однородной линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами.
24) Решение однородной линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами. Случай различных действительных корней.

25) Решение однородной линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами. Случай различных корней, пара из которых комплексно-сопряжённые.

26) Решение неоднородной линейной системы ОДУ с переменными коэффициентами. Метод вариации постоянных*.

27) Решение неоднородной линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами. Случай квазиполинома в правой части*.

28) ОДУ n-ого порядка. Частное и общее решение. Частный и общий интеграл.

29) Сведение ОДУ n-ого порядка к нормальной системе n-ого порядка. ТСЕ решения задачи Коши*.

30) Сведение линейного ОДУ n-ого порядка к линейной системе n-ого порядка. ТСЕ решения задачи Коши*.

31) Лемма о линейной независимости систем функций и соответствующих им вектор функций. Существование ФСР однородного линейного ОДУ.

32) Теорема о структуре общего решения однородного линейного ОДУ.

33) Теорема о структуре общего решения неоднородного линейного ОДУ.

34) Простейшие решения однородного линейного ОДУ с постоянными коэффициентами.

35) Решение однородного линейного ОДУ с постоянными коэффициентами. Случай различных действительных корней.

36) Решение однородного линейного ОДУ с постоянными коэффициентами. Случай различных корней, пара из которых комплексно-сопряжённые.

37) Решение неоднородного линейного ОДУ с переменными коэффициентами. Метод вариации постоянных*.

38) Решение неоднородного линейного ОДУ с постоянными коэффициентами. Случай квазиполинома в правой части*.

(Знак «*» после вопроса означает «без доказательства».)

Список литературы

[1] *Карташёв А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления// М., «Наука», 1986.

[2] *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений// М., Изд-во Иностранной литературы, 1958.

[3] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения// М., «Наука», 1974 (1983).

[4] *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление// М., «Наука», 1969.