МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №2
по дисциплине «Теория принятия решений»
Тема: Бесконечные антагонистические игры

Студентка гр. 7381	____________________	Алясова А.Н.
Преподаватель	____________________	Попова Е.В.

Санкт-Петербург
2021

Цель работы.

Использование инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе бесконечных антагонистических игр.

Основные теоретические положения.

В данной работе рассматриваются антагонистические игры, которые отличаются от матричных тем, что в них один или оба игрока имеют бесконечное (счётное или континуум) множество стратегий. С теоретико-игровой точки зрения это отличие малосущественно, поскольку игра остаётся антагонистической и проблема состоит в использовании более сложного аналитического аппарата исследования.

Таким образом, исследуются общие антагонистические игры, т.е. системы вида (1)

$$\Gamma = (X, Y, H), \qquad (1)$$

где X и Y – произвольные бесконечные множества, элементы которых являются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно, а $H: X \times Y \to \mathbb{R}^1$ – функция выигрыша игрока 1. Выигрыш игрока 2 в ситуации (x, y) равен $[-H(x, y)]$, $x \in X, y \in Y$ (игра антагонистическая). Далее рассматриваются такие игры, у которых функция H ограничена.

Одновременная игра преследования на плоскости.

Пусть S_1и S_2 – множества на плоскости. Игра Г заключается в следующем. Игрок 1 выбирает некоторую точку $x \in S_1$, а игрок 2 выбирает точку $y \in S_2$. При совершении выбора игроки 1 и 2 не имеют информации о действиях противника, поэтому подобный выбор удобно интерпретировать как одновременный. В этом случае точки $x \in S_1$, $y \in S_2$ являются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно. Таким образом, множества стратегий игроков совпадают с множествами S_1 и S_2 на плоскости.

Целью игрока 2 является минимизация расстояния между ним и игроком 1 (игрок 1 преследует противоположную цель). Поэтому под выигрышем $H(x, y)$

игрока 1 в этой игре понимается евклидово расстояние $\rho(x, y)$ между точками $x \in S_1$ и $y \in S_2$, т.е. $H(x, y) = \rho(x, y), x \in S_1, y \in S_2$. Выигрыш игрока 2 полагаем равным выигрышу игрока 1, взятому с обратным знаком, а именно $[-\rho(x, y)]$ (игра антагонистическая).

Модель покера с одним кругом ставок и одним размером ставки.

В начале партии каждый из двух игроков А и В ставит по единице. После того, как каждый из игроков получит карту, ходит игрок А: он может или поставить ещё a единиц или спасовать и потерять свою начальную ставку. Если А ставит, то у В две альтернативы: он может или спасовать (теряя при этом свою начальную ставку), или уровнять, поставив a единиц. Если В уравнивает, то игроки открывают свои карты и игрок с лучшей картой выигрывает единицу (банк).

Обозначим карту игрока через ξ, а карту игрока В через η, при этом предполагаем, что случайные величины ξ и η имеют равномерное распределение на единичном интервале.

Стратегии строятся следующим образом. Пусть

- $\varphi(\xi)$ – вероятность того, что если А получит ξ, то он поставит a,
- $1 - \varphi(\xi)$ – вероятность того, что если А получит ξ, то он спасует,
- $\psi(\eta)$ – вероятность того, что если В получит η, то он уравняет ставку a,
- $1 - \psi(\eta)$ – вероятность того, что если В получит η, то он спасует.

Если игроки применяют эти стратегии, то ожидаемый чистый выигрыш $K(\varphi, \psi)$ представляет собой сумму выигрышей, соответствующих трём взаимно исключающим возможностям: А пасует; А ставит a единиц и В уравнивает; А ставит и В пасует.

Для решения игры необходимо найти такую пару стратегий (φ^*, ψ^*), которая удовлетворяет (2) для всех стратегий φ и ψ соответственно.

$$K(\varphi, \psi^*) \leq K(\varphi^*, \psi^*) \leq K(\varphi^*, \psi) \tag{2}$$

Постановка задачи.

Используя инструментальные средства компьютерной алгебры решить задачи преследования и покера.

Выполнение работы.

Одновременная игра преследования на плоскости.

Для задачи преследования были отображены фигуры на плоскости. Согласованные с вариантом фигуры представлены на рис. 1.

Были рассмотрены два случая задачи: центр масс фигуры S_1 принадлежит фигуре S_2 и центр масс фигуры S_1 не принадлежит фигуре S_2.

