Цифровая обработка сигналов

Частотный анализ полиномиальных приближений

Входной сигнал: $s(t)$

Выходной сигнал: $y(t) = A + Bt$

Приближение (в смысле МНК) **прямой линией** по пяти точкам:

$$F(A,B) = \sum_{k=-2}^{k} (s_k - y_k)^2 = \sum_{k=-2}^{k} (s_k - A - Bk)^2 \Rightarrow \min \qquad (2.1)$$

Система нормальных уравнений

$$\begin{cases} 5A + 0B = \sum_{k=-2}^{k=2} s_k \\ 0A + 10B = \sum_{k=-2}^{k=2} k s_k \end{cases} \qquad (2.2)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

В итоге получаем:

$$y_0 = A = \frac{1}{5}\sum_{k=-2}^{k=2} s_k = \frac{1}{5}(s_{-2} + s_{-1} + s_0 + s_1 + s_2) \quad (2.3)$$

В общем случае:

$$y_n = \frac{1}{5}\sum_{k=n-2}^{k=n+2} s_k = \frac{1}{5}(s_{n-2} + s_{n-1} + s_n + s_{n+1} + s_{n+2}) \quad (2.4)$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

$$y_n = \frac{1}{5}(e^{-2i\omega} + e^{-2i\omega} + 1 + e^{i\omega} + e^{2i\omega})e^{i\omega n} = H(\omega)e^{i\omega n} \quad (2.5)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{5}(e^{-2i\omega} + e^{-2i\omega} + 1 + e^{i\omega} + e^{2i\omega}) \quad (2.6)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

$$H(\omega) = 0.2\left[1 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega)\right] \qquad (2.7)$$

Поскольку передаточная функция в форме (2.6) есть геометрическая прогрессия со знаменателем $e^{i\omega}$, ее можно представить как сумму этой прогрессии:

$$H(\omega) = \frac{e^{i\frac{5\omega}{2}} - e^{-i\frac{5\omega}{2}}}{5\left(e^{i\frac{\omega}{2}} - e^{-i\frac{\omega}{2}}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{5\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \qquad (2.8)$$

$H(\omega)$ - периодическая функция с периодом, равным 2π. Обычно рассматривается интервал $(-\pi,\pi)$ для ω или (-0.5,0.5) для f.

$$H(\omega) = H(2\pi f) = \tilde{H}(f) \qquad (2.9)$$

$\tilde{H}(f) = 1$, для $f = 0$; $\tilde{H}(f) = 0$, для $f = 0.2$ и $f = 0.4$

Частотный анализ полиномиальных приближений

В общем случае при приближении по 2m+1 точкам

$$H(\omega)=\frac{1}{2m+1}\left[1+2\cos(\omega)+2\cos(2\omega)+...,2\cos(m\omega)\right] \quad (2.10)$$

