Цифровая обработка сигналов

Лекция №5

Санкт-Петербург

2020

Z-преобразование

Пусть последовательность $\{x_k\}$ задает дискретный сигнал. Как и раньше, будем считать, что T – шаг дискретизации равен единице.

Для анализа дискретной последовательности $\{x_k\}$ часто удобно использовать Z-преобразование, когда этой последовательности ставится в соответствие функция комплексной переменной z:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \qquad (5.1)$$

Эта функция определена лишь для тех значений z, при которых ряд (5.1) сходится.

Z-преобразование примеры вычисления

Единичная импульсная функция

$$x_0(k)=\begin{cases}1, k=0\\0, k\neq 0\end{cases};\quad X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_0(k)z^{-k}=z^0=1 \qquad (5.2)$$

Сходится на всей комплексной плоскости.

Единичный скачок

$$x_k=\begin{cases}1, k\geq 0\\0, k<0\end{cases};\ X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad (5.3)$$

Ряд (5.3) есть геометрическая прогрессия. Ее знаменатель z^{-1}. Сходится при $|z|>1$

Z-преобразование свойства

Линейность:

$$\left\{ a x_k^{(1)} + b x_k^{(1)} \right\} \Rightarrow a X^{(1)}(z) + b X^{(2)}(z)$$

Задержка:

$$y_k = x_{k-m} \Rightarrow Y(z) = X(z) z^{-m}$$

z^{-m} - оператор задержки на m тактов.

Умножение на *k*

$$y_k = k x_k \rightarrow Y(z) = -z \frac{dX(z)}{dz}$$

Свертка:

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^{(1)} x_{k-n}^{(2)} \Rightarrow Y(z) = X^{(1)}(z) X^{(2)}(z)$$

Обратное Z-преобразование

Обратное Z-преобразование определяется формулой:

$$x_k = \frac{1}{i2\pi}\oint X(z)z^{k-1}dz \quad , \qquad (5.4)$$

где контурный интеграл берется по любому замкнутому контуру в области сходимости $X(z)$ и охватывающему все его полюсы.

Обратное Z-преобразование

На практике обратное преобразование часто вычисляется посредством разложения $X(z)$ на сумму простых дробей. Например,

$$X(z)=\frac{1}{0.5z^{-2}-1.5z^{-1}+1}=\frac{2}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

Здесь первое слагаемое соответствует Z-преобразованию единичного скачка, умноженному на 2, а второе - Z-преобразованию дискретной показательной функции 2^{-k} В результате получим:

$$x_k=\begin{cases}2-2^{-k}, k\geq 0\\ 0 \qquad\quad, k<0\end{cases}$$

Z-преобразование

Таблица некоторых преобразований

$\{x_k\}$	$X(z)$
$x_k = \begin{cases} a^k, k \ge 0 \\ 0\ , k < 0 \end{cases}$	$X(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}\ , \lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
$x_k = k$	$X(z) = \dfrac{z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}$
$x_k = ka^k$	$X(z) = \dfrac{az^{-1}}{\left(1 - az^{-1}\right)^2}$
$x_k = e^{i\omega kT}$	$X(z) = \dfrac{1}{1 - e^{i\omega kT} z^{-1}}$
$x_k = \sin(\omega kT)$	$X(z) = \dfrac{\sin(\omega T) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega T) z^{-1} + z^{-2}}$
$x_k = \cos(\omega kT)$	$X(z) = \dfrac{\left(1 - \cos(\omega T)\right) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega T) z^{-1} + z^{-2}}$

Дискретные фильтры (общие положения)

Дискретный фильтр представляет собой ту или иную систему обработки дискретного сигнала, обладающую свойствами:

- линейности – выходная реакция системы на линейную комбинацию входных сигналов равна такой же линейной комбинации ее реакций на каждый из этих сигналов отдельности;
- стационарности – задержка входного сигнала приводит к такой же задержке выходного сигнала без изменения его формы.

