ИДЗ2

Классические методы мат. Статистики

Звегинцева Елизавета 8382

Вариант 6

Вар. 6 (83822020)

1. В результате эксперимента получены данные, приведенные в таблице 1.

a) Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения и гистограмму частот.

b) Вычислить выборочные аналоги следующих числовых характеристик:
(i) математического ожидания, (ii) дисперсии, (iii) медианы, (iv) асимметрии, (v) эксцесса,
(vi) вероятности $\mathbf{P}(X \in [a, b])$.

c) В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из распределения Пуассона, построить оценку максимального правдоподобия параметра λ, а также оценку λ по методу моментов. Найти смещение оценок.

d) Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости α_1 для параметра λ на базе оценки максимального правдоподобия.

e) Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ^2 проверки простой гипотезы согласия с распределением Пуассона с параметром λ_0. Проверить гипотезу на уровне значимости α_1. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

f) Построить критерий значимости χ^2 проверки сложной гипотезы согласия с распределением Пуассона. Проверить гипотезу на уровне значимости α_1. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

g) Построить наиболее мощный критерий проверки простой гипотезы пуассоновости с параметром $\lambda = \lambda_0$ при альтернативе пуассоновости с параметром $\lambda = \lambda_1$. Проверить гипотезу на уровне значимости α_1. Что получится, если поменять местами основную и альтернативную гипотезы?

h) В пунктах (c)–(f) заменить семейство распределений Пуассона на семейство геометрических распределений

$$\mathbf{P}_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{(\lambda+1)^{k+1}},\ k = 0, 1, \ldots .$$

Таблица 1 $\alpha_1 = 0.10$; $a = 1.72$; $b = 3.13$; $\lambda_0 = 5.00$; $\lambda_1 = 2.00$.

1 1 1 3 4 0 2 4 3 2 9 1 2 1 2 2 1 3 0 0 2 5 2 2 0 4 0 1 1 1 4 3 2 2 1 4 2 0 3 0 3 2 2 1 0 0 3
2 3 2

2. В результате эксперимента получены данные, приведенные в таблице 2.

a) Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения, гистограмму и полигон частот с шагом h.

b) Вычислить выборочные аналоги следующих числовых характеристик:
(i) математического ожидания, (ii) дисперсии, (iii) медианы, (iv) асимметрии, (v) эксцесса,
(vi) вероятности $\mathbf{P}(X \in [c, d])$.

c) В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из нормального распределения, построить оценку максимального правдоподобия параметров (a, σ^2) и соответствующие оценки по методу моментов. Найти смещение оценок.

d) Построить доверительные интервалы уровня значимости α_2 для параметров (a, σ^2).

e) С использованием теоремы Колмогорова построить критерий значимости проверки простой гипотезы согласия с нормальным распределением с параметрами a_0, σ_0^2. Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

f) Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ^2 проверки простой гипотезы согласия с нормальным распределением с параметрами (a_0, σ_0^2). Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

g) Построить критерий проверки значимости χ^2 сложной гипотезы согласия с нормальным распределением. Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

h) Построить наиболее мощный критерий проверки простой гипотезы о нормальности с параметром $(a, \sigma^2) = (a_0, \sigma_0^2)$ при альтернативе нормальности с параметром $(a, \sigma^2) = (a_1, \sigma_1^2)$. Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Что получится, если поменять местами основную и альтернативную гипотезы?

i) В пунктах (c)–(g) заменить семейство нормальных распределений на двухпараметрическое семейство распределений Лапласа с плотностями $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|x-a|}$.

Таблица 2 $\alpha_2 = 0.05$; $c = -3.80$; $d = -2.00$; $h = 0.40$; $a_0 = -3.00$; $\sigma_0 = 1.00$; $a_1 = -6.00$; $\sigma_1 = 1.00$.

−4.134 −3.794 −2.764 −4.835 −2.717 −1.649 −3.882 −3.455 −2.177 −4.785 −2.932 −3.147 −2.466 −2.887 −1.583 −4.009
−2.905 −3.961 −2.193 −3.930 −3.526 −1.251 −2.463 −4.431 −3.445 −4.493 −3.287 −3.096 −2.056 −2.347 −2.113 −3.136
−3.775 −3.906 −2.491 −1.949 −4.483 −3.212 −0.087 −2.367 −1.950 −2.691 −3.571 −4.174 −3.401 −3.760 −2.639 −2.690
−1.435 −4.263

ЗАДАНИЕ 1

a) Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения и гистограмму частот.

```
x1 <- c(1, 1, 1, 3, 4, 0, 2, 4, 3, 2, 9, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 3, 0,
0, 2, 5, 2, 2, 0, 4, 0, 1, 1, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 4, 2, 0, 3, 0,
3, 2, 2, 1, 0, 0, 3, 2, 3, 2)
```

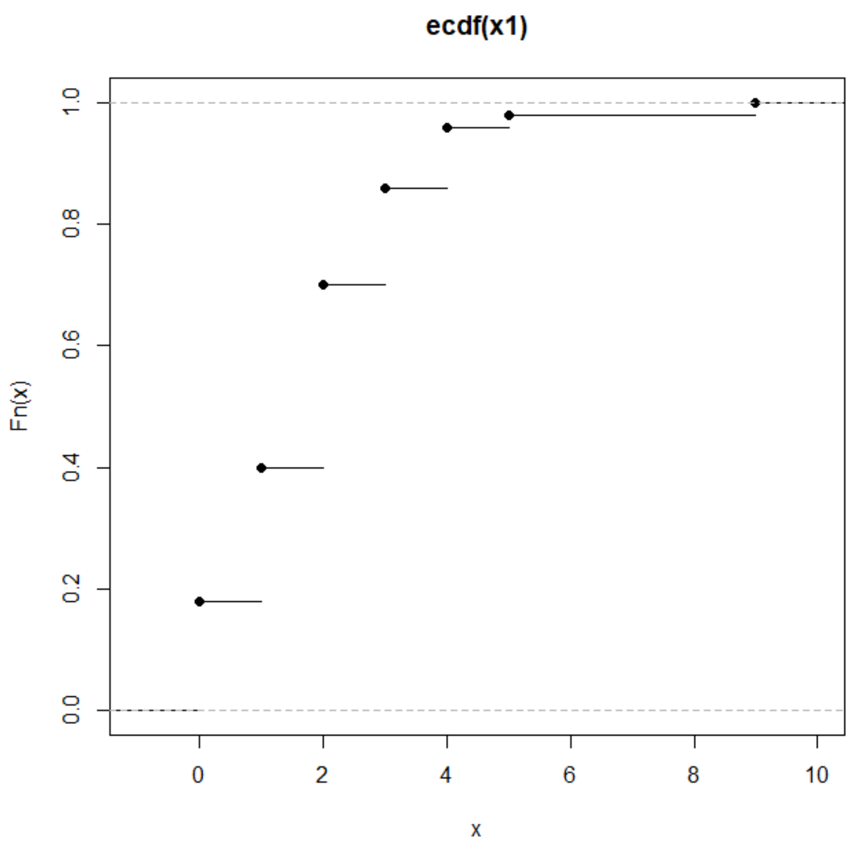
Вариационный ряд:

```
x1sort <- sort(x1)
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 9
```

Эмпирическая функция распределения:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i \le x\}}$$

