Бесконечные антагонистические игры

$\Gamma = \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{H} \rangle$ $\boldsymbol{X}$ $\boldsymbol{Y}$ - бесконечные множества стратегий.

$\boldsymbol{H}: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{R}^1$ - функция выигрыша игрока 1.

Одновременная игра преследования на плоскости

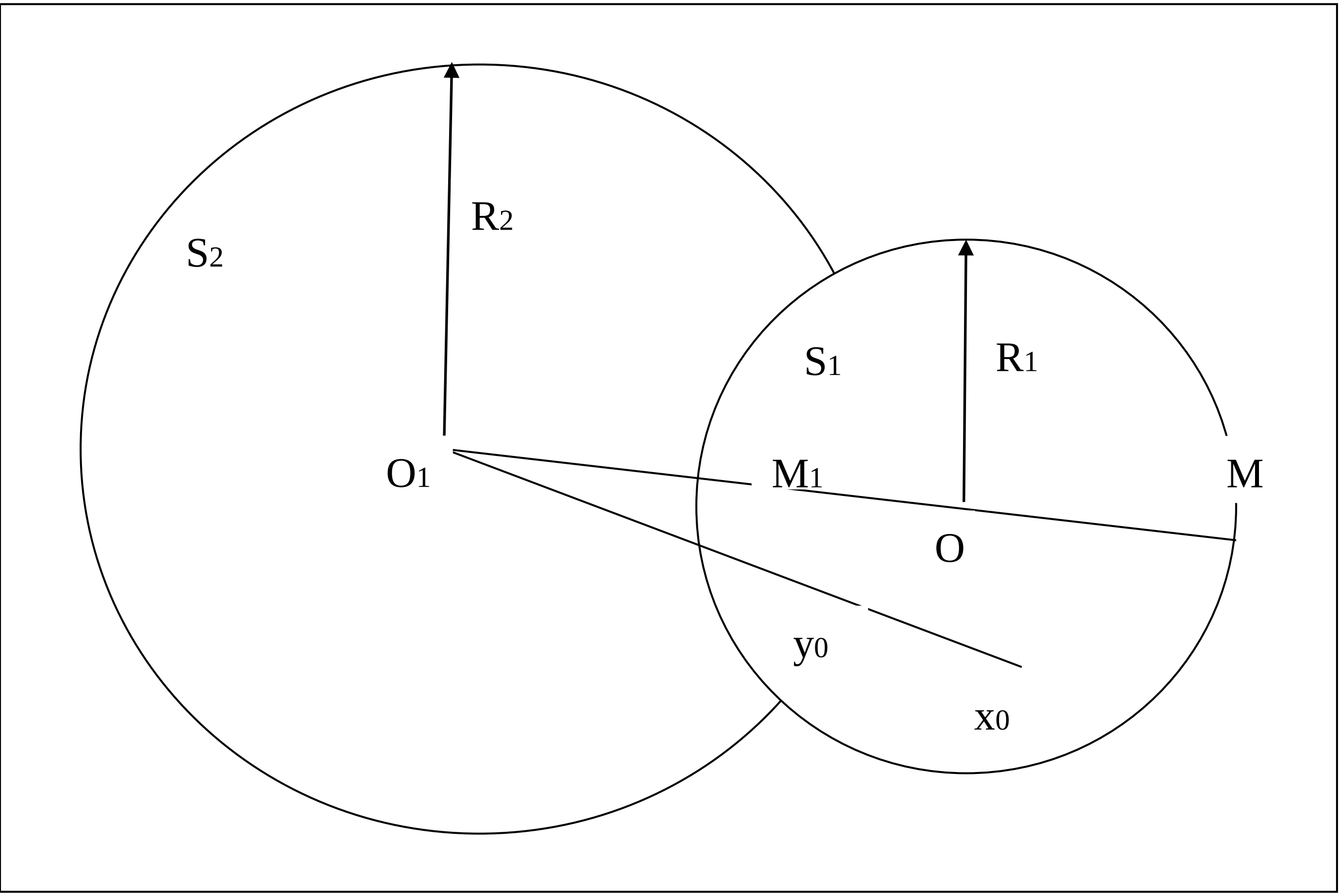
(Не оптимизационная задача)

S_1 S_2 - множества на плоскости. Игрок 1 выбирает $x \in S_1$, а игрок 2 выбирает $y \in S_2$ (одновременно). Точки $x \in S_1$ и $y \in S_2$ - стратегии игроков. **Цель** игрока 2 - минимизация расстояния между ним и игроком 1. У 1 игрока – противоположная цель. Выигрыш игрока 1 – евклидово расстояние $\rho(x, y)$ между точками $x \in S_1$ $y \in S_2$. $H(x, y) = \rho(x, y)$

Для бесконечных антагонистических игр существование значения игры не обязательно.

Пусть S_1 S_2 - круги с радиусами R_1 R_2 $(R_1 < R_2)$. Найдем

$$\underline{v} = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} \rho(x, y)$$



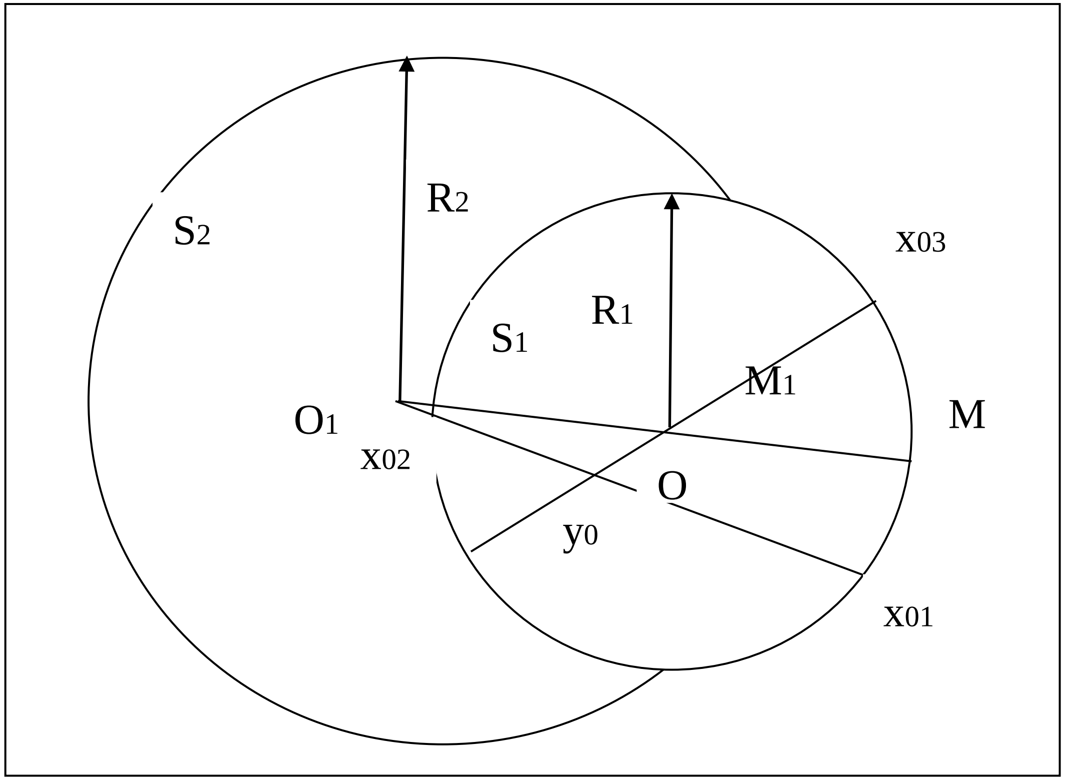
$$\underline{v} = \underset{x \in S_1}{max} \underset{y \epsilon S_2}{min} \rho(x$$

1. $x_0 \in S_1$

2. $\underset{y \in S_2}{min}\rho(x_0, y)= y_0$

3. Максимум минимума в точке M $\quad \underline{v} = |O_1\text{M}| - R_2$

Первый случай $O \epsilon S_2$



$$\overline{v} = \min_{y \epsilon S_2} \max_{x \in S_1} \rho(x,y)$$

1 $y_0 \in S_2$

2. $\max_{x \in S_1} \rho(x, y_0)$

3. $\rho(x_0, y_0) = \max_{i=1,2,3} \rho(x_0^i, y_o)$

4. $\forall y_0 \in S_2 \quad \max_{x \in S_1} \rho(x, y_o) = \rho(x_0, y_0) \geq R_1$

$y_0 = O \quad \max_{x \in S_1} \rho(x, O) = R_1$

5. $\min_{y \epsilon S_2} \max_{x \in S_1} \rho(x,y) = \overline{v} = R_1$

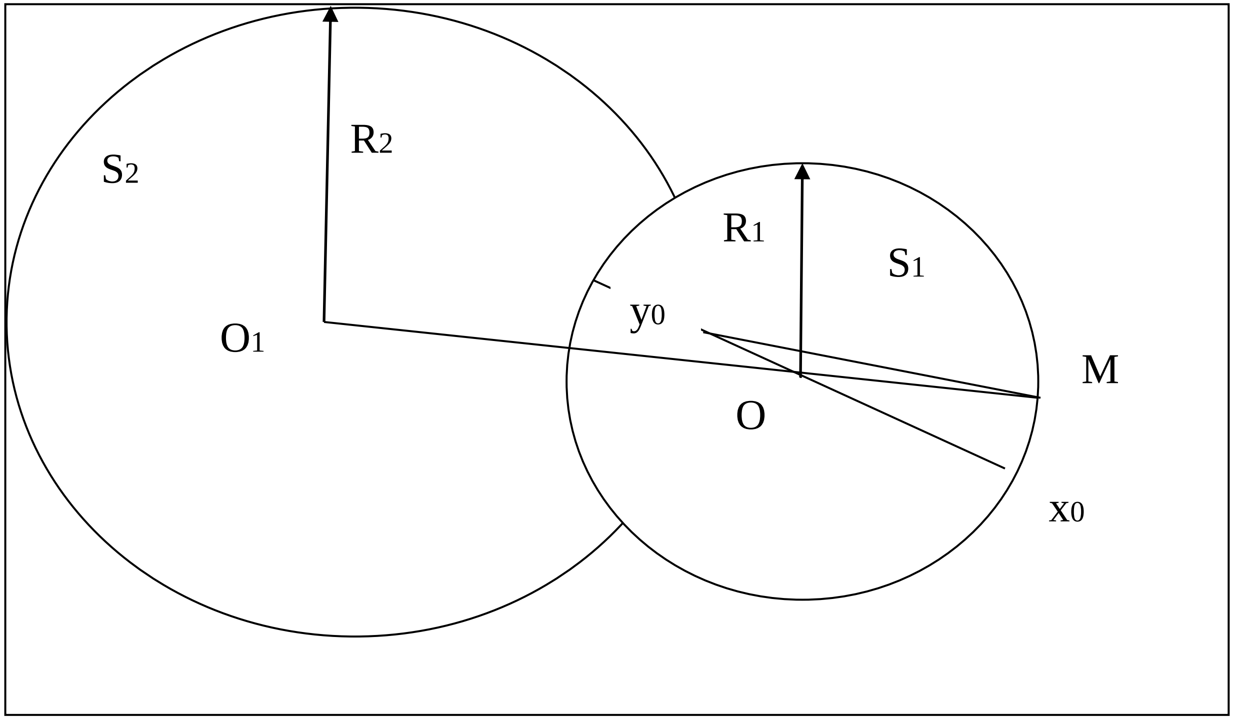
$O \epsilon S_2 \quad \overline{v} = R_1 \geq \left|\overline{O_1 M}\right| - R_2 =$

Равенство, когда O принадлежит границе S_2

6. Выводы

Второй случай $O \notin S_2$

$$\overline{v} = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} \rho(x, y)$$



1. $y_0 \in S_2$
2. $\max_{x \in S_1} \rho(x, y_0)$
3. $\overline{v} = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} \rho(x,y) = \left|\overline{O_1 M}\right| - R_2 = \underline{v}$

4. Выводы.

Покер: 1 круг ставок, 1 размер ставки

Модель: каждый из игроков A и B ставит по 1. Игроки получают по карте и ходит A. Он может поставить ещё ***c*** единиц или спасовать и потерять начальную ставку. Если A ставит, то B может спасовать (и потерять начальную ставку) или уравнять. Если B уравнивает, то карты открываются и игрок с лучшими картами берет банк.

Пусть случайная величина x - значение карты игрока A.

Случайная величина y - значение карты игрока B. Эти случайные величины равномерно распределены на единичном отрезке.

$\alpha(x)$ вероятность того, что если A получит x, то поставит c.

$1-\alpha(x)$ вероятность того, что если A получит x, то A спасует.

$\beta(y)$ вероятность того, что если B получит y, то B уравняет ставку c.

$1-\beta(y)$ вероятность того, что если B получит y, то B спасует.

Средний выигрыш A H определяется соотношениями:

-1 с вероятностью $\overline{\alpha}(x)$

+1 с вероятностью $\alpha(x)\overline{\beta}(y)$

$(c+1)sgn(x-y)$ с вероятностью $\alpha(x)\beta(y)$

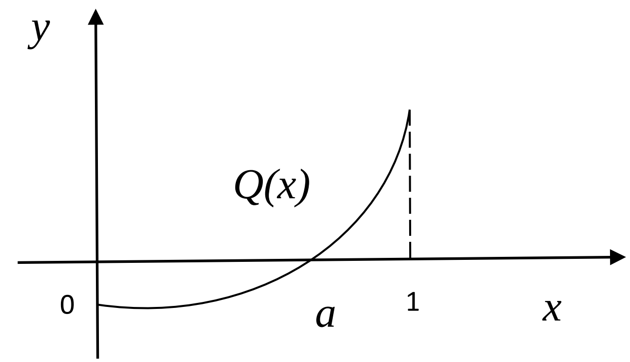
$$H(\alpha,\beta)=\int_0^1\int_0^1\left[-\overline{\alpha}(x)+\alpha(x)\overline{\beta}(y)+(c+1)sgn(x-y)\alpha(x)\beta(y)\right]dxdy$$

Оптимальные стратегии

Первый игрок максимизирует выигрыш. А второй – минимизирует.

$$H(\alpha,\beta)=\int_0^1 \alpha(x)\,[1+\int_0^1 (\overline{\beta}(y)+(c+1)sgn(x-y)\beta(y))dy]dx-1 \qquad (**)$$

Пусть выражение в квадратных скобках = $Q(x)$.



$Q(x)>0 \quad \alpha(x)=1$

$Q(x)<0 \quad \alpha(x)=0$

$Q(x)=0 \quad \alpha(x)-$ может принимать любые значения.

$$H(\alpha,\beta)=\int_0^1 \beta(y)\,[\int_0^1 \alpha(x)(-(c+1)sgn(x-y)-1)dx]dy+\int_0^1 (2\,\alpha(x)-1)dx$$

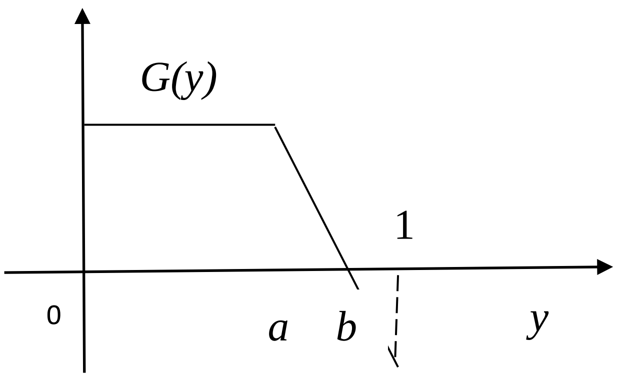
А использует стратегию $\alpha(x)$ с порогом a. Проигрыш В

$$H(\alpha,\beta)=\int_0^1 \beta(y)G(y)dy+2(1-a)-1, \quad \text{где} \quad G(y)=\int_a^1 [-(c+1)sgn(x-y)-1]dx$$

Оптимальные стратегии

$$y < a \qquad G(y) = \int_a^1 c\,dx = c(1-a)$$

$$y \geq a \qquad G(y) = \int_a^y (-c-2)dx + \int_y^1 c dx = -2(c+1)y + a(c+2) + c$$



Найдем b $\qquad b = \dfrac{1}{2(c+1)}[a(c+2)+c]$

Минимальное значение проигрыша B

$$H(\alpha, \beta) = \int_b^1 G(y)dy + 2(1-a) - 1 = \int_b^1 [-2(c+1)y + a(c+2) + c]dy + 2(1-a) - 1$$

Оптимальные стратегии

$$H(\alpha, \beta) = (c+1)b^2 - b(a(c+2)+c) + ac$$

Подставляя b,

$$H(a) = \frac{(\mathrm{c}+2)^2}{4(\mathrm{c}+1)}\left[-a^2 + 2a\frac{c^2}{(c+2)^2} - \frac{c^2}{(c+2)^2}\right] \qquad (*)$$

a – стратегия А. Постарается максимизировать минимальный проигрыш В. Нужно найти максимум параболы.

$$a = \left(\frac{c}{c+2}\right)^2$$

$$b = \frac{c}{c+2}$$

Подсчитать значение выигрыша первого игрока.

Оптимальный порог первого меньше, чем у второго, он должен быть более осторожен.

Другая стратегия.

При использовании оптимальной стратегии $\alpha(x)$ игроком А, наилучший ответ В – использование β(y) с порогом b.
Вычислим Q(x) для данного b. (**)

$$x \le b \qquad Q(x) = 1 + \int_0^b 1\,dy - \int_b^1 (c+1)dy = 1 + b - (c+1)(1-b)=0$$

$$x > b \qquad Q(x) = 1 + b + \int_b^x (c+1)\,dy - \int_x^1 (c+1)dy = 2(c+1)x - c(b+1)) > 0$$

и наилучшим решением для А является сделать ставку.

$x \le b$ и $\alpha(x)$ принимает любые значения.

Если $x \ge b$ А делает ставку;

$x < b$ А с вероятностью $p = \dfrac{c}{c+2}$ пасует, и делает ставку с вероятностью $p = 1 - \frac{c}{c+2} = \frac{2}{c+2}$. Он может блефовать.