Дискретный фильтр должен обладать «памятью» т.е каждый отсчет $y(k)$ выходного сигнала определяется в результате обработки нескольких (более одного) отсчетов входного сигнала $x(k)$.

Дискретные фильтры (общие положения)

Пусть последовательность $\{x_k\}$ задает дискретный сигнал. Как и раньше, будем считать, что T – шаг дискретизации равен единице.

Обозначим выходной сигнал через $\{y_k\}$.

Дискретный фильтр может быть задан в виде:

$$y_k = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \ldots + b_n x_{k-n} - a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \ldots - a_m y_{k-m} \quad (5.5)$$

Здесь если все $a_k = 0$ получим нерекурсивный фильтр. В противном случае – рекурсивный.

Ограничений на соотношение чисел m и n нет.

Дискретный фильтр (5.5.) может быть представлен также разностным уравнением:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \ldots + a_m y_{k-m} = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \ldots + b_n x_{k-n} \quad (5.6)$$

Дискретные фильтры (общие положения)

$\{h_k\}$ - **импульсная характеристика фильтра** – выходная реакция фильтра на единичный импульс.

Так, если положить все $x_k = 0$ кроме $x_0 = 1$, то получим, что импульсная характеристика нерекурсивного фильтра

$$h_k = \sum_{n=-\infty}^{k} c_n x_{k-n} = c_k \qquad (5.7)$$

определяется коэффициентами фильтра c_k. Для физически реализуемой системы $h_k = 0 \ \forall k < 0$ - система может оперировать лишь с уже имеющимися отсчетами сигнала.

Таким образом, для произвольного сигнала выходной сигнал есть линейная комбинация импульсных характеристик фильтра.

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{k} c_n x_{k-n} \qquad (5.8)$$

Дискретные фильтры (общие положения)

Функция передачи

Поскольку уравнение дискретной фильтрации (5.8) представляет собой линейную свертку, согласно свойствам *Z*-преобразования:

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{5.9}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{5.10}$$

$H(z)$ - функция передачи (передаточная функция).

Применив *Z*-преобразование к разностному уравнению (5.6), получим:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}}{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}} \tag{5.11}$$

Дискретные фильтры (общие положения)

Частотная характеристика (комплексный коэффициент передачи)

$$H(e^{i\omega T}) = H(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{-i\omega kT} \qquad (5.12)$$

Как следует из (5.12), частотная характеристика, дискретного фильтра (дискретной системы) является периодической функцией частоты с периодом $2\pi / T$.

Дискретные фильтры (общие положения)

Нули и полюсы

Разложим на множители числитель и знаменатель функции передачи в форме (5.11):

$$H(z) = k\frac{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})...(1-z_nz^{-1})}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})...(1-p_mz^{-1})} \quad (5.13)$$

Здесь: $k = b_0$ - коэффициент усиления; z_i - нули передаточной функции; p_i - полюсы передаточной функции.

Нули и полюсы могут быть, как вещественными, так и комплексно-сопряженными парами. Коэффициент усиления – всегда вещественный.

Дискретные фильтры (общие положения)

Устойчивость дискретных систем

Система является устойчивой, если при отсутствии входного сигнала $\left(x_k = 0 \ \forall k\right)$ свободные колебания системы являются затухающими при любых начальных условиях:

$$x_k = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} y_k = 0 \qquad (5.14)$$

Можно показать, что в этом случае полюсы передаточной функции должны удовлетворять условиям $\left|p_i\right| < 1 \ \forall \mathrm{i}$.

Таким образом,

чтобы дискретная система была устойчива, полюсы ее функции передачи должны находиться на комплексной плоскости внутри круга единичного радиуса.