или

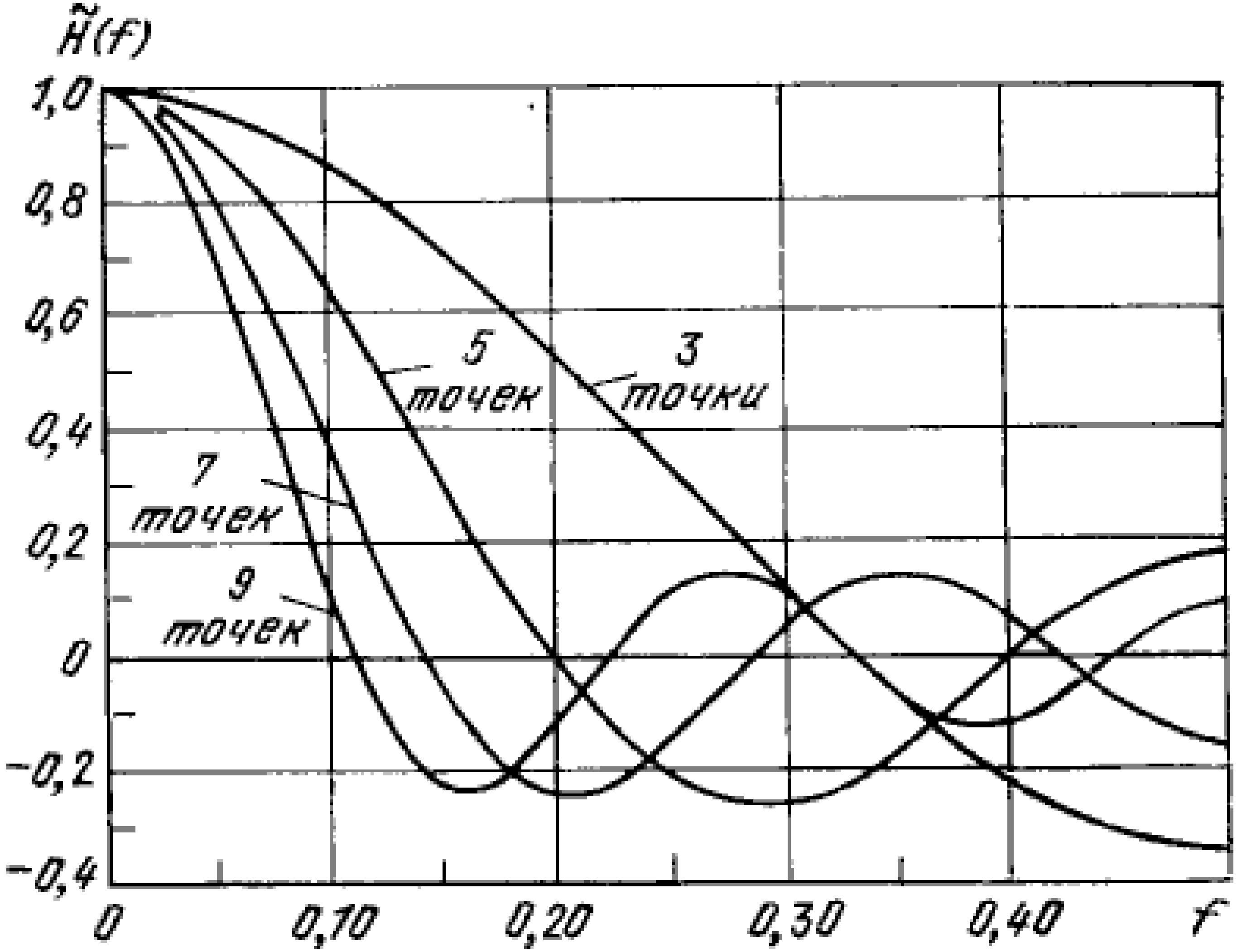
$$H(\omega)=\frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\omega}{2}\right)}{(2m+1)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (2.11)$$

Во всех случаях $H(\omega)$ - периодическая функция с периодом, равным 2π. Кроме того,

если $s(t)=\sum_{m=1}^{M} c_m e^{i\omega_m t}$, то $y(t)=\sum_{m=1}^{M} c_m H(\omega_m) e^{i\omega_m t}$ (2.12)

Частотный анализ полиномиальных приближений

График передаточной функции при сглаживании **прямой линией** по 3,5,7 и 9 точкам



Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание **полиномом второй степени**:

$$y(t) = A + Bt + Ct^2$$

При сглаживании по пяти точкам:

$$y_n = \frac{1}{35}(-3s_{n-2} + 12s_{n-1} + 17s_n + 12s_{n+1} - 3s_{n+2}) \quad (2.13)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{35}\left[17 + 24\cos(\omega) - 6\cos(2\omega)\right] \quad (2.14)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание **полиномом второй степени**:

по семи, девяти и одиннадцати точкам:

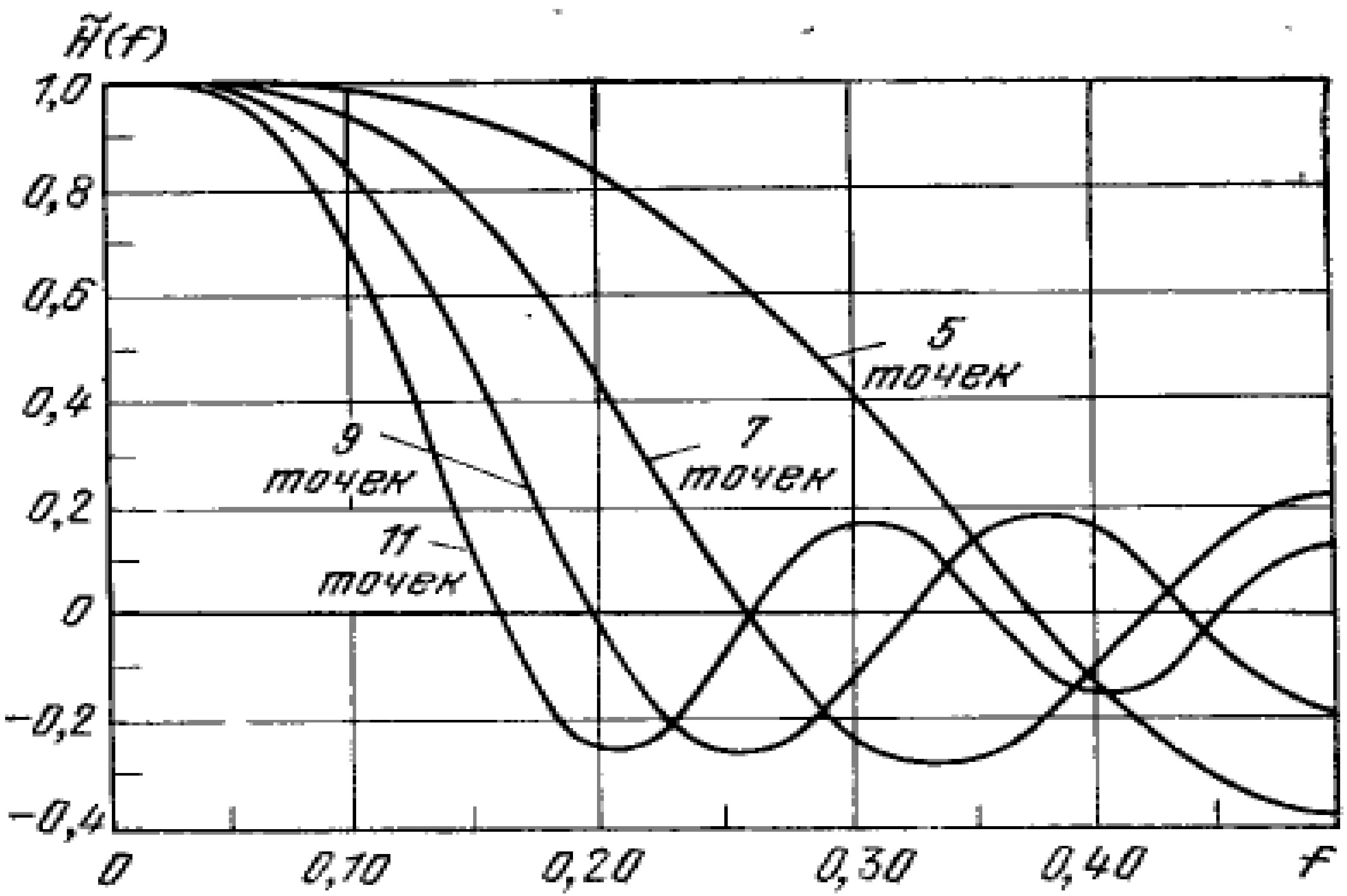
$$y_n = \frac{1}{21}(-2s_{n-3} + 3s_{n-2} + 6s_{n-1} + 7s_n + 6s_{n+1} + 3s_{n+2} - 2s_{n+3}) \quad (2.15)$$

$$y_n = \frac{1}{231}(-21\, s_{n-4} + 14\, s_{n-3} + 39\, s_{n-2} + 54\, s_{n-1} + 59\, s_n + 54\, s_{n+1} + $$
$$+ 39\, s_{n+2} + 14\, s_{n+3} - 21\, s_{n+4}) \quad (2.16)$$

$$y_n = \frac{1}{429}(-36s_{n-5} + 9s_{n-4} + 44s_{n-3} + 69s_{n-2} + 84s_{n-1} + 89s_n + $$
$$+ 84s_{n+1} + 69s_{n+2} + 44s_{n+3} + 9s_{n+4} - 36s_{n+5}) \quad (2.17)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

График передаточной функции при сглаживании **полиномом второй степени** по 5,7,9 и 11 точкам



Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание **полиномом четвертой степени**:

$$y(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4$$

При сглаживании по семи точкам:

$$y_n = \frac{1}{231}(5s_{n-3} - 30s_{n-2} + 75s_{n-1} + 131s_n + \qquad (2.18)$$

$$+75s_{n+1} - 30s_{n+2} + 5s_{n+3})$$

$$H(\omega) = \frac{1}{231}\left[131 + 150\cos(\omega) - 60\cos(2\omega) + 10\cos(3\omega)\right] \quad (2.19)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание **полиномом четвертой степени**:

При сглаживании по 9-ти, 11-ти и 13-ти точкам:

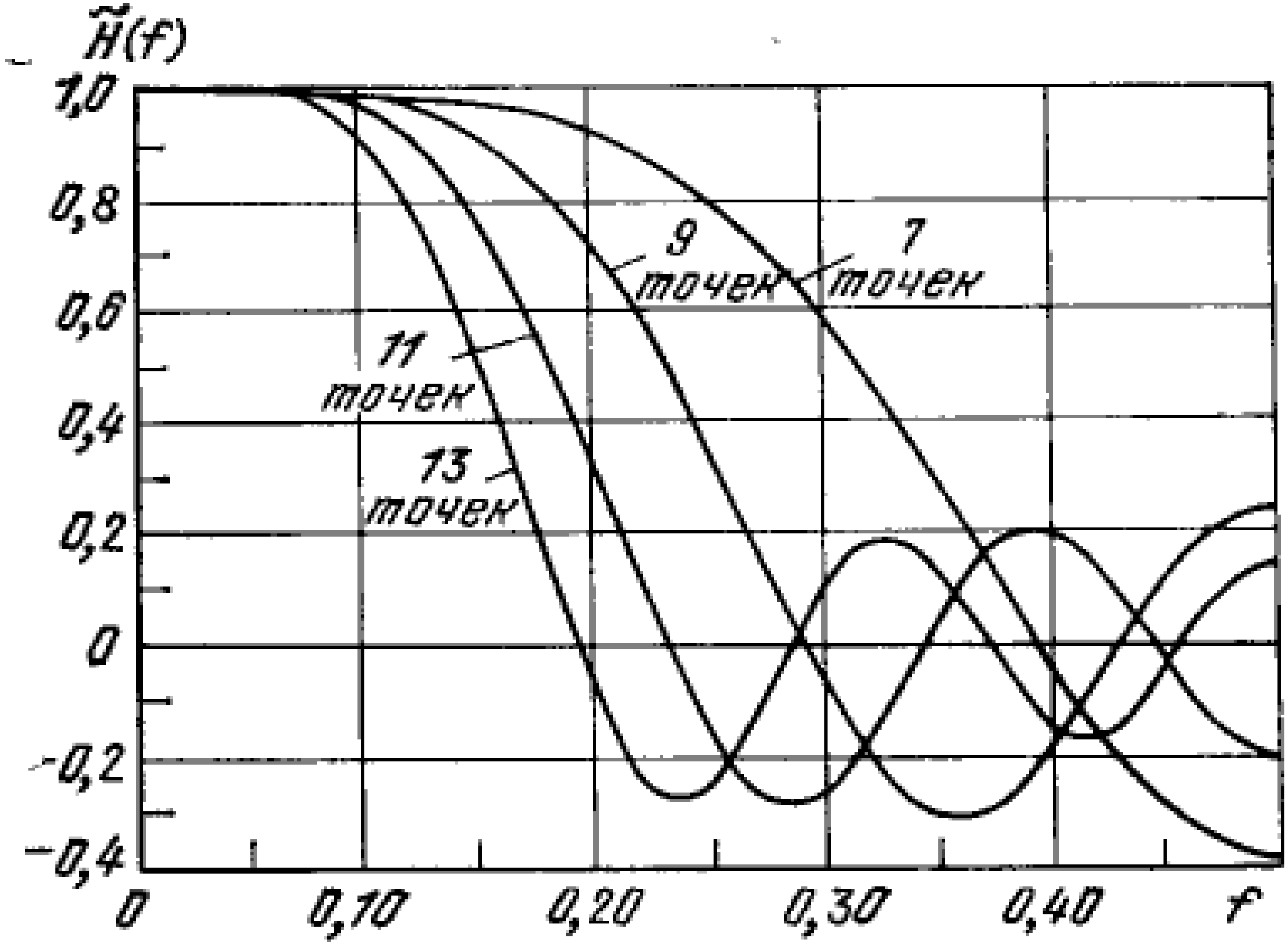
$$y_n = \frac{1}{429}(15s_{n-4} - 55s_{n-3} + 30s_{n-2} + 135s_{n-1} + 179s_n + 135s_{n+1} + 30s_{n+2} - \\ - 55s_{n+3} + 15s_{n+4}) \qquad (2.20)$$

$$y_n = \frac{1}{429}(18s_{n-5} - 45s_{n-4} - 10s_{n-3} + 60s_{n-2} + 120s_{n-1} + 143s_n + 120s_{n+1} + 60s_{n+2} - \\ - 10s_{n+3} - 45s_{n+4} + 18s_{n+5}) \qquad (2.21)$$

$$y_n = \frac{1}{2431}(110s_{n-6} - 198s_{n-5} - 135s_{n-4} + 110s_{n-3} + 390s_{n-2} + 600s_{n-1} + 677s_n + \\ + 600s_{n+1} + 390s_{n+2} + 110s_{n+3} - 135s_{n+4} - 198s_{n+5} + 110s_{n+6}) \qquad (2.22)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

График передаточной функции при сглаживании **полиномом 4-й степени** по 7,9,11 и 13 точкам



Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание с помощью **формул Спенсера** для 15-ти 21-ой точек:

$$y_n = \frac{1}{320}(-3s_{n-7} - 6s_{n-6} - 5s_{n-5} + 3s_{n-4} + 21s_{n-3} + 46s_{n-2} +$$

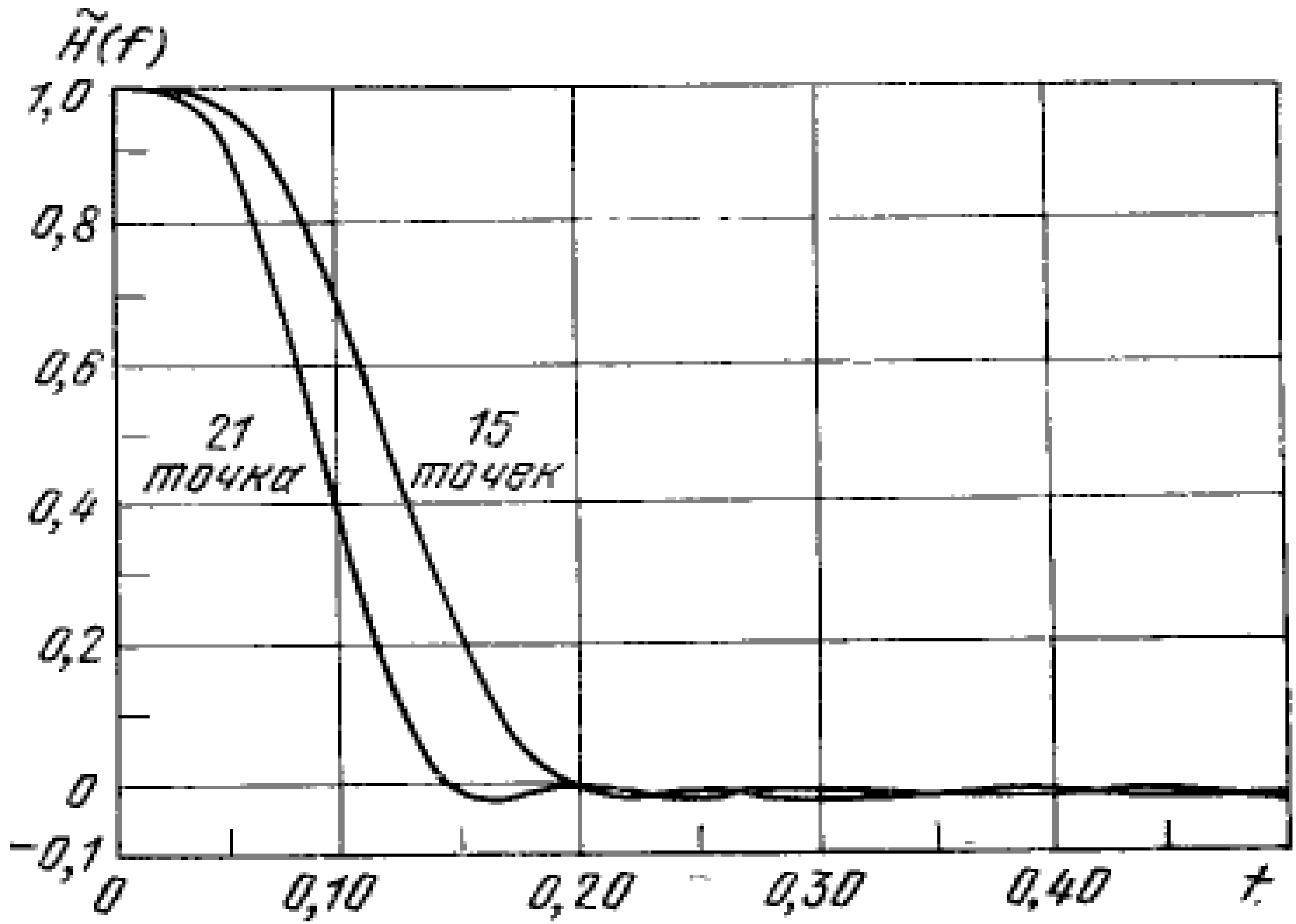
$$+67s_{n-1} + 74s_n + 67s_{n+1} + 21s_{n+2}....) \qquad (2.23)$$

$$y_n = \frac{1}{350}(-s_{n-10} - 3s_{n-9} - 5s_{n-8} - 5s_{n-7} - 2s_{n-6} + 6s_{n-5} + 18s_{n-4} + 33s_{n-3} +$$

$$+47s_{n-2} + 57s_{n-1} + 60s_n + 57s_{n+1}...) \qquad (2.24)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

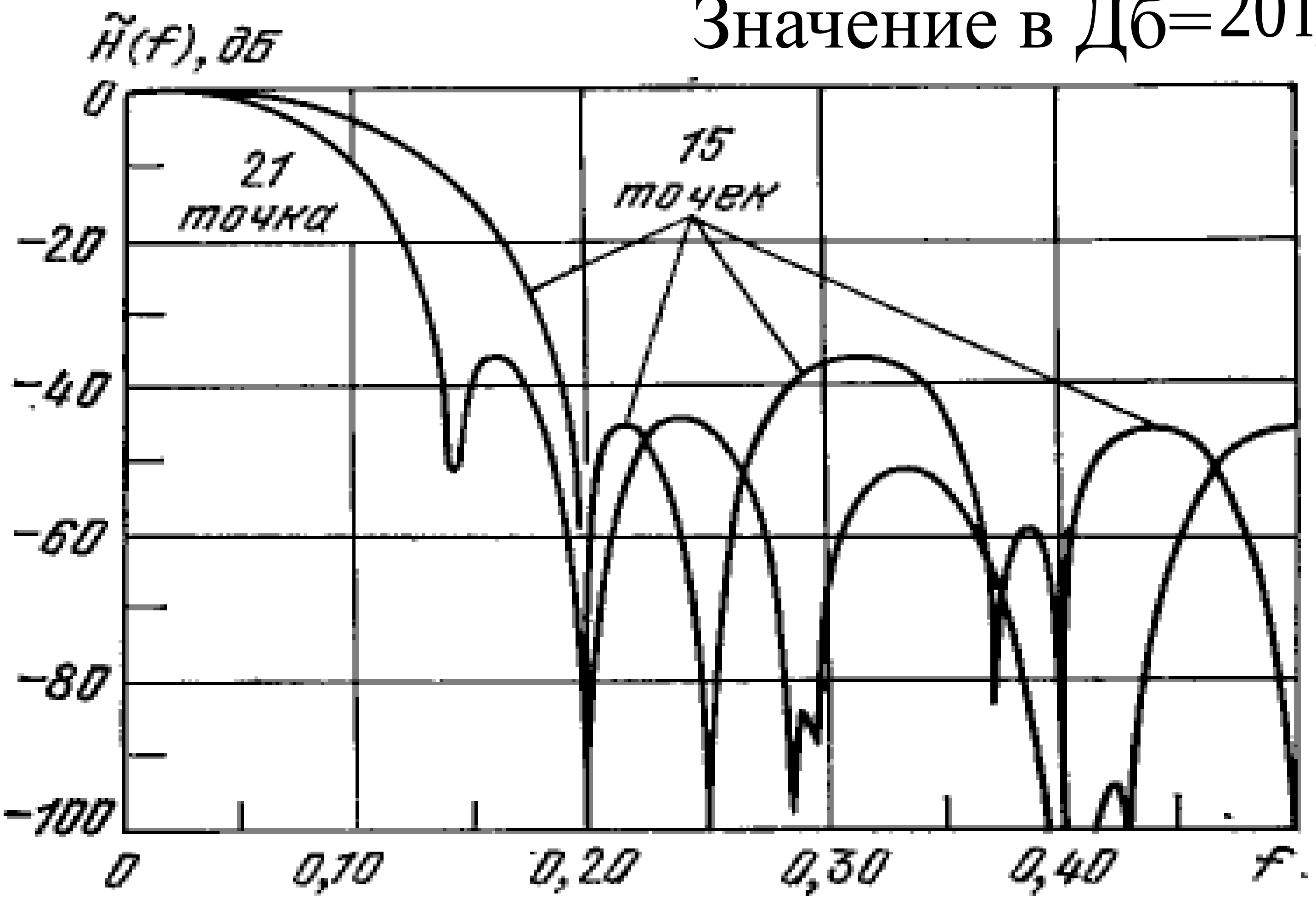
График передаточной функции при сглаживании **по формулам Спенсера** для 13-ти и 21-ой точек:



Частотный анализ полиномиальных приближений

График передаточной функции при сглаживании **по формулам Спенсера** для 13-ти и 21-ой точек **в логарифмической шкале** (Дб).

Значение в Дб$=20\lg\left(\dfrac{|y_n|}{|s_n|}\right)$



Численное интегрирование

Формула трапеций: $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(s_n + s_{n+1}),\ y_0 = 0.$

Пусть $s_n = e^{i\omega n}$ и $y_n = H(\omega)e^{i\omega n}$.

В результате:
$$H(\omega) = \frac{(e^{i\omega}+1)}{2(e^{i\omega}-1)} = \frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \qquad (2.25)$$

Точное значение интеграла от $e^{i\omega t}$ равно $\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}$

Отношение значений:
$$\gamma = \frac{\textit{Вычисленное}}{\textit{Точное}} = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = 1 - \frac{\omega^2}{12} + \frac{\omega^4}{720} + \ldots \quad (2.26)$$

Численное интегрирование

Формула Симпсона:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{1}{3}(s_{n-1} + 4s_n + s_{n+1}),\ y_0 = 0. \qquad (2.27)$$

Пусть $s_n = e^{i\omega n}$

Точное значение интеграла от $e^{i\omega t}$ равно $\dfrac{e^{i\omega t}}{i\omega}$

Отношение значений:

$$\frac{\textit{Вычисленное}}{\textit{Точное}} = \frac{2+\cos(\omega)}{3} \cdot \frac{\omega}{\sin\omega} = 1 + \frac{\omega^4}{180} + \ldots \qquad (2.28)$$

Численное интегрирование

Формула прямоугольников:

$$y_{n+1} = y_n + s_{n+\frac{1}{2}},\ y_0 = 0. \qquad (2.29)$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

Точное значение интеграла от $e^{i\omega t}$ равно $\dfrac{e^{i\omega t}}{i\omega}$

Отношение значений:

$$\frac{\textit{Вычисленное}}{\textit{Точное}} = \frac{\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)} \qquad (2.30)$$

Численное интегрирование

График изменения значения γ для формул численного интегрирования: