

Цифровая обработка сигналов

Лекция №3

Санкт-Петербург
2020

Разностный оператор

$$s_n = e^{i\omega n} \quad y_n = \Delta s_n = s_{n+1} - s_n \quad (3.1)$$

$$\Delta(e^{i\omega n}) = e^{i\omega(n+1)} - e^{i\omega n} = 2ie^{i\frac{\omega}{2}} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{i\omega n} \quad (3.2)$$

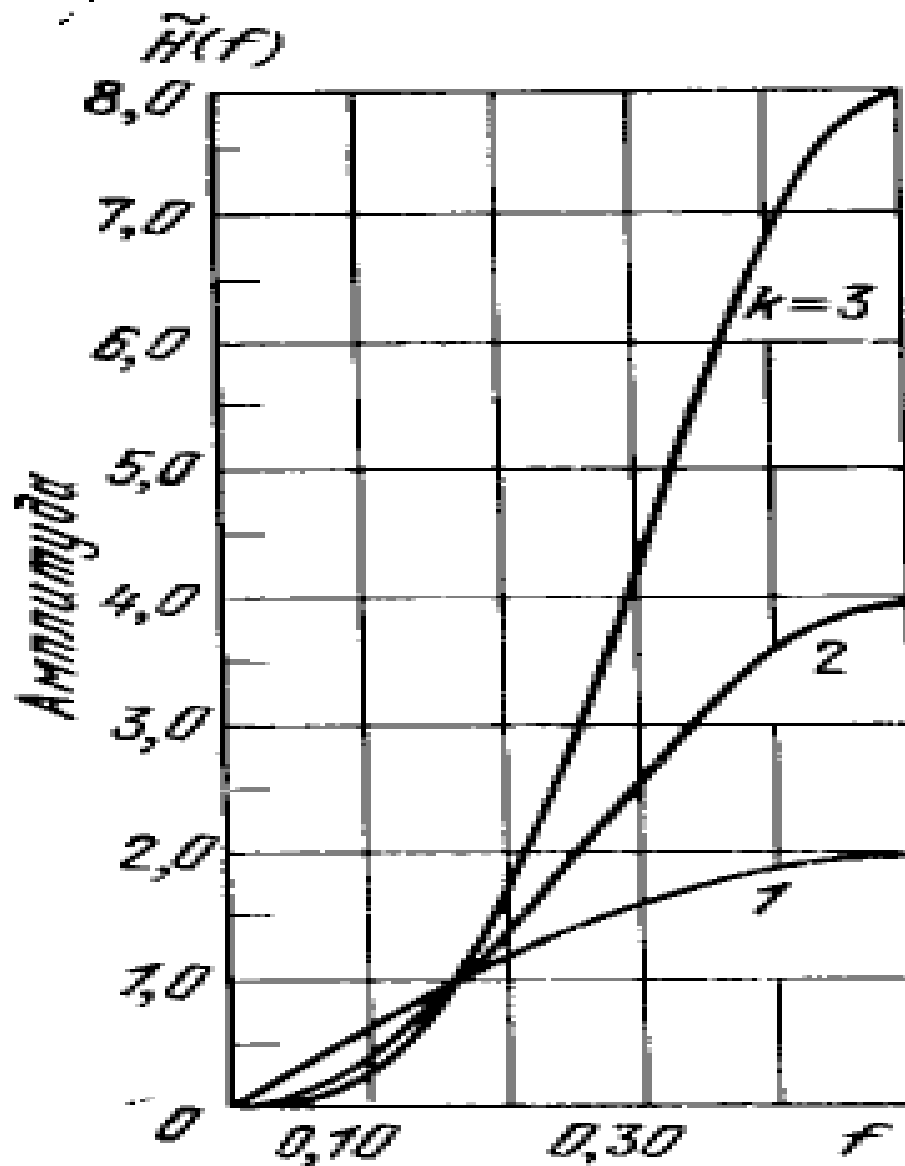
$$\Delta^2(s_n) = \Delta(\Delta s_n) = s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1} \quad (3.3)$$

$$\Delta^k(s_n) = \Delta(\Delta^{k-1} s_n) \quad (3.4)$$

$$\Delta^k(e^{i\omega n}) = i^k e^{i\frac{k\omega}{2}} \left[2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]^k e^{i\omega n} \quad (3.5)$$

Разностный оператор Δ^k

График изменения передаточной функции:



Численное дифференцирование

Аппроксимация производной разностью первого порядка:

$$s_n = e^{i\omega n} \quad s'_n = \frac{s_{n+1} - s_{n-1}}{2h} \quad (3.6)$$

$$h = T = 1 \quad H(\omega) = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2} = i \sin(\omega) \quad (3.7)$$

Точное значение производной от $e^{i\omega t}$ равно $i\omega e^{i\omega t}$

Отношение значений:

$$\frac{\text{Вычисленное}}{\text{Точное}} = \frac{\sin(\omega)}{\omega} \quad (3.8)$$

Восстановление пропущенных данных

Интерполяция с помощью полинома третьего порядка:

$$\Delta^4(s_{n-2}) = s_{n-2} - 4s_{n-1} + 6s_n - 4s_{n+1} + s_{n+2} = 0 \quad (3.9)$$

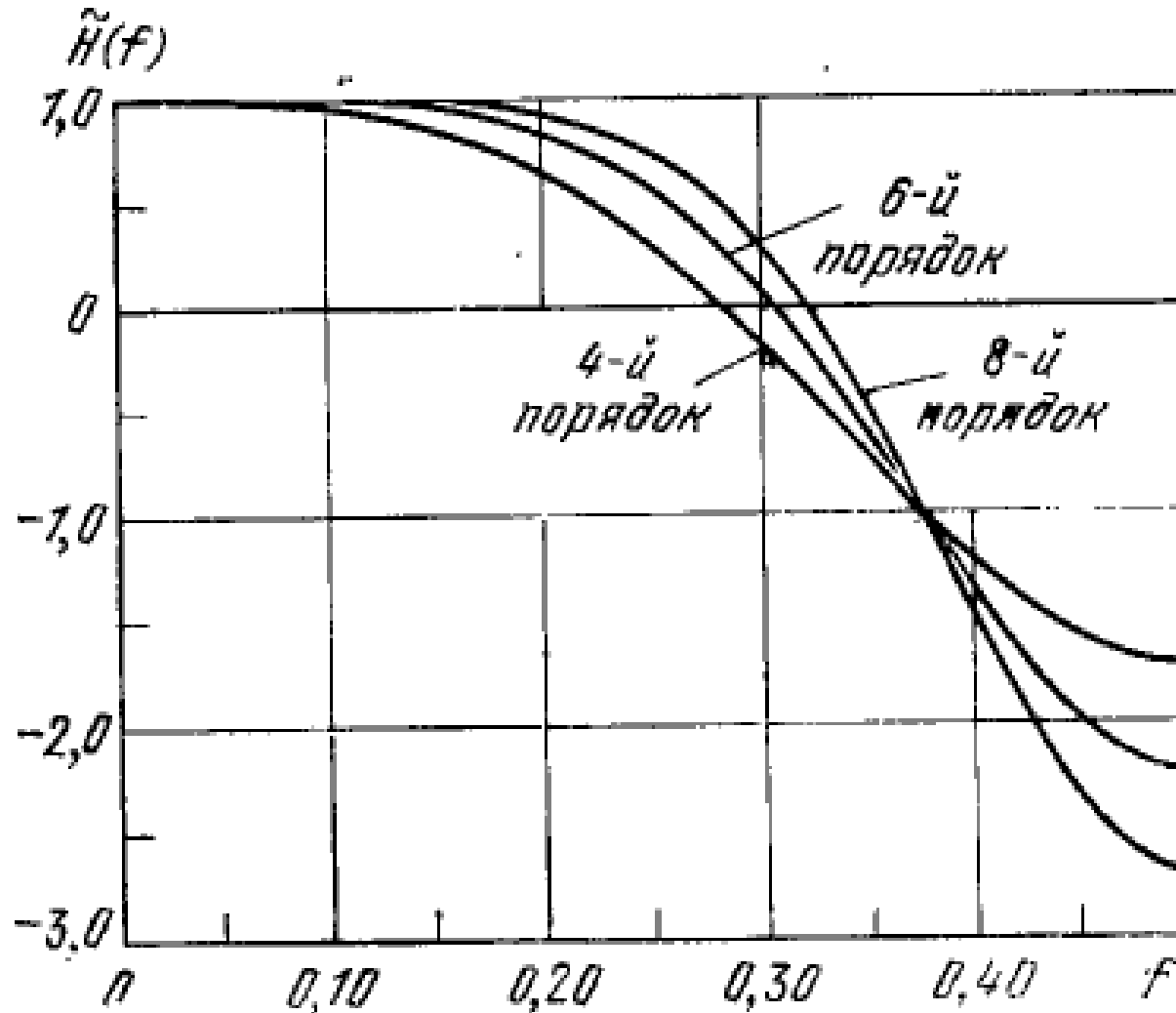
$$\tilde{s}_n = \frac{1}{6}(-s_{n-2} + 4s_{n-1} + 4s_{n+1} - s_{n+2}) \quad (3.10)$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{3}(4\cos(\omega) - \cos(2\omega)) \quad (3.11)$$