Весовые функции

Пусть функция $f(t)$ представлена рядом Фурье:

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \qquad (5.15)$$

Произведем усечение ряда (5.15) до $2K+1$ слагаемых:

$$\tilde{f}(t)=\sum_{k=-K}^{K} c_k e^{ikt} \qquad (5.16)$$

Такое усечение равносильно почленному умножению элементов последовательности $\{c_k\}$ на элементы последовательности $\{d_k\}$, элементы которой определяются по правилу:

$$d_k=\begin{cases}1, |k|\le K\\ 0, |k|>K\end{cases} \qquad (5.17)$$

Весовые функции

Если рассматривать элементы последовательности (5.17), как коэффициенты ряда Фурье некоторой функции $g(t)$, то ее разложение в ряд Фурье будет иметь вид:

$$g(t)=\sum_{k=-K}^{K} d_k e^{ikt} = e^{-iKt}+e^{-i(K-1)t}+\ldots+1+\ldots+e^{i(K-1)t}+e^{iKt} \quad (5.18)$$

Согласно свойствам ряда Фурье, усеченный ряд (5.16) представляет собой разложение в ряд Фурье свертки функций $f(t)$ и $g(t)$.

Весовые функции

Разложение (5.18) является геометрической прогрессией. Найдя ее сумму, получим:

$$g(t)=\frac{\sin\left[\left(K+\frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},|t|<\pi \qquad (5.19)$$

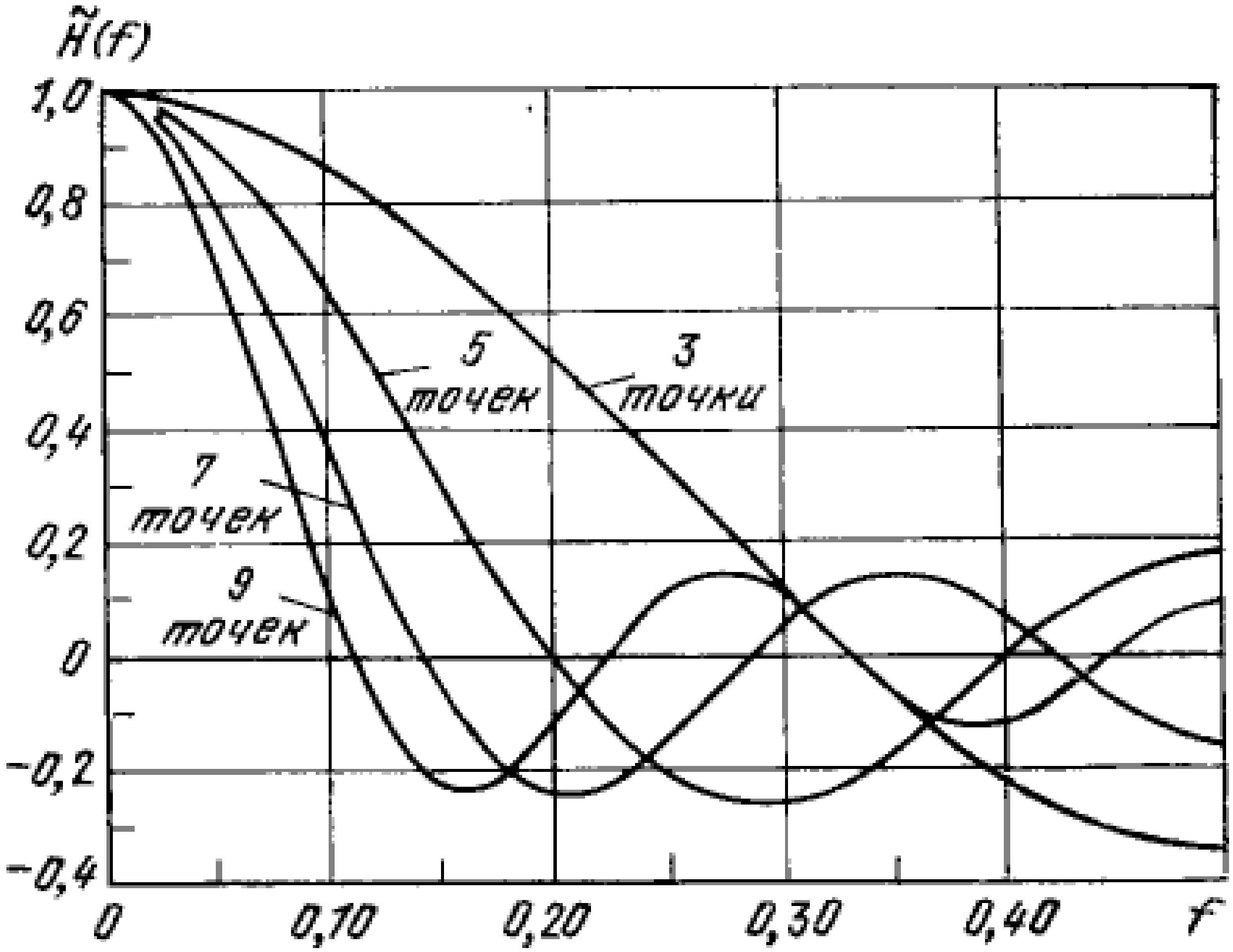
Полезно сравнить этот результат с формулой (2.11).

Функция $g(t)$ испытывает колебания с уменьшающейся амплитудой и с тем большей частотой, чем больше значение K - так называемые боковые лепестки.

Именно это порождает явление Гибса при свертывании дискретного сигнала с прямоугольным окном.

Весовые функции

Для наглядности повторим графики, приведенные в лекции №2 для $2K+1$ равному 3.5.7.и 9.



Весовые функции

Можно модифицировать окно представив функцию $g(t)$ в виде:

$$g(t)=\frac{1}{2}e^{-iKt}+e^{-i(K-1)t}+...+1+...e^{i(K-1)t}+\frac{1}{2}e^{iKt} \qquad (5.20)$$

или после преобразований:

$$g(t)=\frac{\sin[Kt]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cos\left(\frac{t}{2}\right),|t|<\pi \qquad (5.21)$$

при свертывании с таким модифицированным окном явление Гиббса (колебательный процесс пульсации вблизи границы окна) будет проявляться в некоторой меньшей степени, поскольку $\cos(t/2)$ будет плавно стремиться к нулю. Наблюдается уменьшение боковых лепестков.

Весовые функции

По существу модифицированное окно получается в результате умножения последовательности $\{d_k\}$, определяемой (5.16) на весовую функцию – весовые множители $\{v_k\}$, которые определяются по правилу:

$$v_k = \begin{cases} 1, |k| \le K-1 \\ 0, |k| > K \end{cases}, v_{-(K-1)} = v_{K+1} = \frac{1}{2}$$

В результате вместо последовательности $\{d_k\}$ получается последовательность $\{v_k d_k\}$.

Другой пример уже упоминавшихся весовых множителей – сигма-факторы Ланцоша (лекция №3). Обоснованный выбор весовой функции позволяет скорректировать негативные свойства прямоугольного окна.

Весовые функции

Рассмотрим весовые множители вида:

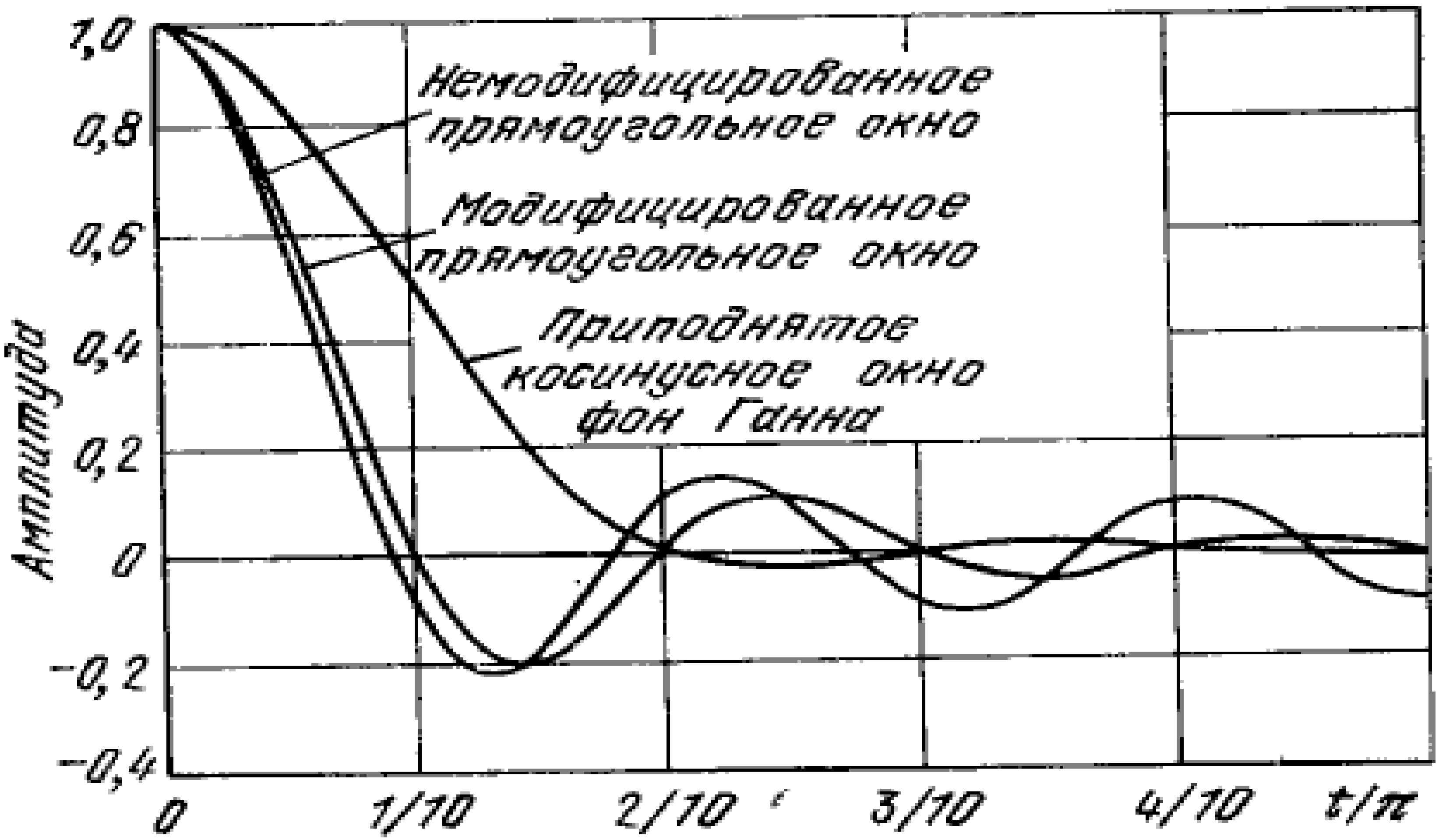
$$v_k = \begin{cases} \dfrac{1+\cos\left(\dfrac{k\pi}{K}\right)}{2}, & |k| \le K \\ 0, & |k| > K \end{cases} \qquad (5.22)$$

Если рассматривать эту последовательность, как значения дифференцируемой функции, то при $k{=}K$ равна нулю, и сама функция, и ее первая производная.

Весовая функция (5.20) определяет так называемое окно Ганна. Приподнятое косинусное окно Ганна.

Весовые функции

Графики частотных характеристик функций окон с пятью членами (11 элементов в фильтре).



Весовые функции

Как видно из приведенных графиков, первый ноль на графике для прямоугольного окна находится ближе к началу координат, чем для модифицированного окна и окна Ганна. Для окна Ганна – напротив, дальше от начала координат, чем у других двух окон. Однако для окна Ганна подавление боковых лепестков наиболее существенное.

Весовые функции

Еще одно окно - **Окно Хемминга -** представляет собой взвешенную сумму весовых функций окна Ганна и модифицированного окна:

$$v_k = 2a\cos\frac{\pi k}{K} + b;\ \ 2a + b = 1 \qquad (5.23)$$

Основным аргументом такого подхода является то, что боковые лепестки модифицированного окна и окна Ганна имеют противоположные знаки.

Коэффициенты взвешенной суммы (5.23) определяются из условия минимизации максимумов боковых лепестков.