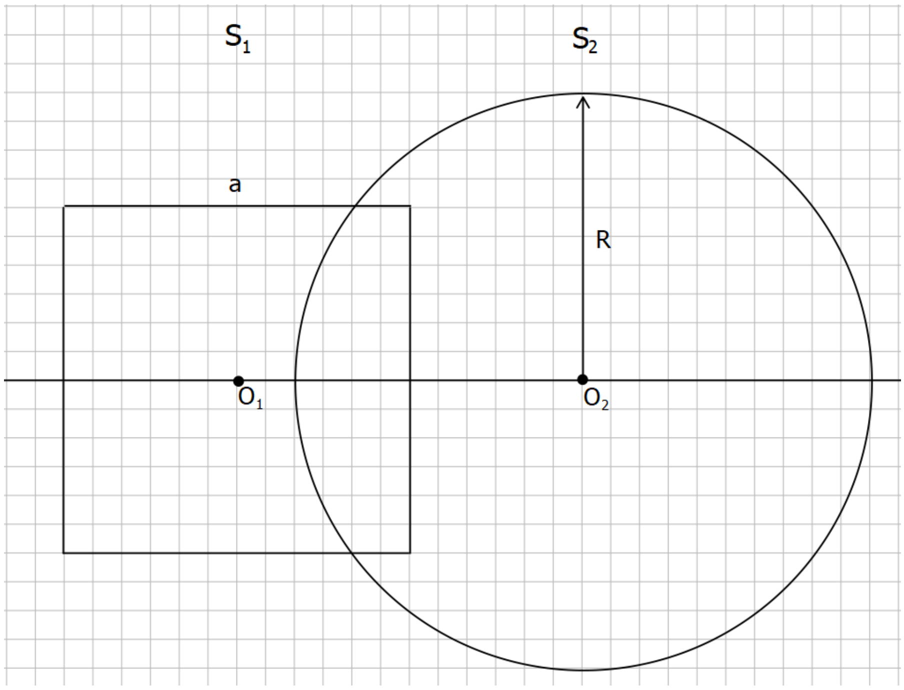

Рисунок 1 – Отображение фигур для случая $O_1 \notin S_2$

1) Центр масс фигуры S_1 не принадлежит фигуре S_2.

Найдём нижнюю цену игры.

Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 2.

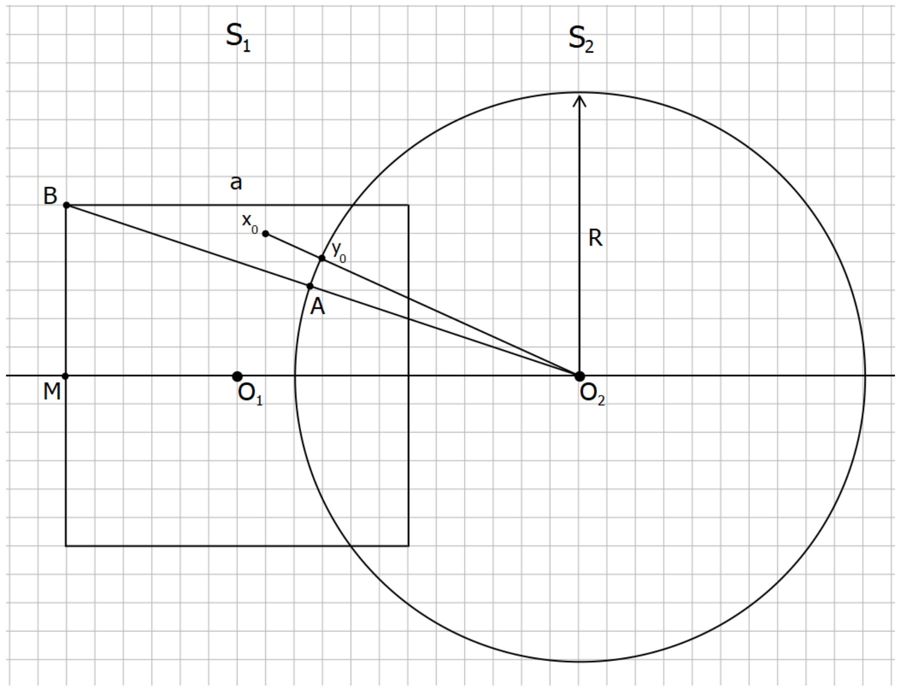

Рисунок 2 – Нахождение нижней цены игры для случая $O_1 \notin S_2$

Поиск нижней цены игры для случая $O_1 \notin S_2$:

1. Для любой точки x_0 принадлежащей S_1 и не принадлежащей S_2 максимальное расстояние до S_2 равно длине отрезка, проведённого из O_2 в x_0 за вычетом R. На рис. 2 изображен пример поиска минимального расстояния до точки B.
2. Для того, чтобы данное расстояние было максимально возможным, точка x_0 должна находиться в вершине квадрата S_1. Таким образом, согласно рис. 2 определим нижнюю цену игры:

$$\underline{\nu} = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} p(x, y) = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (O_2M)^2} - R$$

Найдём верхнюю цену игры.

Поиск верхней цены игры для случая $O_1 \notin S_2$:

Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 3.

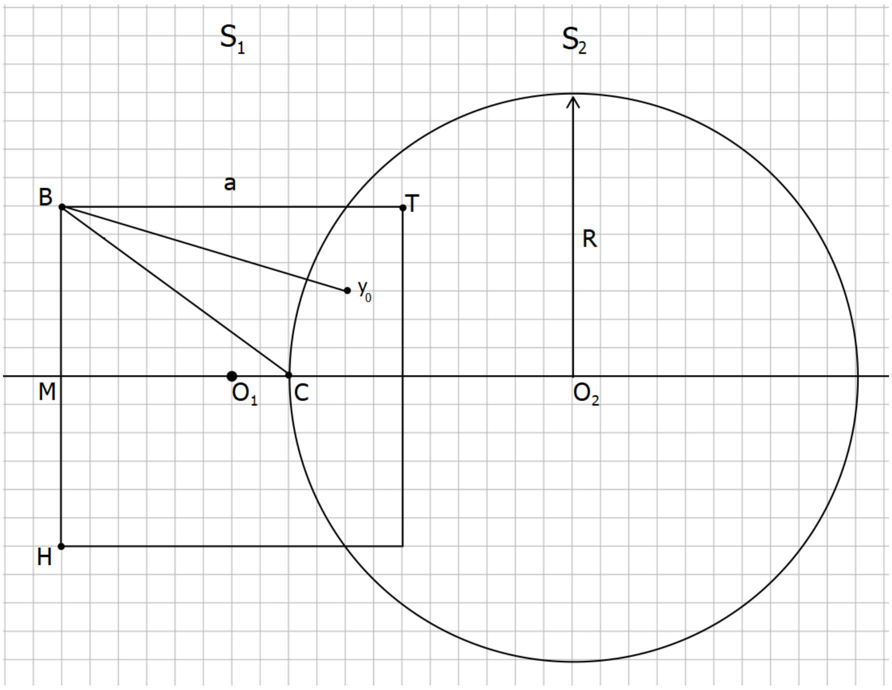

Рисунок 3 – Нахождение верхней цены игры для случая $O_1 \notin S_2$

1. Для любой точки y_0 принадлежащей S_2 расстояние до любой точки $x_{0,}$ принадлежащей S_1 будет максимальным, только в том случае если x_0 лежит в углах HBT или BHE квадрата S_1. Выберем угол HBT, тогда x_0 совпадает с точкой B.
2. Для любой точки y_0 принадлежащей S_2 расстояние до любой точки $x_{0,}$ принадлежащей S_1, будет минимальным, только в том случае если y_0 принадлежит оси O_1O_2 в силу симметрии (см. рис 2). Таким образом y_0 совпадает с точкой C.
3. Согласно рис. 3 определим верхнюю цену игры:

$$MC = O_2M - R$$

$$\overline{v} = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} p(x, y) = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (O_2M - R)^2}$$

Таким образом, нижняя цена игры не равна верхней цене игры, поэтому данный случай не является игрой в чистых стратегиях.

$$\underline{v} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (O_2M)^2} - R \neq \overline{v} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (O_2M - R)^2}$$

2) Центр масс фигуры S_1 принадлежит фигуре S_2.

Найдём нижнюю цену игры.

Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 4.

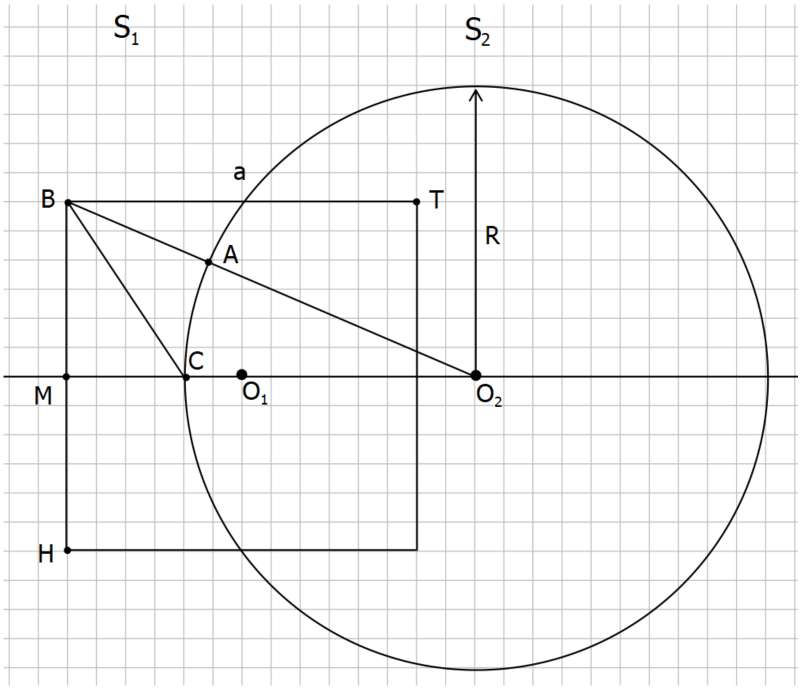

Рисунок 4 – Нахождение нижней и верхней цены игры для случая $O_1 \in S_2$

Поиск нижней цены игры для случая $O_1 \in S_2$:

1. Для любой точки x_0 принадлежащей S_1 расстояние до некоторой точки y_0 принадлежащей S_2, будет максимальным, только если x_0 лежит в углах HBT или BHE квадрата S_1. Выберем угол HBT, тогда x_0 совпадает с точкой B.
2. Таким образом минимально возможное расстояние будет в том случае, если точка y_0 будет принадлежать отрезку O_2B. Таким образом y_0 совпадает с точкой A. Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 4. Согласно данному рисунку:

$$\underline{v} = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} p(x, y) = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (O_2M)^2} - R$$

Найдём верхнюю цену игры.

Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 4.

Поиск верхней цены игры для случая $O_1 \in S_2$:

1. Для любой точки x_0 принадлежащей S_1 расстояние до любой точки y_0, принадлежащей S_2 и будет минимальным, только в том случае если y_0 совпадает с центром квадрата S_1.
2. В таком случае, максимальное расстояние при этом будет, если первый игрок выберет угловую точку квадрата S_1. Согласно рис. 4 определим верхнюю цену игры:

$$MC = \frac{a}{2} - \frac{\frac{a}{2} + R - MO_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - R + MO_2\right)$$

$$\overline{v} = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} p(x, y) = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{2} - R + MO_2\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Таким образом, нижняя цена игры не равна верхней цене игры, поэтому данный случай не является игрой в чистых стратегиях.

$$\underline{v} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (O_2M)^2} - R \neq \overline{v} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{2} - R + MO_2\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Модель покера с одним кругом ставок и одним размером ставки.

Найдено значение игры покера с одним кругом ставок при значении ставки a, равной 2.

Расчёт коэффициента c представлен в (5).

$$c = \frac{a}{a+2} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2} = 0.5 \qquad (3)$$

Рассмотрим принимаемые значения величины $\varphi^*(\xi)$ (4) при различном ξ.

$$\forall \xi \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]: \ \varphi^*(\xi) = 1$$

$$\forall \xi \in \left(0; \frac{1}{2}\right]: \ \varphi^*(\xi) = 0 \qquad (4)$$

$$\int_0^c \varphi^*(\xi) d\xi = \int_0^{1/2} \varphi^*(\xi) d\xi = \frac{2a}{(a+2)^2} = \frac{2 * 2}{(2+2)^2} = \frac{1}{4}$$

Рассмотрим принимаемые значения величины $\psi^*(\eta)$ (5) при различном η.

$$\psi^*(\eta) = \begin{cases} 0, 0 \le \eta \le \frac{1}{2} \\ 1, \frac{1}{2} < \eta \le 1 \end{cases} \tag{5}$$

$$\varphi^*(\xi) = \begin{cases} \int_0^{1/2} \varphi^*(\xi) d\xi = \frac{2a}{(a+2)^2} = \frac{2*2}{(2+2)^2} = \frac{1}{4}, 0 \le \xi \le \frac{1}{2} \\ 1, \frac{1}{2} < \xi \le 1 \end{cases}$$

Расчёт значения игры $K(\varphi^*, \psi^*)$ представлен в (6).

$$K(\varphi^*, \psi^*) = -1 + \int_0^1 \varphi^*(\xi) \left[2 + 1 \int_0^\xi \psi^*(\eta) d\eta - 2 \int_\xi^1 \psi^*(\eta) d\eta\right] d\xi$$

$$= -1 + 2 \int_0^1 \varphi^*(\xi) d\xi + \int_0^1 \varphi^*(\xi) \left[1 \int_0^\xi \psi^*(\eta) d\eta - 2 \int_\xi^1 \psi^*(\eta) d\eta\right] d\xi$$

$$= -1 + 2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi^*(\xi) d\xi + \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi^*(\xi) d\xi\right)$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi^*(\xi) \left[1 \int_0^\xi \psi^*(\eta) d\eta - 2 \int_\xi^1 \psi^*(\eta) d\eta\right] d\xi$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi^*(\xi) \left[1 \int_0^\xi \psi^*(\eta) d\eta - 2 \int_\xi^1 \psi^*(\eta) d\eta\right] d\xi$$

$$= -1 + 2 \left(\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2}\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi^*(\xi) \left[1 * 0 - 2 \int_\xi^{\frac{1}{2}} \psi^*(\eta) d\eta - 2 \int_\xi^1 \psi^*(\eta) d\eta\right] d\xi$$

$$+ \int_{1/2}^1 \varphi^*(\xi) \left[1 \int_0^{\frac{1}{2}} \psi^*(\eta) d\eta - 1 \int_{\frac{1}{2}}^1 \psi^*(\eta) d\eta - 2 \int_\xi^1 \psi^*(\eta) d\eta\right] d\xi$$

$$= -1 + \frac{3}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi^*(\xi) \left[-2 * 0 - 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] d\xi$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi^*(\xi) \left[1 * 0 + 1\left(\xi - \frac{1}{2}\right) - 2(1 - \xi)\right] d\xi = -1 + \frac{3}{2} - 2 * \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{2}\xi^2 + \frac{5}{2}\xi\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= -1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{31}{8} = -\frac{31}{8}$$

$$K(\varphi^*, \psi^*) = -\frac{31}{8}$$

Проверим полученные результаты с помощью программы (приложение А).

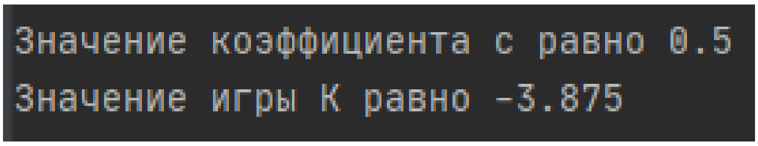

Рисунок 4 – Результат выполнения программы для покера с одним кругом ставок

Таким образом, игроку А следует блефовать при условии, что $\int_0^c \varphi^*(\xi)d\xi = \frac{1}{4}$, если на руках карта со значением меньше $c = \frac{1}{2}$. В случае, когда на руках карта со значением больше $c = \frac{1}{2}$, то игроку А следует ставить.

Выводы.

В ходе выполнения практической работы по изучению бесконечных игр были использованы инструментальные средства для решения задач поддержки принятия решения, а также освоены навыки принятия решения на основе бесконечных антагонистических игр. При этом были освоены метод поиска оптимальных стратегий для одновременной игры преследования на плоскости, а также способ расчёта цены игры в покере с одним и двумя кругами ставок.

При поиске оптимальных стратегий для одновременной игры преследования на плоскостях, которыми являются две соосных фигуры: окружность и квадрат, было выяснено, что данная игры не решаются в чистых стратегиях в обоих случаях.

При поиске оптимальных стратегий для покера с одним кругом ставок при значении ставки $a = 2$ было выявлено, что при реализации оптимальных стратегий φ^*и ψ^* ожидаемый чистый выигрыш $K(\varphi^*, \psi^*) = -31/8$, что свидетельствует о том, что после первого круга ставок игрок 2 окажется в выигрышном положении (получит прибыль).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ИСХОДНЫЙ КОД ДЛЯ ПОКЕРА С ОДНИМ КРУГОМ СТАВОК

```
def poker(a):
    c =a/(a+2)
    phi = 2*a/(a+2)**2
    integral1 =2*(phi+1-c)
    integral2 = 1.5-5/2 - 1.5*c**2 +5*c/2
    K = -1+integral1-2*phi+integral2

    print("Значение коэффициента c равно " + str(c))
    print("Значение игры K равно " + str(K))
    return K

poker(2)
```