Восстановление пропущенных данных

График передаточной функции при использовании полиномов 4-го, 6-го и 8-го порядков:



Пример расчета симметричного нерекурсивного фильтра

$$y_n = as_{n-2} + bs_{n-1} + cs_n + bs_{n+1} + as_{n+2}$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

$$H(\omega) = 2a \cos(2\omega) + 2b \cos(\omega) + c$$

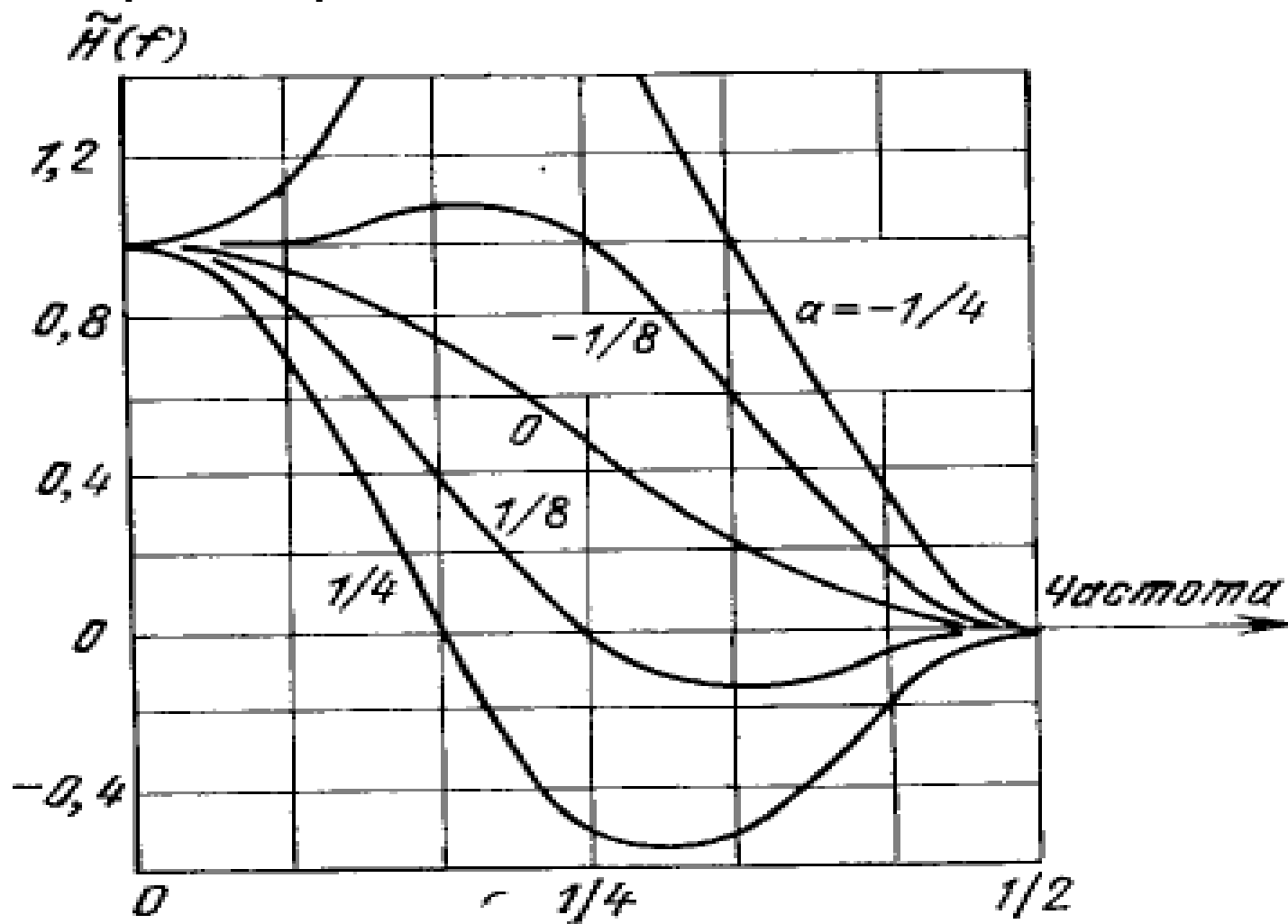
УСЛОВИЯ: $H(0) = 0; \quad H(\pi) = 0.$

Результат: $b = \frac{1}{4}; \quad c = \frac{1}{2} - 2a.$

$$H(\omega) = 4a \left[-1 + \cos(\omega) \left(\cos(\omega) + \frac{1}{8a} \right) + \frac{1}{8a} \right]$$

Пример расчета симметричного рекурсивного фильтра

Передаточная функция фильтра в зависимости от значения параметра α :



Пример работы фильтра

Зададим передаточную функцию в виде:

$$\tilde{H}(f) = 2A \cos(2\pi f) + B$$

Потребуем выполнения условий:

$$\tilde{H}\left(\frac{1}{8}\right) = 1;$$

$$\tilde{H}\left(\frac{3}{8}\right) = 0.$$

В результате получим:

$$y_n = \frac{\sqrt{2}}{4} s_{n-1} + \frac{1}{2} s_n + \frac{\sqrt{2}}{4} s_{n+1}$$

Пример работы фильтра

$$y_n = \frac{\sqrt{2}}{4} s_{n-1} + \frac{1}{2} s_n + \frac{\sqrt{2}}{4} s_{n+1}$$

n	$s_n = \cos(\pi n / 4)$	$y_n = \tilde{H} s_n$	$\tilde{s}_n = \cos(3\pi n / 4)$	$\tilde{y}_n = \tilde{H} s_n$	$s_n + \tilde{s}_n$	$y_n + \tilde{y}_n = \tilde{H}(s_n + \tilde{s}_n)$
1	2	3	4	5	6	7
0	1.0	-	1.0	-	2.0	-
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.0	0.0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.0	0.0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4	-1.0	-1.0	-1.0	0.0	-2.0	-1.0
5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.0	0.0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.0	0.0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
8	1.0	-	1.0	-	2.0	-

Ортогональность функций

Ортогональность функций:

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(t) g_1(t) g_2(t) dt = 0$$

Система $g_n(t)$ $k = 1, 2, \dots, N$ ортогональных на отрезке $[\alpha, \beta]$ функций

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(t) g_m(t) g_n(t) dt = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \lambda_n^2, m = n \end{cases}$$

Система ортогональных тригонометрических функций

Система тригонометрических функций

$$1, \cos(t), \cos(2t), \cos(3t), \dots$$

$$\sin(t), \sin(2t), \sin(3t), \dots$$

ортогональна на отрезке $[0, 2\pi]$ или $[-\pi, \pi]$:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 2\pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

Система ортогональных тригонометрических функций

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 0, & m = n = 0 \end{cases}$$

Ряд Фурье

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \quad (3.12)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos(kt) dt, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt, k = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Ряд Фурье

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^2(t) dt, k = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (3.15)$$

Неравенство Бесселя:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^2(t) dt, k > \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \quad (3.16)$$

Для конечного N ряд Фурье является аппроксимацией функции в смысле МНК.

Примеры разложения в ряд Фурье

$$g(t) = t \quad , \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad (3.17)$$

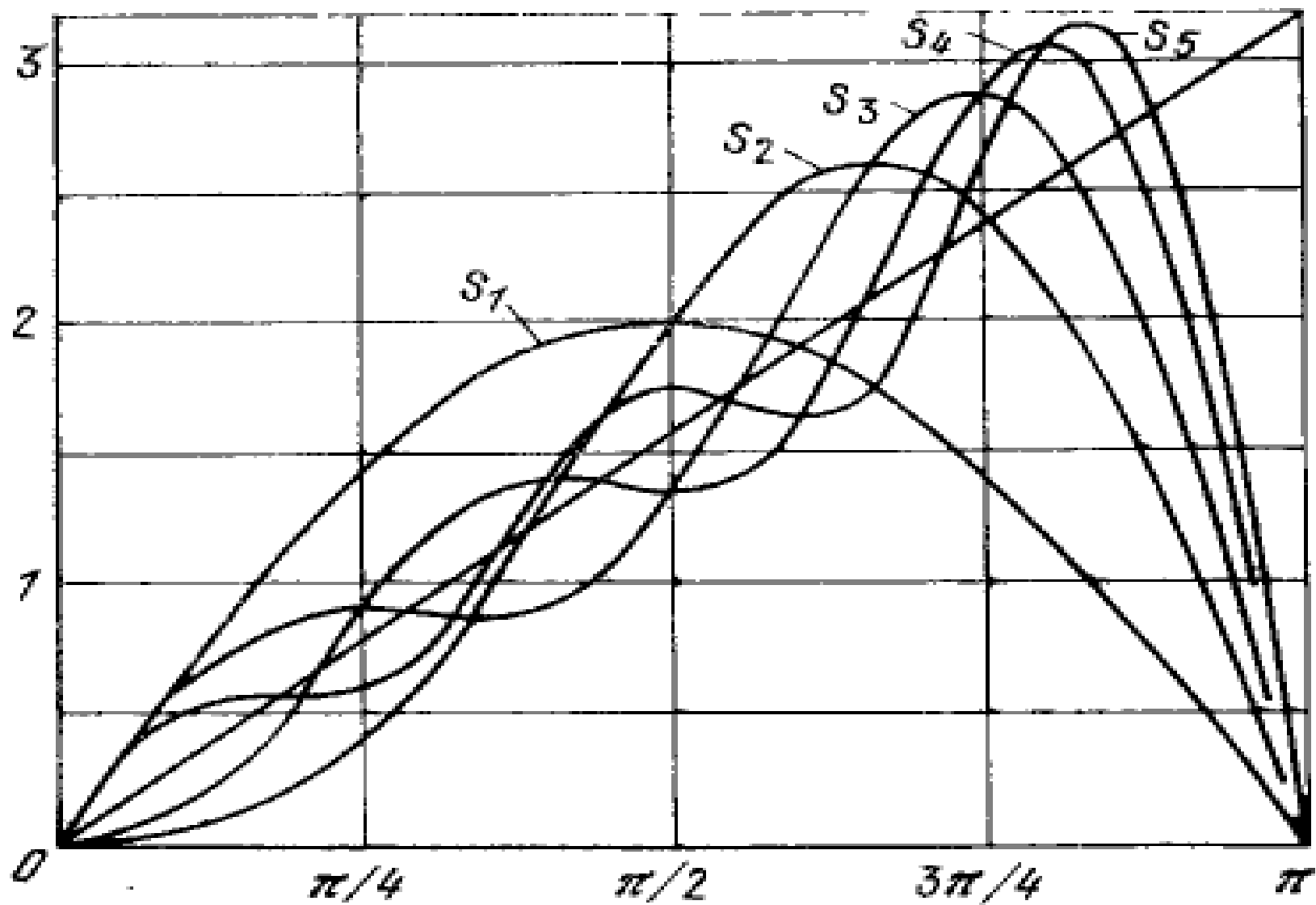
$$a_k = 0 \quad (3.18)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(kt) dt, k = 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{k} (-1)^{k+1}, k = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

$$t = 2 \left[\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} - \frac{\sin(4t)}{4} + \dots \right] \quad (3.20)$$

Частичные суммы ряда Фурье



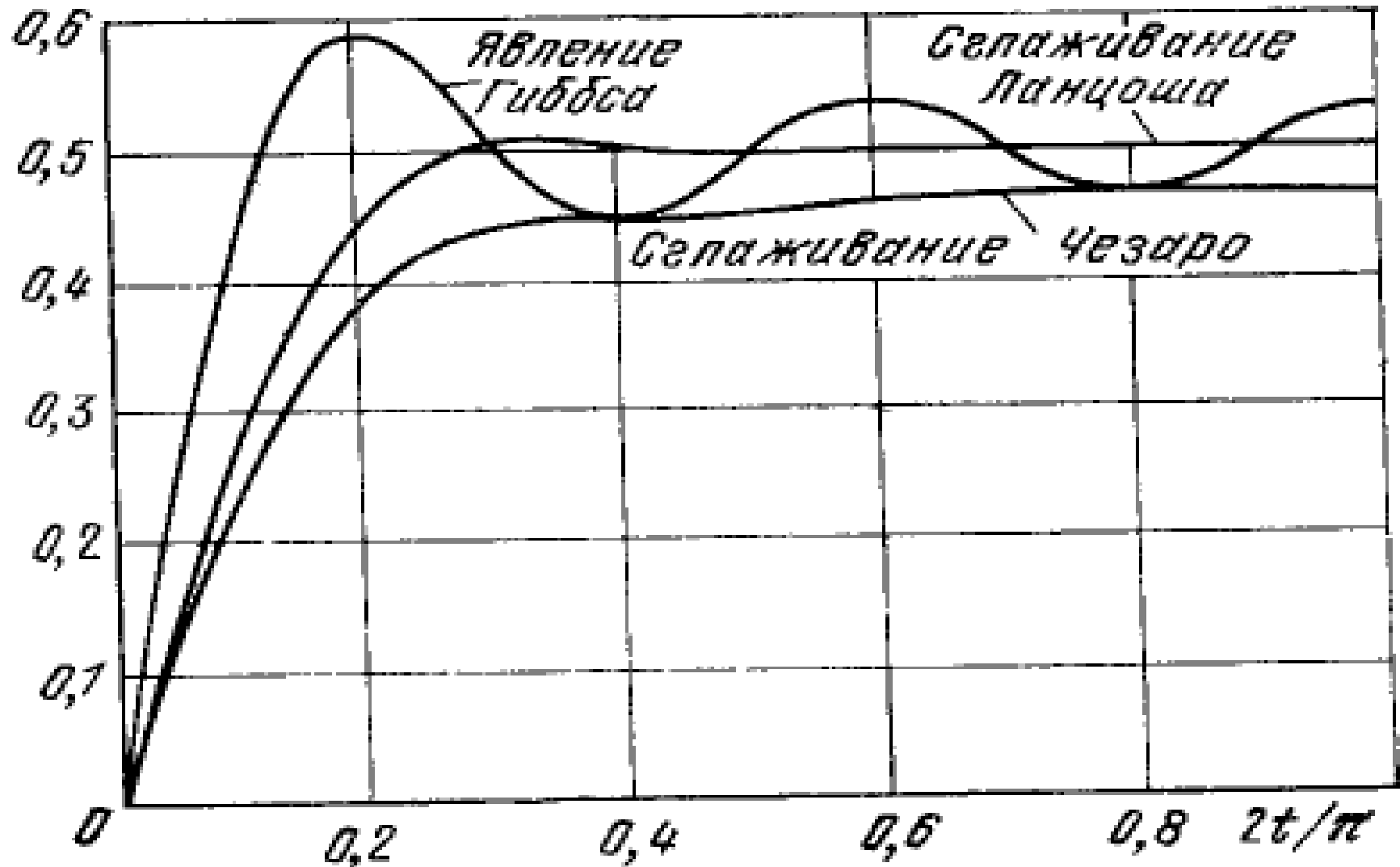
Примеры разложения в ряд Фурье

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, 0 < t < \pi \\ -\frac{1}{2}, -\pi < t < 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1} \quad (3.22)$$

$$S_N = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1} \quad (3.23)$$

Частичная сумма ряда Фурье для пяти первых слагаемых



Явление Гиббса и сглаживание Ланцоша.

Коррекция частичных сумм ряда Фурье

Сглаживание Ланцоша: $\bar{S}_N = \frac{N}{2\pi} \int_{t-\frac{\pi}{N}}^{t+\frac{\pi}{N}} S_N(x) dx$ (3.24)

$$\bar{S}_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left\{ \sigma(N, k) [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \right\} \quad (3.25)$$

$$\sigma(N, k) = \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}{\left(\frac{\pi k}{N}\right)} \quad (3.26)$$

Сглаживание Чезаре (Фейера):

$$\bar{S}_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{N-k}{N} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \right\} \quad (3.27)$$

Комплексный ряд Фурье

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \quad (3.28)$$

$$\cos(kt) = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}; \sin(kt) = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \quad (3.29)$$

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad (3.30)$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2}, & k > 0 \\ \frac{a_0}{2}, & k = 0 \\ \frac{a_k + ib_k}{2}, & k < 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

Комплексный ряд Фурье

Пусть, как и прежде

$\omega = 2\pi f$ - круговая частота, а f -циклическая

$$g(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega} \quad (3.32)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\omega) e^{-ik\omega} d\omega \quad (3.33)$$

$$g(\omega) = g(2\pi f) = \tilde{g}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k f} \quad (3.34)$$

$$c_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{g}(f) e^{-2\pi i k f} df \quad (3.35)$$

Комплексный ряд Фурье

Следует обратить внимание, что выражение (3.32) для комплексного ряда Фурье:

$$g(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega}$$

согласуется с использовавшимся ранее выражением для передаточной функции нерекурсивного фильтра:

$$H(\omega) = \sum_{k=-K}^K c_k e^{-ik\omega} = \sum_{k=-K}^K c_{-k} e^{ik\omega}$$

Фазовая форма ряда Фурье

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)]$$

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kt + \varphi_k), \quad (3.36)$$

Для четных функций $\varphi_k = 0$ или π

Для нечетных функций $\varphi_k = \pm \frac{\pi}{2}$

Некоторые свойства ряда Фурье

Пусть

$$g_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad \text{и} \quad g_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikt}$$

Тогда:

$$Ag_1(t) + Bg_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (Ac_k + Bd_k) e^{ikt} \quad (3.37)$$

$$g_1(t)g_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_{k-n} \right] e^{ikt} \quad (3.38)$$

$$\tilde{g}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} g_1(s)g_2(t-s)ds = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{ikt} \quad (3.39)$$

Преобразование Фурье

Прямое преобразование Фурье:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.40)$$

ИЛИ

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (3.41)$$

Обратное преобразование Фурье:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.42)$$

ИЛИ

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi ft} df \quad (3.43)$$

Свойства преобразования Фурье

$g(t)$ - вещественная функция $\Rightarrow G(\omega)$ - сопряженно
-симметричная относительно $\omega = 0$

$g(t)$ - четная $\Rightarrow G(\omega)$ - вещественная и четная

$g(t)$ - нечетная $\Rightarrow G(\omega)$ - чисто мнимая, нечетная

Модуль спектральной функции $G(\omega)$ называют
амплитудным спектром $g(t)$.

Аргумент спектральной функции $G(\omega)$ называют
фазовым спектром $g(t)$

Свойства преобразования Фурье

$$g(t) = ag_1(t) + bg_2(t) \Rightarrow G(\omega) = aG_1(\omega) + bG_2(\omega)$$

$$g(t) = f(t - \tau) \Rightarrow G(\omega) = F(\omega)e^{-i\omega\tau}$$

$$g(t) = f(at) \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt} \Rightarrow G(\omega) = i\omega F(\omega)$$

Свойства преобразования Фурье

$$g(t) = \int f(t) dt \Rightarrow G(\omega) = \frac{F(\omega)}{i\omega} \text{ если } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \Rightarrow G(\omega) = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

$$g(t) = f_1(t) f_2(t) \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\varphi) F_2(\omega - \varphi) d\varphi$$

$$g(t) = f(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{2} e^{i\varphi_0} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-i\varphi_0} F(\omega + \omega_0)$$