МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №1
по дисциплине «Цифровая обработка сигналов»
Тема: Дискретные сигналы

Студент гр. 8383	____________________	Киреев К.А.
Студент гр. 8383	____________________	Муковский Д.В.
Преподаватель	____________________	Середа А.-В.И.

Санкт-Петербург
2021

Цель работы.

Изучить математическое описание дискретных сигналов и овладеть программными средствами их моделирования.

Основные теоретические положения.

В теории цифровой обработки сигналов (ЦОС) принято разделять операции дискретизации по времени и квантования по уровню. Полагая операцию квантования отсутствующей, изучают дискретные сигналы и линейные дискретные системы (ЛДС), а затем, отдельно, – эффекты нелинейной операции квантования.

Дискретным называют сигнал, дискретный по времени и непрерывный по состоянию (уровню), который описывается последовательностью чисел бесконечной разрядности $x(nT)$ или $x(n)$, называемой коротко последовательностью. Значения $nT,\ n \in \mathbb{Z}_+$, называют дискретным временем, где T – период дискретизации, а n– дискретным нормированным временем.

Цифровым называют сигнал, дискретный по времени и квантованный по состоянию (уровню), который описывается последовательностью чисел конечной разрядности – квантованной последовательностью $\tilde{x}(nT)$ или $\tilde{x}(n)$. При компьютерном моделировании под дискретным сигналом условно понимают последовательность чисел максимально возможной разрядности, а под цифровым – последовательность чисел заданной разрядности.

Постановка задачи.

С помощью программных средств провести моделирование и анализ дискретных последовательностей. Результаты подкрепить соответствующими графиками и выводами.

Исходные данные:

Переменная	Назначение	Значение
N	Длина последовательности	33
T	Период дискретизации	0.0005
a	Основание экспоненты	0.89
C	Амплитуда гармонического сигнала	4
$\widehat{\omega}_0$	Частота гармонического сигнала	$\pi/9$
m	Задержка	8
U	Амплитуда импульса	18
n_0	Начальный момент импульса	6
n_{imp}	Длина импульса	8
B_1, B_2, B_3	Амплитуды гармонических сигналов	$B_1 = 4.5$ $B_2 = 2.7$ $B_3 = 5.2$
$\widehat{\omega}_1, \widehat{\omega}_2, \widehat{\omega}_3$	Частоты гармонических сигналов	$\widehat{\omega}_1 = \pi/7$ $\widehat{\omega}_2 = \pi/11$ $\widehat{\omega}_3 = \pi/19$
a_1, a_2, a_3	Коэффициенты линейной комбинации гармонических сигналов	$a_1 = -1.5$ $a_2 = 3.7$ $a_3 = 4.4$

Выполнение работы.

1. Смоделировать единичный цифровой импульс $\delta_d(k)$ с выводом графиков на интервале дискретного времени $nT \in [0,\ (N-1)T]$ и дискретного нормированного времени $n \in [0, N-1]$. Пояснить взаимосвязь между дискретным и дискретным нормированным временем и различие между цифровым единичным импульсом и функцией Дирака.

Единичный цифровой импульс $\delta_d(n)$:

$$\delta_d(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

Интервал дискретного времени $nT \in [0; 32 * 0.0005]$.

Интервал дискретного нормированного времени $n \in [0; 32]$. Графики единичного цифрового импульса на интервалах дискретного времени и дискретного нормированного времени представлены на рис. 1.

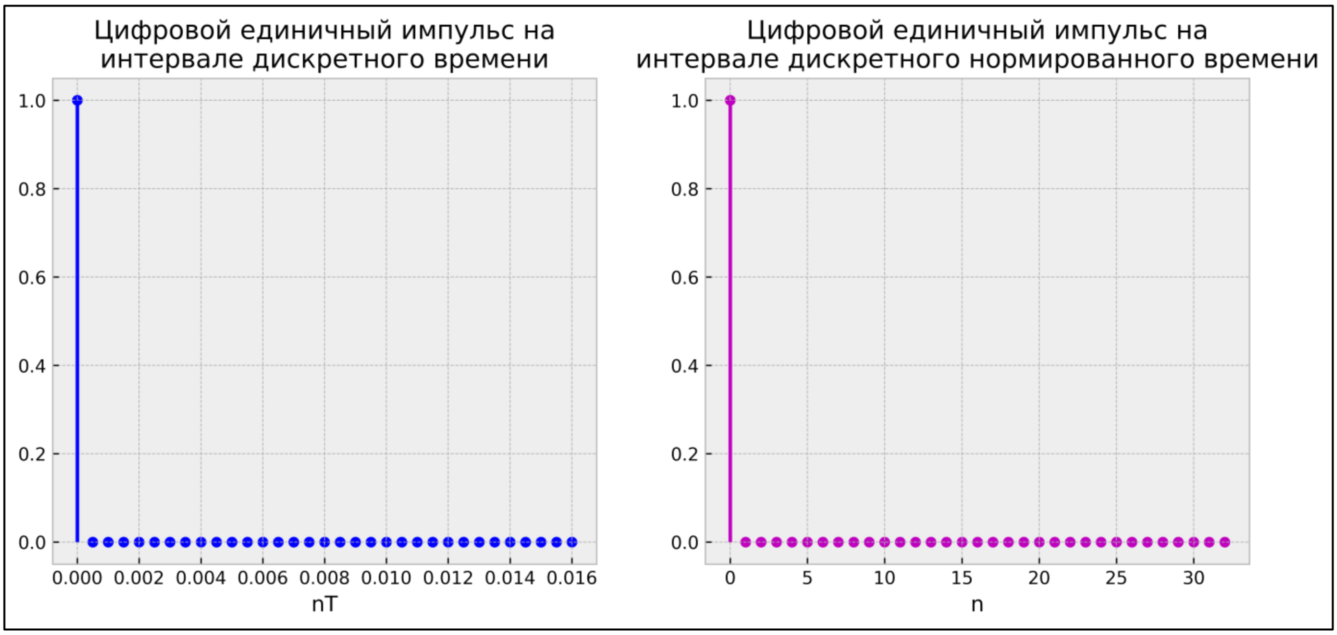

Рисунок 1 – Цифровой единичный импульс

Значения nT называют *дискретным временем*, а n - *дискретным нормированным временем* (*T* = *1*).

Цифровой единичный импульс — это аналог дельта-функции для дискретных систем, но в отличие него, - физически реализуемый сигнал (амплитуда равна 1).

Дельта-функция используется в аналоговых системах.

2. Смоделировать дискретный единичный скачок $\sigma_d(k)$ с выводом графиков на интервале дискретного времени $nT \in [0,\ (N-1)T]$ и дискретного нормированного времени $n \in [0, N-1]$. Пояснить соответствие между дискретным единичным скачком и функцией Хэвисайда, а также чему равна частота дискретизации дискретного единичного скачка.

Дискретный единичный скачок $\sigma_d(n)$:

$$\sigma_d(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

Интервал дискретного времени $nT \in [0; 32 * 0.0005]$

Интервал дискретного нормированного времени $n \in [0; 32]$. Графики дискретного единичного скачка на интервалах дискретного времени и дискретного нормированного времени представлены на рис. 2.

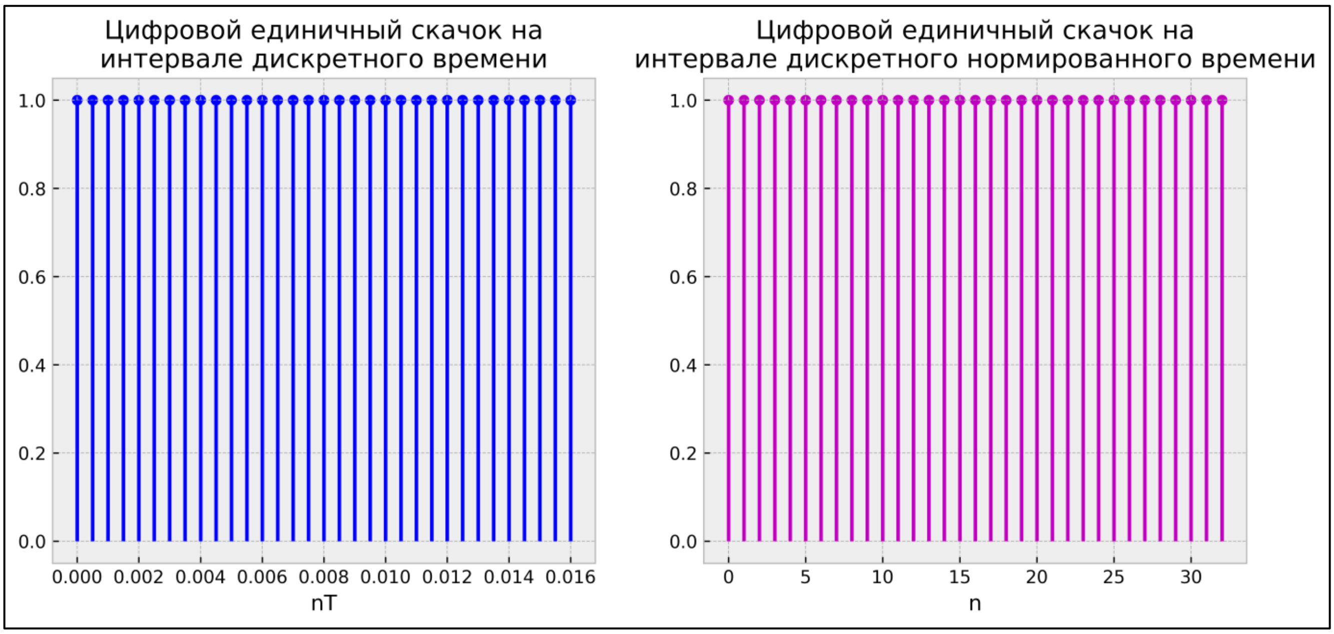

Рисунок 2 – Цифровой единичный скачок

Соответствие между цифровым и аналоговым единичными скачками заключается в том, что цифровой единичный скачок получается путем дискретизации аналогового единичного скачка.

Частота дискретизации дискретного единичного скачка равна $f_д = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.0005} = 2$ кГц.

3. Смоделировать дискретную экспоненциальную функцию $s_1(k)$ с выводом графиков на интервале дискретного времени $nT \in [0,\ (N-1)T]$ и дискретного нормированного времени $n \in [0, N-1]$. Пояснить соответствие между дискретной и аналоговой экспонентами.

Дискретная экспоненциальная функция $s_1(n)$:

$$s_1(n) = \begin{cases} 0, n < 0 \\ 0.89^n, n \geq 0. \end{cases}$$

Интервал дискретного времени $nT \in [0; 32 * 0.0005]$

Интервал дискретного нормированного времени $n \in [0; 32]$. Графики дискретной экспоненциальной функции на интервалах дискретного времени и дискретного нормированного времени представлены на рис. 3.

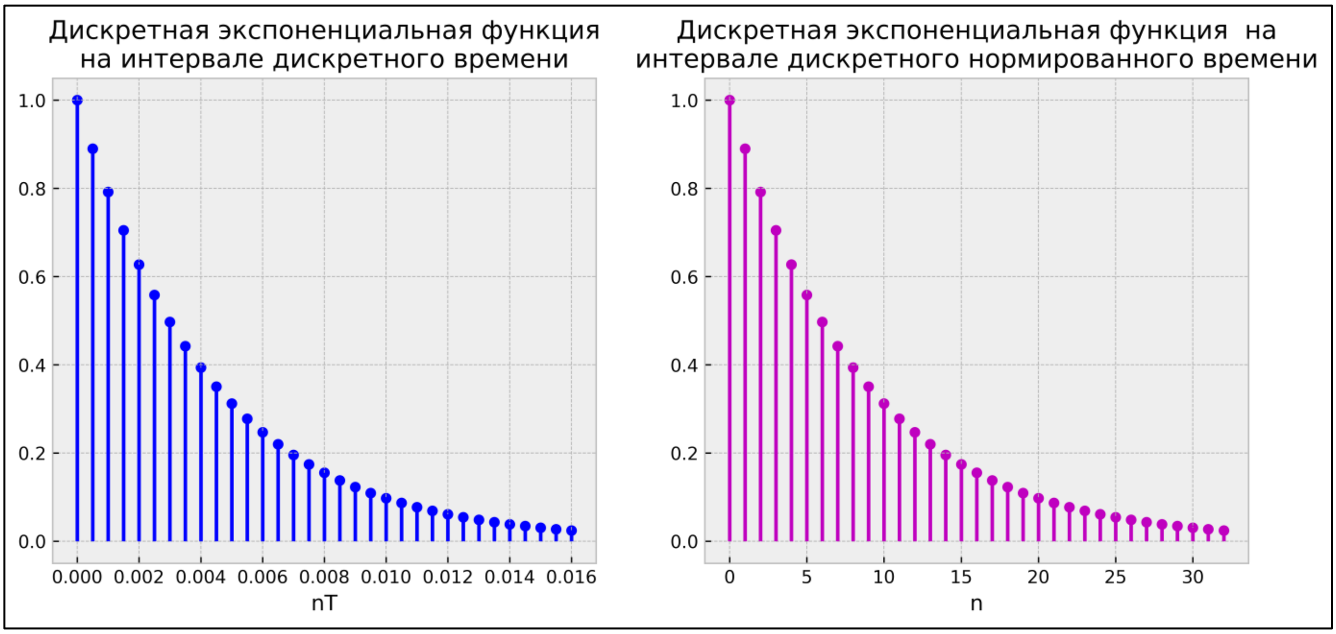

Рисунок 3 – Дискретная экспоненциальная функция

Дискретная экспонента – это результат преобразования аналоговой экспоненты в последовательность отсчетов (дискретную систему). Вид дискретной экспоненты определяется величиной и знаком параметра a.

4. Смоделировать дискретный комплексный гармонический сигнал $s_a(k) = C\exp(j\widehat{\omega}_0 k)$ с выводом графиков вещественной и мнимой частей на интервале времени $n \in [0, N-1]$. Записать данный сигнал в виде комбинации двух вещественных последовательностей.

Дискретный комплексный гармонический сигнал:

$$s_a(n) = 4 * \exp\left(j\frac{\pi}{9}n\right)$$

Интервал дискретного нормированного времени $n \in [0; 32]$. Дискретный комплексный гармонический сигнал с выводом графиков вещественной и мнимой частей представлен на рис. 4.

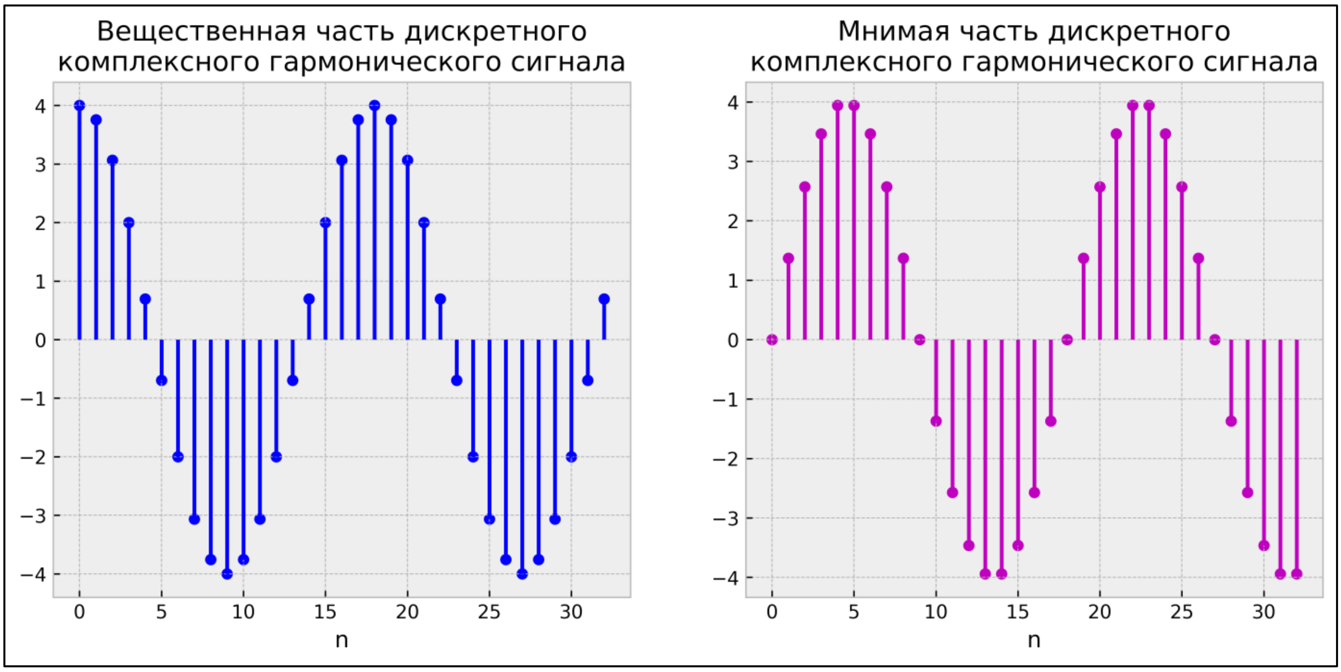

Рисунок 4 – Дискретный комплексный гармонический сигнал

Для записи данного сигнала в виде комбинации двух вещественных последовательностей воспользуемся формулой Эйлера:

$$\exp ix = \cos x + i \sin x$$

Тогда:

$$s_a(n) = C * \exp(j\widehat{\omega}_0 n) = C \cdot \cos(\widehat{\omega}_0 n) + C \cdot j \cdot \sin(\widehat{\omega}_0 n) =$$

$$= 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}n\right) + 4j \sin\left(\frac{\pi}{9}n\right)$$

5. Вывести графики последовательностей $\delta_d(k), \sigma_d(k), s_1(k)$, задержанных на m отсчетов, на интервале времени $n \in [0, N-1]$. Записать формулы задержанных последовательностей.

Интервал дискретного нормированного времени $n \in [0;32]$. Графики последовательностей $\delta_d(n), \sigma_d(n), s_1(n)$, задержанных на 8 отсчетов представлены на рис. 5.

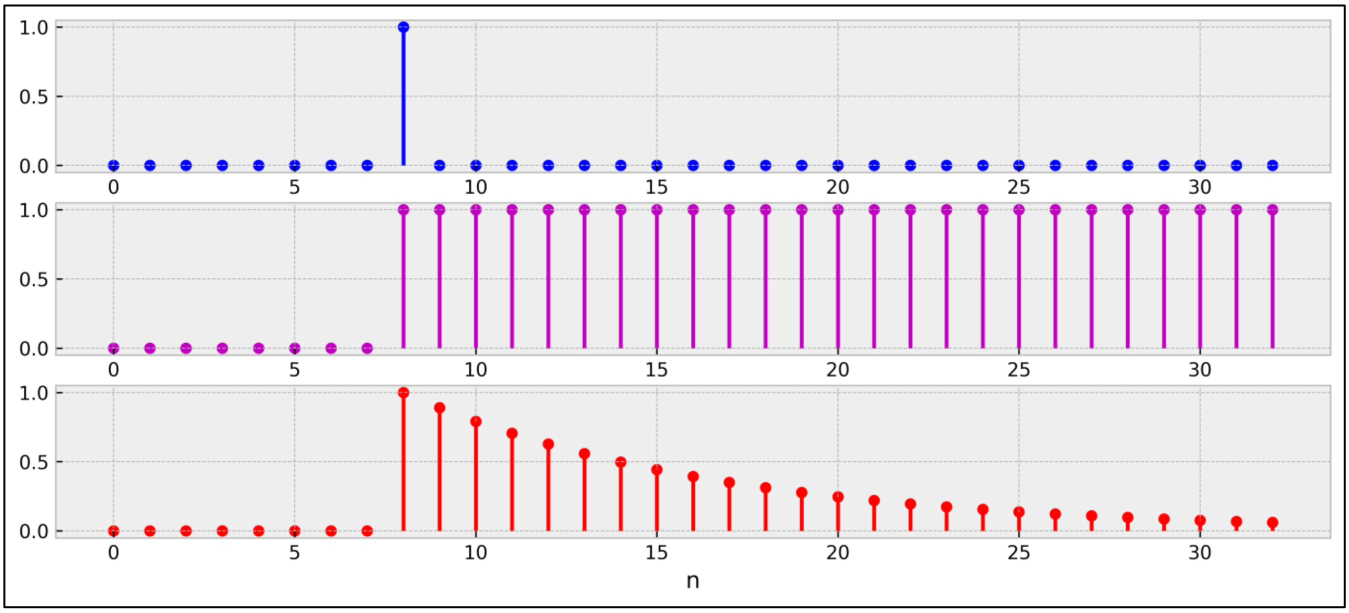

Рисунок 5 – Последовательности $\delta_d(n), \sigma_d(n), s_1(n)$ (сверху вниз), задержанные на 8 отсчетов

Формулы задержанных последовательностей:

$$\delta_d(n-8) = \begin{cases} 1, n = 8 \\ 0, n \neq 8 \end{cases}$$

$$\sigma_d(n-8) = \begin{cases} 1, n \geq 8 \\ 0, n < 8 \end{cases}$$

$$s_1(n-8) = \begin{cases} 0, & n < 8 \\ 0.89^{n-8}, & n \geq 8 \end{cases}$$

6. Смоделировать дискретный прямоугольный импульс

$$s_3(k) = \begin{cases} U, & n_0 \leq n \leq n_0 + n_{imp} - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

на основе дискретного единичного скачка с выводом графика на интервале времени $n \in [0, N-1]$. Пояснить как выполняется моделирование импульса.

Дискретный прямоугольный импульс:

$$s_3(n) = \begin{cases} 18, & 6 \leq n \leq 13, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Интервал дискретного нормированного времени $n \in [0; 32]$. Дискретный прямоугольный импульс представлен на рис. 6.

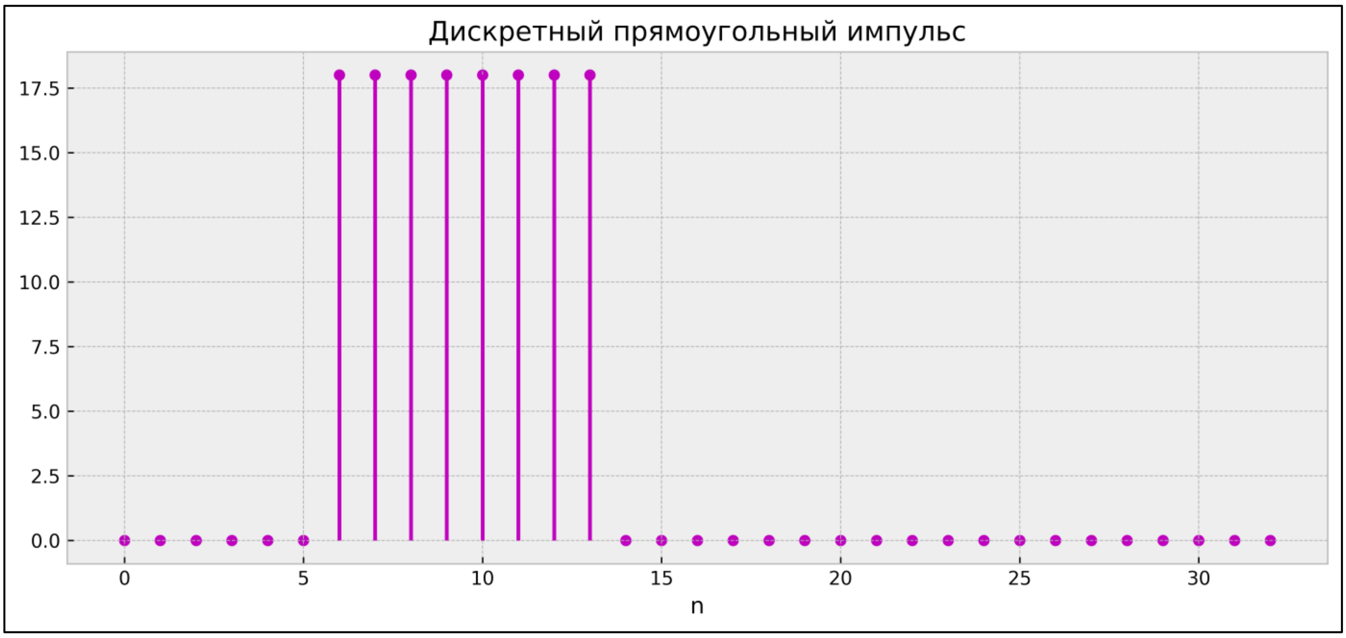

Рисунок 6 – Дискретный прямоугольный импульс

Моделирование импульса было реализовано путём присвоения элементам, значения которых по оси OY находятся в интервале от 6 до 13, значения 18.

7. Смоделировать линейную комбинацию дискретных гармонических сигналов $s_4(k)$:

$$s_4(k) = a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k) + a_3 x_3(k),$$

где

$$x_i(k) = B_i \sin(\widehat{\omega}_i k)$$

с выводом графиков последовательностей $x_i(k)$ и $s_4(k)$ на интервале времени $n \in [0, 5N - 1]$. Вычислить среднее значение, энергию и среднюю мощность последовательности $s_4(k)$. Пояснить, какие операции при моделировании линейной комбинации сигналов и как определяют указанные характеристики.

Линейная комбинация дискретных гармонических сигналов $s_4(n)$:

$$s_4(n) = -1.5x_1(n) + 3.7x_2(n) + 4.4x_3(n),$$

где

$$x_1(n) = 4.5 \sin\left(\frac{\pi}{7} n\right)$$

$$x_2(n) = 2.7\sin\left(\frac{\pi}{11}n\right)$$

$$x_3(n) = 5.2\sin\left(\frac{\pi}{19}n\right)$$

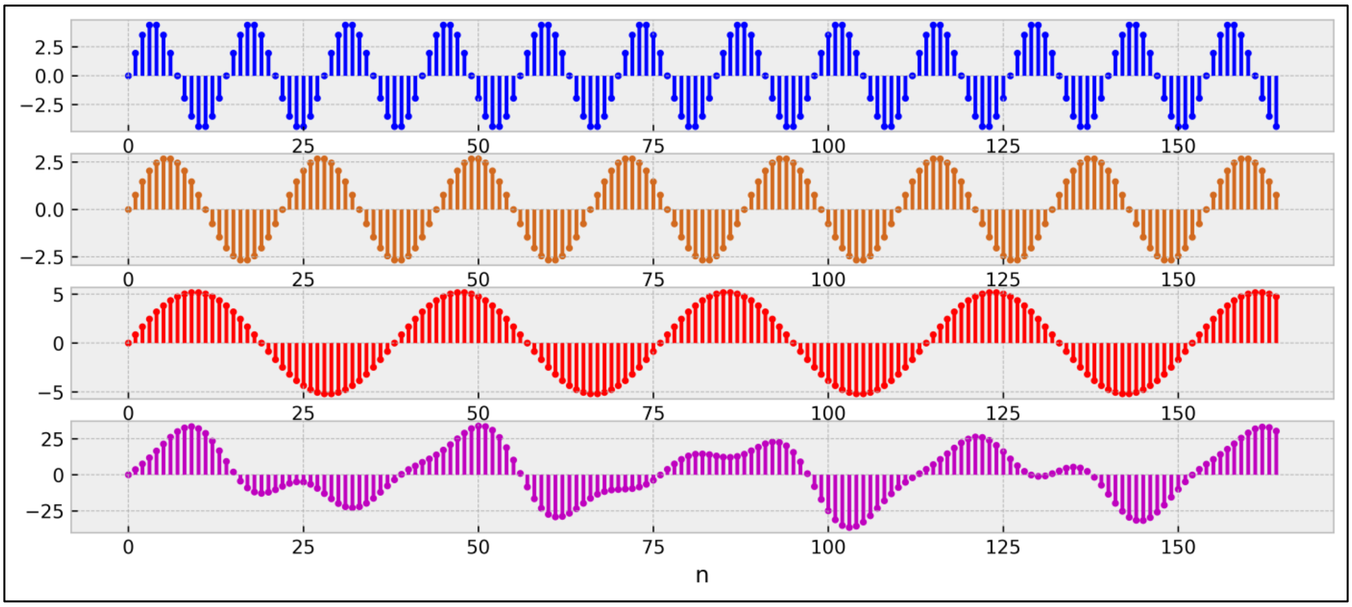

Рисунок 7 – Линейная комбинация дискретных гармонических сигналов с выводом графиков последовательностей $\mathrm{x_i(n)}$ (сверху вниз $\mathrm{x_1(n)}, \mathrm{x_2(n)}, \mathrm{x_3(n)}, s_4(n)$)

Среднее значение 1.5678

Энергия $E = \int_0^T s^2(t)dt = 57255.467$

Средняя мощность $P_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt = 347.0028$

Для построения графиков 1-3 в каждой точке были подсчитаны значения функции $a_i x_i(k)$, а затем по этим координатам происходила отрисовка. График 4 был построен путем суммирования рассчитанных координат y для графиков 1-3.

Полученные значения $x_i(k)$ и $s_4(k)$ использовались для расчетов указанных характеристик:

- Среднее значение – сумма значений последовательности, отнесенная к её длине. (вычислено с помощью метода библиотеки numpy: np.mean(s))
- Энергия – сумма квадратов значений последовательности. (np.sum(s**2))

- Средняя мощность — энергия, отнесенная к длине последовательности (np.sum(s**2)/len(s))

8. Смоделировать дискретную затухающую синусоиду $s_5(k) = |a|^k \cos(\widehat{\omega}_0 k)$ и вывести график на интервале времени $n \in [0, N-1]$. Пояснить операции при моделировании данного сигнала.

Дискретная затухающая синусоида $s_5(k)$:

$$s_5(k) = |0.89|^k \cos\left(\frac{\pi}{9} k\right)$$

Интервал дискретного нормированного времени $n \in [0; 32]$. Дискретная затухающая синусоида представлена на рис. 8.

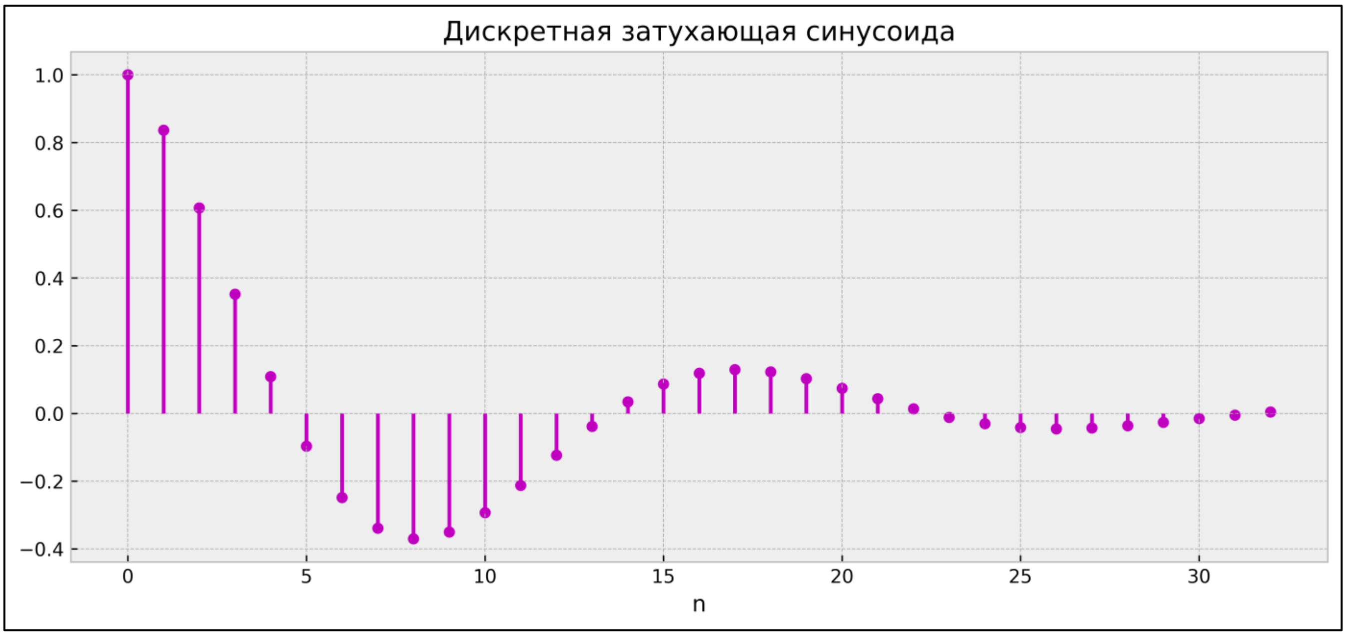

Рисунок 8 – Дискретная затухающая синусоида

Для построения графика были рассчитаны координаты y по формуле затухающей синусоиды и переданы в функцию отрисовки.

9. Вывести график пяти периодов периодической последовательности $s_6(k)$ дискретных прямоугольных импульсов амплитуды U и длительности n_{imp} с периодом, вдвое большим длительности импульса. Пояснить операции при моделировании периодической последовательности.

График пяти периодов периодической последовательности $s_6(k)$ дискретных прямоугольных импульсов амплитуды $U = 18$ и длительности $n_{imp} = 8$ с периодом, вдвое большим длительности импульса представлен на рис. 9.

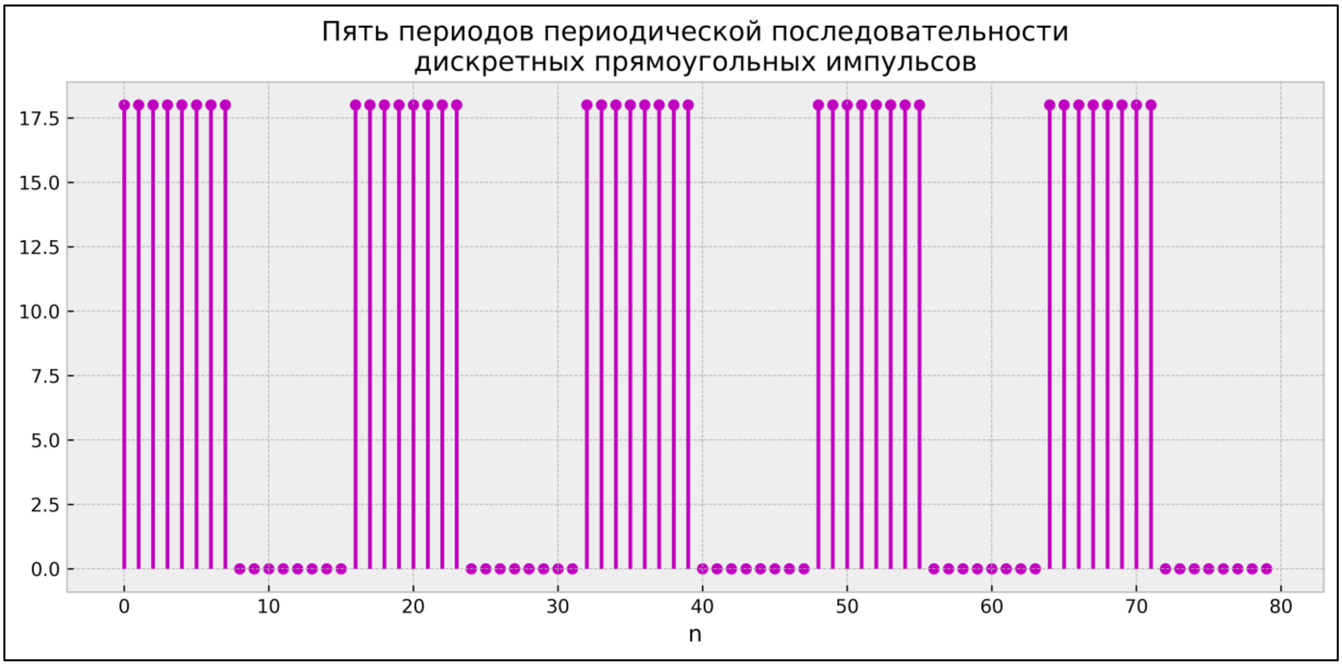

Рисунок 9 – Пять периодов периодической последовательности $s_6(k)$ дискретных прямоугольных импульсов

Для построения графика была использована реализация дискретного прямоугольного импульса из пункта 6, амплитуда была задана равной 18 и таких периодов было выведено 5 согласно заданию.

Выводы.

В ходе лабораторной работы были получены навыки моделирования дискретных сигналов средствами языка Python, включая библиотеки numpy и matplotlib, на основе их математического описания, а также были изучены основные теоретические положения по данной теме.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import seaborn as sns
plt.style.use('bmh')
figsize = (12, 5)
dpi = 600

Nv = 18
N = 30+Nv%5
T = 0.0005*(1+Nv%3)
a = ((-1)**Nv)*(0.8+0.005*Nv)
C = 1+Nv%5
w0 = np.pi/(6+Nv%5)
m = 5+Nv%5
U = Nv
n0 = Nv%5+3
nimp = Nv%5+5
B1 = 1.5+Nv%5
B2 = 5.7-Nv%5
B3 = 2.2+Nv%5
w1 = np.pi/(4+Nv%5)
w2 = np.pi/(8+Nv%5)
w3 = np.pi/(16+Nv%5)
a1 = 1.5-Nv%5
a2 = 0.7+Nv%5
a3 = 1.4+Nv%5

Nv, N, T, a, C, w0, m, U, n0, nimp, B1, B2, B3, w1, w2, w3, a1, a2, a3

x1 = np.linspace(0, (N - 1) * T, N, endpoint=True)
x2 = np.linspace(0, (N - 1), N, endpoint=True)
```

```
y = [0] * N
y[0] = 1

fig = plt.figure(dpi=dpi, figsize=figsize)
ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1)
ax1.scatter(x1, y, s=30, c='b')
ax1.vlines(x1, ymin=0, ymax=y, colors='b')
plt.xlabel('nT')
plt.title('Цифровой единичный импульс на\nинтервале дискретного времени')

ax2 = fig.add_subplot(1, 2, 2)
ax2.scatter(x2, y, s=30, c='m')
ax2.vlines(x2, ymin=0, ymax=y, colors='m')
plt.xlabel('n')
plt.title('Цифровой единичный импульс на\nинтервале дискретного нормированного времени')
plt.show()

x1 = np.linspace(0, (N - 1) * T, N, endpoint=True)
x2 = np.linspace(0, (N - 1), N, endpoint=True)
y = [1] * N

fig = plt.figure(dpi=dpi, figsize=figsize)
ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1)
ax1.scatter(x1, y, s=30, c='b')
ax1.vlines(x1, ymin=0, ymax=y, colors='b')
plt.xlabel('nT')
plt.title('Цифровой единичный скачок на\nинтервале дискретного времени')

ax2 = fig.add_subplot(1, 2, 2)
ax2.scatter(x2, y, s=30, c='m')
ax2.vlines(x2, ymin=0, ymax=y, colors='m')
plt.xlabel('n')
```

```
plt.title('Цифровой единичный скачок на\nинтервале дискретного нормированного времени')
plt.show()

x1 = np.linspace(0, (N - 1) * T, N, endpoint=True)
x2 = np.linspace(0, (N - 1), N, endpoint=True)
y = [a**i for i in range(N)]

fig = plt.figure(dpi=dpi, figsize=figsize)
ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1)
ax1.scatter(x1, y, s=30, c='b')
ax1.vlines(x1, ymin=0, ymax=y, colors='b')
plt.xlabel('nT')
plt.title('Дискретная экспоненциальная функция\nна интервале дискретного времени')

ax2 = fig.add_subplot(1, 2, 2)
ax2.scatter(x2, y, s=30, c='m')
ax2.vlines(x2, ymin=0, ymax=y, colors='m')
plt.xlabel('n')
plt.title('Дискретная экспоненциальная функция  на\nинтервале дискретного нормированного времени')
plt.show()

x = np.linspace(0, (N - 1), N, endpoint=True)
y1 = [C*np.cos(w0*i) for i in range(N)]
y2 = [C*np.sin(w0*i) for i in range(N)]

fig = plt.figure(dpi=dpi, figsize=figsize)
ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1)
ax1.scatter(x, y1, s=30, c='b')
ax1.vlines(x, ymin=0, ymax=y1, colors='b')
plt.xlabel('n')
plt.title('Вещественная часть дискретного\nкомплексного гармонического сигнала')
```

```
ax2 = fig.add_subplot(1, 2, 2)
ax2.scatter(x, y2, s=30, c='m')
ax2.vlines(x, ymin=0, ymax=y2, colors='m')
plt.xlabel('n')
plt.title('Мнимая часть дискретного\nкомплексного гармонического сигнала')
plt.show()

x = np.linspace(0, (N - 1), N, endpoint=True)
y1 = [*([0] * (m)), 1, *([0] * (N-m-1))]
y2 = [*([0] * (m)), *([1] * (N-m))]
y3 = [*([0] * (m)), *(a**i for i in range(N-m))]

fig = plt.figure(dpi=dpi, figsize=figsize)
ax1 = fig.add_subplot(3, 1, 1)
ax1.scatter(x, y1, s=30, c='b')
ax1.vlines(x, ymin=0, ymax=y1, colors='b')
plt.xlabel('n')

ax2 = fig.add_subplot(3, 1, 2)
ax2.scatter(x, y2, s=30, c='m')
ax2.vlines(x, ymin=0, ymax=y2, colors='m')
plt.xlabel('n')

ax3 = fig.add_subplot(3, 1, 3)
ax3.scatter(x, y3, s=30, c='r')
ax3.vlines(x, ymin=0, ymax=y3, colors='r')
plt.xlabel('n')
plt.show()

x = np.linspace(0, (N - 1), N, endpoint=True)
y = [*([0] * (n0)), *([U] * (nimp)), *([0] * (N-(nimp+n0)))]
plt.figure(dpi=dpi, figsize=figsize)
plt.scatter(x, y, s=30, c='m')
```

```
plt.vlines(x, ymin=0, ymax=y, colors='m')
plt.xlabel('n')
plt.title('Дискретный прямоугольный импульс')
plt.show()

x = np.linspace(0, (5*N - 1), 5*N, endpoint=True)

y1 = [B1*np.sin(w1*i) for i in range(5*N)]
y2 = [B2*np.sin(w2*i) for i in range(5*N)]
y3 = [B3*np.sin(w3*i) for i in range(5*N)]
y4 = [a1*B1*np.sin(w1*i)+a2*B2*np.sin(w2*i)+a3*B3*np.sin(w3*i)
for i in range(5*N)]

fig = plt.figure(dpi=dpi, figsize=figsize)
ax1 = fig.add_subplot(4, 1, 1)
ax1.scatter(x, y1, s=10, c='b')
ax1.vlines(x, ymin=0, ymax=y1, colors='b')
plt.xlabel('n')

ax2 = fig.add_subplot(4, 1, 2)
ax2.scatter(x, y2, s=10, c='chocolate')
ax2.vlines(x, ymin=0, ymax=y2, colors='chocolate')
plt.xlabel('n')

ax3 = fig.add_subplot(4, 1, 3)
ax3.scatter(x, y3, s=10, c='r')
ax3.vlines(x, ymin=0, ymax=y3, colors='r')
plt.xlabel('n')

ax4 = fig.add_subplot(4, 1, 4)
ax4.scatter(x, y4, s=10, c='m')
ax4.vlines(x, ymin=0, ymax=y4, colors='m')
plt.xlabel('n')
plt.show()
```

```
x = np.linspace(0, (N - 1), N, endpoint=True)
y = [(abs(a)**i)*np.cos(w0*i) for i in range(N)]

plt.figure(dpi=dpi, figsize=figsize)
plt.scatter(x, y, s=30, c='m')
plt.vlines(x, ymin=0, ymax=y, colors='m')
plt.xlabel('n')
plt.title('Дискретная затухающая синусоида')
plt.show()

x = np.linspace(0, (nimp*5*2)-1, nimp*5*2, endpoint=True)
y = [*([U] * (nimp)), *([0] * (nimp))] * 5
plt.figure(dpi=dpi, figsize=figsize)
plt.scatter(x, y, s=30, c='m')
plt.vlines(x, ymin=0, ymax=y, colors='m')
plt.xlabel('n')
plt.title('Пять периодов периодической последовательности\nдискретных прямоугольных импульсов')
plt.show()
```