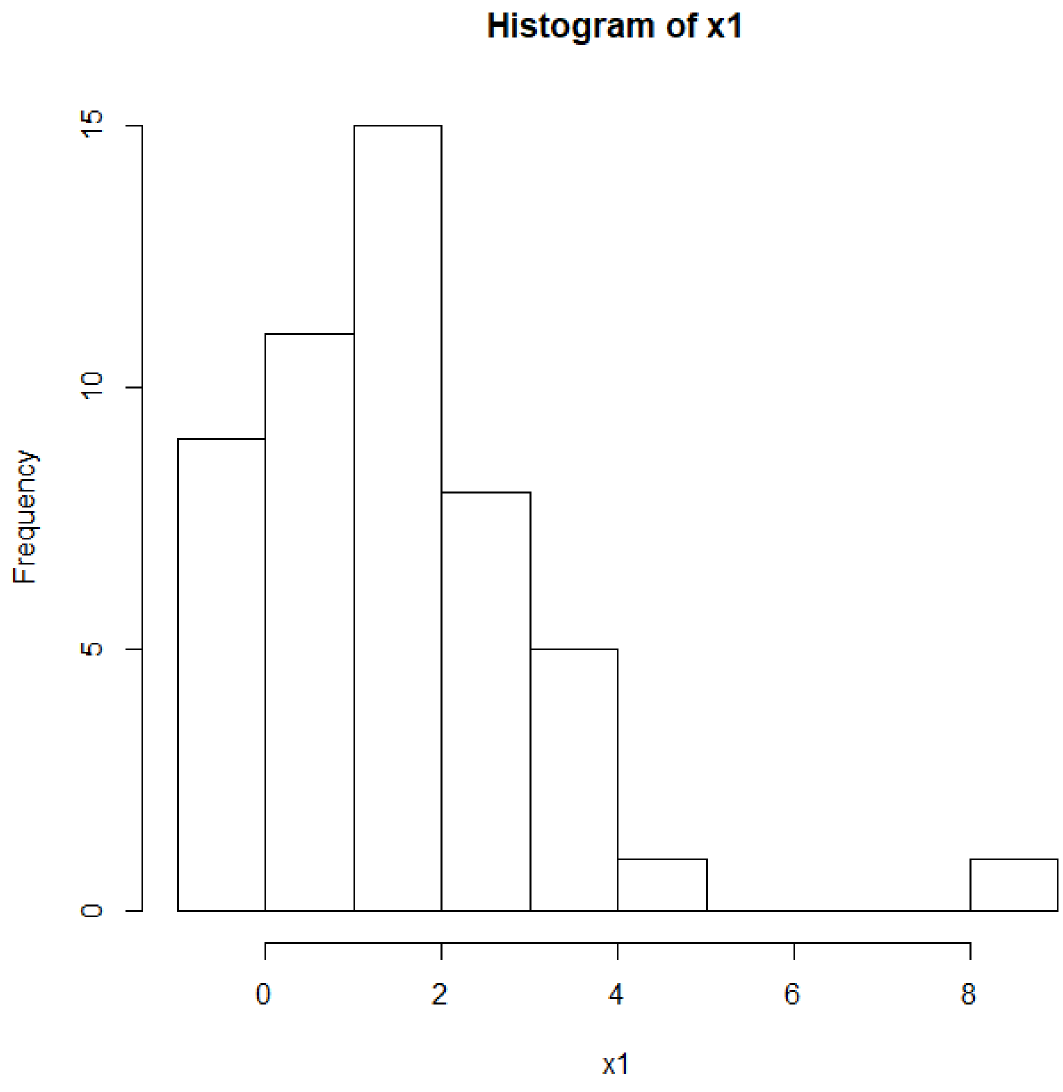
```
plot(ecdf(x1))
```



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0.18, & x \in (0;1] \\ 0.4, & x \in (1;2] \\ 0.7, & x \in (2;3] \\ 0.86, & x \in (3;4] \\ 0.96, & x \in (4;5] \\ 0.98, & x \in (5;9] \\ 1, & x > 9 \end{cases}$$

Гистограмма частот:

```
hist(x1, breaks=c(-1:9))
```



b) Вычислить выборочные аналоги следующих числовых характеристик:

(i) Математическое ожидание

```
mean<-sum(x1)/length(x1)
```

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.98$$

(ii) Дисперсия

```
var<-sum(x1^2)/length(x1)-mean^2
```

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = 2.6596$$

(iii) Медиана

```
x1sort[trunc(length(x1)/2+1)]
```

$$t_{0.5} = 2$$

(iv) Асимметрия

```
asm<-sum((x1-mean)^3)/length(x1)/var^(3/2)
```

$$As = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{(S_n^2)^{\frac{3}{2}}} = 1.581515$$

(v) Эксцесс

```
exc<-sum((x1-mean)^4)/length(x1)/var^2-3
```

$$Es = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{(S_n^2)^2} - 3 = 4.781523$$

(vi) Вероятность $P(X\epsilon[a,b])$

$$P(X\epsilon[1.72,3.13]) = F_n(3.13) - F_n(1.72) = 0.46$$

c) В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из распределения Пуассона, построить оценку максимального правдоподобия параметра λ, а также оценку λ по методу моментов. Найти смещение оценок.

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0,1,2, \ldots$$

Метод максимального правдоподобия:

$$L(\vec{x}, \lambda) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-n\lambda}$$

$$LL(\vec{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i!) - n\lambda$$

$$\frac{dLL(\vec{x}, \lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i - n$$

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}} \sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Оценка максимального правдоподобия:

$$\tilde{\lambda} = 1.98$$

Метод моментов:

$$EX = \lambda$$

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Оценка метода моментов:

$$\hat{\lambda} = \tilde{\lambda} = 1.98$$

Смещение оценки:

$$E\tilde{\lambda} = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}E\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ex_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda = \frac{1}{n}n\lambda = \lambda$$

$\tilde{\lambda} =$ 1.98 - Несмещённая оценка

d) Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости α_1 для параметра λ на базе оценки максимального правдоподобия.

$$\lim_{n\to\infty} P_\lambda\,(a < \lambda < b) = 1 - \alpha_1$$

Испытания Бернулли

$$\sqrt{n}\sqrt{I(\lambda)}\left(\tilde{\lambda} - \lambda\right) \to\ N(0,1)$$

$I(\lambda)$ – информация Фишера

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

$\tilde{\lambda}$ – ОМП

$\xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}}$ – квантиль стандартного нормального распределения уровня $1 - \frac{\alpha_1}{2}$

$$\xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}} = \xi_{0.95} = 1.644854$$

$$\lim_{n\to\infty} P_\lambda\left(-\xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}} < \sqrt{n}\sqrt{I(\lambda)}\left(\tilde{\lambda} - \lambda\right) < \xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}}\right) = 1 - \alpha_1$$

$$P_\lambda\left(-\xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}} < \sqrt{n}\sqrt{I\left(\tilde{\lambda}\right)}\left(\tilde{\lambda} - \lambda\right) < \xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}}\right) =$$

$$= P_\lambda\left(\tilde{\lambda} - \frac{\xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}}}{\sqrt{n}\sqrt{I\left(\tilde{\lambda}\right)}} < \lambda < \tilde{\lambda} + \frac{\xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}}}{\sqrt{n}\sqrt{I\left(\tilde{\lambda}\right)}}\right) =$$

$$= P_\lambda\left(1.98 - \frac{1.644854}{\sqrt{50}}\sqrt{1.98} < \lambda < 1.98\ + \frac{1.644854}{\sqrt{50}}\sqrt{1.98}\right) =$$

$$= P_\lambda(1.652678 < \lambda < 2.307322)$$

$[1.652678, 2.307322]$ – Асимптотический доверительный интервал для λ

e) Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ^2 проверки простой гипотезы согласия с распределением Пуассона с параметром λ_0 . Проверить гипотезу на уровне значимости α_1 . Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

$$H_0: X_1, \dots, X_n \sim Pois(5.00)$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} \to \chi^2_{r-1}$$

$t_{1-\alpha_1, r-1}$ –квантиль распределения хи-квадрат с r-1 степенями свободы уровня $1 - \alpha_1$

$$t_{1-\alpha_1, r-1} = t_{0.90,4} = 7.77944$$

k	1	2	3	4	$r = 5$	Σ
G_k	0	1	2	3,4	>5	
n_k	9	11	15	13	2	50
p_k	0.0067	0.0337	0.0842	0.3158	0.5596	1
np_k	0.335	1.685	4.210	15.790	27.980	50
$n_k - np_k$	8.665	9.315	10.790	-2.790	-25.980	0
$\frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$	224.1260	51.4951	27.6542	0.4930	24.1230	327.8913

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} = 327.8913 > 7.77944$$

$=>$ Отвергаем гипотезу H_0

$$f(327.8913) = 1.0391 \cdot 10^{-69}$$

Наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу $1 - 1.0391 \cdot 10^{-69}$.

f) Построить критерий значимости χ^2 проверки сложной гипотезы согласия с распределением Пуассона. Проверить гипотезу на уровне значимости α_1. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

$$H_0: X_1, \dots, X_n \sim Pois(\lambda)$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k(\lambda))^2}{np_k(\lambda)} \to \chi^2_{r-d-1}$$

Метод минимизации хи-квадрат:

$$\underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k(\lambda))^2}{np_k(\lambda)}$$

Задача реализована в R следующим скриптом:

```
P<-function(a){
p<-0
p[1]<-ppois(0,a)
p[2]<-ppois(1,a) - sum(p)
p[3]<-ppois(2,a) - sum(p)
p[4]<-ppois(4,a) - sum(p)
p[5]<-1-sum(p)
p}
X2<-function(a){g<-n*P(a); f<-(nu-g)^2/g;sum(f)}
nu<-c(9,11,15,13,2)
XM<-nlm(X2,1.92)
```

Получили оптимальную $\hat{\lambda} = 1.888308$ и $\sum_{k=1}^{r} \frac{\left(n_k - np_k(\hat{\lambda})\right)^2}{np_k(\hat{\lambda})} = 1.228687$

$t_{1-\alpha_1, r-d-1}$ – квантиль распределения хи-квадрат с $r - d - 1$ степенями свободы уровня $1 - \alpha_1$, где d – размерность оценки, $d = dim(\lambda) = 1$

$$t_{1-\alpha_1, r-d-1} = t_{0.90,3} = 6.251389$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\left(n_k - np_k(\hat{\lambda})\right)^2}{np_k(\hat{\lambda})} = 1.228687 < 6.251389$$

$=>$ Принимаем гипотезу H_0

$$f(1.330331) = 0.2538675 = 1 - 0.7461325$$

0.7461325 – наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

g) Построить наиболее мощный критерий проверки простой гипотезы пуассоновости с параметром $\lambda = \lambda_0$ при альтернативе пуассоновости с параметром $\lambda = \lambda_1$. Проверить гипотезу на уровне значимости α_1. Что получится, если поменять местами основную и альтернативную гипотезы?

$$H_0: X_1, \dots, X_n \sim Pois(5.00)$$
$$H_1: X_1, \dots, X_n \sim Pois(2.00)$$

$$L_0(\vec{x}) = \frac{5^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-5n}$$

$$L_1(\vec{x}) = \frac{2^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-2n}$$

$$\frac{L_1(\vec{x})}{L_0(\vec{x})} = \frac{2^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-2n}}{5^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-5n}} = 0.4^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{3n}$$

$$P_0\left(0.4^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{3n} > C_{0.1}\right) = 0.1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sim Pois(5 * 50) = Pois(250)$$

$$P_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i > C_{0.1}^*\right) = 0.1$$

$$C_{0.1}^* = 230$$

$$P_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < 230\right) < 0.05$$

$$P_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i > 229\right) > 0.05$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 99$$

$99 < 230 =>$ Отвергаем гипотезу H_0

$$H_0': X_1, \dots, X_n \sim Pois(2.00)$$
$$H_1': X_1, \dots, X_n \sim Pois(5.00)$$

$$L_0(\vec{x}) = \frac{2^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-2n}$$
$$L_1(\vec{x}) = \frac{5^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-5n}$$

$$\frac{L_1(\vec{x})}{L_0(\vec{x})} = \frac{5^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-5n}}{2^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-2n}} = 2.5^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-3n}$$

$$P_0'\left(2.5^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-3n} > C_{0.1}\right) = 0.1$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \sim Pois(100)$$

$$P_0'\left(\sum_{i=1}^n x_i > C_{0.1}^*\right) = 0.1$$
$$C_{0.1}^* = 87$$
$$P_0'\left(\sum_{i=1}^n x_i < 87\right) < 0.1$$
$$P_0'\left(\sum_{i=1}^n x_i > 86\right) > 0.1$$
$$\sum_{i=1}^n x_i = 99$$

$99 > 87$ => принимаем гипотезу H_0'

h) В пунктах (c) – (f) заменить семейство распределений Пуассона на семейство геометрических распределений

$$P_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{(\lambda + 1)^{k+1}}, k = 0,1, \dots$$

$$P_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{(\lambda + 1)^{k+1}} = \frac{\lambda^k}{(\lambda + 1)^k(\lambda + 1)} = \frac{1}{\lambda + 1}\left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)^k$$

$$= \frac{1}{\lambda + 1}\left(1 - \frac{1}{\lambda + 1}\right)^k = pq^k, k = 0,1, \dots$$

$$p = \frac{1}{\lambda + 1}; \quad q = 1 - \frac{1}{\lambda + 1}$$

c) В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из геометрического распределения, построить оценку максимального правдоподобия параметра λ, а также оценку λ по методу моментов. Найти смещение оценок.

Метод максимального правдоподобия:

$$L(\vec{x}, \lambda) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{(\lambda + 1)^{\sum_{i=1}^{n} x_i + n}}$$

$$LL(\vec{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} x_i \log(\lambda + 1) - n\log(\lambda + 1)$$

$$\frac{dLL(\vec{x}, \lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{\lambda + 1}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{\lambda + 1}$$

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{\tilde{\lambda} + 1}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{\tilde{\lambda} + 1} = 0$$

$$\frac{\tilde{\lambda} + 1}{\tilde{\lambda}}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i + n$$

$$1 + \frac{1}{\tilde{\lambda}} = 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Оценка максимального правдоподобия:

$$\tilde{\lambda} = 1.98$$

Метод моментов:

$$EX = \frac{q}{p} = \frac{1 - \frac{1}{\lambda + 1}}{\frac{1}{\lambda + 1}} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda + 1}}{\frac{1}{\lambda + 1}} = \lambda$$

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Оценка метода моментов:

$$\hat{\lambda} = \tilde{\lambda} = 1.98$$

Смещение оценки:

$$E\tilde{\lambda} = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}E\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ex_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda = \frac{1}{n}n\lambda = \lambda$$

$\tilde{\lambda} =$ 1.98 - Несмещённая оценка

d) Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости α_1 для параметра λ на базе оценки максимального правдоподобия.

$$\lim_{n\to\infty} P_\lambda\,(a < \lambda < b) = 1 - \alpha_1$$

Испытания Бернулли:

$$\sqrt{n}\sqrt{I(\lambda)}\big(\tilde{\lambda} - \lambda\big) \to\ N(0,1)$$

$I(\lambda)$ – информация Фишера

$$I(\lambda) = E\left(\frac{dLL(x,\lambda)}{d\lambda}\right)^2 = E\left(\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda+1}x - \frac{1}{\lambda+1}\right)^2 =$$

$$= E\left(\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda+1}(x+1)\right)^2 =$$

$$= E\left(\frac{1}{\lambda^2}x^2 - \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}x(x+1) + \frac{(x+1)^2}{(\lambda+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}Ex^2 - \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}Ex^2 - \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}Ex + \frac{1}{(\lambda+1)^2}Ex^2 + \frac{2}{(\lambda+1)^2}Ex$$

$$+ \frac{1}{(\lambda+1)^2} \boxed{=}$$

$$DX = \frac{q}{p^2} = \frac{1 - \frac{1}{\lambda+1}}{\left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^2} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+1}}{\frac{1}{(\lambda+1)^2}} = \lambda(\lambda+1)$$

$$EX^2 = DX + (EX)^2 = \lambda(\lambda+1) + \lambda^2 = 2\lambda^2 + \lambda$$

$$\boxed{=} \frac{1}{\lambda^2}(2\lambda^2+\lambda) - \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}(2\lambda^2+\lambda) - \frac{2}{\lambda(\lambda+1)}\lambda + \frac{1}{(\lambda+1)^2}(2\lambda^2+\lambda)$$

$$+ \frac{2}{(\lambda+1)^2}\lambda$$

$$+ \frac{1}{(\lambda+1)^2} = 2 + \frac{1}{\lambda} - \frac{4\lambda+2}{(\lambda+1)} - \frac{2}{(\lambda+1)} + \frac{2\lambda^2+\lambda}{(\lambda+1)^2} + \frac{2\lambda}{(\lambda+1)^2} + \frac{1}{(\lambda+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{2\lambda^2 + 4\lambda + 2 - 4\lambda^2 - 8\lambda - 4 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 1}{(\lambda+1)^2} = \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda+1}{(\lambda+1)^2} = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)}$$

$\tilde{\lambda}$ – ОМП

$\xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}}$ – квантиль стандартного нормального распределения уровня $1-\frac{\alpha_1}{2}$

$$\xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}} = \xi_{0.95} = 1.644854$$

$$\lim_{n\to\infty} P_\lambda\left(-\xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}} < \sqrt{n}\sqrt{I(\lambda)}\left(\tilde{\lambda}-\lambda\right) < \xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}}\right) = 1-\alpha_1$$

$$P_\lambda\left(-\xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}} < \sqrt{n}\sqrt{I\left(\tilde{\lambda}\right)}\left(\tilde{\lambda}-\lambda\right) < \xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}}\right) =$$

$$= P_\lambda\left(\tilde{\lambda} - \frac{\xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}}}{\sqrt{n}\sqrt{I\left(\tilde{\lambda}\right)}} < \lambda < \tilde{\lambda} + \frac{\xi_{1-\frac{\alpha_1}{2}}}{\sqrt{n}\sqrt{I\left(\tilde{\lambda}\right)}}\right) =$$

$$= P_\lambda\left(1.98 - \frac{1.644854}{\sqrt{50}}\sqrt{5.9004} < \lambda < 1.98 + \frac{1.644854}{\sqrt{50}}\sqrt{5.9004}\right) =$$

$$= P_\lambda(1.414955 < \lambda < 2.545045)$$

$[1.414955; 2.545045]$ – Асимптотический доверительный интервал для λ

e) Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ^2 проверки простой гипотезы согласия с геометрическим распределением с параметром λ_0 . Проверить гипотезу на уровне значимости α_1. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

$$H_0: X_1, \dots, X_n \sim Geom\left(\frac{1}{5+1}\right) = Geom\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} \to \chi^2_{r-1}$$

$t_{1-\alpha_1,r-1}$ –квантиль распределения хи-квадрат с r-1 степенями свободы уровня $1 - \alpha_1$

$$t_{1-\alpha_1,r-1} = t_{0.9,4} = 7.77944$$

k	1	2	3	4	$r = 5$	Σ
G_k	0	1	2	3,4	>5	
n_k	9	11	15	13	2	50
p_k	0.1667	0.1389	0.1157	0.1768	0.4019	1
np_k	8.335	6.9445	5.785	8.840	20.095	50
$n_k - np_k$	0.665	4.055	9.215	4.160	-18.095	0
$\frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$	0.0531	2.3676	14.6787	1.9576	16.2941	35.3511

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} = 35.3511 > 7.77944$$

=> Отвергаем гипотезу H_0

$$f(35.3511) = 3.9344 \cdot 10^{-7} = 1 - 0.9999996$$

Наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу, равен 0.9999996.

f) Построить критерий значимости χ^2 проверки сложной гипотезы согласия с геометрическим распределением. Проверить гипотезу на уровне значимости α_1 . Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

$$H_0: X_1, \ldots, X_n \sim Geom\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k(\lambda))^2}{np_k(\lambda)} \to \chi^2_{r-d-1}$$

Метод минимизации хи-квадрат

$$\underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k(\lambda))^2}{np_k(\lambda)}$$

Задача реализована в R с помощью следующего скрипта:

```
P<-function(a){
p<-0
p[1]<-pgeom(0,a)
p[2]<-pgeom(1,a) - sum(p)
p[3]<-pgeom(2,a) - sum(p)
p[4]<-pgeom(4,a) - sum(p)
p[5]<-1-sum(p)
p}
X2<-function(a){g<-n*P(a); f<-(nu-g)^2/g;sum(f)}
nu<-c(9,11,15,13,2)
XM<-nlm(X2,1/(1+1.98))
```

Получили оптимальную $\hat{\lambda} = \frac{1}{0.3183507} - 1 = 2.14119$ и $\sum_{k=1}^{r} \frac{\left(n_k - np_k(\hat{\lambda})\right)^2}{np_k(\hat{\lambda})} = 17.13992$

$t_{1-\alpha_1, r-d-1}$ – квантиль распределения хи-квадрат с $r - d - 1$ степенями свободы уровня $1 - \alpha_1$, где d – размерность оценки, $d = dim(\lambda) = 1$

$$t_{1-\alpha_1, r-d-1} = t_{0.9,3} = 6.251389$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\left(n_k - np_k(\hat{\lambda})\right)^2}{np_k(\hat{\lambda})} = 17.13992 > 6.251389$$

$=>$ Отвергаем гипотезу H_0

$$f(17.13992) = 0.9993386 = 1 - 0.0006614$$

0.0006614 – наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

ЗАДАНИЕ 2

а) Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения и гистограмму и полигон частот с шагом h.

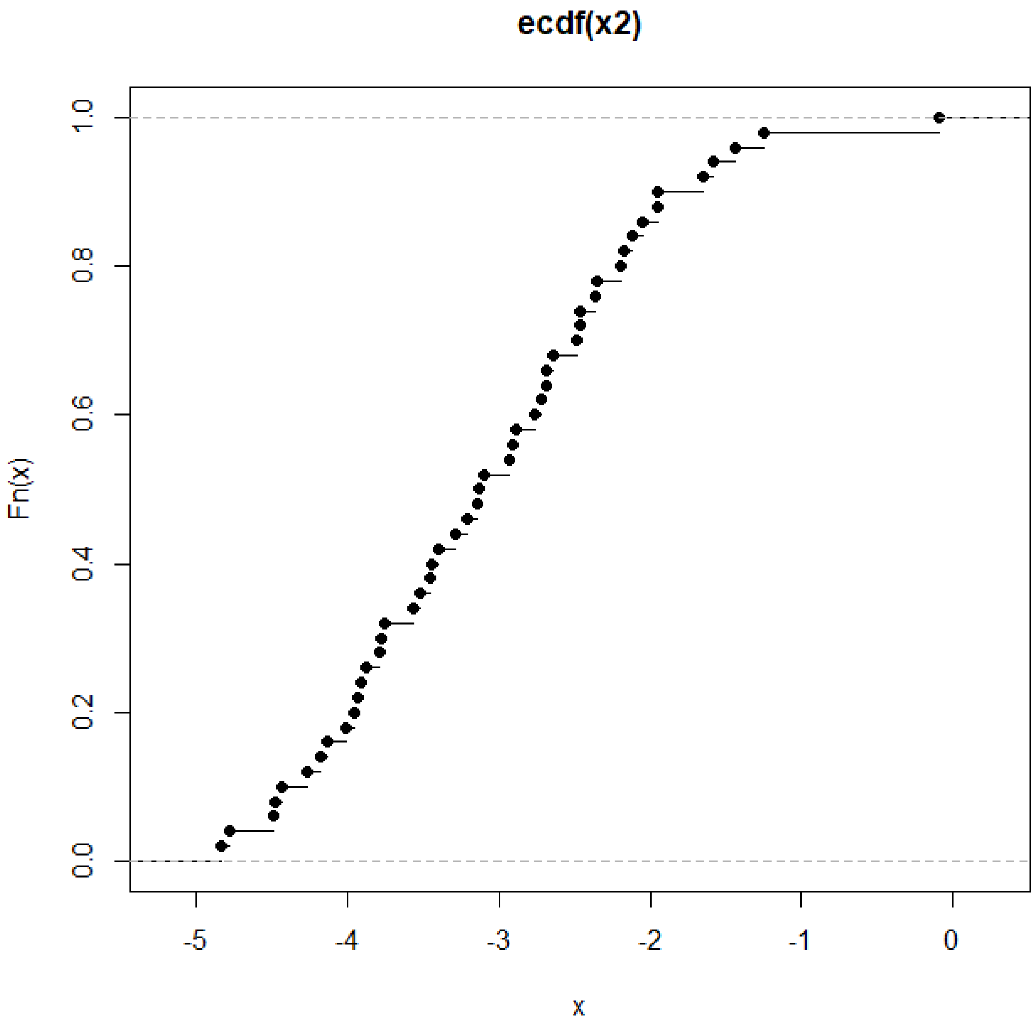
```
x2 <- c(-4.134, -3.794, -2.764, -4.835, -2.717, -1.649, -3.882,
-3.455, -2.177, -4.785, -2.932, -3.147, -2.466, -2.887, -1.583,
-4.009, -2.905, -3.961, -2.193, -3.930, -3.526, -1.251, -2.463,
-4.431, -3.445, -4.493, -3.287, -3.096, -2.056, -2.347, -2.113,
-3.136, -3.775, -3.906, -2.491, -1.949, -4.483, -3.212, -0.087,
-2.367, -1.950, -2.691, -3.571, -4.174, -3.401, -3.760, -2.639,
-2.690, -1.435, -4.263)
```

Вариационный ряд:

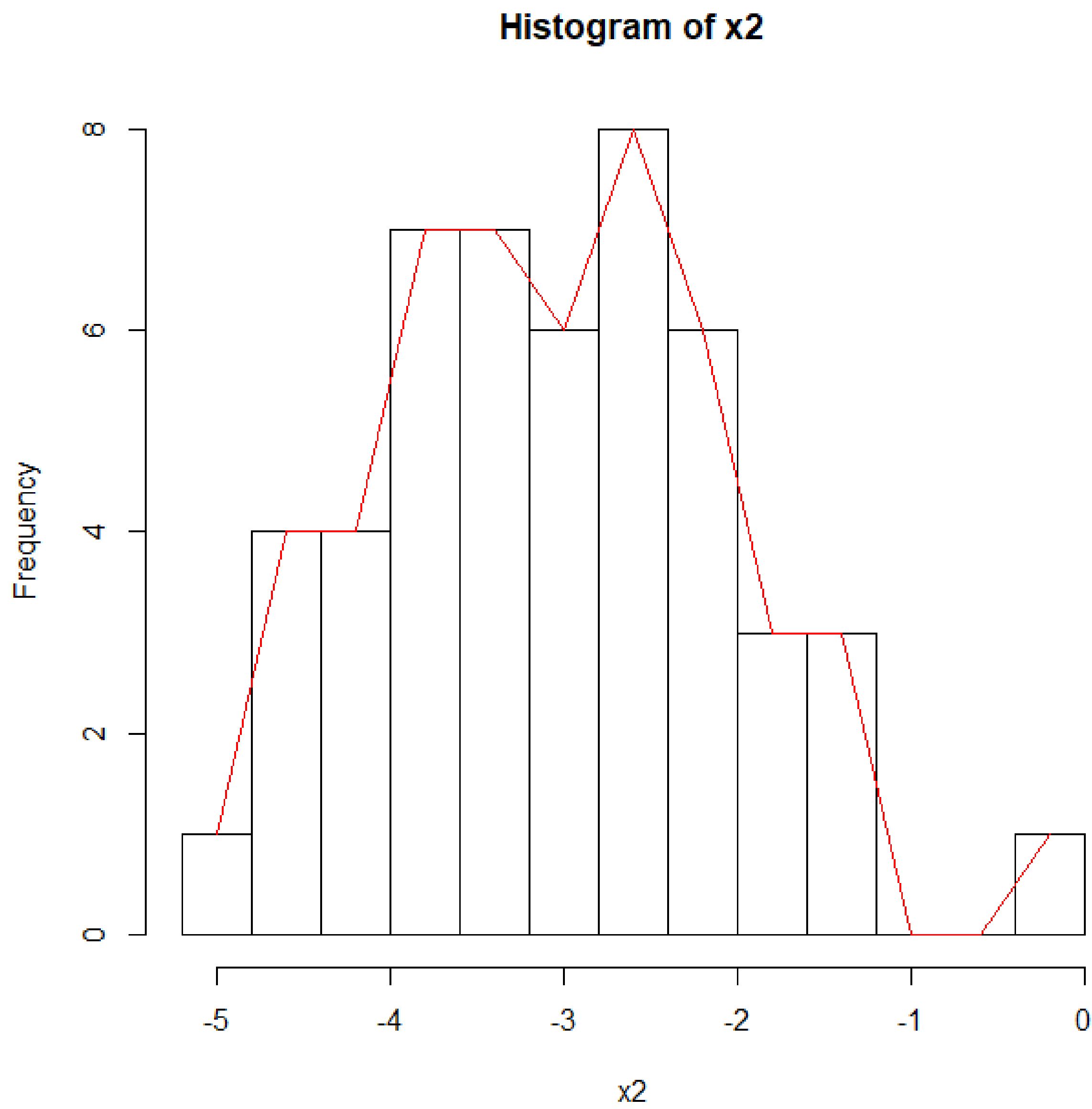
```
-4.835 -4.785 -4.493 -4.483 -4.431 -4.263 -4.174 -4.134 -4.009
-3.961 -3.930 -3.906 -3.882 -3.794 -3.775 -3.760 -3.571 -3.526
-3.455 -3.445 -3.401 -3.287 -3.212 -3.147 -3.136 -3.096 -2.932
-2.905 -2.887 -2.764 -2.717 -2.691 -2.690 -2.639 -2.491 -2.466
-2.463 -2.367 -2.347 -2.193 -2.177 -2.113 -2.056 -1.950 -1.949
-1.649 -1.583 -1.435 -1.251 -0.087
```

Эмпирическая функция распределения:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{x_i \le x\}}$$



Гистограмма и полигон частот с шагом $h = 0.4$:



b) Вычислить выборочные аналоги следующих числовых характеристик:

(i) Математическое ожидание:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = -3.05386$$

(ii) Дисперсия:

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = 0.9977462$$

(iii) Медиана:

$$t_{0.5} = -3.096$$

(iv) Ассиметрия:

$$As = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{(S_n^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.4151716$$

(v) Эксцесс:

$$Es = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{(S_n^2)^2} - 3 = 0.0247966$$

(vi) Вероятность $P(X\epsilon[c,d])$:

$$P(X\epsilon[-3.80,-2.00]) = F_n(-2.00) - F_n(-3.80) = 0.6$$

c) В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из нормального распределения, построить оценку максимального правдоподобия параметров (a, σ^2) и соответствующие оценки по методу моментов. Найти смещение оценок.

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Метод максимального правдоподобия:

$$L(\vec{x}, a, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}$$

$$LL(\vec{x}, a, \sigma^2) = -nlog(\sigma) - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$$

$$\frac{dLL(\vec{x}, a, \sigma^2)}{da} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} a\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - na\right)$$

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\tilde{a}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\tilde{a} = 0$$

$$\tilde{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$$\frac{dLL(\vec{x}, a, \sigma^2)}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$$

$$-\frac{n}{\tilde{\sigma}} + \frac{1}{\tilde{\sigma}^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{a})^2 = 0$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{a})^2 = S_n^2$$

Оценка максимального правдоподобия:

$$(\tilde{a}, \tilde{\sigma}^2) = (-3.05386, 0.9977462).$$

Оценка метода моментов:

$$EX = a, \quad DX = \sigma^2$$

$$\hat{a} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = S_n^2$$

$$(\hat{a}, \hat{\sigma}^2) = (\tilde{a}, \tilde{\sigma}^2) = (-3.05386, 0.9977462).$$

Смещение оценок:

$$E\tilde{a} = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}E\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ex_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = \frac{1}{n}na = a$$

$$y_i = x_i - a;$$

$$S_n^2(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a - \bar{x} + a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = S_n^2(X)$$

$$E\tilde{\sigma}^2 = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a - \bar{x} + a)^2 = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i - a)^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E(x_i - a)^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{i<j\le n} Ey_iy_j =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i - a)^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E(x_i - a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - \frac{1}{n^2} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$\breve{\sigma}^2 = \tilde{S}_n^2 = \frac{n}{n-1}S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{a})^2$$

$$E\breve{\sigma}^2 = E\frac{n}{n-1}S_n^2 = \frac{n}{n-1}ES_n^2 = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

$(\tilde{a}, \breve{\sigma}^2) = (-3.05386, 1.018108)$ – Несмещённая оценка

d) Построить доверительные интервалы уровня значимости α_2 для параметров (a, σ^2).

$$\sqrt{n-1}\frac{\bar{x}-a}{\sqrt{S_n^2}} \sim Student(n-1)$$

$t_{1-\frac{\alpha_2}{2},n-1}-$ квантиль распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы уровня $1-\frac{\alpha_2}{2}$

$t_{1-\frac{\alpha_2}{2},n-1} = t_{0.975,49} = 2.009575.$

$$P_{a,\sigma^2}\left(-t_{1-\frac{\alpha_2}{2},n-1} < \sqrt{n-1}\frac{\bar{x}-a}{\sqrt{S_n^2}} < t_{1-\frac{\alpha_2}{2},n-1}\right) = 1-\alpha_2 =$$

$$= P_{a,\sigma^2}\left(\bar{x} - \frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n-1}}t_{1-\frac{\alpha_2}{2},n-1} < a < \bar{x} + \frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n-1}}t_{1-\frac{\alpha_2}{2},n-1}\right) =$$

$$= P_{a,\sigma^2}\left(-3.05386 - \frac{\sqrt{0.9977462}}{\sqrt{50-1}}2.009575 < a <\right.$$

$$\left. < -3.05386 + \frac{\sqrt{0.9977462}}{\sqrt{50-1}}2.009575\right) =$$

$$= P_{a,\sigma^2}(-3.340618 < a < -2.767102)$$

$[-3.340618, -2.767102]$ – доверительный интервал для a

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

$k_{\frac{\alpha_2}{2},n-1}-$ квантиль распределения хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы уровня $\frac{\alpha_2}{2}$

$k_{1-\frac{\alpha_2}{2},n-1}-$ квантиль распределения хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы уровня $1-\frac{\alpha_2}{2}$

$$k_{\frac{\alpha_2}{2},n-1} = k_{0.025,49} = 31.55492$$

$$k_{1-\frac{\alpha_2}{2},n-1} = k_{0.975,49} = 70.22241$$

$$P_{a,\sigma^2}\left(k_{\frac{\alpha_2}{2},n-1} < \frac{nS_n^2}{\sigma^2} < k_{1-\frac{\alpha_2}{2},n-1}\right) = 1 - \alpha_2 =$$

$$= P_{a,\sigma^2}\left(\frac{nS_n^2}{k_{1-\frac{\alpha_2}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{nS_n^2}{k_{\frac{\alpha_2}{2},n-1}}\right) =$$

$$= P_{a,\sigma^2}\left(\frac{50 * 0.9977462}{70.22241} < \sigma^2 < \frac{50 * 0.9977462}{31.55492}\right) =$$

$$= P_{a,\sigma^2}(0.7104187 < \sigma^2 < 1.580968)$$

$[0.7104187, 1.580968]$ – Доверительный интервал для σ^2

e) С использованием теоремы Колмогорова построить критерий значимости проверки простой гипотезы согласия с нормальным распределением с параметрами α_0, σ_0^2. Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

$$\sqrt{\mathrm{n}}\,\sup|F_n(x) - F_0(x)| \to K(x)$$

где $K(x)$ - функция Колмогорова

$$K\left(C_{\alpha_2}\right) = 1 - \alpha_2 = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$C_{\alpha_2} = C_{0.05} = 1.3323$$

$$H_0: X_1, \dots, X_n \sim N(-3.00{,}1.00)$$

i	$x_{(i)}$	$\Phi\left(x_{(i)}\right)$	$\lvert F_n\left(x_{(i)}\right) - F_0\left(x_{(i)}\right)\rvert$ слева	$\lvert F_n\left(x_{(i)}\right) - F_0\left(x_{(i)}\right)\rvert$ справа
1	-4.835	0.03325284	0.03325284	0.01325284
2	-4.785	0.03713066	0.01713066	0.00286934
3	-4.493	0.06771859	0.02771859	0.00771859
4	-4.483	0.06903721	0.00903721	0.01096279
5	-4.431	0.07621511	0.00378489	0.02378489
6	-4.263	0.10329459	0.00329459	0.01670541
7	-4.174	0.12019751	0.00019751	0.01980249
8	-4.134	0.12839727	0.01160273	0.03160273
9	-4.009	0.15648732	0.00351268	0.02351268
10	-3.961	0.16827608	0.01172392	0.03172392
11	-3.930	0.17618554	0.02381146	0.04381146
12	-3.906	0.18246793	0.03753207	0.05753207
13	-3.882	0.18888840	0.05111160	0.07111160
14	-3.794	0.21359772	0.04640228	0.06640228

15	-3.775	0.21916983	0.06083017	0.08083017
16	-3.760	0.22362729	**0.07637271**	**0.09637271**
17	-3.571	0.28399982	0.03600018	0.05600018
18	-3.526	0.29944410	0.04055590	0.06055590
19	-3.455	0.32455462	0.03544538	0.05544538
20	-3.445	0.32815988	0.05184012	0.07184012
21	-3.401	0.34421006	0.05578994	0.07578994
22	-3.287	0.38705616	0.03294384	0.05294384
23	-3.212	0.41605352	0.02394648	0.04394648
24	-3.147	0.44156601	0.01843399	0.03843399
25	-3.136	0.44591064	0.03408936	0.05408936
26	-3.096	0.46176029	0.03823971	0.05823971
27	-2.932	0.52710718	0.00710718	0.01289282
28	-2.905	0.53784259	0.00215741	0.02215741
29	-2.887	0.54498472	0.01501528	0.03501528
30	-2.764	0.59328366	0.01328366	0.00671634
31	-2.717	0.61141158	0.01141158	0.00858842
32	-2.691	0.62133924	0.00133924	0.01866076
33	-2.690	0.62171952	0.01828048	0.03828048
34	-2.639	0.64095028	0.01904972	0.03904972
35	-2.491	0.69462389	0.01462389	0.00537611
36	-2.466	0.70332923	0.00332923	0.01667077
37	-2.463	0.70436619	0.01563381	0.03563381
38	-2.367	0.73663318	0.00336682	0.02336682
39	-2.347	0.74312186	0.01687814	0.03687814
40	-2.193	0.79016676	0.01016676	0.00983324
41	-2.177	0.79474600	0.00525400	0.02525400
42	-2.113	0.81246055	0.00753945	0.02753945
43	-2.056	0.82741518	0.01258482	0.03258482

44	-1.950	0.85314094	0.00685906	0.02685906
45	-1.949	0.85337071	0.02662929	0.04662929
46	-1.649	0.91165228	0.01165228	0.00834772
47	-1.583	0.92175854	0.00175854	0.01824146
48	-1.435	0.94120855	0.00120855	0.01879145
49	-1.251	0.95985449	0.00014551	0.02014551
50	-0.087	0.99821013	0.01821013	0.00178987

$$\sup|F_n(x) - F_0(x)| = 0.09637271$$

$$\sqrt{\mathrm{n}}\sup|F_n(x) - F_0(x)| = 0.681458 < 1.3323$$

=> Принимаем гипотезу H_0

$$K(0.681458) = 0.2944376 = 1 - 0.7055624$$

0.7055624 – наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

f) Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ^2 проверки простой гипотезы согласия с нормальным распределением с параметрами (a_0, σ_0^2). Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

$$H_0: X_1, \dots, X_n \sim N(-3.00, 1.00)$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} \to \chi^2_{r-1}$$

$t_{1-\alpha_2, r-1}$ –квантиль распределения хи-квадрат с r-1 степенями свободы уровня $1 - \alpha_2$

$$t_{1-\alpha_2, r-1} = t_{0.95,4} = 9.487729$$

k	1	2	3	4	5	Σ
I_k	$(-\infty, -4)$	$(-4, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, +\infty)$	
n_k	9	17	17	6	1	50
p_k	0.1587	0.3413	0.3413	0.1359	0.0228	1
np_k	7.935	17.065	17.065	6.795	1.140	50
$n_k - np_k$	1.065	-0.065	-0.065	0.765	-0.140	0
$\frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$	0.1429	0.0002	0.0002	0.0930	0.0172	0.2535

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} = 0.2535 < 9.487729$$

$=>$ Принимаем гипотезу H_0

$$f(0.2535) = 0.07385212 = 1 - 0.9926148$$

0.9926148 – наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

g) Построить критерий проверки значимости χ^2 сложной гипотезы согласия с нормальным распределением. Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

$$H_0: X_1, \dots, X_n \sim N(a, \sigma^2)$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k(a,\sigma^2))^2}{np_k(a,\sigma^2)} \to \chi^2_{r-d-1}$$

Метод минимизации хи-квадрат

$$\underset{a,\sigma^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k(a,\sigma^2))^2}{np_k(a,\sigma^2)}$$

Задача реализована в R с помощью скрипта:

```
P<-function(a){
p<-0
p[1]<-pnorm(-4,a[1],a[2])
p[2]<-pnorm(-3,a[1],a[2]) - sum(p)
p[3]<-pnorm(-2,a[1],a[2]) - sum(p)
p[4]<-pnorm(-1,a[1],a[2]) - sum(p)
p[5]<-1-sum(p)
p}
X2<-function(a){g<-n*P(a); f<-(nu-g)^2/g;sum(f)}
nu<-c(9,17,17,6,1)
a<-c(-3,1)
XM<-nlm(X2,a)
```

Получаем оптимальные $(\hat{a}, \hat{\sigma}^2) = (-3.068423, 1.005747)$ и $\sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k(\hat{a},\hat{\sigma}^2))^2}{np_k(\hat{a},\hat{\sigma}^2)} = 0.04251365.$

$t_{1-\alpha_2, r-d-1}$ –квантиль распределения хи-квадрат с $r-d-1$ степенями свободы уровня $1-\alpha_2$, где d – размерность оценки, $d = \dim(a, \sigma^2) = 2$

$$t_{1-\alpha_2, r-d-1} = t_{0.95,2} = 5.991465$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k(\hat{a}, \hat{\sigma}^2))^2}{np_k(\hat{a}, \hat{\sigma}^2)} = 0.04251365 < 5.991465$$

=> Принимаем гипотезу H_0

$$f(0.04251365) = 0.0210325 = 1 - 0.9789675$$

0.9789675 – наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть гипотезу.

h) Построить наиболее мощный критерий проверки простой гипотезы о нормальности с параметрами $(a,\sigma^2) = (a_0, \sigma_0^2)$ при альтернативе нормальности с параметром $(a,\sigma^2) = (a_1, \sigma_1^2)$. Проверить гипотезу на уровне значимости α_2 . Что получится, если поменять местами основную и альтернативную гипотезы?

$$H_0\colon X_1, \dots, X_n \sim N(-3.00, 1.00)$$

$$H_1\colon X_1, \dots, X_n \sim N(-6.00, 1.00)$$

$$L_0(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i+3)^\wedge 2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{9}{2}n}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

$$L_1(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i+6)^\wedge 2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 6\sum_{i=1}^{n} x_i - 18n}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\frac{L_1(\vec{x})}{L_0(\vec{x})} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 6\sum_{i=1}^{n} x_i - 18n}}{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{9}{2}n}} = e^{-3\sum_{i=1}^{n} x_i - 13.5n}$$

$$P_0\left(e^{-3\sum_{i=1}^{n} x_i - 13.5n} > C_{0.05}\right) = 0.05$$

$$\sqrt{50}\frac{\bar{x}+3}{\sqrt{1}} \sim N(0,1)$$

$$P_0\left(\sqrt{50}(\bar{x}+3) > C_{0.05}^*\right) = 0.05$$

$C_{0.05}^* = \xi_{0.95}$ - квантиль стандартного нормального распределения уровня 0.95

$$C_{0.05}^* = 1.644854$$

$$\sqrt{50}(\bar{x}+3) = -0.3808477$$

$= -0.3808477 < 1.644854 =>$ Принимаем гипотезу H_0

$$H_0'\colon X_1, \dots, X_n \sim N(-6.00, 1.00)$$

$$H_1'\colon X_1, \dots, X_n \sim N(-3.00, 1.00)$$

$$L_0(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i+6)^\wedge 2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 6\sum_{i=1}^{n} x_i - 18n}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

$$L_1(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i+3)^\wedge 2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{9}{2}n}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\frac{L_1(\vec{x})}{L_0(\vec{x})} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{9}{2}n}}{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 6\sum_{i=1}^{n} x_i - 18n}} = e^{3\sum_{i=1}^{n} x_i + 13.5n}$$

$$P_0'\left(e^{3\sum_{i=1}^{n} x_i + 13.5n} > C_{0.1}\right) = 0.1$$

$$\sqrt{50}\,\frac{\bar{x}+6}{\sqrt{1}} \sim N(0,1)$$

$$P_0'\left(\sqrt{50}(\bar{x}+6) > C_{0.1}^*\right) = 0.1$$

$C_{0.05}^* = \xi_{0.95}$ - квантиль стандартного нормального распределения уровня 0.95

$$C_{0.05}^* = 1.644854$$

$$\sqrt{50}(\bar{x}+6) = 20.83236$$

$20.83236 > 1.644854 =>$ Отвергаем гипотезу H_0'

i) В пунктах (c) – (g) заменить семейство нормальных распределений на двухпараметрическое семейство распределений Лапласа с плотностями

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|x-a|} = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x-\beta|}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}; \quad \beta = a$$

c) В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из распределения Лапласа, построить оценку максимального правдоподобия параметров (a, σ^2) и соответствующие оценки по методу моментов. Найти смещение оценок.

Метод максимального правдоподобия:

$$L(\vec{x}, a, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^n 2^{n/2}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i - a|}$$

$$LL(\vec{x}, a, \sigma^2) = -nlog(\sigma) - \frac{n}{2}\log(2) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i - a| =$$

$$= -nlog(\sigma) - \frac{n}{2}\log(2) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{i=1}^{k}\left(a - x_{(i)}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{i=k+1}^{n}\left(x_{(i)} - a\right) =$$

$$= -nlog(\sigma) - \frac{n}{2}\log(2) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}ka + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{i=1}^{k} x_{(i)} - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{i=k+1}^{n} x_{(i)} +$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(n-k-1)a =$$

$$= -nlog(\sigma) - \frac{n}{2}\log(2) + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{i=1}^{k} x_{(i)} - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\sum_{i=k+1}^{n} x_{(i)} + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(n-2k-1)a$$

$$\frac{dLL(\vec{x}, a, \sigma^2)}{da} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(n-2k-1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\tilde{\sigma}}(n-2k-1) = 0$$

$k = \frac{n-1}{2}$ – выборочная медиана

$$\tilde{a} \epsilon \left(x_{(\frac{n}{2})}, x_{(\frac{n}{2}+1)} \right) = \left(x_{(25)}, x_{(26)} \right) = (-3.136, -3.096\ ) = -3.1$$

$$\frac{dLL(\vec{x}, a, \sigma^2)}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sqrt{2}}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} |x_i - a|$$

$$-\frac{n}{\tilde{\sigma}} + \frac{\sqrt{2}}{\tilde{\sigma}^2} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \tilde{a}| = 0$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \tilde{a}|$$

Оценка максимального правдоподобия:

$$(\tilde{a}, \tilde{\sigma}^2) = (-3.1, 0.81794).$$

Оценка метода моментов:

$$EX = \beta = a, \quad DX = \frac{2}{\alpha^2} = \sigma^2$$

$$\hat{a} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = S_n^2$$

$$(\hat{a}, \hat{\sigma}^2) = (\tilde{a}, \tilde{\sigma}^2) = (-3.05386, 0.9977462).$$

Смещение оценок:

$$E\hat{a} = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ex_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = \frac{1}{n} na = a$$

$$y_i = x_i - a;$$

$$S_n^2(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a - \bar{x} + a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = S_n^2(X)$$

$$E\ \hat{\sigma}^2 = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a - \bar{x} + a)^2 = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(x_i - a)^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E(x_i - a)^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{i<j\le n}Ey_iy_j =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(x_i - a)^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E(x_i - a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - \frac{1}{n^2} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$\breve{\sigma}^2 = \tilde{S}_n^2 = \frac{n}{n-1}S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{a})^2$$

$$E\breve{\sigma}^2 = E\frac{n}{n-1}S_n^2 = \frac{n}{n-1}ES_n^2 = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

$(\tilde{a}, \breve{\sigma}^2) = (-3.05386, 1.018108)$ – Несмещённая оценка

d) Построить доверительные интервалы уровня значимости α_2 для параметров (a, σ^2).

$$\lim_{n\to\infty} P_{a,\sigma^2}(t_1 < a < t_2) = 1 - \alpha_2$$

Испытания Бернулли

$$\sqrt{n}\sqrt{I(a)}(\tilde{a} - a) \to N(0,1)$$

$I(a)$ – информация Фишера

$$I(a) = E\left(\frac{dLL(x, a, \sigma^2)}{da}\right)^2 = E\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma} sign(x - a)\right)^2 = \frac{2}{\sigma^2}$$

$\tilde{a}$ – ОМП

$\xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}$ – квантиль стандартного нормального распределения уровня $1 - \frac{\alpha_2}{2}$

$$\xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}} = \xi_{0.975} = 1.959964$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{a,\sigma^2}\left(-\xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}} < \sqrt{n}\sqrt{I(a)}(\tilde{a} - a) < \xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}\right) = 1 - \alpha_2$$

$$P_{a,\sigma^2}\left(-\xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}} < \sqrt{n}\sqrt{I(\tilde{a})}(\tilde{a} - a) < \xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}\right) =$$

$$= P_{a,\sigma^2}\left(\tilde{a} - \frac{\xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}}{\sqrt{n}\sqrt{I(\tilde{a})}} < a < \tilde{a} + \frac{\xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}}{\sqrt{n}\sqrt{I(\tilde{a})}}\right) =$$

$$= P_{a,\sigma^2}\left(-3.1 - \frac{1.959964}{\sqrt{100}}\sqrt{0.81794} < a < -3.1 + \frac{1.959964}{\sqrt{100}}\sqrt{0.81794}\right) =$$

$$= P_\lambda(-3.277259 < a < -2.922741)$$

$[-3.277259, -2.922741]$ – Асимптотический доверительный интервал для a

$$\lim_{n\to\infty} P_{a,\sigma^2}\,(t_1 < \sigma^2 < t_2) = 1 - \alpha_2$$

Испытания Бернулли

$$\sqrt{n}\sqrt{I(\sigma)}(\tilde{\sigma} - \sigma) \to\ N(0,1)$$

$I(\sigma)$ – информация Фишера

$$I(\sigma) = E\left(\frac{dLL(x,a,\sigma^2)}{d\sigma}\right)^2 = E\left(-\frac{1}{\sigma} + \frac{\sqrt{2}}{\sigma^2}|x-a|\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sigma}E|x-a| + \frac{2}{\sigma^2}E(x-a)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sigma}E|x-a| + \frac{2}{\sigma^2}Ex^2 - \frac{4a}{\sigma^2}Ex + \frac{2a^2}{\sigma^2}\right) \boxed{=}$$

$$EX = \beta = a, \quad DX = \frac{2}{\alpha^2} = \sigma^2$$

$$EX^2 = DX + (EX)^2 = \sigma^2 + a^2$$

$$E|X-a| = \int_{-\infty}^{\infty} |x-a| \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|x-a|} dx =$$

$$t = x - a, dt = dx, x = -\infty => t = -\infty, x = \infty => t = \infty$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} |t| e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|t|} dt = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\int_0^{\infty} t e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}t} dt = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\int_0^{\infty} t\left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}t}\right)' dt =$$

$$= -\int_0^{\infty} t\left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}t}\right)' dt = -(te^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}t})|_{t=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}t} dt =$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}t}|_{t=0}^{\infty} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{=} \frac{1}{\sigma^2}\left(1 - 2 + \frac{2(\sigma^2 + a^2)}{\sigma^2} - \frac{4a^2}{\sigma^2} + \frac{2a^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}$$

$\tilde{\sigma}$– ОМП

$\xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}$ – квантиль стандартного нормального распределения уровня $1-\frac{\alpha_2}{2}$

$$\xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}} = \xi_{0.975} = 1.959964$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{a,\sigma^2}\left(-\xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}} < \sqrt{n}\sqrt{I(\sigma^2)}(\tilde{\sigma}^2-\sigma^2) < \xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}\right) = 1-\alpha_2$$

$$P_{a,\sigma^2}\left(-\xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}} < \sqrt{n}\sqrt{I(\tilde{\sigma}^2)}(\tilde{\sigma}^2-\sigma^2) < \xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}\right) =$$

$$= P_{a,\sigma^2}\left(\tilde{\sigma}^2 - \frac{\xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}}{\sqrt{n}\sqrt{I(\tilde{\sigma}^2)}} < \sigma^2 < \tilde{\sigma}^2 + \frac{\xi_{1-\frac{\alpha_2}{2}}}{\sqrt{n}\sqrt{I(\tilde{\sigma}^2)}}\right) =$$

$$= P_{a,\sigma^2}\left(0.81794 - \frac{1.959964 * \sqrt{0.81794}}{\sqrt{50}} < \sigma^2 < 0.81794 + \frac{1.959964 * \sqrt{0.81794}}{\sqrt{50}}\right)$$

$$= P_{a,\sigma^2}(0.5672576 < \sigma^2 < 1.068622)$$

$[0.5672576, 1.068622]$ – Асимптотический доверительный интервал для σ^2

e) И использованием теоремы Колмогорова построить критерий значимости проверки простой гипотезы согласия с Лапласа с параметрами α_0, σ_0^2. Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

$$\sqrt{\mathrm{n}}\sup|F_n(x) - F_0(x)| \to K(x)$$

где $K(x)$ - функция Колмогорова

$$K\left(C_{\alpha_2}\right) = 1 - \alpha_2 = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$C_{\alpha_2} = C_{0.05} = 1.3323$$

$$H_0 \colon X_1, \dots, X_n \sim Laplace\left(\sqrt{2}, -3\right)$$

i	$x_{(i)}$	$F_{\sqrt{2},-3}(x_{(i)})$	$\lvert F_n\left(x_{(i)}\right) - F_0\left(x_{(i)}\right)\rvert$ слева	$\lvert F_n\left(x_{(i)}\right) - F_0\left(x_{(i)}\right)\rvert$справа
1	-4.835	0.03731988	0.03731988	0.01731988
2	-4.785	0.04005433	0.02005433	0.00005433
3	-4.493	0.06053291	0.02053291	0.00053291
4	-4.483	0.06139506	0.00139506	0.01860494
5	-4.431	0.06608016	0.01391984	0.03391984
6	-4.263	0.08380196	0.01619804	0.03619804
7	-4.174	0.09504224	0.02495776	0.04495776
8	-4.134	0.10057361	0.03942639	0.05942639
9	-4.009	0.12002099	0.03997901	0.05997901
10	-3.961	0.12845117	0.05154883	0.07154883
11	-3.930	0.13420782	0.06579218	0.08579218
12	-3.906	0.13884117	0.08115883	0.10115883
13	-3.882	0.14363448	0.09636552	0.11636552
14	-3.794	0.16266982	0.09733018	0.11733018

15	-3.775	0.16710003	0.11289997	0.13289997
16	-3.760	0.17068262	**0.12931738**	**0.14931738**
17	-3.571	0.22298225	0.09701775	0.11701775
18	-3.526	0.23763402	0.10236598	0.12236598
19	-3.455	0.26273369	0.09726631	0.11726631
20	-3.445	0.26647570	0.11352430	0.13352430
21	-3.401	0.28358402	0.11641598	0.13641598
22	-3.287	0.33319530	0.08680470	0.10680470
23	-3.212	0.37047828	0.06952172	0.08952172
24	-3.147	0.40614844	0.05385156	0.07385156
25	-3.136	0.41251603	0.06748397	0.08748397
26	-3.096	0.43652410	0.06347589	0.08347589
27	-2.932	0.54584363	0.02584363	0.00584363
28	-2.905	0.56285812	0.02285812	0.00285812
29	-2.887	0.57384550	0.01384550	0.00615450
30	-2.764	0.64188517	0.06188517	0.04188517
31	-2.717	0.66491452	0.06491452	0.04491452
32	-2.691	0.67701170	0.05701170	0.03701170
33	-2.690	0.67746815	0.03746815	0.01746815
34	-2.639	0.69991163	0.03991163	0.01991163
35	-2.491	0.75658364	0.07658364	0.05658364
36	-2.466	0.76503935	0.06503935	0.04503935
37	-2.463	0.76603409	0.04603409	0.02603409
38	-2.367	0.79573648	0.05573648	0.03573648
39	-2.347	0.80143299	0.04143299	0.02143299
40	-2.193	0.84029350	0.06029350	0.04029350
41	-2.177	0.84386667	0.04386667	0.02386667
42	-2.113	0.85737759	0.03737759	0.01737759
43	-2.056	0.86842323	0.02842323	0.00842323

44	-1.950	0.88674025	0.02674025	0.00674025
45	-1.949	0.88690031	0.00690031	0.01309969
46	-1.649	0.92600440	0.02600440	0.00600440
47	-1.583	0.93259849	0.01259849	0.00740151
48	-1.435	0.94532733	0.00532733	0.01467267
49	-1.251	0.95785363	0.00214637	0.02214637
50	-0.087	0.99187453	0.01187453	0.00812547

$$\sup|F_n(x) - F_0(x)| = 0.14931738$$

$$\sqrt{\mathrm{n}}\sup|F_n(x) - F_0(x)| = 1.055833 < 1.3323$$

=> Принимаем гипотезу H_0

$$K(1.055833) = 0.8057066 = 1 - 0.1942934$$

0.1942934 - наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть гипотезу

f) Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ^2 проверки простой гипотезы согласия с распределением Лапласа с параметрами (a_0, σ_0^2). Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

$$H_0: X_1, \dots, X_n \sim Laplace\left(\sqrt{2}, -3\right)$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} \to \chi^2_{r-1}$$

$t_{1-\alpha_2, r-1}$ –квантиль распределения хи-квадрат с r-1 степенями свободы уровня $1 - \alpha_2$

$$t_{1-\alpha_2, r-1} = t_{0.95,4} = 9.487729$$

k	1	2	3	4	5	Σ
I_k	$(-\infty, -4)$	$(-4, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, +\infty)$	
n_k	9	17	17	6	1	50
p_k	0.1216	0.3784	0.3784	0.0920	0.0296	1
np_k	6.08	18.92	18.92	4.60	1.48	50
$n_k - np_k$	2.92	-1.92	-1.92	1.40	-0.48	0
$\frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$	1.4024	0.1948	0.1948	0.4261	0.1557	2.3738

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} = 2.3738 < 9.487729$$

=> Принимаем гипотезу H_0

$$f(2.3738) = 0.3326329 = 1 - 0.6673671$$

0.6673671 – наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть гипотезу

g) Построить критерий проверки значимости χ^2 сложной гипотезы согласия с распределением Лапласа. Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

$$H_0: X_1, \dots, X_n \sim Laplace(\alpha, \beta)$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k(\alpha, \beta))^2}{np_k(\alpha, \beta)} \to \chi^2_{r-d-1}$$

Метод минимизации хи-квадрат

$$\underset{a,\sigma^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k(\alpha, \beta))^2}{np_k(\alpha, \beta)}$$

Задача реализована в R с помощью скрипта:

```
P<-function(a){
if (a[1]<=0) return(1000)
p<-0
if (-4<=a[2]) p[1]<-1/2*exp(a[1]*(-4-a[2])) else p[1]<-1-1/2*exp(-a[1]*(-4-a[2]))
if (-3<=a[2]) p[2]<-1/2*exp(a[1]*(-3-a[2]))-sum(p) else p[2]<-1-1/2*exp(-a[1]*(-3-a[2]))-sum(p)
if (-2<=a[2]) p[3]<-1/2*exp(a[1]*(-2-a[2]))-sum(p) else p[3]<-1-1/2*exp(-a[1]*(-2-a[2]))-sum(p)
if (-1<=a[2]) p[4]<-1/2*exp(a[1]*(-1-a[2]))-sum(p) else p[4]<-1-1/2*exp(-a[1]*(-1-a[2]))-sum(p)
p[5]<-1-sum(p)
return(p)}
X2<-function(a){g<-50*P(a);f<-(nu-g)^2/g;sum(f)}
nu<-c(9,17,17,6,1)
a<-c(sqrt(2),-3)
XM<-nlm(X2,a)
```

Получаем оптимальные $\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = (1.177500, -3.029983)$, то есть $(\hat{a}, \hat{\sigma}^2) = (-3.029983, 1.201031)$, и $\sum_{k=1}^{r} \frac{\left(n_k - np_k(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\right)^2}{np_k(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} = 1.049736$.

$t_{1-\alpha_2, r-d-1}$ – квантиль распределения хи-квадрат с $r - d - 1$ степенями свободы уровня $1 - \alpha_2$, где d – размерность оценки, $d = \dim(a, \sigma^2) = 2$

$$t_{1-\alpha_2, r-d-1} = t_{0.95,2} = 5.991465$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\left(n_k - np_k(\hat{\alpha}, \hat{\beta})\right)^2}{np_k(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} = 1.049736 < 5.991465$$

$=>$ Принимаем гипотезу H_0

$$f(1.049736) = 0.4083665 = 1 - 0.5916335$$

0.5916335 – наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований