

Ю. А. БЫЧКОВ, В. М. ЗОЛОТНИЦКИЙ,
Э. П. ЧЕРНЫШЕВ, А. Н. БЕЛЯНИН

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

*Издание второе,
стереотипное*

*Рекомендовано
учебно-методическим объединением
вузов Российской Федерации по образованию
в области радиотехники, электроники,
биомедицинской техники и автоматизации
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
210300 «Радиотехника»*



Санкт-Петербург•Москва•Краснодар
2008

ББК 31.21

Б 95

Бычков Ю. А., Золотницкий В. М., Чернышев Э. П.,
Белянин А. Н.

Б 95 Основы теоретической электротехники: Учебное пособие. 2-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2008. — 592 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0781-1

Учебное пособие написано на основе опыта преподавания авторами теоретических основ электротехники в Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете («ЛЭТИ»).

Материал излагается со строгих математических позиций, с обязательной физической трактовкой. Курс начинается с изучения функциональных свойств цепей как преобразователей сигналов сначала во временной, а затем в частотной областях. Изложены классические и современные приложения теории цепей — дискретные цепи, теория фильтров, активные цепи, синтез двухполюсников, теория чувствительности, машинно-ориентированные методы расчета, релейные цепи, магнитные цепи, цепи высокой добротности, синтез четырехполюсников. Рассмотрены также базовые разделы теории электромагнитного поля.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по радиотехническим специальностям.

ББК 31.21

Р е ц е н з е н т ы:

заведующий кафедрой теории электрических цепей,
доктор технических наук, профессор, *В. Ф. ДМИТРИКОВ*;
доктор технических наук, профессор, *А. А. ЛАННЭ*

Оформление обложки *А. ЛАПШИН*

Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части запрещается без
письменного разрешения издателя. Любые попытки нарушения
закона будут преследоваться в судебном порядке.

© Издательство «Лань», 2008
© Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий,
Э. П. Чернышев, А. Н. Белянин, 2008
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2008

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие обобщает преподавательский опыт авторов за последнее десятилетие. Предложенный в нем курс содержит краткое и доступное изложение материала, выполненное со строгих математических позиций, но с обязательной физической трактовкой результатов. Учебное пособие ориентировано на активное владение студентами второго и третьего курсов навыками самостоятельной работы, когда опыт рационального и эффективного изучения учебной литературы у них еще мал. Курс начинается с изучения функциональных свойств цепей как преобразователей сигналов, вначале в более физичной и понятной временной, а затем в частотной области. После этого изложены классические и современные приложения теории цепей — дискретные цепи, теория фильтров, активные цепи, синтез двухполюсников, теория чувствительности, машинно-ориентированные методы расчета, релейные цепи, магнитные цепи, цепи высокой добротности, синтез четырехполюсников.

Учебное пособие в основном опирается на книгу авторов «Основы теории электрических цепей», дополненную базовыми разделами теории электромагнитного поля.

Авторы благодарят рецензентов, профессора А. А. Ланнэ и кафедру теории электрических цепей Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций (заведующий кафедрой — профессор В. Ф. Дмитриков), за их советы и замечания, которые способствовали методическому совершенствованию учебника.

Авторы признательны преподавателям кафедры ТОЭ Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» А. Е. Завьялову и Д. А. Морозову, подготовившим рукописи глав 18 и 21 соответственно.

Замечания и предложения просим присыпать в издательство.

Список использованных сокращений

АМ	— амплитудно-модулированный;	МУН	— метод узловых напряжений;
АК	— автоколебания;	МЦ	— магнитная цепь;
АФХ	— амплитудно-фазовая характеристика;	МЧХ	— минимая частотная характеристика;
АЧХ	— амплитудно-частотная характеристика;	НФ	— нарастающая функция;
ВАХ	— вольтамперная характеристика;	НФУ	— нелинейное функциональное уравнение;
ВД	— векторная диаграмма;	НЧ	— низкие частоты;
ВЧ	— высокие частоты;	НЭ	— нелинейный элемент;
ВЧХ	— вещественная частотная характеристика;	ОКН	— основная кривая намагничивания;
ГС	— главное сечение;	ОМ	— операторный метод;
ГК	— главный контур;	ОУ	— операционный усилитель;
ДЛ	— длинная линия;	ПЗ	— полоса задерживания;
ДП	— двухполюсник;	ПЗФ	— полосовой заграждающий фильтр;
ДЦ	— дискретная цепь;	ПП	— полоса пропускания;
ЗИ	— зависимый источник;	ППФ	— полосовой пропускающий фильтр;
ЗН	— зона неискажения;	ПС	— переменные состояния;
ЗНК	— закон напряжений Кирхгофа;	ПФ	— передаточная функция;
ЗТК	— закон токов Кирхгофа;	ПХ	— переходная характеристика;
ИД	— идеальный диод;	ПЦ	— присоединенная цепь;
ИН	— источник напряжения;	РН	— резонанс напряжений;
ИНУН	— источник напряжения, управляемый напряжением;	РТ	— резонанс токов;
ИНУТ	— источник напряжения, управляемый током;	РФ	— ряд Фурье;
ИПН	— источник постоянного напряжения;	РЦ	— релейная цепь;
ИС	— индуктивно связанный;	РЭ	— релейный элемент;
ИТ	— источник тока;	СК	— связанные контуры;
ИТУТ	— источник тока, управляемый током;	СЧ	— средние частоты;
ИТУН	— источник тока, управляемый напряжением;	УПР	— установившийся периодический режим;
ИХ	— импульсная характеристика;	ФАЧ	— функция абсолютной чувствительности;
К3	— короткозамкнутый участок цепи;	ФВЧ	— фильтр верхних частот;
КЛ	— ключ;	ФК	— фильтр Котельникова;
КПД	— коэффициент полезного действия;	ФНЧ	— фильтр нижних частот;
ЛС	— линия связи;	ФЧХ	— фазочастотная характеристика;
ЛЧ	— линейная часть;	ХП	— характеристический полином;
МДС	— магнитодвижущая сила;	ХХ	— холостой ход;
МКА	— метод комплексных амплитуд;	Ц	— цепь;
МКТ	— метод контурных токов;	ЦВМ	— цифровая вычислительная машина;
МТДНХ	— метод токов дерева и напряжений хорд;	ЧП	— четырехполюсник;
		ЧХ	— частотная характеристика;
		ЭДС	— электродвижущая сила.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

§ 1.1. ТОК, НАПРЯЖЕНИЕ, ЭНЕРГИЯ И МОЩНОСТЬ В ЦЕПИ

1.1.1. Ток в электрической цепи

Током $i(t)$ называется направленное движение электрических зарядов, как положительных $q_+(t)$, так и отрицательных $q_-(t)$.

Символ i не только качественная, но и количественная характеристика: ток численно равен скорости изменения электрических зарядов в поперечном сечении проводника, так что

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad q(t) = q_+(t) + q_-(t), \quad (1.1)$$

причем ток i измеряется в амперах (А), заряд $q(t)$ в кулонах (Кл), время t — в секундах (с), и размерность А = Кл/с.

К моменту времени t заряд, прошедший через поперечное сечение проводника, таков:

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(t) dt = q(t_0) + \int_{t_0}^t i(t) dt, \quad (1.2)$$

то есть, предполагается, что при $t \rightarrow -\infty$ ток в цепи отсутствовал.

Условимся малыми (строчными) буквами обозначать значения переменных как функций времени, т. е. мгновенные значения переменных, $i(t) \equiv i$, $q(t) \equiv q$. Тогда формулы (1.1), (1.2) в сокращенной записи имеют следующий вид:

$$i = q', \quad q = \int_{-\infty}^t i dt.$$

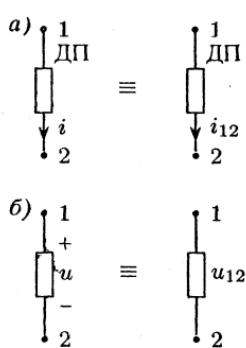


Рис. 1.1

О направлении (знаке) тока можно говорить только, когда указано его условно положительное направление. Два эквивалентных способа обозначения условно положительного направления тока между двумя узлами (полюсами) двухполюсника (ДП) изображены на рисунке 1.1а, причем $i \equiv i_{12}$. Таким образом, условно положительное направление тока можно указать либо «стрелкой», либо двумя индексами, соответствующими номерам узлов цепи.

Значение тока принято увязывать с направлением движения положительных зарядов q_+ , поэтому, если при решении задачи получено $i_{12}(t) = -2 \text{ А}$, то движение отрицательных зарядов q_- в этот момент времени t происходит от узла 1 к узлу 2, а положительных q_+ — от узла 2 к узлу 1.

Следствие: $i_{12}(t) = -i_{21}(t)$.

1.1.2. Напряжение

Движение зарядов связано с потреблением энергии. Для характеристики этого явления вводят понятие — напряжение $u(t)$. Однако $u(t)$ не только качественная, но и количественная характеристика: напряжение $u_{12}(t)$ между узлами 1 и 2 цепи численно равно энергии W_{12} (работе A_{12}), затраченной на перенос единичного положительного заряда $q = +1 \text{ Кл}$ от узла 1 к узлу 2 цепи:

$$\begin{aligned} u_{12}(t) &= u_1(t) - u_2(t) = W_{12}(t)|_{q=+1} = \\ &= A_{12}(t)|_{q=+1} = -u_{21}(t). \end{aligned}$$

Следствия:

- Напряжение $u_1(t)$ узла 1 цепи численно равно работе по переносу заряда $q = +1 \text{ Кл}$ из узла 1 в тот узел цепи, напряжение которого условно принято нулевым; такой базисный узел с нулевым напряжением выбирается произвольно.

2. Если осуществляется перенос бесконечного малого заряда dq , то затраченная энергия

$$dW(t) = u(t) dq(t), \quad (1.3)$$

причем энергия измеряется в джоулях (Дж), а напряжение — в вольтах (В).

О знаке напряжения можно говорить, если указана (задана) его условно положительная полярность. Два эквивалентных способа обозначения условно положительной полярности приведены на рисунке 1.1б, причем $u \equiv u_{12}$. Таким образом можно условно положительную полярность указать либо разметкой «плюс-минус» узлов ДП, либо двумя индексами, соответствующими номерам этих узлов. Если при решении задачи получено $u_{12} = -10$ В, то энергетический уровень узла 2 выше, чем узла 1

1.1.3. Согласованная полярность

Условимся полярность напряжения R --, L --, C -элементов, т. е. так называемых пассивных элементов цепи, всегда согласовывать с выбранным направлением тока этих элементов, как показано на рисунке 1.2а. Полярность $u(t)$ элемента (или ДП) цепи называют согласованной с направлением тока $i(t)$ этого же элемента (или ДП), если ток на схеме направлен к элементу от узла, которому присвоена положительная полярность (см. рис. 1.2а). Очень часто разметку полярности напряжения (\pm) указывают непосредственно у выводов обозначения элемента на схеме (см. рис. 1.2б, в, г). В этом случае полярность элемента называют согласованной (строго — полярность напряжения элемента называют согласованной с направлением тока), если ток на схеме направлен к выводу элемента, помеченному знаком «плюс», от ближайшего узла, к которому элемент присоединен.

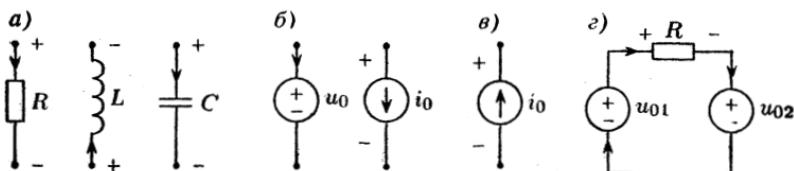


Рис. 1.2

У источников напряжения u_0 или тока i_0 полярность в общем случае можно выбирать как согласованной (рис. 1.2б), так несогласованной (рис. 1.2в). Несогласованная полярность характерна (следует из физических соображений) для цепей с единственным источником. В качестве примера на рисунке 1.2г изображена схема последовательной цепи с двумя источниками напряжения (соответствующая практической схеме зарядки аккумулятора); ток элементов цепи одинаков; при выбранном его направлении у источника u_{02} согласованная полярность, а у источника u_{01} — несогласованная.

Примечание. Двухполюсником (ДП) называют любую часть цепи, имеющую два внешних вывода (узла, зажима, полюса), относительно которых и рассматриваются ее характеристики; условное обозначение ДП приведено на рисунке I.1.

1.1.4. Энергия и мощность

Пусть через ДП током $i(t)$ переносится заряд $dq(t)$, а полярность напряжения ДП $u(t)$ согласована с направлением тока. Тогда, согласно (1.3), затраченная при этом элементарная энергия будет

$$dW(t) = u(t) dq(t).$$

Мощностью ДП $p(t)$ называют скорость поступления энергии в ДП:

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = u(t) \frac{dq(t)}{dt} = u(t)i(t). \quad (1.4)$$

Измеряется мощность в ваттах (Вт).

На основании (1.4) энергия, поступившая в ДП к моменту времени t , будет

$$W(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt. \quad (1.5)$$

Примечания:

1. ДП или элемент цепи называют пассивным, если в любой момент времени его энергия неотрицательна, т. е.

$$W_{\text{пас}}(t) \geq 0. \quad (1.6)$$

2. Если мощность элемента $p(t) > 0$, то элемент в этот момент потребляет или запасает энергию, если же $p(t) < 0$, то элемент генерирует энергию (или возвращает запасенную).

3. По закону сохранения энергии сумма мощностей всех элементов цепи равна нулю т. е. в цепи имеет место баланс мощностей

$$\sum_{(k)} p_k(t) = 0, \quad (1.7)$$

где k — номер элемента.

4. Если полярность напряжения ДП несогласована с направлением тока (см. например, рисунок 1.2в, г), то в отличии от (1.4) формула мощности ДП имеет следующий вид:

$$p(t) = -u(t)i(t). \quad (1.8)$$

§ 1.2. РЕЗИСТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.2.1. Определение резистивного элемента

В курсе теории электрических цепей единый электромагнитный процесс генерирования, передачи, преобразования и потребления электромагнитной энергии идеализируют и условно разбивают на отдельные составляющие, которые учитывают обычно в виде следующих элементов (см. рис. 1.2а, б): R -элемент учитывает необратимое потребление электромагнитной энергии; L -элемент учитывает запасание энергии магнитного поля; C -элемент учитывает запасание энергии электрического поля; для учета процесса генерирования электромагнитной энергии за счет других видов энергии вводят идеальные источники напряжения $u_0(t)$ и тока $i_0(t)$. Рассмотрим подробно характеристики каждого из указанных элементов.

Резистивным элементом, или R -элементом цепи называют идеализированный, пассивный, двухполюсный элемент, который отражает только одну сторону единого электромагнитного процесса — необратимое преобразование электромагнитной энергии в другие виды энергии (тепловую, световую, механическую, химическую и др.).

Условное обозначение R -элемента с указанием согласованной полярности приведено на рисунке 1.3а.

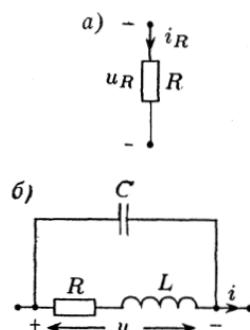


Рис. 1.3

По своим характеристикам к R -элементу приближаются реальные резисторы и нагревательные приборы на низких частотах (НЧ). Однако уже на средних частотах схема замещения реального резистора усложняется и обычно имеет вид, близкий к приведенному на рисунке 1.3б, где R -элемент отражает необратимые потери электромагнитной энергии; L -элемент учитывает наличие магнитного поля, обусловленного протеканием тока i в реальном резисторе; C -элемент учитывает наличие электрического поля, обусловленного напряжением u на выводах реального резистора. Вопросы составления схем замещения реальных электротехнических устройств достаточно сложны и рассматриваются в спецдисциплинах.

1.2.2. Вольт-амперные характеристики резистивного элемента

Связь между током и напряжением линейного R -элемента определяется законом Ома

$$u_R(t) = R i_R(t),$$

следовательно, символ R не только качественная, но и количественная характеристика: величина R называется сопротивлением резистивного элемента и является коэффициентом пропорциональности между его напряжением u_R и током i_R , т. е.

$$R = \frac{u_R(t)}{i_R(t)}; \quad (1.9)$$

обратная величина

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i_R}{u_R} \quad (1.10)$$

называется проводимостью резистивного элемента, причем в (1.9), (1.10) сопротивление измеряют в омах (Ом), а проводимость — в сименсах (См).

Показанный на рисунке 1.4а график вольт-амперной характеристики (ВАХ) линейного резистивного элемента — прямая линия, проходящая через начало координат, причем тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс пропорционален сопротивлению элемента: $R \sim \operatorname{tg} \gamma$ (в формуле поставлен символ пропорциональности, так как необходимо учитывать масштабы

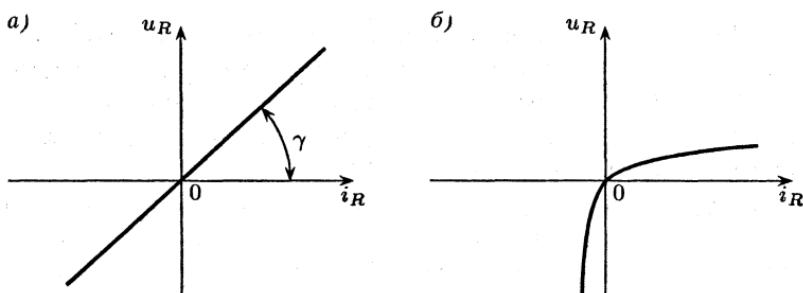


Рис. 1.4

для i_R , u_R на графике). Следует отметить, что характеристики большинства реальных резистивных элементов нелинейны: линейность — это обычно идеализация реальных ВАХ в ограниченном диапазоне токов-напряжений элемента. Так, на рисунке 1.4б качественно показана ВАХ диода, являющаяся существенно нелинейной.

ВЫВОД: ВАХ линейного R -элемента описываются линейными алгебраическими уравнениями (1.9), (1.10).

1.2.3. Энергетические характеристики R -элемента

Согласно (1.4) мгновенная мощность, т. е. скорость поступления энергии в R -элемент, будет следующей:

$$p_R(t) = u_R(t)i_R(t) = R i_R^2(t) = G u_R^2(t) \geq 0. \quad (1.11)$$

ВЫВОД: согласно формуле (1.11) R -элемент, действительно, необратимо потребляет энергию в любой момент времени.

Энергия, поступившая в R -элемент к моменту времени t будет

$$W_R(t) = \int_{-\infty}^t p_R(t) dt \geq 0. \quad (1.12)$$

как интеграл от положительной функции.

ВЫВОД: из сравнения формул (1.6) и (1.12), следует, что R -элемент, действительно является пассивным элементом.

§ 1.3. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

1.3.1. Источник напряжения

Источником напряжения (ИН) называют идеализированный двухполюсный элемент, напряжение которого $u_0(t)$ является заданной функцией времени и не зависит от протекающего через ИН тока.

Условное обозначение ИН приведено на рисунке 1.5а. Направление тока ИН может быть произвольным, как согласованным, так и несогласованным с полярностью напряжения.

Примечание. Для цепей с единственным ИН характерна (логична) несогласованная полярность, как показано на рисунке 1.5б, где ДП — пассивный двухполюсник: действительно, при резистивном ДП его мощность согласно формуле (1.11) $p_{ДП} > 0$, а мощность ИН при несогласованной полярности будет на основании формулы (1.8) $p_{ИН} = -u_0 i < 0$, что соответствует физическим процессам генерирования энергии в цепи. При этом в соответствии с формулой (1.7) имеет место баланс мощностей, т. е. $p_{ИН} + p_{ДП} = 0$.

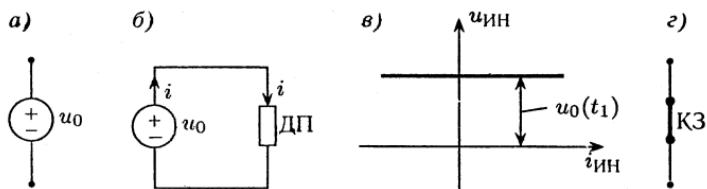


Рис. 1.5

Независимость напряжения ИН от тока отражается на ВАХ источника, как показано на рисунке 1.5в для некоторого момента времени $t = t_1$; следовательно, дифференциальное сопротивление ИН

$$R_{\text{диф}} = \frac{du}{di} = 0.$$

Частный случай источника напряжения с нулевым напряжением $u_0 = 0$ эквивалентен короткозамкнутому участку цепи (КЗ), который определяется как идеализированный двухполюсный элемент, условно изображенный на рисунке 1.5г, причем

сопротивление и напряжение идеального КЗ-элемента являются нулевыми, т. е.

$$\left. \begin{aligned} R_{\text{КЗ}} &= 0, \\ u_{\text{КЗ}} &= 0, \\ G_{\text{КЗ}} &= 1/R_{\text{КЗ}} \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

(ток КЗ-элемента зависит от вида остальной цепи).

Идеальный ИН является источником бесконечной мощности. Действительно, при коротком замыкании ИН, как показано на рисунке 1.6а, ток ИН $i_{\text{ИН}} = u_0/R_{\text{КЗ}} \rightarrow \infty$, а мощность с учетом (1.8) из-за несогласованной полярности ИН $p_{\text{ИН}} = -u_0 i_{\text{ИН}} \rightarrow -\infty$. Однако этот предельный случай в теории цепей не рассматривается (действительно, относительно узлов 1, 2 имеем параллельное соединение ИН и КЗ, т. е. $u_0 = u_{\text{КЗ}}$), поскольку в схеме рисунка 1.6а:

1. Нарушаются согласно формуле (1.13) определения ИН и КЗ ($u_0 \neq 0, u_{\text{КЗ}} = 0$).

2. Нарушается закон напряжений Кирхгофа, так как сумма напряжений в контуре не равна нулю.

Нормальными режимами работы идеального ИН являются:

1. Нагрузка его, например, пассивным ДП, как было показано на рисунке 1.5б.

2. Холостой ход (ХХ), т. е. обрыв нагрузки, как изображено на рисунке 1.6б.

По своим характеристикам к ИН приближаются, например, мощные аккумуляторные батареи в режиме малых отдаваемых токов. Обычно схема замещения реального ИН на НЧ имеет вид, изображенный на рисунке 1.6в; ВАХ реального ИН представлена схематично на рисунке 1.6г (в предположении $u_0 > 0, i > 0$ для некоторого момента времени $t = t_1$); сопротивление R_0 в этом случае часто называют внутренним или выходным сопротивлением реального источника.

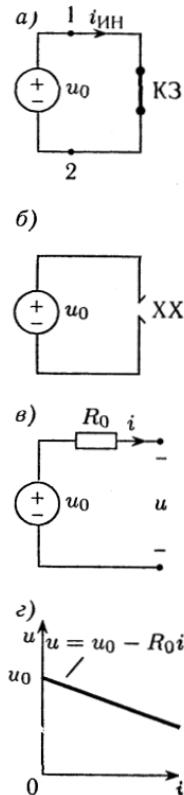


Рис. 1.6

1.3.2. Источник тока

Источником тока (ИТ) называют идеализированный двухполюсный элемент, ток которого $i_0(t)$ описывается заданной функцией времени и не зависит от напряжения ИТ.

Условное обозначение ИТ приведено на рисунке 1.7а.

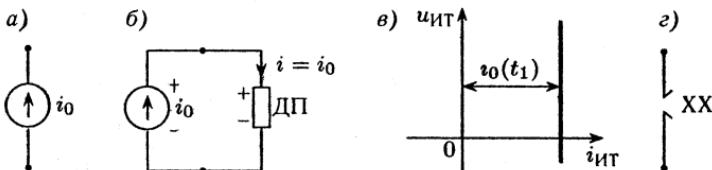


Рис. 1.7

Полярность напряжения ИТ может быть выбрана произвольно, как согласованной, так и несогласованной с направлением тока ИТ.

Примечание. Для цепей с единственным ИТ характерна (логична) несогласованная полярность, как показано на рисунке 1.7б, где ДП — пассивный двухполюсник; действительно, при резистивном ДП его мощность, согласно формуле (1.11) $p_{дп} > 0$, а мощность источника с учетом $u_{ит} = -u_{дп}$ и несогласованной полярности ИТ $p_{ит} = -u_{ит}i_0 < 0$, причем $p_{дп} + p_{ит} = 0$.

Независимость тока ИТ от напряжения отражается на ВАХ источника, как показано на рисунке 1.7в для некоторого момента времени $t = t_1$, следовательно, дифференциальное сопротивление ИТ $R_{диф} = du/di \rightarrow \infty$.

Частный случай источника тока с нулевым током $i_0 = 0$ эквивалентен разомкнутому (разорванному) участку цепи, который иначе называют холостым ходом (ХХ), т. е. обрывом в цепи.

Холостой ход — это идеализированный двухполюсный элемент цепи, условное изображение которого приведено на рисунке 1.7г, причем у такого идеального элемента ток и проводимость являются нулевыми:

$$i_{ХХ} = 0, \quad G_{ХХ} = 0, \quad R_{ХХ} = \frac{1}{G_{ХХ}} = \rightarrow \infty, \quad (1.14)$$

а напряжение зависит от вида остальной цепи.

Примечание. Формулы (1.13), (1.14) намеренно имеют одинаковую форму, чтобы подчеркнуть фундаментальное в теории цепей свойство аналогии (двойственности) характеристик элементов, называемое дуальностью элементов.

Идеальный ИТ является источником бесконечной мощности. Действительно, при обрыве его выводов, как показано на рисунке 1.8а, напряжение ИТ $u_{\text{ит}} = i_0 R_{\text{ит}} \rightarrow \infty$, мощность с учетом несогласованной полярности $p_{\text{ит}} = -u_{\text{ит}} i_0 \rightarrow -\infty$. Однако этот предельный случай в теории цепей не рассматривается (действительно, схему на рисунке 1.8а можно трактовать как последовательное соединение ИТ и ХХ, т. е. $i_0 = i_{\text{XX}}$), поскольку здесь:

1. Нарушаются согласно формуле (1.14) определения ИТ и ХХ ($i_0 \neq 0, i_{\text{XX}} = 0$).
2. Нарушается закон токов Кирхгофа (ток, втекающий, например, в узел 1, не равен вытекающему).

Нормальными режимами работы идеального ИТ являются:

1. Нагрузка его, например, пассивными ДП (см. рис. 1.7б).
2. Короткое замыкание его выводов (см. рис. 1.8б).

§ 1.4. ИНДУКТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ЦЕПИ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.4.1. Определение индуктивного элемента цепи

Индуктивным элементом, или L -элементом называют идеализированный двухполюсный пассивный элемент цепи, единственным электромагнитным процессом в котором является запасение энергии магнитного поля.

Условное обозначение L -элемента приведено на рисунке 1.9а, причем полярность напряжения принято согласовывать с направлением тока элемента. Символ L не только качественная, но и количественная характеристика: величина L , называемая

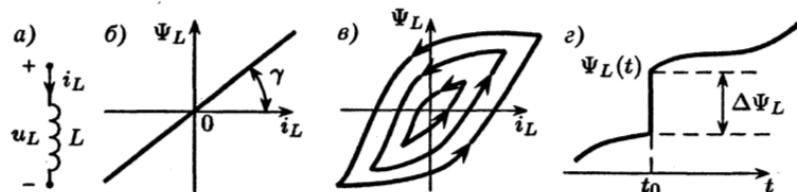


Рис. 1.9

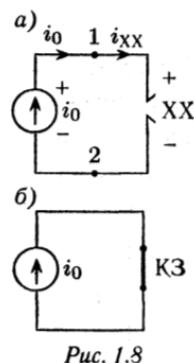


Рис. 1.8

индуктивностью, является коэффициентом пропорциональности между потокосцеплением самоиндукции Ψ и током i_L , обусловившим это потокосцепление:

$$L = \frac{\Psi(t)}{i_L(t)}, \quad (1.15)$$

где потокосцепление $\Psi = \sum_{(N)} \Phi_k = N\Phi_{cp}$, т. е. в катушке индуктивности, являющейся на НЧ близким реальным прототипом L -элемента, потокосцепление равно сумме элементарных потоков Φ_k , пронизывающих все N витков катушки (здесь Φ_{cp} — средний поток, сцепленный с каждым из витков катушки). В формуле (1.15) потокосцепление Ψ измеряют в веберах (Вб), L — в генри (Гн).

Вебер-амперная характеристика линейного L -элемента — это прямая линия (см. рис. 1.9б), причем $\operatorname{tg} \gamma \sim L$. Однако у реальных катушек индуктивности с магнитным сердечником вебер-амперная характеристика нелинейна, неоднозначна и обладает гистерезисом (см. рис. 1.9в). В случае отсутствия магнитного сердечника зависимость $\Psi(i_L)$ близка к линейной.

1.4.2. Вольт-амперная характеристика L -элемента

Изменение тока i_L приводит согласно формуле (1.15) к изменению потокосцепления, пронизывающего витки катушки индуктивности. А изменение Ψ_L приводит по закону электромагнитной индукции к появлению напряжения самоиндукции u_L на выводах катушки, которое равно скорости изменения потокосцепления, что применительно к идеализированному линейному L -элементу записывается следующим образом:

$$u_L(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = L \frac{di_L(t)}{dt} = Li'_L(t). \quad (1.16)$$

Формула (1.16) записана для случая согласованной полярности (см. рис. 1.9а).

Примечания:

- Согласно формуле (1.16) в цепях постоянного тока при $i_L = \text{const}$ напряжение $u_L = 0$, т. е. в соответствии с формулой (1.13) L -элемент эквивалентен КЗ; действительно, при $i_L = \text{const}$ магнитный поток, пронизывающий катушку индуктивности, неизменен, поэтому напряжение индукции равно нулю.
- По закону электромагнитной индукции напряжение (ЭДС) индукции u_L , создаваемое током i_L , наводится такой полярности (такого

знака), что как бы препятствует вызвавшей это напряжение причине; например, при убывании тока ($i'_L < 0$) согласно формуле (1.16) получим $u_L < 0$, т. е. истинная полярность u_L обратна указанной на рисунке 1.9а условно положительной и, если рассматривать L -элемент условно как источник напряжения, то такой ИН как бы «стремится поддержать убывающий ток».

Согласно формуле (1.16) мгновенное значение тока L -элемента будет

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(t) dt = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(t) dt + i_L(t_0-), \quad (1.17)$$

причем во второй части формулы (1.17) ток $i_L(t_0-)$, предшествующий рассматриваемому интервалу $t > t_0$, строго следовало записать $i_L(t_0 - \varepsilon)$, но бесконечно малую ε обычно в теории цепей опускают.

ВЫВОД: вольт-амперные характеристики линейного L -элемента описывают простейшими дифференциальными или интегральными линейными уравнениями (1.16), (1.17).

1.4.3. Энергетические характеристики L -элемента

Согласно рисунку 1.9а мгновенная мощность L -элемента такова:

$$p_L(t) = u_L i_L = L i_L(t) i'_L(t).$$

Тогда энергия, запасенная в L -элементе к моменту времени t , записывается как

$$W_L(t) = \int_{-\infty}^t \left(L i_L \frac{d i_L}{dt} \right) dt = \int_0^{i_L} L i_L di_L = \frac{L i_L^2(t)}{2} \geq 0, \quad (1.18)$$

где произведена замена переменных при интегрировании, причем учтено, что при времени t ток в цепи равен i_L , а при $t \rightarrow -\infty$ ток в цепи отсутствовал ($i_L = 0$).

ВЫВОД: согласно формулам (1.6), (1.18) L -элемент, действительно, является пассивным элементом цепи.

С учетом формулы (1.15) преобразуем формулу (1.18) к следующему виду:

$$W_L(t) = \frac{\Psi_L^2(t)}{2L} = \frac{N^2 \Phi_{cp}^2(t)}{2L}. \quad (1.19)$$

Примечания:

1. Ток i_L и магнитный поток — это две стороны одного и того же явления, что отражено в выражениях (1.15), (1.19), следовательно, на основании формул (1.18), (1.19) L -элемент, действительно характеризует запасание энергии магнитного поля.
2. L -элемент является идеализированным элементом реальной электрической цепи, поскольку, например, схему замещения (модель катушки индуктивности) даже на НЧ обычно изображают в виде последовательного соединения L - и R -элементов, причем R -элемент отражает сопротивление активных потерь в проводах катушки.

1.4.4. Принцип (закон) непрерывности потокосцепления L -элемента

При условии ограниченности значений токов и напряжений цепи потокосцепление $\Psi_L(t)$ является непрерывной функцией времени и не может изменяться скачком:

$$\Psi_L(t-) = \Psi_L(t+), \quad (1.20)$$

где, как указано ранее, бесконечно малая ε опущена.

Докажем равенство (1.20) от противного. Допустим, что в момент времени $t = t_0$ потокосцепление $\Psi_L(t)$ изменилось скачком на $\Delta\Psi_L$, как показано на рисунке 1.9г (строго: функция Ψ_L , описывающая потокосцепление, претерпевает при t_0 разрыв первого рода). Тогда, согласно формуле (1.16) и определению производной, напряжение L -элемента стремится при t_0 к бесконечно большому значению:

$$u_L(t_0) = \frac{d\Psi_L(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Psi_L}{\Delta t} \Big|_{t=t_0} \rightarrow \infty, \quad (1.21)$$

поскольку приращение функции $\Delta\Psi_L$ конечно, а приращение аргумента Δt является бесконечным малым. Значение u_L в формуле (1.21) противоречит условию ограниченности уровней токов и напряжений в цепи, т. е. $\Psi_L(t)$ — непрерывная функция. **Следствие:** при условии неизменности значения индуктивности в цепи ток L -элемента также является непрерывной функцией времени и не может изменяться скачком, т. е.

$$i_L(t-) = i_L(t+), \quad (1.22)$$

причем равенство (1.22) вытекает из равенства (1.20) с учетом выражения (1.15).

Энергетическая трактовка равенства (1.22) такова:

$$W_L(t-) = 0,5Li_L^2(t-) = W_L(t+) = 0,5Li_L^2(t+),$$

т. е. энергия, запасенная L -элементом, не может изменяться скачком (в произвольный момент $t = t_0$), иначе согласно формуле (1.4) мощность L -элемента $p_L(t_0) = W'_L(t_0)$ становится бесконечной, что реально осуществить невозможно.

Математическая трактовка выражения (1.20) следует также из формул (1.15), (1.17): интеграл от ограниченной по уровню функции

$$\Psi_L(t) = \int_{-\infty}^t u_L(t) dt \quad (1.23)$$

является непрерывной функцией (площадь под кривой, ограниченной по уровню, не может измениться скачком). Из формулы (1.23) следует также вариант физической трактовки выражения (1.20): если $u_L(t)$ считать скоростью движения, то $\Psi_L(t)$ — координата, которая не может измениться скачком, если скорость небесконечна.

§ 1.5. ЕМКОСТНОЙ ЭЛЕМЕНТ ЦЕПИ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.5.1. Определение C -элемента цепи

Емкостным элементом, или C -элементом цепи называется идеализированный двухполюсный пассивный элемент цепи, который отражает лишь процессы запасания энергии электрического поля.

Условное обозначение C -элемента приведено на рисунке 1.10, причем полярность напряжения принято согласовывать с направлением тока.

Символ C не только качественная, но и количественная характеристика: величина C , называемая емкостью, является коэффициентом пропорциональности между зарядом q_C емкостного элемента и напряжением элемента:

$$C = \frac{q_C(t)}{u_C(t)}, \quad (1.24)$$

причем емкость C в (1.24) измеряется в фарадах (Φ).

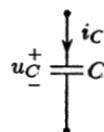


Рис. 1.10

Кулон-вольтная характеристика линейного C -элемента — это прямая линия (см. рис. 1.11); $\operatorname{tg} \gamma \sim C$. К емкостному элементу по своим характеристикам достаточно близок на НЧ высококачественный конденсатор, однако у некоторых типов конденсаторов (варикапов, варикондов) характеристика нелинейна даже в небольшом диапазоне изменения переменных $q_C(u_C)$.

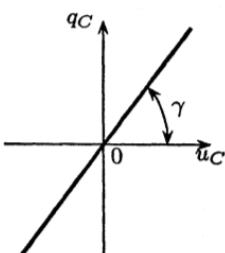


Рис. 1.11

1.5.2. Вольт-амперные характеристики C -элемента

Изменение напряжения u_C емкостного элемента согласно формуле (1.24) приводит к изменению заряда q_C , но на основании выражения (1.1) изменение заряда свидетельствует о протекании через C -элемент тока:

$$i_C(t) = \frac{dq_C}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt}, \quad (1.25)$$

при этом соотношение (1.25) записано для согласованной полярности (см. рис. 1.10).

Примечание. Согласно формуле (1.25) в цепях постоянных токов и напряжений при $u_C = \text{const}$ ток $i_C = 0$, т. е. в соответствии с (1.16) C -элемент эквивалентен ХХ.

На основании формулы (1.25) напряжение C -элемента в момент времени t будет

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(t) dt = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(t) dt + u_C(t_0-). \quad (1.26)$$

Вывод: вольт-амперные характеристики линейного C -элемента описываются простейшими дифференциальными и интегральными соотношениями (1.25), (1.26).

1.5.3. Энергетические характеристики C -элемента

Мгновенная мощность C -элемента с учетом (1.25) записывается как

$$p_C(t) = u_C(t)i_C(t) = Cu_C(t)u'_C(t),$$

следовательно, энергия, запасенная C -элементом к моменту времени t будет

$$W_C(t) = \int_{-\infty}^t p_C(t) dt = C \int_0^{u_C} u_C du_C = \frac{Cu_C^2(t)}{2} \geq 0. \quad (1.27)$$

При интегрировании в формуле (1.27) произведена замена переменных, причем учтено, что в момент времени t напряжение C -элемента равно u_C , а при $t \rightarrow \infty$ напряжение $u_C = 0$.

Вывод: согласно формулам (1.6), (1.27) емкостной элемент, действительно, является пассивным элементом.

С учетом формулы (1.24) преобразуем (1.27) к следующему виду:

$$W_C(t) = \frac{0.5q_C^2(t)}{C}. \quad (1.28)$$

Примечание. Заряд, напряжение и электрическое поле — это различные стороны одного и того же явления, что отражено в выражениях (1.24), (1.28); следовательно, C -элемент действительно характеризует запасение энергии электрического поля.

Необходимо отметить, что линии тока, как известно из курса физики, непрерывны. Так, на рисунке 1.12, где схематично изображены обкладки конденсатора, ток $i_C(t)$ в подводящих проводах и обкладках (линии тока изображены пунктиром) — это ток проводимости, обусловленный в основном движением свободных зарядов в проводниках. В пространстве между обкладками конденсатора ток проводимости переходит в ток смешения. Действительно, при изменении на обкладках конденсатора заряда $q_C(t)$ и напряжения $u_C(t)$ между обкладками создается переменное электрическое поле, под воздействием которого в атомах диэлектрика, находящегося между обкладками, как бы перемещаются центры положительного и отрицательного зарядов атома (т. е. в любом поперечном сечении между обкладками существует ток). Однако указанный ток поляризации атомов — это только часть тока

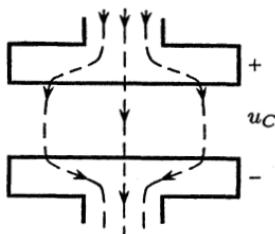


Рис. 1.12

смещения, который имеет место и в вакууме. В последнем случае переменный заряд $q_C(t)$ создает между обкладками переменное электрическое поле, которое по законам электромагнетизма создает вокруг себя переменное магнитное поле. Как указано ранее, магнитное поле и ток — это две стороны одного и того же явления, следовательно, в вакууме роль тока смещения, протекающего через конденсатор, играет переменное магнитное поле.

Примечание. Как известно, напряжение, разность потенциалов между узлами цепи, электродвижущая сила измеряются одинаково — в вольтах; напряжение элемента определяется разностью потенциалов между узлами, к которым он присоединен; ЭДС элемента (источника напряжения или, например, ЭДС индукции L -элемента) обеспечивает разность потенциалов между узлами элемента; поэтому в теории цепей при анализе вольт-амперных характеристик элементов и расчете процессов целесообразно использовать в указанных случаях одну переменную — напряжение $u(t)$, обращаясь к терминам ЭДС и «разность потенциалов» преимущественно при физической трактовке изучаемых явлений.

1.5.4. Принцип (закон) непрерывности заряда C -элемента

При условии ограниченных по уровню значений токов и напряжений цепи заряд $q_C(t)$ является непрерывной функцией времени и не может измениться скачком:

$$q_C(t-) = q_C(t+). \quad (1.29)$$

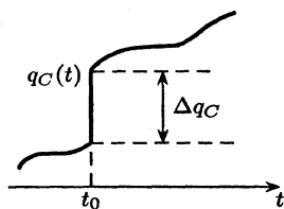


Рис. 1.13

Докажем (1.29) от обратного. Допустим, что в момент времени $t = t_0$ заряд C -элемента $q_C(t)$ изменился скачком на Δq_C , как показано на рисунке 1.13. Тогда согласно (1.25) и определению производной, ток C -элемента при $t = t_0$ будет иметь бесконечно большое значение

$$i_C(t_0) = \frac{dq_C(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q_C}{\Delta t} \Big|_{t=t_0} \rightarrow \infty,$$

что противоречит условию ограниченности уровня токов.

Следствие: при условии неизменности значения емкости в цепи напряжение C -элемента также является непрерывной функцией времени и не может измениться скачком, т. е.

$$u_C(t-) = u_C(t+), \quad (1.30)$$

причем равенство (1.30) вытекает из равенства (1.29) с учетом формулы (1.24).

§ 1.6. ГЕОМЕТРИЯ ЦЕПЕЙ

1.6.1. Основные понятия геометрии цепей

Электрическая цепь — это идеализированная модель реального электротехнического устройства. **Схема цепи** — это графическое изображение электрической цепи в виде различных соединений элементов цепи (из которых ранее рассмотрены R -, L -, C -элементы, ИН, ИТ, КЗ, ХХ). Геометрия схем простых цепей в основном характеризуется нижеследующими понятиями.

Ветвь — в общем случае любая часть цепи, соединяющая два узла. В частном случае, ветвь может состоять из одного элемента; при этом КЗ- и ХХ-элементы рассматриваются как устранимые ветви, поскольку их можно на схеме и не изображать (как показано ниже).

Узел — это место соединения двух и более ветвей. Место соединения только двух ветвей называют устранимым узлом, поскольку в этом случае имеем дело с последовательным соединением элементов, которое при решении многих задач можно рассматривать как одну общую ветвь (однако при детальном машинном задании схемы цепи устранимые узлы широко используются).

Контур обычно рассматривают как замкнутую последовательность ветвей схемы (причем эти ветви не пересекаются и дважды не повторяются). Если рассматривается контур, содержащий разомкнутый элемент цепи (ХХ), то такой контур оговаривается особо и обычно используется для расчета напряжения холостого хода u_{xx} , когда напряжения остальных элементов этого контура известны. **Ячейка** — это простейший контур плоской цепи, который изображается в схеме без пересечения другими ветвями (не входящими в контур). **Путь** — это непрерывная последовательность ветвей, связывающая пару узлов.

Сечение — это замкнутая линия, пересекающая некоторые ветви схемы цепи (в случае пространственной схемы сечение — это замкнутая поверхность). Более строго сечение определяется как множество ветвей, устранение которых разбивает схему на две несвязанные части.

Обычно говорят о следующих соединениях (структурных соединениях) элементов (или ДП) в схеме цепи:

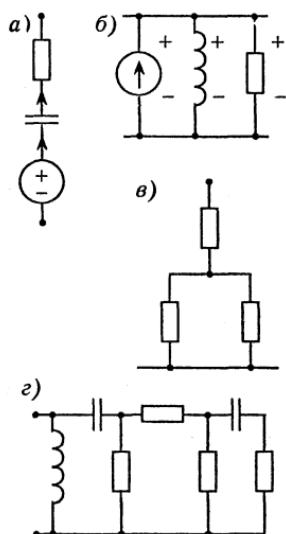


Рис. 1.14

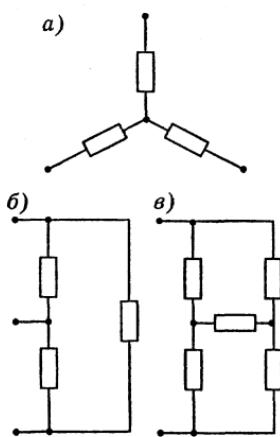


Рис. 1.15

1. Последовательное соединение — это соединение элементов один за другим через устранимые узлы; ток i таких элементов одинаков, если одинаковым выбрано его направление во всех последовательно соединенных элементах (см., например, рисунок 1.14а), чему и рекомендуется следовать в практике расчета цепей.

2. Параллельное соединение образуется присоединением элементов к одной и той же паре узлов, как показано, например, на рисунке 1.14б; напряжение параллельно соединенных элементов одинаково, если положительная полярность напряжения всех элементов выбрана одинаково, т. е. проставлена у одного из указанных углов, а отрицательная — у другого (чему также рекомендуется следовать в расчетах).

3. Смешанное соединение — это последовательно-параллельное соединение (см., например, рис. 1.14в); цепное (лестничное) соединение — это многократное последовательно-параллельное соединение (см., например, рис. 1.14г).

4. Соединение, например, R -элементов звездой представлено на рисунке 1.15а, соединение треугольником — на рисунке 1.15б, мостовое соединение — на рисунке 1.15в.

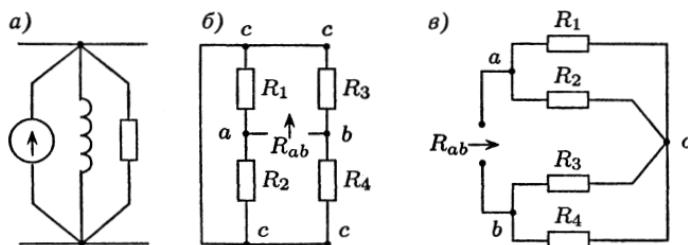


Рис. 1.16

Следствие: в практических расчетах узлы, соединенные КЗ-элементами, обычно рассматривают как один общий узел. Так, схема, представленная на рисунке 1.14б, может быть эквивалентно преобразована, как указано на рисунке 1.16а. А при расчете, например, входного сопротивления R_{ab} относительно узлов a , b схемы, приведенной на рисунке 1.16б, проще воспользоваться эквивалентной схемой, изображенной на рисунке 1.16в, производя разметку узлов исходной схемы (рис. 1.16б) и считая короткозамкнутые узлы одним общим узлом (узлом c), что и отражено в схеме на рисунке 1.16в, из рассмотрения которой очевидно следует, что

$$R_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

1.6.2. Основные понятия топологии цепей

Топология изучает неметрические свойства геометрических фигур. Так, *граф схемы* — это геометрический образ схемы цепи. Узлы (вершины) графа соответствуют узлам схемы, а ветви (ребра) графа, изображаемые линиями, которые соединяют узлы, соответствуют ветвям схемы. Так, граф схемы, изображенной на рисунке 1.17а, представлен на рисунке 1.17б (кривизна ветвей графа произвольна).

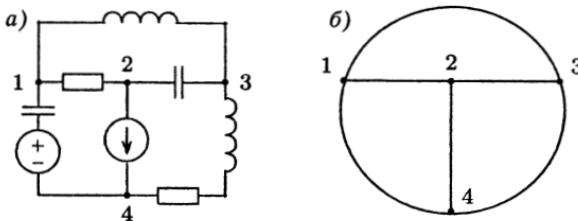


Рис. 1.17

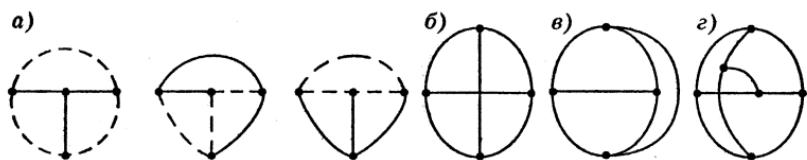


Рис. 1.18

Дерево графа получают, соединяя узлы графа ветвями без образования замкнутых контуров. Ветви, вошедшие в дерево, называют ветвями дерева. Ветви, не вошедшие в дерево, называют хордами (или ветвями связи). Присоединение какой-либо хорды к дереву приведет к образованию замкнутого контура. У графа может быть несколько деревьев; так, некоторые деревья графа, изображенного на рисунке 1.17б, представлены на рисунке 1.18а: ветви дерева изображены сплошными линиями, а хорды — пунктиром. Очевидно, что число ветвей дерева

$$n_{\text{в.д}} = n_y - 1$$

(где n_y — число узлов), а число хорд

$$n_x = n_{\text{в}} - n_{\text{в.д}} = n_{\text{в}} - n_y + 1,$$

где $n_{\text{в}}$ — число ветвей; при этом $n_{\text{в.д}}$ соответствует числу независимых уравнений цепи, которые можно составить по закону токов Кирхгофа (ЗТК), т. е. $n_{\text{в.д}} = n_{\text{зтк}}$; n_x соответствует числу независимых уравнений цепи, которые можно составить по закону напряжений Кирхгофа (ЗНК), т. е. $n_x = n_{\text{знк}}$.

Цепь называется плоской (планарной), если ее график можно изобразить без пересечения ветвей; в противном случае цепь называют пространственной (непланарной). Так, на рисунке 1.18б представлен график плоской цепи, поскольку ее можно эквивалентно преобразовать к виду (рис. 1.18в), графу (рис. 1.18г) соответствует пространственная цепь.

Следствие: кроме рассмотренных простых топологических графов, в теории электрических цепей широко используются и другие варианты графов, например, полных (учитывающих все элементы цепи), направленных топологических (учитывающих направления токов и полярности напряжений) и др., которые преимущественно используют при машинных и аналитических расчетах сложных цепей.

§ 1.7. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

1.7.1. Закон токов Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа, называемый также законом токов Кирхгофа (ЗТК), отражает закон сохранения зарядов в цепи: алгебраическая сумма токов в любом узле или сечении цепи в любой момент времени равна нулю, т. е.

$$\sum_{(k)} i_k(t) = 0, \quad (1.31)$$

причем для определенности вытекающие из узла (сечения) токи берут в уравнении (1.31) со знаком «плюс», а втекающие — со знаком «минус»; здесь k — номера ветвей, присоединенных к рассматриваемому узлу.

Следствия:

1. Сумма токов, втекающих в узел (сечение), равна сумме вытекающих токов, что поясняется на рисунке 1.19 a , где $i_3 = i_1 + i_2$, поскольку на основании уравнения (1.31) получено $i_3 - i_1 - i_2 = 0$; ЗТК для показанного пунктиром на рисунке 1.19 b сечения имеет вид $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.
2. В последовательно соединенных элементах цепи ток одинаков, если одинаковым выбрано его направление во всех элементах, как показано, например, на рисунке 1.19 b , где уравнения для устранимых узлов 1, 2 имеют вид $i_R = i_{\text{ин}}$, $i_{\text{ин}} = i_C$.

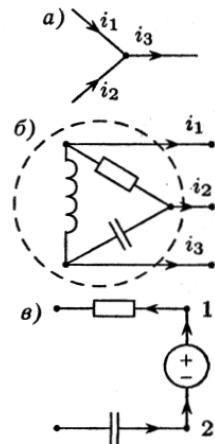


Рис. 1.19

1.7.2. Число независимых уравнений ЗТК

Максимальное число независимых уравнений, составляемых по ЗТК, равно

$$n_{\text{ЗТК}} = n_y - 1 = n_{\text{в.д.}} \quad (1.32)$$

Для доказательства (1.32) вначале покажем, что уравнение ЗТК для узла с номером n_y является зависимым, если составлены уравнения ЗТК для всех n_y узлов схемы. Действительно, ток

каждой ветви (например, i_{km} на рисунке 1.20а) входит лишь в 2 уравнения ЗТК, составленных для тех двух узлов, к которым присоединена рассматриваемая ветвь (например, $i_3 + i_4 - i_{km} = 0$, $-i_1 - i_2 + i_{km} = 0$ для схемы рисунка 1.20а). При этом в одно из уравнений этот ток входит со знаком «плюс», а в другое — со знаком «минус», следовательно, сумма всех n_y уравнений ЗТК равно нулю (поскольку токи сокращаются). Таким образом уравнение ЗТК для узла с номером n_y равно взятой со знаком «минус» сумме остальных ($n_y - 1$) уравнений и поэтому является зависимым.

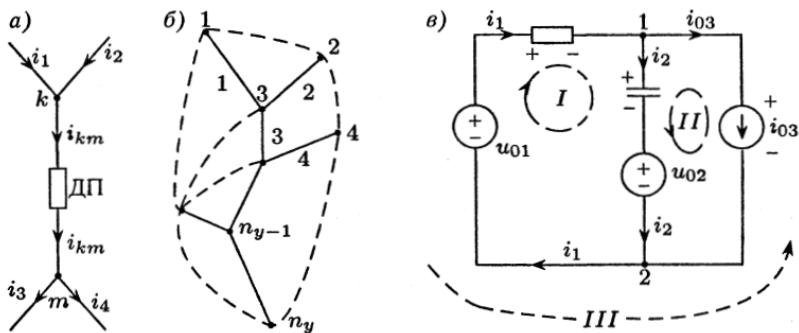


Рис. 1.20

Для обоснования независимости остальных ($n_y - 1$) уравнений ЗТК рассмотрим граф некоторой цепи (см. рис. 1.20б), в котором выделим сплошными линиями какое-либо дерево и пронумеруем узлы и ветви дерева «от краев к основанию дерева».

При такой нумерации каждое «новое» уравнение ЗТК, составленное для узла с последующим номером (вплоть до номера ($n_y - 1$), содержит хотя бы одну «новую» переменную (которой не было в предыдущих уравнениях) — ток ветви дерева с тем же последующим («новым») номером. Известно, что составленная подобным образом система уравнений независима (ни одно из уравнений невозможно получить из других).

В качестве узла, уравнение ЗТК для которого считаем зависимым, выбирают любой узел цепи; для остальных узлов уравнения ЗТК независимы. Действительно, например, в схеме на рисунке 1.20в уравнение ЗТК для узла 1 имеет вид $i_2 + i_{03} - i_1 = 0$, а для второго узла $i_1 - i_2 - i_{03} = 0$, т. е. является зависимым.

1.7.3. Закон напряжений Кирхгофа

Второй закон Кирхгофа, называемый также законом напряжений Кирхгофа (ЗНК), отражает закон сохранения энергии в замкнутом контуре: алгебраическая сумма напряжений в любом замкнутом контуре равна нулю в любой момент времени, т. е.

$$\sum_k u_k(t) = 0, \quad (1.33)$$

причем в уравнении (1.33) символом k обозначены номера элементов схемы цепи, вошедших в контур. Правило знаков: если, например, обход контура согласован с полярностью напряжения элемента k , то это напряжение берут в (1.33) со знаком «плюс», если не согласован — со знаком «минус». Обход контура может быть выбран произвольно. Так, например, уравнения ЗНК для указанных пунктиром контуров I, II, III схемы, изображенной на рисунке 1.20в, имеют вид $u_R + u_C + u_{02} - u_{01} = 0$, $u_C + u_{02} - u_{03} = 0$, $u_{01} - u_{03} - u_R = 0$. Как видно из приведенных уравнений, правило знаков одинаково как для напряжений источников, так и для напряжений пассивных элементов.

Следствия:

1. У параллельно соединенных элементов (или двухполюсников) напряжение одинаково, если полярность напряжения всех элементов выбрана одинаково, как показано, например, на рисунке 1.14б, где $u_{\text{ит}} = u_L = u_R$, поскольку уравнения ЗНК ячеек схемы при их обходе по часовой стрелке $u_L - u_{\text{ит}} = 0$, $u_R - u_L = 0$.
2. Напряжение u_{AB} между любыми узлами A , B цепи равно алгебраической сумме напряжений по любому пути из точки A в точку B ; при этом правило знаков остается вышеизложенным (если направление пути из узла A к узлу B согласовано с полярностью напряжения элемента цепи, по которому проходит путь, это напряжение учитывают в уравнении ЗНК со знаком «плюс»).

Используя следствие 2 для анализа схемы, изображенной на рисунке 1.20в, можно написать $u_{12} = -u_R + u_{01} = u_C + u_{02} = u_{03}$, что, естественно, вытекает из уравнений ЗНК схемы, приведенных ранее.

1.7.4. Число независимых уравнений ЗНК

Максимальное число независимых уравнений, которые можно составить по ЗНК, равно

$$n_{\text{ЗНК}} = n_v - (n_y - 1) = n_x. \quad (1.34)$$

Для доказательства (1.34) составим в соответствии с изложенным ранее n_v уравнений ЗНК для всех n_v ветвей схемы цепи. Для произвольной ветви km (см. рис. 1.20a), напряжение двухполюсника (или элемента) ветви

$$u_{km} = u_k - u_m, \quad (1.35)$$

где u_k , u_m — напряжения узлов k , m относительно базисного, причем каждое из этих узловых напряжений входит минимум в два уравнения вида (1.35). Поэтому все $(n_y - 1)$ узловые напряжения могут быть исключены из составленной системы из n_v независимых уравнений вида (1.35) для напряжений всех ветвей (система независима, поскольку напряжение каждой ветви как переменная системы входит лишь в одно из уравнений и не встречается в других). В результате останется лишь $(n_v - n_y + 1)$ независимых уравнений, составленных по ЗНК и содержащих только напряжения ветвей.

На практике рекомендуется «независимые контуры» выбрать так, чтобы уравнение ЗНК, составленное для каждого последующего контура, содержало хотя бы одну «новую» переменную. В случае цепей сложной структуры (например, непланарных) выбирают какое-либо дерево графа схемы цепи и, присоединяя по очереди хорды, получают «независимые контуры». Если цепь планарна, «независимыми контурами» могут служить ячейки схемы, число которых $n_{\text{яч}}$ также, очевидно, равно числу хорд, т. е.

$$n_{\text{ЗНК}} = n_{\text{яч}}. \quad (1.36)$$

Так, в схеме, приведенной на рисунке 1.20в, на основании равенства (1.36) получим $n_{\text{ЗНК}} = n_{\text{яч}} = 2$. Считая составленные в п. 1.7.3 уравнения ЗНК для двух ячеек (контуров I, II) независимыми, получим третье уравнение ЗНК для «большого» контура схемы («зависимого контура»), вычитая из второго уравнения первое.

§ 1.8. ДУАЛЬНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ И ЦЕПЕЙ

1.8.1. Дуальность элементов цепи

Дуальность переводится как двойственность и вытекает из симметрии уравнений, описывающих электромагнитные процессы. Два элемента дуальны, если вольт-амперные характеристики одного математически аналогичны ампер-вольтным характеристикам другого. Очевидно, элементы L и C , R и G , ИН и ИТ, КЗ и ХХ дуальны. Действительно, уравнения $u_L = L i'_L$ и $i_C = C u'_C$, $u_R = R i_R$ и $i_G = G u_G$, $u_{ин} \neq f(i_{ин})$ и $i_{ит} \neq f(u_{ит})$, $u_{кз} = 0$ и $i_{хх} = 0$ имеют однотипную форму математического описания. Поэтому широко используется и иное определение: два элемента дуальны, если уравнения одного преобразуются к уравнениям другого при использовании в них замен согласно таблице дуального перехода, когда заменяют u на i , R на G , L на C , ИН на ИТ, ХХ на КЗ и наоборот.

Примечание. У дуальных элементов дуальны и энергетические характеристики, т. е. $p_R = R i_R^2$ и $p_G = G u_G^2$, $W_L = 0,5 L i_L^2$ и $W_C = 0,5 C u_C^2$.

1.8.2. Дуальность контура и узловой пары

Последовательную и параллельную цепи часто называют, соответственно, контуром и узловой парой. На рисунке 1.21 a представлены примеры дуальных указанных простых соединений, уравнения которых, очевидно, также дуальны, т. е. математически аналогичны. Так, уравнения ЗТК и ЗНК последовательного соединения $i = i_R = i_L = i_C = i_{ин}$, $-u_0 + u_R + u_L + u_C = 0$ дуальны уравнениям ЗНК и ЗТК параллельного соединения $u = u_G = u_C = u_L = u_{ит}$, $-i_0 + i_G + i_C + i_L = 0$.

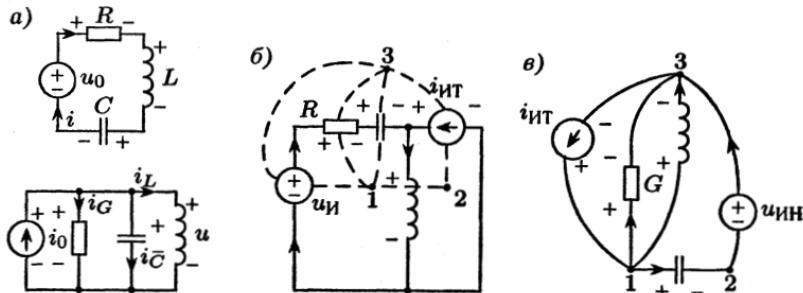


Рис. 1.21

Эти цепи удовлетворяют общему принципу дуальности цепей: две цепи дуальны, если уравнения ЗТК одной дуальны уравнениям ЗНК другой и наоборот. У дуальных цепей дуальны не только уравнения, но также элементы и их соединения: последовательное соединение дуально параллельному, независимые узлы одной цепи дуальны независимым контурам дуальной цепи.

1.8.3. Разветвленные дуальные цепи

Правила построения планарных дуальных цепей: внутри ячеек (независимых контуров) исходной цепи намечают независимые узлы дуальной цепи (см. для примера точки 1, 2 на схеме рисунка 1.21б); зависимый узел дуальной цепи располагают вне схемы исходной цепи (см. точку 3 на рисунке 1.21б); дуальные узлы соединяют ветвями, проходящими через элементы исходной схемы (см. пунктирные линии на рисунке 1.21б), и «помещают» туда дуальные элементы. В результате в рассматриваемом примере получают дуальную цепь, изображенную на рисунке 1.21в.

Правило знаков для согласования токов и напряжений в дуальных цепях (возможный вариант): если при обходе ячейки исходной цепи по часовой стрелке обход согласован с полярностью напряжения (направлением тока) элемента, то в дуальной цепи ток дуального элемента следует направить от дуального (исходной ячейке) узла, а положительную полярность напряжения дуального элемента поставить у дуального узла, что и показано на примере схемы на рисунке 1.21в.

Независимые уравнения схемы рисунка 1.21б имеют вид:

$$i_L - i_{RC} - i_{int} = 0, \quad -u_{in} + u_R + u_C + u_L = 0, \quad -u_L + u_{int} = 0,$$

а уравнения схемы на рисунке 1.21в им дуальны:

$$u_C - u_{GL} - u_{in} = 0, \quad -i_{int} + i_G + i_L + i_C = 0, \quad -i_C + i_{in} = 0.$$

АНАЛИЗ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

§ 2.1. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ЦЕПИ

Анализ резистивной цепи часто можно упростить, если предварительно произвести эквивалентные преобразования цепи или ее части. При этом эквивалентность понимается в том смысле, что режим работы непреобразованной части цепи сохраняется, т. е. токи и напряжения ветвей остаются прежними. Из всего многообразия эквивалентных преобразований рассмотрим лишь те, которые необходимы при изложении последующих разделов. Некоторые из преобразований являются элементарными и очевидными. К ним относятся объединение последовательно соединенных R -элементов в один элемент и параллельно соединенных R -элементов в один элемент. Сюда же можно отнести и объединение в один источник напряжения нескольких источников, соединенных последовательно, и объединение в один источник тока нескольких источников, соединенных параллельно.

2.1.1. Эквивалентные преобразования источников

Пусть произвольная цепь подключена к источнику напряжения с последовательно включенным R_0 -элементом (рис. 2.1a).

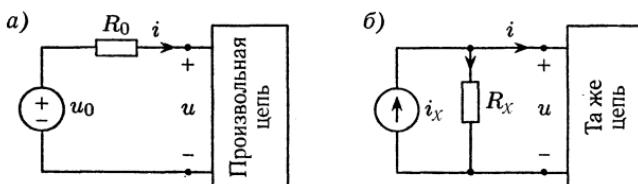


Рис. 2.1

Поставим следующую задачу: заменить источник напряжения u_0 с последовательно включенным сопротивлением R_0 (рис. 2.1а) на источник тока i_x с параллельно включенным сопротивлением R_x (рис. 2.1б) так, чтобы режим необразованной части цепи сохранился. Спрашивается, чему при этом равны i_x и R_x ?

Для решения поставленной задачи найдем u и i непреобразованной части обеих схем. Для цепи (рис. 2.1а) по второму закону Кирхгофа находим $u_{R_0} + u = u_0$. Отсюда $u = u_0 - R_0 i$, а $i = u_0/R_0 - u/R_0$.

Для цепи (рис. 2.1б) по первому закону Кирхгофа находим $i_{R_x} + i = i_x$. Отсюда $i = i_x - u/R_x$, а $u = R_x i_x - R_x i$.

Сравнивая полученные результаты, приходим к выводу, что эквивалентное преобразование возможно, если выполняются следующие соотношения:

$$i_x = \frac{u_0}{R_0}, \quad R_x = R_0.$$

Такие преобразования часто позволяют многоконтурную цепь привести к эквивалентной одноконтурной, в которой сохраняется ток какой-либо ветви. Найдя его, можно шаг за шагом, восстанавливая схему цепи, найти остальные токи.

ПРИМЕР 1. Проиллюстрируем изложенное для цепи (рис. 2.2а), где $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = 2 \text{ Ом}$, $u_{01} = 4 \text{ В}$, $u_{02} = 4 \text{ В}$.

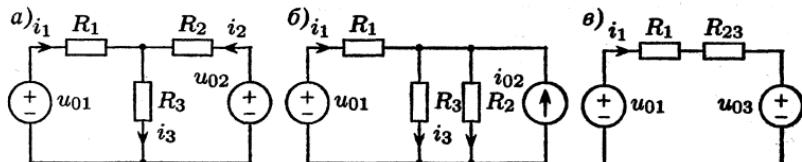


Рис. 2.2

Преобразуем источник напряжения u_{02} в источник тока $i_{02} = u_{02}/R_2 = 4/2 = 2 \text{ А}$. При этом сохраняются неизменными токи i_1 и i_3 . В результате получим цепь (рис. 2.2б). Отметим, что ток через R_2 полученной цепи будет отличаться от тока i_2 исходной цепи. Теперь объединим элементы R_2 и R_3 в один элемент $R_{23} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3) = 1 \text{ Ом}$, а

затем преобразуем источник тока i_{02} в источник напряжения $u_{03} = R_{23}i_{02} = 1 \cdot 2 = 2$ В. Из одноконтурной цепи (рис. 2.2в), легко определяется сохранившийся неизменным ток $i_1 = (u_{01} - u_{03}) / (R_1 + R_{23}) = (4 - 2) / (1 + 1) = 1$ А. Далее из цепи (рис. 2.2б) по второму закону Кирхгофа находим:

$$R_1 i_1 + R_3 i_3 = u_{01}, \quad i_3 = \frac{u_{01} - R_1 i_1}{R_3} = \frac{4 - 1}{2} = 1,5 \text{ А.}$$

Из цепи (рис. 2.2а) по первому закону Кирхгофа находим ток $i_2 = i_3 - i_1 = 1,5 - 1 = 0,5$ А.

2.1.2. Преобразование соединения звездой в соединение треугольником и обратное преобразование

Такое преобразование позволяет трансформировать цепь мостовой структуры в цепь более простой лестничной структуры, представляющей собой общий случай последовательно-параллельного соединения.

На рисунке 2.3а изображен участок цепи, представляющий собой трехлучевую звезду. Преобразуем ее в соединение треугольником так, чтобы режим во внешней цепи остался неизменным (рис. 2.3б). Другими словами, при заданных проводимостях G_1 , G_2 и G_3 «звезды» требуется определить G_{12} , G_{13} , G_{23} «треугольника», при которых напряжения (потенциалы) узлов 1, 2, 3 и токи i_1 , i_2 , i_3 внешней части цепи не изменятся.

Обозначим φ_1 , φ_2 , φ_3 и φ_0 напряжения (потенциалы) узлов «звезды». Найдем выражение тока i_1 «звезды» через напряжения узлов. Очевидно, что выполняется

$$i_1 = (\varphi_1 - \varphi_0) G_1, \quad i_2 = (\varphi_2 - \varphi_0) G_2, \quad i_3 = (\varphi_3 - \varphi_0) G_3.$$

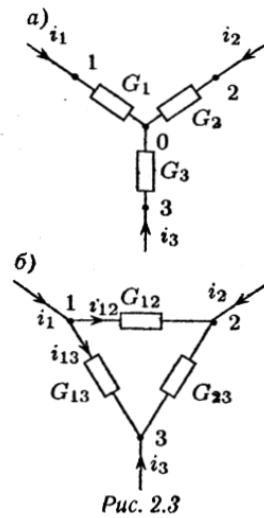


Рис. 2.3

Так как $i_1 + i_2 + i_3 = 0$, то получим

$$\varphi_1 G_1 + \varphi_2 G_2 + \varphi_3 G_3 = \varphi_0 (G_1 + G_2 + G_3).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_0 = \frac{G_1 \varphi_1 + G_2 \varphi_2 + G_3 \varphi_3}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} i_1 &= \left(\varphi_1 - \frac{G_1 \varphi_1 + G_2 \varphi_2 + G_3 \varphi_3}{G_1 + G_2 + G_3} \right) G_1 = \\ &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} (\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} (\varphi_1 - \varphi_3) = \\ &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} u_{12} + \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} u_{13}, \end{aligned}$$

где u_{12} — напряжение между узлами 1 и 2, u_{13} — напряжение между узлами 1 и 3.

Аналогично найдем ток i_1 для «треугольника»:

$$i_1 = i_{12} + i_{13} = G_{12} u_{12} + G_{13} u_{13}.$$

Приравнивая ток i_1 «звезды» току i_1 «треугольника», получим:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad G_{13} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}. \quad (2.1)$$

Перестановкой индексов можно получить следующее выражение:

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}. \quad (2.2)$$

Решая систему уравнений (2.1), (2.2), находим следующие формулы обратного эквивалентного преобразования:

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}; \quad R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}};$$

$$R_3 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}},$$

где $R_1 = 1/G_1, \dots, R_{12} = 1/G_{12}, \dots$

ПРИМЕР 2. Применим рассмотренное преобразование для определения входного сопротивления цепи (рис. 2.4a), считая $R_1 = R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 8 \Omega$, $R_4 = R_5 = 2 \Omega$.

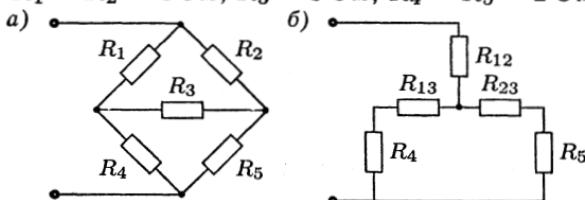


Рис. 2.4

Преобразуем «треугольник», образованный элементами R_1 , R_2 , R_3 , в «звезду». В результате получим схему (рис. 2.4б), в которой

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{16}{4 + 4 + 8} = 1 \Omega,$$

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{32}{16} = 2 \Omega,$$

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 2 \Omega.$$

Далее находим входное сопротивление цепи:

$$R_{\text{вх}} = R_{12} + \frac{(R_4 + R_{13})(R_5 + R_{23})}{R_4 + R_{13} + R_5 + R_{23}} = 3 \Omega.$$

2.1.3. Теорема замещения

После определения тока (напряжения) какой-либо ветви (например так, как это было сделано в п. 2.1.1), для вычисления токов (напряжений) остальных ветвей полезно пользоваться теоремой замещения, согласно которой любая ветвь цепи (см. рис. 2.5а) с током i_k и напряжением u_k для расчетных целей может быть заменена либо источником тока (рис. 2.5б) с током i_k , либо источником напряжения (рис. 2.5в) с напряжением u_k ; при этом режим в непреобразованной части цепи сохраняется прежним.

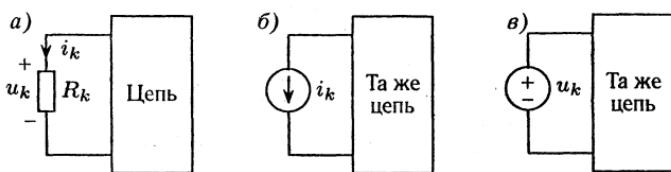


Рис. 2.5

Справедливость теоремы замещения очевидна, так как уравнения Кирхгофа для цепей, изображенных на рис. 2.5 a,b,c одинаковы.

§ 2.2. АНАЛИЗ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Анализ R -цепи произвольной структуры может быть осуществлен на основе законов Кирхгофа. При этом для нахождения токов всех ветвей цепи часто необходимо составить и решить систему из n_B независимых алгебраических уравнений, где n_B — число ветвей цепи. Зная токи, можно найти и все напряжения ветвей. Размерность такой системы уравнений может оказаться очень большой. Решение системы большой размерности связано с известными вычислительными трудностями, поэтому для анализа сложных цепей используют другие методы, приводящие к системе меньшей размерности.

2.2.1. Метод узловых напряжений

В методе узловых напряжений (МУН) неизвестными принимаются напряжения узлов относительно одного из них, напряжение которого считается известным и равным нулю. Этот узел называется базисным, или опорным узлом. Предполагается, что другие узлы имеют напряжения выше, чем напряжение базисного. Так как напряжение (потенциал) базисного узла принимается равным нулю, то разность напряжений между любым узлом и опорным совпадает с напряжением (потенциалом) этого узла, поэтому этот метод называют методом узловых напряжений (иногда — методом узловых потенциалов).

Таким образом, число неизвестных напряжений равно $n_y - 1$, где n_y — число узлов цепи. В общем случае $n_y - 1 < n_B$. Зная напряжения узлов, можно легко найти токи всех n_B ветвей цепи.

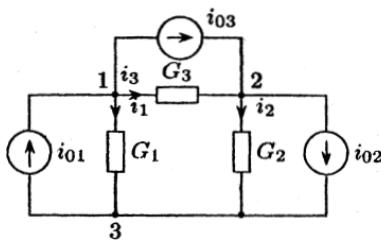


Рис. 2.6

Для уяснения алгоритма формирования системы узловых уравнений рассмотрим конкретную цепь (рис. 2.6).

Один из трех узлов цепи примем за базисный и присвоим ему последний номер. Выразим токи ветвей через напряжения узлов: $i_1 = G_1 u_1^y$, $i_2 = G_2 u_2^y$, $i_3 = G_3 (u_1^y - u_2^y)$, где u_1^y , u_2^y — напряжения первого и второго узлов относительно базисного.

Составим уравнения по первому закону Кирхгофа для первого и второго узлов:

$$i_1 + i_3 = i_{01} - i_{03}, \quad i_3 - i_2 = i_{02} - i_{03},$$

или

$$\begin{cases} G_1 u_1^y + G_3 (u_1^y - u_2^y) = i_{01} - i_{03}, \\ G_3 (u_1^y - u_2^y) - G_2 u_2^y = i_{02} - i_{03}. \end{cases}$$

После преобразования получим следующую систему:

$$\begin{cases} (G_1 + G_3) u_1^y - G_3 u_2^y = i_{01} - i_{03}, \\ -G_3 u_1^y + (G_2 + G_3) u_2^y = -i_{02} + i_{03}. \end{cases}$$

Переобозначим коэффициенты при неизвестных потенциалах и правые части:

$$\begin{cases} G_{11} u_1^y + G_{12} u_2^y = i_1^y; \\ G_{21} u_1^y + G_{22} u_2^y = i_2^y. \end{cases}$$

Двойной индекс у вновь введенных коэффициентов при неизвестных определяет их место в матрице этих коэффициентов. Первый индекс определяет строку, второй — столбец.

Для того, чтобы систему узловых уравнений составить непосредственно по схеме, раскроем смысл входящих в систему коэффициентов и правых частей:

$G_{11} = G_1 + G_2$ — сумма проводимости ветвей, сходящихся в первый узел, которую будем называть собственной проводимостью первого узла;

$G_{22} = G_2 + G_3$ — сумма проводимости ветвей, сходящихся во второй узел, которую будем называть собственной проводимостью второго узла;

$G_{12} = -G_3$ — проводимость ветви, соединяющей первый узел со вторым, взятая со знаком минус, которую будем называть взаимной проводимостью между первым и вторым узлами;

$G_{21} = -G_3$ — взаимная проводимость между вторым и первым узлами (очевидно, что $G_{12} = G_{21}$);

$i_1^y = i_{01} - i_{03}$ — сумма токов источников тока, сходящихся в первый узел, которую будем называть узловым током (токи источников, направленные к узлу, входят в эту сумму со знаком плюс, а направленные от узла — со знаком минус);

$i_2^y = i_{03} - i_{02}$ — узловой ток второго узла.

Полученные результаты можно распространить на цепь с произвольным числом независимых узлов $n = n_y - 1$:

$$\begin{cases} G_{11}u_1^y + G_{12}u_2^y + \dots + G_{1n}u_n^y = i_1^y; \\ G_{21}u_1^y + G_{22}u_2^y + \dots + G_{2n}u_n^y = i_2^y; \\ \dots \\ G_{n1}u_1^y + G_{n2}u_2^y + \dots + G_{nn}u_n^y = i_n^y. \end{cases}$$

Приведенная в примере закономерность определения коэффициентов G_{jj} , G_{jk} ($j \neq k$) и правых частей i_j^y позволяет легко составить систему узловых уравнений для произвольной цепи.

Введем в рассмотрение следующие матрицы:

$[u^y] = [u_1^y, u_2^y, \dots, u_n^y]^T$ — вектор неизвестных узловых напряжений;

$[i^y] = [i_1^y, i_2^y, \dots, i_n^y]^T$ — вектор правых частей;

$[G^y] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix}$ — матрица узловых проводимостей.

Запишем узловые уравнения в матричной форме:

$$[G^y][u^y] = [i^y].$$

Так как $G_{jk} = G_{kj}$ ($k \neq j$), то матрица узловых проводимостей симметрична относительно главной диагонали, что упрощает ее формирование.

После решения системы узловых уравнений будут определены n неизвестных напряжений, зная которые, можно легко найти токи и напряжения всех ветвей цепи.

Как видим, для получения правых частей системы узловых уравнений необходимо, чтобы в цепи действовали только источники тока. Поэтому, если в исходной цепи действовали источники напряжения, то они должны быть предварительно преобразованы в источники тока. Может оказаться, что исходная цепь содержит элементарно непреобразуемый источник напряжения, последовательно с которым (см. для сравнения рис. 2.1 a) нет включенного R -элемента. В этом случае можно поступить следующим образом. Базисным узлом следует выбрать один из узлов, к которым этот источник подключен. Тогда напряжение другого узла становится известным и равным напряжению (с учетом полярности) этого источника. Число неизвестных сокращается на единицу и из системы уравнений следует исключить уравнение для узла, напряжение которого таким образом найдено.

Однако таких непреобразуемых источников может быть несколько. В этом случае выбор базисного узла указанным образом не позволяет сформировать систему уравнений. Тогда можно произвести следующие преобразования, показанные на рисунке 2.7. Исходная цепь (рис. 2.7 a) и цепь, изложенная на рисунке 2.7 b , эквивалентны, так как напряжения точек k , n , и b одинаковы и точки k , n и b можно замкнуть накоротко.

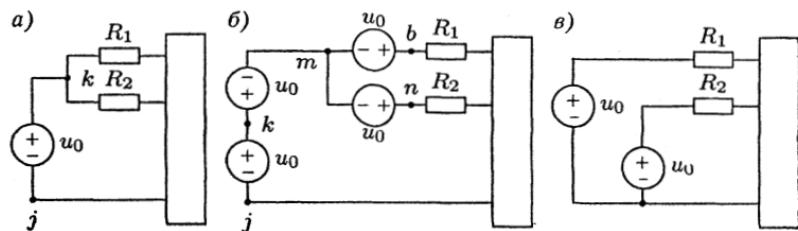


Рис. 2.7

Ветвь jmt на рисунке 2.7 b содержит два источника одинаковой величины и противоположной полярности, т. е. сумма их напряжений равна нулю. В этом случае ветвь jmt можно замкнуть накоротко, в результате чего получится цепь (рис. 2.7 c), в которой источники напряжения можно преобразовать в источники тока.

ПРИМЕР 3. Определить токи всех ветвей цепи на рисунке 2.8а при $R_1 = R_2 = R_4 = 1 \Omega$, $R_3 = 0,5 \Omega$, $u_0 = 6 \text{ В}$, $i_0 = 5 \text{ А}$

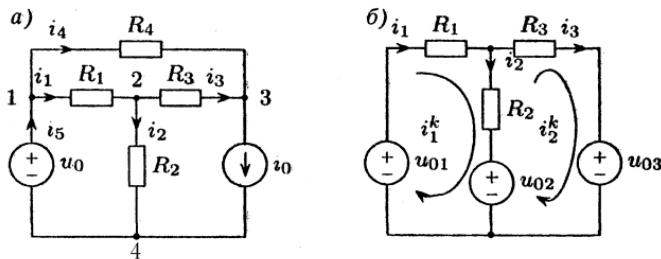


Рис. 2.8

Цепь содержит 4 узла и один непреобразуемый источник напряжения. За базисный примем узел, к которому этот источник подключен, и присвоим ему четвертый номер. Тогда напряжение первого узла будет $u_1^y = u_0 = 6 \text{ В}$, и первое уравнение в системе из трех уравнений формировать не нужно. Уравнения для второго и третьего узлов:

$$\begin{cases} G_{21}u_1^y + G_{22}u_2^y + G_{23}u_3^y = i_2^y; \\ G_{31}u_1^y + G_{32}u_2^y + G_{33}u_3^y = i_3^y. \end{cases}$$

Собственные и взаимные проводимости узлов запишутся как:

$$\begin{aligned} G_{22} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 4 \text{ См}, & G_{33} &= \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = 3 \text{ См}, \\ G_{21} &= -\frac{1}{R_1} = -1 \text{ См}, & G_{23} &= G_{32} = -\frac{1}{R_3} = -2 \text{ См}, \\ G_{31} &= -\frac{1}{R_4} = -1 \text{ См}. \end{aligned}$$

Правые части уравнений будут следующими:

$$i_2^y = 0 \text{ А}, \quad i_3^y = -i_0 = -5 \text{ А}.$$

Система уравнений с учетом переноса в правую часть известных первых слагаемых преобразуется к виду:

$$\begin{cases} 4u_2^y - 2u_3^y = 6; \\ -2u_2^y + 3u_3^y = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим: $u_2^y = 2,5$ В, $u_3^y = 2$ В. Тогда токи ветвей будут:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_1^y - u_2^y}{R_1} = 3,5 \text{ А}; & i_2 &= \frac{u_2^y}{R_2} = 2,5 \text{ А}; \\ i_3 &= \frac{u_2^y - u_3^y}{R_3} = 1 \text{ А}; & i_4 &= \frac{u_1^y - u_3^y}{R_4} = 4 \text{ А}; \\ i_5 &= i_1 + i_4 = 3,5 + 4 = 7,5 \text{ А}. \end{aligned}$$

При анализе этой цепи по уравнениям Кирхгофа потребовалось бы составить и решить систему из 5 уравнений вместо двух, полученных методом узловых напряжений.

2.2.2. Метод контурных токов

В методе контурных токов (МКТ) неизвестными принимаются условные токи, которые замыкаются внутри контуров, не выходя за их пределы. Эти токи называются контурными. Если найти $n_B - n_y + 1$ контурных токов (где n_B — число ветвей, а n_y — число узлов цепи), то реальные токи легко через них выражаются. В общем случае $n_B - n_y + 1 < n_B$. Если через ветвь проходит ток лишь одного контура, то ток ветви будет определяться этим контурным током. Если же через ветвь проходит несколько контурных токов, то реальный ток будет равен алгебраической сумме контурных токов.

Для уяснения алгоритма формирования системы уравнений контурных токов рассмотрим конкретную цепь (см. рис. 2.8б).

Цепь содержит 3 ветви и 2 узла. Следовательно, достаточно определить 2 контурных тока i_1^K и i_2^K . Зная их, реальные токи определим следующим образом: $i_1 = i_1^K$, $i_2 = i_1^K - i_2^K$, $i_3 = i_2^K$.

Составим уравнения по второму закону Кирхгофа для первого и второго контуров. Получим:

$$\begin{cases} R_1 i_1 + R_2 i_2 = u_{01} - u_{02}, \\ R_3 i_3 - R_2 i_2 = u_{02} - u_{03}. \end{cases}$$

Выражая токи ветвей, входящих в систему, через контурные токи, получим:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) i_1^K - R_2 i_2^K = u_{01} - u_{02}; \\ -R_2 i_1^K + (R_2 + R_3) i_2^K = u_{02} - u_{03}. \end{cases}$$

Переобозначим коэффициенты при неизвестных контурных токах и правые части:

$$\begin{cases} R_{11}i_1^k + R_{12}i_2^k = u_1^k; \\ R_{21}i_1^k + R_{22}i_2^k = u_2^k, \end{cases}$$

где двойной индекс у вновь введенных коэффициентов определяет их место в матрице этих коэффициентов.

Для того, чтобы систему уравнений контурных токов составить непосредственно по схеме, раскроем смысл входящих в нее коэффициентов и правых частей:

$R_{11} = R_1 + R_2$ — сумма сопротивлений ветвей, образующих первый контур, которую будем называть собственным сопротивлением первого контура;

$R_{22} = R_2 + R_3$ — сумма сопротивлений ветвей, образующих второй контур, которую будем называть собственным сопротивлением второго контура;

$R_{12} = -R_2$ — сопротивление ветви, одновременно принадлежащей первому и второму контуру, взятое с отрицательным знаком, так как контурные токи через это сопротивление протекают навстречу друг другу. Будем называть это сопротивление взаимным сопротивлением между первым и вторым контурами;

$R_{21} = -R_2$ — взаимное сопротивление между вторым и первым контурами (очевидно, что $R_{12} = R_{21}$);

$u_1^k = u_{01} - u_{02}$ — алгебраическая сумма напряжений источников, входящих в первый контур (эти напряжения берутся со знаком плюс, если контурный ток выходит из плюсового полюса источника и со знаком минус в противном случае);

$u_2^k = u_{02} - u_{03}$ — алгебраическая сумма напряжений источников, входящих во второй контур.

Полученные результаты можно распространить на цепь с произвольным числом контурных токов $n = n_B - n_y + 1$.

$$\begin{cases} R_{11}i_1^k + R_{12}i_2^k + \cdots + R_{1n}i_n^k = u_1^k; \\ R_{21}i_1^k + R_{22}i_2^k + \cdots + R_{2n}i_n^k = u_2^k; \\ \dots \\ R_{n1}i_1^k + R_{n2}i_2^k + \cdots + R_{nn}i_n^k = u_n^k. \end{cases}$$

Приведенная в примере закономерность определения R_{jj} и $R_{jk}(j \neq k)$ и правых частей u_j^k позволяет составить систему контурных уравнений непосредственно по схеме любой цепи.

Введем в рассмотрение следующие векторы и матрицы:

$[i^k] = [i_1^k, i_2^k, \dots, i_n^k]^T$ — вектор неизвестных контурных токов,
 $[u^k] = [u_1^k, u_2^k, \dots, u_n^k]^T$ — вектор правых частей;

$$[R^k] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \text{ — матрица контурных сопротивлений.}$$

Тогда контурные уравнения в матричной форме будут:

$$[R^k] [i^k] = [u^k].$$

Так как $R_{jk} = R_{kj}$ ($k \neq j$), то матрица контурных сопротивлений симметрична относительно главной диагонали, что упрощает ее формирование.

После решения системы уравнений будут найдены n неизвестных контурных токов, зная которые, можно легко найти токи всех ветвей цепи.

Как видно, для получения правых частей системы необходимо, чтобы в цепи действовали только источники напряжения. Если в исходной цепи действовали источники тока, то перед началом анализа они должны быть преобразованы в источники напряжения. Может оказаться, что в исходной цепи есть непреобразуемый источник тока, параллельно которому нет включенного R -элемента (см. для сравнения рис. 2.1б). В этом случае нужно так выбрать контурные токи, чтобы через непреобразуемый источник тока проходил только один контурный ток. Тогда этот контурный ток определяется сразу: он равен току источника и, следовательно, из системы уравнений можно исключить уравнение для этого контура. Имеется и другая возможность сформировать систему уравнений в данной случае. Поясним ее на примере цепи (рис. 2.9).

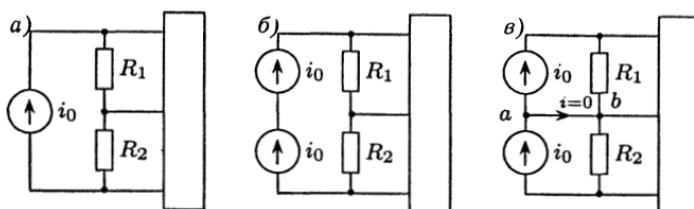


Рис. 2.9

Режим цепи рисунка 2.9а не изменится, если вместо одного источника i_0 мы включим два равных по величине источника тока i_0 (рис. 2.9б). Теперь можно соединить источники тока так, как это показано на рисунке 2.9в. Такое соединение не изменяет режим работы, так как ток в соединении « ab » равен нулю. Источники тока цепи (2.9в) можно эквивалентно преобразовать в источники напряжения.

ПРИМЕР 4. Определить токи ветвей цепи рисунка 2.10а, если $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1 \text{ Ом}$, $i_0 = 4 \text{ А}$, $u_0 = 5 \text{ В}$.

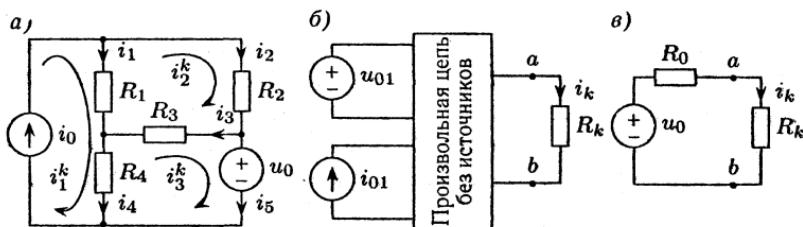


Рис. 2.10

В цепи есть непреобразуемый источник тока. Выбираем контурные токи так, чтобы через источник тока проходил лишь один контурный ток i_1^k , который будет равен току источника $i_1^k = i_0 = 4 \text{ А}$.

Поэтому формируем уравнения только для второго и третьего контуров:

$$\begin{cases} R_{21}i_1^k + R_{22}i_2^k + R_{23}i_3^k = u_2^k, \\ R_{31}i_1^k + R_{32}i_2^k + R_{33}i_3^k = u_3^k, \end{cases}$$

где $R_{22} = R_1 + R_2 + R_3 = 3 \text{ Ом}$, $R_{33} = R_3 + R_4 = 2 \text{ Ом}$, $R_{21} = -R_1 = -1 \text{ Ом}$, $R_{32} = -R_3 = -1 \text{ Ом}$; $R_{31} = -R_4 = -1 \text{ Ом}$; $u_2^k = 0 \text{ В}$; $u_3^k = -u_0 = -5 \text{ В}$.

Система уравнений с числовыми коэффициентами:

$$\begin{cases} -4 + 3i_2^k - i_3^k = 0; \\ -4 - i_2^k + 2i_3^k = -5. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $i_2^k = 1,4 \text{ А}$; $i_3^k = 0,2 \text{ А}$, тогда $i_1 = i_1^k - i_2^k = 2,6 \text{ А}$; $i_2 = i_2^k = 1,4 \text{ А}$; $i_3 = i_2^k - i_3^k = 1,2 \text{ А}$; $i_4 = i_1^k - i_3^k = 3,8 \text{ А}$; $i_5 = i_3^k = 0,2 \text{ А}$.

Выбирая метод решения задачи (метод контурных токов или метод узловых напряжений), предпочтение следует отдать тому из них, который приводит к системе уравнений меньшей размерности.

§ 2.3. ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ИСТОЧНИКАХ

Пусть имеется изображенная на рисунке 2.10б произвольная цепь, в которой требуется найти ток i_k в одной из ветвей с сопротивлением R_k , причем источники цепи (для определенности их взято два) вынесены наружу. Выясним, нельзя ли всю цепь по отношению к двухполюснику R_k заменить одним источником с напряжением u_0 и последовательно включенным сопротивлением R_0 так, чтобы режим работы R_k не изменился (см. рис. 2.10в).

Если такая замена возможна, то $i_k = u_0 / (R_0 + R_k)$, а u_0 и R_0 образуют эквивалентный источник напряжения, который заменяет действие всей цепи по отношению к R_k .

Для доказательства сформулированной теоремы выполним следующие преобразования. Режим работы цепи не изменится, если в ветвь с сопротивлением R_k включить два одинаковых по величине источника напряжения противоположной полярности, как показано на рисунке 2.11а, где $u'_0 = u''_0 = u_0$.

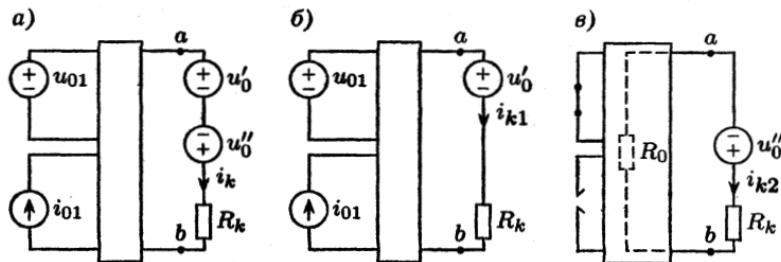


Рис. 2.11

Будем определять i_k методом наложения, как сумму двух токов: $i_k = i_{k1} + i_{k2}$, где i_{k1} — ток, обусловленный действием всех источников цепи и источником u'_0 (рис. 2.11б), а i_{k2} — ток, вызываемый действием только источника u''_0 (рис. 2.11в).

Для цепи (рис. 2.11б) ток $i_{k1} = (u_{ab} - u'_0) / R_k$. Выберем такое значение u'_0 , чтобы ток i_{k1} равнялся нулю. Это возможно, если $u'_0 = u_{ab}$. Но если $i_{k1} = 0$, то ветвь ab можно разомкнуть, и тогда очевидно, что u'_0 должно равняться напряжению холостого хода между полюсами ab , т. е. $u'_0 = u_{XX}$.

Тогда в цепи (рис. 2.11в) получим:

$$i_k = i_{k2} = \frac{u''_0}{R_0 + R_k} = \frac{u_{XX}}{R_0 + R_k},$$

где R_0 — сопротивление цепи относительно полюсов (узлов) ab при закороченных источниках напряжения и разомкнутых источниках тока.

Доказанную теорему часто называют теоремой Тевенена, или теоремой об эквивалентном источнике напряжения.

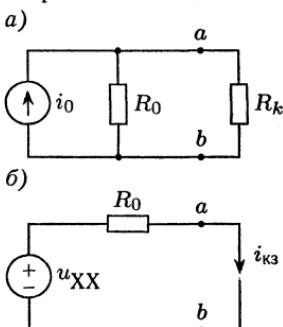


Рис. 2.12

Можно аналогичным образом доказать дуальную теорему об эквивалентном источнике тока (теорему Нортонна). Однако проще воспользоваться уже доказанной теоремой. Для этого преобразуем источник напряжения (рис. 2.10в) в изображенной на рисунке 2.12а источник тока $i_0 = u_{XX}/R_0$.

Тогда напряжение ветви $u_k = i_0 / (G_0 + G_k)$, где $G_0 = 1/R_0$, $G_k = 1/R_k$. Для того, чтобы величину источника тока можно было определить по исходной цепи, раскроем его смысл. Как следует из цепи рисунка 2.12б, ток, текущий через короткозамкнутые полюсы ab , будет равен $u_{XX}/R_0 = i_0 = i_{k3}$.

Итак, окончательно имеем

$$u_k = i_{k3} / (G_0 + G_k).$$

Доказанные теоремы целесообразно применять для расчетных целей лишь в том случае, когда требуется определить только один ток в какой-либо ветви. В этом случае определение напряжения холостого хода или тока короткого замыкания осуществляется обычно в более простой, чем исходная, цепи.

ПРИМЕР 5. В цепи (рис. 2.13а) найти ток i_3 , если $R_1 = R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = R_4 = 1 \Omega$, $u_0 = 8 \text{ В}$, $i_0 = 1 \text{ А}$.

Для определения u_{XX} размыкаем ветвь с сопротивлением R_3 . В результате образуется другая, более простая цепь (рис. 2.13б). В этой цепи согласно второму закону Кирхгофа запишем $u_{XX} + R_4 i_b - R_2 i_a = 0$, причем $i_b = i_0 = 1 \text{ А}$, $i_a = u_0 / (R_1 + R_2) = 2 \text{ А}$.

Тогда напряжение холостого хода будет $u_{XX} = R_2 i_a - R_4 i_b = 4 - 1 = 3 \text{ В}$.

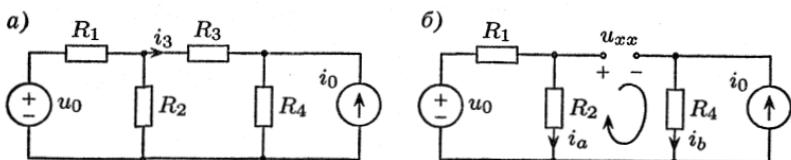


Рис. 2.13

Разомкнув в цепи рисунка 2.13б источник тока i_0 и замкнув накоротко источник напряжения u_0 , находим R_0 :

$$R_0 = R_4 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 2 \Omega.$$

Тогда ток i_3 исходной цепи определяется по теореме об эквивалентном источнике напряжения:

$$i_3 = \frac{u_{XX}}{R_0 + R_3} = \frac{3}{2 + 1} = 1 \text{ А.}$$

§ 2.4. ТЕОРЕМА ВЗАЙМНОСТИ

2.4.1. Определение проводимостей передачи на основании метода контурных токов

В качестве примера найдем второй контурный ток, решая систему и раскрывая определитель числителя по элементам второго столбца:

$$i_2^k = \begin{vmatrix} R_{11} & u_1^k & R_{13} & \dots \\ R_{21} & u_2^k & R_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n u_j^k A_{j2},$$

где $\Delta = |R^k|$ — главный определитель системы уравнений метода контурных токов (МКТ); n — число независимых уравнений МКТ; $A_{j2} = (-1)^{j+2} \Delta_{j2}$ — алгебраическое дополнение элемента, стоящего в строке j и столбце 2 определителя числителя (или знаменателя); Δ_{j2} — минор (определитель), полученный из Δ вычеркиванием строки j и столбца 2.

Пусть единственный в цепи источник напряжения u_j входит только в контур j так, что $u_j^k = u_j$, а ток i_2 ветви 2 является контурным током, так что $i_2^k = i_2$ (так всегда можно выбрать контуры). Тогда

$$i_2 = i_2^k = \frac{u_j A_{j2}}{\Delta};$$

и, следовательно, проводимость передачи от источника u_j к току i_2 будет

$$G_{2-j} = \frac{i_2}{u_j} = \frac{A_{j2}}{\Delta}.$$

Аналогично, используя метод узловых напряжений, можно вычислить сопротивление передачи R_{m-j} от единственного в цепи источника тока i_j , включенного между узлом j и базисным узлом к узловому напряжению узла m :

$$R_{m-j} = \frac{u_m^y}{i_j} = \frac{A_{jm}}{\Delta},$$

где Δ — главный определитель системы уравнений метода узловых напряжений.

2.4.2. Принцип взаимности (обратимости, пассивности)

Проводимости передачи с одинаковыми (но переставленными) индексами должны быть равны, то есть

$$G_{m-j} = G_{j-m}, \quad R_{m-j} = R_{j-m}.$$

Действительно, на основании данных 2.4.1 имеем

$$G_{m-j} = \frac{A_{jm}}{\Delta} = \frac{(-1)^{j+m} \Delta_{jm}}{\Delta}$$

$$G_{j-m} = \frac{A_{mj}}{\Delta} = \frac{(-1)^{m+j} \Delta_{mj}}{\Delta},$$

т. е. фактически необходимо доказать равенство получаемых из Δ миноров с одинаковыми (но переставленными) индексами. Как показано в 2.2.2 главный определитель Δ симметричен относительно главной диагонали, поскольку у цепей, составленных из пассивных R -элементов и независимых источников, взаимные сопротивления двух контуров одинаковы: $R_{12} = R_{21}, \dots, R_{jm} = R_{mj}, \dots$. Для получения определителя Δ_{jm} необходимо из симметричного определителя Δ исключить строку j и столбец m , а для Δ_{mj} — строку m и столбец j . Но при таком исключении получим транспонированные определители, которые, как известно, равны.

Аналогично обосновывается взаимность (обратимость) со-противлений передачи: $R_{m-j} = R_{j-m}$.

2.4.3. Теорема взаимности

Если единственный в цепи источник напряжения u_j , стоящий в ветви j , вызывает в ветви m ток i_m (см. рис. 2.14а), то будучи перенесенным в ветвь m этот источник вызовет в ветви j тот же самый ток (см. рис. 2.14б).

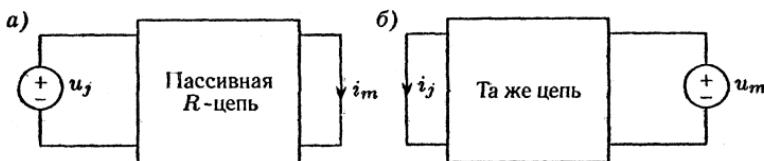


Рис. 2.14

Действительно, всегда можно выбрать контуры так, чтобы источник u_j входил только в контур j , а ток i_m был контурным током контура m . Тогда получим в цепи на рисунке 2.14а ток $i_m = G_{m-j}u_j$, а в цепи рисунка 2.14б аналогично $i_j = G_{j-m}u_m$. Но по условию $u_j = u_m$ и по принципу взаимности $G_{j-m} = G_{m-j}$, следовательно, выполняется $i_j = i_m$.

Следует отметить, что может быть доказана и дуальная теорема.

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

§ 3.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

3.1.1. Уравнения линейных цепей

Цепь, содержащая хотя бы один накопитель, т. е. L -или C -элемент, называется динамической цепью.

ПРИМЕР 1. Уравнения цепи, схема которой приведена на рисунке 3.1 a могут быть записаны по-разному.

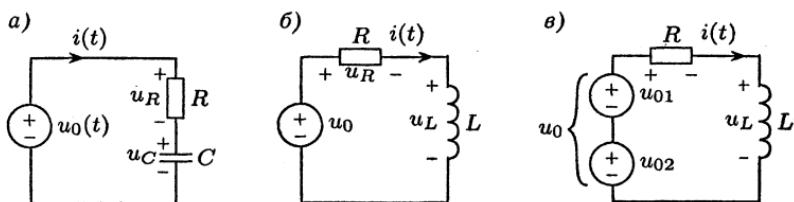


Рис. 3.1

Вариант 1: $Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = u_0(t)$, т. е. $u_R + u_C = u_0$.

Вариант 2: $Ri(t) + u_C(t) = u_0(t)$, $i(t) = Cu'_C(t)$.

Вариант 3: $RCu'_C(t) + u_C(t) = u_0(t)$; при этом характеристический полином (ХП) $RCp + 1 = 0$, откуда его корень $p_1 = -1/(RC)$.

Вариант 4 получим дифференцированием уравнений варианта 1: $Ri'(t) + i(t)/C = u'_0(t)$, при этом ХП $Rp + 1/C = 0$ и его корень $p_1 = -1/(RC)$ не изменился.

В общем случае RLC -цепи можно описать системами дифференциальных, интегральных, интегродифференциальных и

алгебраических уравнений. При этом характеристическое уравнение (характеристический полином) системы является единственным для любой из переменных системы. Коэффициенты уравнений таких цепей с сосредоточенными параметрами постоянны, т. е. стационарны. Дифференциальное уравнение, связывающее реакцию цепи $f_2(t)$ (т. е. выходную переменную) с воздействием $f_1(t)$ (т. е. входным сигналом), можно записать следующим образом (если исключить из системы остальные переменные):

$$\begin{aligned} a_n f_2^{(n)}(t) + \cdots + a_1 f_2'(t) + a_0 f_2(t) = \\ = b_m f_1^{(m)}(t) + \cdots + b_1 f_1'(t) + b_0 f_1(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $a_n, \dots, a_0, b_n, \dots, b_0$ — коэффициенты; при этом для решения (3.1) должно быть известно n начальных условий: $f_2(0), f_2'(0), \dots, f_2^{(n-1)}(0)$.

3.1.2. Первое свойство линейности уравнений цепи — принцип пропорциональности (однородности)

Если воздействие изменить в k раз, реакция изменится во столько же раз. Обоснем свойство на примере цепи (рис. 3.1б) дифференциальное уравнение которой

$$Li'(t) + Ri(t) = u_0(t). \quad (3.2)$$

Умножая левую и правую части (3.2) на постоянный коэффициент k и учитывая коммутативность (переместительность) операций дифференцирования и умножения на постоянный коэффициент, получим:

$$L(ki)' + R(ki) = (ku_0). \quad (3.3)$$

Уравнения (3.2) и (3.3) удовлетворяют общей математической форме

$$Lf_2'(t) + Rf_2(t) = f_1(t), \quad (3.4)$$

т. е. если $f_1 = u_0$, то $f_2 = i$; если же $f_1 = ku_0$, то $f_2 = ki$.

Свойство справедливо:

1. В общем случае (3.1).
2. Только при единственном в цепи воздействии.
3. Только при нулевых начальных условиях.

3.1.3. Второе свойство линейности – принцип дифференцируемости (стационарности)

Если новое воздействие является производной или интегралом от предыдущего, то новая реакция является производной или интегралом от предыдущей реакции. Действительно, продифференцировав (3.2), получим с учетом коммутативности операций дифференцирования и умножения на постоянный коэффициент:

$$L \frac{d(i')}{dt} + Ri' = (u'_0),$$

что также удовлетворяет общей форме (3.4), т. е. при воздействии $f_1 = u'_0$ реакцией будет $f_2 = i'$.

Свойство справедливо:

1. В общем случае (3.1).
2. Только при единственном в цепи воздействии.
3. Только при нулевых начальных условиях.
4. Только при постоянных (стационарных) коэффициентах a_k и b_k уравнения (3.1), поскольку в случае переменных коэффициентов коммутативность операций дифференцирования и умножения на нестационарный коэффициент не справедлива, т. е. $[a(t)f(t)]' \neq a(t)f'(t)$.

ПРИМЕР 2. Известна реакция f_{2I} при воздействии $f_{1I} = 1$ при $t > 0$, причем $f_{1I} = 0$ при $t < 0$. Найти реакцию f_{2II} , если $f_{1II} = 5t^2$ при $t > 0$ и $f_{1II} = 0$ при $t < 0$.

Поскольку в любой момент времени t имеем

$$f_{1II} = 10 \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^t f_{1I} dt \right) dt,$$

то и f_{2II} является двойным интегралом от f_{2I} , увеличенным в $k = 10$ раз.

3.1.4. Третье свойство линейности – принцип наложения (суперпозиции, аддитивности)

При нескольких воздействиях реакция равна сумме элементарных реакций от каждого из воздействий в отдельности. Обоснуем свойство на примере цепи (рис. 3.1в).

Если при $u_0 = u_{01}$ реакция $i = i_1$, а при $u_0 = u_{02}$ реакция $i = i_2$, то соответствующие уравнения цепи имеют вид

$$Li'_1 + Ri_1 = u_{01}, \quad Li'_2 + Ri_2 = u_{02}.$$

Просуммировав эти уравнения с учетом переместительности операций суммирования, дифференцирования и умножения на постоянный коэффициент, получим

$$L(i_1 + i_2)' + R(i_1 + i_2) = (u_{01} + u_{02}),$$

что также удовлетворяет общей форме (3.4), т. е. при воздействии $f_1 = u_0 = u_{01} + u_{02}$ реакцией будет $f_2 = i = i_1 + i_2$.

Свойство справедливо:

1. В общем случае, если уравнение (3.1) при наличии, например, еще одного воздействия $f_3(t)$, дополнить в правой части слагаемыми вида $d_k f_3^k + \dots + d_1 f_3' + d_0 f_3$.
2. Только при нулевых начальных условиях.

На свойстве базируется расчет цепей методом наложения, в котором в промежуточных расчетах (в данном случае — при расчете элементарных реакций от каждого из источников в отдельности) рекомендуется изменять некоторые из исходных направлений реакций (токов, напряжений) таким образом, чтобы можно было использовать со знаком «плюс» простейшие формулы практического анализа: закон Ома для входного сопротивления, формулы делителей напряжений и токов. Однако при изменении исходного направления элементарные реакции суммируются алгебраически.

Примечание. Свойство позволяет воздействия произвольной формы приближенно представлять суммой воздействий простой стандартной формы, например, вида односторонних постоянных функций (показаны на рисунке 3.2 тонкими линиями).

ВЫВОД: целесообразно изучать реакции цепи при воздействии единичного постоянного уровня.

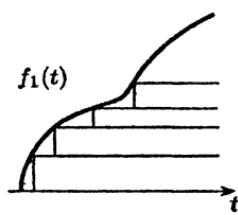


Рис. 3.2

**§ 3.2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА
КЛАССИЧЕСКОГО МЕТОДА АНАЛИЗА
ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ
ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ**

**3.2.1. Понятие о коммутации
и переходных процессах**

Коммутацией называют какое-либо переключение в цепи с помощью идеального ключа К, условное обозначение которого приведено на рисунке 3.3а. *Идеальный ключ* — это элемент, обладающий следующими свойствами: в замкнутом состоянии он эквивалентен короткозамкнутому участку (КЗ), а в разомкнутом — обрыву, т. е. холостому ходу (ХХ); переключение осуществляется мгновенно; рядом с обозначением ключа указывают момент переключения: как правило, это $t = 0$ (см. рис. 3.3а).

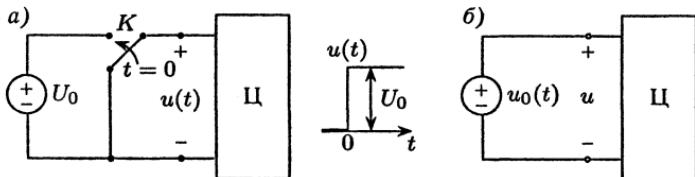


Рис. 3.3

Обычно в цепи до коммутации (при $t < 0$) и через некоторое время после нее (при $t \geq 0$) наблюдаются установившиеся режимы. Режим в цепи в интервале времени, следующем за коммутацией (при $t > 0$), до наступления установившегося называют переходным режимом, а процессы при этом — переходными процессами.

Пример подключения некоторой цепи Ц к источнику постоянного напряжения $u_0(t) = U_0 = \text{const}$ приведен на рисунке 3.3а, там же показан график изменения напряжения $u(t)$ на входе цепи Ц.

Но коммутация — это не только переключение: если воздействие или какая-либо его производная изменилась скачком (т. е. описываются функцией с разрывом первого рода), тоже говорят о коммутации. Так, если в схеме (рис. 3.3б) закон изменения напряжения источника $u_0(t)$ определяется графиком, приведенным на рисунке 3.3а, т. е. $u_0(t) = u(t)$, то процессы в одной и той же цепи Ц будут одинаковы в обоих случаях рисунка 3.3а, б.

3.2.2. Общая характеристика свободной составляющей решения уравнений цепи и свободных режимов в цепи

Как указано ранее, процессы в цепи можно описать неоднородным дифференциальным уравнением (3.1). Во многих практических важных случаях математика рекомендует искать решение (3.1) в виде суммы двух составляющих:

$$f_2(t) = f_{2\text{св}}(t) + f_{2\text{вын}}(t), \quad (3.5)$$

где $f_{2\text{св}}$ и $f_{2\text{вын}}$ — соответственно, свободная и вынужденная составляющие решения уравнений цепи.

Свободная составляющая $f_{2\text{св}}(t)$ — это общее решение однородного уравнения

$$a_n f_2^{(n)}(t) + \cdots + a_1 f_2'(t) + a_0 f_2(t) = 0, \quad (3.6)$$

соответствующего неоднородному дифференциальному уравнению (3.1).

Свободный режим (процесс) в цепи — это режим (процесс) в цепи без источников, т. е. в цепи, «свободной от источников». Следовательно, свободный режим описывается тем же однородным уравнением (3.6), так как в (3.1) $f_1(t) = 0$.

Таким образом, математическая форма описания свободного процесса и свободной составляющей решения одинакова и, как известно, обычно имеет вид

$$f_{2\text{св}}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (3.7)$$

где A_k — постоянные интегрирования; p_k — корни характеристического полинома (характеристического уравнения) цепи, который получают на основании (3.6):

$$a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (3.8)$$

Утверждение: корни ХП цепи располагаются строго в левой полуплоскости комплексной плоскости, т. е.

$$\operatorname{Re} p_k < 0. \quad (3.9)$$

Обоснование: свободная составляющая решения и свободный процесс в цепи описываются математически одинаково — выражениями (3.6), (3.7); но свободный процесс в цепи без

источников происходит за счет начальной энергии в накопителях и с течением времени затухает до нуля из-за необратимых потерь энергии в R -элементах, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{2\text{cb}}(t) \rightarrow 0, \quad (3.10)$$

что может быть лишь при отрицательных показателях экспонент в (3.7), т. е. при выполнении (3.9).

Примечания:

1. Если в цепи или динамической системе любой физической природы выполняется условие (3.9) или (3.10), то такая система называется устойчивой.
2. Формула (3.7) записана для случая простых (некратных) корней ХП (3.8); если же, например p_1 , является трехкратным корнем (3.8), то (3.7) имеет вид

$$f_{2\text{cb}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 t e^{p_1 t} + A_3 t^2 e^{p_1 t} + \sum_{k=4}^n A_k e^{p_k t}. \quad (3.11)$$

3.2.3. Вынужденная составляющая

Вынужденная составляющая $f_{2\text{вын}}(t)$ — это частное решение неоднородного уравнения (3.1). Как известно, во многих практических важных случаях ее рекомендуется искать в математической форме воздействия.

Так, если воздействие $f_1(t) = Ae^{-\beta t}$, то вынужденную составляющую записывают в виде $f_{2\text{вын}}(t) = ae^{-\beta t}$; если $f_1 = A \cos \omega_0 t$, то $f_{2\text{вын}} = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$; если $f_1 = At^2$, то $f_{2\text{вын}} = at^2 + bt + d$ (тоже полином второго порядка).

Выражение $f_{2\text{вын}}(t)$ с неизвестными коэффициентами a, b, d «математика рекомендует» подставить в дифференциальное уравнение (3.1), после чего, приравнивая левые и правые части (3.1), находят a, b, d .

Примечания:

1. Вынужденный режим в цепи — это режим после практического затухания свободной составляющей, т. е. после практического затухания переходного процесса, когда решение уравнений цепи фактически определяется только вынужденной составляющей.
2. Термин «вынужденный» объясняется тем, что $f_{2\text{вын}}(t)$ как бы «вынуждена» иметь математическую форму воздействия и им обусловлена.
3. При постоянных и периодических воздействиях вынужденный режим также называют установившимся, а $f_{2\text{вын}}(t)$ установившейся составляющей.

3.2.4. Законы коммутации, начальные условия и порядок цепи

Для отыскания n постоянных интегрирования в (3.7) необходимо знать n начальных условий сразу же после коммутации при $t = 0+$. Начальные условия находят на основании законов коммутации, т. е. принципов непрерывности:

$$u_C(0+) = u_C(0-), \quad i_L(0+) = i_L(0-), \quad (3.12)$$

причем начальные значения $u_C(0+)$ и $i_L(0+)$ называют независимыми начальными условиями, поскольку на основании (3.12) они не зависят от места коммутации и величины воздействия в момент $t = 0+$, а определяются лишь значениями $u_C(0-)$, $i_L(0-)$ в последний момент перед коммутацией. Значения остальных переменных $u_R(0+)$, $i_R(0+)$, $u_L(0+)$, $i_C(0+)$ называют зависимыми начальными условиями; они в общем случае не равны значениям этих переменных при $t = 0-$.

Порядок цепи n — это максимальная степень дифференциального уравнения цепи (3.1). Порядок цепи, также определяющий количество постоянных интегрирования и требуемое для их отыскания число начальных условий, во многих случаях равен суммарному числу накопителей:

$$n = n_C + n_L,$$

поскольку каждому накопителю соответствует простейшее дифференциальное уравнение первого порядка и одно независимое начальное условие.

Порядок цепи понижается, если в цепи имеются контуры, состоящие из C -элементов, или узлы, у которых все присоединенные к ним ветви содержат L -элементы. Так, цепи, изображенные на рисунке 3.4, имеют второй порядок, поскольку напряжение одной из емкостей (рис. 3.4a) определяется алгебраической

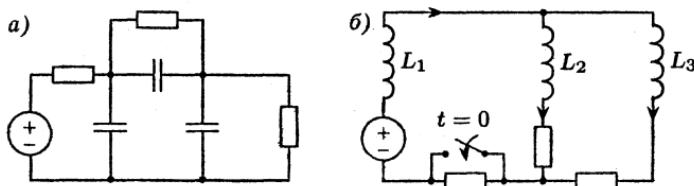


Рис. 3.4

суммой напряжений двух других C -элементов, а в цепи на рисунке 3.4б значение тока одной из индуктивностей $i_{L1}(0+) = i_{L2}(0+) + i_{L3}(0+)$ является зависимым. В случае « L -контуров» и « C -узлов» порядок цепи обычно также понижается.

Цепи на рисунке 3.5а, б, содержащие по 2 накопителя, имеют второй порядок, в то время как на рисунке 3.5в изображена цепь первого порядка, поскольку в свободном режиме (рис. 3.5г) L -элементы цепи соединены последовательно и могут быть заменены эквивалентной индуктивностью $L_3 = L_1 + L_2$.

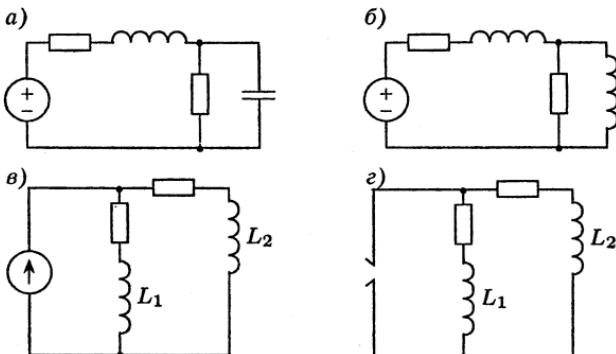


Рис. 3.5

ВЫВОД: порядок цепи целесообразно определять по схеме свободного режима.

§ 3.3. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

3.3.1. Расчет свободной составляющей

В цепи первого порядка свободная составляющая имеет вид

$$f_{2\text{св}} = Ae^{p_1 t} = Ae^{-t/\tau}, \quad (3.13)$$

где постоянная времени $\tau = L/R_3$, или $\tau = CR_3$, причем R_3 — это эквивалентное сопротивление цепи в свободном режиме относительно выводов (узлов) единственного в цепи накопителя.

Действительно, свободная составляющая решения уравнений цепи и описание процессов в свободном режиме имеют, согласно 3.2.2, одну и ту же математическую форму (3.13).

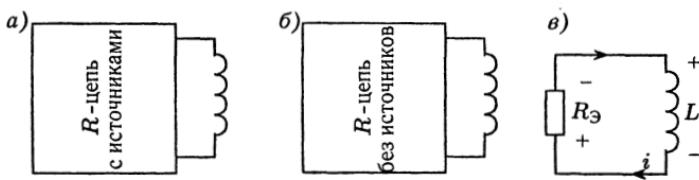


Рис. 3.6

Поэтому в случае цепи первого порядка, например с L -элементом (рис. 3.6а), перейдем к рассмотрению свободного режима (рис. 3.6б). Эквивалентная схема цепи в этом случае имеет простейший вид рисунка 3.6в и описывается уравнением $Li'(t) + R_3i(t) = 0$, которому соответствует характеристический полином $Lp + R_3 = 0$, откуда $p_1 = -R_3/L$, следовательно, согласно (3.7) $f_{2\text{св}}(t) = Ae^{p_1 t} = Ae^{-R_3 t/L} = Ae^{-t/\tau}$, что соответствует (3.13).

Примечания:

1. Дуально обосновывается, что в цепи первого порядка с C -элементом $\tau = C/G_3 = CR_3$.
2. Можно показать, что размерность $[\tau] = [t] = \text{с.}$
3. Свободная составляющая имеет одну и ту же математическую форму (3.13) для любой из рекций цепи, поскольку линейные операции с экспонентой (например, $u_{L\text{св}} = Li'_{L\text{св}}$ в схеме рисунка 3.8в) изменяет лишь величину постоянной интегрирования A .

3.3.2. Расчет вынужденного (установившегося) режима

При постоянных воздействиях в цепи этот расчет проводят по эквивалентной схеме цепи, в которой L -элементы заменяют КЗ, C -элементы — ХХ.

Действительно, согласно п. 3.2.1, вынужденная составляющая решения уравнений цепи должна иметь математическую форму воздействия, т. е. должна быть постоянной. Таким образом, $u_{L\text{вын}} = Li'_{L\text{вын}} = 0$, $i_{C\text{вын}} = Cu'_{C\text{вын}} = 0$, если $i_{L\text{вын}} = \text{const}$, $u_{C\text{вын}} = \text{const}$; отсюда по теореме замещения переходим к указанной выше эквивалентной схеме.

Примечание. Условное обозначение ($t \rightarrow \infty$) объясняется полным застуханием свободной составляющей (3.13) при $t \rightarrow \infty$, когда в цепи устанавливаются постоянные токи и напряжения; отсюда и название вынужденного режима в этом случае — установившийся режим.

3.3.3. Расчет независимых начальных условий

Непосредственно перед коммутацией при $t < 0$ (точнее, при $t = 0-$) расчет производится при постоянных воздействиях по эквивалентной схеме, описанной в 3.3.2. Таким образом, если в условии задачи нет оговорок, режим в цепи при $t < 0$ считают установившимся и, рассчитав эквивалентную R -цепь, находят все $i_L(0-)$ и $u_C(0-)$, т. е. все независимые начальные условия.

3.3.4. Расчет зависимых начальных условий

В первый момент после коммутации ($t = 0+$) расчет производят по эквивалентной схеме цепи, в которой все C -элементы заменяют источниками напряжения значения $u_C(0-)$, L -элементы — источниками тока $i_L(0-)$.

Действительно, на основании законов коммутации известны напряжение емкости $u_C(0+) = u_C(0-)$ и ток индуктивности $i_L(0+) = i_L(0-)$, что позволяет на основании теоремы замещения перейти к описанной ранее эквивалентной R -цепи с замещающими накопители источниками.

Следствие: при нулевых независимых начальных условиях $u_C(0-) = 0$, $i_L(0-) = 0$ в эквивалентной схеме при $t = 0+$ заменяют C -элементы на КЗ, L -элементы — на ХХ.

3.3.5. Определение постоянной интегрирования, запись решения и построение его графика

Согласно (3.5), решение уравнений цепи первого порядка имеет вид:

$$f_2(t) = f_{2\text{вын}} + f_{2\text{св}}(t) = f_{2\text{вын}} + Ae^{-t/\tau}.$$

Постоянную интегрирования A определяют, зная $f_2(0+)$ на основании п. 3.3.4: $f_2(0+) = f_{2\text{вын}} + A$, откуда

$$f_2(t) = f_{2\text{вын}} + [f_2(0+) - f_{2\text{вын}}] e^{-t/\tau}. \quad (3.14)$$

Для построения временной диаграммы процесса (см. рис. 3.7), т. е. графика выражения (3.14), необходимо знать характерные значения экспоненты: $\exp(-t/\tau) = 1$ при $t = 0$; $e^{-1} \approx 2,7^{-1} \approx 0,37$ при $t = \tau$; $e^{-2} \approx 0,14 \approx 1/7$ при $t = 2\tau$; $e^{-3} \approx 0,05 = 1/20$ при $t = 3\tau$; $e^{-\infty} = 0$ при $t \rightarrow \infty$, а также

свойство — любая подкасательная к экспоненте равна постоянной времени τ (касательные указаны на рисунке 3.7 штрихпунктиром, подкасательные — отрезками величины τ).

Хотя экспонента затухает до нуля при $t \rightarrow \infty$, однако практическая точность ее построения обычно не превышает 5%, поэтому практической длительностью переходного процесса в цепях первого порядка считают обычно временной интервал в 3 постоянных времени: $t_{\text{пп}} \cong 3\tau$. При построении временной диаграммы переходного процесса (см. рис. 3.7) составляющую $f_2(t)$ обычно не показывают: график процесса строят, соединяя экспонентой начальное значение $f_2(0+)$ с конечным значением $f_2(\infty) = f_2(\infty)$ и указывая характерные точки экспоненты.

ВЫВОД: описанный в § 3.3 анализ переходных процессов практически сводится к расчету эквивалентных резистивных схем замещения цепи в различных режимах; составлять, преобразовывать и решать систему дифференциальных уравнений цепи не требуется.

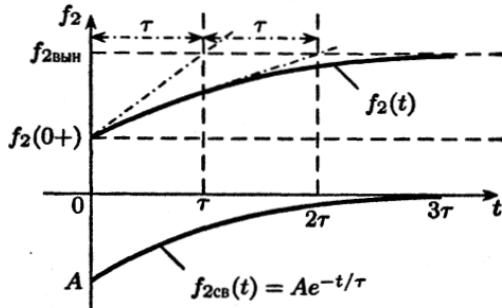


Рис. 3.7

§ 3.4. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ПО УРАВНЕНИЯМ СОСТОЯНИЯ

3.4.1. Общая характеристика уравнений состояния

Системой уравнений состояния обычно называют эквивалентную запись дифференциальных уравнений цепи n -го порядка в виде уравнений в нормальной форме Коши, т. е. в форме системы n уравнений (каждое — первого порядка) следующего вида:

$$[f'_{\text{nc}}(t)] = [A] [f_{\text{nc}}(t)] + [B] [f_1(t)], \quad (3.15)$$

где $[f_{\text{пс}}]$ — матрица переменных состояния, т. е. некоторых переменных цепи или их линейных комбинаций; $[f_1]$ — матрица воздействий; $[A]$, $[B]$ — матрицы коэффициентов.

Если искомые реакции не являются переменными состояния, используют систему алгебраических уравнений связи реакций с переменными состояния и воздействиями

$$[f_2(t)] = [M] [f_{\text{пс}}(t)] + [N] [f_1(t)], \quad (3.16)$$

где $[M]$, $[N]$ — матрицы коэффициентов.

3.4.2. Методика составления уравнений состояний

Переменными состояния удобно выбрать напряжения C -элементов и токи L -элементов, т. е. непрерывные переменные цепи. Таким образом, в соответствии с (3.15) необходимо составить систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} u'_{Ck}(t) = F_k(\dots u_{Ck} \dots i_{Lj} \dots u_{0m} \dots i_{0n} \dots), \\ i'_{Lj}(t) = F_j(\dots u_{Ck} \dots i_{Lj} \dots u_{0m} \dots i_{0n} \dots), \end{cases} \quad (3.17)$$

где k , j , m , n — номера, соответственно, C -элементов, L -элементов, источников напряжения и тока; F — линейные функционалы.

Для получения (3.17) используют уравнения вольт-амперных характеристик накопителей:

$$u'_C = \frac{i_C}{C}, \quad i'_L = \frac{u_L}{L}, \quad (3.18)$$

причем вначале формируют вспомогательную систему

$$\begin{cases} i_{Ck}(t) = \Phi_k(\dots u_{Ck} \dots i_{Lj} \dots u_{0m} \dots i_{0n}), \\ u_{Lj}(t) = \Phi_j(\dots u_{Ck} \dots i_{Lj} \dots u_{0m} \dots i_{0n}), \end{cases} \quad (3.19)$$

где Φ — линейные функционалы, а затем, подставляя (3.19) в (3.18), записывают уравнения состояния (3.17).

Наиболее просто получить (3.19) методом вспомогательных замещающих источников, когда в исходной схеме рисунка 3.8а замещают все C -элементы источниками напряжения величины $u_C(t)$, а все L -элементы — источниками тока $i_L(t)$, как показано на рисунке 3.8б. В составленной таким образом цепи, используя методы расчета R -цепей, находят токи C -элементов

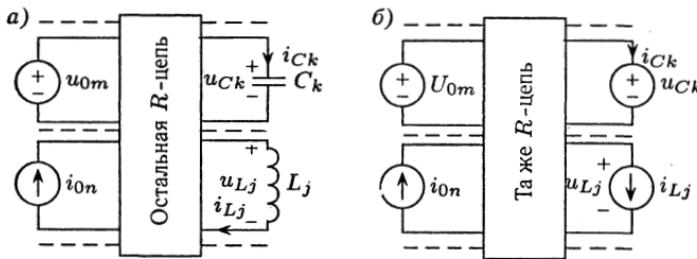


Рис. 3.8

и напряжения L -элементов как функции независимых источников u_{0m} , i_{0n} и вспомогательных источников u_{Ck} , i_{Lj} т. е. формируют систему (3.19).

ПРИМЕР 3. Составить уравнения состояния цепи рисунка 3.9а для $t > 0$ при $u_0 = 2$ В; $i_0 = 10$ А; $R = 2$ Ом; $C = 2$ Ф; $L = 2$ Гн.

По схеме со вспомогательными источниками $u_C(t)$, $i_L(t)$, изображенной на рисунке 3.9б, несложно записать систему (3.19):

$$\begin{aligned} i_C &= i_L - i_0, \\ u_L &= -u_C + u_0 - Ri_L, \end{aligned}$$

и далее с учетом уравнений накопителей (3.18) — систему уравнений состояния (3.17) в упорядоченном виде:

$$\begin{cases} u'_C(t) = 0 + \frac{1}{C}i_L(t) + 0 - \frac{1}{C}i_0; \\ i'_L(t) = -\frac{1}{L}u_C(t) - \frac{R}{L}i_L(t) + \frac{1}{L}u_0 + 0, \end{cases}$$

или в матричной форме (3.15)

$$\begin{bmatrix} u'_C(t) \\ i'_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix},$$

т. е. с учетом численных значений можно записать:

$$\begin{bmatrix} u'_C \\ i'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

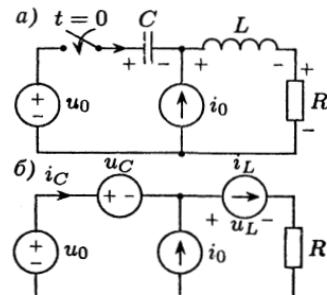


Рис. 3.9

3.4.3. Аналитическое решение уравнений состояния

Аналитическое решение уравнений состояния наиболее просто осуществлять в последовательности, аналогичной изложенной в § 3.3:

1. Находят свободную составляющую решения уравнений цепи, для чего в начале записывают характеристический полином, используя известную из курса математики формулу

$$ХП = \det([A] - p[E]) = 0,$$

т. е. из элементов главной диагонали матрицы $[A]$ вычитают p (здесь $[E]$ — единичная матрица) и вычисляют определитель полученной таким образом матрицы. Найдя корни p_k характеристического полинома ($ХП$), записывают $f_{\text{св}}(t)$ для любой из переменных состояния ($\PiС$) в виде (3.7).

2. Определяют вынужденную (установившуюся) составляющую решения $f_{\text{вын}}$ либо по эквивалентной схеме установившегося режима, описанной в п. 3.3.2, либо непосредственно по уравнениям состояния (3.15), учитывая, что при постоянных воздействиях $f_1(t) = \text{const}$ вынужденная составляющая реакции тоже постоянна, т. е. производные в левой части системы (3.15) в вынужденном (установившемся) режиме равны нулю:

$$[0] = [A] [f_{\text{вын}}] + [B] [f_1]. \quad (3.20)$$

Решая (3.20), находят $[f_{\text{вын}}] = -[A]^{-1}[B][f_1]$, где $[A]^{-1}$ — обратная к $[A]$ матрица. В случае цепи второго порядка, это простейшая система двух линейных алгебраических уравнений, которая, например, для уравнения примера 3, сразу дает $i_{L\text{вын}} = 10 \text{ A}$, $u_{C\text{вын}} = -18 \text{ В}$.

3. Расчет независимых начальных условий, т. е. всех значений $u_C(0-)$ и $i_L(0-)$, осуществляют, как описано в п. 3.3.3. Поскольку u_C , i_L являются переменными состояния, то по законам коммутации начальные значения переменных состояния известны: $[f_{\text{nc}}(0+)] = [f_{\text{nc}}(0-)]$.

4. В соответствии с замечанием к (3.1) в цепях высокого порядка необходимо найти начальные значения производных

переменных состояния. Их определяют непосредственно по уравнениям состояния (3.15) при $t = 0+$:

$$\begin{cases} [f'_{nc}(0+)] = [A] [f_{nc}(0+)] + [B] [f_1(0+)] \\ [f''_{nc}(0+)] = [A] [f'_{nc}(0+)] + [B] [f'_1(0+)], \end{cases} \quad (3.21)$$

причем для получения второго и последующих уравнений в (3.21) вначале дифференцируют (3.15), а затем подставляют $t = 0+$; очевидно, что $f'_1(0+) = 0$ в (3.21), если воздействие $f_1(t) = \text{const.}$

5. Записывают решения для соответствующих переменных состояния в виде

$$f_{nc}(t) = f_{\text{вын}} + f_{\text{св}}(t) = f_{\text{вын}} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots, \quad (3.22)$$

и осуществляют дифференцирование (3.22) ($n - 1$) раз:

$$\begin{cases} f'_{nc}(t) = 0 + p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} + \dots \\ \dots \end{cases}$$

Зная начальные значения переменной состояния и ее производных, отыскивают постоянные интегрирования A_k , решая систему, полученную при $t = 0+$ из вышезаписанных уравнений:

$$\begin{cases} f_{nc}(0+) = f_{\text{вын}} + A_1 + A_2 + \dots, \\ f'_{nc}(0+) = 0 + p_1 A_1 + p_2 A_2 + \dots. \end{cases}$$

6. Далее находят искомые реакции, не являющиеся переменными состояния, для чего используют уравнения связи (3.16), фактически записанные ранее при составлении уравнений состояния при анализе схемы с вспомогательными источниками, учитывая, однако, что значения $u_C(t)$ и $i_L(t)$ теперь уже найдены. Так, в примере 3 уравнениями связи являются первые два уравнения, если i_C , u_L — искомые реакции; контроль осуществляют по формулам $i_C = Cu'_C$, $u_L = Li'_L$.

Примечания:

1. При наличии кратных корней характеристического уравнения $p_{1,2}$ следует использовать запись типа (3.11).
2. В случае комплексных корней, например $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$, уравнение (3.22) справедливо, однако во многих случаях целесообразнее использовать иную форму записи свободной составляющей:

$$f_{\text{св}}(t) = A_1 e^{-\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{-\alpha t} \sin \omega t + \dots \quad (3.23)$$

§ 3.5. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

3.5.1. Понятие о численном решении уравнений состояния

В системе уравнений состояния

$$[df_2(t)/dt] = [A][f_2(t)] + [B][f_1(t)], \quad (3.24)$$

где для простоты через $[f_2(t)]$ обозначена матрица переменных состояния, переходят к малым конечным приращениям переменных на k -м шаге численного расчета:

$$[\Delta f_{2k}] / \Delta t = ([f_{2k}] - [f_{2(k-1)}]) / \Delta t. \quad (3.25)$$

С учетом (3.24), (3.25) можно записать матрицу переменных состояния на k -м шаге численного расчета следующим образом:

$$[f_{2k}] = [f_{2(k-1)}] + \Delta t[A][f_{2(k-1)}] + \Delta t[B][f_{1(k-1)}]. \quad (3.26)$$

Примечания:

1. Выражение (3.26) называют явной формой алгоритма Эйлера.
2. Чтобы погрешность численного решения системы (3.26) на вычислительных машинах была не велика, временной интервал (шаг) Δt должен быть достаточно малым, например, меньшим 0,2 от наименьшего характерного интервала переходного процесса — минимальной постоянной времени $\tau_{\min} = 1/\alpha_{\max}$ или минимальной четверти периода синусоиды $0,25T_{\min}$, где $T = 2\pi/\omega$ в соответствии с (3.23).

Для уменьшения накопления ошибки при численном решении уравнений состояния используют более сложные, чем (3.26), алгоритмы или вводят поправки. Так, одним из удачных вариантов считают так называемое билинейное преобразование уравнений (3.24), в котором, в отличие от алгоритма (3.26) явной формы (когда значения переменных состояния на интервале № k вычисляли по данным предыдущего шага), применяют формулу

$$[f_{2k}] - [f_{2(k-1)}] = \Delta t[A] \frac{[f_{2k}] + [f_{2(k-1)}]}{2} + \\ + \Delta t[B] \frac{[f_{1k}] + [f_{1(k-1)}]}{2}, \quad (3.27)$$

где в правой части используют средние значения переменных на том же шаге № k .

Примечание. Уравнение (3.27) записано в неявной форме, так как его еще необходимо решить относительно $[f_{2k}]$.

3.5.2. Численный расчет переходных процессов по дискретным резистивным схемам замещения

От уравнений накопителей

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}, \quad i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt},$$

переходим к приближенным уравнениям численного расчета. Для шага расчета № k имеем

$$u_{Lk} = \frac{L}{\Delta t} i_{Lk} - \frac{L}{\Delta t} i_{L(k-1)}, \quad (3.28)$$

$$i_{Ck} = C \frac{u_{Ck} - u_{C(k-1)}}{\Delta t}. \quad (3.29)$$

Преобразовав (3.29) к виду

$$u_{Ck} = \frac{\Delta t}{C} i_{Ck} + u_{C(k-1)}, \quad (3.30)$$

трактуем алгебраическую сумму напряжений в (3.28), (3.30) как формулу последовательного соединения в эквивалентных схемах, изображенных, соответственно, на рисунке 3.10a,b, где R_{gL} , R_{gC} называют дискретными сопротивлениями L - и C -элементов.

ВЫВОДЫ:

1. Дискретные резистивные схемы замещения, в которых накопители заменяют R -элементами и источниками, как показано на рисунке 3.10, позволяют производить численный расчет переходных процессов вообще без составления и решения дифференциальных уравнений — достаточно использовать методы анализа R -цепей.

2. На каждом шаге численного расчета кроме отыскания реакций нужно находить также значения i_{Lk} и u_{Ck} для учета их в эквивалентных резистивных схемах на следующем шаге.

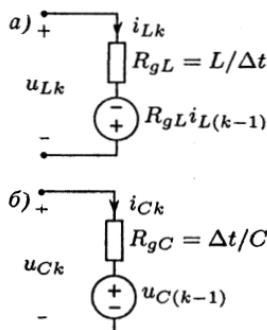


Рис. 3.10

§ 3.6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПРОСТЫХ RC- И RL-ЦЕПЯХ

3.6.1. Свободный режим в RC-цепи

Проанализируем процессы в простых цепях с позиций классической математики, дадим им физическую трактовку и сравним результаты с данными расчета по эквивалентным схемам замещения, описанным в § 3.3.

Свободный процесс в RC -цепи происходит за счет начальных запасов энергии в C -элементе $W_C(0-) = W_C(0+) = = Cu_C^2(0+)/2$. Пример такой цепи приведен на рисунке 3.11a. При этом начальное напряжение C -элемента считаем положительным: $u_C(0+) = u_C(0-) = u_{C0} > 0$.

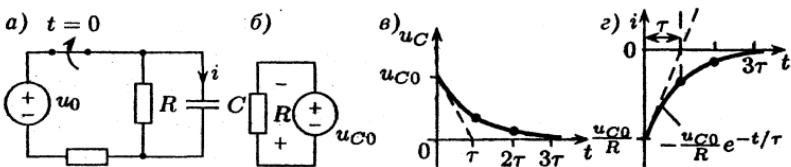


Рис. 3.11

Используя для $t > 0$ уравнения цепи $u_R + u_C = 0$, $u_R = Ri$, $i = Cu'_C$, составляем дифференциальное уравнение относительно непрерывной переменной:

$$RCu'_C(t) + u_C(t) = 0.$$

Решение такого однородного уравнения цепи без источников содержит только свободную составляющую $u_C = u_{C\text{cb}}(t) = Ae^{p_1 t} = Ae^{-t/\tau}$, где $p_1 = -(RC)^{-1}$ — корень характеристического полинома (уравнения) $RCp+1=0$; постоянная времени $\tau = RC = |p_1|^{-1}$.

Используя начальные условия $u_C(0+) = u_{C0}$, находим постоянную интегрирования $u_C(0+) = A$, откуда решение уравнений цепи $u_C(t) = u_{C0}e^{-t/\tau} > 0$ при $t > 0$. Далее находим закон изменения тока $i(t) = Cu'_C = -(u_{C0}/R)e^{-t/\tau} < 0$ и контролируем полученный результат: $u_R = -u_C$, $i = u_R/R$.

Физическая трактовка:

1. При $t > 0$ направление движения положительных зарядов при разряде емкостного элемента указано на рисунке 3.11a пунктиром, т. е., действительно, $i(t) < 0$.

2. Начальная энергия C -элемента с течением времени необратимо потребляется R -элементом, причем полная энергия будет следующей:

$$W_{R\Sigma} = \int_0^{\infty} R i^2(t) dt = \int_0^{\infty} R (u_{C0}^2 / R^2) e^{-2t/(RC)} dt = \\ = -0,5 C u_{C0}^2 e^{-2t/(RC)} \Big|_0^{\infty} = C u_{C0}^2 / 2 = W_C(0+).$$

3. Составленная на основании теоремы замещения эквивалентная схема цепи при $t = 0+$ приведена на рисунке 3.11б; она позволяет найти начальные значения переменных $u_R(0+) = -u_{C0}$, $i(0+) = u_R(0+)/R = -u_{C0}/R < 0$, которые соответствуют выше полученным решениям.

Диаграммы мгновенных значений для $u_C(t)$, $i(t)$ приведены на рисунке 3.11в, г, где при $t = 0$, τ , 2τ , 3τ выделены характерные значения экспоненциальных функций, равные, соответственно, 1; 0,37; 0,14; 0,05 от начального значения экспоненты, а также пунктиром показаны касательные к экспонентам при $t = 0$, пересекающие временную ось в момент $t = \tau$. Практическая длительность переходного процесса $t_{\text{пп}} \cong 3\tau = 3RC$ определяется только параметрами цепи и от значения u_{C0} не зависит.

3.6.2. Подключение последовательной RC -цепи к источнику постоянного напряжения

Схема цепи приведена на рисунке 3.12а; предполагаем $u_0 = \text{const} > 0$, $u_C(0+) = u_C(0-) = u_{C0} > 0$, причем $u_0 > u_{C0}$.

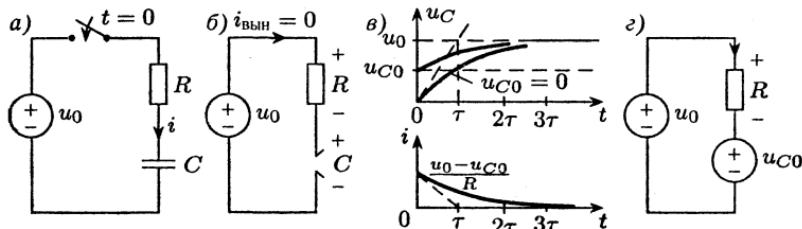


Рис. 3.12

Дифференциальное уравнение цепи, составленное относительно непрерывной переменной на основании преобразования очевидных отношений $-u_0 + u_R + u_C = 0$, $u_R = Ri$, $i = Cu'_C$, является неоднородным:

$$RCu'_C(t) + u_C(t) = u_0.$$

Свободная составляющая как общее решение однородного уравнения $RCu'_C(t) + u_C(t) = 0$ имеет математическую форму, совпадающую с решением уравнений цепи в свободном режиме $u_{C\text{св}}(t) = Ae^{p_1 t} = Ae^{-t/\tau}$, где $\tau = RC$ — постоянная времени.

Вынужденную составляющую как частное решение неоднородного уравнения отыскиваем в математической форме воздействия, т. е. $u_{C\text{вын}} = \text{const}$. Подставляя $u_{C\text{вын}}$ в неоднородное дифференциальное уравнение цепи, получим

$$RCu'_{C\text{вын}} + u_{C\text{вын}} = u_0,$$

откуда с учетом $u'_{C\text{вын}} = 0$ находим $u_{C\text{вын}} = u_0$, а также $i_{\text{вын}} = Cu'_{C\text{вын}} = 0$, $u_{R\text{вын}} = Ri_{\text{вын}} = 0$, что соответствует изображенной на рисунке 3.12б эквивалентной схеме цепи для расчета вынужденного (установившегося) режима при $t \rightarrow \infty$.

Постоянную интегрирования в решении уравнений цепи

$$u_C(t) = u_{C\text{вын}} + u_{C\text{св}}(t) = u_0 + Ae^{-t/\tau}$$

находим по начальному условию $u_C(0+) = u_{C0} = u_0 + A$, т. е. решение имеет вид

$$u_C(t) = u_0 - (u_0 - u_{C0}) e^{-t/\tau},$$

откуда $u_R = u_0 - u_C = (u_0 - u_{C0}) e^{-t/\tau} > 0$, $i = u_R/R = [(u_0 - u_{C0})/R] e^{-t/\tau} > 0$; контроль осуществляем по формуле $i = Cu'_C$.

Графики $u_C(t)$, $i(t)$ приведены на рисунке 3.12в. Изображенные пунктиром касательные к временным диаграммам $u_C(t)$ при различных начальных значениях u_{C0} пересекают горизонталь $u_{C\text{вын}}$ в одной точке — при $t = \tau$. График $u_C(t)$ описывается непрерывной функцией, график $i(t)$ изменяется скачком в момент коммутации при $t = 0$, т. е. описывается разрывной функцией

Физическая трактовка:

1. При $t \rightarrow \infty$ в установившемся режиме постоянных токов и напряжений емкостной элемент эквивалентен разорванному участку цепи (XX, см. рис. 3.12б), постоянный ток через C -элемент не протекает.

2. Поскольку по условию задачи $u_{C0} < u_0$, то при $t > 0$ происходит заряд C -элемента до значения u_0 , т. е. движение положительных зарядов в цепи соответствует указанному условно положительному направлению тока $i(t) > 0$.

3. Составленная на основании теоремы замещения эквивалентная схема цепи при $t = 0+$ приведена на рисунке 3.12г; она позволяет найти начальные значения переменных $u_R(0+) = u_0 - u_{C0}$, $i(0+) = u_R/R = (u_0 - u_{C0})/R$, которые соответствуют полученным решениям.

3.6.3. Свободный режим в RL -цепи

Он наблюдается при коммутации, например в цепи, схема которой приведена на рисунке 3.13а. Свободный процесс происходит за счет начальной энергии L -элемента $W_L(0-) = W_L(0+) = Li_L^2(0+)/2$. Для определенности считаем $i_L(0-) = i_L(0+) = i_{L0} > 0$.

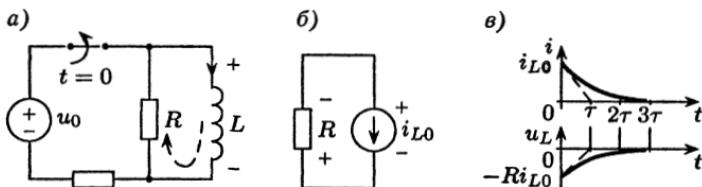


Рис. 3.13

Используя уравнения цепи для $t > 0$: $u_L + u_R = 0$, $u_R = Ri$, $u_L = Li'$, составляем дифференциальное уравнение относительно непрерывной переменной:

$$Li'(t) + Ri(t) = 0.$$

Решение этого однородного уравнения цепи без источников содержит только составляющую $i(t) = i_{cb}(t) = Ae^{p_1 t} = Ae^{-t/\tau}$, где p_1 — корень характеристического полинома $Lp + R = 0$; постоянная времени $\tau = L/R = 1/|p_1|$.

Используя начальные условия $i(0+) = i_L(0+) = i_{L0}$, находим постоянную интегрирования $i(0+) = A = i_{L0}$, откуда решение уравнений цепи $i(t) = i_{L0}e^{-t/\tau} > 0$ при $t > 0$.

Далее находим $u_R(t) = Ri = Ri_{L0}e^{-t/\tau}$, откуда закон изменения напряжения L -элемента

$$u_L(t) = -u_R = -Ri_{L0}e^{-t/\tau} < 0;$$

контроль осуществляем по формуле $u_L = Li'$.

Физическая трактовка:

1. Начальная энергия L -элемента с течением времени необратимо потребляется R -элементом, причем полная энергия будет следующей

$$\begin{aligned} W_{R\Sigma} &= \int_0^{\infty} Ri_{L0}^2 e^{-2Rt/L} dt = \\ &= -0,5Li_{L0}^2 e^{-2Rt/L} \Big|_0^{\infty} = Li_{L0}^2 / 2 = W_L(0+). \end{aligned}$$

2. Мощность L -элемента $p_L(t) = u_L(t)i_L(t) < 0$, мощность R -элемента $p_R(t) = Ri^2(t) = -p_L(t)$, т. е. L -элемент поставляет в цепь запасенную ранее энергию, R -элемент потребляет ее.

3. Составленная на основании теоремы замещения эквивалентная схема цепи при $t = 0+$ приведена на рисунке 3.13б; она позволяет найти начальные значения переменных $u_R(0+) = Li_{L0}$, $u_L(0+) = -Li_{L0}$, которые соответствуют полученным решениям.

4. Полярность напряжения самоиндукции ($u_L < 0$) обратна условно положительной, поскольку ЭДС самоиндукции как бы «стремится поддерживать убывающий ток».

Диаграммы мгновенных значений переменных $i(t)$ и $u_L(t) = Li'(t) = -u_R(t)$ приведены на рисунке 3.13в.

3.6.4. Подключение последовательной RL -цепи к источнику постоянного напряжения

Схема цепи приведена на рисунке 3.14а; считаем $u_0 = \text{const} > 0$, $i_L(0-) = 0$. Дифференциальное уравнение цепи, составленное относительно непрерывной переменной $i(t) = i_L(t)$, является неоднородным:

$$Li'(t) + Ri(t) = u_0.$$

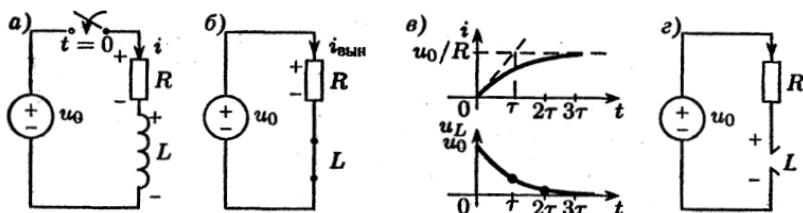


Рис. 3.14

Свободная составляющая как общее решение однородного уравнения $Li'(t) + Ri(t) = 0$ имеет математическую форму, совпадающую с решением уравнений цепи в свободном режиме: $i_{\text{св}}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau}$, где $\tau = L/R$ — постоянная времени.

Вынужденную составляющую как частное решение неоднородного уравнения отыскиваем в математической форме воздействия, т. е. $i_{\text{вын}} = \text{const}$. Подставляя $i_{\text{вын}}$ в неоднородное уравнение цепи, получим

$$Li'_{\text{вын}} + Ri_{\text{вын}} = u_0,$$

откуда с учетом $i'_{\text{вын}} = 0$ находим $i_{\text{вын}} = u_0/R$, а также $u_{L\text{вын}} = Li'_{\text{вын}} = 0$, $u_{R\text{вын}} = Ri_{\text{вын}} = u_0$, что соответствует изображенной на рисунке 3.14б эквивалентной схеме цепи для расчета вынужденного (установившегося) режима при $t \rightarrow \infty$.

Постоянную интегрирования в решении уравнения цепи

$$i(t) = i_{\text{вын}} + i_{\text{св}}(t) = u_0/R + Ae^{-t/\tau}$$

определяем, используя начальное условие: $i(0+) = i_L(0+) = 0 = u_0/R + A$, т. е. решение имеет вид

$$i(t) = \frac{u_0}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right);$$

далее находим $u_R = Ri = u_0(1 - e^{-t/\tau})$, $u_L = u_0 - u_R = u_0e^{-t/\tau} > 0$; контроль осуществляем по формуле $u_L = Li'$.

Временные диаграммы $i(t)$, $u_L(t)$ приведены на рисунке 3.14в.

График $i(t)$ описывается непрерывной функцией, график $u_L(t)$ в момент коммутации при $t = 0$ изменяется скачком, т. е. описывается разрывной функцией.

Физическая трактовка:

1. При $t \rightarrow \infty$ в установившемся режиме постоянных токов и напряжений индуктивный элемент эквивалентен короткозамкнутому участку цепи (КЗ), поскольку постоянный магнитный поток не создает напряжение индукции, т. е. $u_{L\text{вын}} = 0$.

2. Ток и энергия L -элемента не могут измениться скачком, поэтому ток цепи $i(t)$ плавно возрастает по экспоненте от начального значения $i(0) = 0$ к конечному $i(\infty) = i_{\text{вын}} = u_0/R$.

3. Напряжение самоиндукции $u_L(t) > 0$, поскольку ЭДС самоиндукции как бы «препятствует возрастанию тока».

4. Составленная с учетом $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$ эквивалентная схема замещения цепи при $t = 0+$ приведена на рисунке 3.14г; она позволяет найти начальные значения переменных $u_R(0+) = 0$, $u_L(0+) = u_0$, которые соответствуют полученным решениям.

§ 3.7. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ RLC-ЦЕПИ

3.7.1. Уравнения последовательного RLC-контура

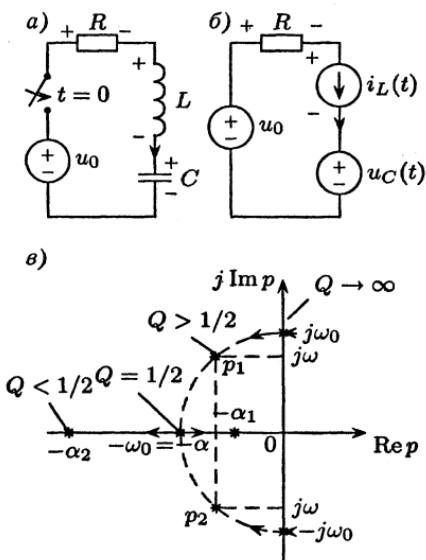


Рис. 3.15

Рассмотрим схему цепи, представленную на рисунке 3.15а при $u_0 = \text{const}$. Считаем независимые начальные условия следующими: $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$, $u_C(0+) = u_C(0-) = u_{C0} > 0$, причем $u_{C0} < u_0$. Решение отыскиваем для тока.

Уравнения состояния для $t > 0$ находим по схеме с вспомогательными источниками рисунка 3.15б. Имеем $i_C = i_L$, $u_L = -Ri_L + u_0 - u_C$, откуда, используя уравнения накопителей $i_C = Cu'_C$, $u_L = Li'_L$, находим

$$u'_C(t) = \frac{1}{C}i_L(t); \quad i'_L(t) = -\frac{1}{L}u_C - \frac{R}{L}i_L + \frac{1}{L}u_0, \quad (3.31)$$

или, записывая уравнения состояния (3.31) в матричной форме,

$$\begin{bmatrix} u'_C \\ i'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [u_0],$$

после чего определяем согласно п. 3.4.3 характеристическое уравнение

$$\det \begin{bmatrix} -p & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} - p \end{bmatrix} = p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (3.32)$$

Этот же результат можно получить непосредственно по интегродифференциальному уравнению цепи рисунка 3.15а, составленному на основании закона напряжений Кирхгофа (ЗНК)

$$Ri(t) + Li'(t) + u_{C0} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = u_0, \quad (3.33)$$

дифференцируя которое, получим однородное уравнение, так как $u'_0 = 0$ при $u_0 = \text{const}$:

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = 0. \quad (3.34)$$

Примечания:

- Характеристический полином, составленный согласно (3.34), соответствует (3.32).
- Из однородного уравнения (3.34) следует, что в установившемся режиме ток в цепи отсутствует, т. е. $i_{\text{вын}} = 0$.
- Из (3.33) следует, что ток $i(t)$ в цепи при $u_{C0} = 0$ будет таким же, как в свободном режиме (т. е. при $u_0 = 0$) при независимом начальном условии u_{C0} , численно равном значению $u_{C0} = -u_0$; это замечание предваряет важный вывод о том, что независимое начальное условие всегда можно для $t > 0$ заменить эквивалентным воздействием (источником постоянного напряжения значения u_{C0} , включаемым последовательно с как бы незаряженным C -элементом, и источником тока значения i_{L0} , включаемым параллельно L -элементу без начального запаса энергии).

Корни характеристического уравнения (3.32)

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad (3.35)$$

где $\alpha = \frac{R}{2L}$ — так называемый коэффициент затухания; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — резонансная частота, или частота свободных (собственных) колебаний контура без потерь.

Используя обозначения (3.35), запишем (3.32) в виде

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0. \quad (3.36)$$

Примечание. В технической литературе встречаются и другие формы записи (3.32), (3.36):

$$p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2 = 0, \quad (3.37)$$

где $\zeta = \alpha/\omega_0$ — коэффициент демпфирования;

$$p^2 + \frac{\omega_0}{Q} p + \omega_0^2 = 0, \quad (3.38)$$

где $Q = 0,5\omega_0/\alpha = \omega_0 L/R$ — добротность RLC -цепи.

3.7.2. Общая характеристика свободных режимов и частот собственных колебаний в цепи

В зависимости от соотношения параметров цепи можно получить различные варианты корней ХП (3.32), (3.37), (3.38):

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \\ &= \omega_0(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) = \omega_0\left(-\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1}\right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

1. *Незатухающий колебательный режим.* Контур без потерь, т. е. $R = 0$, $\alpha = 0$, $\zeta = 0$, $Q \rightarrow \infty$; тогда корни характеристического уравнения — мнимые:

$$p_{1,2} = \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm j\omega_0, \quad (3.40)$$

т. е., согласно (3.22), (3.23), процессы в свободном режиме являются незатухающими колебательными

$$i_{\text{св}}(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} \quad (3.41)$$

Примечания:

- Из (3.41) следует объяснение различных названий ω_0 — частота собственных (свободных) колебаний контура без потерь, частота незатухающих колебаний.
- Режим цепи в этом случае называют незатухающим колебательным режимом.

3. Отсутствие затухания процесса (3.41) объясняется отсутствием активных потерь в цепи, так как $R = 0$.

2. *Колебательный режим.* В контуре потери R относительно невелики, что соответствует соотношениям в (3.39) $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\alpha < \omega_0$, $\zeta < 1$, $Q > 0,5$; тогда корни ХП-комплексные:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega, \quad (3.42)$$

причем величину $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ называют частотой собственных (свободных) колебаний контура с потерями, поскольку, согласно (3.22), (3.23), свободная составляющая имеет вид

$$i_{cb}(t) = A_1 e^{-\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{-\alpha t} \sin \omega t = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}, \quad (3.43)$$

т. е. процессы в цепи являются колебательными затухающими.

Примечания:

- Из (3.43) следует объяснение названия α — коэффициент затухания, поскольку его значение, как и значение постоянной времени $\tau = 1/\alpha$, определяет скорость затухания экспоненты в (3.43), т. е. практическую длительность переходных процессов в цепи $t_{\text{пп}} \cong 3\tau = 3/\alpha$.
- Корни ХП в случае (3.40) определяются частотой собственных колебаний; кроме того, из (3.42) следует, что размерности и α , и $p_{1,2}$ равны размерности частоты ω , поэтому очень часто сами корни ХП по аналогии называют частотами собственных колебаний, или обобщенными собственными частотами цепи, или, сокращенно, собственными частотами.
- Режим цепи в этом случае называют затухающим колебательным режимом, или, сокращенно, колебательным режимом, поскольку из-за относительно небольших потерь процессы затухают медленно, а колебательный процесс обмена энергией между L - и C -элементами выражен достаточно ярко.

3. *Апериодический режим.* Потери относительно велики, если в (3.39) $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\alpha > \omega_0$, $\zeta > 1$, $Q < \frac{1}{2}$, следовательно, собственные частоты — вещественные:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha_1, \\ p_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha_2; \end{aligned} \quad (3.44)$$

Процессы в свободном режиме описываются суммой двух экспонент:

$$i_{cb}(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} = A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2}. \quad (3.45)$$

Примечание. Из (3.45) следует, что решение не содержит периодических (колебательных) составляющих, поэтому режим в цепи называют в этом случае апериодическим.

4. *Критический режим.* Случай кратных корней имеет место при $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\alpha = \omega_0$, $\zeta = 1$, $Q = \frac{1}{2}$, когда собственные частоты являются одинаковыми вещественными:

$$p_{1,2} = -\alpha, \quad (3.46)$$

как известно, при этом

$$i_{\text{cb}}(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 t e^{-\alpha t}. \quad (3.47)$$

Примечание. Из (3.47) следует, что решение при этом (т. е. в случае критического режима) также не содержит периодических составляющих.

Траектория положения собственных частот (3.39) на комплексной плоскости при изменении сопротивления потерь R и неизменной резонансной частоте $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ показана на рисунке 3.15в: корни ХП при увеличении R от значения $R = 0$ вначале «двигаются» в левой полуплоскости по полуокружности радиуса ω_0 , затем становятся кратными согласно (3.46), и далее — отрицательными вещественными согласно (3.44), однако произведение их длин (модулей) в соответствии с (3.36) равно ω_0^2 .

3.7.3. Расчет вынужденной составляющей и начальных условий

Из уравнений (3.31) или по эквивалентной схеме замещения цепи (для $t \rightarrow \infty$) нетрудно установить $i_{\text{вын}} = 0$, что также следует из (3.34).

Независимые начальные условия $i(0+) = i_L(0+) = 0$, $u_C(0+) = u_{C0}$ указаны в исходных данных.

Начальное значение производной тока находим из уравнений состояния (3.31) при $t = 0+$

$$\begin{aligned} i'(0+) &= i'_L(0+) = \frac{u_L(0+)}{L} = \\ &= -\frac{u_C(0+)}{L} - \frac{R i_L(0+)}{L} + \frac{u_0}{L} = \frac{u_0 - u_{C0}}{L}, \end{aligned}$$

причем значение $u_L(0+) = u_0 - u_{C0}$ можно проконтролировать по эквивалентной схеме для $t = 0+$.

3.7.4. Подключение идеальной LC -цепи к источнику постоянного напряжения

Используя (3.41) и данные 3.7.3, записываем решение:

$$i(t) = i_{\text{св}}(t) = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t. \quad (3.48)$$

Начальное условие $i(0+) = 0 = A_1$. Дифференцируем с учетом этого (3.48):

$$i'(t) = \omega_0 A_2 \cos \omega_0 t.$$

Учитывая начальное значение производной, полученное в п. 3.7.3, находим:

$$i'(0+) = (u_0 - u_{C0})/L = \omega_0 A_2,$$

откуда решение

$$i(t) = \frac{u_0 - u_{C0}}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t. \quad (3.49)$$

В случае нулевых независимых начальных условий ($u_{C0} = 0$) получим (с учетом $R = 0$ в идеальной LC -цепи):

$$i = \frac{u_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t; \quad u_C = u_0 - u_L = u_0 - L i' = u_0 - u_0 \cos \omega_0 t \geq 0.$$

Качественные графики этих переменных приведены на рисунке 3.16а, где $T_0 = 2\pi/\omega_0$ — период незатухающих колебаний.

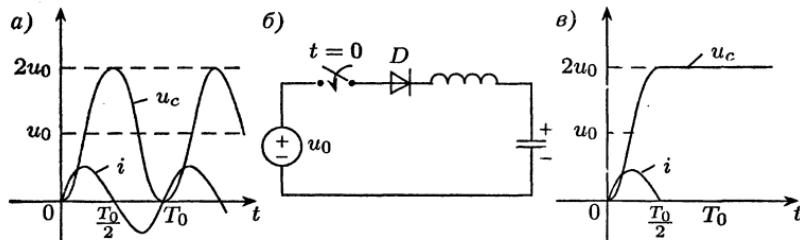


Рис. 3.16

Примечание. При $t = T_0/2$ напряжение $u_C = 2u_0$, что используется на практике в схеме удвоения напряжения, показанной на рисунке 3.16б, где D — диод, т. е. элемент, который в идеале эквивалентен КЗ при $i > 0$ и эквивалентен ХХ при $i < 0$; диаграммы $u_C(t)$, $i(t)$ такой идеальной цепи приведены на рисунке 3.16в.

3.7.5. Свободный режим в идеальном LC -контуре

Схема цепи изображена на рисунке 3.17а в предположении, как и раньше, $u_C(0+) = u_{C0} > 0$, $i_L(0+) = 0$. Результаты ее расчета соответствуют (3.49) при $u_0 = 0$:

$$i(t) = \frac{-u_{C0}}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t. \quad (3.50)$$

Диаграмма мгновенных значений тока приведена на рисунке 3.17б.

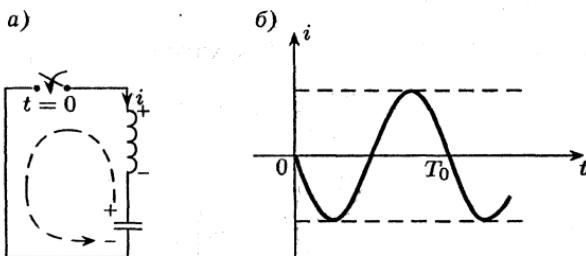


Рис. 3.17

Физическая трактовка:

1. В начале процесса направление движения положительных зарядов при разряде C -элемента указано на рисунке 3.17а пунктиром, что соответствует $i(t) < 0$ на графике рисунка 3.17б при $0 < t < T_0/2$;

2. Процесс незатухающий колебательный, поскольку нет потерь ($R = 0$): накопители обмениваются энергией, так что их суммарная энергия в идеальной LC -цепи неизменна и равна начальной энергии C -элемента $W_C(0+) = C u_{C0}^2 / 2$. Действительно, используя (3.50), находим

$$u_C = -u_L = -L i' = u_{C0} \cos \omega_0 t,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} W_C(t) + W_L(t) &= \frac{C u_{C0}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t + \\ &+ \frac{L u_{C0}^2}{2 \omega_0^2 L^2} \sin^2 \omega_0 t = \frac{C u_{C0}^2}{2} \end{aligned}$$

с учетом $\omega_0^2 = 1/LC$.

3.7.6. Подключение последовательной RLC-цепи к источнику (случай комплексных собственных частот)

Используя схему рисунка 3.15а, (3.43) и данные п. 3.7.3, можем записать:

$$i(t) = i_{\text{cb}}(t) = A_1 e^{-\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad (3.51)$$

что с учетом $i(0+) = 0$ дает $A_1 = 0$. В этом случае, дифференцируя (3.51), получим

$$i'(t) = -\alpha A_2 e^{-\alpha t} \sin \omega t + \omega A_2 e^{-\alpha t} \cos \omega t,$$

откуда при $i'(0+) = (u_0 - u_{C0})/L$ находим A_2 , т. е. решение

$$i(t) = \frac{u_0 - u_{C0}}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t. \quad (3.52)$$

График выражения (3.52), соответствующего затухающему колебательному режиму в цепи, приведен для случая $T = \tau$ на рисунке 3.18, где $I_0 = (u_0 - u_{C0})/\omega L$; пунктиром также показаны экспоненты $\pm I_0 e^{-\alpha t} = \pm I_0 e^{-t/\tau}$, которых касается график $i(t)$ в моменты экстремальных значений синусоиды $\sin \omega t$, т. е. при $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4}, \dots$.

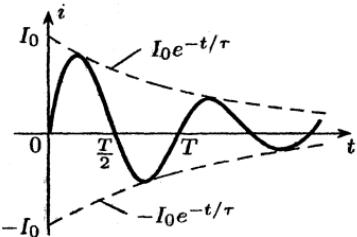


Рис. 3.18

Примечание. Для характеристики затухания процесса на рисунке 3.18 используют следующие величины:

1. Коэффициент затухания α .
2. Постоянную времени $\tau = 1/\alpha$.
3. Декремент затухания θ , определяемый отношением значений функции через период:

$$\theta = \frac{i(t)}{i(t+T)} = \frac{I_0 e^{-\alpha t} \sin \omega t}{I_0 e^{-\alpha(t+T)} \sin \omega(t+T)} = e^{\alpha T}.$$

4. Логарифмический декремент затухания $\ln \theta = \alpha T$

По снятому экспериментально графику процесса, типа отображенного на рисунке 3.18, можно вначале определить период T и декремент затухания θ , а затем рассчитать $\ln \theta$, α , τ , $p_{1,2}$, ω_0 , Q .

3.7.7. Свободный режим в RLC-контуре (случай комплексных корней ХП)

Схема цепи соответствует показанной на рисунке 3.15а при отсутствии воздействия, а расчет — приведенному в п. 3.7.6 при $u_0 = 0$:

$$i(t) = -\frac{u_{C0}}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

График процесса (для случая $T = \tau$) изображен на рисунке 3.19а, который аналогичен рисунку 3.18в с учетом инверсии знака.

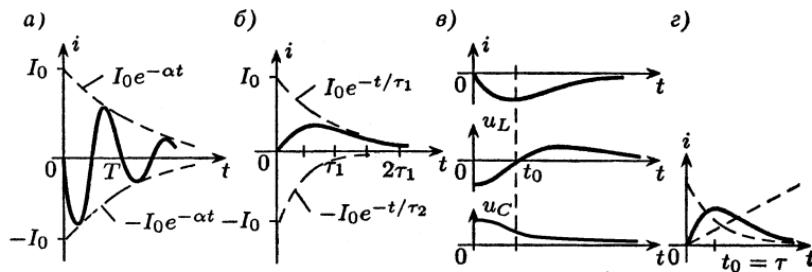


Рис. 3.19

Примечание. В интервале $0 < t < T/2$ ток $i(t) < 0$, что соответствует фактическому направлению движения положительных зарядов при разряде C -элемента в начале процесса.

3.7.8. Подключение последовательного RLC-контура к источнику (случай простых вещественных корней ХП)

Схема приведена на рисунке 3.15а; необходимые для получения решения данные указаны в (3.44), (3.45) и в п. 3.7.3:

$$\begin{cases} i(t) = i_{cb}(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}, \\ i'(t) = -\alpha_1 A_1 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 A_2 e^{-\alpha_2 t}. \end{cases}$$

Учитывая начальные значения

$$i(0+) = 0, \quad i'(0+) = \frac{u_0 - u_{C0}}{L},$$

находим

$$A_1 = -A_2 = (u_0 - u_{C0}) / [L(\alpha_2 - \alpha_1)],$$

причем, согласно (3.44), (3.45) и рисунку 3.15 δ , следует учитывать, что $\alpha_2 > \alpha_1$, $\tau_1 > \tau_2$. Итак, решение оказывается:

$$i(t) = \frac{u_0 - u_{C0}}{L(\alpha_2 - \alpha_1)} \left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2} \right). \quad (3.53)$$

График процесса, описываемого разностью экспонент (3.53), изображен на рисунке 3.19 b для случая $\tau_1 = 2\tau_2$ (использовано обозначение $I_0 = A_1 = -A_2$; пунктиром показаны отдельные составляющие решения).

Примечание. График, приведенный на рисунке 3.19 b , действительно имеет апериодический характер.

3.7.9. Свободный режим в последовательной RLC-цепи (случай простых вещественных корней ХП)

Решение уравнений цепи в этом случае получаем из (3.53) при $u_0 = 0$:

$$i(t) = \frac{-u_{C0}}{L(\alpha_2 - \alpha_1)} \left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2} \right) < 0. \quad (3.54)$$

График апериодического свободного процесса (3.54), показанный на рисунке 3.19 δ , аналогичен рисунку 3.19 b с учетом инверсии знака. На рисунке 3.19 δ изображены также временные диаграммы напряжений $u_L = Li'$, $u_C = u_{C0} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt$, причем диаграмма u_L получена качественным дифференцированием графика $i(t)$, а график u_C также построен качественно с учетом $u_C(0+) = u_{C0}$, $u_C(\infty) \rightarrow 0$, $\int_0^t i dt < 0$; кроме того, из п. 3.7.3 следует, что в данной цепи $u_L(0+) = -u_{C0} < 0$.

Физическая трактовка:

1. Ток $i(t) < 0$, что соответствует фактическому направлению движения положительных зарядов при разряде C -элемента.

2. Из рассмотрения рисунка 3.19 δ следует, что мощность элементов $p(t) = u(t)i(t)$ в интервале $0 < t < t_0$ положительна у R - и L -элементов, но $p_C < 0$, т. е. C -элемент поставляет (отдает запасенную) энергию в цепь, R -элемент необратимо потребляет энергию, L -элемент запасает энергию, т. е. тоже является потребителем; в интервале $t > t_0$ мощность $p_L = u_L i < 0$, $p_C = u_C i < 0$, $p_R = R i^2 > 0$, т. е. оба накопителя питают энергией R -элемент.

**3.7.10. Подключение последовательной RLC -цепи
к источнику
(случай кратных собственных частот)**

Схема цепи приведена на рисунке 3.15 a , данные, необходимые для отыскания решения, указаны в (3.46), (3.47), а также в п. 3.7.3:

$$\begin{cases} i(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 t e^{-\alpha t}, \\ i'(t) = -\alpha A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t} - \alpha A_2 t e^{-\alpha t}. \end{cases}$$

С учетом $i(0+) = 0$, $i'(0+) = (u_0 - u_{C0})/L$ получим $A_1 = 0$, $A_2 = (u_0 - u_{C0})/L$, т. е.

$$i(t) = \frac{u_0 - u_{C0}}{L} t e^{-\alpha t}. \quad (3.55)$$

График выражения (3.55) построен на рисунке 3.19 g приближенно — качественным умножением линейной функции и экспоненты (см. пунктир).

Примечания:

1. График напоминает данные рисунка 3.19 b ; колебательных составляющих в процессе нет, т. е. в цепи, действительно — критический режим.
2. Из условия $i'(t_0) = 0$ следует, что в данном случае момент экстремального значения тока $t_0 = 1/\alpha = \tau$ определяется постоянной времени цепи.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СИГНАЛОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

§ 4.1. ЕДИНИЧНАЯ СТУПЕНЧАТАЯ ФУНКЦИЯ

4.1.1. Определение

Единичной ступенчатой функцией $\delta_1(t - t_0) = \mathbf{1}(t - t_0)$ называется обобщенная функция, равная 0 при $t < t_0$ (т. е. при отрицательном аргументе) и равная 1 при $t > t_0$ (т. е. при положительном аргументе).

Существуют различные варианты формирования единичной ступенчатой функции: будем рассматривать ее как предел последовательности указанных слева на рисунке 4.1 кусочно-линейных функций $\varphi(t)$, изменяющихся от 0 до 1 в окрестности t_0 , когда эта окрестность Δt сжимается к 0.

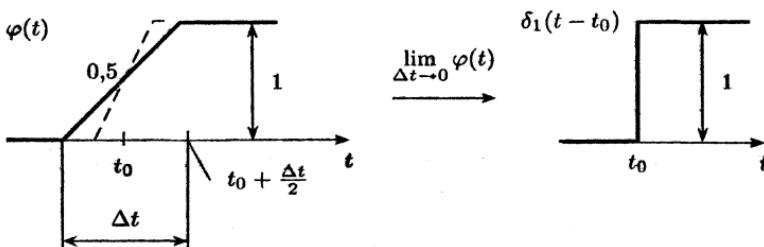


Рис. 4.1

На основании рисунка 4.1 можем записать для смещенной и несмещенной единичных ступенчатых функций соответственно:

$$\delta_1(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 0,5 & t = t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}, \quad \delta_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0,5 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}.$$

Среди других видов последовательностей $\varphi(t)$, формирующих $\delta_1(t)$, укажем две:

$$\varphi(t) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\Delta t} \Big|_{\Delta t \rightarrow 0}, \quad (4.1)$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ (1 - e^{-t/\Delta t}) \Big|_{\Delta t \rightarrow 0}, & t > 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

при этом достоинство функций (4.1) в том, что они являются абсолютно гладкими, допускающими многократное дифференцирование, а недостаток функций (4.2) в том, что они являются односторонними в сравнении с изображенными на рисунке 4.1.

4.1.2. Применение единичной ступенчатой функции

Укажем следующие случаи использования функции $\delta_1(t)$.

1. Приближенное представление воздействия произвольной формы суммой элементарных воздействий стандартной ступенчатой формы (рис. 4.2a).

2. Описание коммутации без использования идеального ключа (так, в «остальной цепи», показанной на рис. 4.2б, в, процессы в обоих случаях одинаковы).

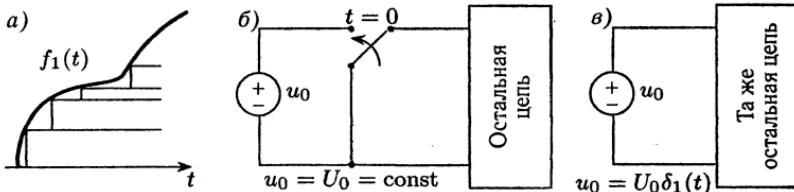


Рис. 4.2

3. Описание односторонних функций и функций с разрывами первого рода.

ПРИМЕР 1. Прямоугольный импульс $u(t)$, изображенный на рисунке 4.3a, может быть в интервале $-\infty < t < \infty$ описан суммой двух ступенчатых функций, представленных на рисунке 4.3a внизу, т. е.

$$u(t) = I + II = 10\delta_1(t) - 10\delta_1(t - 2).$$

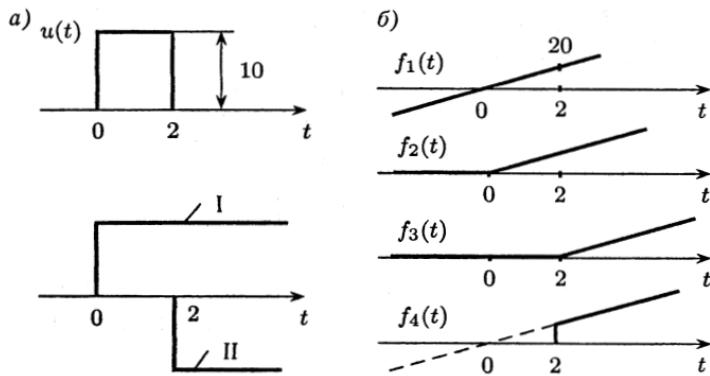


Рис. 4.3

На рисунке 4.3б изображены графики функций $f_1(t) = 10t$, $f_2(t) = 10t\delta_1(t)$, $f_3(t) = 10(t-2)\delta_1(t-2)$, $f_4 = 10t\delta_1(t-2)$, а функция $f(t) = |10t|$ может быть записана в виде $f(t) = -10t\delta_1(-t) + 10t\delta_1(t)$, если учесть, что единичная ступенчатая функция равна 1 только при положительном аргументе.

Примечание. Функция $\delta_1(t - t_0)$ является обобщенной, поскольку с ее помощью запись разрывных и односторонних функций на различных интервалах заменяется обобщенной записью для любого момента времени $-\infty < t < \infty$.

§ 4.2. ЕДИНИЧНАЯ ИМПУЛЬСНАЯ ФУНКЦИЯ (ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ)

4.2.1. Определение

Единичной импульсной функцией (или дельта-функцией) $\delta(t - t_0)$ называется обобщенная функция единичной площади, равная 0 при $t \neq t_0$ и стремящаяся к бесконечности при $t = t_0$.

Эту функцию удобно трактовать как предел последовательности производных $\varphi'(t)$ от последовательности функции $\varphi(t)$, с помощью которых была сформирована $\delta_1(t - t_0)$, что отражается на рисунке 4.4. Из рассмотрения левой части рисунка 4.4 следует, что площадь под графиком $\varphi'(t)$ остается равной 1, поскольку высота прямоугольника, описывающего $\varphi'(t)$, равна $1/\Delta t \rightarrow \infty$, а основание равно $\Delta t \rightarrow 0$.

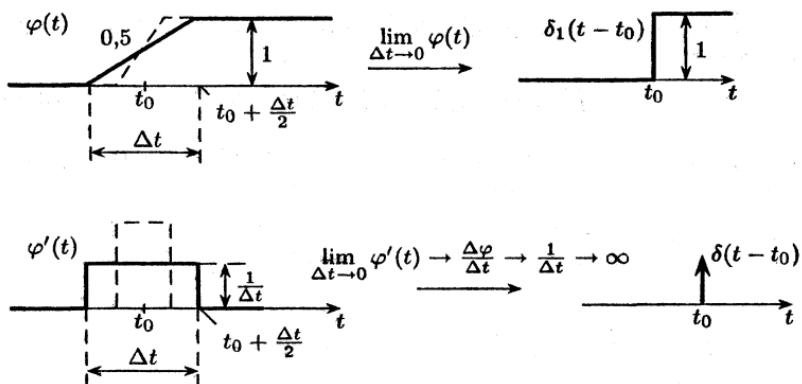


Рис. 4.4

В центре рисунка 4.4 дополнительно приведено символическое объяснение бесконечной высоты дельта-функции, которая обозначается стрелкой, «устремленной в бесконечность», как указано на рисунке внизу справа.

На основании приведенного на рисунке 4.4 способа формирования дельта-функции можем записать для смещенной и несмещенной дельта-функций соответственно:

$$\delta(t - t_0) = \frac{d\delta_1(t - t_0)}{dt} = \begin{cases} \infty, & t = t_0, \\ 0, & t \neq t_0, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\delta(t) = \delta'_1(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

4.2.2. Свойства дельта-функций

Рассмотрим следующие широко используемые свойства.

1. Интегралы от дельта-функций на основании (4.3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1, \quad (4.4)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t - t_0) dt = \delta_1(t - t_0), \quad (4.5)$$

причем интеграл (4.4) определяет площадь единичной импульсной функции.

2. Свойство выборки, или фильтрующее свойство дельта-функции

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \quad (4.6)$$

следует из того, что произведение слева в (4.6) равно 0 при любых t , кроме $t = t_0$, когда $f(t) = f(t_0)$, т. е. из всех значений $f(t)$ выбирается (фильтруется) лишь одно значение $f(t_0)$.

Следствие для интегралов с учетом (4.4) — (4.6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t - t_0) dt = f(t_0),$$

$$\int_{-\infty}^t f(t)\delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^t f(t_0)\delta(t - t_0) dt = f(t_0)\delta_1(t - t_0).$$

3. Симметрия (четность) несмешенной единичной импульсной функции $\delta(t) = \delta(-t)$ следует из рассмотрения рисунка 4.4, где при $t_0 = 0$ производная $\varphi'(t)$ является четной функцией $\varphi'(t) = \varphi'(-t)$.

4. Использование дельта-функции для описания «коротких» импульсов. Так, импульс прямоугольной формы $f(t)$, имеющий высоту A , длительность Δt , действующий в момент t_0 (см. рис. 4.5), по виду аналогичен импульсу $\varphi'(t)$, из которого сформирована дельта-функция (см. рис. 4.4), т. е. $\varphi'(t) \approx \delta(t - t_0)$ при $\Delta t \rightarrow 0$. В связи с этим приближенное соотношение $f(t)/\delta(t - t_0) \approx A/(1/\Delta t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ позволяет приближенно описать «короткий» импульс дельта-функцией:

$$f(t) \approx A\Delta t\delta(t - t_0), \quad (4.7)$$

причем площадь импульса $A\Delta t$ рассматривается как коэффициент при дельта-функции.

Примечания:

1. Импульс (рис. 4.5) должен быть «коротким» в сравнении с длительностью переходных процессов.
2. Импульс не обязательно должен иметь прямоугольную форму; важно, чтобы он был «коротким».

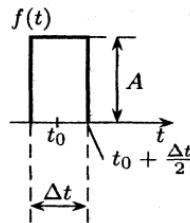


Рис. 4.5

4.2.3. Применение дельта-функций

Здесь рассмотрим лишь следующие приложения.

1. Приближенное описание воздействия произвольной формы суммой элементарных воздействий стандартной формы вида «коротких» прямоугольных импульсов, т. е. с помощью суммы дельта-функций (рис. 4.6а).

2. Введение понятия о производной от функции, имеющей разрывы первого рода. Пример такой функции и производной от нее дан на рисунке 4.6б, где разрывная функция $f(t) = at - b\delta_1(t - t_0)$ задана в диапазоне $-\infty < t < \infty$, а производная от такой функции $f'(t) = a - b\delta_1(t - t_0)$.

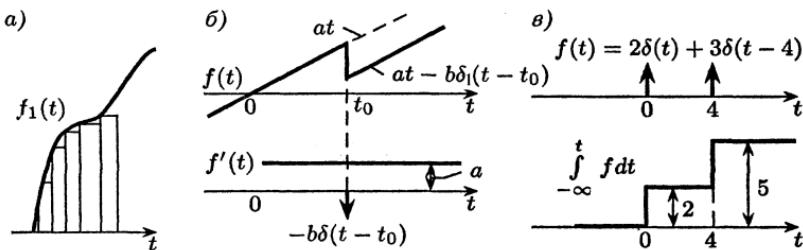


Рис. 4.6

ВЫВОД: на функции с разрывом первого рода (когда существуют пределы слева и справа от точки разрыва) обобщается понятие производной. Производная в точке разрыва (скачка) функции равна дельта-функции, умноженной на коэффициент, равный величине скачка (что аналогично свойствам классических непрерывных функций: если функция изменилась в несколько раз то производная изменилась во столько же раз). Указанный коэффициент определяет площадь дельта-функции, поэтому при обратной операции (интегрировании такой дельта-функции) получим скачок, величина которого равна площади дельта-функции (пример данной операции приведен на рисунке 4.6в). Если же исходная функция непрерывна (не имеет скачков), то при ее дифференцировании дельта-функция появиться не может, т. е. неопределенность

$$0 \cdot \delta(t) = 0. \quad (4.8)$$

3. Описание особых случаев коммутации в идеализированных цепях.

4.2.4. Особые случаи коммутации

К ним относятся:

1. Особые случаи коммутации по условию задачи.

a. Параллельная RC -цепь подключается к источнику постоянного напряжения (см. рис. 4.7a). Очевидно, здесь $u_C(0-) = 0$, $u_C(0+) = u_0$, т. е. не выполняется принцип непрерывности напряжения C -элемента, которое при $t = 0$ изменяется скачком за счет бесконечного (в идеале) тока заряда. Действительно, как показано на рисунке 4.7a, $u_C(t) = u_0\delta_1(t)$, где $u_0 = \text{const}$, тогда $i_C = Cu'_C = Cu_0\delta(t)$.

b. Заряженный C -элемент замыкается накоротко (см. рис. 4.7б) и, следовательно, мгновенно полностью разряжается за счет протекания бесконечного тока в этой идеализированной цепи, т. е. $u_C(0-) = u_{C0} \neq u_C(0+) = 0$.

v. Последовательная RL -цепь отключается от источника постоянного напряжения (см. рис. 4.7в), ток в индуктивности мгновенно уменьшается до нуля: $i_L(0-) = i_{L0} \neq i_{L0+} = 0$, т. е. $i_L(t) = i_{L0} - i_{L0}\delta_1(t) = i_{L0}\delta_1(-t)$, тогда $u_L(t) = Li'_L(t) = -Li_{L0}\delta(t) \rightarrow -\infty$ при $t = 0$. Поскольку $u_0 = \text{const}$ и $u_R = Rii_L$ тоже ограничено, то по ЗНК бесконечно большое напряжение при $t=0$ будет в этой идеализированной цепи на ключе (в этом причина

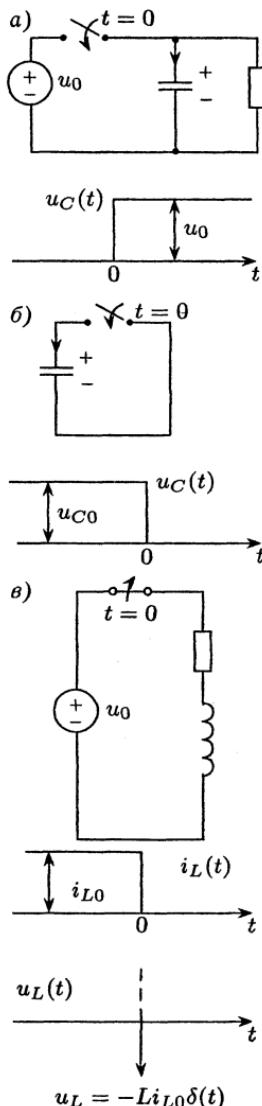


Рис. 4.7

преждевременного выхода из строя выключателей многих реальных электротехнических устройств, так как их цепь питания аналогична показанной на рисунке 4.7в).

2. Особые случаи коммутации с изменением скачком значений индуктивностей и емкостей в момент коммутации.

- a. Схема цепи изображена на рисунке 4.8а. Очевидно, $u_{C1}(0-) = u_0 = \text{const} \neq u_{C2}(0-) = 0$, но $u_{C1}(0+) = u_{C2}(0+)$ т. е. в момент коммутации происходит мгновенное выравнивание напряжений C -элементов за счет протекания бесконечно большого тока перезаряда; принцип непрерывности напряжения C -элементов нарушается; емкость цепи в момент коммутации изменяется, поскольку $C(0-) = C_1 \neq C(0+) = C_1 + C_2$.

- б. Схема цепи приведена на рисунке 4.8б; при $t = 0$ происходит мгновенное выравнивание токов L -элементов, т. е. не выполняется принцип непрерывности тока $i_L(0-) = i_L(0+)$; индуктивность цепи при $t = 0$ изменяется: $L(0-) = L_1 \neq L(0+) = L_1 + L_2$.

3. Особые случаи коммутации с изменением порядка цепи в момент коммутации.

- а. Схема цепи приведена на рисунке 4.8в. В момент размыкания ключа нарушается принцип непрерывности тока L -элемента, поскольку $i_{L1}(0+) + i_{L2}(0+) = i_0 \neq i_{L1}(0-) + i_{L2}(0-) < i_0$; в

результате $|u_L| = |L\dot{i}_L'| \rightarrow \infty$ при $t = 0$. Указанная цепь при $t < 0$ имела второй порядок, а при $t > 0$ — первый, так как в цепи свободного режима при $t > 0$

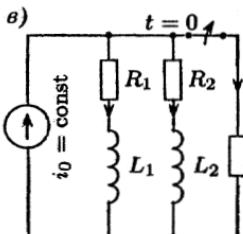
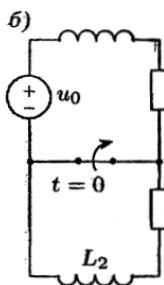
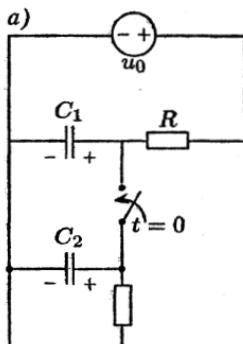


Рис. 4.8

L-элементы соединены последовательно и могут быть заменены эквивалентной индуктивностью.

Примечание. При решении задач в случаях 2, 3 можно использовать обобщенные законы коммутации:

$$\sum q_{Ck}(0-) = \sum q_{Ck}(0+), \quad \sum \Psi_{Lk}(0-) = \sum \Psi_{Lk}(0+),$$

при этом правило знаков при вычислении сумм в первом уравнении соответствует правилу знаков закона напряжений Кирхгофа (ЗНК), а во втором — закона токов Кирхгофа (ЗТК).

Вывод: таким образом, дельта-функция — не только математическая абстракция, с помощью которой обобщается понятие производной на функции с разрывами первого рода. Кроме того, дельта-функция необходима при описании сверхтоков и сверхнапряжений, имеющих место в особых случаях коммутации в идеальных цепях.

§ 4.3. ПЕРЕХОДНАЯ И ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПИ

4.3.1. Переходная характеристика

Переходная характеристика $h_1(t)$ численно равна реакции цепи при нулевых независимых начальных условиях на единственное в цепи воздействие вида единичной ступенчатой функции $f_1(t) = F_{10}\delta_1(t)$, где $F_{10} = 1$ В или 1 А — коэффициент, выравнивающий размерность.

Примечание. Единичная ступенчатая функция $\delta_1(t)$ безразмерна, единичная импульсная функция $\delta(t) = \delta'_1(t)$ имеет размерность 1/с.

По принципу пропорциональности при указанном воздействии $f_1 = F_{10}\delta_1(t)$ реакция будет равна $f_2(t) = F_{10}h_1(t)$, откуда размерность переходной характеристики $[h_1] = [f_2]/[F_{10}] = [f_2]/[f_1]$.

Способ отыскания переходной характеристики $h_1(t)$ вытекает из ее определения: необходимо цепь при нулевых независимых начальных условиях как бы подключить к источнику единичного постоянного уровня и рассчитать переходный процесс.

По условию физической осуществимости (следствие не может возникнуть раньше причины, а реакция — раньше воздействия)

переходную характеристику можно записать следующим образом для $-\infty < t < \infty$

$$h_1(t) = h_1^*(t)\delta_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ h_1^*(t) & t > 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

где $h_1^*(t)$ — аналитическое продолжение переходной характеристики в область $t < 0$, т. е. $h_1^*(t)$ — обычная непрерывная функция, у которой

$$h_1^*(t-) = h_1^*(t+), \quad h_1^*(0-) = h_1^*(0) = h_1^*(0+). \quad (4.10)$$

4.3.2. Импульсная характеристика

Импульсная характеристика $h(t)$ численно равна реакции цепи при нулевых независимых начальных условиях на единственное в цепи воздействие вида единичной импульсной функции $f_1(t) = F_{10}\delta(t)$, где $F_{10} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$ или $1 \text{ А} \cdot \text{с}$ — коэффициент, выравнивающий размерность.

По принципу пропорциональности реакция в этом случае $f_2(t) = F_{10}h(t)$, откуда размерность импульсной характеристики $[h] = [f_2]/[F_{10}] = [f_2]/([f_1][t])$.

По условию физической реализуемости

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \neq 0, & t > 0. \end{cases}$$

Способ отыскания импульсной характеристики вытекает из принципа дифференцируемости: так как в интервале $-\infty < t < \infty$ стандартные воздействия связаны соотношениями (4.3), т. е. $\delta(t) = \delta'_1(t)$, то и реакции связаны аналогично:

$$h(t) = h'_1(t), \quad (4.11)$$

т. е. импульсная характеристика является производной от переходной характеристики.

Раскроем детально (4.11), использовав (4.9) и (4.3):

$$h(t) = \frac{d}{dt} [h_1^*(t)\delta_1(t)] = \frac{dh_1^*(t)}{dt} \delta_1(t) + h_1^*(t)\delta'(t),$$

при этом второе слагаемое на основании (4.6) и (4.10) можно привести к виду $h_1^*(0)\delta(t) = h_1(0+)\delta(t)$, т. е.

$$h(t) = \frac{dh_1^*(t)}{dt} \delta_1(t) + h_1(0+)\delta(t). \quad (4.12)$$

Примечания:

- Если в основную формулу (4.11) подставлять переходную характеристику в форме (4.10), то запись в виде (4.12) будет получена непосредственно в процессе численного расчета при учете свойства выборки (4.6).
- Второе слагаемое в (4.12) отражает то, что $h_1(t)$ при $t = 0$ может измениться скачком от значения $h_1(0-) = 0$ до $h_1(0+) \neq 0$, следовательно, при дифференцировании $h_1(t)$ появляется дельта-функция с коэффициентом $h_1(0+)$.
- Если $h_1(t)$ — непрерывная функция (не имеющая скачка при $t=0$), то последнее слагаемое в (4.12) должно отсутствовать.

§ 4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

4.4.1. Интеграл свертки (интеграл наложения, выраженный через импульсную характеристику цепи)

Для простоты считаем воздействие $f_1(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Необходимо найти реакцию $f_2(t)$ при известной импульсной характеристике цепи $h(t)$.

Воздействие приближенно заменяется суммой «коротких прямоугольных» импульсов, как изображено на рисунке 4.9, где $f_1(\tau)$ — высота элементарного импульса, действующего в момент τ , $\Delta\tau$ — длительность импульса.

На основании (4.7) указанный «короткий» импульс прямоугольной формы можно описать дельта-функцией с коэффициентом, равным площади импульса, $f_1(\tau)\Delta\tau\delta(t-\tau)$. Такой импульс к моменту t даст элементарную реакцию $f_1(\tau)\Delta\tau h(t-\tau)$, причем величина $f_1(\tau)\Delta\tau$ учитывается как коэффициент (по свойству пропорциональности).

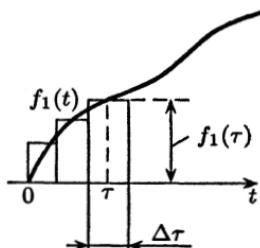


Рис. 4.9

Тогда по принципу наложения реакция от всех импульсов будет приближенно

$$f_2(t) \cong \sum f_1(\tau) \Delta\tau h(t - \tau),$$

причем суммирование ведется по всем $\Delta\tau$ от 0 до t .

Считая длительность импульсов бесконечно малой ($\Delta\tau \rightarrow d\tau$), получим интеграл свертки, т. е. интеграл наложения, выраженный через импульсную характеристику цепи:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (4.13)$$

Примечания:

1. Заменой переменных можно получить вторую форму интеграла свертки $f_2(t) = \int_0^t f_1(t - \tau) h(\tau) d\tau$.
2. В (4.13) рассматривается интервал $t > 0$, поэтому под интегралом все δ -функции равны 1.
3. Интегрирование в (4.13) ведется по τ , т. е. t под интегралом рассматривается как параметр.
4. Если воздействие приложено при $t < 0$, нижний предел в (4.13) можно расширить до $t = -\infty$, учитывая при этом, однако, под интегралом все δ -функции.
5. Трудности взятия интеграла (4.13) возникают, если импульсная характеристика содержит дельта-функцию (в случае $h_1(0+) \neq 0$)

$$h(t) = \frac{dh^*(t)}{dt} \delta_1(t) + h_1(0+) \delta(t) = h_0(t) + h_1(0+) \delta(t), \quad (4.14)$$

где $h_0(t)$ — часть импульсной характеристики, не содержащая дельта-функцию.

Выведем расчетную формулу для указанного случая, подставив (4.14) в (4.13):

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) h_0(t - \tau) d\tau + \int_0^t f_1(\tau) h_1(0+) \delta(t - \tau) d\tau; \quad (4.15)$$

с учетом свойства выборки (4.6) второе слагаемое можно преобразовать к виду

$$\int_0^t f_1(t) h_1(0+) \delta(t - \tau) d\tau = f_1(t) h_1(0+) \int_0^t \delta(t - \tau) d\tau = f_1(t) h_1(0+),$$

поскольку переменная t под интегралом является параметром.

В результате расчетная формула интеграла свертки:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) h_0(t - \tau) d\tau + f_1(t) h_1(0+). \quad (4.16)$$

Интеграл от дельта-функции согласно (4.4), (4.5), равен 1, если дельта-функция находится внутри интервала интегрирования, что в (4.15) неочевидно. Поэтому подтверждим справедливость (4.16) примером процессов в простейшей R -цепи, изображенной на рисунке 4.10, где реакция $f_2(t) = u_{R2}$ причем $R_1 = R_2$. В такой цепи очевидно следующее:

$h_1(t) = 0,5\delta_1(t)$; $h(t) = 0,5\delta(t)$; $f_2(t) = 0,5f_1(t)$. Сравнивая последние два соотношения с (4.13), (4.16), заключаем, что в цепи $h_0(t) = 0$, $h_1(0+) = 0,5$, т. е. формула (4.16) правомерна.

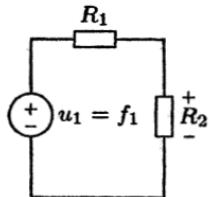


Рис. 4.10

4.4.2. Интеграл Диамеля (интеграл наложения, выраженный через переходную характеристику цепи)

Пусть, воздействие $f_1(t) \equiv 0$ при $t < 0$, а при $t = 0$ изменяется скачком. Данна переходная характеристика цепи $h_1(t)$. Необходимо найти реакцию $f_2(t)$.

Воздействие приближенно заменяем суммой ступенчатых функций, как показано на рисунке 4.11. Первое воздействие ступенчатой формы $f_1(0+)\delta_1(t)$ даст к моменту t реакцию $f_1(0+)h_1(t)$. Последующие элементарные воздействия, действующие в момент τ и имеющие малую высоту $\Delta f_1(\tau) \cong f'_1(\tau)\Delta\tau$ (последнее выражение вытекает из определения производной как предела отношения приращения функции $\Delta f_1(\tau)$ к приращению аргумента $\Delta\tau$), можно записать в виде $\Delta f_1(\tau)\delta_1(t-\tau) \cong f'_1(\tau)\Delta\tau\delta_1(t-\tau)$, причем $f'_1(\tau)\Delta\tau$ рассматривается как коэффициент при единичной ступенчатой функции. Тогда элементарная реакция к моменту t

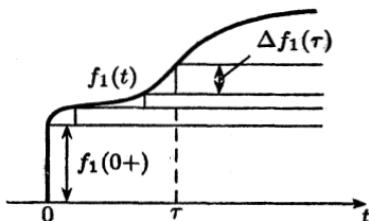


Рис. 4.11

будет $f'_1(\tau)\Delta\tau h_1(t - \tau)$, причем величина $f'_1(\tau)\Delta\tau$ учитывается по принципу пропорциональности как коэффициент.

По методу наложения находим приближенно реакцию

$$f_2(t) \cong f_1(0+)h_1(t) + \sum f'_1(\tau)\Delta\tau h_1(t - \tau),$$

причем суммирование ведется по всем $\Delta\tau$ от 0 до t .

Считая интервал между элементарными ступенчатыми воздействиями бесконечно малым ($\Delta\tau \rightarrow dt$), получим интеграл Диоамеля:

$$f_2(t) = f_1(0+)h_1(t) + \int_0^t f'_1(\tau)h_1(t - \tau) d\tau. \quad (4.17)$$

Примечания:

1. Заменой переменных и интегрированием (4.17) по частям можно получить еще 3 формы интеграла Диоамеля, одна из которых фактически совпадает с расчетной формулой интеграла свертки (4.16).
2. Взятие интеграла (4.17) усложняется, если воздействие изменяется скачком, например на $\Delta f_1(t_0)$ в момент t_0 , однако из вышеприведенного доказательства следует, что в этом случае реакция должна содержать слагаемое $\Delta f_1(t_0)h_1(t - t_0)$, а дифференцировать в (4.17) нужно только непрерывную часть $f_1(\tau)$.

4.4.3. Семейства стандартных воздействий и соответствующих характеристик цепи

Назовем функцией единичного наклона $\delta_2(t)$ одностороннюю линейную функцию, равную интегралу от единичной ступенчатой функции:

$$\delta_2(t) = t\delta_1(t) = \int_{-\infty}^t \delta_1(t) dt = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

График $\delta_2(t)$ приведен на рисунке 4.12, причем при $t > 0$ линейная функция $\delta_2(t) = at$ имеет единичный коэффициент наклона, т. е. $a = 1$.

По аналогии с п. 4.3 назовем $h_2(t)$ характеристикой цепи, численно равной реакции цепи на воздействие вида $f_1(t) = F_{10}\delta_2(t) = F_{10}t\delta_1(t)$, где $F_{10} = 1 \text{ В/с}$ или 1 А/с — коэффициент, выравнивающий размерность. На основании (4.18) по свойству дифференцируемости $h_2(t)$, называемая также весовой

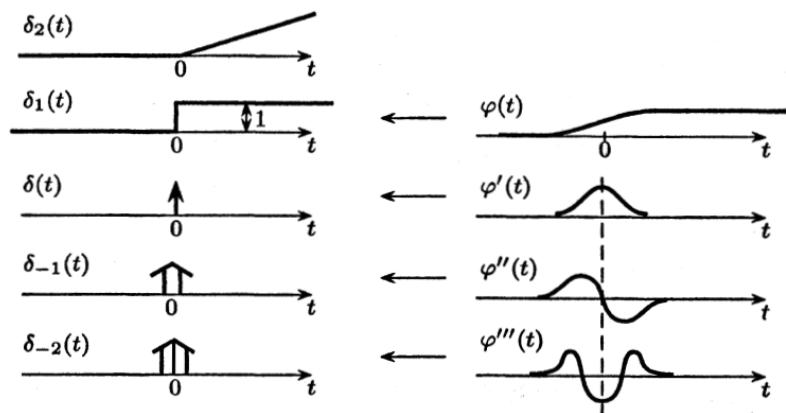


Рис. 4.12

характеристикой второго порядка, может быть найдена интегрированием переходной характеристики:

$$h_2(t) = \int_{-\infty}^t h_1(t) dt = \int_{-\infty}^t h_1^*(t) \delta_1(t) dt = \delta_1(t) \int_0^t h_1^*(t) dt = \\ = h_2^*(t) \delta_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ h_2^*(t), & t > 0, \end{cases} \quad (4.19)$$

где $h_2^*(t)$ — аналитическое продолжение $h_2(t)$.

Осуществляя многократное интегрирование (4.18), (4.19) можем продолжить как семейство стандартных воздействий вида

$$\delta_3(t) = \frac{1}{2} t^2 \delta_1(t), \quad \delta_4(t) = \frac{1}{6} t^3 \delta_1(t), \dots,$$

так и семейство соответствующих реакций $h_3(t) = \int_{-\infty}^t h_2(t) dt$, $h_4(t) = \dots$

Однако, чтобы продолжить семейство в другую сторону путем многократного дифференцирования (как показано на рисунке 4.12), необходимо иначе задать последовательность функций $\varphi(t)$, с помощью которых в п.4.1 была сформирована функция $\delta_1(t)$, а в п.4.2 — дельта-функция; функция $\varphi(t)$ должна быть абсолютно гладкой, допускающей многократное дифференцирование, например, имеющей вид (4.1): $\varphi(t) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(t/\Delta t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Вид функции $\varphi(t)$ и ее производных, экстремумы которых становятся бесконечными при $\Delta t \rightarrow 0$, указан справа на рисунке 4.12. При $\Delta t \rightarrow 0$ «формируются» таким образом производные от дельта-функции: $\delta_{-1}(t) = \delta'(t)$, $\delta_{-2}(t) = \delta'_{-1}(t) = \delta''(t)$, ..., называемые соответственно числу выбросов φ'' , φ''' , ... дуплетом, триплетом, ... и обозначаемые, соответственно, стремящейся к бесконечности «двойной стрелкой», «тройной стрелкой», как указано слева на рисунке 4.12. При указанных стандартных воздействиях говорят о соответствующих стандартных реакциях $h_{-1}(t) = h'(t)$, $h_{-2}(t) = h'_{-1}(t) = h''(t)$, ..., называемых, соответственно, весовыми характеристиками «минус первого», «минус второго», ... порядков.

Примечание. В центре семейства стандартных воздействий и реакций находятся дельта-функция и импульсная характеристика, что в настоящее время является общепринятым для всех дисциплин технико-кибернетического направления.

4.4.4. Определение реакции при воздействии кусочно-линейной формы

Воздействие кусочно-линейной формы $f_1(t)$, например, показанное на рисунке 4.13, можно описать суммой смещенных односторонних линейных функций, т. е. смещенных стандартных воздействий δ_2 с некоторыми коэффициентами (см. на рис. 4.13 справа):

$$\begin{aligned} f_1(t) &= I + II + III = \sum A_k \delta_2(t - t_k) = \\ &= \sum A_k (t - t_k) \delta_1(t - t_k), \end{aligned} \quad (4.20)$$

следовательно, реакция при таком воздействии

$$f_2(t) = \sum A_k h_2(t - t_k) = \sum A_k h_2^*(t - t_k) \delta_1(t - t_k). \quad (4.21)$$

Процедура отыскания коэффициентов A_k в (4.20), (4.21) полностью формализуется при использовании метода двойного дифференцирования, отраженного на рисунке 4.13 слева. Первая производная $f'_1(t)$ описывается кусочно-ступенчатой функцией, причем

$$\begin{aligned} a_1 &= [f_1(t_2) - f_1(t_1)] / (t_2 - t_1), \\ a_2 &= [f_1(t_3) - f_1(t_2)] / (t_3 - t_2). \end{aligned}$$

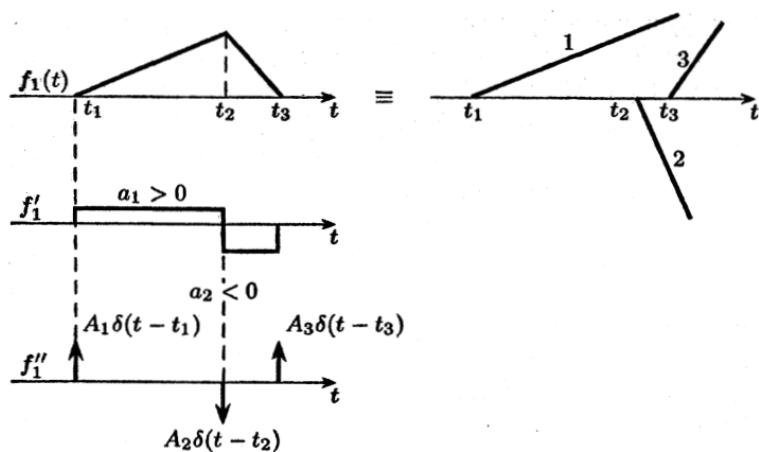


Рис. 4.13

Вторая производная — это сумма смещенных дельта-функций:

$$f''_1(t) = \sum A_k \delta(t - t_k), \quad (4.22)$$

коэффициенты A_k при которых определяются только величинами соответствующих скачков $f'_1(t)$, т. е. в рассматриваемом примере $A_1 = a_1 - 0$, $A_2 = a_2 - a_1$, $A_3 = 0 - a_2$. Двойное интегрирование (4.22) для получения $f_1(t)$, естественно, дает (4.20).

Глава 5

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Большой класс цепей получает возбуждения от источников синусоидального напряжения или тока. При этом интересуются лишь установившимся режимом в цепи, расчет которого удобно производить не во временной, а в частотной области, используя для этого метод комплексных амплитуд, основанный на алгебре комплексных чисел.

§ 5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ

5.1.1. Основные определения

Синусоидальным (гармоническим) напряжением или током называются напряжение или ток, изменяющиеся по следующему закону:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u) = U_m \sin(\omega t + \alpha'_u). \quad (5.1)$$

Для записи синусоидального напряжения или тока можно использовать, согласно (5.1), тригонометрическую функцию как косинуса, так и синуса. Очевидно, что $\alpha'_u = \alpha_u + \pi/2$. На практике оказалась удобнее косинусная форма записи. На рисунке 5.1 приведен график синусоидального напряжения.

Приведем величины, характеризующие синусоидальное напряжение (ток).

1. Амплитуда U_m — максимальное из мгновенных значений.
2. Фаза $\gamma(t) = \omega t + \alpha_u$ — аргумент функции.

3. Угловая частота ω — скорость увеличения фазы, т. е. $\omega = d\gamma/dt$.

4. Период T — наименьший временной интервал повторения периодического синусоидального сигнала, т. е.

$$U_m \cos(\omega t + \alpha_u) = U_m \cos[\omega(t + T) + \alpha_u],$$

следовательно, $\omega T = 2\pi$, откуда период $T = 2\pi/\omega$.

5. Циклическая частота f — число периодов в секунду, т. е. $f = 1/T$. Циклическая частота измеряется в герцах; очевидно, что $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$. Так, промышленной частоте соответствует $f = 50$ Гц, а $\omega = 314$ рад/с.

6. Начальная фаза α_u определяет значение фазы при $t = 0$ (часто ее для удобства записывают в градусах). Она определяет положение ближайшего положительного максимума (в косинусной форме записи) относительно оси ординат (рис. 5.1); при $\alpha_u > 0$ этот максимум будет смещен влево от оси ординат на величину α_u .

7. Разность фаз, или сдвиг по фазе двух синусоидальных функций одинаковой частоты — это разность их начальных фаз. Так, если $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$, а $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i)$, то сдвигом по фазе между током и напряжением будем называть угол $\varphi = \alpha_u - \alpha_i$.

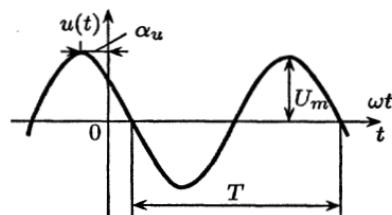


Рис. 5.1

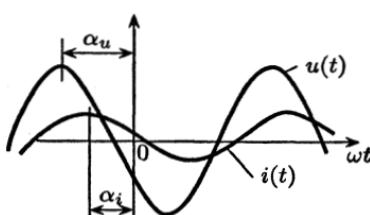


Рис. 5.2

Если $\alpha_u > \alpha_i$, то $\varphi > 0$ (рис. 5.2), тогда максимум напряжения наступает раньше, чем максимум тока. В этом случае говорят, что ток отстает по фазе на угол φ от напряжения или напряжение опережает по фазе ток на угол φ .

Если $\alpha_u < \alpha_i$, то $\varphi < 0$, тогда максимум тока наступает раньше, чем максимум напряжения. В этом случае говорят, что ток опережает напряжение по фазе на угол $|\varphi|$ или напряжение отстает по фазе на угол $|\varphi|$ от тока. При $\varphi = 0$ имеем $\alpha_u = \alpha_i$, и тогда ток и напряжение совпадают по фазе.

5.1.2. Среднее и действующее значения синусоидальных токов и напряжений

Среднее за период значение любой периодической функции определяется в соответствии с теоремой о среднем следующим образом:

$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (5.2)$$

Для гармонически изменяющихся токов и напряжений среднее значение (5.2) за период равно нулю, так как площадь за период равна нулю. Иногда говорят о среднем значении положительной полуволны

$$U_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} U_m, \quad (5.3)$$

причем полученное в (5.3) значение часто называют средним выпрямленным значением.

Очень важной характеристикой периодических напряжений и токов является действующее, или эффективное значение. Действующее значение периодического тока численно равно такому значению постоянного тока, который за время, равное периоду, выделит в R -элементе одинаковое количество энергии. Пусть $i(t)$ — периодический ток R -элемента. Тогда энергия, расходуемая за период, определяется

$$W_{\sim} = \int_0^T R i^2(t) dt. \quad (5.4)$$

При протекании постоянного тока энергия, расходуемая за это же время, будет

$$W_{\sim} = \int_0^T R I^2 dt = R I^2 T. \quad (5.5)$$

Приравнивая (5.4) и (5.5), получим действующее значение периодического тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (5.6)$$

Для синусоидального тока, согласно (5.6), выполняется

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m. \quad (5.7)$$

Приборы, применяемые для измерения синусоидальных напряжений и токов, за немногими исключениями, показывают действующее значение.

5.1.3. Задача анализа установившегося синусоидального режима

В п. 3.2 было показано, что реакция цепи на заданное воздействие состоит из свободной и вынужденной составляющих. Свободная составляющая не зависит от вида воздействия и при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю, так как корни характеристического уравнения линейной пассивной цепи всегда отрицательны, либо имеют отрицательную вещественную часть, если они комплексные. Вынужденная составляющая определяется видом правой части дифференциального уравнения, а при периодическом воздействии понятия вынужденной и установившейся составляющих совпадают. При действии источников синусоидального напряжения и тока одинаковой частоты в правой части дифференциального уравнения будет синусоидальная функция, так как суммирование и дифференцирование синусоидальных функций одной частоты дают синусоидальную функцию той же частоты. Из математики известно, что частным решением в этом случае будет синусоидальная функция, т. е. вынужденная (или установившаяся) составляющая искомого тока будет

$$i_B = i_y = I_m \cos(\omega t + \alpha_i), \quad (5.8)$$

где ω — заданная частота источников; I_m и α_i — неизвестные амплитуда и начальная фаза установившегося тока.

Если определять I_m и α_i подстановкой (5.8) в исходное дифференциальное уравнение, то для их отыскания пришлось бы решать тригонометрические уравнения, что привело бы к большим трудностям. Поэтому для расчета установившегося синусоидального режима (определения I_m и α_i) используется

специальный метод комплексных амплитуд, в основе которого лежит представление (5.8) через экспоненту с мнимым аргументом, что позволяет определить I_m и α_i из алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами. Кроме этого метод комплексных амплитуд позволяет использовать методы расчета R -цепей для анализа установившегося синусоидального режима.

§ 5.2. МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

В последующих параграфах будем считать (если это специально не оговаривается), что цепь находится в установившемся синусоидальном режиме, т. е. $f_{\text{св}}(t) = 0$, а $f(t) = f_{\text{вын}}(t) = f_{\text{уст}}(t)$.

5.2.1. Представление синусоидальных функций через экспоненты с мнимым аргументом

Из тригонометрии известно, что синусоидальную функцию времени можно получить как проекцию вектора, вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью, равной угловой частоте функции, причем длина вектора равна амплитуде функции, а начальное положение вектора при $t = 0$ определяется начальной фазой. Проекция такого вектора на ось абсцисс комплексной плоскости дает косинусную форму записи синусоидальной функции, а на ось ординат — синусную форму записи этой функции. Для аналитической записи вращающегося вектора удобно использовать комплексные числа.

Комплексное число \dot{A} можно записать в алгебраической, тригонометрической и показательной формах:

$$\dot{A} = a + jb = A \cos \gamma + jA \sin \gamma = Ae^{j\gamma}, \quad (5.9)$$

где $a = \operatorname{Re} \dot{A}$ — вещественная (реальная), а $b = \operatorname{Im} \dot{A}$ — мнимая составляющие комплексного числа \dot{A} ; A — модуль, γ — аргумент (угол, фаза) комплексного числа \dot{A} ; $j = \sqrt{-1}$.

Очевидны также следующие соотношения между компонентами комплексного числа:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{a^2 + b^2} = \operatorname{Mod} \dot{A} = |\dot{A}|; \\ \gamma &= \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{Arg} \dot{A}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

С помощью комплексного числа можно определять радиус-вектор, начинающийся в начале координат и заканчивающийся в точке, определяемой комплексным числом на комплексной плоскости (рис. 5.3a). Длина вектора $A = \text{Mod } \hat{A}$, а фаза $\gamma = \text{Arg } \hat{A}$.

Сопряженным комплексным числом \hat{A} называется число, отличающееся лишь знаком мнимой части:

$$\hat{A} = a - jb = A \cos \gamma - j A \sin \gamma = Ae^{-j\gamma}. \quad (5.11)$$

На комплексной плоскости сопряженному числу будет соответствовать вектор той же длины, но расположенный под углом $-\gamma$.

Если положить, что $\gamma = \omega t + \alpha$, то это будет означать, что угол γ с течением времени будет увеличиваться, т. е. вектор \hat{A} будет вращаться вокруг начала координат с угловой скоростью ω против часовой стрелки, а вектор \hat{A} точно так же — по часовой стрелке. При этом положение вектора при $t = 0$ будет определяться углом α (рис. 5.3б).

Тогда для $\gamma = \omega t + \alpha$ из (5.9) — (5.11) получим:

$$\hat{A} = Ae^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + j A \sin(\omega t + \alpha), \quad (5.12)$$

$$\hat{A} = Ae^{-j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) - j A \sin(\omega t + \alpha). \quad (5.13)$$

Сложив (5.12), (5.13) и переходя к принятым для синусоидальных напряжений (токов) обозначениям, находим:

$$\begin{aligned} U_m \cos(\omega t + \alpha_u) &= \text{Re} [U_m e^{j(\omega t + \alpha_u)}] = \\ &= \frac{1}{2} [U_m e^{j(\omega t + \alpha_u)} + U_m e^{-j(\omega t + \alpha_u)}], \end{aligned} \quad (5.14)$$

т. е. получаем аналитическое описание проекции вращающегося вектора на ось абсцисс в виде косинусной формы записи синусоидального напряжения (тока).

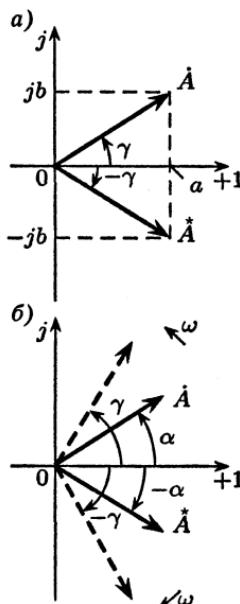


Рис. 5.3

Аналогично, вычитая (5.13) из (5.12), получим аналитическую запись проекции вращающегося вектора на ось ординат, т. е. синусную форму записи синусоидального напряжения (тока):

$$\begin{aligned} U_m \sin(\omega t + \alpha_u) &= \operatorname{Im} [U_m e^{j(\omega t + \alpha_u)}] = \\ &= \frac{1}{2j} [U_m e^{j(\omega t + \alpha_u)} - U_m e^{-j(\omega t + \alpha_u)}]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Преобразуем (5.14):

$$\begin{aligned} U_m \cos(\omega t + \alpha_u) &= \operatorname{Re} [U_m e^{j\alpha_u} e^{j\omega t}] = \\ &= \frac{1}{2} [U_m e^{j\alpha_u} e^{j\omega t} + U_m e^{-j\alpha_u} e^{-j\omega t}] = \\ &= \operatorname{Re} [\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \frac{1}{2} [\dot{U}_m e^{j\omega t} + \dot{U}_m^* e^{-j\omega t}], \end{aligned} \quad (5.16)$$

причем $\dot{U}_m = U_m e^{j\alpha_u}$ будем называть комплексной амплитудой.

Как видно, модуль комплексной амплитуды равен амплитуде синусоидального напряжения (тока), а аргумент — начальной фазе. На комплексной плоскости комплексная амплитуда изображается вектором, длина которого равна амплитуде напряжения (тока), повернутым на угол, равный углу начальной фазы.

Аналогично, для (5.15)

$$U_m \sin(\omega t + \alpha_u) = \operatorname{Im} [\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \frac{1}{2j} [\dot{U}_m e^{j\omega t} - \dot{U}_m^* e^{-j\omega t}]. \quad (5.17)$$

Таким образом, задача анализа электрической цепи в установившемся синусоидальном режиме может быть сведена к поиску комплексной амплитуды, так как комплексная амплитуда определяет обе неизвестные величины — амплитуду и фазу реакции.

ПРИМЕР 1. Если в результате анализа найдена комплексная амплитуда $\dot{I}_m = 3 + j4$, то амплитуда тока $I_m = \operatorname{Mod} \dot{I}_m = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ A}$, начальная фаза $\alpha_i = \operatorname{Arg} \dot{I}_m = \operatorname{arctg} 4/3 = 53^\circ$, следовательно, ток $i(t) = 5 \cos(\omega t + 53^\circ)$.

Таким образом, существует однозначное соответствие между комплексной амплитудой и синусоидальной функцией времени.

ПРИМЕР 2. Напряжению $u(t) = 10 \cos(\omega t + 60^\circ)$ соответствует комплексная амплитуда $\dot{U}_m = 10e^{j60^\circ} = 10 \cos 60^\circ + j10 \sin 60^\circ = 5 + j8.6$.

Сопряженная комплексная амплитуда в (5.16) и (5.17) несет никакой новой информации. Множитель $e^{j\omega t}$ в (5.16) и (5.17) превращает неподвижный вектор комплексной амплитуды во вращающийся, и его часто называют оператором вращения.

Рассмотрим возможный способ определения установившегося синусоидального тока в последовательной RL -цепи (рис. 5.4), где $u_0(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$.

Дифференциальное уравнение, полученное по закону Кирхгофа при обходе контура,

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u_0(t).$$

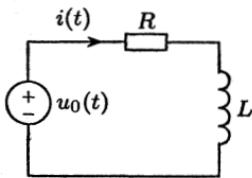


Рис. 5.4

Представим заданное воздействие и искомый установившийся ток в соответствии с (5.16):

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 0,5 \left[\dot{U}_m e^{j\omega t} + \dot{U}_m^* e^{-j\omega t} \right], \\ i(t) &= 0,5 \left[\dot{I}_m e^{j\omega t} + \dot{I}_m^* e^{-j\omega t} \right], \end{aligned}$$

где $\dot{U}_m = U_m e^{j\alpha_u}$ — комплексная амплитуда заданного напряжения, а $\dot{I}_m = I_m e^{j\alpha_i}$ — комплексная амплитуда искомого тока, которую надо найти.

Для ее определения можно подставить в дифференциальное уравнение приведенные выражения для $u_0(t)$ и $i(t)$, но в этом случае получим два уравнения для определения \dot{I}_m и \dot{I}_m^* . Поскольку, как уже отмечалось, сопряженная комплексная амплитуда не несет новой информации по сравнению с \dot{I}_m , то для того, чтобы сразу получить уравнение только относительно комплексной амплитуды, целесообразно подставить в дифференциальное уравнение условные представления:

$$\left. \begin{aligned} i(t) &\doteq \dot{I}_m e^{j\omega t}, \\ u_0(t) &\doteq \dot{U}_m e^{j\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

После подстановки получим

$$j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t} + R \dot{I}_m e^{j\omega t} = \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Экспонента $e^{j\omega t}$ будет входить в левую и правую части дифференциального уравнения любого порядка, и ее всегда можно сократить. Получим алгебраическое уравнение $(R + j\omega L) \dot{I}_m = \dot{U}_m$, откуда

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R + j\omega L} = \frac{U_m e^{j\alpha_u}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j\varphi}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\alpha_u - \varphi)},$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}(\omega L / R)$.

Следовательно, $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$, $\alpha_i = \alpha_u - \varphi$. Тогда искомый ток

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \alpha_u - \varphi).$$

5.2.2. Законы Кирхгофа в комплексной форме записи

Первый закон Кирхгофа (ЗТК) для токов, сходящихся в узел,

$$\sum_{(k)} i_k(t) = 0, \quad (5.19)$$

где $i_k(t) = I_{mk} \cos(\omega t + \alpha_{ik})$ — синусоидальные токи одинаковой частоты. Подставим в (5.19) условные равенства вида (5.18) для каждого тока:

$$i_k(t) \doteq \dot{I}_{mk} e^{j\omega t}.$$

Тогда, вынося $e^{j\omega t}$ за знак суммы, запишем:

$$e^{j\omega t} \sum_{(k)} \dot{I}_{mk} = 0,$$

откуда получим первый закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum_{(k)} \dot{I}_{mk} = 0, \quad (5.20)$$

т. е. сумма комплексных амплитуд синусоидальных токов, сходящихся в узел, равна нулю.

Второй закон Кирхгофа (ЗНК) для напряжений замкнутого контура

$$\sum_{(k)} u_k(t) = 0,$$

где $u_k(t) = U_{mk} \cos(\omega t + \alpha_{uk})$ — синусоидальные напряжения одинаковой частоты.

Проводя аналогичные рассуждения, приедем к выводу, что

$$\sum_{(k)} \dot{U}_{mk} = 0. \quad (5.21)$$

Таким образом, второй закон Кирхгофа в комплексной форме утверждает, что сумма комплексных амплитуд синусоидальных напряжений замкнутого контура равна нулю.

Следует обратить внимание на то, что полученные законы Кирхгофа в комплексной форме справедливы именно для комплексных амплитуд и не справедливы для амплитуд токов и напряжений. Это обстоятельство отражает тот факт, что длина суммарного вектора не равна сумме длин слагаемых векторов.

На практике часто пользуются аналогично (5.7) понятиями комплексных действующих значений напряжения и тока

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}, \quad \dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}. \quad (5.22)$$

С учетом (5.20) — (5.22) законы Кирхгофа для комплексных действующих значений

$$\sum_{(k)} \dot{I}_k = 0; \quad \sum_{(k)} \dot{U}_k = 0.$$

5.2.3. Элементы электрической цепи в установившемся синусоидальном режиме

Прежде чем приступить к анализу RLC -цепей в установившемся синусоидальном режиме, необходимо изучить поведение отдельных элементов электрической цепи в этом режиме. Рассмотрим вольт-амперные и энергетические характеристики, считая, что к элементу приложено напряжение $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$ и протекает ток $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i)$. Будем интересоваться соотношениями между амплитудами и начальными фазами напряжения и тока элемента: $\dot{U}_m = U_m e^{j\alpha_u}$ и $\dot{I}_m = I_m e^{j\alpha_i}$.

1. Резистивный элемент. Подставим в вольт-амперную характеристику элемента $u = Ri$ синусоидальные напряжение и ток:

$$U_m \cos(\omega t + \alpha_u) = RI_m \cos(\omega t + \alpha_i).$$

Отсюда следует, что в R -элементе $U_m = RI_m$, $\alpha_u = \alpha_i$. Угол сдвига по фазе между напряжением и током $\varphi = \alpha_u - \alpha_i = 0$, т. е. ток и напряжение R -элемента совпадают по фазе (рис. 5.5а).

Подставив в вольт-амперную характеристику условные представления $u(t) \doteq \dot{U}_m e^{j\omega t}$, $i(t) \doteq \dot{I}_m e^{j\omega t}$, получим $\dot{U}_m e^{j\omega t} = R \dot{I}_m e^{j\omega t}$, или после сокращения

$$\dot{U}_m = R \dot{I}_m. \quad (5.23)$$

Из (5.23) видно, что векторы комплексной амплитуды напряжения и комплексной амплитуды тока сонаправлены, так как R — вещественный коэффициент (рис. 5.5б).

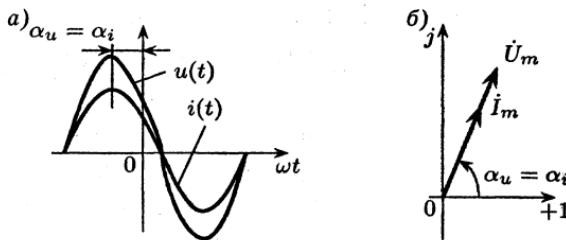


Рис. 5.5

Введем понятие комплексного сопротивления элемента как отношения комплексных амплитуд напряжения и тока:

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m e^{j\alpha_u}}{I_m e^{j\alpha_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\alpha_u - \alpha_i)} = |Z| e^{j\varphi}, \quad (5.24)$$

причем из (5.24) следует, что аргумент у комплексного сопротивления равен углу фазного сдвига между током и напряжением.

Будем называть комплексной проводимостью элемента отношение комплексной амплитуды тока к комплексной амплитуде напряжения:

$$Y = \frac{I_m}{\dot{U}_m} = \frac{I_m e^{j\alpha_i}}{U_m e^{j\alpha_u}} = \frac{I_m}{U_m} e^{j(\alpha_i - \alpha_u)} = |Y| e^{j\psi}, \quad (5.25)$$

причем из (5.25) очевидно, что $Y = 1/Z$, $\psi = \alpha_i - \alpha_u = -\varphi$.

Тогда для R -элемента комплексное сопротивление будет

$$Z_R = |Z_R| e^{j\varphi} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = R, \quad (5.26)$$

а комплексная проводимость

$$Y_R = |Y_R| e^{j\psi} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = \frac{1}{R} = G. \quad (5.27)$$

Из (5.26), (5.27) следует, что

$$\begin{cases} Z_R = |Z_R| = R, & \varphi = \alpha_u - \alpha_i = 0; \\ Y_R = |Y_R| = 1/R = G, & \psi = -\varphi = 0. \end{cases}$$

Мгновенная мощность

$$\begin{aligned} p_R(t) &= RI^2 = RI_m^2 \cos^2(\omega t + \alpha_i) = \\ &= \frac{RI_m^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \alpha_i)] = \\ &= RI^2 [1 + \cos 2(\omega t + \alpha_i)] \geq 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Из (5.28) следует, что график мощности колеблется с двойной частотой вокруг своего среднего значения, оставаясь положительным. Среднее значение мощности за период называют активной мощностью. Для R -элемента активная мощность

$$\begin{aligned} P_a = P_{cp} &= \frac{1}{T} \int_0^T p_R(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T RI^2 dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T RI^2 \cos 2(\omega t + \alpha_i) dt = RI^2. \end{aligned}$$

или, используя очевидные соотношения, получим

$$P_a = RI^2 = GU^2 = UI, \quad (5.29)$$

Примечание. (5.29) совпадает по форме записи с формулой мощности R -элемента при протекании через него постоянного тока, но в (5.29) определяется среднее значение мощности при протекании через R -элемент синусоидального тока с действующим значением $I = I_m/\sqrt{2}$.

2. Индуктивный элемент. Подставим в вольт-амперную характеристику L -элемента $u = L \frac{di}{dt}$ синусоидальные напряжение и ток:

$$\begin{aligned} U_m \cos(\omega t + \alpha_u) &= -\omega L I_m \sin(\omega t + \alpha_i) = \\ &= \omega L I_m \cos(\omega t + \alpha_i + \pi/2). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Из (5.30) следует, что в L -элементе $U_m = \omega L I_m$, а $\alpha_u = \alpha_i + \pi/2$. Угол фазного сдвига $\varphi = \alpha_u - \alpha_i = \pi/2$, т. е. ток элемента L отстает по фазе от напряжения на $\pi/2$ (рис. 5.6a). Коэффициент пропорциональности между амплитудой напряжения и амплитудой тока имеет размерность сопротивления. Его называют индуктивным сопротивлением X_L , т. е.

$$X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L. \quad (5.31)$$

Индуктивное сопротивление (5.31) зависит от частоты. Так, при $\omega = 0$ (постоянный ток) $X_L = 0$, а при $\omega \rightarrow \infty$ сопротивление $X_L \rightarrow \infty$. Это обстоятельство позволяет заменять для расчетных целей L -элемент короткозамкнутым участком (КЗ) при $\omega = 0$ и разрывом (ХХ) при $\omega \rightarrow \infty$.

Индуктивной проводимостью B_L называют величину, обратную индуктивному сопротивлению:

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{I_m}{U_m} = \frac{1}{\omega L}.$$

Если в вольт-амперную характеристику подставим $u(t) \doteqdot \dot{U}_m e^{j\omega t}$ и $i \doteqdot \dot{I}_m e^{j\omega t}$, получим соотношение для комплексных амплитуд $\dot{U}_m e^{j\omega t} = j\omega L \dot{I}_m e^{j\omega t}$,

или после сокращения

$$\dot{U}_m = j\omega L \dot{I}_m. \quad (5.32)$$

Из (5.32) видно, что вектор \dot{U}_m повернет относительно вектора \dot{I}_m на $\pi/2$, так как $j = e^{j\pi/2}$, т. е. ток отстает от напряжения на $\pi/2$ (рис. 5.6б).

Из (5.32) получили комплексное сопротивление L -элемента

$$Z_L = |Z_L| e^{j\varphi} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = j\omega L = \omega L e^{j\pi/2} = X_L e^{j\pi/2}. \quad (5.33)$$

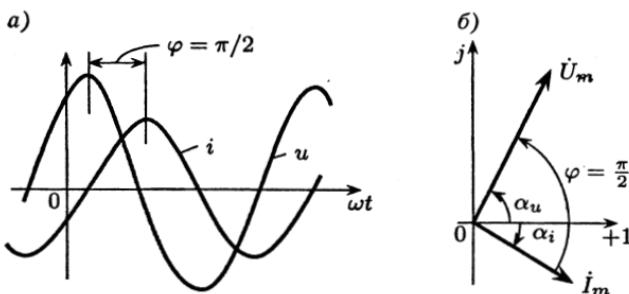


Рис. 5.6

Комплексная проводимость будет

$$\begin{aligned} Y_L &= |Y_L| e^{j\psi} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = \frac{1}{j\omega L} = \\ &= -j \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j\pi/2} = B_L e^{-j\pi/2}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Из (5.33), (5.34) следует, что

$$\begin{cases} Z_L = j\omega L, & |Z_L| = X_L = \omega L, & \varphi = \pi/2, \\ Y_L = -j \frac{1}{\omega L}, & |Y_L| = B_L = \frac{1}{\omega L}, & \Psi = -\varphi = -\pi/2. \end{cases} \quad (5.35)$$

Энергия, запасенная в индуктивности,

$$\begin{aligned} W_L(t) &= \frac{L i^2}{2} = \frac{L \dot{I}_m^2}{2} \cos^2(\omega t + \alpha_i) = \\ &= \frac{L \dot{I}_m^2}{2} \cdot \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \alpha_i)] = \\ &= \frac{L \dot{I}_m^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \alpha_i)], \end{aligned}$$

т. е. колеблется с двойной частотой относительно среднего значения

$$W_{L\text{cp}} = \frac{L \dot{I}_m^2}{2};$$

дважды за период тока происходит накопление энергии в магнитном поле L -элемента и ее возврат в остальную цепь.

Мгновенная мощность L -элемента будет

$$p_L(t) = ui = \frac{dW_L}{dt} = -\omega L I^2 \sin 2(\omega t + \alpha_i). \quad (5.36)$$

Как следует из (5.36), мощность изменяется с двойной частотой по синусоидальному закону, следовательно, среднее значение мощности за период (т. е. активная мощность) L -элемента равна нулю. Это отражает тот факт, что энергия в L -элементе не потребляется, т. е. L -элемент является реактивным элементом. Будем называть реактивной мощностью экстремальную скорость поступления энергии в элемент, у которого ток и напряжение сдвинуты на угол $|\varphi| = \pi/2$. Ей присваивается специальная единица измерения — вольт-ампер реактивный (вар). Реактивная мощность L -элемента

$$P_Q = P_{L \max} = \omega L I^2 = X_L I^2 = UI = B_L U^2.$$

3. *Емкостной элемент*. Подставим в вольт-амперную характеристику C -элемента $i = C \frac{du}{dt}$ синусоидальные ток и напряжение:

$$\begin{aligned} I_m \cos(\omega t + \alpha_i) &= -\omega C U_m \sin(\omega t + \alpha_u) = \\ &= \omega C U_m \cos(\omega t + \alpha_u + \pi/2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $I_m = \omega C U_m$, а $\alpha_i = \alpha_u + \pi/2$. Угол фазного сдвига $\varphi = \alpha_u - \alpha_i = -\pi/2$, т. е. ток элемента C опережает по фазе напряжение на угол $\pi/2$ (рис. 5.7а).

Емкостное сопротивление

$$X_C = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{\omega C}$$

зависит от частоты. При $\omega = 0$ выполняется $X_C = \infty$, а при $\omega \rightarrow \infty$, соответственно, $X_C \rightarrow 0$. Это обстоятельство позволяет заменить для расчетных целей C -элемент разрывом (ХХ) при $\omega = 0$ (постоянный ток) и короткозамкнутым участком (КЗ) при $\omega \rightarrow \infty$.

Емкостная проводимость будет

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \frac{I_m}{U_m} = \omega C.$$

В комплексной форме $\dot{I}_m e^{j\omega t} = j\omega C \dot{U}_m e^{j\omega t}$, откуда

$$\dot{I}_m = j\omega C \dot{U}_m. \quad (5.37)$$

Из (5.37) видно, что вектор \dot{I}_m повернут относительно вектора \dot{U}_m на $\pi/2$, т. е. ток опережает напряжение на $\pi/2$ (рис. 5.7б).

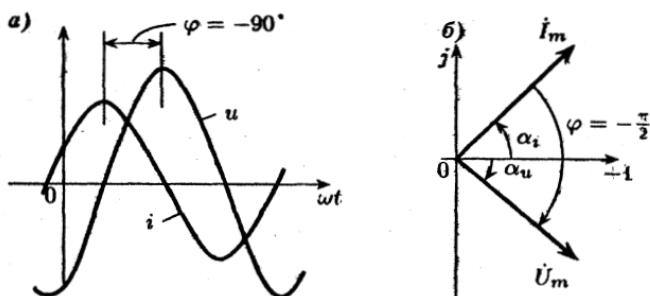


Рис. 5.7

Из (5.37) получим комплексное сопротивление C -элемента

$$\begin{aligned} Z_C &= |Z_C| e^{j\varphi} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = \\ &= \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = X_C e^{-j\pi/2}. \quad (5.38) \end{aligned}$$

Комплексная проводимость будет

$$Y_C = |Y_C| e^{j\psi} = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = j\omega C = \omega C e^{j\pi/2} = B_C e^{j\pi/2}. \quad (5.39)$$

Из (5.38), (5.39) следует:

$$\begin{cases} Z_C = -j \frac{1}{\omega C}, & |Z_C| = X_C = \frac{1}{\omega C}, & \varphi = -\frac{\pi}{2}, \\ Y_C = j\omega C, & |Y_C| = B_C = \omega C, & \Psi = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Энергия, запасаемая в емкости,

$$W_C(t) = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \cos^2(\omega t + \alpha_u) = \frac{CU^2}{2} (1 + \cos 2(\omega t + \alpha_u))$$

колеблется с двойной частотой вокруг своего среднего значения

$$W_{C\text{ср}} = CU^2/2;$$

дважды за период приложенного напряжения происходит накопление энергии в электрическом поле C -элемента и ее возврат в остальную цепь.

Мгновенная мощность C -элемента

$$p_C(t) = ui = dW/dt = -\omega CU^2 \sin 2(\omega t - \alpha_u), \quad (5.40)$$

как и в L -элементе, изменяется с двойной частотой по синусоидальному закону. Таким образом, $P_{\text{ср}} = 0$, а реактивная мощность C -элемента.

$$|P_Q| = P_{C \text{ max}} = \omega C U^2 = B_C U^2 = UI = X_C I^2$$

т. е. C -элемент является реактивным элементом.

Аналогия выражений, полученных для L - и C -элементов, объясняется дуальностью этих элементов.

5.2.4. Комплексное сопротивление произвольного двухполюсника. Закон Ома в комплексной форме

Понятие комплексного сопротивления, введенное для элементов цепи, можно распространить на произвольный RLC -двусполюсник:

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{\dot{U}_m}{I_m} = \frac{U_m e^{j\alpha_u}}{I_m e^{j\alpha_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\alpha_u - \alpha_i)} = |Z| e^{j\varphi}, \\ Z &= |Z| e^{j\varphi} = |Z| \cos \varphi + j|Z| \sin \varphi = r + jx. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

Из (5.41) следует, что модуль комплексного сопротивления $|Z|$ определяет отношение амплитуды напряжения к амплитуде тока:

$$|Z| = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}.$$

Аргумент (угол, фаза) комплексного сопротивления φ определяет сдвиг по фазе между током и напряжением:

$$\varphi = \alpha_u - \alpha_i.$$

Вещественную составляющую комплексного сопротивления называют активной, или резистивной составляющей

$$r = |Z| \cos \varphi,$$

минимую часть комплексного сопротивления называют реактивной составляющей

$$x = |Z| \sin \varphi.$$

Аналогично, комплексная проводимость произвольного двухполюсника будет

$$\left. \begin{aligned} Y &= \frac{I_m}{U_m} = \frac{I_m e^{j\alpha_i}}{U_m e^{j\alpha_u}} = \frac{I_m}{U_m} e^{j(\alpha_i - \alpha_u)} = |Y| e^{j\psi}, \\ Y &= |Y| e^{j\psi} = |Y| \cos \Psi + j|Y| \sin \Psi = g + jb, \end{aligned} \right\}$$

где $|Y| = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U}$; $\Psi = \alpha_i - \alpha_u = -\varphi$; $g = |Y| \cos \Psi$ — активная составляющая комплексной проводимости; $b = |Y| \sin \Psi$ — реактивная составляющая.

Очевидно, что можно записать

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r+jx} = \frac{r}{r^2+x^2} - j \frac{x}{r^2+x^2} = g + jb.$$

Аналогично, записывается

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{g+jb} = \frac{g}{g^2+b^2} - j \frac{b}{g^2+b^2} = r+jx.$$

Введение понятия комплексного сопротивления, как коэффициента пропорциональности между комплексной амплитудой напряжения и комплексной амплитудой тока, и означает введение закона Ома в комплексной форме:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{U}_m = Z \dot{I}_m, \quad \dot{U} = Z \dot{I}; \\ \dot{I}_m = Y \dot{U}_m, \quad \dot{I} = Y \dot{U}. \end{array} \right\} \quad (5.42)$$

По форме записи закон Ома в комплексной форме (5.42) аналогичен закону Ома для R -цепей, однако, здесь он устанавливает связь не между током и напряжением двухполюсника, а между комплексными амплитудами синусоидального напряжения и тока двухполюсника.

§ 5.3. АНАЛИЗ ПРОСТЫХ ЦЕПЕЙ В УСТАНОВИВШЕМСЯ СИНУСОИДАЛЬНОМ РЕЖИМЕ. КОМПЛЕКСНАЯ СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ

После введения комплексного сопротивления для элементов цепи, законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме можно уравнения относительно комплексный амплитуд получать не из дифференциальных уравнений, а из так называемой комплексной схемы замещения. Комплексная схема может быть получена из исходной, если элементы цепи заменить их комплексными сопротивлениями, а имеющиеся в цепи токи и напряжения синусоидальной формы — их комплексными амплитудами. Так как законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме аналогичны законам R -цепей, то все методы расчета R -цепей можно применить для анализа комплексной схемы замещения.

5.3.1. Установившийся синусоидальный режим в последовательной RLC -цепи

На рисунке 5.8а приведена последовательная RLC -цепь, где $u_0(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$, а на рисунке 5.8б — ее комплексная схема замещения, где

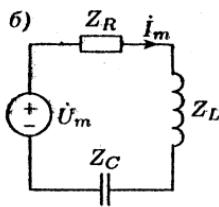
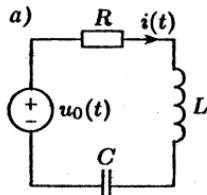


Рис. 5.8

$$\begin{aligned}Z_L &= jX_L = j\omega L, \\Z_C &= -jX_C = -j\frac{1}{\omega C}, \\Z_R &= R, \quad \dot{U}_m = U_m e^{j\alpha_u}.\end{aligned}$$

Входное комплексное сопротивление будет $Z_{\text{вх}} = Z_R + Z_L + Z_C = R + j(X_L - X_C) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$, следовательно, комплексная амплитуда тока оказывается

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z_{\text{вх}}} = \frac{\dot{U}_m}{R + j(X_L - X_C)} =$$

$$= \frac{U_m e^{j\alpha_u}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} e^{j\varphi}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} e^{j(\alpha_u - \varphi)},$$

где угол фазного сдвига $\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$.

Амплитуда синусоидального тока в цепи (рис. 5.8а) будет

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}},$$

а начальная фаза тока записывается как $\alpha_i = \alpha_u - \varphi = \alpha_u - \arctg(X_L - X_C)/R$. Таким образом ток в цепи будет

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cos(\omega t + \alpha_u - \varphi).$$

Аналогично можно найти комплексные амплитуды напряжений элементов цепи

$$\begin{aligned}\dot{U}_{mR} &= Z_R \dot{I}_m = R \dot{I}_m; \\\dot{U}_{mL} &= Z_L \dot{I}_m = jX_L \dot{I}_m; \\\dot{U}_{mC} &= Z_C \dot{I}_m = -jX_C \dot{I}_m.\end{aligned}$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. Может оказаться, что $X_L > X_C$, т. е. $\omega L > 1/(\omega C)$, следовательно, $U_{mL} = X_L I_m > U_{mC} = X_C I_m$. На рисунке 5.9а построена векторная диаграмма (ВД) для этого случая: ток $i(t)$ отстает по фазе от напряжения $u_0(t)$, так как угол $\varphi > 0$. Цепь имеет индуктивный характер.

2. При $X_L < X_C$ выполняется

$$U_{mL} = X_L I_m < U_{mC} = X_C I_m;$$

ток цепи (рис. 5.9б) опережает напряжение, так как угол $\varphi < 0$; цепь имеет емкостной характер.

3. Если $X_L = X_C$, то $U_{mL} = U_{mC}$. В этом случае $Z_{\text{вх}} = R$, а $\varphi = 0$. Напряжения на L -и C -элементах полностью компенсируют друг друга, так как $u_L + u_C = 0$, а напряжение на R -элементе становится равным напряжению источника (рис. 5.9в). Этот режим называют резонансом напряжений.

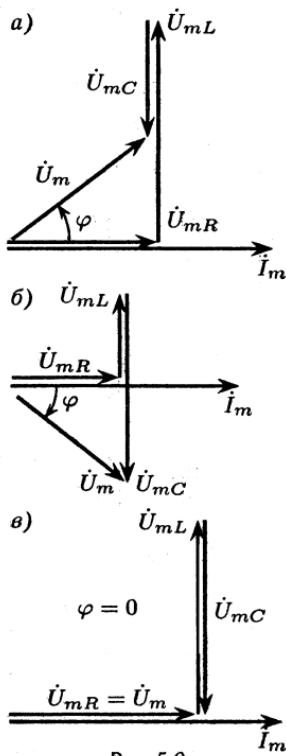


Рис. 5.9

5.3.2. Установившийся синусоидальный режим в параллельной RLC -цепи

На рисунке 5.10а приведена параллельная RLC -цепь, питаемая от источника синусоидального тока $i_0(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i)$, а на рисунке 5.10б — ее комплексная схема замещения, где $Y_R = G$, $Y_L = -jB_L = -\frac{j}{\omega L}$, $Y_C = jB_C = j\omega C$, $\dot{I}_m = I_m e^{j\alpha_i}$.

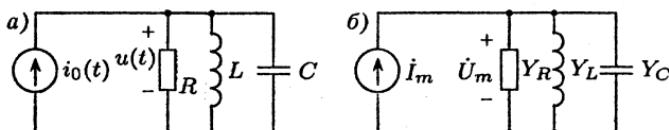


Рис. 5.10

Входная комплексная проводимость

$$Y_{\text{вх}} = Y_R + Y_L + Y_C = G + j(B_C - B_L) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right),$$

следовательно, комплексная амплитуда напряжения цепи

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \frac{\dot{I}_m}{Y_{\text{вх}}} = \frac{\dot{I}_m}{G + j(B_C - B_L)} = \\ &= \frac{I_m e^{j\alpha_i}}{\sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} e^{j\Psi}} = \frac{I_m e^{j(\alpha_i - \Psi)}}{\sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}}, \end{aligned}$$

где угол проводимости $\Psi = \arctg(B_C - B_L)/G = -\varphi$.

Таким образом, напряжение цепи (рис. 5.10a)

$$u(t) = \frac{I_m}{\sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2}} \cos(\omega t + \alpha_i - \Psi).$$

Аналогично можно найти комплексные амплитуды токов элементов цепи, а по ним и сами токи:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{mR} &= Y_R \dot{U}_m = G \dot{U}_m, \quad \dot{I}_{mL} = Y_L \dot{U}_m = -j B_L \dot{U}_m, \\ \dot{I}_{mC} &= Y_C \dot{U}_m = j B_C \dot{U}_m. \end{aligned}$$

Здесь также можно рассмотреть 3 случая, которые иллюстрируются векторными диаграммами на рисунке 5.11:

1. Если $B_L > B_C$, т. е. $1/(\omega L) > \omega C$, то $I_{mL} = B_L U_m > I_{mC} = B_C U_m$. В этом случае $\Psi < 0$, а $\varphi > 0$ и напряжение $u(t)$ опережает ток источника $i_0(t)$, т. е. цепь имеет индуктивный характер (рис. 5.11a).

2. При $B_L < B_C$ токи

$$I_{mL} = B_L U_m < I_{mC} = B_C U_m.$$

В этом случае $\Psi > 0$, а $\varphi < 0$ и напряжение $u(t)$ отстает от тока $i_0(t)$ (рис. 5.11б); цепь имеет емкостной характер.

3. Если $B_L = B_C$, то $I_{mL} = I_{mC}$. В этом случае получим $Y_{\text{вх}} = G$, $\Psi = 0$. Токи L - и C -элементов полностью компенсируют друг друга, так как $i_L + i_C = 0$, в результате чего ток через R -элемент равен току источника (рис. 5.11в). Этот режим называют резонансом токов.

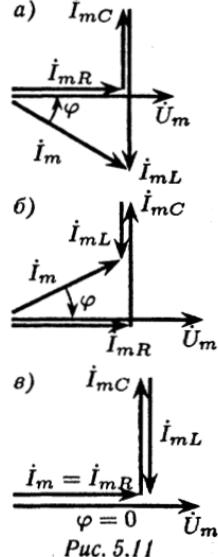


Рис. 5.11

**5.3.3. О расчете
установившегося синусоидального режима
в разветвленных RLC-цепях**

На рисунке 5.12, приведен пример разветвленной цепи с двумя источниками одинаковой частоты: $u_0(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$, $i_0(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i)$. Для определения токов в ветвях необходимо образовать комплексную схему замещения (рис. 5.13a), в которой $\dot{U}_0 = \dot{U}_m/\sqrt{2}$; $\dot{I}_0 = \dot{I}_m/\sqrt{2}$; $Z_1 = -j/(\omega C_1)$, $Z_2 = j\omega L$, $Z_3 = R$, $Z_4 = -j/(\omega C_4)$.

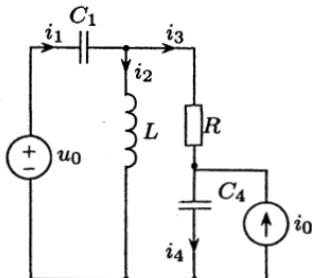


Рис. 5.12

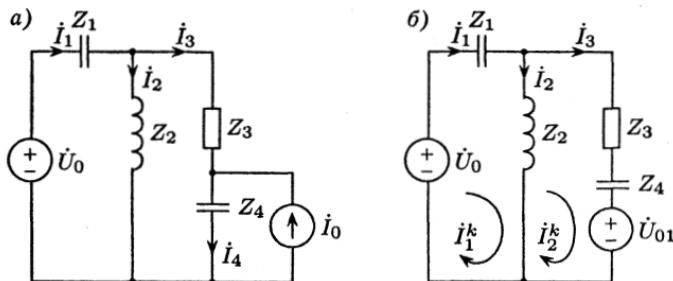


Рис. 5.13

После преобразования источника тока \dot{I}_0 в источник напряжения $\dot{U}_{01} = Z_4 \dot{I}_0$ можно применить для анализа цепи рисунка 5.13б, например, метод контурных токов:

$$\begin{cases} Z_{11} \dot{I}_1^k + Z_{12} \dot{I}_2^k = \dot{U}_1^k, \\ Z_{21} \dot{I}_1^k + Z_{22} \dot{I}_2^k = \dot{U}_2^k, \end{cases}$$

где

$$Z_{11} = Z_1 + Z_2; \quad Z_{22} = Z_2 + Z_3 + Z_4; \quad Z_{12} = Z_{21} = -Z_2; \\ \dot{U}_1^k = \dot{U}_0; \quad \dot{U}_2^k = -\dot{U}_{01}.$$

После решения этой системы уравнений с комплексными коэффициентами будут найдены «комплексные» токи, а по ним — и истинные синусоидальные токи цепи рисунка 5.12.

§ 5.4. МОЩНОСТЬ В УСТАНОВИВШЕМСЯ СИНУСОИДАЛЬНОМ РЕЖИМЕ

5.4.1. Мгновенная, активная, реактивная и полная мощности пассивного двухполюсника

Пусть (см. рис. 5.14 a), через RLC -двахполюсник (ДП) протекает синусоидальный ток $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i)$ и приложено синусоидальное напряжение $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$.

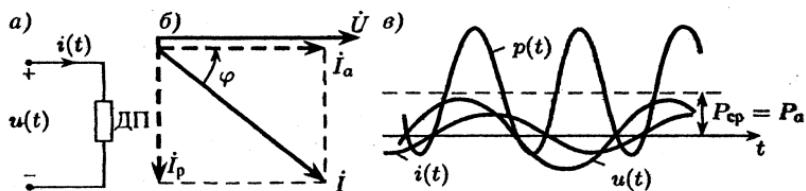


Рис. 5.14

Для определенности положим, что ток отстает от напряжения на угол $\varphi = \alpha_u - \alpha_i$ (рис. 5.14б).

Мгновенная мощность будет

$$\begin{aligned} p(t) &= ui = U_m \cos(\omega t + \alpha_u) I_m \cos(\omega t + \alpha_i) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \cos(\alpha_u - \alpha_i) + \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i) = \\ &= UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i). \quad (5.43) \end{aligned}$$

Из (5.43) следует, что $p(t)$ совершает периодические колебания с двойной частотой относительно постоянной составляющей (рис. 5.14в).

Положительной мгновенной мощности соответствует процесс потребления электрической энергии, часть которой необратимо расходуется в R -элементах, а часть — запасается в электрическом и магнитном полях реактивных элементов ДП. Отрицательной мгновенной мощности соответствует процесс возврата двухполюсником энергии.

Активная (средняя) мощность, или просто мощность записывается как

$$P = P_a = P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos \varphi dt +$$

$$+ \frac{1}{T} \int_0^T U I \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i) = UI \cos \varphi, \quad (5.44)$$

поскольку второй интеграл в (5.44) равен нулю как интеграл от синусоидальной функции за время, кратное периоду.

Таким образом, активная мощность, измеряемая в ваттах, произвольного двухполюсника

$$P = P_a = UI \cos \varphi.$$

В пассивном двухполюснике среднее значение мощности не может быть отрицательным, следовательно, угол фазового сдвига не может выходить за пределы

$$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

Выражение (5.44) можно преобразовать, пользуясь соотношениями для составляющих комплексного сопротивления и комплексной проводимости произвольного двухполюсника:

$$\left. \begin{aligned} Z &= |Z|e^{j\varphi} = |Z| \cos \varphi + j|Z| \sin \varphi = r + jx, \\ Y &= |Y|e^{j\psi} = |Y| \cos \psi + j|Y| \sin \psi = g + jb. \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

Так как $U = |Z|I$, а $I = |Y|U$, то можно записать

$$\begin{aligned} P = P_a &= UI \cos \varphi = |Z|I^2 \cos \varphi = \\ &= |Y|U^2 \cos \varphi = rI^2 = gU^2. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Реактивная мощность произвольного двухполюсника вводится по аналогии с тем, как это было сделано для L - и C -элементов, где она определялась произведением действующих значений напряжения и тока, сдвиг по фазе между которыми $|\varphi| = \pi/2$. Разложим вектор тока \dot{I} на две составляющие \dot{I}_a и \dot{I}_p (см. рис. 5.14б). Составляющая \dot{I}_a совпадает по фазе с напряжением \dot{U} и называется активной составляющей тока, а составляющую \dot{I}_p , перпендикулярную вектору \dot{U} , называют реактивной составляющей тока. В общем случае разложение тока на активную и реактивную составляющие не имеет физического смысла. Очевидно, что $I_p = I \sin \varphi$. Тогда реактивная мощность произвольного двухполюсника будет

$$P_Q = UI_p = UI \sin \varphi.$$

Можно получить другие выражения для реактивной мощности через компоненты комплексного сопротивления и комплексной проводимости (5.45):

$$\begin{aligned} P_Q &= UI \sin \varphi = |Z|I^2 \sin \varphi = \\ &= |Y|U^2 \sin \varphi = xI^2 = -bU^2. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Реактивная мощность (5.47) измеряется в вольт-амперах реактивных, она не имеет того же физического смысла, что активная мощность, и является чисто расчетной величиной, используемой на практике. Следует отметить, что реактивная мощность может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Если цепь имеет индуктивный характер, то $\varphi > 0$ и $P_Q > 0$. Если цепь имеет емкостной характер, то $\varphi < 0$, и тогда $P_Q < 0$. Так, для L -элемента $\varphi_L = \frac{\pi}{2}$ и $P_{QL} > 0$, а для C -элемента $\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$ и $P_{QC} < 0$. Таким образом, если в цепи есть L -и C -элементы, то реактивные мощности могут взаимно компенсироваться, что необходимо учитывать, составляя баланс мощностей в цепи.

Как видно из (5.46), активная мощность зависит от $\cos \varphi$. При $\cos \varphi = 1$ активная мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока. Поэтому это произведение называют полной, или кажущейся (располагаемой) мощностью и измеряют в вольт-амперах [ВА]:

$$P_S = UI = |Z|I^2 = |Y|U^2. \quad (5.48)$$

Очевидным являются следующие соотношения между активной, реактивной и полной мощностями:

$$P_S = \sqrt{P_a^2 + P_Q^2}; \quad P_a = P_S \cos \varphi; \quad P_Q = P_S \sin \varphi. \quad (5.49)$$

5.4.2. Коэффициент мощности и его технико-экономическое значение

Коэффициентом мощности называют $\cos \varphi$. Только при $\cos \varphi = 1$ вся располагаемая мощность реализуется как активная. Из (5.48), (5.49) следует

$$\cos \varphi = \frac{P_a}{P_S} = \frac{P_a}{\sqrt{P_a^2 + P_Q^2}} = \frac{P_a}{UI}.$$

Чем больше $\cos \varphi$, тем большее степень использования полной мощности, тем меньшим током при заданном напряжении можно

доставить к потребителю активную мощность. Действительно, действующее значение тока

$$I = \frac{P_a}{U \cos \varphi}.$$

При заданной активной мощности P_a и напряжении U ток I обратно пропорционален $\cos \varphi$, а от значения I зависят сечения подводящих энергии проводов, кабелей, линий передачи, которые, как правило, изготавливаются из дорогостоящих цветных металлов. Кроме того, потери энергии в подводящих энергии проводниках пропорциональны квадрату действующего значения тока. Таким образом, увеличивая $\cos \varphi$, мы не только снижаем потери в подводящих энергии проводниках, но можем использовать проводники меньшего сечения.

Для увеличения $\cos \varphi$ необходимо уменьшать реактивную мощность. При $P_Q = 0$ имеем $\cos \varphi = 1$. Так как $P_{QL} > 0$, а $P_{QC} < 0$, то для компенсации реактивной мощности параллельно нагрузке, имеющей, как правило, индуктивный характер, подключают компенсирующую емкость, значение которой выбирают из условия $P_Q = P_{QL} + P_{QC} = 0$.

5.4.3. Комплексная форма записи мощности

Так как расчет установившегося синусоидального режима ведется в комплексной форме, целесообразно получить выражения мощности через комплексные значения тока \dot{I} и напряжения \dot{U} . Для этого умножим \dot{U} на сопряженный комплекс тока \dot{I}^* :

$$\begin{aligned} \dot{U}\dot{I}^* &= U e^{j\alpha_u} I e^{-j\alpha_i} = UI e^{j(\alpha_u - \alpha_i)} = \\ &= UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P_a + jP_Q; \end{aligned}$$

это произведение называют комплексной мощностью \tilde{P}_S :

$$\tilde{P}_S = \dot{U}\dot{I}^* = P_a + jP_Q. \quad (5.50)$$

ПРИМЕР 3. $\dot{U} = 30 + j40$, $\dot{I} = 2 + j2$. Тогда на основании (5.50) $\tilde{P}_S = \dot{U}\dot{I}^* = (30 + j40)(2 - j2) = 140 + j20$. Активная мощность оказывается $P_a = 140$ Вт, реактивная мощность $P_Q = 20$ вар, полная мощность $P_S = \sqrt{P_a^2 + P_Q^2} = 141,4$ ВА.

5.4.4. Условие передачи максимума активной мощности в нагрузку

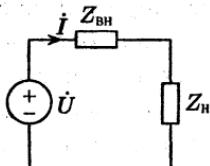


Рис. 5.15

В ряде практических задач необходимо получить в нагрузке $Z_H = r_H + jx_H$ максимальную активную мощность. По теореме Тевенена об эквивалентном источнике напряжения цепь, к которой подключена нагрузка, можно (см. рис. 5.15) заменить источником \dot{U} с внутренним (выходным, эквивалентным) сопротивлением $Z_{\text{BH}} = r_{\text{BH}} + jx_{\text{BH}}$.

Активная мощность нагрузки будет

$$P_{\text{ah}} = r_H I^2,$$

причем ток оказывается

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{(r_{\text{BH}} + r_H)^2 + (x_{\text{BH}} + x_H)^2}};$$

тогда получим

$$P_{\text{ah}} = \frac{r_H U^2}{(r_{\text{BH}} + r_H)^2 + (x_{\text{BH}} + x_H)^2}.$$

Для того, чтобы P_{ah} была максимальной, необходимо принять $x_H = -x_{\text{BH}}$, а потом взять производную по r_H от

$$P_{\text{ah}} = \frac{r_H U^2}{(r_{\text{BH}} + r_H)^2}.$$

Из условия $(dP_{\text{ah}}/dr_H) = 0$ получим, что $r_H = r_{\text{BH}}$. При этом

$$P_{\text{ah max}} = \frac{U^2}{4r_H}.$$

Таким образом, для получения максимальной активной мощности необходимо, чтобы

$$Z_H = r_H + jx_H = r_{\text{BH}} - jx_{\text{BH}}.$$

Очевидно, что в этом случае такая же мощность будет выделяться и во внутреннем сопротивлении источника, так как $r_{\text{BH}} = r_H$. Это означает, что максимальную активную мощность можно получить только при КПД, равном 50%.

§ 5.5. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Как отмечалось в § 5.3, емкостные и индуктивные сопротивления (проводимости) могут взаимно компенсироваться, так что входное сопротивление (проводимость) становится чисто резистивным, несмотря на наличие реактивных элементов. Это приводит к тому, что ток и напряжение, приложенное к цепи, совпадают по фазе.

Такое состояние электрической цепи или ее части называют резонансом. Если в произвольном режиме пассивного двухполюсника $Z = r + jx$, а $\varphi = \arctg x/r$, то в режиме резонанса будет $Z = r$, а $\varphi = 0$. Аналогично получим, что проводимость в произвольном режиме $Y = g + jb$ и $\Psi = \arctg b/g$. При резонансе будет $Y = g$ и $\Psi = 0$.

Таким образом, условие резонанса можно описать любым из следующих соотношений:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Im} Z = 0, \\ \operatorname{Im} Y = 0. \end{array} \right\} \quad (5.51)$$

5.5.1. Резонанс в последовательном RLC -контуре

В 5.3.1 уже упоминалось о режиме резонанса в последовательном RLC -контуре (рис. 5.9в), входное сопротивление которого записывается как

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Из условия (5.51) получим, что цепь будет в состоянии резонанса, если $\omega L - 1/\omega C = 0$ или $\omega^2 LC = 1$. Настройку в резонанс можно обеспечить изменением параметров L - и C -элементов или изменением частоты источника. Значение частоты, полученное из указанного выше равенства, называется резонансной частотой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Сравним характеристики последовательного RLC -контура при $\omega \neq \omega_0$ и при $\omega = \omega_0$.

$$\omega \neq \omega_0$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Входное сопротивление

$$Z = R + j(X_L - X_C)$$

$$Z_0 = R$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$|Z_0| = R = \min$$

Угол фазного сдвига

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} \neq 0 \quad \varphi_0 = 0$$

Действующее значение тока

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad I_0 = \frac{U}{|Z_0|} = \frac{U}{R} = \max$$

Активная мощность

$$P_a = UI \cos \varphi$$

$$P_{a0} = UI_0 = \max$$

Действующие значения напряжения на элементах цепи

$$U_R = RI, \quad U_{R0} = RI_0 = R \frac{U}{R} = U,$$

$$U_L = \omega LI, \quad U_{L0} = \omega_0 LI_0 = \sqrt{L/C} I_0 = \rho I_0,$$

$$U_C = (1/\omega C)I \neq U_L$$

$$U_{C0} = U_{L0}$$

Так как при резонансе $U_L = U_C$, то резонанс в последовательном контуре часто называют резонансом напряжений.

При резонансе может оказаться, что напряжение на L - и C -элементах во много раз больше, чем напряжение источника. Для оценки этого превышения вводят понятие добротности

$$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{\rho I_0}{RI_0} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{R},$$

где $\rho = \omega_0 L = \sqrt{L/C}$ — характеристическое сопротивление. Если $\sqrt{L/C} > R$, то $Q > 1$. В идеальном контуре при $R = 0$ получим, что $Q \rightarrow \infty$. В общем случае напряжение на реактивных элементах при резонансе в Q раз больше напряжения источника:

$$U_{L0} = U_{C0} = QU.$$

Все соотношения для резонанса в параллельном RLC -контуре при резонансе токов, о котором уже упоминалось в 5.3.2, можно получить на дуальной основе, так как параллельный и последовательный контуры дуальны.

5.5.2. Частотные характеристики последовательного RLC-контура

Из приведенного в 5.5.1 анализа видно, что при изменении частоты изменяются действующее значение (и амплитуда) тока и угол фазного сдвига.

Так как $\dot{I} = Y\dot{U}$, то поведение тока зависит от проводимости:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R + j(\omega L - 1/(\omega C))} = |Y(j\omega)|e^{j\psi(\omega)},$$

$$|Y(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}, \quad (5.52)$$

$$\Psi(\omega) = -\arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (5.53)$$

Действительно,

$$\dot{I} = I e^{j\alpha_i} = |Y(j\omega)|e^{j\psi(\omega)} U e^{j\alpha_u};$$

тогда

$$I = |Y(j\omega)|U; \quad \alpha_i = \Psi(\omega) + \alpha_u. \quad (5.54)$$

В соответствии с (5.54) зависимость $|Y(j\omega)|$ называют амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) входной проводимости, а $\Psi(\omega)$ — фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) входной проводимости. На рисунке 5.16 приведены АЧХ и ФЧХ, построенные по выражениям (5.52) и (5.53).

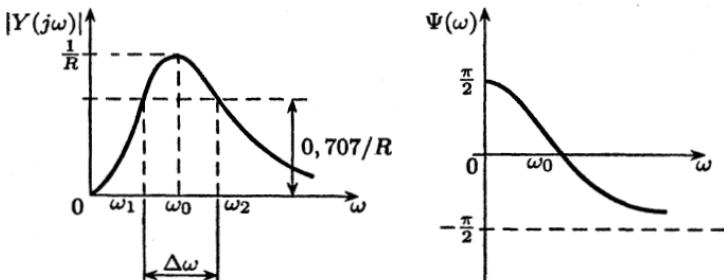


Рис. 5.16

Как следует из АЧХ, последовательный RLC-контур обладает избирательной способностью, так как он имеет относительно большую проводимость (малое сопротивление) на частотах, близких к резонансной, и малую проводимость (большое

сопротивление) на частотах, далеких от резонансной. Для оценки избирательной способности вводят понятие полосы пропускания, которую определяют по уровню половинной мощности. Так как $P_a = RI^2$, то уменьшение тока в $\sqrt{2}$ раз эквивалентно уменьшению мощности в 2 раза. Поэтому полоса пропускания может быть найдена по АЧХ входной проводимости по уровню $|Y(j\omega)|_{\max} / \sqrt{2} = 0,707|Y(j\omega)|_{\max}$ (см. рис. 5.16).

Как следует из ФЧХ, в последовательном RLC -контуре изменяется знак Ψ с изменением частоты. Для частот $\omega < \omega_0$ имеем $\Psi(\omega) > 0$, ток опережает по фазе напряжение, т. е. контур имеет емкостной характер. Если $\omega > \omega_0$, то $\Psi(\omega) < 0$ и ток отстает от напряжения, т. е. контур имеет индуктивный характер.

5.5.3. Нормировка частотных характеристик

Для того чтобы частотные характеристики имели минимальное число параметров, удобно вводить нормировку по уровню и по частоте, выбирая базисные значения сопротивления Z_0 (проводимости Y_0) и частоты ω_0 . Тогда нормированные значения сопротивления (проводимости) и частоты

$$Z_* = \frac{Z}{Z_0}; \quad Y_* = \frac{Y}{Y_0}; \quad \omega_* = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Проведем нормировку $Y(j\omega)$ последовательного RLC -контура:

$$Y_*(j\omega_*) = 1 / \left\{ Y_0 \left[R + j \left(\omega_0 \omega_* L - \frac{1}{\omega_0 \omega_* C} \right) \right] \right\}.$$

Если принять $Y_0 = 1/R_0$, а $\omega_0 = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, то

$$Y_*(j\omega_*) = \frac{1}{1 + j \left(\frac{\omega_0 \omega_* L}{R} - \frac{1}{R \omega_* \omega_0 C} \right)} = \frac{1}{1 + j Q (\omega_* - 1/\omega_*)},$$

$$R_* = R/R_0; \quad L_* = \omega_0 L/R_0; \quad C_* = \omega_0 C R_0.$$

Тогда АЧХ и ФЧХ, соответственно, будут

$$\begin{cases} |Y_*(j\omega_*)| = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\omega_*-1/\omega_*)^2}}, \\ \Psi(\omega_*) = -\arctg [Q(\omega_* - 1/\omega_*)]. \end{cases} \quad (5.55)$$

На рисунке 5.17 построены АЧХ в соответствии с (5.55) при различных добротностях Q . Как видно из графика, полоса пропускания зависит от добротности. Чем больше добротность, тем меньше полоса пропускания, т. е. выше избирательность контура.

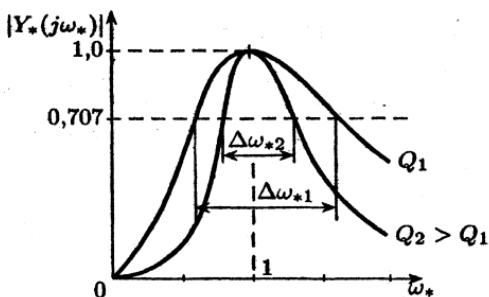


Рис. 5.17

Можно доказать, что

$$Q = \frac{1}{\Delta\omega_*} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega},$$

где $\Delta\omega_*$ — полоса пропускания в относительных единицах.

Частотные характеристики параллельного контура аналогичны характеристикам последовательного контура, а в нормированных единицах при $z_6 = R$ и $\omega_6 = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ они полностью совпадают:

$$\begin{cases} |Z_*(j\omega_*)| = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\omega_*-1/\omega_*)^2}}, \\ \varphi(\omega_*) = -\arctg [Q(\omega_* - 1/\omega_*)]. \end{cases}$$

5.5.4. Комплексные функции и частотные характеристики

Исследовать поведение той или иной реакции цепи с изменением частоты источника, можно исследуя частотные свойства соответствующих функций. Если на цепь действует синусоидальный источник напряжения с $\dot{U}_1 = U_1 e^{j\alpha_u}$, то реакцией может быть входной ток, ток или напряжение какой-либо k -й ветви. Тогда для этих случаев можно записать:

$$\begin{cases} \dot{I}_{\text{вх}} = Y_{\text{вх}}(j\omega)\dot{U}_1, \\ \dot{I}_k = Y_{k-1}(j\omega)\dot{U}_1, \\ \dot{U}_k = H_U(j\omega)\dot{U}_1, \end{cases}$$

где $Y_{\text{вх}}(j\omega)$ — комплексная функция входной проводимости, $Y_{k-1}(j\omega)$ — комплексная функция передаточной проводимости, $H_U(j\omega)$ — комплексная функция передачи по напряжению.

Если воздействием является синусоидальный источник тока с $\dot{I}_1 = I_1 e^{j\alpha_i}$, то реакцией может быть входное напряжение, напряжение или ток какой-либо k -й ветви. Тогда для этих случаев можно записать:

$$\begin{cases} \dot{U}_{\text{вх}} = Z_{\text{вх}}(j\omega) \dot{I}_1, \\ \dot{U}_k = Z_{k-1}(j\omega) \dot{I}_1, \\ \dot{I}_k = H_I(j\omega) \dot{I}_1, \end{cases}$$

где $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ — комплексная функция входного сопротивления, $Z_{k-1}(j\omega)$ — комплексная функция передаточного сопротивления, $H_I(j\omega)$ — комплексная функция передачи по току.

Каждая из шести приведенных функций может быть записана через модуль и аргумент или через вещественную и мнимую составляющие:

$$\begin{aligned} Y_{\text{вх}}(j\omega) &= |Y_{\text{вх}}(j\omega)| e^{j\psi(\omega)} = g(\omega) + jb(\omega), \\ Z_{\text{вх}}(j\omega) &= |Z_{\text{вх}}(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = r(\omega) + jx(\omega), \\ H_U(j\omega) &= |H_U(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} = B(\omega) + jM(\omega), \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Модули всех функций определяют отношение действующих значений (амплитуд) соответствующих реакций и воздействий (при изменении частоты) и являются амплитудно-частотными характеристиками соответствующих функций. Аргументы (фазы) всех функций определяют разность начальных фаз соответствующих реакций и воздействий при изменении частоты и являются фазо-частотными характеристиками соответствующих функций. Следует отметить, что АЧХ и ФЧХ — это функции вещественной переменной ω . Кроме АЧХ и ФЧХ комплексные функции могут характеризоваться вещественными частотными характеристиками соответствующих функций $g(\omega)$, $r(\omega)$, $B(\omega)$ и мнимыми частотными характеристиками $b(\omega)$, $x(\omega)$, $M(\omega)$.

Например, для последательной RC -цепи функция входной проводимости $Y_{\text{вх}}(j\omega) = 1/(R - j/\omega C)$. Ее амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики: $|Y_{\text{вх}}(j\omega)| = 1/\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}$, $\Psi(\omega) = \arctg(1/\omega RC)$. Вещественная частотная характеристика входной проводимости $g(\omega) = R/(R^2 + 1/(\omega C)^2)$. Мнимая частотная характеристика входной проводимости $b(\omega) = 1/(\omega C)/(R^2 + 1/(\omega C)^2)$.

Кроме рассмотренных функций на практике используется амплитудно-фазовая характеристика (АФХ), которая представляет собой траекторию (годограф), которую описывает вектор, определяемый соответствующей функцией $H(j\omega) = B(\omega) + jM(\omega)$ на комплексной плоскости при изменении частоты (см. рис. 5.18). Амплитудно-фазовая характеристика в неявном виде включает в себя АЧХ и ФЧХ, а также вещественную и мнимую частотные характеристики.

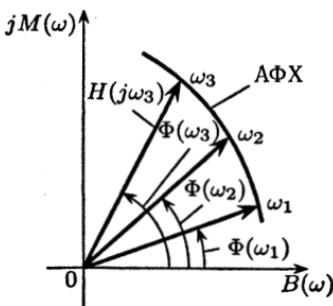


Рис. 5.18

5.5.5. Обобщенная экспонента и комплексная частота

Рассмотренный метод комплексных амплитуд для синусоидальных напряжений и токов легко распространить на некоторые другие сигналы.

Для синусоидальных напряжений было получено следующее представление через экспоненты с мнимым аргументом:

$$U_m \cos(\omega t + \alpha_u) = \operatorname{Re} (\dot{U}_m e^{j\omega t}) = 0,5 (\dot{U}_m e^{j\omega t} + \dot{U}_m^* e^{-j\omega t}).$$

Умножим левую и правую части этого равенства на множитель $e^{\sigma t}$, где σ — вещественное число. Тогда

$$\begin{aligned} U_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \alpha_u) &= \operatorname{Re} [\dot{U}_m e^{(\sigma+j\omega)t}] = \\ &= \frac{1}{2} [\dot{U}_m e^{(\sigma+j\omega)t} + \dot{U}_m^* e^{(\sigma-j\omega)t}]. \end{aligned}$$

Будем называть комплексной частотой $s = \sigma + j\omega$ и сопряженной комплексной частотой $\dot{s} = \sigma - j\omega$. Тогда

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \alpha_u) = \operatorname{Re} [\dot{U}_m e^{st}] = \\ &= \frac{1}{2} [\dot{U}_m e^{st} + \dot{U}_m^* e^{\dot{s}t}]. \quad (5.56) \end{aligned}$$

Выражение $\dot{U}_m e^{st}$ называют обобщенной экспонентой.

Как видно, с помощью обобщенной экспоненты одинаковым образом описываются разные сигналы в зависимости от комплексной частоты s .

Возможные случаи сведены в таблицу:

Комплексная частота	Напряжение
$s = -\sigma + j\omega$	$u(t) = U_m e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \alpha_u)$
$s = \sigma + j\omega$	$u(t) = U_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \alpha_u)$
$s = j\omega$	$u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$
$s = -\sigma$	$u(t) = U_m e^{-\sigma t}$
$s = \sigma$	$u(t) = U_m e^{\sigma t}$
$s = 0$	$u(t) = U_m = \text{const}$

Как видно из таблицы, синусоидальное напряжение (ток) является частным случаем обобщенного воздействия (5.56) при $s = j\omega$.

Анализ вынужденного режима при действии обобщенного воздействия вида (5.56) не усложняется по сравнению с синусоидальным воздействием: лишь вместо $j\omega$ необходимо везде записать s , т. е.

$$Z_R(s) = R, \quad Z_L(s) = sL, \quad Z_C(s) = \frac{1}{(sC)}.$$

На обобщенные воздействия (5.56) вида экспоненциальных колебаний может быть также распространено понятие комплексной функции как отношение комплексной амплитуды реакции \dot{F}_{m2} к комплексной амплитуде единственного в цепи воздействия \dot{F}_{m1} :

$$H(s) = \frac{\dot{F}_{m2}}{\dot{F}_{m1}},$$

причем при $s = j\omega$, т. е. в установившемся синусоидальном режиме, получим описанные в 5.5.4 комплексные функции — обобщенные частотные характеристики $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}.$$

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ

§ 6.1. СВЯЗЬ ФОРМЫ СИГНАЛОВ С ПОЛЮСАМИ ИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ЛАПЛАСУ

6.1.1. Общая характеристика преобразуемых по Лапласу сигналов

Если сигнал (т. е. переменная в цепи) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$, а при $t > 0$ рост $f(t)$ ограничен в сравнении с нарастающей экспонентой (рис. 6.1a), т. е. $|f(t)| < M e^{\sigma_A t}$, где $M > 0$, то функция $f(t)$ может быть преобразована по Лапласу:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[f(t)], \quad (6.1)$$

причем несобственный интеграл (6.1) абсолютно сходится (т. е. площадь $|f \exp(-st)|$ ограничена) и $F(s)$ является регулярной функцией (т. е. непрерывной и дифференцируемой) в правой полуплоскости $s = \sigma + j\omega$ правее прямой $\operatorname{Re} s = \sigma_A > 0$, где σ_A — абсцисса абсолютной сходимости (рис. 6.1б).

Действительно,

$$F(s) \leq \int_0^\infty |f(t)e^{-\sigma t - j\omega t}| dt \leq \int_0^\infty |M e^{-(\sigma - \sigma_A)t}| dt = \frac{M}{\sigma - \sigma_A}, \quad (6.2)$$

т. е. последний интеграл в (6.2) отражает при $\sigma > \sigma_A$ площадь затухающей экспоненты, а эта площадь ограничена (см. рис. 6.1в).

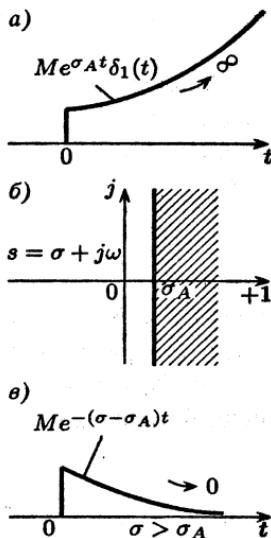


Рис. 6.1

Условимся использовать обозначение соответствия $f(t) \div F(s)$, где $f(t)$ — оригинал, т. е. сигнал (точнее — функция, описывающая сигнал); $F(s)$ — изображение $f(t)$ по Лапласу.

Примечание. С позиции теории цепей одностороннюю функцию необходимо записывать в форме $f(t) = f^*(t)\delta_1(t)$, но, обычно, оговаривая $t > 0$ не указывают $\delta_1(t)$, если в этом нет необходимости, например, $\cos \omega_0 t \div s/(s^2 + \omega_0^2)$, хотя, строго говоря, необходимо записывать $\cos \omega_0 t \delta_1(t) \div s/(s^2 + \omega_0^2)$.

Формула обратного преобразования Лапласа имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (6.3)$$

причем интегрирование в (6.3) ведется вдоль прямой $\operatorname{Re} s = c$ в правой полуплоскости, так чтобы все особые точки s_k изображения $F(s)$ лежали слева от этой прямой (по определению особой точки $F(s_k) \rightarrow \infty$). В теории цепей в качестве особых точек в основном рассматривают полюсы (т. е. корни знаменателя) дробно-рациональной функции

$$F(s) = \frac{B(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{d_n s^n + \dots + d_1 s + d_0} = \frac{1}{d_n} \frac{B(s)}{\prod_{(n)} (s - s_k)}; \quad (6.4)$$

однако на практике для перехода к оригиналу используют не (6.3), а таблицу соответствия оригиналов и изображений или теорему разложения.

6.1.2. Применение теоремы разложения для отыскания оригиналов

К оригиналу от изображения по Лапласу (6.4) переходят на основании теоремы разложения по следующей формуле:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{d_n} \frac{B(s)}{\prod_{(n)} (s - s_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k} + A_0 \div f(t) = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k t} \delta_1(t) + A_0 \delta(t), \quad (6.5) \end{aligned}$$

при этом коэффициенты разложения $F(s)$ на простейшие дроби вычисляются методом неопределенных коэффициентов или по формулам

$$A_k = (s - s_k) F(s) \Big|_{s=s_k} = \frac{B(s)}{D'(s)} \Big|_{s=s_k}, \quad (6.6)$$

$$A_0 = F(\infty),$$

причем первый вариант расчета A_k по формуле (6.6) более прост, а величину A_0 называют целой частью $F(s)$.

Примечания:

1. Формула (6.5) приведена для случая любых некратных корней (в том числе комплексных, мнимых, нулевого).
2. В (6.4) степень полинома знаменателя не ниже степени полинома числителя, т. е. $n \geq m$, причем $A_0 = 0$ при $n > m$ и $A_0 = b_n/d_n$ при $n = m$.
3. Функция $F(s)$ в (6.5) должна быть дробно-рациональной, как указано в (6.4).

Рассмотрим примеры расчета по теореме разложения, в том числе расширяющие возможности ее стандартного применения (6.5).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим случай $n = m$.

$$F(s) = \frac{10s^2 + 10}{(s+2)s} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s} + A_0 \div f(t) =$$

$$= (A_1 e^{-2t} + A_2) \delta_1(t) + A_0 \delta(t),$$

где

$$A_1 = (s+2)F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{10s^2 + 10}{s} \Big|_{s=-2} = \frac{10(-2)^2 + 10}{-2} = -25;$$

$$A_2 = (s+0)F(s) \Big|_{s=0} = \frac{10s^2 + 10}{s+2} \Big|_{s=0} = 5;$$

$$A_0 = F(\infty) = 10.$$

Примечания:

1. Нулевой полюс $s_2 = 0$ дал в оригинале $A_2 e^{0t} = A_2$.
2. Трактовка использованного выше варианта формулы (6.6) при расчете A_k очевидна — при сохранении равенства $F(s)$ слева и справа применен вариант преобразования, исключающий все коэффициенты A_k , кроме искомого.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим случай кратных полюсов, например

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\dots}{(s+2)^3} = \frac{A_1}{(s+2)^3} + \frac{A_2}{(s+2)^2} + \frac{A_3}{s+2} + \dots \div f(t) = \\ &= \left(A_1 \frac{t^2}{2} + A_2 t + A_3 \right) e^{-2t} \delta_1(t) + \dots \end{aligned}$$

Формулы, в которых использована описанная выше процедура исключения всех коэффициентов, кроме искомого, в данном случае, очевидно, имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 &= (s+2)^3 F(s) \Big|_{s=-2}, \\ A_2 &= \frac{d}{ds} [(s+2)^3 F(s)] \Big|_{s=-2}, \\ A_3 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s+3)^3 F(s)] \Big|_{s=-2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Примечания:

- На практике, однако, часто вместо формул типа (6.7) применяют метод неопределенных коэффициентов, в котором разложение $F(s)$ справа приводят к общему знаменателю и находят A_k , приравнивая коэффициенты числителя $F(s)$ слева и справа при одинаковых степенях s .
- Иногда один из коэффициентов (A_3 в примере 2) находят, используя теорему о начальном значении $f(0+) = sF(s)$ при $s \rightarrow \infty$ (поскольку в этом случае в примере 2 составляющие с коэффициентами A_1 , A_2 исключаются как в s -, так и в t -областях).
- Наличие кратного корня в знаменателе $F(s)$ аналогично появлению кратного корня ХП при расчете переходных процессов, т. е. при экспоненте появляется множитель t или t^2

ПРИМЕР 3. Если $F(s)$ не является дробно-рациональной функцией, то на простейшие дроби разлагают только ее дробно-рациональную часть, например,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{10s + 10e^{-3s}}{s(s+2)} = \frac{10}{s+2} + \frac{10}{s(s+2)} e^{-3s} = \frac{10}{s+2} + \\ &+ \left(\frac{5}{s} + \frac{-5}{s+2} \right) e^{-3s} \div f(t) = 10e^{-2t} \delta_1(t) + [5 - 5e^{-2(t-3)}] \delta_1(t-3). \end{aligned}$$

Примечание. При записи смещенных (запаздывающих) друг относительно друга односторонних функций использование единичных ступенчатых функций обязательно.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим подробно случай комплексных полюсов, например,

$$F(s) = \frac{100}{(s^2 + 6s + 25)s} = \frac{100}{(s + 3 - j4)(s + 3 + j4)s} = \\ = \frac{A_1}{s + 3 - j4} + \frac{A_2}{s + 3 + j4} + \frac{4}{s},$$

где

$$A_1 = (s + 3 - j4)F(s)|_{s=-3+j4} = \frac{100}{(s + 3 + j4)s}|_{s=-3+j4} =$$

$$= \frac{100}{j8(-3 + j4)} = \frac{100}{8e^{j90^\circ}5e^{j127^\circ}} = 2,5e^{-j217^\circ};$$

$$A_{21} = \hat{A}_1 = 2,5e^{-j217^\circ},$$

$$f(t) = [2,5e^{-j217^\circ}e^{(-3+j4)t} + 2,5e^{j217^\circ}e^{(-3-j4)t}] + 4 = \\ = 2,5e^{-3t} [e^{j(4t-217^\circ)} + e^{-j(4t+217^\circ)}] + 4 = 5e^{-3t} \cos(4t-217^\circ) + 4.$$

Примечания:

- Сопряженность коэффициентов $A_2 = \hat{A}_1$ математически следует из варианта формулы (6.6) $A_k = B(s)/D'(s)$ при $s = s_k$, поскольку одинаковые действия над сопряженными комплексными числами $s_{1,2} = -3 \pm j4$ дают сопряженный результат; с другой стороны, суммирование сопряженных функций приводит к вещественному ответу.
- Аналогично следует действовать, если полюсы $F(s)$ мнимые.

6.1.3. Свойства и теоремы преобразования Лапласа

Рассмотрим некоторые из свойств и теорем.

- Свойство линейности:

$$\sum a_k f_k(t) \div \sum a_k F_k(s). \quad (6.8)$$

- Теоремы о дифференцировании и интегрировании оригинала:

$$f'(t) \div sF(s) - f(0-); \quad \int_0^t f(t) dt \div \frac{F(s)}{s}. \quad (6.9)$$

3. Теорема свертки (изображение интеграла наложения):

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)h(t-\tau) d\tau \div F_2(s) = F_1(s)H(s). \quad (6.10)$$

4. Теорема сдвига (смещения изображения в s -области):

$$F(s+\beta) \div f(t)e^{-\beta t}. \quad (6.11)$$

5. Теорема запаздывания (смещения оригинала в t -области):

$$f(t-t_3) \div F(s)e^{-st_3}. \quad (6.12)$$

6. Теорема подобия (нормировки, т. е. масштабирования):

$$f(at) \div \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

7. Теоремы о предельных значениях — начальном и конечном:

$$f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s), \quad (6.13)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (6.14)$$

Примечание. Теорема (6.14) справедлива только в том случае, если полюсы $F(s)$ находятся в левой полуплоскости или, в крайнем случае, один полюс — в начале координат.

8. Свойство коммутативности преобразования Лапласа с операциями взятия вещественной или мнимой части (если не раскрывать сущности аргумента s): $\operatorname{Re} f(t) \div \operatorname{Re} F(s)$, $\operatorname{Im} f(t) \div \operatorname{Im} F(s)$.

9. Свойство дифференцирования и интегрирования по параметру:

$$\begin{aligned} & \frac{df(t, k)}{dk} \div \frac{dF(s, k)}{dk}, \\ & \int_{k_1}^{k_2} f(t, k) dk \div \int_{k_1}^{k_2} F(s, k) dk. \end{aligned}$$

10. Теорема о дифференцировании изображения:

$$\frac{dF(s)}{ds} \div -tf(t).$$

6.1.4. Связь формы оригинала с полюсами изображения (таблица соответствия оригиналов и изображений)

Найдем на основании (6.1) изображение дельта-функции:

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (6.15)$$

Примечания:

1. В (6.15) нижний предел в сравнении с (6.1) расширен до $t = 0-$, чтобы интервал интегрирования «захватил» дельта-функцию, площадь которой равна единице.
2. При записи второго интеграла в (6.15) использовано свойство «выборки», т. е.

$$\delta(t)e^{-st} = \delta(t)e^0.$$

3. В отличие от (6.1), в теории цепей в основном используется так называемое расширенное преобразование Лапласа, обозначаемое \mathcal{L} :

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[f(t)r].$$

Зная лишь изображение дельта-функции, можно на основании результатов п. 6.1.3 составить таблицу соответствия оригиналов и изображений $f(t) \div F(s)$:

1. Изображение дельта-функции $\delta(t) \div 1$.
2. Изображение единичной ступенчатой функции имеет вид: $\delta_1(t) \div 1/s$, поскольку $\delta_1(t) = \int_0^t \delta(t) dt$, а на основании (6.9) интегрирование оригинала соответствует делению изображения на s .

ВЫВОД: из сравнения (см. рис. 6.2а) графика сигнала $\delta_1(t)$ и диаграммы расположения полюса изображения $s_1 = 0$ в комплексной плоскости, следует, что полюсу $F(s)$ в начале координат соответствует наличие постоянной составляющей в оригинале при $t > 0$.

3. Изображение постоянной величины: $A \div A/s$, поскольку на основании 6.1.1 фактически по Лапласу преобразуется функция $A\delta_1(t)$ для $t > 0$.

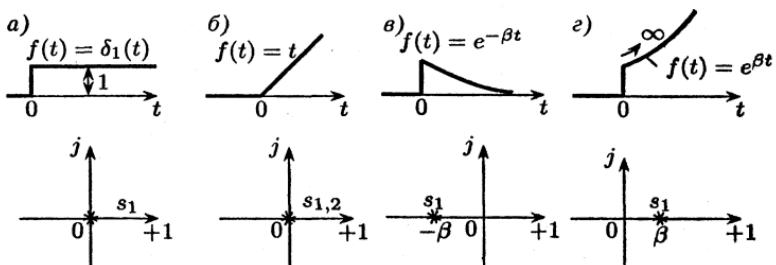


Рис. 6.2

4. Изображение линейной функции $t \div 1/s^2$, поскольку фактически находим изображение $f(t) = t\delta_1(t) = \int_{0-}^t \delta_1(t) dt$ при учете теоремы интегрирования (6.9).

Вывод: кратному полюсу в начале координат $s_{1,2} = 0$ соответствует появление множителя t в оригинале (см. также рис. 6.2б).

Аналогично выводятся формулы $t^2/2 \div 1/s^3$, $t^n/n! \div 1/s^{n+1}$.

5. Изображение затухающей экспоненты $e^{-\beta t} \div 1/(s + \beta)$, поскольку фактически преобразуется функция $e^{-\beta t}\delta_1(t)$ при учете теоремы сдвига (6.11).

Вывод: отрицательному полюсу ($s_1 = -\beta$) соответствует затухающая экспонента в оригинале (см. также рис. 6.2в).

6. Изображение нарастающей экспоненты $e^{\beta t} \div 1/(s - \beta)$ на основании теоремы сдвига (6.11).

Вывод: положительному полюсу $s_1 = \beta$ в изображении $F(s)$ соответствует неограниченно нарастающая экспонента в оригинале $f(t)$ (см. также рис. 6.2г), т. е. имеет место неустойчивый процесс при $t > 0$, что противоречит условиям устойчивости (3.9), (3.10).

7. Произведение линейно нарастающей функции и затухающей экспоненты имеет изображение $te^{-\beta t} \div 1/(s + \beta)^2$ на основании использования теоремы сдвига (6.11) при $f(t) = t \div 1/s^2$.

Вывод: кратному полюсу $s_{1,2} = -\beta$ изображения соответствует наличие множителя t в оригинале (см. также рис. 6.3а).

Аналогично выводится формула $0,5t^2e^{-\beta t} \div 1/(s + \beta)^3$.

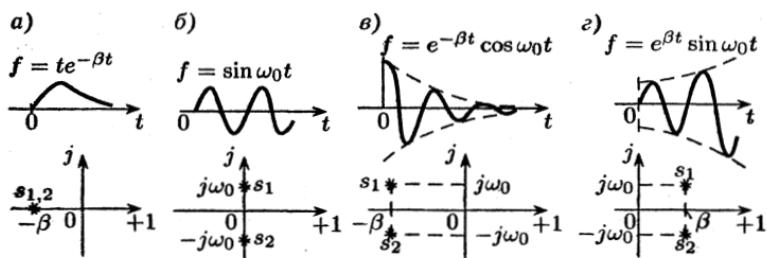


Рис. 6.3

8. Изображение синусоиды $\sin \omega_0 t \div \omega / (s^2 + \omega_0^2)$, поскольку $\sin \omega_0 t = \operatorname{Im} e^{j\omega_0 t} \div \operatorname{Im} 1 / (s - j\omega_0)$.

ВЫВОД: Мнимым полюсам $s_{1,2} = \pm j\omega_0$ изображения соответствуют незатухающие гармонические колебания в оригинале (см. также рис. 6.3б).

9. Изображение косинусоиды

$$\cos \omega_0 t \div s / (s^2 + \omega_0^2)$$

обосновывается аналогично предыдущему.

10. Произведение косинусоиды и затухающей экспоненты имеет изображение

$$e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \div (s + \beta) / ((s + \beta)^2 + \omega_0^2)$$

на основании теоремы сдвига (6.11).

ВЫВОД: комплексным полюсам изображения находящимся в левой полуплоскости $s_{1,2} = -\beta \pm j\omega_0$ (см. также рис. 6.3в), соответствуют затухающие по экспоненте гармонические колебания.

11. Произведение синусоиды и нарастающей экспоненты имеет изображение

$$e^{\beta t} \sin \omega_0 t \div \omega_0 / ((s - \beta)^2 + \omega_0^2)$$

на основании теоремы сдвига (6.11).

ВЫВОД: комплексным полюсам изображения находящимся в правой полуплоскости (см. также рис. 6.3г), соответствует неустойчивый (неограниченно нарастающий) колебательный процесс.

§ 6.2. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

6.2.1. Законы Кирхгофа в операторной форме

Метод расчета переходных процессов с использованием преобразования Лапласа обычно называют операторным методом.

Уравнения законов Кирхгофа $\sum i_k(t) = 0$, $\sum u_k(t) = 0$ преобразуем по Лапласу с использованием свойства линейности из 6.1.3:

$$\sum I_k(s) = 0, \quad \sum U_k(s) = 0.$$

Примечание. При использовании метода комплексных амплитуд (МКА) для анализа установившегося синусоидального режима уравнения $\sum \dot{I}_k = 0$, $\sum \dot{U}_k = 0$ имели аналогичный вид.

6.2.2. Операторная схема замещения R -элемента

Преобразуем по Лапласу уравнение R -элемента $u_R(t) = R i_R(t)$, используя свойство линейности из 6.1.3:

$$U_R(s) = RI_R(s),$$

при этом операторное сопротивление резистивного элемента $Z_R(s) = R$ такое же, как сопротивление R -элемента в t -области, и при использовании МКА ($\dot{U}_R = R \dot{i}_R$).

6.2.3. Операторная схема замещения L -элемента

Уравнения индуктивного элемента во временной области

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}, \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt + i_L(0-)$$

преобразуем по Лапласу, используя из 6.1.3 свойство линейности, теоремы дифференцирования и интегрирования (6.9), а также формулу изображения постоянной составляющей из п. 6.1.4:

$$U_L(s) = LsI_L(s) - Li_L(0-), \quad (6.16)$$

$$I_L(s) = \frac{U_L(s)}{Ls} + \frac{i_L(0-)}{s}. \quad (6.17)$$

Алгебраическую сумму напряжений в (6.16) трактуем как уравнение последовательного соединения элементов, а (6.17) — как уравнение параллельного соединения: операторные схемы замещения L -элемента, соответствующие уравнениям (6.16), (6.17), приведены на рисунке 6.4, где $Z_L(s) = sL$ — операторное сопротивление L -элемента ($Y_L = 1/(sL)$ — операторная проводимость).

ВЫВОД: операторные схемы (рис. 6.4) эквивалентны; они соответствуют правилам эквивалентного преобразования источника напряжения и источника тока, удовлетворяют законам Кирхгофа (например, $I_L = I_1 + I_2$) и закону Ома (например, $I_1 = U_L/Z_L$); независимое начальное условие учитывается либо источником напряжения величины $Li_L(0-)$, либо источником тока $I_2 = i_L(0-)/s$.
Примечание. В МКА аналогично было $\dot{U}_L = sL \cdot \dot{I}_L$, где $Z_L = j\omega L$ в установившемся синусоидальном режиме ($s = j\omega$); дополнительные источники отсутствовали.

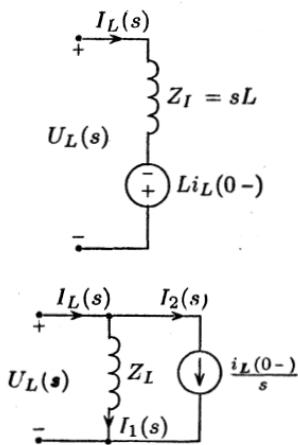


Рис. 6.4

6.2.4. Операторная схема замещения C -элемента

Уравнения емкостного элемента в t -области

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt + u_C(0-), \quad i_C(t) = Cu'_C(t)$$

преобразуем по Лапласу:

$$U_C(s) = \frac{1}{Cs} I_C(s) + \frac{u_C(0-)}{s}, \quad (6.18)$$

$$I_C(s) = CsU_C(s) - Cu_C(0-). \quad (6.19)$$

Трактуем (6.18) как операторное уравнение последовательного соединения. (6.19) — как уравнение параллельного соединения, соответствующие операторные схемы замещения C -элемента

приведены на рисунке 6.5а, где $Z_C(s) = 1/(Cs)$ — операторное сопротивление емкостного элемента ($Y_C = 1/Z_C = sC$ — операторная проводимость).

Вывод: как операторные уравнения (6.18), (6.19), так и операторные схемы замещения эквивалентны; схемы соответствуют правилам преобразования источников, отвечают законам Кирхгофа (например, $I_C = I_1 - I_2$) и Ома (например, $I_1 = U_C/Z_C$); независимое начальное условие учитывается введенным в операторную схему дополнительным источником.

Примечание. В МКА аналогично было $\dot{I}_C = sC\dot{U}_C$, где комплексная проводимость $Y_C = j\omega C$ в установившемся синусоидальном режиме ($s = j\omega$); дополнительные источники отсутствовали.

Формально перейдем от операторных схем замещения (рис. 6.5а) к приведенным на рисунке 6.5б схемам во временной области (которые, однако, фактически справедливы лишь для $t > 0-$). В этих схемах C — незаряженный к моменту $t = 0-$ емкостной элемент, а независимое начальное условие $u_C(0-)$ учтено дополнительным источником, описываемым либо ступенчатой, либо импульсной функциями.

Вывод: для $t > 0$ независимое начальное условие всегда можно учесть, задавая эквивалентное воздействие.

Обобщая полученные в п. 6.2.1–6.2.4 результаты, сделаем заключение о расчете цепей операторным методом.

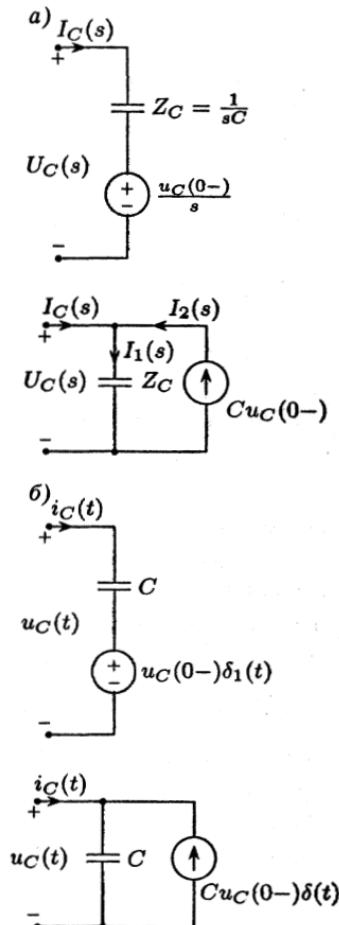


Рис. 6.5

ВЫВОДЫ:

1. Анализ цепей операторным методом (ОМ) можно проводить по эквивалентным операторным схемам замещения, используя аналогию расчету R -цепей или расчету на основании МКА.
2. Для перехода от операторных уравнений и схем к уравнениям и схемам МКА достаточно исключить дополнительные источники и провести формальные замены $U(s) \div \dot{U}$, $I(s) \div \dot{I}$, $s_{\text{OM}} \div s_{\text{МКА}} = j\omega$ в установившемся синусоидальном режиме.

6.2.5. Расчет переходных процессов в цепях операторным методом

Обычно используют один из двух вариантов анализа.

Последовательность расчета по эквивалентным операторным схемам замещения:

1. Анализируют режим в цепи при $t < 0$ (перед коммутацией) и находят независимые начальные условия $u_{Ck}(0-)$, $i_{Lk}(0-)$.
2. Для $t > 0$ составляют эквивалентную операторную схему, рассчитывают ее аналогично R -цепям (или МКА), находят изображение реакции $F_{\text{вых}}(s)$, а затем оригинал $f_{\text{вых}}(t)$.

Последовательность расчета по операторным уравнениям:

1. Как указано ранее, находят $u_{Ck}(0-)$, $i_{Lk}(0-)$.
2. Для $t > 0$ составляют по законам Кирхгофа систему независимых интегродифференциальных уравнений цепи; преобразуют ее по Лапласу; решая полученную таким образом систему алгебраических уравнений находят изображение реакции, а затем ее оригинал.

Примечания:

1. Расчет по операторным схемам менее трудоемок, так как возможно использование меньшего числа уравнений, однако при анализе, например, индуктивно-связанных цепей, часто приходится применять расчет по операторным уравнениям.
2. Для контроля полученных результатов широко используют теоремы (6.13), (6.14).
3. Поскольку в теории цепей используется расширенное преобразование Лапласа (начиная с $t = 0-$), то все дельта-функции, появляющиеся при $t = 0$ в особых случаях коммутации (см. 4.2.4), при решении задач выявляются автоматически.

ПРИМЕР 5 (особый случай коммутации с мгновенным перезарядом емкостей). Схема приведена на рисунке 6.6а, причем $u_0 = 10 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $C_1 = 1 \Phi$, $C_2 = 4 \Phi$. Найти u_{C1} , i_{C1} при $t > 0$ операторным методом.

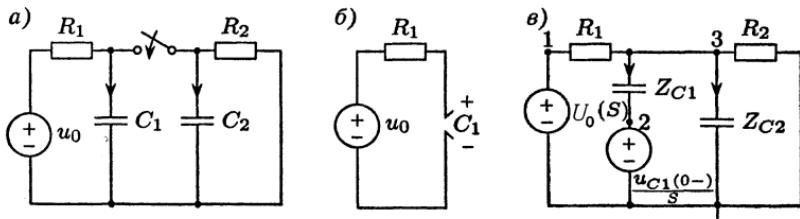


Рис. 6.6

По эквивалентной схеме цепи при $t = 0-$, изображенной на рисунке 6.6б, находим $u_{C1}(0-) = u_0 = 10 \text{ В}$; кроме того из анализа рисунка 6.6а очевидно, что $u_{C2}(0-) = 0$.

Операторная схема замещения цепи для $t > 0$ показана на рисунке 6.6в, где $U_0(s) = 10/s$, $z_{C1} = 1/s$, $z_{C2} = 1/(4s)$. Уравнения метода узловых напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} U_1^y(s) &= U_0(s) = 10/s; \\ U_2^y(s) &= u_{C1}(0-)/s = 10/s; \\ (G_1 + Y_{C1} + Y_{C2} + G_2)U_3^y - G_1U_1^y - Y_{C1}U_2^y &= 0, \end{aligned}$$

или в численном виде $(1 + s + 4s + 1)U_3^y = 10/s + 10$, откуда

$$U_{C1}(s) = U_3^y(s) = \frac{10 + 10s}{5(s + 0,4)s} = \frac{5}{s} + \frac{-3}{s + 0,4} \div u_{C1}(t) = 5 - 3e^{-0,4t}.$$

Далее находим:

$$\begin{aligned} I_{C1}(s) &= \frac{U_3^y - U_2^y}{Z_{C1}} = \frac{10 + 10s}{5(s + 0,4)} - 10 = \\ &= 2 + 1,2/(s + 0,4) - 10 \div i_{C1}(t) = -8\delta(t) + 1,2e^{-0,4t}. \end{aligned}$$

Как видим, выявлены как дельта-функция, описывающая ток мгновенного разряда емкости C_1 , так и нарушение принципа непрерывности напряжения емкостного элемента, поскольку $u_{C1}(0-) = 10 \neq u_{C1}(0+) = 2$.

§ 6.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

6.3.1. Изображение периодических сигналов

На рисунке 6.7 изображен для $t > 0$ график некоторого периодического сигнала $f_{\text{п}}(t)$; при этом T — период сигнала, $f_1(t)$ — описание $f_{\text{п}}(t)$ в интервале $0 < t < T$ (строго говоря, периодический сигнал рассматривается как периодический в интервале $-\infty < t < \infty$, поэтому сигнал $f_{\text{п}}(t)$ является квазипериодическим).

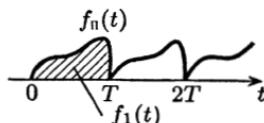


Рис. 6.7

Используя теорему запаздывания (6.12)

$$f(t - t_3) = \hat{f}(t - t_3) \delta_1(t - t_3) \div F(s) e^{-st_3}, \quad (6.20)$$

найдем изображение сигнала, показанного на рисунке 6.7:

$$\begin{aligned} f_{\text{п}}(t) &= f_1(t) + f_1(t - T) + f_1(t - 2T) + \dots \div F_{\text{п}}(s) = \\ &= F_1(s)(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots) = F_1(s)/(1 - e^{-sT}), \end{aligned} \quad (6.21)$$

причем при выводе (6.21) использована формула убывающей геометрической прогрессии со знаменателем e^{-sT} .

Примечание. Прогрессия в (6.21) убывает, если модуль ее знаменателя $|e^{-sT}| = |e^{-(\sigma+j\omega)T}| = e^{-\sigma T} < 1$; следовательно, $\sigma = \operatorname{Re} s > 0$ и изображение (6.21) следует рассматривать в области сходимости в правой полуплоскости аргумента $s = \sigma + j\omega$.

6.3.2. Получение изображений путем описания сигнала суммой простейших составляющих

Рассмотрим два примера.

ПРИМЕР 6. Импульс $u(t)$ прямоугольной формы, показанный на рисунке 6.8а, можно эквивалентно описать суммой двух ступенчатых функций (1 и 2):

$$u(t) = U_m \delta_1(t) - U_m \delta_1(t - t_u) \div U(s) = \frac{U_m (1 - e^{-st_u})}{s}.$$

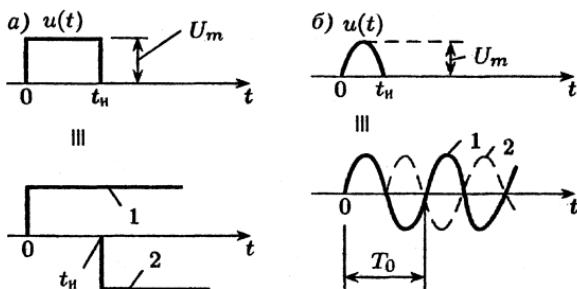


Рис. 6.8

ПРИМЕР 7. Импульс $u(t)$ синусоидальной формы, изображенный на рисунке 6.8б, эквивалентно описывается суммой двух односторонних синусоидальных функций (1 и 2):

$$u(t) = U_m \sin(\omega_0 t) \delta_1(t) + U_m \sin[\omega_0 (t - t_u)] \delta_1(t - t_u) \div \\ \div U(s) = \frac{U_m \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} (1 + e^{-s t_u}) ,$$

где $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi/t_u$.

Примечание. Запись ступенчатых функций $\delta_1(t - t_u)$ при использовании смещенных (запаздывающих) друг относительно друга составляющих в приведенных примерах обязательна, поскольку они показывают «начало действия» каждой составляющей.

6.3.3. Определение изображений сигналов кусочно-линейной формы методом двойного дифференцирования

Естественно, импульс кусочно-линейной формы $f(t)$, приведенный ранее на рисунке 4.13, можно описать суммой односторонних линейных функций (1, 2, 3), т. е. можно действовать аналогично способу в п. 6.3.2. Однако изложенный в п. 4.4.4 метод двойного дифференцирования позволяет упростить процедуру решения задачи.

Действительно, очевидны как простота получения второй производной кусочно-линейной функции:

$$f''(t) = \sum A_k \delta(t - t_k) ,$$

так и простота записи изображения (с учетом $\delta(t) \div 1$):

$$\mathcal{L}[f''(t)] = \sum A_k e^{-st_k}.$$

По теореме интегрирования оригинала (6.9) находим искомое изображение

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[f''(t)] = \frac{1}{s^2} \sum A_k e^{-st_k}.$$

Примечание. В случае разрывных кусочно-линейных функций уже при первом дифференцировании появляются делта-функции, т. е.

$$f'_1(t) = \tilde{f}'_1(t) + \sum B_k \delta(t - t_k),$$

где $\tilde{f}'_1(t)$ — кусочно-постоянная составляющая в описании $f'_1(t)$, которую и рекомендуется далее дифференцировать, получив

$$f''_1(t) = \sum A_k \delta(t - t_k);$$

в этом случае по теореме интегрирования оригинала

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \sum A_k e^{-st_k} + \frac{1}{s} \sum B_k e^{-st_k}.$$

§ 6.4. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЦЕПИ И ЕЕ СВЯЗЬ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ, ИМПУЛЬСНОЙ, ПЕРЕХОДНОЙ И ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЦЕПИ

6.4.1. Изображение интеграла наложения, выраженного через импульсную характеристику цепи

На основании теоремы свертки изображение интеграла (4.13) имеет вид

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) h(t - \tau) d\tau \div F_2(s) = H(s) F_1(s), \quad (6.22)$$

где $f_1(t) \div F_1(s)$, $f_2(t) \div F_2(s)$, $h(t) \div H(s)$ — воздействие, реакция, импульсная характеристика цепи и их изображения (независимые начальные условия в цепи предполагаются нулевыми).

Из (6.22) следует метод определения переходной характеристики цепи $h_1(t)$, как реакции $f_2(t)$ на единичное ступенчатое воздействие $f_1(t) = \delta_1(t) \div F_1(s) = 1/s$ (в сравнении с 4.3.1 здесь единичный коэффициент F_{10} , выравнивающий размерность, для ростоты записи опущен):

$$H_1(s) = \frac{H(s)}{s} \div h_1(t), \quad (6.23)$$

причем выражение (6.23) соответствует как формуле (4.11)

$$h(t) = h'_1(t), \quad h_1(t)|_{t>0} = \int_0^t h(t) dt,$$

так и теоремам интегрирования и дифференцирования оригинала (6.9) при нулевых начальных условиях.

6.4.2. Передаточная функция цепи и ее свойства

Отношение изображения реакции к изображению единственного в цепи воздействия при нулевых независимых начальных условиях называют передаточной функцией цепи:

$$H(s) \div \frac{F_2(s)}{F_1(s)}. \quad (6.24)$$

Вывод: из сравнения (6.22) и (6.24), следует, что передаточная функция цепи — это изображение по Лапласу импульсной характеристики цепи:

$$H(s) \div h(t). \quad (6.25)$$

Рассмотрим основные свойства передаточной функции (6.24), (6.25).

1. Из сравнения (6.24) с (6.23) вытекают как метод определения переходной характеристики по передаточной функции, так и связь изображений импульсной и переходной характеристик:

$$h_1(t) \div H_1(s) = \frac{H(s)}{s}, \quad H(s) = sH_1(s) \div h(t).$$

2. Поскольку при нулевых начальных условиях все уравнения и схемы замещения операторного метода (см. выводы в п. 6.2.4) соответствуют уравнениям и схемам замещения МКА при формальных заменах $s_{\text{ОМ}} \div s_{\text{МКА}}$, $U(s) \div \dot{U}$, $I(s) \div \dot{I}$, то передаточная функция цепи и комплексная функция цепи — одно и то же: $H(s)|_{s_{\text{ОМ}}} = H(s)|_{s_{\text{МКА}}}$.

3. Так как в установившемся синусоидальном режиме обобщенная частота в МКА $s = j\omega$, то комплексная частотная характеристика цепи $H(j\omega)$ связана с передаточной функцией формулой

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}.$$

4. Таким образом, виды, свойства и методы вычисления комплексной функции цепи справедливы и для передаточной функции (как входные функции $Z_{\text{вх}}, Y_{\text{вх}}$, так и функции передачи $Z_{k=0}, Y_{n=0}, H_{Um=0}, H_{In=0}$ определяются только параметрами цепи; $Z_{\text{вх}} = 1/Y_{\text{вх}}$, но $Z_{k=0} \neq 1/Y_{k=0}$).

Примечание. Стого $H(s)$ называют функцией цепи, поскольку наряду с собственно передаточными функциями (функциями передачи) существуют и входные функции.

5. Знаменатель любой передаточной функции цепи является характеристическим полиномом (характеристическим уравнением) цепи.

Действительно, в общем случае дифференциальное уравнение, связывающее реакцию $f_2(t)$ с воздействием $f_1(t)$, имеет вид (3.1) в t -области:

$$a_n f_2^{(n)} + \cdots + a_1 f_2' + a_0 f_2 = b_m f_1^{(m)} + \cdots + b_1 f_1' + b_0 f_1. \quad (6.26)$$

Преобразуем (6.26) по Лапласу, считая нулевыми как независимые начальные условия, так и воздействие при $t < 0$. Тогда по теореме дифференцирования (6.9) при $f(0-) = 0$ получим

$$(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0) F_2(s) = (b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0) F_1(s),$$

откуда передаточная функция

$$\frac{F_2(s)}{F_1(s)} = H(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad (6.27)$$

т. е. ХП, соответствующий (6.26), находится в знаменателе (6.27).

6.4.3. Связь собственных частот с нулями и полюсами входного сопротивления цепи

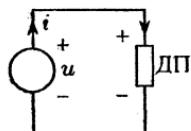


Рис. 6.9

Рассмотрим некоторый изображенный на рисунке 6.9 пассивный двухполюсник (ДП), подключенный к источнику (рассматривать будем как источник напряжения, так и источник тока, поэтому конкретный тип источника на рисунке 6.9 не указан).

В t -области напряжение и ток ДП в общем случае связаны уравнением

$$a_n u^{(n)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = b_m i^{(m)} + \dots + b_1 i' + b_0 i. \quad (6.28)$$

Преобразовав (6.28) по Лапласу при нулевых независимых начальных условиях, найдем операторное входное сопротивление ДП:

$$\frac{U(s)}{I(s)} = Z(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m \prod_{(m)} (s - s_{0k})}{a_n \prod_{(n)} (s - s_k)}, \quad (6.29)$$

где в (6.29) s_{0k} , s_k — соответственно, нули (корни числителя) и полюсы (корни знаменателя) дробно-рациональной функции $z(s)$.

Из сравнения (6.28) и (6.29) заключаем:

1. Если воздействием является источник тока, то информация о характеристическом полиноме цепи находится слева в уравнении (6.28) и в знаменателе входного сопротивления (6.29), т. е. полюсы s_k являются собственными частотами (корнями ХП) цепи в так называемом режиме холостого хода (поскольку источнику тока в схеме свободного режима соответствует ХХ).

2. Если воздействием является источник напряжения, то информация о характеристическом полиноме находится справа в (6.28) и числителе (6.29), т. е. в данном случае нули s_{0k} входного сопротивления — это корни ХП цепи в так называемом режиме короткого замыкания (поскольку источнику напряжения в схеме свободного режима соответствует КЗ).

Следствие: чтобы найти собственные частоты цепи, достаточно схему свободного режима «разорвать» в любом месте и, присвоив накопителям сопротивления $Z_L = sL$ и $Z_C = 1/(sC)$, найти нули входного сопротивления $Z(s)$ относительно «разорванных» выводов.

6.4.4. Матрицы передаточных функций и импульсных характеристик цепи (использование преобразования Лапласа для решения уравнений состояния)

Уравнения состояния (3.24)

$$\frac{d}{dt} [f_2(t)] = [A] [f_2(t)] + [B] [f_1(t)]$$

преобразуем по Лапласу, считая нулевыми как независимые начальные условия, так и воздействия при $t < 0$:

$$s [F_2(s)] = [A] [F_2(s)] + [B] [F_1(s)],$$

откуда

$$(s[E] - [A]) [F_2(s)] = [B] [F_1(s)], \quad (6.30)$$

где $[E]$ — единичная матрица, введенная здесь для выравнивания размерности матриц.

По аналогии с определением передаточной функции (6.24) и теоремой свертки (6.22) найдем матричное уравнение:

$$[F_2(s)] = [H(s)] [F_1(s)], \quad (6.31)$$

в котором $[H(s)]$ называют матрицей передаточных функций от всех воздействий $[F_1(s)]$ ко всем реакциям $[F_2(s)]$, т. е. в данном случае — ко всем переменным состояния.

Для получения (6.31) умножим (6.30) слева на обратную матрицу $(s[E] - [A])^{-1}$:

$$[F_2(s)] = (s[E] - [A])^{-1} [B] [F_1(s)],$$

т. е. матрица передаточных функций и соответствующая ей матрица импульсных характеристик $[h(t)]$ описываются уравнением

$$[H(s)] = (s[E] - [A])^{-1} [B] \div [h(t)], \quad (6.32)$$

где в (6.32) элементы матриц $H_{11}(s) \div h_{11}(t)$ используется для обозначения импульсной характеристики первой переменной состояния от первого воздействия $H_{12}(s) \div h_{12}(t)$ — от второго воздействия и т. д.

АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ЦЕПЯХ

§ 7.1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ И ИХ СПЕКТРЫ

7.1.1. Периодические сигналы и условия Дирихле

Примеры периодических сигналов приведены на рис. 7.1 a, b, e .

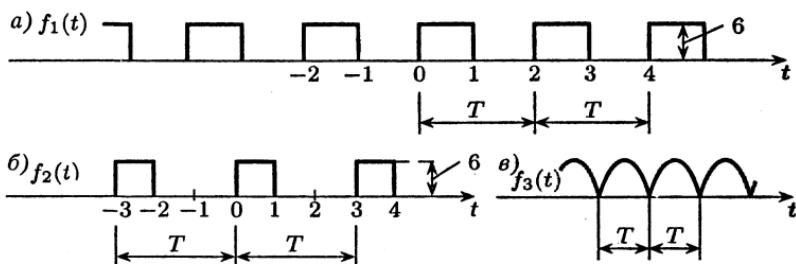


Рис. 7.1

Как известно, периодические сигналы обладают свойством

$$f(t) = f(t \pm T),$$

где T — период, т. е. наименьший интервал повторения функции.

Условно считаем, что периодическое воздействие приложено к цепи при $t \rightarrow -\infty$, т. е. к моменту времени t переходные процессы в цепи затухли и в цепи наблюдается установившийся (вынужденный) периодический режим (УПР). Для простоты индекс «вын», или «уст», при записи переменных опускаем.

Реальные периодические сигналы (точнее, описывающие их функции) удовлетворяют условиям Дирихле:

1. В пределах периода сигналы непрерывны или имеют разрывы первого рода.
2. В пределах периода сигналы ограничены по уровню и имеют конечное число максимумов и минимумов.

7.1.2. Тригонометрические формы рядов Фурье

Периодический сигнал $f(t)$, удовлетворяющий условиям Дирихле, может быть разложен в сходящийся гармонический ряд Фурье (РФ) в диапазоне $-\infty < t < +\infty$, причем частоты гармоник (т. е. синусоид) ряда $\omega_k = k\omega_1$, где $k = 1, 2, 3, \dots$, кратны частоте первой (основной) гармоники $\omega_1 = 2\pi/T_1 = 2\pi/T$. Это означает, что период основной гармоники $T_1 = T$ равен периоду сигнала. Число гармоник бесконечно, при этом сумма РФ равна $f(t)$ в точках непрерывности и равна полу сумме пределов $f(t)$ слева и справа в точках разрыва первого рода (следовательно, вблизи разрывов $f(t)$, да и разрывов $f'(t)$, график суммы РФ отличается от $f(t)$, если не учитывать всю бесконечную совокупность гармоник РФ).

Синусно-косинусная форма РФ имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t), \quad (7.1)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos k\omega_1 t dt; \quad (7.2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin k\omega_1 t dt. \quad (7.3)$$

Значение t_0 — произвольно, а нулевая гармоника (постоянная составляющая) РФ

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = f_{cp} \quad (7.4)$$

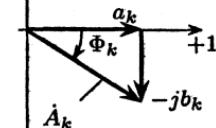
соответствует среднему значению $f(t)$ за период (т. е. высоте прямоугольника, имеющего равновеликую $f(t)$ площадь за период).

Например, для сигнала $f_1(t)$ на рисунке 7.1 $a_0/2 = 6 \cdot 1/2 = 3$, а для сигнала $f_2(t)$ имеем $a_0/2 = 6 \cdot 1/3 = 2$.

Преобразуем синусно-косинусную форму (7.1) к косинусной форме РФ. Для гармоники № k получим, используя преобразование к комплексным амплитудам (для синусоид одинаковых частот):

$$a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t = a_k \cos k\omega_1 t + b_k \cos(k\omega_1 t - 90^\circ) \div \\ \div a_k + b_k e^{-j90^\circ} = a_k - jb_k = A_k e^{j\Phi_k} = \dot{A}_k, \quad (7.5)$$

причем в соответствии с рисунком 7.2



$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \\ \Phi_k = \arctg(-b_k/a_k),$$

т. е. A_k определяет амплитуду, а Φ_k — начальную фазу результирующей гармоники.

Таким образом, РФ в косинусной форме будет

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \Phi_k). \quad (7.6)$$

Очевидны следующие свойства РФ симметричных сигналов.

1. РФ четных сигналов (см., например, рис. 7.3а), когда

$$f(t) = f(-t), \quad (7.7)$$

не содержат синусоид в разложении (7.1), т. е. все коэффициенты $b_k = 0$, поскольку синусоида $\sin \omega_k t$ не обладает свойством четности (7.7). Следовательно, в соответствии с формулой (7.5) и рисунком 7.2 у четных сигналов начальные фазы Φ_k гармоник в выражении (7.6) равны либо 0, либо 180° (если $a_k < 0$).

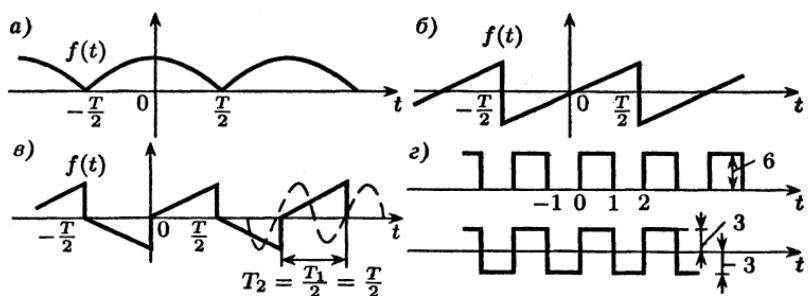


Рис. 7.3

2. РП нечетных сигналов (см. рис. 7.3б), когда

$$f(t) = f(-t), \quad (7.8)$$

не содержат в разложении (7.1) косинусоид, т. е. $a_k = 0$, поскольку $\cos k\omega_1 t$ не обладает свойством (7.8). В соответствии с формулой (7.5) и рисунком 7.1г у нечетных сигналов начальные фазы Φ_k гармоник в выражении (7.6) равны либо 90° , либо -90° .

3. РП сигналов, симметричных относительно оси t при сдвиге на половину периода (см. рис. 7.3в), когда

$$f(t) = -f(t \pm T/2), \quad (7.9)$$

не содержат гармоник четных номеров ($k = 0, 2, 4, \dots$), поскольку эти гармоники (см. показанную пунктиром на рисунке 7.3в гипотетическую вторую гармонику) не обладает свойством (7.9).

На рисунке 7.3г в качестве примера приведен сигнал $f(t)$, у которого на основании формулы (7.4) среднее значение $f_{cp} = a_0/2 = 3$. Если рассмотреть график сигнала за вычетом среднего значения ($f - 3$), то он обладает свойствами (7.8), (7.9), т. е. исходный сигнал $f(t)$ не содержит косинусоид и гармоник четных номеров, кроме $k = 0$.

7.1.3. Ряд Фурье в комплексной форме

Преобразовав с помощью формул Эйлера РП в форме (7.1), получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} + b_k \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [e^{jk\omega_1 t}(a_k - jb_k) + e^{-jk\omega_1 t}(a_k + jb_k)]. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Чтобы использовать в разложении (7.10) комплексные амплитуды из выражения (7.5), учтем, что на основании формул (7.2), (7.3) следует, что

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos k\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(-k\omega_1 t) dt = a_{-k}, \quad (7.11)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin k\omega_1 t dt = \frac{-2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(-k\omega_1 t) dt = -b_{-k}. \quad (7.12)$$

Подставив формулы (7.11), (7.12) в (7.10), получим

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[e^{jk\omega_1 t} (a_k - jb_k) + e^{j(-k)\omega_1 t} (a_{-k} - jb_{-k}) \right];$$

откуда, обозначив $\dot{A}_{-k} = a_{-k} - jb_{-k}$ и переходя к суммированию от $k = -\infty$ до $k = +\infty$, запишем с учетом выражения (7.5) РФ в комплексной форме:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (7.13)$$

причем $a_0/2 = A_0/2$, $\dot{A}_k = A_k e^{j\Phi_k} = a_k - jb_k$.

7.1.4. Дискретные спектры периодических сигналов

Множество комплексных амплитуд $\{\dot{A}_k\}$ РФ в комплексной форме (7.13) называют дискретным спектром периодического сигнала $f(t)$; соответственно множества амплитуд $\{A_k\}$ и начальных фаз $\{\Phi_k\}$ называют дискретными амплитудным и фазовым спектрами.

С учетом формул (7.11), (7.12) амплитудный спектр

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{a_{-k}^2 + b_{-k}^2} = A_{-k}$$

является четной функцией k , а фазовый спектр

$$\Phi_k = \operatorname{arctg} \frac{-b_k}{a_k} = -\operatorname{arctg} \frac{-b_{-k}}{a_{-k}} = -\Phi_{-k}$$

является нечетной функцией k .

В качестве примера рассмотрим спектр периодического сигнала $f(t)$ в виде последовательности экспонент (см. рис. 7.4a), например, в интервале $0 < t < T$ равных $f(t) = e^{-2t} \div F(s) = 1/(s+2)$. Тогда можно записать $F(j\omega) = 1/(j\omega+2)$, причем

$$|F(j\omega)| = 1/\sqrt{\omega^2 + 2^2},$$

$$\arg F(j\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega/2).$$

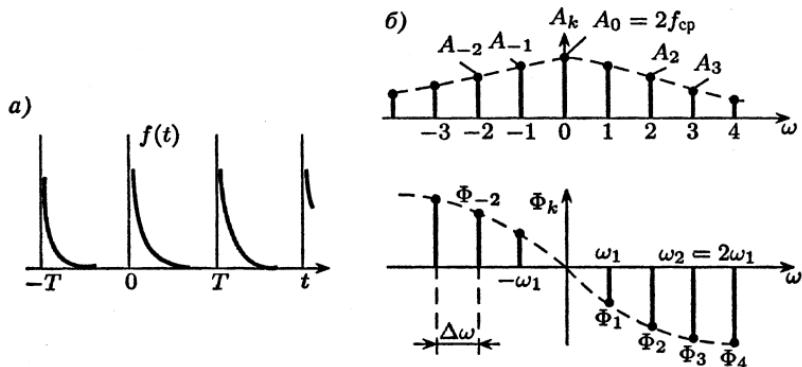


Рис. 7.4

На рисунке 7.4б пунктиром построены графики $|F(j\omega)|$ и $\arg F(j\omega)$, которые в определенном масштабе являются огибающими, соответственно, спектров A_k и Φ_k , показанных на рисунке 7.4б вертикальными отрезками прямых линий, причем для определенности частоты первой (основной) гармоники $\omega_1 = 1\text{c}^{-1}$, т. е. период сигнала $T = T_1 = 2\pi/\omega_1 \approx 6,28 с.$

Примечания:

1. Расстояние по оси частот между гармониками спектра будет $\Delta\omega = \omega_1$, т. е. равно частоте первой гармоники.
2. Спектр периодического сигнала называют дискретным, поскольку он существует лишь для дискретных значений частоты: $0, \pm\omega_1, \pm 2\omega_1, \pm 3\omega_1, \dots$.
3. Часто спектр называют линейчатым, так как его принято изображать отрезками прямых линий.

Перейдем к трактовке дискретных спектров. Преобразуем, используя формулу Эйлера, запись РФ в комплексной форме (7.13) для вещественной функции $f(t)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{j k \omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} A_k e^{j(k \omega_1 t + \Phi_k)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} A_k \cos(k \omega_1 t + \Phi_k) + j 0, \quad (7.14) \end{aligned}$$

где равенство нулю мнимой части объясняется тем, что по условию $f(t)$ — вещественная функция и, кроме того, $\sin(k \dots) + \sin(-k \dots) = 0$.

Таким образом, согласно (7.14), дискретный спектр характеризует представление периодического сигнала суммой гармоник; при этом амплитудный дискретный спектр $\{A_k\}$ определяет амплитуды гармоник, а фазовый спектр $\{\Phi_k\}$ — их начальные фазы.

Примечания:

1. В (7.6) была приведена иная, чем (7.14), косинусная форма описанная РФ:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \Phi_k);$$

однако выражения (7.6) и (7.14) тождественны, поскольку $A_0 = a_0 = 2f_{cp}$, и, кроме того,

$$\begin{aligned} \cos(k\omega_1 t + \Phi_k) &= \cos((-k)\omega_1 t + \Phi_{-k}) = \\ &= 0,5 [\cos(k\omega_1 t + \Phi_k) + \cos((-k)\omega_1 t + \Phi_{-k})]. \end{aligned}$$

2. Графики спектра синусоиды $i(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha_i)$ как частного случая периодического сигнала содержат одну составляющую амплитудного спектра $A_1 = I_m$ и одну — фазового спектра $\Phi_1 = \alpha_i$ на частоте $\omega_1 = \omega_0$ (для $\omega > 0$).

7.1.5. Использование преобразования Лапласа для отыскания коэффициентов РФ

На основании (7.2), (7.3), (7.5) комплексная амплитуда гармоники № k будет

$$\begin{aligned} \dot{A}_k &= A_k e^{j\Phi_k} = a_k - jb_k = \\ &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)(\cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t) dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t)e^{-j k \omega_1 t} dt, \quad (7.15) \end{aligned}$$

причем в (7.15) момент t_0 выбран равным нулю. Описание периодического сигнала внутри интервала интегрирования $0 < t < T$ в (7.15) условно назовем первым импульсом $f_1(t)$ (на рисунке 7.5а он заштрихован). Таким образом, оказывается

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T; \\ 0, & t < 0, \quad t > T. \end{cases} \quad (7.16)$$

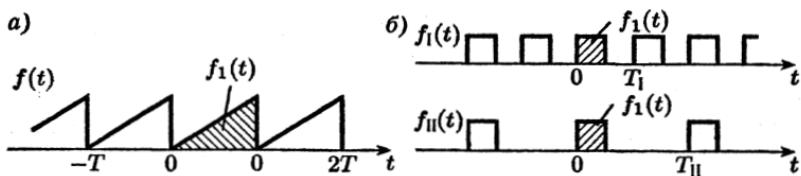


Рис. 7.5

С учетом (7.16) можно верхний предел в (7.15) расширить до ∞ , если заменить $f(t)$ на $f_1(t)$. Далее очевиден переход к формуле прямого преобразования Лапласа:

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \int_0^\infty f_1(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt \Big|_{s=jk\omega_1},$$

следовательно,

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\Phi_k} = a_k - jb_k = \frac{2}{T} F_1(s) \Big|_{s=jk\omega_1}. \quad (7.17)$$

ВЫВОД: коэффициенты РФ периодического сигнала $f(t)$ можно найти, зная изображение по Лапласу $F_1(s)$ условного первого импульса сигнала $f_1(t)$.

В качестве примера рассмотрим изображенные на рисунке 7.5б сигналы f_1 и f_{II} , у которых первый импульс f_1 одинаков, а периоды различны: $T_{II} = 2T_I$. На основании (7.17) имеем:

$$\dot{A}_{kI} = \frac{2}{T_I} F_1(s) \Big|_{s=jk\omega_{1I}=jk\frac{2\pi}{T_I}}; \quad \dot{A}_{kII} = \frac{2}{2T_I} F_1(s) \Big|_{s=jk\omega_{1II}=jk\frac{2\pi}{2T_I}},$$

т. е. амплитудный спектр второго сигнала f_{II} , у которого импульсы следуют вдвое реже, уменьшился в 2 раза, расстояние между гармониками дискретного спектра $\Delta\omega_{II} = \omega_{1II} = 0,5\omega_{1I} = 0,5\Delta\omega_I$ тоже в 2 раза уменьшилось, следовательно, спектр стал гуще (частота заполнения спектра в 2 раза возросла). В пределе при $T \rightarrow \infty$ амплитудный спектр $f_{II}(t)$ станет бесконечно малым; $\Delta\omega_{II} \rightarrow 0$, т. е. спектр из дискретного превращается в сплошной, что соответствует переходу от периодического сигнала к одиночному импульсу и от РФ к интегралу Фурье.

§ 7.2. МОЩНОСТЬ И ДЕЙСТВУЮЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В УСТАНОВИВШЕМСЯ ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

7.2.1. Мощность в УПР

Пусть пассивный двухполюсник (ДП), изображенный на рисунке 7.6а, находится в УПР, а его напряжение и ток разложены в РФ:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{uk}), \quad (7.18)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{ik}), \quad (7.19)$$

причем в обозначениях (7.6) имеем в (7.19) $I_0 = a_0/2$, $I_{mk} = A_k$, $\alpha_{ik} = \Phi_k$.

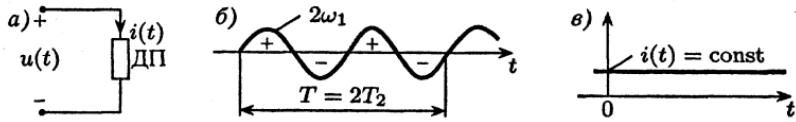


Рис. 7.6

Мгновенная мощность в ДП записывается как $p(t) = u(t)i(t)$.

Средняя мощность за период (она же активная мощность, или просто — мощность) есть

$$P = P_a = P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt. \quad (7.20)$$

При подстановке (7.18), (7.19) в (7.20) учтем следующее:

1. В формуле (7.20) все интегралы вида $\int_0^T \cos(k\omega_1 t + \alpha_k) dt = 0$, поскольку площадь синусоиды за время, кратное ее периоду, равна нулю (см. например, на рисунке 7.6б — график второй гармоники с частотой $\omega_2 = 2\omega_1$).

2. На основании формулы

$$\cos \beta \cos \delta = 0,5[\cos(\beta - \delta) + \cos(\beta + \delta)] \quad (7.21)$$

в (7.20) все интегралы от произведения гармоник (7.18), (7.19) с различными индексами $k \neq n$ тоже равны нулю:

$$\int_0^T \cos(k\omega_1 t + \alpha_k) \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) dt = 0,$$

причем геометрическая трактовка этого тоже соответствует рисунку 7.6б.

3. В (7.20) необходимо учитывать только произведения гармоник (7.18), (7.19) с одинаковыми номерами.

В результате, с учетом (7.21) получим

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left(U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{U_{mk} I_{mk} \cos(\alpha_{uk} - \alpha_{ik})}{2} + \frac{U_{mk} I_{mk} \cos(2k\omega_1 t + \alpha_{uk} + \alpha_{ik})}{2} \right] \right) dt.$$

Интеграл от последнего слагаемого в этом выражении равен нулю (см. рис. 7.6б), поэтому, используя переход от амплитудных значений гармоник к действующим: $U_{mk}/\sqrt{2} = U_k$, $I_{mk}/\sqrt{2} = I_k$, можем, в итоге, записать:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k. \quad (7.22)$$

ВЫВОД: мощность в УПР равна сумме мощностей от каждой гармоники в отдельности (комбинированные мощности от гармоник с различными номерами отсутствуют).

7.2.2. Действующее значение в УПР

Как известно, действующее значение переменной — это среднеквадратичное значение, имеющее энергетическую трактовку, т. е.

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}. \quad (7.23)$$

Рассматривая в (7.23) $u^2(t) = u(t)u(t)$ и используя из 7.2.1 формулы (7.20), (7.22) с заменой $i(t)$ на $u(t)$, можем записать:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{U_{mk}}{\sqrt{2}} \right)^2}; \quad (7.24)$$

и, аналогично, действующее значение периодического тока (7.19)

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk}^2}. \quad (7.25)$$

Вывод: действующее значение переменной в УПР равно корню квадратному из суммы квадратов действующих значений отдельных гармоник разложения этой переменной в РФ.

Примечания:

- Формулы (7.22), (7.24), (7.25) являются вариантами известного в математике равенства Парсеваля.
- У постоянного тока (см. рис. 7.6а) мгновенное, среднее, амплитудное, максимальное и действующее значения одинаковы, поскольку

$$i(t) = 5 = \frac{1}{T} \int_0^T 5 dt = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T 5^2 dt}.$$

§ 7.3. АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ЦЕПИ

7.3.1. Приближенный расчет УПР с использованием РФ

Основная идея расчета: РФ воздействия можно трактовать как сумму элементарных воздействий и по методу наложения, используя метод комплексных амплитуд, найти реакцию от каждой гармоники воздействия в отдельности.

Рассмотрим детально последовательность анализа.

1. **Периодическое воздействие $f_{\text{вх}}(t)$ раскладываем в РФ.** Он обычно быстро сходится (т. е. амплитуды гармоник быстро убывают с ростом № k), поэтому на практике часто ограничиваются несколькими n -первыми гармониками и записывают таким образом «укороченный» ряд Фурье (отрезок ряда Фурье):

$$f_{\text{вх}}(t) \cong F_{0\text{вх}} + \sum_{k=1}^n F_{mk\text{вх}} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{k\text{вх}}). \quad (7.26)$$

Вывод: метод расчета с использованием «укороченного» РФ ($n \neq \infty$) является приближенным.

2. Находим передаточную функцию цепи $H(s) = F_{\text{вых}}(s)/F_{\text{вх}}(s)$ и заменой $s = j\omega$ — частотные характеристики цепи $H(j\omega)$, а затем амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики (АЧХ и ФЧХ):

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}, \quad (7.27)$$

с другой стороны, выполняется соотношение

$$H(j\omega) = \dot{F}_{\text{вых}}/\dot{F}_{\text{вх}} = F_{\text{вых}}e^{j\alpha_{\text{вых}}}/F_{\text{вх}}e^{j\alpha_{\text{вх}}} \quad (7.28)$$

при изменении частоты $\omega = \text{var}$ в установившемся синусоидальном режиме.

3. Используя (7.27), (7.28), определяем амплитуды и начальные фазы отдельных гармоник РФ реакции:

$$\begin{aligned} F_{mk\text{вых}} &= F_{mk\text{вх}}A(\omega)|_{\omega=k\omega_1}, \\ \alpha_{k\text{вых}} &= \alpha_{k\text{вх}} + \Phi(\omega)|_{\omega=k\omega_1}, \end{aligned} \quad (7.29)$$

затем по аналогии с (7.26) записываем «укороченный» РФ реакции:

$$f_{\text{вых}}(t) \cong F_{0\text{вых}} + \sum_{k=1}^n F_{mk\text{вых}} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{k\text{вых}}). \quad (7.30)$$

Примечания:

- Спектральный состав реакции (7.30) полностью соответствует спектральному составу воздействия (7.26), т. е. гармоник иных частот, кроме $\omega_k = k\omega_1$, нет.
- Различные гармоники проходят через цепь, согласно (7.27)–(7.29), с различными коэффициентами передачи, зависящими от значения частоты $k\omega_1$; так, при резонансе некоторые гармоники могут исчезнуть, а амплитуды и начальные фазы других могут измениться, т. е. форма периодической реакции может совершенно не соответствовать форме воздействия (но период T будет одинаков).

Необходимо отметить также очевидные свойства некоторых сигналов в УПР:

- Если постоянная составляющая ($A_0/2 = a_0/2 = f_{\text{ср}}$) на входе отсутствует, то она отсутствует и на выходе.
- Если воздействие симметрично относительно оси времени t при сдвиге на половину периода, то и реакция удовлетворяет свойству (7.9).
- Если воздействие непрерывно, то и реакция непрерывна.

7.3.2. Точный расчет реакции в УПР (РФ в «замкнутой форме»)

В некоторых цепях убыль гармоник воздействия с ростом № k полностью компенсируется ростом АЧХ цепи (в так называемых «дифференцирующих цепях»). В этом случае на основании (7.29) на выходе приходится учитывать десятки (и даже сотни) гармоник и метод, базирующийся на использовании РФ, становится неэффективным.

Основная идея рассматриваемого точного расчета УПР: свободная составляющая решения определяется корнями характеристического полинома (ХП) цепи, а вынужденная составляющая имеет математическую форму воздействия.

Последовательность расчета:

1. Предполагаем, что входной периодический сигнал $f_{\text{вх}}(t)$ приложен к цепи, начиная с $t = 0$ (см. рис. 7.7). Используя условно первый импульс воздействия $f_{\text{вх}1}(t)$ аналогично (7.16) и рисунку 7.5а, находим изображение по Лапласу воздействия в целом:

$$f_{\text{вх}}(t) = f_{\text{вх}1}(t) + f_{\text{вх}1}(t - T) + f_{\text{вх}1}(t - 2T) + \dots \div \\ \div F_{\text{вх}1}(s)[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots] = \frac{F_{\text{вх}1}(s)}{1 - e^{-sT}} = F_{\text{вх}}(s). \quad (7.31)$$

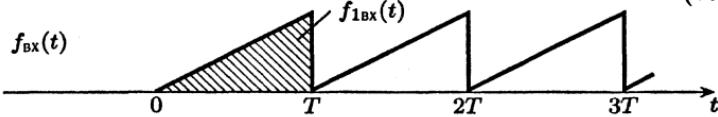


Рис. 7.7

2. Определяем передаточную функцию цепи и ее полюсы (корни знаменателя), т. е. корни ХП цепи n -го порядка:

$$\frac{F_{\text{вых}}(s)}{F_{\text{вх}}(s)} = H(s) = \frac{B(s)}{D(s)} = \frac{B(s)}{d_n s^n + \dots + d_1 s + d_0} = \\ = \frac{1}{d_n} \frac{B(s)}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)}. \quad (7.32)$$

3. Используя (7.31), (7.32), находим изображение реакции:

$$F_{\text{вых}}(s) = H(s)F_{\text{вх}}(s) = \frac{1}{d_n} \frac{B(s)}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)} \frac{F_{\text{вх}1}(s)}{(1 - e^{-sT})}. \quad (7.33)$$

Выделяем в (7.33) изображения свободной и вынужденной составляющих решения уравнений цепи:

$$F_{\text{вых}}(s) = F_{\text{вых св}}(s) + F_{\text{вых вын}}(s) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k} + \frac{F_{\text{вых1}}(s)}{1 - e^{-sT}}, \quad (7.34)$$

где свободная составляющая определяется указанными в (7.32) корнями ХП цепи s_k , а вынужденная составляющая имеет математическую форму воздействия (7.31), т. е. должна быть периодической функцией $f_{\text{вых вын}}(t)$ с периодом T и искомым описанием первого импульса $f_{\text{вых1}}(t) = f_{\text{вых вын}}(t)$ в интервале первого периода при $0 < t < T$.

Коэффициенты A_k находят на основании теоремы разложения преобразования Лапласа, как обычно:

$$A_k = (s - s_k)F_{\text{вых}}(s)|_{s=s_k},$$

причем $F_{\text{вых}}(s)$ на основании (7.33) известно.

4. Используя (7.33), (7.34), определяем изображение искомого описания периодической реакции в интервале $0 < t < T$:

$$\begin{aligned} F_{\text{вых1}}(s) &= [F_{\text{вых}}(s) - F_{\text{вых св}}(s)](1 - e^{-sT}) = \\ &= \frac{1}{d_n} \frac{F_{\text{вх1}}(s)B(s)}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k} (1 - e^{-sT}), \end{aligned} \quad (7.35)$$

а затем переходим к оригиналу первого импульса $f_{\text{вых1}}(t)$; строим его график в пределах первого периода $0 < t < T$ и, периодически продолжая график, получаем искомую периодическую реакцию $f_{\text{вых вын}}(t)$.

Примечания:

- На практике переход к оригиналу от (7.35) может быть упрощен, так как в интервале $0 < t < T$ составляющие (7.35) сомножителем e^{-sT} можно не учитывать.
- Полученный аналитический результат называют РФ в «замкнутой» форме, поскольку он определяет точно всю сумму членов РФ периодической реакции.
- В случае, если к цепи в момент $t = 0$ приложено воздействие (7.31), можно на основании (7.34), (7.35) точно рассчитать переходный процесс.

Глава 8

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

§ 8.1. АПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ И ИХ СПЕКТРЫ

8.1.1. Переход от рядов к интегралу Фурье и от дискретных спектров к сплошным

Примеры апериодических (т. е. непериодических) сигналов приведены на рисунке 8.1.

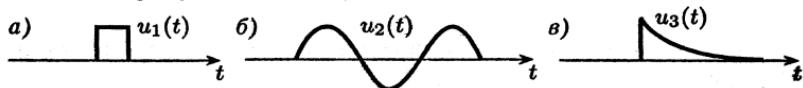


Рис. 8.1

Основная идея приведенных ниже преобразований в том, что апериодический сигнал можно условно считать периодическим с периодом $T \rightarrow \infty$.

Периодический сигнал $f(t)$ опишем рядом Фурье в комплексной форме:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{j k \omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j k \omega_1 t} (a_k - j b_k) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{j k \omega_1 t} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos k \omega_1 t - j \sin k \omega_1 t) dt, \end{aligned}$$

причем пределы интегрирования выбраны так, чтобы при $T \rightarrow \infty$ перейти к интегрированию во всем временном диапазоне.

Очевидно, имеем

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j k \omega_1 t} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j k \omega_1 t} dt. \quad (8.1)$$

Устремляя период $T \rightarrow \infty$, переходим к апериодическому сигналу. При этом частотный интервал между гармониками ряда Фурье периодического сигнала становится бесконечно малым, так как $\Delta\omega = \omega_1 = 2\pi/T \rightarrow d\omega$, следовательно, дискретный спектр превращается в сплошной, и в (8.1) можно произвести следующие замены:

$$1/T \rightarrow d\omega/(2\pi), \quad k\omega_1 \rightarrow \omega, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}, \quad \int_{-T/2}^{T/2} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}.$$

В результате переходим к интегралу Фурье для апериодического сигнала:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

причем второй интеграл описывает прямое преобразование Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (8.2)$$

а первый — обратное преобразование:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.3)$$

Условно обозначают: $f(t) \doteq F(j\omega)$, где $f(t)$ — оригинал, или сигнал (точнее, функция времени, описывающая сигнал); $F(j\omega)$ — спектр, или изображение по Фурье.

Примечание. Для сходимости несобственного интеграла (8.2) подынтегральная функция должна быть абсолютно интегрируемой

$$F(j\omega) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = S_{|f|},$$

т. е. площадь $S_{|f|}$ модуля оригинала должна быть конечной.

ВЫВОД: спектр $F(j\omega)$ имеют только абсолютно интегрируемые функции $f(t)$.

Следствие: поскольку дельта-функция $\delta(t)$ имеет конечную площадь (равную 1), то можно найти спектр: $\delta(t) \div \Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt$, откуда по свойству «выборки»: $\Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^0 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \div \delta(t)$, т. е. спектр дельта-функции равен единице на любой частоте ω .

8.1.2. Одностороннее преобразование Фурье как частный случай преобразования Лапласа

Если сигнал $f(t) = 0$ при $t < 0$, то от формул (8.2), (8.3) двухстороннего преобразования Фурье можно перейти к одностороннему преобразованию:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (8.4)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.5)$$

Для преобразования Лапласа имеем

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (8.6)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(s)e^{st} ds. \quad (8.7)$$

ВЫВОД: из сравнения (8.4), (8.5) с (8.6), (8.7) следует, что одностороннее преобразование Фурье является частным случаем преобразования Лапласа, если аргумент (оператор) преобразования Лапласа изменяется вдоль мнимой оси, т. е. $s = j\omega$ (следовательно, $C = 0$):

$$F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}. \quad (8.8)$$

Следствие: все формулы, таблицы, теоремы, методы расчета, схемы замещения операторного метода распространяются на преобразование Фурье при замене $s = j\omega$.

Возникает вопрос: если преобразование Фурье справедливо для более узкого класса функций, чем преобразование Лапласа, то в чем его преимущества? Отметим следующие достоинства преобразования Фурье:

1. От изображения по Лапласу перейти к оригиналу можно не всегда, а от изображения по Фурье — всегда (хотя и приближенно); например в случае полюсов дробной или комплексной кратности

$$F_1(s) = \frac{A}{(s+2)^{3/4}},$$

$$F_2(s) = \frac{B}{(s+2)^{3+j4}(s+2)^{3-j4}},$$

аналитически найти оригинал невозможно.

2. По сигналу можно многое сказать о спектре (и наоборот).
3. Сравнивая спектр сигнала с полосой пропускания цепи, можно предсказать изменение формы сигнала на выходе.
4. В цепях высокого порядка спектральный метод расчета переходных процессов во многих случаях не уступает операторному.

8.1.3. Спектральные характеристики апериодического сигнала

Спектр — это комплексная функция частоты:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos \omega t - j \sin \omega t) dt,$$

следовательно, его можно представить в показательной или алгебраической формах:

$$F(j\omega) = B(\omega) + jM(\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}.$$

Вещественный спектр сигнала

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-\omega)t dt = B(-\omega) \quad (8.9)$$

является четной функцией частоты ω . Очевидно, нечетные сигналы вещественного спектра не имеют.

Мнимый спектр

$$M(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt = -M(-\omega) \quad (8.10)$$

является нечетной функцией ω .

Примечания:

1. Формулы (8.9), (8.10) называют тригонометрическими формами прямого преобразования Фурье.
2. Четные сигналы $f(t) = f(-t)$ не имеют мнимого спектра, т. е. наблюдается полная аналогия со свойствами рядов Фурье четных ($b_k = 0$) и нечетных ($a_k = 0$) периодических сигналов.
3. Дельта-функция была введена нами как четная функция, следовательно, она мнимого спектра не имеет; действительно, $\delta(t) \div \Delta(j\omega) = 1$.

Амплитудный спектр

$$A(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{B^2(\omega) + M^2(\omega)} = A(-\omega)$$

является четной функцией, а фазовый спектр

$$\Phi(\omega) = \operatorname{arctg}[M(\omega)/B(\omega)] = -\Phi(-\omega)$$

— нечетной функцией частоты ω .

Дадим трактовку спектральным характеристикам, используя формулу обратного преобразования Фурье для вещественной функции $f(t)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j[\omega t + \Phi(\omega)]} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos[\omega t + \Phi(\omega)] d\omega + \\ &\quad + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin[\omega t + \Phi(\omega)] d\omega; \quad (8.11) \end{aligned}$$

однако второе слагаемое (мнимая часть) в (8.11) равно нулю, так как во-первых, $f(t)$ — вещественная функция по условию, а во-вторых, интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю.

ВЫВОДЫ (из анализа первого слагаемого в (8.11)):

- Спектр сигнала $F(j\omega)$ — это представление сигнала $f(t)$ совокупностью элементарных гармоник (синусоид), причем амплитудный спектр определяет амплитуды этих гармоник, а фазовый спектр — их начальные фазы.
- Строго, в (8.11) амплитуды гармоник равны $A(\omega)d\omega/(2\pi)$, т. е. являются бесконечно малыми, а следовательно, амплитудный спектр $A(\omega)$ характеризует относительное распределение бесконечно малых амплитуд гармоник в функции от частоты; поэтому правильнее называть и $F(j\omega)$ и $A(\omega)$ спектральными плотностями.

Примечание. Из (8.11) следует, что размерность спектра $[F(j\omega)] = [f]/[\omega] = [f] \cdot [t] = [S_f]$ равна размерности площади сигнала.

Найдем начальное значение спектра:

$$F(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = S_f. \quad (8.12)$$

ВЫВОД: Значение спектра на нулевой частоте равно площади сигнала.

8.1.4. Связь спектральных и частотных характеристик

Как известно, частотные характеристики цепи $H(j\omega)$ связаны с передаточной функцией $H(s)$, которая является изображением по Лапласу импульсной характеристики $h(t)$, следующей формулой:

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt|_{s=j\omega}. \quad (8.13)$$

Поскольку $h(t) = 0$, при $t < 0$ нижний предел в (8.13) можно расширить до $-\infty$ и перейти к двухстороннему преобразованию Фурье:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \div h(t). \quad (8.14)$$

ВЫВОД: из (8.14) следует, что частотные характеристики являются спектром импульсной характеристики цепи.

Следствие: все свойства четности спектральных характеристик справедливы и для частотных характеристик цепи, т. е. $A(\omega) = A(-\omega)$, $\Phi(\omega) = -\Phi(-\omega)$, ...

Отметим различия между спектральными и частотными характеристиками:

1. Спектр сигнала — это представление сигнала бесконечной суммой гармоник (синусоид).
2. Частотные характеристики определяют, как синусоидальные сигналы различных частот «проходят» через цепь в установившемся синусоидальном режиме.

8.1.5. Связь спектра одиночного импульса со спектром периодического сигнала той же формы

Считаем, что периодический сигнал $f_{\text{п}}(t)$ в пределах условно «первого» периода ($0 \leq t \leq T$) описывается одиночным импульсом $f_1(t)$, как показано, например на рисунке 8.2.

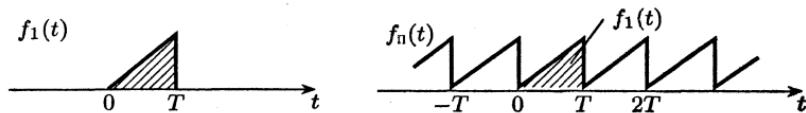


Рис. 8.2

Как известно, дискретный спектр $\dot{A}_k = A_k e^{j\Phi_k} = a_k - jb_k$ периодического сигнала $f_{\text{п}}(t)$ связан с изображением по Лапласу $F_1(s)$ «первого» импульса $f_1(t)$ формулой

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} F_1(s) \Big|_{s=jk\omega_1=jk2\pi/T}. \quad (8.15)$$

Производя в (8.15) замену $s = j\omega$, переходим к спектру

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} F_1(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_1=k2\pi/T}, \quad (8.16)$$

где $f_1(t) \div F_1(s) \div F_1(j\omega)$.

Вывод: сплошной спектр $F_1(j\omega) = A_1(\omega) e^{j\Phi_1(\omega)}$ одиночного импульса $f_1(t)$ с точностью до коэффициента $2/T$ является огибающей дискретного спектра \dot{A}_k сигнала $f_{\text{п}}(t)$, составленного из периодической последовательности указанных одиночных импульсов.

Следствие: из (8.16) получим:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{T} A_1(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_1}, \\ \Phi_k &= \Phi_1(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_1}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

т. е. зная графики амплитудного $A_1(\omega)$ и фазового $\Phi_1(\omega)$ спектров одиночного импульса, можно по их значениям на частотах $\omega = k\omega_1$ определить на основании (8.17) значения амплитудного и фазового дискретных спектров (A_k и Φ_k) периодического сигнала $f_p(t)$.

§ 8.2. СПЕКТРЫ НЕКОТОРЫХ АБСОЛЮТНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИГНАЛОВ

8.2.1. Спектр импульса прямоугольной формы

График «прямоугольного» импульса $u(t)$ и его эквивалентное описание суммой смещенных ступенчатых функций (I и II) приведены на рисунке 8.3. Находим изображение по Лапласу сигнала

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \delta_1(t) - \\ &- U_m \delta_1(t - t_h) \div U(s) = \\ &= \frac{U_m}{s} (1 - e^{-st_h}), \end{aligned}$$

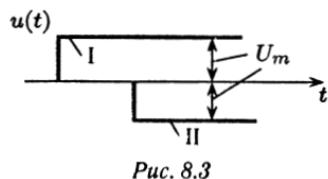
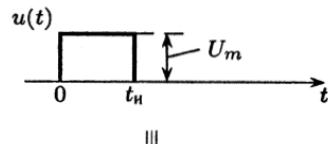


Рис. 8.3

а затем заменой $s = j\omega$ спектр

$$\begin{aligned} U(j\omega) &= \frac{U_m}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_h}) = \\ &= \frac{U_m}{j\omega} e^{-0,5j\omega t_h} (e^{0,5j\omega t_h} - e^{-0,5j\omega t_h}) = \\ &= \frac{2U_m}{\omega} e^{-0,5j\omega t_h} \sin(0,5\omega t_h). \end{aligned}$$

Далее определяем амплитудный спектр

$$A(\omega) = |U(j\omega)| = \frac{2U_m}{\omega} |\sin(0.5\omega t_h)| \quad (8.18)$$

и фазовый спектр (учитывая, что фаза произведения комплексных функций равна сумме фаз сомножителей)

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) = \text{Arg } U(j\omega) &= \text{Фаза } U(j\omega) = \\ &= -0,5\omega t_{ii} + \text{Arg} [\sin(0,5\omega t_{ii})], \quad (8.19)\end{aligned}$$

причем

1. (8.18), (8.19) записаны только для $\omega > 0$.
2. Аргумент (т. е. фаза) второго слагаемого в (8.19) равен $\pi \div 180^\circ$, если комплексная функция $\sin(0,5\omega t_{ii}) < 0$.

Начальное значение амплитудного спектра (с учетом замены $\sin \beta \rightarrow \beta$ при малых β) $A(0) = 2U_m(0,5t_{ii}) = U_m t_{ii} = S_{II}$, т. е. равно площади прямоугольного импульса, как указано в (8.12).

Найдем узлы (нули) амплитудного спектра — значения ω_{yk} , в которых $A(\omega) = 0$ и происходит смена знака сомножителя спектра $\sin(0,5\omega t_{ii})$, т. е. $\Phi(\omega)$ скачком изменяется на 180° в соответствии с (8.19):

$$\sin(0,5\omega_{yk} t_{ii}) = 0,$$

откуда $0,5\omega_{yk} t_{ii} = k\pi$, следовательно, $\omega_{yk} = k2\pi/t_{ii}$ при $k = 1, 2, 3 \dots$, как показано на графиках амплитудного и фазового спектров, изображенных на рисунке 8.4б. Так, на частоте первого узла $\omega_1 = 2\pi/t_{ii}$ линейная составляющая (первое слагаемое) в (8.19) принимает значение $-\pi \div -180^\circ$, но здесь же $\sin(0,5\omega t_{ii})$ изменяет знак, т. е. $\Phi(\omega)$ изменяется скачком от -180° до 0° и т. д. при $k = 2, 3, \dots$

Посередине между узлами, т. е. при значениях частоты π/t_{ii} , $3\pi/t_{ii}$, $5\pi/t_{ii}$, $7\pi/t_{ii}$, ..., имеем $|\sin(0,5\omega t_{ii})| = 1$ и амплитудный спектр $2U_m/\omega$ равен, соответственно, $2U_m t_{ii}/\pi \approx 0,64S_{II}$; $0,21S_{II}$; $0,13S_{II}$; $0,09S_{II}$..., как показано на рисунке 8.4.

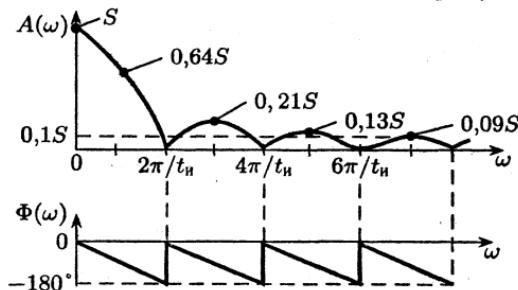


Рис. 8.4

ВЫВОДЫ (из анализа спектров (рис. 8.4)):

1. $A(0) = S_{\Pi}$.
2. Если длительность импульса t_{Π} уменьшить в 2 раза, спектр в 2 раза расширится (по оси ω).
3. Огибающая спектра $2U_m/\omega$ убывает пропорционально частоте ω .
4. Ширина спектра по грубому критерию «первого лепестка» (узла) составляет $\Delta\omega_{\Pi} = 2\pi/t_{\Pi}$ для $\omega > 0$, а по амплитудному «десятипроцентному» критерию ($0,1S_{\Pi}$) почти в 3 раза больше, т. е. $\Delta\omega_{\Pi} \approx 6\pi/t_{\Pi}$.

Примечание. Графики спектров на рисунке 8.4б приведены лишь для положительных значений частоты $\omega > 0$, при продолжении графиков в область $\omega < 0$ следует учитывать свойства четности: $A(\omega) = A(-\omega)$, $\Phi(\omega) = -\Phi(-\omega)$.

8.2.2. Спектр импульса треугольной формы

График рассматриваемого симметричного «треугольного» импульса $u(t)$ приведен на рисунке 8.5а, причем U_m — амплитуда, t_{Π} — длительность импульса.

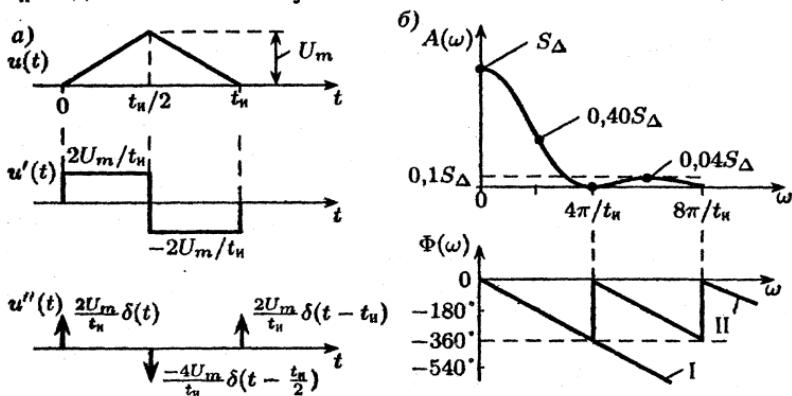


Рис. 8.5

Используя отраженный на рисунке 8.5а метод двойного дифференцирования и формулу $\delta(t - t_0) \div 1e^{-st_0}$, находим изображение по Лапласу треугольного импульса:

$$U(s) = \frac{2U_m}{s^2 t_{\Pi}} (1 - 2e^{-0,5st_{\Pi}} + e^{-st_{\Pi}}),$$

а затем спектр сигнала (заменой $s = j\omega$):

$$\begin{aligned} U(j\omega) &= \frac{2U_m}{-\omega^2 t_u} e^{-j\omega t_u/2} (e^{j\omega t_u/2} - 2 + e^{-j\omega t_u/2}) = \\ &= \frac{2U_m}{-\omega^2 t_u} e^{-j\omega t_u/2} (e^{j\omega t_u/4} - e^{-j\omega t_u/4})^2, \end{aligned}$$

или

$$U(j\omega) = \frac{2U_m}{-\omega^2 t_u} e^{\frac{-j\omega t_u}{2}} \left(2j \sin \frac{\omega t_u}{4} \right)^2 = \frac{8U_m}{\omega^2 t_u} e^{\frac{-j\omega t_u}{2}} \sin^2 \frac{\omega t_u}{4}. \quad (8.20)$$

Далее определяем амплитудный спектр:

$$A(\omega) = |U(j\omega)| = \frac{8U_m}{\omega^2 t_u} \sin^2 \frac{\omega t_u}{4} \quad (8.21)$$

и фазовый спектр (для $\omega > 0$):

$$\Phi(\omega) = \text{Arg } U(j\omega) = -\omega \frac{t_u}{2}, \quad (8.22)$$

причем (8.22) в отличие от (8.19) содержит только линейно изменяющуюся составляющую, поскольку в (8.20) $\sin^2(\omega t_u/4) \geq 0$, следовательно, фаза $\text{Arg}(\sin^2(\omega t_u/4)) = 0$.

Из (8.21) находим, что начальное значение амплитудного спектра (с учетом $\sin^2 \beta \rightarrow \beta^2$ при $\beta \rightarrow 0$) будет

$$A(0) = \frac{8U_m}{\omega^2 t_u} \left(\frac{\omega t_u}{4} \right)^2 \Big|_{\omega \rightarrow 0} = U_m \frac{t_u}{2} = S_\Delta,$$

т. е. равно площади сигнала.

Определяем узлы (нули) амплитудного спектра из условия $\omega_y k t_u / 4 = k\pi$, откуда $\omega_y k = k4\pi/t_u$ при $k = 1, 2, 3, \dots$. Посередине между узлами при значениях ω , равных $2\pi/t_u$, $6\pi/t_u, \dots$, имеем $\sin^2 \omega t_u / 4 = 1$, т. е. значения огибающей амплитудного спектра $8U_m/(\omega^2 t_u)$ соответственно приближенно равны $0,40S_\Delta$; $0,04S_\Delta$; ..., как показано на рисунке 8.5б. Фазовый спектр (8.22) можно изображать (см. рис. 8.5б) либо непрерывной линейной функцией I, либо, например, разрывной II с величиной скачка в $360^\circ \div 2\pi$.

ВЫВОДЫ:

1. $A(0) = S_\Delta$.
2. При уменьшении t_u спектр становится шире.

3. Огибающая амплитудного спектра $8U_m/(t_u\omega^2)$ убывает пропорционально ω^2 , т. е. быстрее, чем у прямоугольного импульса.
4. Ширина спектра по критерию «первого лепестка» и по 10%-му амплитудному критерию приблизительно одинакова и составляет $\Delta\omega_D \approx 4\pi/t_u$.

§ 8.3. ШИРИНА СПЕКТРА И ЕЕ СВЯЗЬ С ДЛЯТЕЛЬНОСТЬЮ И КРУТИЗНОЙ СИГНАЛА

8.3.1. Формула Релея и критерии ширины спектра

Найдем энергию сигнала

$$W_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt; \quad (8.23)$$

действительно, если считать, что $f(t) = i(t)$ — ток, протекающий по сопротивлению $R = 1$ Ом, то под интегралом Ri^2 — потребляемая в R -элементе мощность.

Преобразуем (8.23), используя обратное преобразование Фурье,

$$W_f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega,$$

далее изменяем последовательность интегрирования, учитывая, что t во втором интеграле можно считать параметром:

$$\begin{aligned} W_f &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)F(-j\omega) d\omega, \end{aligned}$$

причем здесь $F(-j\omega)$ — прямое преобразование Фурье по аргументу $(-j\omega)$. Произведение сопряженных функций $F(j\omega)F(-j\omega)$

равно квадрату модуля функции, т. е. в данном случае — квадрату амплитудного спектра. В результате получим формулу Релея

$$W_f = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) d\omega. \quad (8.24)$$

ВЫВОД: квадрат амплитудного спектра $A^2(\omega)$ характеризует относительное распределение энергии сигнала в спектре.

На (8.24) базируется энергетический критерий ширины спектра сигнала: шириной спектра $\Delta\omega$ называется диапазон частот около максимума $A^2(\omega)$, причем в этом диапазоне сосредоточено $n\%$ энергии сигнала (обычно, $n = 90$ или 95%).

В качестве примера на рисунке 8.6 изображены график «прямоугольного» импульса и график квадрата его амплитудного спектра (качественно).

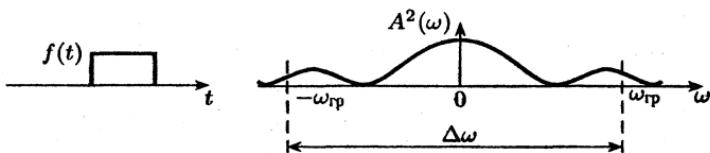


Рис. 8.6

Для определения граничных частот ω_{rp} ширины спектра приходится решать интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{rp}}^{\omega_{rp}} A^2(\omega) d\omega = 0,01nW_f.$$

Энергетический критерий является строгим, но трудоемким, поэтому на практике применяют нестрогий, но простой амплитудный критерий ширины спектра сигнала, фактически использованный в § 8.2: шириной спектра $\Delta\omega$ называют диапазон частот в районе максимума амплитудного спектра $A(\omega)$, причем вне этого диапазона $A(\omega) < nA_{\max}$ (обычно, $n = 0,05$ или $0,1$).

На практике также широко используют самый простой, но очень грубый критерий ширины спектра по значению первого лепестка (первого узла) амплитудного спектра сигнала. Однако в ряде случаев (см. § 8.2) этот критерий противоречит данным

других критериев, кроме того, амплитудные спектры некоторых сигналов не имеют узлов (т. е. нулей), например $f(t) = e^{-10t}\delta_1(t) \div F(s) = 1/(s+10)$, а значит, $F(j\omega) = 1/(j\omega+10)$, т. е. амплитудный спектр $A(\omega) = 1/\sqrt{\omega^2 + 10^2} \rightarrow 0$ лишь при $\omega \rightarrow \infty$.

Примечания:

- Если в практических расчетах учитывать только диапазон частот, относящийся к ширине спектров сигналов, ошибки расчетов обычно будут небольшими.
- Поскольку спектр одиночного импульса является огибающей дискретного спектра периодического сигнала аналогичной формы, все критерии ширины спектра могут быть использованы и для периодических сигналов.
- Спектр дельта-функции $\Delta(j\omega) = 1$, следовательно, квадрат амплитудного спектра $A^2(\omega) = 1$ на любой частоте, т. е. ширина спектра дельта-функции бесконечна, энергия дельта-функции

$$W_\delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) d\omega \rightarrow \infty$$

и дельта-функцию физически реализовать невозможно.

8.3.2. Связь ширины спектра с длительностью сигнала

Рассмотрим (рис. 8.7) некоторый одиночный импульс $f_1(t)$ длительностью t_H , спектр которого $F_1(j\omega)$ имеет ширину $\Delta\omega$ (для простоты считаем $f_1(t)$ — четной функцией).

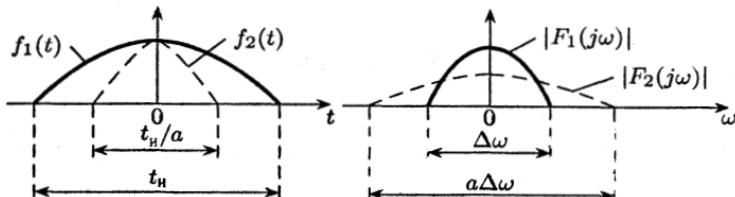


Рис. 8.7

Пусть имеется второй сигнал $f_2(t)$ подобной формы, но иной длительности: $f_2(t) = f_1(at)$, причем для определенности на рисунке 8.7 принято $a = 2$, следовательно, импульс f_2 в 2 раза короче, чем f_1 (действительно, f_2 в момент t равен значению f_1 при $2t$).

По теореме подобия находим спектр $F_2(j\omega) = \frac{1}{a}F_1(j\omega/a)$, т. е. на рисунке 8.7 у второго сигнала значения амплитудного спектра уменьшились в 2 раза, но спектр стал в 2 раза шире (действительно, значение F_2 на частоте ω пропорционально значению F_1 на частоте $\omega/2$).

ВЫВОДЫ:

1. Чем короче сигнал, тем шире его спектр.
2. Для сигналов подобной формы произведение длительности сигнала на ширину его спектра есть величина постоянная:

$$t_n \Delta\omega = \text{const.} \quad (8.25)$$

Примечания:

1. Дельта-функция — самый короткий сигнал (с нулевой длительностью) — имеет спектр бесконечной ширины.
2. Чем шире полоса пропускания цепи, тем быстрее в ней идут переходные процессы (действительно, частотная характеристика $H(j\omega)$ — это спектр импульсной характеристики $h(t)$, которая, в свою очередь, определяет продолжительность свободных процессов в цепи, а полоса пропускания — это в некотором смысле аналог ширины спектра).
3. Значения const в (8.25) для сигналов различной формы и различных критериев ширины спектра приведены в справочниках; так, const для «прямоугольного и треугольного» импульсов будут, соответственно, $2,96\pi$ и $1,84\pi$ при 90%-энергетическом критерии.

8.3.3. Понятие о связи ширины спектра с крутизной сигнала

Допустим, имеем два сигнала треугольной формы, одинаковой длительности и высоты, но один из «треугольников» равнобедренный, а второй — нет. Оказывается у неравнобедренного треугольного импульса ширина спектра больше, так как один из «фронтов» сигнала круче, чем «фронты» у равнобедренного треугольника.

Рассмотрим (рис. 8.8) три сигнала одинаковой длительности, но различной крутизны (различной степени гладкости), и найдем их изображения по Лапласу, а затем — спектры:

$$f_1(t) \div F(s) \div F(j\omega).$$

Для наиболее крутого из рассматриваемых сигналов (кусочно-постоянного) имеем

$$f_1(t) \div F_1(s) = \frac{1}{s}[\dots], \quad F_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega}[\dots],$$

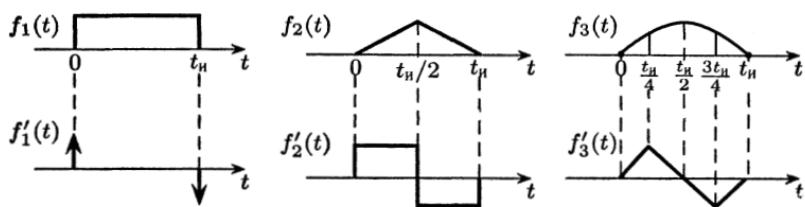


Рис. 8.8

где в квадратных скобках выделена неанализируемая здесь часть изображения и спектра сигнала.

Для сигнала кусочно-линейной формы получим

$$f_2(t) \div F_2(s) = \frac{1}{s^2}[\dots], \quad F_2(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}[\dots].$$

Для наиболее гладкого сигнала кусочно-параболической формы имеем

$$f_3(t) \div F_3(s) = \frac{1}{s^3}[\dots], \quad F_3(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3}[\dots].$$

Примечания:

1. Амплитудный спектр самого гладкого сигнала $f_3(t)$ имеет сомножитель, убывающий пропорционально ω^3 (т. е. быстрее, чем у остальных сигналов), а самого негладкого (самого крутого) — $f_1(t)$ — пропорционально ω (т. е. наименее медленно).
2. Даже у самого крутого сигнала $f_1(t)$ амплитудный спектр убывает достаточно быстро, что в явной форме свидетельствует о высокой сходимости спектра (преобразования Фурье).
3. Поскольку спектр одиночного импульса является огибающей дискретного спектра периодического сигнала, то ряд Фурье тоже быстро сходится.
4. Степень гладкости сигнала оценивается по степени разрывности его производной; очевидно, $f_3(t)$ — самый гладкий сигнал из рассматриваемых, так как у него разрывной будет $f''_3(t)$, а $f_1(t)$ — самый крутой сигнал, поскольку у него разрывной является нулевая производная, т. е. сам сигнал.

ВЫВОДЫ:

1. Чем круче сигнал, тем шире его спектр.
2. Самым крутым из рассматриваемых в теории цепей сигналов является делта-функция $\delta(t) \div \Delta(j\omega) = 1$; ширина ее спектра бесконечна.

§ 8.4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОТЫСКАНИЯ СИГНАЛА ПО СПЕКТРУ

8.4.1. Приближенный расчет сигнала по его амплитудному и фазовому спектрам

Из формул (8.17)

$$A_k = \frac{2}{T} A_1(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_1=k2\pi/T},$$

$$\Phi_k = \Phi_1(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_1=k2\pi/T},$$

связывающих спектр $F_1(j\omega) = A_1(\omega)e^{j\Phi_1(\omega)}$ неизвестного одиночного импульса $f_1(t)$ с дискретным спектром $\dot{A}_k = A_k e^{j\Phi_k}$ сигнала f_n , составленного из периодической последовательности импульсов $f_1(t)$, вытекает простой метод приближенного вычисления сигнала $f_1(t)$ по его спектру:

1. Строят графики амплитудного $A_1(\omega)$ и фазового $\Phi_1(\omega)$ спектров искомого одиночного импульса $f_1(t)$.

2. Выбрав произвольно достаточно большой период T , по указанным формулам определяют на частотах $k\omega_1 = k2\pi/T$ амплитуды и начальные фазы A_k и Φ_k гармоник ряда Фурье сигнала $f_n(t)$, составленного из периодически повторяющихся импульсов $f_1(t)$.

3. Записывают ряд Фурье, ограничиваясь обычно тремя-семью первыми (наиболее значительными по амплитуде) гармониками:

$$f_n(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{3\dots7} A_k \cos(k\omega_1 t + \Phi_k),$$

и затем вычерчивают график $f_n(t)$ в пределах условно «первого периода», т. е. в интервале $0 < t < T$. Это и будет искомый одиночный импульс $f_1(t)$.

Отметим, что если в пределах периода T построенный график $f_1(t)$ практически затухает, то значение T выбрано правильно, если же не затухает, необходимо увеличить T и повторить расчет.

Описанный метод является простым в использовании и достаточно точным.

8.4.2. Связь сигнала с его вещественным и мнимым спектрами

Пусть сигнал $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. По обратному преобразованию Фурье для вещественной функции $f(t)$ имеем

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B(\omega) + jM(\omega)] (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B(\omega) \cos \omega t - M(\omega) \sin \omega t] d\omega + j0, \quad (8.26) \end{aligned}$$

причем мнимая часть в (8.26) равна нулю, во-первых, так как $f(t)$ — по условию вещественная функция, а во-вторых, под интегралом при записи мнимой части находится нечетная функция, которая интегрируется в симметричных пределах.

По условию имеем

$$f(-t) \equiv 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [B(\omega) \cos \omega t + M(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (8.27)$$

тогда получим, суммируя (8.26), (8.27),

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (8.28)$$

и, вычитая,

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (8.29)$$

Поскольку в (8.28), (8.29) интегрируются четные функции, пределы интегрирования можно сократить вдвое:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} M(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (8.30)$$

ВЫВОД: если сигнал $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$, то на основании (8.30) он обязан иметь и вещественный и мнимый спектры; они жестко связаны соотношением (8.27), т. е. один спектр однозначно определяет другой. Жесткой является также связь между амплитудными и фазовыми спектрами (для сигналов, изображение которых не содержит нулей и полюсов в правой полуплоскости). Поскольку частотные характеристики — это спектр импульсной характеристики, то АЧХ-ФЧХ-ВЧХ-МЧХ также жестко связаны. Поэтому при синтезе цепей и сигналов нельзя произвольно задавать какие-либо два спектра независимо друг от друга.

Примечания.

1. Выражения (8.30) называют тригонометрическими формами обратного преобразования Фурье.
2. Дельта-функция $\delta(t)$ была введена как четная функция $f(t) = f(-t)$, поэтому ее спектр $\Delta(j\omega) = 1$ не содержит мнимой составляющей.

8.4.3. Использование преобразования Лапласа при отыскании сигнала по его вещественному или мнимому спектрам

Формулу (8.30) преобразуем к виду

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B(\omega) \cos \omega t \, d\omega = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty B(\omega) e^{-s\omega} \, d\omega \Big|_{s=jt},$$

где интеграл соответствует преобразованию Лапласа \mathcal{L} от вещественного спектра, т. е.

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \mathcal{L}[B(\omega)] \Big|_{s=jt}. \quad (8.31)$$

Аналогично, преобразовав по Лапласу мнимый спектр, можно получить формулу

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \mathcal{L}[M(\omega)] \Big|_{s=jt}. \quad (8.32)$$

На практике производят кусочно-линейную аппроксимацию графиков $B(\omega)$ или $M(\omega)$, методом двойного дифференцирования находят их изображения по Лапласу $\mathcal{L}[B(\omega)]$ или $\mathcal{L}[M(\omega)]$, а затем производят операции, указанные в (8.31), (8.32).

Метод является приближенным так как:

- Используется аппроксимация графиков.
- На практике не учитывают высокочастотную зону спектра, следовательно, на основании теоремы

$$f(0+) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} j\omega F(j\omega)$$

максимальная погрешность будет иметь место в начале процесса.

8.4.4. Невозможность реализации идеального фильтра низких частот (ФНЧ)

Рассмотрим идеальный ФНЧ, простейший вариант частотных характеристик которого приведен на рисунке 8.9a, где частота среза ω_{cp} — определяет границу полосы пропускания фильтра.

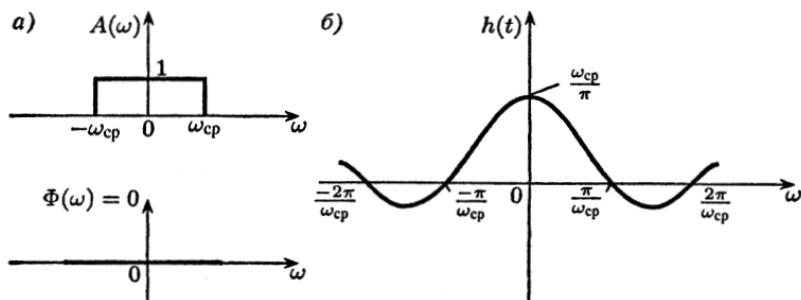


Рис. 8.9

Таким образом, обобщенную частотную характеристику ФНЧ можно записать так:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_{cp}, \\ 0, & |\omega| > \omega_{cp}. \end{cases} \quad (8.33)$$

Примечания:

- Частотные характеристики *RLC*-цепей описываются дробно-рациональными функциями частоты $j\omega$, в то время как (8.33) не является дробно-рациональной функцией, следовательно, *RLC*-цепями нельзя реализовать идеальный ФНЧ.
- Импульсная характеристика $h(t) \equiv 0$ при $t < 0$, следовательно, на основании 8.4.2 составляющие частотных характеристик (АЧХ, ФЧХ, ВЧХ, МЧХ) должны быть жестко связаны, и задавать АЧХ $A(\omega)$ независимо от ФЧХ $\Phi(\omega)$, как это сделано на рисунке 8.9a, нельзя.

Выясним, к чему приводит такое независимое задание АЧХ и ФЧХ. Найдем импульсную характеристику идеального ФНЧ, используя обратное преобразование Фурье от (8.33):

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{cp}}^{\omega_{cp}} 1 e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi j t} (e^{j\omega_{cp} t} - e^{-j\omega_{cp} t}) = \frac{\omega_{cp}}{\pi} \frac{\sin \omega_{cp} t}{\omega_{cp} t}. \quad (8.34) \end{aligned}$$

Очевидно, $h(0) = \omega_{cp}/\pi$, если раскрыть в (8.34) неопределенность. Узлы (нули) в (8.34) имеют место при $\sin \omega_{cp} t_k = 0$, т. е. в моменты $t_k = k\pi/\omega_{cp}$ при $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. График выражения (8.34), справедливого для любого момента времени t приведен на рисунке 8.9б.

Вывод (из анализа рис. 8.9б): реакция, т. е. импульсная характеристика $h(t) \neq 0$ при $t < 0$, хотя воздействие $\delta(t)$ приложено к цепи при $t = 0$; следовательно, нарушено условие физической осуществимости и идеальный ФНЧ реализовать невозможно.

§ 8.5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ

8.5.1. Основные положения расчета и оценки переходных процессов в цепях спектральным методом

Рассмотрим следующие приложения метода.

1. *Приближенный расчет переходных процессов спектральным методом.* На основании теоремы свертки находят спектр реакции:

$$F_{\text{вых}}(j\omega) = F_{\text{вх}}(j\omega)H(j\omega), \quad (8.35)$$

где $F_{\text{вх}}(j\omega)$ — спектр воздействия, $H(j\omega)$ — обобщенная частотная характеристика цепи.

Обычно на практике на основании (8.35) определяют амплитудный и фазовый спектры реакции:

$$A_{\text{вых}}(\omega) = A_{\text{вх}}(\omega)A(\omega), \quad \Phi_{\text{вых}}(\omega) = \Phi_{\text{вх}}(\omega) + \Phi(\omega), \quad (8.36)$$

а затем, если необходимо, по графикам $A_{\text{вых}}(\omega)$ и $\Phi_{\text{вых}}(\omega)$ расчитывают вещественный и мнимый спектры:

$$\begin{aligned}B_{\text{вых}}(\omega) &= A_{\text{вых}}(\omega) \cos[\Phi_{\text{вых}}(\omega)], \\M_{\text{вых}}(\omega) &= A(\omega) \sin[\Phi_{\text{вых}}(\omega)],\end{aligned}$$

причем очень часто (в цепях высокого порядка) вычисления (8.36) выполняют, используя графики амплитудного $A_{\text{вх}}(\omega)$ и фазового $\Phi_{\text{вх}}(\omega)$ спектров воздействия $f_{\text{вх}}(t)$, а также графики АЧХ и ФЧХ цепи.

Далее одним из трех приближенных методов, описанных в § 8.4, по спектру реакции (по $A_{\text{вых}}$ и $\Phi_{\text{вых}}$, или по $B_{\text{вых}}$, или по $M_{\text{вых}}$) находят саму реакцию $f_{\text{вых}}(t)$.

2. Приближенный расчет импульсной характеристики спектральным методом. Поскольку частотные характеристики цепи $H(j\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} = B(\omega) + jM(\omega)$ — являются спектром импульсной характеристики цепи $h(t)$, то, зная график АЧХ и ФЧХ, или ВЧХ, или МЧХ, можно одним из трех указанных в § 8.4 методов приближенно определить $h(t)$.

3. Приближенная оценка реакции по значению АЧХ цепи на нулевой частоте. Спектр сигнала при $\omega = 0$ равен площади сигнала. Поэтому на основании (8.35), (8.36) $A_{\text{вых}}(0) = A_{\text{вх}}(0)A(0)$, т. е. если начальное значение АЧХ $A(0) = 0$, то суммарная площадь реакции равна нулю; если $A(0) = k$, то площадь реакции в k раз отличается от площади воздействия.

4. Приближенная оценка реакции по значению АЧХ цепи на бесконечной частоте.

С учетом (8.35) на основании теоремы о начальном значении имеем:

$$f_{\text{вых}}(0+) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} j\omega F_{\text{вх}}(j\omega)H(j\omega) = f_{\text{вх}}(0+)H(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty},$$

следовательно, если значение АЧХ на бесконечной частоте $A(\infty) = 0$, то скачок воздействия $f_{\text{вх}}(0+)$ на выход не пройдет; если $A(\infty) = k$, то скачок реакции $f_{\text{вых}}(0+)$ в k раз отличается от скачка воздействия.

5. Оценка изменения формы сигнала, проходящего через цепь, путем сравнения спектра воздействия с частотными характеристиками (ЧХ) цепи.

Обычно ЧХ цепи можно приближенно разбить на частотные зоны (интервалы) неискажения, дифференцирования, интегрирования, двойного дифференцирования, двойного интегрирования и т.д. Если спектр входного сигнала располагается в основном в одной из этих зон, можно предсказать изменение формы реакции на выходе цепи. Далее этот вопрос рассматривается подробнее.

8.5.2. Характеристики идеальных неискажающих, дифференцирующих и интегрирующих цепей

Идеальная неискажающая цепь реализует операцию

$$f_{\text{вых}}(t) = k f_{\text{вх}}(t - t_3), \quad (8.37)$$

т. е. условие пропускания сигналов без искажения допускает изменение уровня проходящих сигналов в k раз и их сдвиг на t_3 — время запаздывания.

Преобразуем (8.37) по Лапласу: $F_{\text{вых}}(s) = k F_{\text{вх}}(s) e^{-st_3}$, откуда передаточная функция идеальной неискажающей цепи

$$H(s) = \frac{F_{\text{вых}}(s)}{F_{\text{вх}}(s)} = k e^{-st_3};$$

обобщенная частотная характеристика $H(j\omega) = k e^{-j\omega t_3}$, АЧХ $A(\omega) = |H(j\omega)| = k$, ФЧХ $\Phi(\omega) = -\omega t_3$.

Графики АЧХ и ФЧХ идеальной неискажающей цепи приведены на рисунке 8.10a.

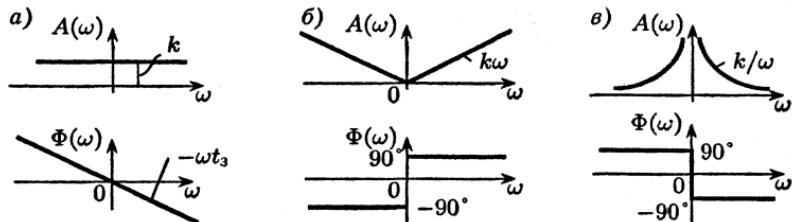


Рис. 8.10

ВЫВОД: АЧХ неискажающей цепи — постоянна (не зависит от частоты), а ФЧХ линейна, причем наклон ФЧХ определяет время запаздывания t_3 проходящих сигналов $t_3 = |\Delta\Phi|/\Delta\omega$ (приращение $\Delta\Phi$ измеряют в радианах).

Идеальная дифференцирующая цепь реализует операцию

$$f_{\text{вых}}(t) = k f'_{\text{вх}}(t).$$

Преобразовав по Лапласу условие дифференцирования (при нулевых начальных условиях) имеем:

$$F_{\text{вых}}(s) = ks F_{\text{вх}}(s),$$

откуда получаем передаточную функцию идеальной дифференцирующей цепи $H(s) = ks$, частотную характеристику $H(j\omega) = jk\omega$, АЧХ $A(\omega) = k|\omega|$, ФЧХ $\Phi(\omega) = +90^\circ$ для области $\omega > 0$ и $\Phi(\omega) = -90^\circ$ для $\omega < 0$.

Графики АЧХ и ФЧХ приведены на рисунке 8.10б.

Вывод: при $\omega > 0$ АЧХ идеальной дифференцирующей цепи линейно возрастает, а ФЧХ равна $+90^\circ$.

Идеальная интегрирующая цепь реализует операцию

$$f_{\text{вых}}(t) = k \int_0^t f_{\text{вх}}(t) dt.$$

Преобразовав по Лапласу при нулевых начальных условиях операцию идеального интегрирования, находим передаточную функцию $H(s) = k/s$, затем обобщенную частотную характеристику $H(j\omega) = k/(j\omega)$, АЧХ $A(\omega) = k/|\omega|$ и ФЧХ $\Phi(\omega) = -90^\circ$ (для $\omega > 0$). Графики АЧХ и ФЧХ идеальной интегрирующей цепи приведены на рисунке 8.10в.

Вывод: при $\omega > 0$ АЧХ идеальной интегрирующей цепи описывается гиперболой, а ФЧХ равна -90° .

Примечания:

1. При двухкратном дифференцировании и интегрировании сигналов передаточные функции, соответственно, ks^2 и k/s^2 .
2. При построении графиков частотных характеристик и спектров на практике обычно ограничиваются диапазоном положительных частот ($\omega > 0$).
3. Очень часто АЧХ цепей удается приближенно разбить на частотные интервалы (зоны, диапазоны), в которых график асимптотически приближается к функциям k (т. е. const), или $k\omega$, или k/ω , что соответствует зонам неискажения (т. е. пропускания), или дифференцирования, или интегрирования; при этом передаточные функции, приближенно описывающие цепь в этих зонах, будут, соответственно, равны k , или ks , или k/s .

8.5.3. Характеристики реальной дифференцирующей RC -цепи

Схема цепи, называемой на практике дифференцирующей RC -цепью, приведена на рисунке 8.11а. Проведем общий анализ передаточных (передающих) свойств этой цепи в t -области при условиях: 1) $u_{\text{вых}}(t) \ll u_{\text{вх}}(t)$; 2) $u_C(0-) = 0$.

Очевидно, что сигнал на выходе цепи

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= u_R(t) = Ri(t) = \\ &= RCu'_C(t) \approx RCu'_{\text{вх}}(t) = \tau u'_{\text{вх}}(t), \end{aligned}$$

поскольку на основании первого условия $u_C(t) \approx u_{\text{вх}}(t)$.

Выводы:

- При малых уровнях выходного сигнала цепь приближенно реализует операцию дифференцирования.
- Чем меньше постоянная времени цепи τ , тем ярче эффект дифференцирования.

Проведем вначале в частотной, а затем во временной областях анализ прохождения прямоугольного импульса $u_{\text{вх}}(t)$ (рис. 8.11б) через исследуемую цепь. Передаточная функция цепи будет

$$H(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{R}{R + Z_C} = \frac{RCs}{RCs + 1} = \frac{s}{s + 1/\tau},$$

откуда обобщенная частотная характеристика $H(j\omega) = j\omega/(j\omega + 1/\tau)$, АЧХ $A(\omega) = |H(j\omega)| = \omega/\sqrt{\omega^2 + (1/\tau)^2}$ при $\omega > 0$.

Приближенно разобьем АЧХ на частотные интервалы $\omega < 1/\tau$ и $\omega > 1/\tau$. При этом учитываем, что в приближенных расчетах, для качественной (грубой) оценки результатов широко используется соотношение $\sqrt{a^2 + b^2} \cong \max\{a, b\}$, поскольку уже при $b < a/2$ имеем $\sqrt{a^2 + b^2} \approx a$ с погрешностью меньше, чем 12%.

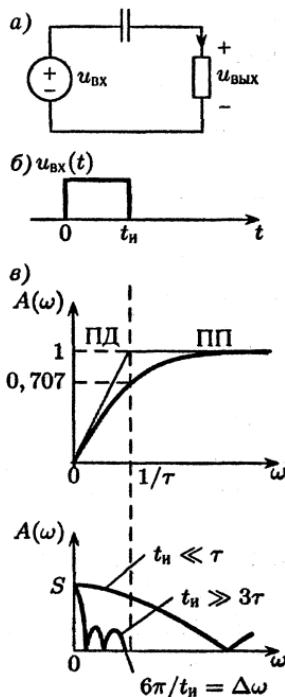


Рис. 8.11

Низкочастотная (НЧ) зона $\omega < 1/\tau$.

Пренебрегая ω в сравнении с $1/\tau$ в приведенных формулах, получим: АЧХ $A(\omega) \approx \tau\omega$, что соответствует полосе дифференцирования (ПД) с передаточной функцией $H(s) \approx \tau s$.

Высокочастотная (ВЧ) зона $\omega > 1/\tau$.

Пренебрегая $1/\tau$ в сравнении с ω , получим АЧХ цепи $A(\omega) \approx 1$, что соответствует зоне неискажения (полосе пропускания) с передаточной функцией $H(s) \approx 1$.

На рисунке 8.11в АЧХ, построенная приближенно по частотным интервалам, показана тонкой линией, а уточненная — жирной линией.

Примечание. полоса пропускания (ПП) цепи, рассчитанная по «критерию $0,707 A_{\max}$ », в точности соответствует зоне неискажения, а частота среза $\omega_{\text{ср}} = 1/\tau$ — частоте «стыка» частотных интервалов.

Сравним АЧХ цепи с амплитудным спектром прямоугольного импульса для $\omega > 0$, как показано на рисунке 8.11в. Рассмотрим два вида импульсов: «короткий» ($t_i \ll \tau$) и «длинный» ($t_i \gg 3\tau$); данные о спектре прямоугольного импульса были получены в п. 8.2.1 (см. рис. 8.4).

ВЫВОДЫ (на основании анализа рисунка 8.11в):

1. Спектр «длинного» импульса ($6\pi/t_i < 1/\tau$, т. е. $t_i > 6\tau \approx 18\tau$) располагается в полосе дифференцирования, поэтому на выходе цепи будет ярко выражен «эффект дифференцирования» входного прямоугольного импульса.
2. Спектр «короткого» импульса ($t_i \ll \tau$) в основном располагается в полосе пропускания, следовательно, изменение формы реакции в сравнении с воздействием будет незначительным.

Примечания:

1. Поскольку значение АЧХ на нулевой частоте $A(0) = 0$, суммарная площадь реакции должна быть нулевой.
2. Поскольку $A(\infty) = 1$, скачки (разрывы) воздействия полностью пройдут на выход.
3. Кроме того, при $A(0) = 0$ реакция не может содержать постоянную составляющую, т. е. на выходе будет наблюдаться «спад полок (горизонтальных участков) воздействия».

Сравним полученные данные частотного анализа с непосредственным рассмотрением процессов в цепи во временной области (рис. 8.12).

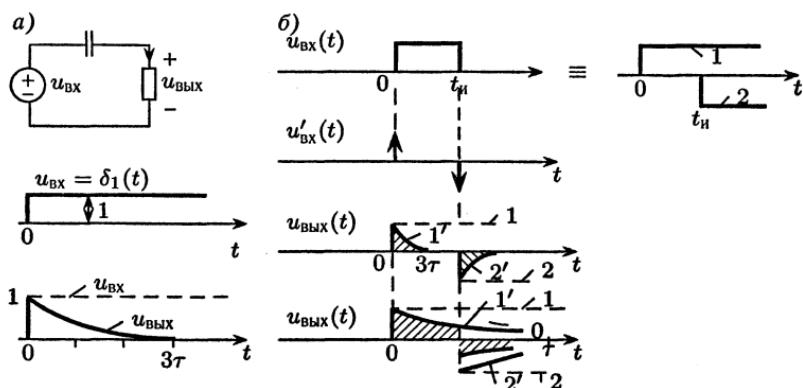


Рис. 8.12

Реакция цепи на единичное ступенчатое воздействие, приведенная в нижней части рисунка 8.12а, общеизвестна: при $t = 0+$ C -элемент эквивалентен короткозамкнутому участку (КЗ), поэтому скачок воздействия полностью проходит на выход; при $t \rightarrow \infty$, т. е. в установившемся режиме при постоянном воздействии C -элемент эквивалентен холостому ходу (ХХ), т. е. разомкнутому участку цепи, поэтому сигнал на выход не проходит; переходный процесс описывается уравнением $u_{\text{вых}}(t) = \exp(-t/\tau)\delta_1(t)$.

Прямоугольный импульс на входе цепи можно представить суммой двух сигналов ступенчатой формы (1 и 2), как показано в верхней части рисунка 8.12б. График «идеальной» производной входного сигнала $u'_{\text{вх}}(t)$ описывается двумя смещенными во времени дельта-функциями, т. е. двумя бесконечно короткими (узкими) импульсами. Используя метод наложения и изображенную на рисунке 8.12а реакцию на ступенчатое воздействие, строим графики выходного сигнала (заштрихованы в нижней части рисунка 8.12б, где тонкими линиями также показаны элементарные реакции 1' и 2' от ступенчатых воздействий 1 и 2. Как видим, при $t_i \gg 3\tau$, т. е. при действии «длинного» прямоугольного импульса на входе, на выходе ярко выражен «эффект дифференцирования», поскольку реакция имеет форму двух коротких импульсов. Если же $t_i \ll \tau$, т. е. при действии «короткого» (в сравнении с постоянной времени τ) импульса на входе, форма сигнала на выходе $u_{\text{вых}}(t)$ незначительно отличается от $u_{\text{вх}}(t)$. Следует обратить внимание, что суммарная площадь

реакции равна нулю, а скачки воздействия полностью проходят на выход, что и было «предсказано» ранее.

ВЫВОД: данные временного и частотного анализов хорошо согласуются.

Примечание. Воздействующий «прямоугольный» импульс является самым крутым (негладким) из реально существующих сигналов, поэтому «предсказание» частотным (спектральным) методом реакции при таком воздействии является наиболее сложным.

8.5.4. Характеристики реальной интегрирующей RC -цепи

Схема интегрирующей RC -цепи приведена на рисунке 8.13а. Проведем вначале общий анализ передаточных свойств этой цепи при условиях: 1) $u_{\text{вых}}(t) \ll u_{\text{вх}}(t)$; 2) $u_C(0-) = 0$. Очевидно, сигнал на выходе цепи будет

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = \\ &= \frac{1}{CR} \int_0^t u_R(t) dt \approx \frac{1}{\tau} \int_0^t u_{\text{вх}}(t) dt, \end{aligned}$$

поскольку на основании первого условия $u_{\text{вх}}(t) \approx u_R(t)$.

ВЫВОДЫ:

- При малых уровнях реакции цепь приближенно реализует операцию интегрирования воздействия.
- Чем больше постоянная времени τ , тем ярче эффект интегрирования.

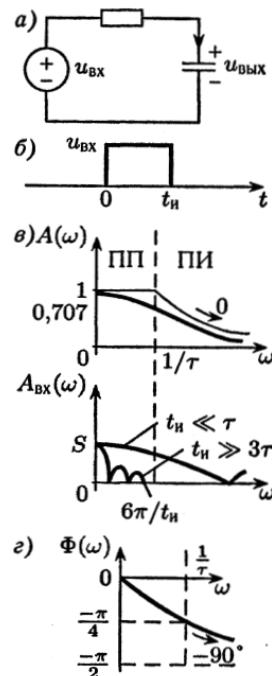


Рис. 8.13

Проведем анализ прохождения прямоугольного импульса (рис. 8.13б) через интегрирующую RC -цепь. Получим, что передаточная функция $H(s) = Z_C/(R+Z_C) = 1/(1+RCs) = (1/\tau)/(s + 1/\tau)$, частотная характеристика $H(j\omega) = (1/\tau)/(j\omega + 1/\tau)$, АЧХ $A(\omega) = (1/\tau)/\sqrt{\omega^2 + (1/\tau)^2}$, ФЧХ $\Phi(\omega) = -\arctg \omega\tau$.

Приближенно разобьем АЧХ на частотные интервалы $\omega < 1/\tau$ и $\omega > 1/\tau$. В НЧ-зоне, пренебрегая ω в сравнении с $1/\tau$, получим АЧХ $A(\omega) \approx 1$, что соответствует зоне неискажения (полосе пропускания) с передаточной функцией $H(s) \approx 1$.

В ВЧ-зоне ($\omega > 1/\tau$), пренебрегая $1/\tau$ в сравнении с ω , получим АЧХ цепи $A(\omega) = 1/(\tau\omega)$, что соответствует полосе интегрирования (ПИ) с передаточной функцией $H(s) = 1/(\tau s)$.

На рисунке 8.13 ε АЧХ, построенная по частотным интервалам, показана тонкими линиями, а уточненная — жирной линией.

Примечание. Полоса пропускания (ПП), рассчитанная по «критерию $A_{\max}/\sqrt{2}$ », полностью соответствует зоне неискажения $\Delta\omega_{\text{пп}} = \omega_{\text{ср}} = 1/\tau$.

Сравним АЧХ цепи $A(\omega)$ с амплитудным спектром $A_{\text{вх}}(\omega)$ прямоугольного импульса, показанным на рисунке 8.13 ε . Как и ранее, рассматриваем «длинный» (продолжительный во времени) сигнал прямоугольной формы ($t_i \gg 3\tau$) и «короткий» сигнал на входе ($t_i \ll \tau$).

ВЫВОДЫ:

1. Спектр «длинного» импульса в основном располагается в полосе пропускания ($\Delta\omega_{\text{пп}} = 6\pi/t_i < \Delta\omega_{\text{пп}} = 1/\tau$; $t_i > 18\tau$), следовательно, изменение формы сигнала на выходе будет незначительным.
2. Спектр «короткого» импульса ($t_i \ll \tau$) воздействия в основном располагается в полосе интегрирования, поэтому на выходе цепи будет ярко выражен эффект интегрирования проходящих сигналов.

Примечания:

1. Поскольку $A(0) = 1$, площадь реакции равна площади воздействия.
2. Поскольку $A(\infty) = 0$, выходной сигнал обязан быть непрерывным.
3. Время запаздывания t_3 проходящего через цепь сигнала, спектр которого располагается в полосе пропускания (т. е. «длинного» импульса), оценивается в соответствии с п. 8.5.2 по наклону ФЧХ $\Phi(\omega) = -\arctg \omega t$ на низких частотах (см. рис. 8.13 ε); уравнение касательной к ФЧХ при $\omega = 0$, очевидно, имеет вид $-\omega t \cong -\omega t_3$, т. е. $t_3 \cong \tau$, а при оценке t_3 в целом по полосе пропускания на основании рисунка 8.13 ε получим оценку времени запаздывания $t_3 \cong |\Delta\Phi|/\Delta\omega_{\text{пп}} = 0,25\pi/(1/\tau) \cong 0,75\tau$.

Сравним данные анализа в частотной области с данными анализа процессов непосредственно во временной области (рис. 8.14).

Реакция цепи на единичное ступенчатое воздействие приведена в нижней части рисунка 8.14 a : при $t = 0+$ C -элемент

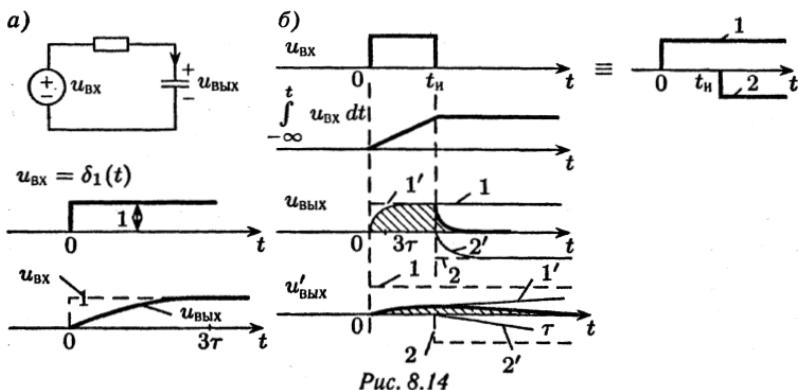


Рис. 8.14

эквивалентен КЗ, скачок воздействия на выход не проходит, реакция $u_C(t)$ действительно описывается непрерывной функцией; при $t \rightarrow \infty$ C -элемент эквивалентен ХХ, следовательно, $u_{\text{вых}} = u_{\text{вх}} = 1$; переходный процесс описывается уравнением $u_{\text{вых}}(t) = [1 - \exp(-t/\tau)]\delta_1(t)$.

Прямоугольный импульс $u_{\text{вх}}$ представляем суммой смещенных ступенчатых функций 1 и 2, как показано в верхней части рисунка 8.14б. Затем на рисунке 8.14б приведен график «идеального интеграла» от $u_{\text{вх}}$: это кусочно-линейная функция, постоянная при $t > t_i$. Используя метод наложения и изображенную на рисунке 8.14а реакцию на ступенчатое воздействие, строим графики выходного сигнала (заштрихованы в нижней части рисунка 8.14б, где тонкими линиями также изображены элементарные реакции 1' и 2' от воздействий 1 и 2). Как видим, при действии на входе «длинного» прямоугольного импульса ($t_i \gg 3\tau$) реакция претерпевает незначительные искажения: если же на входе действует «короткий» импульс ($t_i \ll \tau$), график реакции «напоминает» график «идеального интеграла», но уровень сигнала на выходе невелик.

ВЫВОД: данные временного и частотного анализов хорошо согласуются.

Примечание. Время запаздывания t_3 сигналов, проходящих через цепи с незначительными искажениями, часто оценивают по окончании переходных процессов (на действие элементарной составляющей входного сигнала), т. е. по смещению во времени вынужденной составляющей реакции; однако для импульса прямоугольной формы этот вариант оценки непригоден; если использовать здесь оценку t_3 по достижению $u_{\text{вых}}$ половинного уровня нарастания (спада) «фронтов» реакции, то $t_3 \approx 0,7\tau$.

§ 8.6. СПЕКТРЫ ЕДИНИЧНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ И АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

8.6.1. Спектр $\delta_1(t)$. Понятие об особых спектрах

Единичная ступенчатая функция $\delta_1(t)$, график которой изображен на рисунке 8.14а, не является абсолютно интегрируемой функцией, так как площадь под графиком бесконечна. Поэтому, используя изображение по Лапласу $\delta_1(t) \div \Delta_1(s) = 1/s$, находить спектр заменой $s = j\omega$ нельзя. Однако полюс изображения ($s_1 = 0$) находится в начале координат и правую полуплоскость не переходит, поэтому спектр $\delta_1(t)$ все же существует, но является особым и отыскивается по формуле

$$\Delta_{10}(j\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Delta_1(s) \Big|_{s=\sigma+j\omega}. \quad (8.38)$$

Используя (8.38), получим, избавляясь от мнимости в знаменателе:

$$\begin{aligned} \Delta_{10}(j\omega) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma + j\omega} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} - \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{j\omega}{\sigma^2 + \omega^2} = \\ &= B(\omega) + jM(\omega). \end{aligned}$$

Очевидно, мнимый спектр

$$jM(\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{-j\omega}{\sigma^2 + \omega^2} = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{s} \Big|_{s=j\omega}$$

как раз получается из изображения путем указанной выше простой замены $s = j\omega$. Однако в соответствии с п. 8.4.2 любой сигнал, начинающийся с момента $t = 0$, обязан иметь и вещественный, и мнимый спектры.

Перейдем к отысканию вещественного спектра:

$$B(\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0 \\ \infty, & \omega = 0. \end{cases}$$

Предположим, что выражение $B(\omega)$ — это дельта-функция в частотной области, т. е. $B(\omega) = K\delta(\omega)$. Тогда коэффициент K определяет площадь дельта-функции, т. е. площадь под графиком вещественного спектра. Найдем эту площадь:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\omega/\sigma)^2} d(\omega/\sigma) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctg x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi, \end{aligned}$$

т. е. наше предположение оказалось правильным.

ВЫВОД: спектр единичной ступенчатой функции является особым и определяется формулой

$$\Delta_{10}(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \neq \frac{1}{s} \Big|_{s=j\omega}.$$

Примечания:

- Спектр $F(j\omega)$ абсолютно интегрируемых сигналов (имеющих конечную площадь) получают из их изображений по Лапласу $F(s)$ заменой $s = j\omega$.
- У незатухающих неабсолютно интегрируемых сигналов, например вида $\delta_1(t) \div 1/s$, $t\delta_1(t) \div 1/s^2$, $\sin \omega_0 t \delta_1(t) \div \omega_0/(s^2 + \omega_0^2)$, в изображении которых нет полюсов в правой полуплоскости, но хотя бы один из полюсов находится на мнимой оси, спектр является особым и отыскивается по формуле, аналогичной (8.38).
- Расходящиеся, неограниченно нарастающие сигналы, изображение по Лапласу которых имеет хотя бы один полюс в правой полуплоскости, спектра не имеют; к таким, например относятся сигналы вида

$$e^{\beta t} \delta_1(t) \div \frac{1}{s - \beta}; \quad e^{\beta t} \sin \omega_0 t \div \frac{\omega_0}{(s - \beta)^2 + \omega_0^2}.$$

8.6.2. Спектры амплитудно-модулированных сигналов (связь спектра радиоимпульса со спектром видеоимпульса)

Амплитудно-модулированный (AM) сигнал описывается выражением

$$f_{AM}(t) = f(t) \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где f_{AM} — амплитудно-модулированный сигнал, или радиоимпульс; $f(t)$ — видеоимпульс, т. е. огибающая радиоимпульса; ω_0 — несущая (частота AM-сигнала), т. е. частота заполнения видеоимпульса.

Примеры видеоимпульсов приведены на рисунке 8.15а, а соответствующих радиоимпульсов — на рисунке 8.15б.

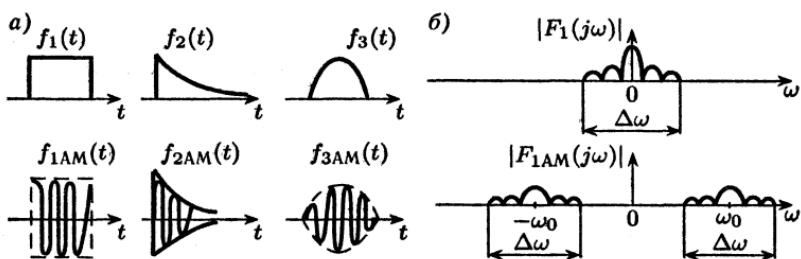


Рис. 8.15

Найдем изображение по Лапласу АМ-сигнала (для простоты считаем $\alpha = 0$):

$$\begin{aligned} f_{AM}(t) &= f(t) \cos \omega_0 t = 0,5 f(t)(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \div \\ &\quad \div F_{AM}(s) = 0,5[F(s - j\omega_0) + F(s + j\omega_0)], \end{aligned} \quad (8.39)$$

где использованы формулы Эйлера и теорема сдвига преобразования Лапласа.

Если видеоимпульс является абсолютно-интегрируемым сигналом, то заменой $s = j\omega$ в (8.39) получим спектр АМ-сигнала:

$$\begin{aligned} f_{AM}(t) \div F_{AM}(j\omega) &= \\ &= 0,5[F(j(\omega - \omega_0)) + F(j(\omega + \omega_0))]. \end{aligned} \quad (8.40)$$

На рисунке 8.15б изображены амплитудный спектр прямоугольного импульса $f_1(t)$, представленного на рисунке 8.15а, и построенный в соответствии с (8.40) амплитудный спектр соответствующего АМ-сигнала $f_{1AM}(t)$, представленного на рисунке 8.15б.

ВЫВОД: если спектр $|F_1(j\omega)|$ видеоимпульса группируется относительно нулевой частоты (т. е. в основном сосредоточен в области НЧ), то спектр $|F_{1AM}(j\omega)|$ радиоимпульса, имея ту же форму, группируется относительно несущей $\pm\omega_0$.

Примечание. Эффект переноса спектра в частотной области широко используется в радиотехнике, когда видеоимпульсы с одинаковой шириной спектра $\Delta\omega$ удается «разделить» в частотной области путем использования различных несущих ω_0 у различных передающих станций; на приемной станции используют полосовой пропускающий фильтр с полосой пропускания $\Delta\omega$, перестраиваемый на желаемую частоту приема ω_0 ; далее выделенный АМ-сигнал выпрямляют (т. е. «отсекают» $f_{AM}(t) < 0$) и, используя ФНЧ (или «фильтр пробку», т. е. полосовой заграждающий фильтр, настроенный на ω_0), выделяют огибающую $f(t)$, т. е. восстанавливают исходный видеоимпульс передающей станции.

ЦЕПИ С ВЗАЙМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ

§ 9.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

До сих пор рассматривались цепи, в которых отсутствовали элементы, связанные общим магнитным потоком. Если в цепи есть такой элемент, то цепь называют цепью с взаимной индукцией, или индуктивно связанной цепью. Простейший индуктивно связанный элемент состоит из двух идеальных катушек индуктивности, так близко расположенных друг к другу, что магнитный поток (или его часть) одной катушки пересекает витки другой.

9.1.1. Явление взаимной индукции.

Взаимная индуктивность и индуктивность рассеяния

В соответствии с законом электромагнитной индукции на зажимах катушки индуктивности возникает напряжение, если ее витки пронизываются переменным во времени магнитным потоком $\Phi(t)$. При этом неважно, каким током вызван этот поток: собственным или током соседней катушки.

Если считать, что усредненный магнитный поток $\Phi(t)$ пересекает все N витков катушки (рис. 9.1a), то напряжение

$$u(t) = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt},$$

где $\Psi(t) = N\Phi(t) = Li(t)$ — потокосцепление самоиндукции; $u(t)$ — напряжение самоиндукции; L — индуктивность.

Если к такой катушке поднести другую так, что часть магнитного потока $\Phi_{21}(t)$ будет пересекать витки второй катушки (рис. 9.1б), то на ее зажимах наведется напряжение $u_{21}(t)$,

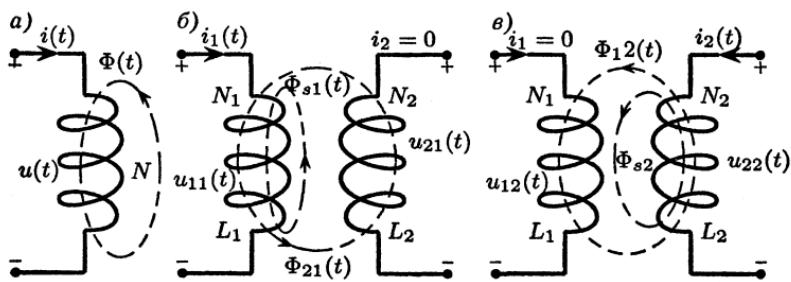


Рис. 9.1

которое называют напряжением взаимной индукции. Потокосцепление взаимной индукции $\Psi_{21}(t) = N_2 \Phi_{21}(t)$, так же как и потокосцепление самоиндукции, пропорционально току $i_1(t)$, т. е. $\Psi_{21}(t) = M_{21} i_1(t)$.

Коэффициент пропорциональности M_{21} , измеряемый в генри, называют взаимной индуктивностью:

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}(t)}{i_1(t)},$$

тогда напряжение взаимной индукции будет

$$u_{21} = \frac{d\Psi_{21}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

Та часть потока первой катушки, которая не пересекает витки второй, называется потоком рассеяния $\Phi_{s1}(t)$ (см. рис. 9.1б), а соответствующее ему потокосцепление $\Psi_{s1}(t)$ — потокосцеплением рассеяния: $\Psi_{s1}(t) = N_1 \Phi_{s1}(t) = L_{s1} i_1(t)$, причем коэффициент пропорциональности L_{s1} называют индуктивностью рассеяния первой катушки:

$$L_{s1} = \frac{\Psi_{s1}(t)}{i_1(t)}.$$

Таким образом, магнитный поток самоиндукции первой катушки оказывается

$$\Phi_{11}(t) = \Phi_{s1}(t) + \Phi_{21}(t),$$

а потокосцепление самоиндукции будет

$$\Psi_{11}(t) = N_1 \Phi_{11}(t) = L_1 i_1(t). \quad (9.1)$$

Из (9.1) индуктивность первой катушки

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{s1}}{i_1} + \frac{N_1 \Phi_{21}}{i_1} = \\ &= \frac{\Psi_{s1}}{i_1} + \frac{N_1}{N_2} \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} = \\ &= L_{s1} + \frac{N_1}{N_2} \frac{\Psi_{21}}{i_1} = L_{s1} + \frac{N_1}{N_2} M_{21}. \quad (9.2) \end{aligned}$$

Если магнитный поток будет создаваться током второй катушки, а ток первой катушки будет равен нулю (рис. 9.1в), то в этом случае магнитному потоку взаимной индукции $\Phi_{12}(t)$ будет соответствовать потокосцепление взаимной индукции $\Psi_{12}(t) = N_1 \Phi_{12}(t) = M_{12} i_2(t)$. Тогда напряжение взаимной индукции будет

$$u_{12}(t) = \frac{d\Psi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt},$$

где M_{12} — коэффициент взаимной индукции.

Потокосцепление рассеяния второй катушки записывается как $\Psi_{s2}(t) = N_2 \Phi_{s2}(t) = L_{s2} i_2(t)$, где L_{s2} — индуктивность рассеяния второй катушки. Таким образом, магнитный поток самоиндукции второй катушки будет $\Phi_{22}(t) = \Phi_{s2}(t) + \Phi_{12}(t)$, а соответствующее ему потокосцепление самоиндукции

$$\Psi_{22}(t) = N_2 \Phi_{22}(t) = L_2 i_2(t). \quad (9.3)$$

Из (9.3) аналогично (9.2) можно получить для индуктивности второй катушки

$$L_2 = L_{s2} + \frac{N_2}{N_1} M_{12}. \quad (9.4)$$

По принципу обратимости пассивных цепей взаимные индуктивности $M_{21} = M_{12} = M$. Тогда, решая совместно (9.2) и (9.4), получим

$$M = \sqrt{(L_1 - L_{s1})(L_2 - L_{s2})}. \quad (9.5)$$

Из (9.5) видно, что максимальное значение взаимной индуктивности будет при отсутствии потоков рассеяния, т. е. когда $\Phi_{s1} = \Phi_{s2} = 0$, а следовательно, и $L_{s1} = L_{s2} = 0$:

$$M_{\max} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Если ток будет протекать по обеим катушкам, то напряжение первой $u_1(t)$ и второй $u_2(t)$ катушек будут складываться из напряжений самоиндукции и взаимной индукции:

$$u_1(t) = u_{11}(t) + u_{12}(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad (9.6)$$

$$u_2(t) = u_{22}(t) + u_{21}(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \quad (9.7)$$

Для установившегося синусоидального режима уравнения (9.6) и (9.7) преобразуются к виду

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = Z_{L1} \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = Z_{L2} \dot{I}_2 + Z_M \dot{I}_1, \end{cases}$$

где комплексное сопротивление взаимной индуктивности

$$Z_M = j\omega M.$$

9.1.2. Коэффициент связи, согласное и встречное включения индуктивно связанных элементов

Для оценки степени связи индуктивно связанных катушек используют понятие коэффициента связи

$$k_{\text{св}} = \frac{M}{M_{\max}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1.$$

В общем случае коэффициент связи меньше единицы. Если $k_{\text{св}} = 1$, то $M = M_{\max}$, и тогда индуктивную связь называют совершенной. Для достижения такой степени связи, как уже отмечалось, необходимо добиться того, чтобы потоки рассеяния равнялись нулю. Для этого, например, можно располагать катушки на ферромагнитном сердечнике, наматывая одну на другую (см. рис. 9.2). При такой намотке поток, создаваемый одной катушкой, практически весь пересекает витки другой. Поток рассеяния близок к нулю, а коэффициент связи будет $k_{\text{св}} = 0,9 \div 0,95$.

Изменяя коэффициент связи, можно изменять взаимную индуктивность $M = k_{\text{св}} \sqrt{L_1 L_2}$, а следовательно, и напряжение взаимной индукции. Для этого можно, например вращать одну

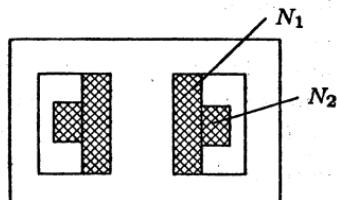


Рис. 9.2

катушку относительно другой, тогда напряжение u_2 будет изменяться от максимального (рис. 9.3а) до практически нулевого (рис. 9.3б).

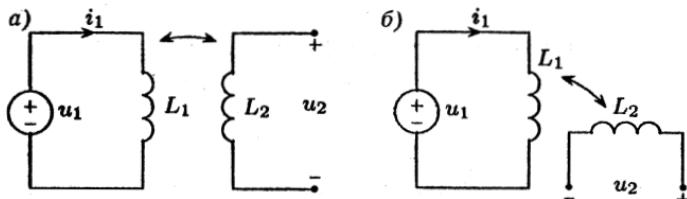


Рис. 9.3

Потоки самоиндукции и взаимной индукции Φ_{11} и Φ_{12} (или же Φ_{22} и Φ_{21}) могут пересекать витки катушки как в одинаковых, так и в противоположных направлениях (в предположении наличия положительных токов: $i_1 > 0$, $i_2 > 0$). Если потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены одинаково, то говорят о согласном включении (рис. 9.4а), в противном случае включение называют встречным (рис. 9.4б). Очевидно, что при согласном включении напряжения самоиндукции и взаимной индукции имеют одинаковую полярность, т. е. складываются, а при встречном — противоположную, т. е. вычитаются. Поэтому удобно считать взаимную индуктивность величиной алгебраической $M = \pm |M|$ и полагать $M = |M| > 0$ — при согласном включении, $M = -|M| < 0$ — при встречном.

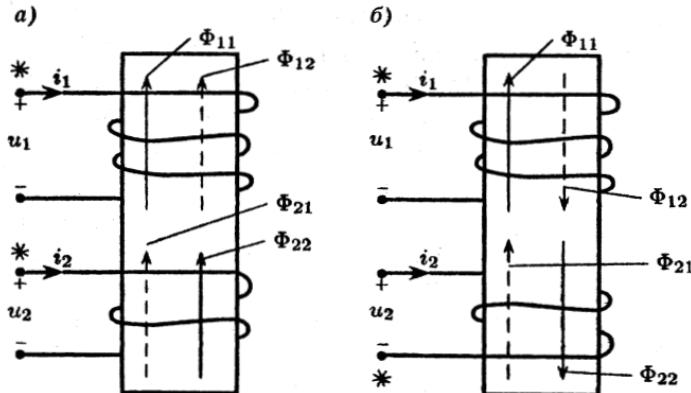


Рис. 9.4

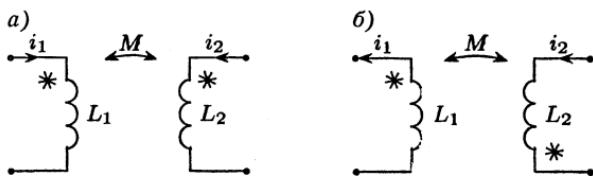


Рис. 9.5

Тогда и для согласного, и для встречного включений выполняется

$$u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_1 i'_1 \pm |M| i'_2,$$

$$u_2 = u_{22} + u_{21} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = L_2 i'_2 \pm |M| i'_1.$$

Для условного обозначения характера включения удобно пользоваться маркировкой так называемых однополярных зажимов «звездочками»: если выбранные направления токов ориентированы одинаково по отношению к однополярным зажимам (рис. 9.5а), то это — согласное включение, в противном случае (рис. 9.5б) — встречное (в этом случае отпадает необходимость задавать направление намотки катушек). На рисунке 9.5а приведено обозначение согласного, а на рисунке 9.5б — встречного включений.

§ 9.2. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ С ВЗАЙМОЙ ИНДУКЦИЕЙ

9.2.1. Последовательное соединение индуктивно связанных катушек

Для расчета цепи рисунка 9.6а, находящейся в установившемся синусоидальном режиме, будем рассматривать оба вида включения — согласное ($M > 0$) и встречное ($M < 0$).

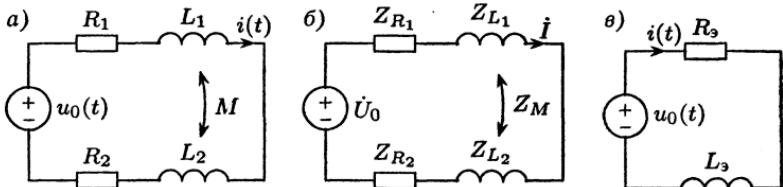


Рис. 9.6

Тогда для комплексной схемы замещения (рис. 9.6б) $Z_M = j\omega M$, причем $Z_M = j\omega|M|$ при согласном включении и $Z_M = -j\omega|M|$ при встречном включении. Для определения тока в цепи при заданных параметрах составим уравнения по второму закону Кирхгофа: $Z_{R_1}\dot{I} + (Z_{L_1}\dot{I} + Z_M\dot{I}) + (Z_{L_2}\dot{I} + Z_M\dot{I}) + Z_{R_2}\dot{I} = \dot{U}_0$.

Отсюда получим

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_0}{(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)}.$$

Входное комплексное сопротивление будет

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = R_3 + j\omega L_3, \quad (9.8)$$

где $R_3 = R_1 + R_2$, $L_3 = L_1 + L_2 + 2|M|$ — при согласном включении и $L_3 = L_1 + L_2 - 2|M|$ — при встречном. На рисунке 9.6в приведена цепь, эквивалентная цепи рисунка 9.6а. Так как $|Z_{\text{вх}}|_{\text{согл}} > |Z_{\text{вх}}|_{\text{встр}}$, то при одинаковом напряжении ток в цепи при встречном включении будет больше, чем при согласном. На этом основании можно опытным путем определить согласно или встречно включены катушки.

При отсутствии индуктивной связи ($M = 0$) из (9.8) получим известное соотношение для последовательного соединения двух катушек $L_3 = L_1 + L_2$.

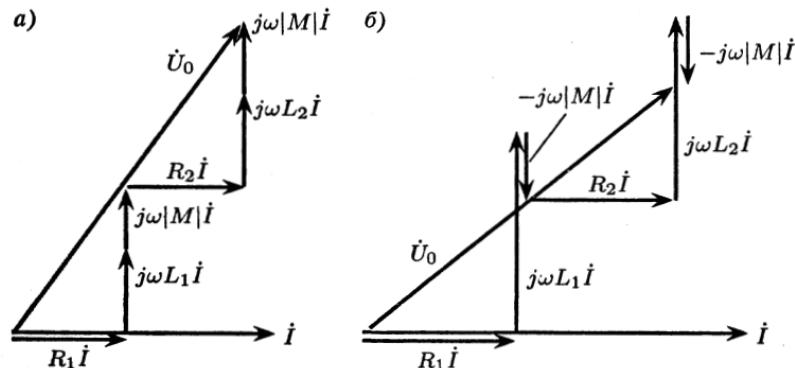


Рис. 9.7

На рисунке 9.7а приведена векторная диаграмма для согласного, а на рисунке 9.7б — для встречного включений.

9.2.2. Параллельное соединение индуктивно связанных катушек

На рисунке 9.8а приведена цепь, состоящая из параллельного соединения сопротивлений и индуктивно связанных катушек, а на рисунке 9.8б — ее комплексная схема замещения для установившегося синусоидального режима. В случае согласного включения имеем $Z_M = j\omega|M|$, а в случае встречного включения $Z_M = -j\omega|M|$.

Для определения трех токов в ветвях цепи составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I} &= 0, \\ Z_{R1}\dot{I}_1 + (Z_{L1}\dot{I}_1 + Z_M\dot{I}_2) &= \dot{U}_0, \\ Z_{R2}\dot{I}_2 + (Z_{L2}\dot{I}_2 + Z_M\dot{I}_1) &= \dot{U}_0, \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

и обозначим

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_{R1} + Z_{L1} = R_1 + j\omega L_1, \\ Z_2 &= Z_{R2} + Z_{L2} = R_2 + j\omega L_2. \end{aligned}$$

Тогда второе и третье уравнения системы (9.9) записываются как

$$\begin{aligned} Z_1\dot{I}_1 + Z_M\dot{I}_2 &= \dot{U}_0; \\ Z_M\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 &= \dot{U}_0, \end{aligned}$$

находим:

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_2 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U}_0; \quad \dot{I}_2 = \frac{Z_1 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U}_0,$$

тогда выполняется

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U}_0. \quad (9.10)$$

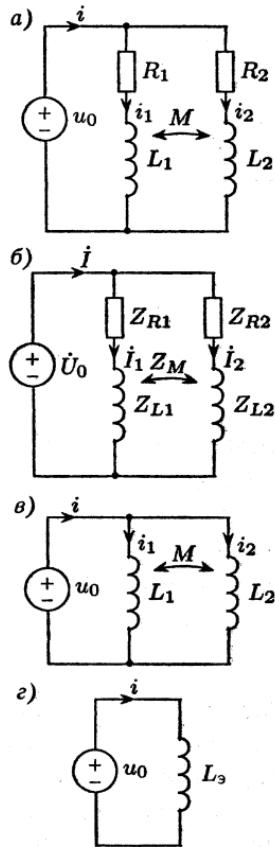


Рис. 9.8

Рассмотрим частный случай (рис. 9.8 σ), когда $R_1 = R_2 = 0$. Из (9.10) при $Z_1 = j\omega L_1$, $Z_2 = j\omega L_2$ и $Z_M = j\omega M$ получим:

$$\dot{I} = \frac{j\omega(L_1 + L_2 - 2M)}{\omega^2 M^2 - \omega^2 L_1 L_2} \dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_0}{\left(j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}\right)} = \frac{\dot{U}_0}{j\omega L_3}.$$

Эквивалентная индуктивность (рис. 9.8 σ) оказывается при согласном включении

$$L_{\text{э согл}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2|M|}, \quad (9.11)$$

а при встречном включении

$$L_{\text{э встр}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2|M|}; \quad (9.12)$$

следовательно, как и при последовательном соединении, $L_{\text{э встр}} < L_{\text{э согл}}$. При отсутствии индуктивной связи ($M = 0$) выражения (9.11) и (9.12) превращаются в хорошо известное соотношение для эквивалентной индуктивности параллельного соединения двух идеальных L -элементов $L_{\text{э}} = L_1 L_2 / (L_1 + L_2)$.

9.2.3. Расчет разветвленных цепей с взаимной индукцией

Расчет разветвленных цепей при наличии индуктивно связанных элементов, как правило, осуществляют по уравнениям Кирхгофа либо методом контурных токов. Применение метода узловых напряжений (потенциалов) в этом случае требует специальных приемов и на практике редко используется. В некоторых задачах можно преобразовать исходную цепь с индуктивной связью в эквивалентную цепь без индуктивной связи, к которой уже легко применить все известные методы расчета.

В качестве примера составим уравнения по законам Кирхгофа для цепи, комплексная схема замещения которой представлена на рисунке 9.9. Как следует из рисунка 9.9, первая и вторая катушки включены согласно (токи входят в однополярные зажимы), а первая и третья — встречно (токи входят в разнополярные зажимы). Следовательно, имеем $Z_{12} = j\omega|M_{12}|$, $Z_{13} = -j\omega|M_{13}|$.

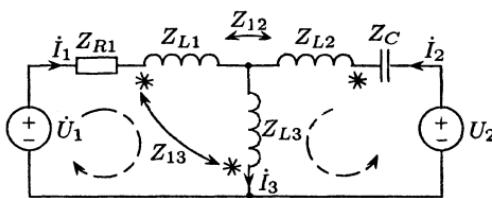


Рис. 9.9

Система уравнений для рассматриваемой цепи для наглядности записана в порядке обхода контуров:

$$\begin{cases} Z_{R1}\dot{I}_1 + (Z_{L1}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + Z_{13}\dot{I}_3) + (Z_{L3}\dot{I}_3 + Z_{13}\dot{I}_1) = \dot{U}_1, \\ Z_C\dot{I}_2 + (Z_{L2}\dot{I}_2 + Z_{12}\dot{I}_1) + (Z_{L3}\dot{I}_3 + Z_{13}\dot{I}_1) = \dot{U}_2, \\ \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0. \end{cases} \quad (9.13)$$

После приведения подобных членов система (9.13) может быть решена и по найденным комплексным значениям токов определены токи установившегося синусоидального режима.

При использовании преобразования Лапласа для расчета переходных процессов в цепях с взаимной индукцией уравнения индуктивно связанных катушек $u_{L1}(t) = L_1 i'_{L1}(t) + M i'_{L2}(t)$, $u_{L2}(t) = L_2 i'_{L2}(t) + M i'_{L1}(t)$ преобразуют к виду

$$\begin{cases} U_{L1}(s) = [sL_1 I_{L1}(s) - L_1 i_{L1}(0-)] + [sM I_{L2}(s) - M i_{L2}(0-)], \\ U_{L2}(s) = [sL_2 I_{L2}(s) - L_2 i_{L2}(0-)] + [sM I_{L1}(s) - M i_{L1}(0-)], \end{cases}$$

при этом $Z_M(s) = sM = \pm s|M|$ называют операторным сопротивлением взаимной индуктивности.

9.2.4. Исключение индуктивной связи

На рисунке 9.10а приведены две индуктивно связанные катушки, имеющие общий узел, к которому они подключены однополлярными зажимами.

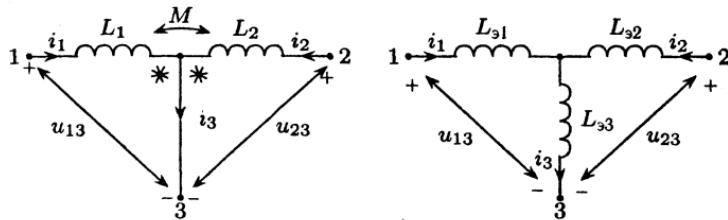


Рис. 9.10

На рисунке 9.10б показана цепь без индуктивной связи. Необходимо определить значения $L_{\exists 1}$, $L_{\exists 2}$ и $L_{\exists 3}$, при которых токи в ветвях и напряжения между узлами будут такими же, как и в исходной цепи. Система уравнений для цепи (рис. 9.10а) записывается как

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0; \\ L_1 i'_1 + M i'_2 = u_{13}; \\ L_2 i'_2 + M i'_1 = u_{23}. \end{cases} \quad (9.14)$$

Исключим из второго уравнения ток $i_2 = i_3 - i_1$, а из третьего $i_1 = i_3 - i_2$. Тогда уравнения (9.14) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0, \\ (L_1 - M)i'_1 + M i'_3 = u_{13}, \\ (L_2 - M)i'_2 + M i'_3 = u_{23}. \end{cases} \quad (9.15)$$

Для цепи (рис. 9.10б) имеем систему уравнений

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0; \\ L_{\exists 1} i'_1 + L_{\exists 3} i'_3 = u_{13}; \\ L_{\exists 2} i'_2 + L_{\exists 3} i'_3 = u_{23}. \end{cases} \quad (9.16)$$

Сравнивая (9.15) и (9.16), приходим к заключению, что цепи (рис. 9.10а, б) будут эквивалентны, если $L_{\exists 1} = L_1 - |M|$, $L_{\exists 2} = L_2 - |M|$, $L_{\exists 3} = |M|$. Взаимная индуктивность записана по модулю, так как полученные выражения для эквивалентных индуктивностей не зависят от характера включения и будут такими при подключении индуктивно связанных катушек к общему узлу однополярными зажимами и при $M > 0$, и при $M < 0$.

Если элементы будут подключены к общему узлу разнополярными зажимами, то аналогичным образом можно доказать, что в этом случае $L_{\exists 1} = L_1 + |M|$, $L_{\exists 2} = L_2 + |M|$, $L_{\exists 3} = -|M|$. Отрицательная индуктивность, включаемая в третью ветвь, является чисто расчетной величиной, не имеющей физического смысла. В установившемся синусоидальном режиме в этом случае $Z_{\exists 3} = -j\omega|M|$.

Если индуктивно связанные катушки не имеют общего узла, то такое исключение индуктивной связи невозможно.

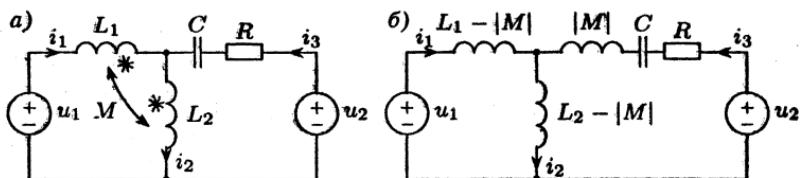


Рис. 9.11

Для примера на рисунке 9.11 a приведена цепь с индуктивной связью, а на рисунке 9.11 b — ей эквивалентная без индуктивной связи.

§ 9.3. ТРАНСФОРМАТОР В ЛИНЕЙНОМ РЕЖИМЕ

9.3.1. Основные соотношения

Трансформатором называют индуктивно связанную цепь, предназначенную обычно для изменения уровней напряжения и тока. Трансформатор представляет собой две индуктивно связанные катушки, называемые обмотками, которые расположены, как правило, на ферромагнитном сердечнике. Будем предполагать, что сердечник работает на линейном участке кривой намагничивания либо трансформатор выполнен без ферромагнитного сердечника («воздушный» трансформатор). По определению идеальный трансформатор должен при любой нагрузке и на любой частоте иметь отношение комплексов напряжений первичной и вторичной обмоток и отношение комплексов токов вторичной и первичной обмоток равными друг другу и равными постоянной величине, которая называется коэффициентом трансформации:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = n. \quad (9.17)$$

Выясним, при каких условиях возможно выполнение (9.17). Если трансформатор работает ча не очень высоких частотах, то можно пренебречь емкостью между обмотками и между витками обмоток. Тогда двухобмоточный трансформатор можно представить схемой (рис. 9.12). Обозначим $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$, $Z_M = -j\omega|M| = -jX_M = -j|Z_M|$.

Уравнения трансформатора имеют вид

$$Z_1 \dot{I}_1 - jX_M \dot{I}_2 = \dot{U}_1; \quad -jX_M \dot{I}_1 + (Z_2 + Z_h) \dot{I}_2 = 0. \quad (9.18)$$

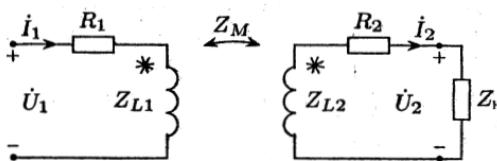


Рис. 9.12

Из системы (9.18) находим токи:

$$\dot{I}_1 = \frac{(Z_2 + Z_h)\dot{U}_1}{Z_1(Z_2 + Z_h) + X_M^2}, \quad \dot{I}_2 = \frac{jX_M\dot{U}_1}{Z_1(Z_2 + Z_h) + X_M^2}.$$

Тогда функции передачи будут

$$\begin{cases} H_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{jX_M}{Z_2 + Z_h} = \frac{j\omega|M|}{R_2 + j\omega L_2 + Z_h}, \\ H_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_h \dot{I}_2}{\dot{U}_1} = \frac{jX_M Z_h}{Z_1(Z_2 + Z_h) + X_M}. \end{cases} \quad (9.19)$$

Как видно из (9.19), полученные функции в общем случае зависят от нагрузки и от частоты и не соответствуют требованиям (9.17).

9.3.2. Совершенный трансформатор без потерь

Будем полагать, что в трансформаторе $R_1 = R_2 = 0$ и потоки рассеяния отсутствуют, т. е. он обладает совершенной магнитной связью, при которой $L_{s1} = L_{s2} = 0$ и коэффициент связи $k_{cb} = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} H_U &= \frac{j\omega|M|Z_h}{j\omega L_1(j\omega L_2 + Z_h) + \omega^2 M^2} = \\ &= \frac{j\omega|M|Z_h}{j\omega L_1 Z_h - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2} = \frac{|M|}{L_1}. \end{aligned}$$

При совершенной связи из (9.2) получим $L_1 = \frac{N_1}{N_2}|M|$. Тогда оказывается, что

$$H_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{|M|}{L_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{n} = \text{const},$$

где N_2 — число витков вторичной, а N_1 — число витков первичной обмоток.

Таким образом, совершенный трансформатор без потерь удовлетворяет требованиям (9.17), предъявляемым к функции передачи по напряжению.

Функция передачи по току в этом случае зависит от частоты и сопротивления нагрузки:

$$H_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{j\omega|M|}{j\omega L_2 + Z_H} = \frac{1}{\frac{L_2}{|M|} + \frac{Z_H}{j\omega|M|}},$$

и лишь при $|Z_H| \ll \omega|M|$ она удовлетворяет предъявляемым в (9.17) требованиям. Поэтому такой трансформатор иногда называют трансформатором напряжения.

При $|Z_H| \ll \omega|M|$, учитывая из (9.4), что $L_2 = \frac{N_2}{N_1}|M|$, находим

$$H_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{|M|}{L_2} = \frac{N_1}{N_2} = n = \text{const.}$$

Для приближения к полученным результатам на практике необходимо выполнять обмотки проводом с малым удельным сопротивлением (медь) и располагать обмотки одну на другой (см. рис. 9.2а) для того чтобы уменьшить поток рассеяния и тем самым приблизить коэффициент связи к единице.

9.3.3. Идеальный трансформатор

Будем полагать, что в совершенном трансформаторе без потерь взаимная индуктивность $M \rightarrow \infty$. Но тогда верно и $L_1 = \frac{N_1}{N_2}|M| \rightarrow \infty$, и $L_2 = \frac{N_2}{N_1}|M| \rightarrow \infty$. В этом случае будет

$$H_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{n},$$

$$H_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} = n,$$

или, иначе,

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} = n.$$

Для достижения полученных результатов на практике необходимо, чтобы индуктивности обмоток были как можно больше. Так как индуктивность пропорциональна магнитной проницаемости

и квадрату числа витков N , то необходимо сердечник изготавливать из ферромагнитного материала с высоким значением магнитной проницаемости, а обмотки — с числом витков, в идеале стремящимся к бесконечности, оставляя их отношение $N_1/N_2 = n$.

Особый интерес представляет входное сопротивление идеального трансформатора:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n^2 \dot{U}_2}{\dot{I}_2} = n^2 Z_{\text{h}},$$

т. е. в данном случае происходит трансформация (преобразование значения сопротивления). Это свойство часто используется на практике для целей согласования сопротивления нагрузки с эквивалентным сопротивлением источника питания, так как источник воспринимает сопротивление нагрузки увеличенным в n^2 раз, где $n = N_1/N_2$.

Глава 10

ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

Выделение трехфазных цепей в самостоятельный класс объясняется их широким распространением на практике. В настоящее время практически все электроснабжение промышленных и бытовых объектов осуществляется с помощью трехфазных цепей. Это обусловлено рядом достоинств трехфазной системы напряжений, к которым относятся: 1) возможность передавать энергию от трехфазного генератора к трехфазной нагрузке по трем проводам вместо шести при питании потребителей от отдельных источников; 2) трехфазное напряжение позволяет получать врачающееся магнитное поле, которое лежит в основе действия асинхронных трехфазных двигателей, самых простых и надежных в работе; 3) при симметричной нагрузке мгновенная мощность трехфазного источника не зависит от времени и не пульсирует с двойной частотой, как это имеет место при однофазном питании.

§ 10.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ

10.1.1. Трехфазная система напряжений, трехфазный генератор

Симметричная трехфазная система напряжений (трехфазное напряжение) представляет собой систему из трех синусоидальных напряжений одинаковой частоты и одинаковой амплитуды, сдвинутых по фазе на 120° . Если условие равенства амплитуд (или условие сдвига по фазе на 120°) не выполняется, то такая система называется несимметричной.

В этой главе будем рассматривать только симметричные трехфазные источники, генерирующие симметричную систему напряжений, график мгновенных значений которых приведен на рисунке 10.1а. Если одно из этих напряжений, например с начальной фазой, равной нулю, обозначить $u_A(t)$, то отстающее от него на 120° напряжение обозначается $u_B(t)$, а отстающее от $u_B(t)$ на 120° — обозначается $u_C(t)$. Такой порядок следования напряжений ($A - B - C$) называют прямым.

Мгновенные значения этих напряжений можно записать, например, следующим образом:

$$\begin{aligned} u_A(t) &= U_m \cos \omega t, \\ u_B(t) &= U_m \cos(\omega t - 120^\circ), \\ u_C(t) &= U_m \cos(\omega t - 240^\circ). \end{aligned} \quad (10.1)$$

Соответствующие (10.1) комплексы напряжений $\dot{U}_A = U$, $\dot{U}_B = U e^{-j120^\circ}$, $\dot{U}_C = \dot{U}_m / \sqrt{2} = U e^{-j240^\circ}$, $U = U_m / \sqrt{2}$.

На рисунке 10.1б приведена векторная диаграмма (ВД) этих напряжений.

Основное свойство симметричной трехфазной системы напряжений заключается в том, что сумма этих напряжений в любой момент времени равна нулю, т. е. $u_A(t) + u_B(t) + u_C(t) = 0$. В этом легко убедится, сложив напряжения или соответствующие векторы (рис. 10.1б): $\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$.

Трехфазное напряжение получают с помощью специального трехфазного генератора, на статоре которого располагаются три обмотки, сдвинутые друг относительно друга на 120° , витки которых пересекаются постоянным магнитным полем ротора, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Схематически трехфазный генератор можно представить в виде

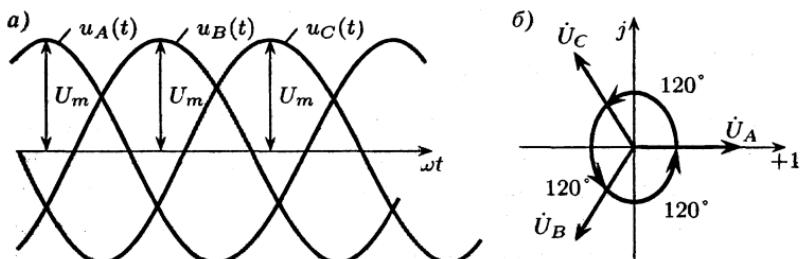


Рис. 10.1

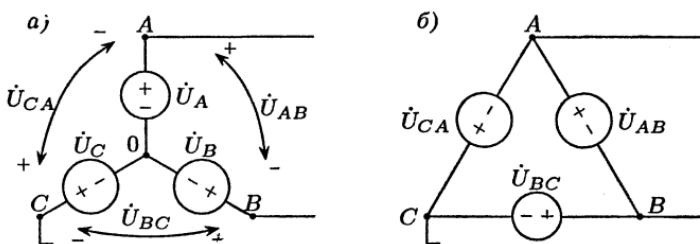


Рис. 10.2

трех источников синусоидального напряжения, которые можно соединить звездой (рис. 10.2а) или треугольником (рис. 10.2б), причем точка 0 при соединении генератора «звездой» называется нейтральной точкой.

Следует отметить, что ток внутри треугольника (см. рис. 10.2б) отсутствует, так как сумма напряжений $u_{AB}(t) + u_{BC}(t) + u_{CA}(t) = 0$.

10.1.2. Соотношение между фазными и линейными напряжениями симметричного трехфазного генератора

Напряжения на обмотках трехфазного генератора называют фазными напряжениями, а напряжения между линейными проводами, которыми генератор соединяется с нагрузкой, называют линейными напряжениями. Так, при соединении генератора звездой напряжения \dot{U}_A , \dot{U}_B , \dot{U}_C — фазные напряжения, а напряжения \dot{U}_{AB} , \dot{U}_{BC} , \dot{U}_{CA} — линейные. При этом $\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B$, $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C$, $\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A$.

Если обмотки генератора соединены треугольником, то линейные и фазные напряжения равны друг другу ($U_l = U_\phi$), что видно из схемы на рисунке 10.2б.

На рисунке 10.3 приведена ВД линейных и фазных напряжений трехфазного генератора при соединении его обмоток звездой (рис. 10.3а) и треугольником (рис. 10.3б).

Эти диаграммы построены в соответствии с геометрией (топографией) цепи без указания осей комплексной плоскости. Из диаграммы рисунка 10.3а следует: $U_A = U_B = U_C = U_\phi$, $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_l$, а из диаграммы рисунка 10.3б будет: $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_l = U_\phi$; при этом, если $\dot{U}_{AB} = U_l$, то $\dot{U}_{BC} = U_l e^{-j120^\circ}$ и $\dot{U}_{CA} = U_l e^{j120^\circ}$.

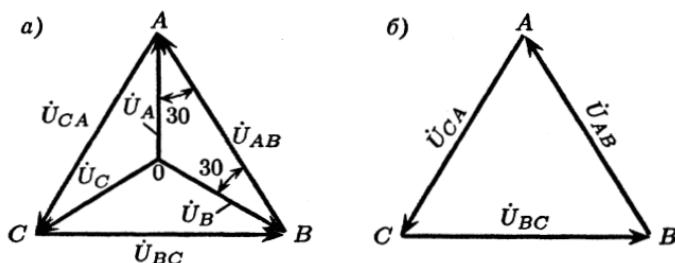


Рис. 10.3

Соотношение между линейным и фазным напряжениями генератора, соединенного звездой, легко установить из элементарных тригонометрических рассуждений, рассматривая равнобедренный треугольник AOB на рисунке 10.3а.

Учитывая, что два угла в этом треугольнике равны 30° , получим

$$U_l = 2U_\phi \cos 30^\circ = \sqrt{3}U_\phi. \quad (10.2)$$

В соответствии с (10.2) при $U_\phi = 127$ В имеем $U_l = \sqrt{3} \cdot 127 = 220$ В, а при $U_\phi = 220$ В получим $U_l = 380$ В.

Теперь легко установить связь между комплексами фазных и линейных напряжений. Из диаграммы на рисунке 10.3а и с учетом (10.2) получим

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= \dot{U}_A \sqrt{3} e^{j30^\circ}, \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_B \sqrt{3} e^{j30^\circ}, \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_C \sqrt{3} e^{j30^\circ}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Таким образом, симметричный трехфазный генератор, соединенный звездой, при расчетах, легко может быть преобразован в эквивалентный генератор, соединенный треугольником, и наоборот в соответствии с (10.2) и (10.3).

10.1.3. Трехфазная цепь и основные схемы соединения

Трехфазный источник вместе с нагрузкой и соединительными проводами образует трехфазную цепь. Нагрузку так же, как и генератор, можно соединить звездой или треугольником. Для расчетных целей удобно считать, что если нагрузка соединена звездой, то и генератор соединен звездой, если нагрузка соединена треугольником, то и генератор соединен

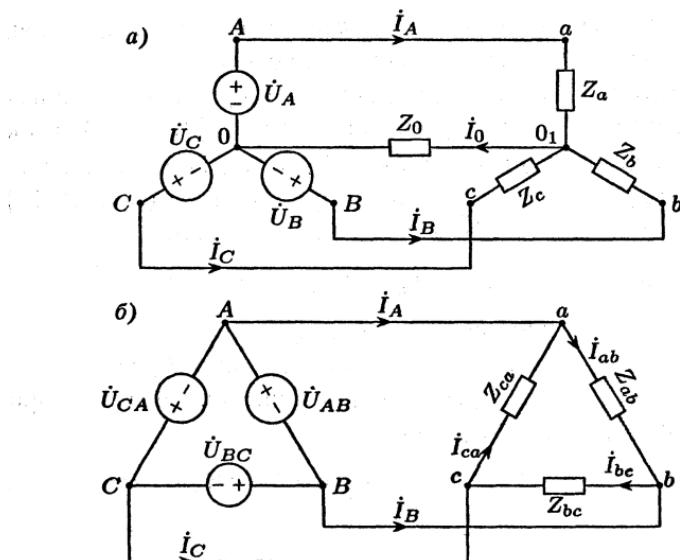


Рис. 10.4

треугольником. Если в исходной цепи генератор соединен треугольником, а нагрузка звездой, то перед расчетом можно преобразовать его в эквивалентный генератор, соединенный звездой, в соответствии с (10.2) и (10.3). Аналогично можно поступить и в случае, если нагрузка соединена треугольником, а генератор звездой. Таким образом, все возможные случаи свести к двум (рис. 10.4).

Токи, текущие в линейных проводах, называют линейными, а токи, текущие по сопротивлениям нагрузки, называют фазовыми. Провод, соединяющий узловые точки генератора и нагрузки при соединении их звездой, называют нейтральным или нулевым проводом. Если сопротивление нулевого провода Z_0 равняется нулю, то точки 0 и 0_1 становятся однопотенциальными и такое соединение называют «звезда — звезда с нулевым проводом» и обозначают λ/λ_0 . Если Z_0 равняется бесконечности, то такое соединение называют «звезда-звезда без нулевого провода» и обозначают λ/λ .

Три составных части трехфазной цепи принято называть фазами. Таким образом, в трехфазной цепи передача энергии от источника в нагрузку осуществляется с помощью трех или четырех проводов, что с экономической точки зрения более выгодно по

сравнению с передачей от трех несвязанных источников, так как в этом случае потребовалось бы шесть проводов.

Как следует из схемы на рисунке 10.4 a , при соединении нагрузки звездой линейные и фазные токи равны ($I_L = I_\Phi$), а ток нулевого провода будет $\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$. При соединении нагрузки треугольником линейные и фазные токи (рис. 10.4 b) связаны в соответствии с ЗКТ следующим образом:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}, \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}, \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}.$$

Очевидно, что выполняется $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$.

Трехфазная нагрузка называется симметричной, если $Z_a = Z_b = Z_c = Z_\Phi = |Z_\Phi|e^{j\varphi_\Phi}$ при соединении звездой, а при соединении треугольником, если

$$Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z_\Phi = |Z_\Phi|e^{j\varphi_\Phi}.$$

§ 10.2. РАСЧЕТ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ

10.2.1. Расчет трехфазной цепи при соединении нагрузки звездой

Анализу подлежит цепь (рис. 10.4 a) при заданных фазном напряжении симметричного генератора U_Φ и комплексных сопротивлениях Z_a , Z_b , Z_c , и Z_0 . Определению подлежат токи в нагрузке и нулевом проводе.

Трехфазная цепь на рисунке 10.4 a является цепью с двумя узлами и поэтому ее расчет целесообразно осуществить методом узловых потенциалов (напряжений). Считаем узел 0 базисным (опорным) узлом, потенциал которого равен нулю. Найдем потенциал \dot{U}_{0_1} узла 0_1 из уравнения $Y_{11}\dot{U}_{0_1} = \dot{I}_1^y$, где собственная проводимость узла $Y_{11} = Y_a + Y_b + Y_c + Y_0 = 1/Z_a + 1/Z_b + 1/Z_c + 1/Z_0$, а \dot{I}_1^y — сумма источников тока, подключенных к узлу 0_1 . Преобразовав источники напряжения \dot{U}_A , \dot{U}_B , и \dot{U}_C в источники тока, получим $\dot{I}_1^y = Y_a\dot{U}_A + Y_b\dot{U}_B + Y_c\dot{U}_C$. Тогда имеем

$$\dot{U}_{0_1} = \frac{Y_a\dot{U}_A + Y_b\dot{U}_B + Y_c\dot{U}_C}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_0}, \quad (10.4)$$

где $\dot{U}_A = U_\Phi$, $\dot{U}_B = U_\Phi e^{-j120^\circ}$, $\dot{U}_C = U_\Phi e^{j120^\circ}$.

Определив потенциал узла 0_1 , можно теперь найти токи, учитывая, что точки A , B и C генератора однопотенциальны с соответствующими точками a , b и c нагрузки:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{\dot{U}_{a0_1}}{Z_a} = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{0_1}}{Z_a}, & \dot{I}_B &= \frac{\dot{U}_{b0_1}}{Z_b} = \frac{\dot{U}_B - \dot{U}_{0_1}}{Z_b}, \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}_{c0_1}}{Z_c} = \frac{\dot{U}_C - \dot{U}_{0_1}}{Z_c}, & \dot{I}_0 &= \frac{\dot{U}_{0_10}}{Z_0} = \frac{\dot{U}_{0_1}}{Z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Рассмотрим возможные режимы работы.

1. *Режим симметричной нагрузки.* В этом случае имеет место $Z_a = Z_b = Z_c = Z_\phi = |Z_\phi|e^{j\varphi_\phi}$, т. е. $Y_a = Y_b = Y_c = Y_\phi = |Y_\phi|e^{j\psi_\phi}$. Тогда в соответствии с (10.4) запишем

$$\dot{U}_{0_1} = \frac{Y_\phi(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)}{3Y_\phi + Y_0} = 0,$$

так как $\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$ (основное свойство трехфазного симметричного напряжения). Следовательно, узлы 0 и 0_1 становятся однопотенциальными и ток нулевого провода будет $\dot{I}_0 = \dot{U}_{0_1}/Z_0 = 0$. В этом случае отпадает необходимость в нулевом проводе и генератор с нагрузкой может быть соединен тремя линейными проводами. Многие трехфазные потребители по своей природе являются симметричными, например, трехфазные двигатели.

Таким образом, в этом случае токи симметричной трехфазной цепи в соответствии с (10.5) оказываются

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{\dot{U}_A}{Z_a} = \frac{U_\phi}{|Z_\phi|e^{j\varphi_\phi}} = I_\phi e^{-j\varphi_\phi}, \\ \dot{I}_B &= \frac{\dot{U}_B}{Z_b} = \frac{U_\phi e^{-j120^\circ}}{|Z_\phi|e^{j\varphi_\phi}} = I_\phi e^{-j(\varphi_\phi+120^\circ)}, \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}_C}{Z_c} = \frac{U_\phi e^{j120^\circ}}{|Z_\phi|e^{j\varphi_\phi}} = I_\phi e^{-j(\varphi_\phi-120^\circ)}, \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

причем отсюда следует, что при симметричной нагрузке $I_A = I_B = I_C = I_n = I_\phi = U_\phi/|Z_\phi|$. Расчет в этом случае можно выполнить для одной фазы, токи в других фазах будут иметь такую же амплитуду, а начальные фазы будут отличаться сдвигом на 120° .

На рисунке 10.5а приведена векторная диаграмма для рассмотренного режима. «Звезда» токов нагрузки получается симметричной, повернутой относительно «звезды» фазных напряжений на угол фазного сдвига φ_ϕ .

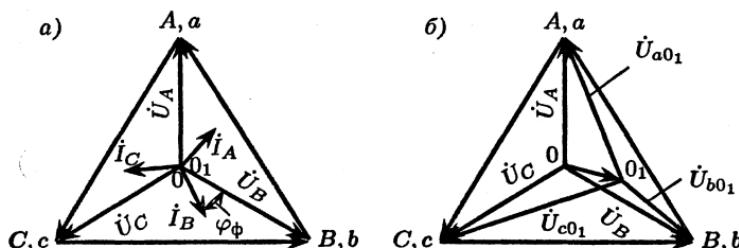


Рис. 10.5

2. Режим несимметричной нагрузки при отсутствии нулевого провода. В этом случае $Z_a \neq Z_b \neq Z_c$, а $Y_0 = 0$. Тогда потенциал узла O_1 в соответствии с (10.4) оказывается

$$\dot{U}_{01} = \frac{Y_a \dot{U}_A + Y_b \dot{U}_B + Y_c \dot{U}_C}{Y_a + Y_b + Y_c} \neq 0,$$

т. е. потенциал узла O_1 отличается от потенциала узла O и на векторной диаграмме эти точки не совпадают. Это значит, что напряжения на фазах нагрузки будут различными, не равными напряжениям фаз генератора. Токи в фазах определяются по выражениям (10.5), а так как нулевой провод отсутствует, то $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$.

На рисунке 10.5б приведен вариант ВД напряжений этого режима. Такой режим работы называют зависимым, так как при изменении сопротивления одной из фаз изменяется потенциал узла O_1 и, следовательно, изменяются напряжения на всех фазах нагрузки.

3. Режим несимметричной нагрузки при наличии нулевого провода с нулевым сопротивлением. Так как в этом случае $Z_0 = 0$, то потенциалы узлов O и O_1 становятся равными при любой нагрузке, т. е. каждой фазе нагрузки параллельно подключен источник. Для наглядности схему, соответствующую рисунку 10.4а, можно изобразить так, как показано на рисунке 10.6а. Режим работы фаз становится независимым, т. е. при любой нагрузке

$$\dot{U}_{a01} = \dot{U}_A, \quad \dot{U}_{b01} = \dot{U}_B, \quad \dot{U}_{c01} = \dot{U}_C.$$

Токи в фазах будут $\dot{I}_A = Y_a \dot{U}_A$, $\dot{I}_B = Y_b \dot{U}_B$, $\dot{I}_C = Y_c \dot{U}_C$, а ток нулевого провода $\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$.

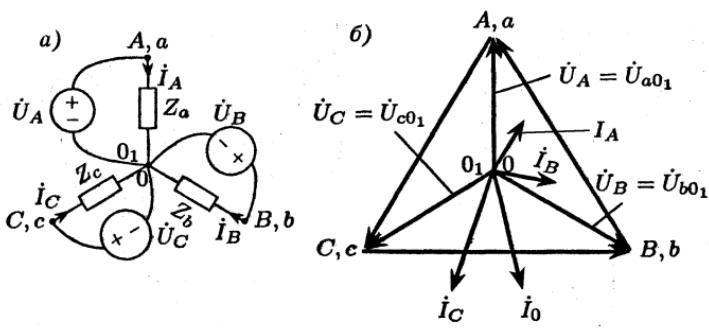


Рис. 10.6

Нулевой провод с $Z_0 = 0$ обеспечивает независимый режим работы фаз нагрузки. Напряжение на фазах нагрузки не зависит от режима работы фаз, так как узлы 0 и O_1 соединены друг с другом нулевым проводом. По такой четырехпроводной схеме питается вся бытовая нагрузка. К потребителю подводится одна из фаз генератора и нулевой провод.

На рисунке 10.6б приведен пример ВД такого режима. «Звезда» токов в этом случае будет несимметричной, и поэтому в нулевом проводе ток $I_0 \neq 0$.

10.2.2. Расчет трехфазной цепи при соединении нагрузки треугольником

Анализу подлежит цепь (рис. 10.4б) при заданных линейном напряжении генератора U_l и комплексах сопротивлений Z_{ab} , Z_{bc} , Z_{ca} . Определению подлежат токи в фазах нагрузки и линейных проводах.

Направим на ВД одно из напряжений генератора, например \dot{U}_{AB} по вещественной оси комплексной плоскости, т. е. будем считать, что $\dot{U}_{AB} = U_l$ (рис. 10.7а). Тогда имеем $\dot{U}_{BC} = U_le^{-j120^\circ}$, $\dot{U}_{CA} = U_le^{j120^\circ}$.

Как видно из схемы на рисунке 10.4б, здесь осуществляется независимый режим работы фаз, потому что, как показано на рисунке 10.7б к каждой фазе нагрузки параллельно подключен «свой» источник. Так как в этом случае $\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{bc} = \dot{U}_{BC}$, $\dot{U}_{ca} = \dot{U}_{CA}$, то токи в фазах нагрузки будут: $i_{ab} = \dot{U}_{AB}/Z_{ab}$, $i_{bc} = \dot{U}_{BC}/Z_{bc}$, $i_{ca} = \dot{U}_{CA}/Z_{ca}$. Линейные токи в схеме на рисунке 10.4б определяются

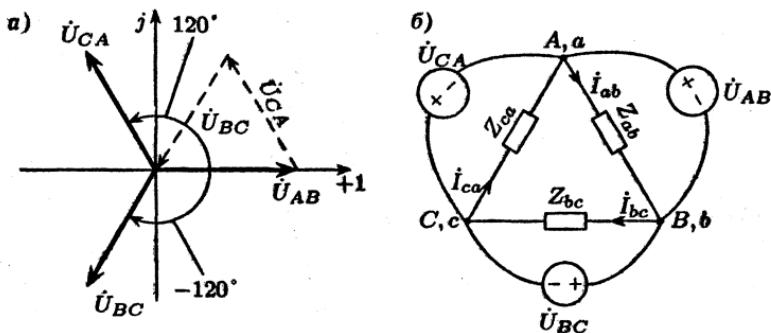


Рис. 10.7

через фазные в соответствии с первым законом Кирхгофа:
 $I_A = I_{ab} - I_{ca}$, $I_B = I_{bc} - I_{ab}$, $I_C = I_{ca} - I_{bc}$.

На рисунке 10.8а приведен пример ВД для несимметричного режима, т. е. когда $Z_{ab} \neq Z_{bc} \neq Z_{ca}$. В этом случае $I_{ab} \neq I_{bc} \neq I_{ca}$, $I_A \neq I_B \neq I_C$.

Рассмотрим симметричный режим при соединении нагрузки треугольником. Такой режим будет в цепи при $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z_\phi = |Z_\phi|e^{j\varphi_\phi}$. Токи в фазах нагрузки записываются как

$$\left. \begin{aligned} I_{ab} &= \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{ab}} = \frac{U_\phi}{|Z_\phi|e^{j\varphi_\phi}} = I_\phi e^{-j\varphi_\phi}, \\ I_{bc} &= \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{bc}} = \frac{U_\phi e^{-j120^\circ}}{|Z_\phi|e^{j\varphi_\phi}} = I_\phi e^{-j(\varphi_\phi + 120^\circ)}, \\ I_{ca} &= \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{ca}} = \frac{U_\phi e^{j120^\circ}}{|Z_\phi|e^{j\varphi_\phi}} = I_\phi e^{-j(\varphi_\phi - 120^\circ)}. \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

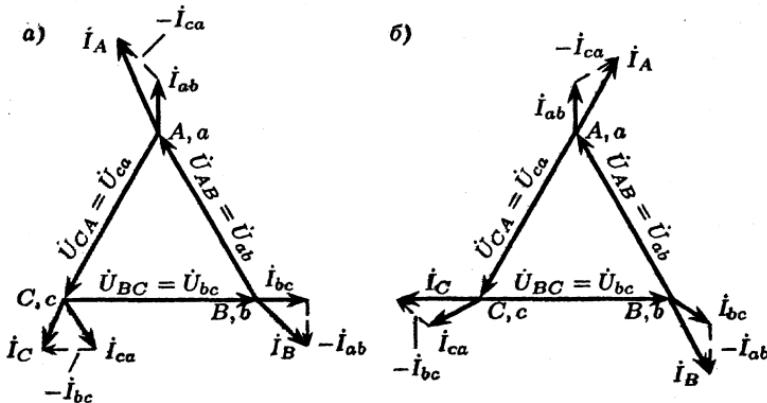


Рис. 10.8

Из (10.7) следует, что в этом случае $I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_\phi$. Расчет можно выполнить для одной фазы, токи в других фазах будут иметь такую же амплитуду, а начальные фазы будут отличаться сдвигом на 120° в соответствии с (10.7). На рисунке 10.8б приведена ВД симметричного режима. Для определенности взято $\varphi_\phi > 0$. Установим связь между действующими значениями линейных и фазных токов $\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = I_\phi e^{-j\varphi_\phi}(1 - e^{j120^\circ}) = I_\phi \sqrt{3} e^{-j(\varphi_\phi + 30^\circ)}$, т. е. $I_A = \sqrt{3} I_\phi$. Из условий симметрии (рис. 10.8б) следует, что в этом режиме $I_A = I_B = I_C = I_l = \sqrt{3} I_\phi$.

§ 10.3. МОЩНОСТЬ ТРЕХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Сумму активных мощностей всех фаз называют активной мощностью трехфазной цепи. Так, при соединении звездой имеем

$$\begin{aligned} P &= P_A + P_B + P_C = \\ &= U_{a0_1} I_A \cos \varphi_a + U_{b0_1} I_B \cos \varphi_b + U_{c0_1} I_C \cos \varphi_c. \end{aligned}$$

Аналогично сумму реактивных мощностей всех фаз называют реактивной мощностью трехфазной цепи:

$$\begin{aligned} P_Q &= P_{QA} + P_{QB} + P_{QC} = \\ &= U_{a0_1} I_A \sin \varphi_a + U_{b0_1} I_B \sin \varphi_b + U_{c0_1} I_C \sin \varphi_c. \end{aligned}$$

Полная мощность трехфазной цепи записывается как

$$P_S = \sqrt{P^2 + P_Q^2}.$$

В комплексной форме мощность трехфазной цепи

$$\tilde{P}_S = \dot{U}_A \dot{I}_A + \dot{U}_B \dot{I}_B + \dot{U}_C \dot{I}_C = P + j P_Q.$$

Если нагрузка симметрична, то имеем

$$\begin{aligned} P &= 3 U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi, \\ P_Q &= 3 U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi, \\ P_S &= 3 U_\phi I_\phi. \end{aligned}$$

При соединении симметричной нагрузки звездой $U_\phi = U_l / \sqrt{3}$ и $I_\phi = I_l$. При соединении симметричной нагрузки треугольником выполняется $I_\phi = I_l / \sqrt{3}$ и $U_\phi = U_l$. Тогда независимо от способа соединения нагрузки для симметричной трехфазной

системы получим следующие выражения для мощностей через линейные напряжения и токи:

$$P = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}} \cos \varphi_{\Phi},$$

$$P_Q = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}} \sin \varphi_{\Phi},$$

$$P_S = \sqrt{3}U_{\text{л}}I_{\text{л}}.$$

Определим мгновенную мощность трехфазной цепи при симметричном режиме работы:

$$\begin{aligned} p(t) &= u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C = \\ &= U_{m\Phi} \cos \omega t I_{m\Phi} \cos(\omega t - \varphi) + \\ &+ U_{m\Phi} \cos(\omega t - 120^\circ) I_{m\Phi} \cos(\omega t - 120^\circ - \varphi) + \\ &+ U_{m\Phi} \cos(\omega t + 120^\circ) I_{m\Phi} \cos(\omega t + 120^\circ - \varphi) = \\ &= 3U_{\Phi} I_{\Phi} \cos \varphi_{\Phi} = P = \text{const.} \end{aligned}$$

Таким образом, мгновенная мощность трехфазной цепи при симметричной нагрузке не зависит от времени (т. е. постоянна) и равна активной мощности всей системы. Это свойство создает благоприятные условия для работы трехфазного генератора, так как вал генератора работает с постоянным моментом нагрузки.

ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ И АКТИВНЫЕ ЦЕПИ

§ 11.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

11.1.1. Общие сведения и классификация четырехполюсников

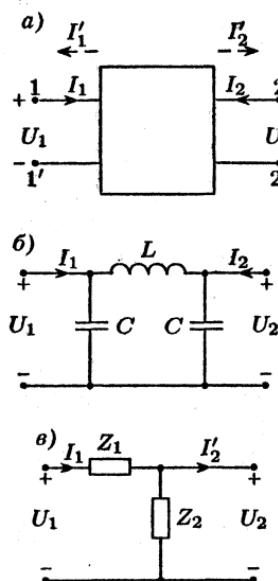


Рис. 11.1

зывает входом, а выводы 2, 2' — выходом. Четыре величины: $U_1(s) = U_1$, $I_1(s) = I_1$, $U_2(s) = U_2$, $I_2(s) = I_2$ — это напряжения и токи входа и выхода. Если рассматривается установившийся синусоидальный режим, то вместо изображений напряжений и токов следует взять комплексные величины напряжений и токов. Иногда целесообразно применять другое направление токов: $I'_1 = -I_1$ и $I'_2 = -I_2$. Из четырех величин две принимаются

Рассмотренные в предыдущих главах электрические цепи состояли из двухполюсников, поведение которых полностью определялось двумя величинами — током и напряжением. Четырехполюсником (ЧП) называется цепь, имеющая две пары внешних выводов (четыре полюса), с помощью которых он может присоединяться к другим цепям или к источникам. В теории четырехполюсников интересуются лишь токами и напряжениями на внешних выводах и не рассматривают токи и напряжения внутри ЧП. Математическое описание ЧП (математическая модель) связывает между собой четыре величины, характеризующие его поведение относительно внешних выводов.

На рисунке 11.1а изображен четырехполюсник, выводы которого 1, 1' на-

заданными, а две другие выражаются через заданные. Таким образом, один и тот же ЧП можно описать шестью способами (число сочетаний из четырех по два).

Четырехполюсники можно классифицировать по целому ряду признаков. Приведем лишь основные из них. Как и другие цепи, четырехполюсники делятся на линейные и нелинейные, пассивные и активные, обратимые и необратимые. Обратимым называется ЧП, для которого справедлива теорема обратимости (взаимности). Линейные пассивные четырехполюсники всегда обратимы. Различают также симметричные и несимметричные ЧП. Симметричными называют такие четырехполюсники, у которых перемена мест внешних выводов не приводит к изменению режима работы остальной цепи. На рисунке 11.1б изображен симметричный, а на рисунке 11.1в несимметричный ЧП.

11.1.2. Уравнения четырехполюсников через y -параметры

Пусть известны напряжения на входе U_1 и на выходе U_2 четырехполюсника. Необходимо выразить неизвестные токи I_1 и I_2 через эти напряжения. По методу наложения имеем

$$I_1 = I_{11}|_{U_2=0} + I_{12}|_{U_1=0} = y_{11}U_1 + y_{12}U_2,$$

где y_{11} — входная проводимость ЧП при закороченном выходе, а y_{12} — передаточная проводимость при закороченном входе. Аналогично можно получить выражение и для тока I_2 .

Тогда уравнения ЧП через y -параметры записываются как

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= y_{11}U_1 + y_{12}U_2, \\ I_2 &= y_{21}U_1 + y_{22}U_2. \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

Рассмотрим подробнее коэффициенты системы (11.1):

$y_{11} = \frac{I_1}{U_1}|_{U_2=0}$ — входная проводимость со стороны выводов 1, 1' при закороченном входе;

$y_{12} = \frac{I_2}{U_2}|_{U_1=0}$ — передаточная проводимость от выхода к входу при закороченном входе;

$y_{21} = \frac{I_2}{U_1}|_{U_2=0}$ — передаточная проводимость от входа к выходу при закороченном выходе;

$y_{22} = \frac{I_1}{U_2}|_{U_1=0}$ — входная проводимость со стороны выводов 2, 2' при закороченном входе.

Все y -параметры определяются в режиме короткого замыкания либо входа, либо выхода, поэтому их иногда называют параметрами короткого замыкания. Если структура ЧП неизвестна, то эти параметры можно определить опытным путем, проделав опыты короткого замыкания входа и выхода и измеряя соответствующие токи и напряжения.

Очевидны следующие свойства y -параметров. У обратимых ЧП $y_{12} = y_{21}$, а у симметричных $y_{11} = y_{22}$ и $y_{12} = y_{21}$. Напомним, что линейные пассивные четырехполюсники всегда обратимы. Таким образом, у линейных пассивных ЧП независимыми являются три параметра, а у симметричных — два.

Систему (11.1) удобно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [y] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

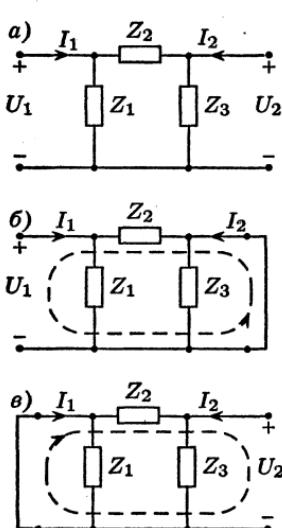


Рис. 11.2

В качестве примера рассмотрим определение y -параметров П-образного ЧП, схема которого изображена на рисунке 11.2а.

Из опыта короткого замыкания выхода ($U_2 = 0$), по схеме рисунка 11.2б находим входную проводимость $y_{11} = 1/Z_1 + 1/Z_2 = (Z_1 + Z_2)/(Z_1 Z_2)$. По второму закону Кирхгофа составим уравнение для внешнего контура: $Z_2 I_2 + U_1 = 0$. Отсюда $y_{21} = I_2/U_1 = -1/Z_2$.

Аналогично по схеме цепи рисунка 11.2в находим $y_{22} = 1/Z_2 + 1/Z_3 = (Z_2 + Z_3)/(Z_1 Z_2)$, $y_{12} = I_1/U_2 = -1/Z_2$. Следовательно, матрица y -параметров П-образного ЧП будет

$$[y] = \begin{bmatrix} \frac{Z_1+Z_2}{Z_1 Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \\ -\frac{1}{Z_2} & \frac{Z_2+Z_3}{Z_1 Z_2} \end{bmatrix}.$$

При $Z_1 = Z_3$ четырехполюсник будет симметричным и тогда выполняется $y_{11} = y_{22}$. Параметр y_{12} можно было не определять, так как $y_{12} = y_{21}$.

11.1.3. Уравнения четырехполюсника через z -параметры

Если необходимо выразить напряжения на входе и выходе через заданные токи I_1 и I_2 , можно поступить аналогично тому, как это было сделано при выводе уравнений через y -параметры. Но проще разрешить систему уравнений (11.1) относительно U_1 и U_2 . Тогда

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{\begin{vmatrix} I_1 & y_{12} \\ I_2 & y_{22} \end{vmatrix}}{\Delta_y} = \frac{y_{22}}{\Delta_y} I_1 - \frac{y_{12}}{\Delta_y} I_2, \\ U_2 &= \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & I_1 \\ y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\Delta_y} = -\frac{y_{21}}{\Delta_y} I_1 + \frac{y_{11}}{\Delta_y} I_2, \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

где Δ_y — главный определитель системы (11.1).

Переобозначив коэффициенты, стоящие перед токами в системе (11.2) и имеющие размерность сопротивления, получим систему уравнений через z -параметры:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2, \\ U_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2. \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

Система (11.3) в матричной форме записывается как

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Из (11.2) следует связь между z - и y -параметрами:

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_{22}}{\Delta_y} & -\frac{y_{12}}{\Delta_y} \\ -\frac{y_{21}}{\Delta_y} & \frac{y_{11}}{\Delta_y} \end{bmatrix}.$$

Раскроем смысл z -параметров:

$z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}$ — входное сопротивление относительно выводов 1, 1' при разомкнутом выходе;

$z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$ — передаточное сопротивление от выхода к входу при разомкнутом входе;

$z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$ — передаточное сопротивление от входа к выходу при разомкнутом выходе;

$z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$ — входное сопротивление относительно выводов 2, 2' при разомкнутом входе.

Все z -параметры определяются в режиме холостого хода (ХХ) либо входа, либо выхода, поэтому z -параметры иногда называют параметрами холостого хода. Они могут быть определены либо опытным путем, если структура ЧП неизвестна, либо рассчитаны при заданной структуре.

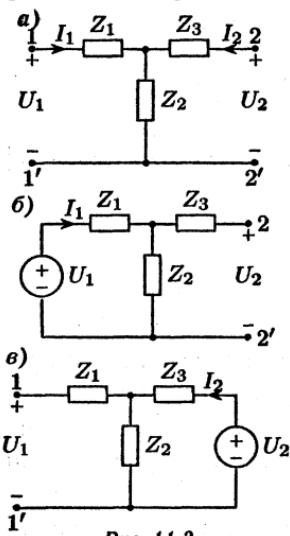


Рис. 11.3

Свойства z -параметров аналогичны свойствам y -параметров, т. е. $z_{12} = z_{21}$ для обратимых ЧП, а для симметричных ЧП $z_{11} = z_{22}$, $z_{12} = z_{21}$.

Для примера определим z -параметры Т-образного ЧП, изображенного на рисунке 11.3а.

Для цепи на рисунке 11.3б имеем $Z_{\text{вх}} = Z_1 + Z_2$, а $U_2 = Z_2 I_1$. Следовательно, имеем $z_{11} = Z_1 + Z_2$, $z_{21} = Z_2$. Для цепи на рисунке 11.3в $Z_{\text{вх}} = Z_2 + Z_3$, а $U_1 = Z_2 I_2$. Следовательно, получим $z_{22} = Z_2 + Z_3$, $z_{12} = Z_2$.

Таким образом, z -параметры Т-образного ЧП (матрица $[z]$) записывают-ся как

$$[z] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}.$$

11.1.4. Уравнения четырехполюсника через a -параметры

Уравнения через a -параметры устанавливают связи между входными напряжением и током (U_1 , I_1) и выходными напряжением и током (U_2 , I'_2).

Найдем U_1 и I_1 из системы (11.1). Из второго уравнения этой системы при $I'_2 = -I_2$ получим

$$U_1 = \frac{-y_{22}}{y_{21}} U_2 - \frac{1}{y_{21}} I'_2,$$

а из первого уравнения:

$$I_1 = -\frac{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}{y_{21}} U_2 - \frac{y_{11}}{y_{21}} I'_2 = -\frac{\Delta y}{y_{21}} U_2 - \frac{y_{11}}{y_{21}} I'_2.$$

Таким образом, вводя новые обозначения, получим систему уравнений

$$\begin{cases} U_1 = a_{11}U_2 + a_{12}I'_2, \\ I_1 = a_{21}U_2 + a_{22}I'_2. \end{cases} \quad (11.4)$$

Система (11.4) в матричной форме имеет вид:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I'_2 \end{bmatrix} = [a] \begin{bmatrix} U_2 \\ I'_2 \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы $[a]$ связаны с элементами матрицы $[y]$ следующим образом:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & -\frac{1}{y_{21}} \\ -\frac{\Delta y}{y_{21}} & -\frac{y_{11}}{y_{21}} \end{bmatrix}.$$

Раскроем смысл a -параметров:

$a_{11} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_2=0}$ — безразмерный коэффициент, обратный функции передачи по напряжению при разрыве выхода;

$a_{12} = \frac{U_1}{I'_2} \Big|_{U_2=0}$ — имеет размерность сопротивления и является величиной, обратной проводимости передачи при короткозамкнутом выходе;

$a_{21} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{I_2=0}$ — имеет размерность проводимости и является величиной, обратной передаточному сопротивлению при разомкнутом выходе;

$a_{22} = \frac{I_1}{I'_2} \Big|_{U_2=0}$ — безразмерный коэффициент, обратный функции передачи по току при короткозамкнутом выходе.

Укажем свойства a -параметров ЧП. Для обратимых ЧП $\Delta a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (y_{22}y_{11} - \Delta y)/y_{21}^2 = y_{12}/y_{21} = 1$ (так как $y_{12} = y_{21}$), а для симметричных ЧП кроме того $a_{11} = a_{22}$ (так как $y_{11} = y_{22}$). Это значит, что только три параметра являются независимыми для обратимых четырехполюсников и только два — для симметричных.

Определим для примера a -параметры четырехполюсника, изображенного на рисунке 11.1в. Из опыта холостого хода ($I'_2 = 0$) найдем a_{11} , a_{21} :

$$a_{11} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1(Z_1 + Z_2)}{I_1Z_2} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2},$$

$$a_{21} = \frac{I_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_1Z_2} = \frac{1}{Z_2}.$$

Из опыта короткого замыкания ($U_2 = 0$) найдем $a_{12} = Z_1$, $a_{22} = 1$.

Таким образом, матрица a -параметров ЧП:

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Запишем уравнения (11.4) для режима холостого хода выхода ($I'_2 = 0$): $U_{1xx} = a_{11}U_2$; $I_{1xx} = a_{21}U_2$.

Эти же уравнения для режима короткого замыкания выхода ($U_2 = 0$), будут: $U_{1кz} = a_{12}I'_2$, $I_{1кz} = a_{22}I'_2$.

Следовательно, напряжение U_1 представляет собой сумму напряжений холостого хода и короткого замыкания выхода, а ток I_1 — сумму токов при холостом ходе и коротком замыкании выхода: $U_1 = U_{1xx} + U_{1кz}$, $I_1 = I_{1xx} + I_{1кz}$.

11.1.5. Уравнения четырехполюсников через b -, h - и g -параметры

Не делая подобных выводов, приведем оставшиеся три вида уравнений четырехполюсника, которые могут быть получены из предыдущих ($I'_1 = -I_1$):

$$\left. \begin{array}{l} U_2 = b_{11}U_1 + b_{12}I'_1 \\ I_2 = b_{21}U_1 + b_{22}I'_1, \end{array} \right\} \quad (11.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2, \end{array} \right\} \quad (11.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = g_{11}U_1 + g_{12}I_2 \\ U_2 = g_{21}U_1 + g_{22}I_2. \end{array} \right\} \quad (11.7)$$

Смысл коэффициентов в (11.5), (11.6) и (11.7) можно раскрыть, рассматривая холостой ход и короткое замыкание соответствующих выводов.

Так как один из 6 способов описания четырехполюсников можно получить из другого, то, естественно, можно установить связь между параметрами, что позволяет находить одну матрицу параметров из другой.

11.1.6. Эквивалентные Т- и П-образные схемы замещения пассивных четырехполюсников

Два ЧП называются эквивалентными по отношению к внешним выводам, если соответствующие параметры у них одинаковы. Это значит, что при замене одного ЧП другим не должен изменяться режим работы остальной части схемы. Целесообразно использовать эквивалентные схемы четырехполюсников с минимальным числом элементов. Для пассивных ЧП часто используют эквивалентные Т- и П-структурь, состоящие из трех элементов.

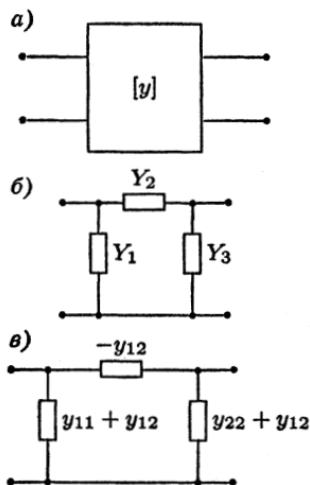


Рис. 11.4

Пусть у четырехполюсника произвольной структуры (рис. 11.4а) известна матрица $[y]$. Требуется заменить его эквивалентным П-образным четырехполюсником, изображенным на рисунке 11.4б, т. е. определить значения Y_1 , Y_2 , и Y_3 по заданным y -параметрам исходного четырехполюсника.

Матрица $[y]$ П-структурь была получена ранее в 11.1.2. Тогда

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, четырехполюсники

будут эквивалентны, если $Y_1 + Y_2 = y_{11}$, $y_{12} = -Y_2$, $Y_2 + Y_3 = y_{22}$. Отсюда находим: $Y_2 = -y_{12}$, $Y_1 = y_{11} - Y_2 = y_{11} + y_{12}$, $Y_3 = y_{22} - Y_2 = y_{22} + y_{12}$, что отражено на рисунке 11.4в.

Получим по известной матрице $[z]$ произвольного четырехполюсника (рис. 11.5а) эквивалентный ему Т-образный четырехполюсник (рис. 11.5б). Для определения неизвестных значений Z_1 , Z_2 и Z_3 приравниваем матрицы $[z]$ обоих ЧП (см. 11.1.3):

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

Из равенства параметров находим: $Z_2 = z_{12}$, $Z_1 = z_{11} - z_{12}$, $Z_3 = z_{22} - z_{12}$.

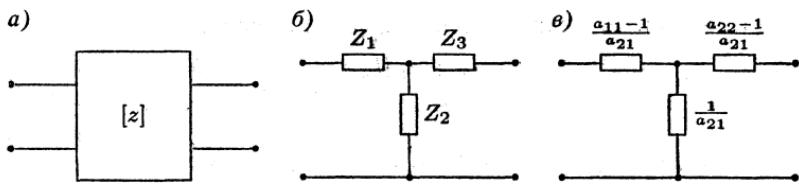


Рис. 11.5

Естественно, что параметры эквивалентного четырехполюсника можно выразить и через элементы других матриц. Так, на рисунке 11.5 ν приведен тот же Т-образный ЧП, сопротивления которого выражены через элементы матрицы $[a]$ исходного ЧП.

§ 11.2. ВХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ НАГРУЖЕННОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

11.2.1. Входные функции

Четырехполюсник часто используется в режиме, когда к его выходу подключена нагрузка с сопротивлением $Z_H(s) = Z_H$, а на вход подается сигнал напряжения или тока (см. рис. 11.6 a). В этом режиме легко определить такие важные характеристики, как входное сопротивление, функции передачи по напряжению и по току, если известны те или иные матрицы параметров четырехполюсника.

Для нагруженного четырехполюсника уравнения нагрузки имеют вид $U_2 = Z_H I'_2$, $I'_2 = Y_H U_2$.

Определим входное сопротивление со стороны выводов 1, 1' через элементы матрицы $[a]$:

$$Z_{\text{вх}1} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{a_{11}U_2 + a_{12}I'_2}{a_{21}U_2 + a_{22}I'_2} = \frac{a_{11}Z_H + a_{12}}{a_{21}Z_H + a_{22}}.$$

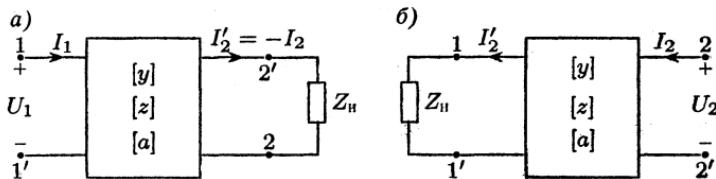


Рис. 11.6

Если использовать уравнения через z -параметры, то

$$Z_{\text{bx}1} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{z_{11}I_1 + z_{12}I_2}{I_1} = z_{11} + z_{12}\frac{I_2}{I_1}. \quad (11.8)$$

Из второго уравнения системы (11.3) имеем

$$I_1 = \frac{1}{z_{21}}U_2 - \frac{z_{22}}{z_{21}}I_2. \quad (11.9)$$

Подставим (11.9) в (11.8)

$$Z_{\text{bx}1} = z_{11} + z_{12}\frac{z_{21}I_2}{U_2 - z_{22}I_2} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{Z_h + z_{22}}.$$

Аналогично можно получить выражение для входной проводимости через y -параметры:

$$Y_{\text{bx}1} = \frac{1}{Z_{\text{bx}1}} = y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{Y_h + y_{22}}.$$

Если нагрузка подключена к выводам 1, 1', а сигнал подается к выводам 2, 2' (см. рис. 11.6б), то, учитывая, что $U_1 = Z_h I'_1$, а $I'_1 = Y_h U_1$, можно получить выражение для входного сопротивления со стороны выводов 2, 2':

$$Z_{\text{bx}2} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{b_{11}U_1 + b_{12}I'_1}{b_{21}U_1 + b_{22}I'_1} = \frac{a_{22}U_1 + a_{12}I'_1}{a_{21}U_1 + a_{11}I'_1} = \frac{a_{22}Z_h + a_{12}}{a_{21}Z_h + a_{11}},$$

здесь учтено, что элементы матрицы $[b]$ связаны с элементами матрицы $[a]$ следующим образом: $b_{11} = a_{22}$, $b_{12} = a_{12}$, $b_{21} = a_{21}$, $b_{22} = a_{11}$.

Входное сопротивление $Z_{\text{bx}2}$ через элементы матриц $[z]$ и $[y]$ будет

$$Z_{\text{bx}2} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{Z_h + z_{11}}; \quad Y_{\text{bx}2} = y_{22} - \frac{y_{12}y_{21}}{Y_h + y_{11}}.$$

Тогда получим для частного случая короткого замыкания ($Z_h = 0$)

$$Z_{\text{bx}1} = \frac{a_{12}}{a_{22}}, \quad Z_{\text{bx}2} = \frac{a_{12}}{a_{11}},$$

и для режима холостого хода ($Z_h \rightarrow \infty$)

$$Z_{\text{bx}1} = \frac{a_{11}}{a_{21}}, \quad Z_{\text{bx}2} = \frac{a_{22}}{a_{21}}.$$

11.2.2. Передаточные функции

Функция передачи ЧП по напряжению через a -параметры будет следующей:

$$H_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{a_{11}U_2 + a_{12}I'_2} = \frac{1}{a_{11} + Y_h a_{12}}.$$

Эта же функция через y -параметры записывается как

$$H_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{y_{21}U_2}{I_2 - y_{22}U_2} = \frac{-y_{21}}{Y_h + y_{22}},$$

здесь U_1 выражено через I_2 и U_2 из второго уравнения системы (11.1) с учетом того, что $I_2 = -I'_2 = -Y_h U_2$.

Не делая подобных выводов, приведем выражение функции передачи по напряжению через z -параметры:

$$H_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{z_{21}}{z_{11} + \Delta_z Y_h},$$

где Δ_z — главный определитель матрицы $[z]$.

Функция передачи по току через a -, z - и y -параметры следующая:

$$H_I = \frac{I'_2}{I_1} = \frac{1}{a_{22} + Z_h a_{21}} = \frac{z_{21}}{Z_h + z_{22}} = \frac{-y_{21}}{y_{11} + \Delta_y Z_h},$$

где Δ_y — главный определитель матрицы $[y]$.

В режиме холостого хода ($Z_h = \infty$, $Y_h = 0$) имеем

$$H_{UXX} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{-y_{21}}{y_{22}} = \frac{z_{21}}{z_{11}}, \quad H_{IXX} = 0,$$

а в режиме короткого замыкания ($Z_h = 0$, $Y_h = \infty$)

$$H_{UK3} = 0, \quad H_{IK3} = \frac{1}{a_{22}} = \frac{-y_{21}}{y_{11}}.$$

§ 11.3. СОЕДИНЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Четырехполюсники можно соединять друг с другом, в результате чего образуется более сложный четырехполюсник. Различают следующие виды соединений.

1. Последовательное, когда входы (выходы) соединены последовательно.

2. Параллельное, когда входы (выходы) соединены параллельно.

3. Каскадное, когда выход одного четырехполюсника соединен с входом другого.

4. Последовательно-параллельное, когда входы соединены последовательно, а выходы — параллельно.

5. Параллельно-последовательное, когда входы соединены параллельно, а выходы — последовательно.

Если структура ЧП известна, то его можно в общем случае разбить на более простые четырехполюсники, соединенные тем или иным способом. Поэтому целесообразно выяснить, каким образом может быть определена та или иная матрица параметров сложного ЧП, если известны матрицы тех четырехполюсников, из которых образован сложный ЧП.

11.3.1. Последовательное соединение четырехполюсников

На рисунке 11.7а представлен ЧП, образованный последовательным соединением двух ЧП с матрицами $[z]_1$ и $[z]_2$.

Если в результате соединения режим работы четырехполюсников не нарушается, т. е. $U_1^{(1)}, U_1^{(2)}, U_2^{(1)}, U_2^{(2)}$ остаются такими же, как и до соединения, при протекании указанных на рисунке 11.7а токов I_1 и I_2 , то такое соединение называется регулярным. В этом случае

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \end{bmatrix} = [z]_1 \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + [z]_2 \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = ([z]_1 + [z]_2) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица $[z]$ результирующего четырехполюсника равна сумме матриц $[z]$ соединяемых последовательно четырехполюсников.

Если последовательно будет соединено n четырехполюсников и это соединение регулярно, то

$$[z] = [z]_1 + [z]_2 + [z]_3 + \cdots + [z]_n.$$

Для выяснения регулярности соединения необходимо соединить последовательно входы и измерить или рассчитать

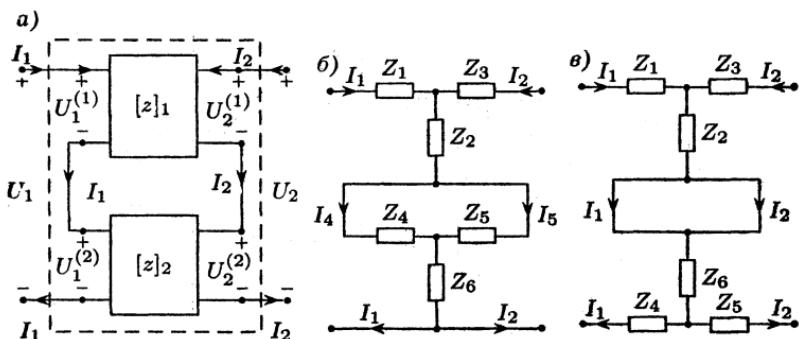


Рис. 11.7

напряжение между подлежащими соединению выходными выводами, не соединяя их. Это напряжение для регулярного соединения должно равняться нулю. Такие же измерения или расчет нужно повторить соединив выходы последовательно, и определить напряжение между подлежащими соединению входными выводами. Это напряжение тоже должно равняться нулю. На рисунке 11.7б приведен пример нерегулярного, а на рисунке 11.7в регулярного последовательного соединения. При регулярном соединении матрица параметров каждого из ЧП должна оставаться такой же, какой она была до соединения. Так, в результате нерегулярного соединения (см. рис. 11.7б) сопротивления Z_4 и Z_5 в схеме второго ЧП оказались соединенными параллельно, что приводит к изменению матрицы $[z]$ этого ЧП; кроме того $I_4 \neq I_1$, т. е. нарушено требование неизменности тока I_1 , протекающего со стороны выводов 1, 1' каждого из ЧП на рисунке 11.7а.

11.3.2. Параллельное соединение четырехполюсников

На рисунке 11.8 представлен четырехполюсник, образованный параллельным соединением двух ЧП с матрицами $[y]_1$ и $[y]_2$.

Если в результате соединения режим работы четырехполюсников не нарушается, т. е. токи $I_1^{(1)}, I_1^{(2)}, I_2^{(1)}, I_2^{(2)}$ остаются такими же, как и до соединения при действии напряжений U_1 и U_2 , то такое соединение называется регулярным.

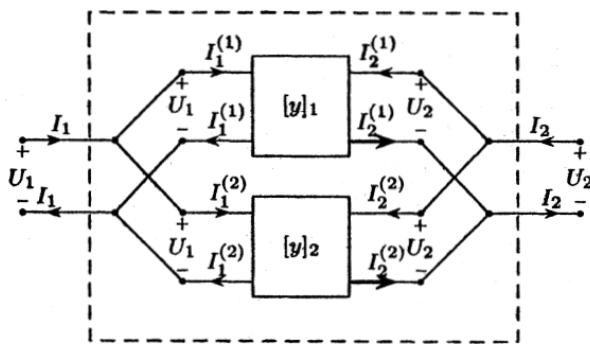


Рис. 11.8

В этом случае

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{bmatrix} = [y]_1 \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + [y]_2 \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = ([y]_1 + [y]_2) \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [y] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix},$$

т. е. матрица $[y]$ результирующего четырехполюсника равна сумме матриц $[y]$ соединяемых параллельно четырехполюсников. Если параллельно соединено n четырехполюсников и это соединение регулярно, то

$$[y] = [y]_1 + [y]_2 + \cdots + [y]_n.$$

Для ответа на вопрос, является ли соединение регулярным, необходимо входы ЧП соединить параллельно, а выходы каждого четырехполюсника замкнуть накоротко. Далее следует измерить или рассчитать напряжение между короткозамкнутыми выходами. При регулярном соединении это напряжение должно равняться нулю. Такие же опыт или расчет надо повторить, поменяв местами входы и выходы.

11.3.3. Каскадное соединение четырехполюсников

Каскадное соединение четырехполюсников представлено на рисунке 11.9а. Как видно из схемы, каскадное соединение всегда обладает следующими свойствами:

$$-I_2^{(1)} = I_1^{(2)}, \quad U_1^{(2)} = U_2^{(1)}. \quad (11.10)$$

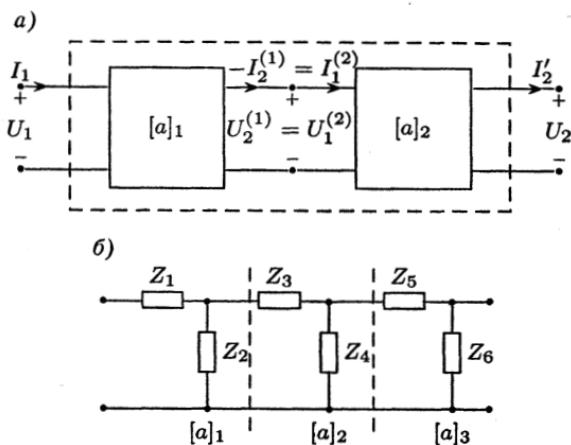


Рис. 11.9

Уравнения через a -параметры первого и второго четырехполюсников следующие

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [a]_1 \begin{bmatrix} U_2^{(1)} \\ -I_2^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U_1^{(2)} \\ I_1^{(2)} \end{bmatrix} = [a]_2 \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2' \end{bmatrix}.$$

С учетом (11.10) запишем:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [a]_1 \begin{bmatrix} U_2^{(2)} \\ I_1^{(2)} \end{bmatrix} = [a]_1 [a]_2 \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2' \end{bmatrix} = [a] \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2' \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица $[a]$ каскадного соединения ЧП равна произведению матриц $[a]$ отдельных четырехполюсников. Если каскадно соединено n четырехполюсников, то общая матрица $[a]$ будет:

$$[a] = [a]_1 [a]_2 \dots [a]_n.$$

Так как условие (11.10) всегда выполняется, то каскадное соединение регулярно. Полученные результаты целесообразно использовать также для определения матрицы $[a]$ сложных четырехполюсников, разбивая их на простейшие каскады, как это показано, например, на рисунке 11.9б. Найдя матрицы простейших четырехполюсников, далее определяют общую матрицу: $[a] = [a]_1 [a]_2 [a]_3$.

11.3.4. Последовательно-параллельное соединение четырехполюсников

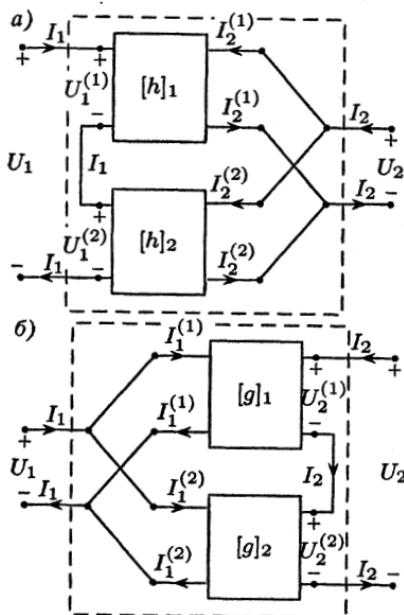


Рис. 11.10

Последовательно-параллельное соединение четырехполюсников приведено на рисунке 11.10а. Уравнения через h -параметры отдельных четырехполюсников:

$$\begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \end{bmatrix} = [h]_1 \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} U_1^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{bmatrix} = [h]_2 \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

При регулярном соединении режим работы не изменяется, и тогда $U_1 = U_1^{(1)} + U_1^{(2)}$, $I_2 = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}$, следовательно,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{bmatrix} = [h]_1 \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + [h]_2 \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \\ &= ([h]_1 + [h]_2) \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [h] \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица $[h]$ при последовательно-параллельном соединении ЧП равна сумме матриц $[h]$ отдельных четырехполюсников. Если таких четырехполюсников будет n , то

$$[h] = [h]_1 + [h]_2 + \cdots + [h]_n.$$

11.3.5. Параллельно-последовательное соединение четырехполюсников

На рисунке 11.10б представлен четырехполюсник, образованный параллельно-последовательным соединением двух четырехполюсников с известными матрицами $[g]_1$ и $[g]_2$. Не делая очевидных теперь выводов, отметим, что в этом

случае будут складываться матрицы $[g]$ отдельных четырехполюсников.

Таким образом, $[g] = [g]_1 + [g]_2 + \dots + [g]_n$, если n четырехполюсников соединены параллельно-последовательно и это соединение регулярно.

§ 11.4. ЦЕПИ С ЗАВИСИМЫМИ ИСТОЧНИКАМИ И НЕОБРАТИМЫМИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКАМИ

11.4.1. Зависимые источники и их свойства

У рассмотренных ранее пассивных $RLCM$ -цепей выполняется принцип взаимности (обратимости, пассивности): $Y_{n-m} = Y_{m-n}$, т. е. указанная функция передачи цепи в прямом и обратном направлениях одинакова. Однако на практике преобладают цепи преимущественно с односторонним направлением передачи сигналов. Это так называемые активные (необратимые) цепи, у которых принцип обратимости несправедлив, а схема замещения содержит хотя бы один необратимый элемент, т. е. зависимый источник (ЗИ).

Существует 4 типа зависимых источников.

1. Источник напряжения, управляемый током (ИНУТ), — это ЧП, схема которого приведена на рисунке 11.11 a , причем ЗИ, в отличие от независимых источников, изображают «ромбиком». Очевидно, что уравнения z -формы ЧП и, соответственно, матрица z -параметров имеют вид

$$\begin{cases} U_1(s) = 0 + 0 \\ U_2(s) = k_z I_1(s) + 0 \cdot I_2(s), \end{cases} \quad [z] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_z & 0 \end{bmatrix},$$

т. е. условие обратимости ЧП не выполняется: $z_{12} \neq z_{21}$.

2. Источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН), — это ЧП, изображенный на рисунке 11.11 b , имеющий уравнения a -формы:

$$\begin{cases} U_1(s) = (\frac{1}{k_U})U_2(s) + 0(-I_2) \\ I_1(s) = 0 + 0, \end{cases} \quad [a] = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

т. е. условие обратимости не выполняется: $\Delta_a \neq 1$.

3. Источник тока, управляемый током (ИТУТ), — это ЧП, представленный на рисунке 11.11 c .

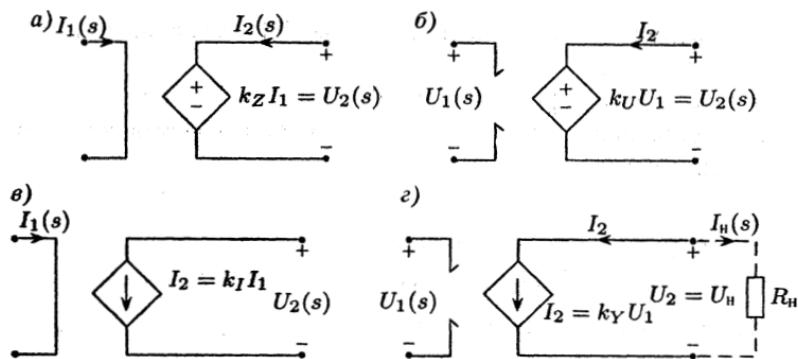


Рис. 11.11

4. Источник тока, управляемый напряжением (ИТУН), — это ЧП, изображенный на рисунке 11.11 ε .

Свойства ЗИ:

1. Необратимость.
2. Входная мощность $p_1(t) = u_1(t)i_1(t) = 0$.
3. Способность в некоторые моменты времени генерировать энергию, например, в схеме с ИТУН (см. рис. 11.11 ε), $p_{\Sigma}(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) = 0 + u_H(-i_H) = -R_H i_H^2 < 0$.

Элемент, энергия которого в некоторый момент времени t_a может быть отрицательна, называется активным элементом:

$$W_{\text{акт}}(t_a) < 0.$$

Примечание. С рассмотренных позиций независимые источники в цепи являются активными элементами, однако на практике, когда говорят об активных цепях, имеют в виду цепи с необратимыми ЧП, т. е. цепи с ЗИ.

11.4.2. Схемы замещения необратимых ЧП

У необратимых ЧП независимы все 4 параметра, поэтому эквивалентная схема замещения необратимого ЧП должна содержать 4 элемента, из которых хотя бы один — зависимый источник.

На основании z -формы уравнений ЧП составим схему замещения необратимого ЧП с двумя ЗИ. Уравнения

$$U_1(s) = z_{11}I_1(s) + z_{12}I_2(s), \quad U_2(s) = z_{21}I_1(s) + z_{22}I_2(s)$$

трактуем как уравнения закона напряжений Кирхгофа (ЗНК) в схемах последовательно соединенных цепей, которые изображены на рисунке 11.12 a и содержат два ИНУТ.

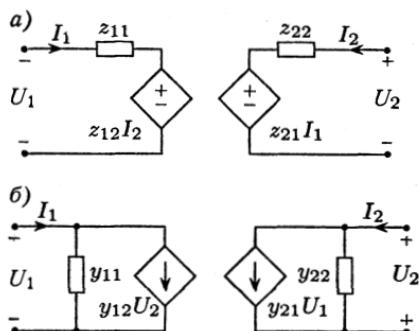


Рис. 11.12

Примечание. Указанные схемы могут быть использованы и для описания пассивных ЧП, однако для пассивных ЧП проще использовать Т- или П-образные эквивалентные схемы замещения с тремя элементами.

В качестве примера также рассмотрим распространенную линеаризованную схему замещения транзистора на НЧ в режиме малых приращений переменных в окрестности рабочей точки. Транзистор (рис. 11.13a) удобно рассматривать как четырехполюсник, поэтому изображения приращения токов базы Б, коллектора К, эмиттера Э $\Delta i_B(t)$, $\Delta i_K(t)$, $\Delta i_\Theta(t)$ и напряжений $\Delta u_B(t)$, $\Delta U_K(t)$ запишем, используя стандартные обозначения четырехполюсника (в данном частном случае — трехполюсника). Т-образная схема замещения, приведенная на рисунке 11.13б, содержит 3 пассивных элемента, которые обычно условно называют сопротивлениями базы R_B , эмиттера R_Θ и коллектора R_K , и один ЗИ типа ИТУТ, коэффициент передачи у которого $0 < \alpha < 1$ (обычно параметр α близок к 1). На практике очень часто сопротивление нагрузки

Уравнения y -формы ЧП
 $\begin{cases} I_1(s) = y_{11}U_1(s) + y_{12}U_2(s), \\ I_2(s) = y_{21}U_1(s) + y_{22}U_2(s) \end{cases}$
 трактуем как уравнения закона токов Кирхгофа (ЗТК) параллельного соединения элементов в эквивалентных схемах замещения, которые изображены на рисунке 11.12б и содержат два ИТУН.

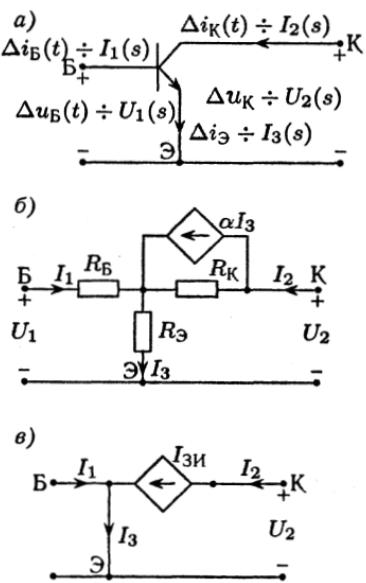


Рис. 11.13

транзисторной схемы $R_{\text{H}} \ll R_{\text{K}}$, $R_{\text{H}} \gg R_{\text{B}}$, $R_{\text{H}} \gg R_{\text{Э}}$, поэтому, пренебрегая сопротивлениями элементов R_{B} , $R_{\text{Э}}$, R_{K} , получим часто используемую в оценочных расчетах простейшую схему замещения транзистора, которая изображена на рисунке 11.13 ν и состоит только из ИТУТ, ток которого следующий: $I_{\text{ЗИ}} = \alpha I_3 = \beta I_1$, причем легко установить, используя ЗТК, что $\beta = \alpha/(1 - \alpha)$.

11.4.3. Расчет схем с зависимыми источниками

Основная идея расчета: необратимый ЧП представляют эквивалентной схемой с ЗИ, далее применяют любой метод расчета, уравнения используемого метода дополняют уравнениями для ЗИ.

Для примера приведем схему (рис. 11.14 a) некоторой цепи, содержащей транзистор Т (т. е. необратимый ЧП). Необходимо найти функцию передачи по напряжению $H_U = U_{\text{вых}}/U_{\text{вх}}$.

Используя эквивалентную схему замещения транзистора (см. рис. 11.13 b), переходим к эквивалентной схеме, представленной на рисунке 11.14 b .

Используем для расчета, например, метод контурных токов (МКТ). Поскольку число независимых уравнений $n_{\text{МКТ}} = n_{\text{яч}} = 4$, будем иметь 4 уравнения МКТ для схемы рисунка 11.14 b :

$$\begin{cases} (R_1 + R_{\text{Б}} + R_{\text{Э}})I_1^k + R_{\text{Э}}I_2^k + 0 \cdot I_3^k + R_1I_4^k = U_{\text{вх}}, \\ R_{\text{Э}}I_1^k + (R_{\text{К}} + R_{\text{Э}} + R_{\text{Н}})I_2^k - R_{\text{К}}I_3^k - R_{\text{Н}}I_4^k = 0, \\ I_3^k = \alpha I_3, \\ R_1I_1^k - R_{\text{Н}}I_2^k + 0 \cdot I_3^k + (R_1 + R_2 + R_{\text{Н}})I_4^k = U_{\text{вх}}, \\ I_{\text{ЗИ}} = \alpha I_3 = \alpha(I_1^k + I_2^k), \end{cases}$$

причем пятое уравнение — это дополнительное уравнение для ЗИ.

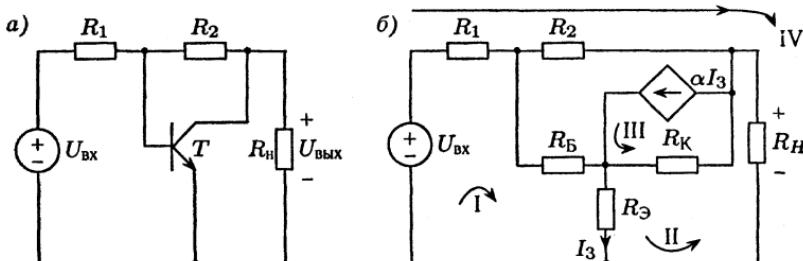


Рис. 11.14

11.4.4. Формализованный метод контурных токов для расчета цепей с необратимыми ЧП

Используем следующий порядок расчета, рассматривая в качестве примера схему, представленную на рисунке 11.14а:

1. Используя уравнения z -формы необратимого ЧП, заменяем его (см. рис. 11.12а) эквивалентной схемой с двумя ЗИ типа ИНУТ.

В рассматриваемом примере получим цепь, представленную на рисунке 11.15а.

Примечание. Если z -параметры необратимого ЧП неизвестны, их необходимо определить, используя известные параметры ЧП или схему замещения ЧП (например, необходимо найти z -параметры схемы замещения, изображенной на рисунке 11.13б).

2. Записываем уравнения МКТ, но напряжения ЗИ оставляем в левой части уравнений, используя, следовательно, для них обычное правило знаков ЗНК. В матричной форме имеем

$$[Z_A][I^k] + [U^{3I}] = [U^k], \quad (11.11)$$

где $[Z_A]$ и $[I^k]$ — обычные матрица сопротивлений МКТ и матрица контурных токов, $[U^{3I}]$ и $[U^k]$ — матрицы напряжений зависимых и независимых источников.

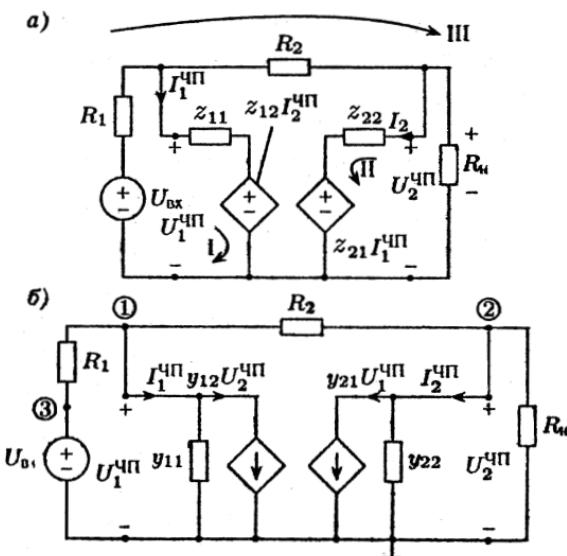


Рис. 11.15

Рекомендации:

- на практике выгоднее не использовать матричную форму записи уравнений МКТ;
- целесообразно выбрать независимые контуры так, чтобы токи ЧП были контурными, и присваивать им первые номера.

Так, в схеме рисунка 11.15а имеем $n_{\text{МКТ}} = n_{\text{яч}} = 3$, и в соответствии с рекомендациями составляем систему:

$$\begin{cases} [(R_1 + z_{11})I_1^k + 0 \cdot I_2^k + R_1 I_3^k] + z_{12} I_2^{\text{ЧП}} = U_{\text{вх}}, \\ [0 \cdot I_1^k + (z_{22} + R_h)I_2^k - R_h I_3^k] + z_{21} I_1^{\text{ЧП}} = 0, \\ [R_1 I_1^k - R_h I_2^k + (R_1 + R_2 + R_h) I_3^k] + 0 = U_{\text{вх}}. \end{cases}$$

3. Выражаем напряжения ЗИ $[U^{3\text{И}}]$ через токи ЧП $[I^{\text{ЧП}}]$, а токи ЧП — через контурные токи $[I^k]$; получаем уравнения $[U^{3\text{И}}] = [Z_B][I^k]$, подставляя которые в (11.11), находим обобщенные уравнения формализованного МКТ:

$$([Z_A] + [Z_B])[I^k] = [U^k].$$

В рассматриваемом примере напряжения $[U^{3\text{И}}]$ уже выражены через токи $[I^{\text{ЧП}}]$. Осталось использовать уравнения $I_1^{\text{ЧП}} = I_1^k$, $I_2^{\text{ЧП}} = I_2^k$ и привести подобные члены:

$$\begin{cases} (R_1 + z_{11})I_1^k + z_{12}I_2^k + R_1 I_3^k = U_{\text{вх}}, \\ z_{21}I_1^k + (z_{22} + R_h)I_2^k - R_h I_3^k = 0, \\ R_1 I_1^k - R_h I_2^k + (R_1 + R_2 + R_h) I_3^k = U_{\text{вх}}. \end{cases}$$

11.4.5. Формализованный метод узловых напряжений для расчета цепей с необратимыми ЧП

Последовательность расчета дуальна изложенной ранее. В качестве примера рассматриваем схему, приведенную на рисунке 11.14а.

1. Используя уравнения u -формы необратимого ЧП, заменяем его (см. рис. 11.12б) эквивалентной схемой с двумя ЗИ типа ИТУН.

В рассматриваемом примере при этом получим схему, изображенную на рисунке 11.15б.

Примечание. Если y -параметры необратимого ЧП не заданы, их необходимо определить по известным параметрам иной формы уравнений ЧП (например, рассчитать y -параметры по z -параметрам) либо по известной схеме замещения необратимого ЧП (в примере — по схеме, изображенной на рисунке 11.13б).

2. Записываем уравнения МУН, но токи ЗИ оставляем в левой части уравнений, используя для них обычное правило знаков ЗТК (вытекающие из рассматриваемого узла токи ЗИ записываются со знаком «плюс»):

$$[Y_A][U^y] + [I^{ЗИ}] = [I^y], \quad (11.12)$$

причем в (11.12) $[Y_A]$ и $[U^y]$ — обычные матрицы проводимостей МУН и узловых напряжений (отсчитываемых относительно базисного узла); $[I^{ЗИ}]$ и $[I^y]$ — матрицы токов зависимых и независимых источников токов.

Рекомендации:

- на практике выгоднее вместо матричной формы (11.12) использовать обычную систему уравнений МУН;
- целесообразно базисный узел цепи выбрать так, чтобы напряжения необратимых ЧП по возможности были узловыми напряжениями, и присваивать им первые номера.

В схеме, изображенной на рисунке 11.15б, выбрав указанную нумерацию узлов, получим следующие уравнения МУН:

$$\begin{cases} [(G_1 + G_2 + y_{11})U_1^y - G_2 U_2^y - G_1 U_3^y] + y_{12} U_2^{\text{ЧП}} = 0, \\ [-G_2 U_1^y + (G_2 + G_{\text{н}} + y_{22})U_2^y + 0 \cdot U_3^y] + y_{21} U_1^{\text{ЧП}} = 0, \\ U_3^y = U_{\text{вх}}. \end{cases} \quad (11.13)$$

3. Выражаем токи ЗИ ($I^{ЗИ}$) через напряжения необратимых ЧП ($U^{\text{ЧП}}$), а напряжения ЧП — через узловые напряжения (U^y). Получаем уравнение $[I^{ЗИ}] = [Y_B][U^y]$, подставляя которое в (11.12), записываем обобщенное матричное уравнение формализованного МУН:

$$([Y_A] + [Y_B])[U^y] = [I^y].$$

В уравнениях (11.13) примера токи ЗИ выражены через напряжения необратимого ЧП; осталось осуществить подстановку $U_1^{\text{ЧП}} = U_1^y$, $U_2^{\text{ЧП}} = U_2^y$ после чего получаем:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + y_{11})U_1^y + (-G_2 + y_{12})U_2^y - G_1 U_{\text{вх}} = 0, \\ (-G_2 + y_{21})U_1^y + (G_2 + G_h + y_{22})U_2^y = 0. \end{cases}$$

11.4.6. Использование формализованных МКТ и МУН для расчета индуктивно связанных цепей

Уравнения индуктивно связанный цепи, схема которой приведена на рисунке 11.16, подобны z -форме уравнений ЧП:

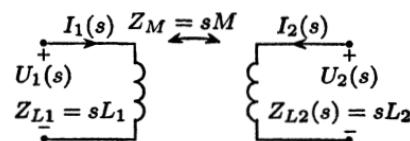


Рис. 11.16

$$\begin{cases} U_1 = sL_1 I_1 + sMI_2; \\ U_2 = sMI_1 + sL_2 I_2, \end{cases} \quad (11.14)$$

где $z_{11} = Z_{L1}$, $z_{22} = Z_{L2}$, $z_{12} = z_{21} = Z_M$.

Запишем уравнения (11.14) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix},$$

или, сокращенно,

$$[U_L] = s[L][I_L], \quad (11.15)$$

где так называемая матрица индуктивностей

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}. \quad (11.16)$$

Вывод: для расчета индуктивно связанных цепей можно использовать формализованный МКТ, если рассматривать схему, приведенную на рисунке 11.16, как ЧП с параметрами $z_{11} = sL_{11}$, $z_{22} = sL_{22}$, $z_{12} = z_{21} = sL_{12} = sL_{21} = sM$.

Для применения формализованного МУН при расчете индуктивно связанных цепей необходимо найти Y -параметры схемы (рис. 11.16). Для этого необходимо решить (11.14) относительно токов либо обратить уравнение (11.15):

$$[I_L] = 1/s[L]^{-1}[U_L]. \quad (11.17)$$

Записав транспонированную (11.16) матрицу

$$[L]^T = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}$$

и используя ее алгебраические дополнения, находим обратную матрицу:

$$[L]^{-1} = \frac{1}{\Delta_L} \begin{bmatrix} L_{22} & -L_{12} \\ -L_{21} & L_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = [\Gamma], \quad (11.18)$$

где Γ — матрица обратных индуктивностей, $\Delta_L = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$ — главный определитель матрицы $[L]$.

Таким образом, в соответствии с (11.17), (11.18) найдены y -параметры ИС-цепи как ЧП:

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{\Gamma_{11}}{s} = \frac{L_2}{s\Delta_L}, \\ y_{22} &= \frac{\Gamma_{22}}{s} = \frac{L_1}{s\Delta_L}, \\ y_{12} &= \frac{\Gamma_{12}}{s} = \frac{-M}{s\Delta_L} = y_{21}. \end{aligned}$$

Примечание. При совершенной магнитной связи, т. е. при $k_{cb} = |M|/\sqrt{L_1L_2} = 1$, имеем $\Delta_L = L_1L_2 - M^2 = 0$, следовательно, матрица обратных индуктивностей не существует и применить МУН невозможно.

§ 11.5. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ С ОПЕРАЦИОННЫМИ УСИЛИТЕЛЯМИ

11.5.1. Идеальный операционный усилитель и его свойства

Операционный усилитель (ОУ) — это ИНУН, схема которого приведена на рис. 11.17a, условное обозначение — на рисунке 11.17b, а предельно упрощенное, но часто используемое условное обозначение — на рисунке 11.17в.

Свойства идеального ОУ очевидны из анализа рисунка 11.17:

1. Входные токи отсутствуют, т. е. $I_{bx}^{OY}(s) = 0$.
2. Коэффициент усиления бесконечен, т. е. $k_{OY} = \infty$ (если $k_{OY} \neq \infty$, его значение указывают внутри «треугольников», изображенных на рисунке 11.17б, в, вместо знака « ∞ »).

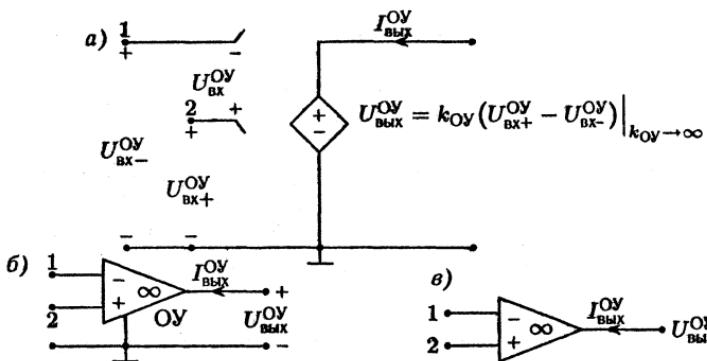


Рис. 11.17

3. $U_{\text{вх}}^{\text{OY}} = 0$, поскольку $U_{\text{вх}}^{\text{OY}} = U_{\text{вых}}^{\text{OY}}/k_{\text{OY}}$, следовательно, входы 1 и 2 у ОУ эквипотенциальны.

Примечание. Достоинство обозначения ОУ на рисунке 11.17в — простота, недостаток — не очевиден «путь» протекания выходного тока ОУ $I_{\text{вых}}^{\text{OY}}(s)$.

11.5.2. Использование простейших схем на ОУ для реализации математических операций и решения уравнений состояния

Основная, так называемая «решающая схема на ОУ» изображена на рисунке 11.18а.

Примечания (к рис. 11.18а):

1. Вход «+» ОУ непосредственно соединен с базисным узлом цепи (обычно, это корпус реального прибора — «земля»).
2. Очень часто этот базисный узел вообще не показывают на схеме, опускают и знак «+» в обозначении ОУ (т. е. используют так называемый

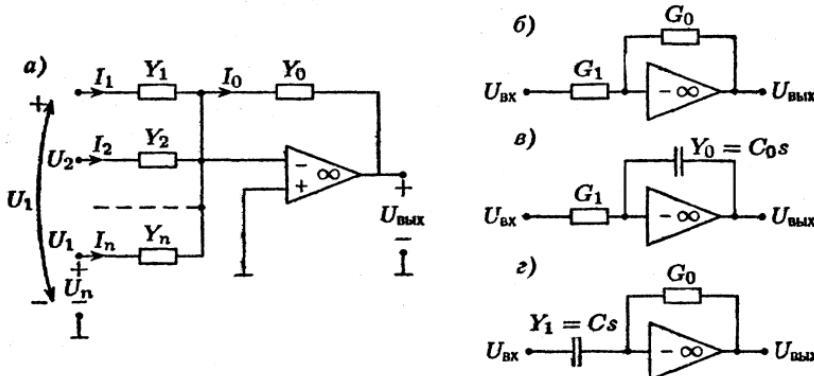


Рис. 11.18

ОУ с одним входом, в отличие от приведенного выше ОУ с двумя входами, так называемого дифференциального ОУ).

3. Проводимость $Y_0(s)$ часто называют проводимостью обратной связи, поскольку элемент Y_0 соединяет вход и выход ОУ.

Для схемы рисунка 11.18 a уравнение ЗТК имеет вид

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) = I_0(s),$$

или

$$\sum_{k=1}^n Y_k(s) [U_k(s) - U_{\text{вх-}}^{\text{ОУ}}(s)] = Y_0(s) [U_{\text{вх-}}^{\text{ОУ}}(s) - U_{\text{вых}}(s)].$$

Поскольку входные узлы ОУ эквипотенциальны, то $U_{\text{вх-}}^{\text{ОУ}} = 0$, следовательно, формула «решающей схемы на ОУ»

$$U_{\text{вых}}(s) = \frac{-1}{Y_0(s)} \sum_{k=1}^n Y_k(s) U_k(s). \quad (11.19)$$

Вывод: схема реализует операции инверсии (т. е. обращения знака), независимого суммирования входных сигналов и умножения на передаточные функции $Y_k(s)/Y_0(s)$ по каждому входу.

Рассмотрим частные случаи.

1. Схема, изображенная на рисунке 11.18 b , в соответствии с (11.19) описывается уравнением

$$U_{\text{вых}}(s) = \frac{-U_{\text{вх}}(s) G_1}{G_0},$$

т. е. реализует умножение на постоянный коэффициент с инверсией знака.

2. Схема, указанная на рисунке 11.18 b , описывается уравнением

$$U_{\text{вых}}(s) = -\frac{G_1}{C_0 s} U_{\text{вх}}(s) \div u_{\text{вых}}(t) = -\frac{G_1}{C_0} \int_0^t u_{\text{вх}}(t) dt,$$

т. е. реализует операцию интегрирования с умножением на постоянный коэффициент и инверсией знака (если же входов несколько, то реализуется и независимое суммирование).

3. Схема, изложенная на рисунке 11.18 c , в идеале описывается уравнением

$$U_{\text{вых}}(s) = -\frac{C_1 s}{G_0} U_{\text{вх}}(s) \div u_{\text{вых}}(t) = -\frac{C_1}{G_0} u'_{\text{вх}}(t),$$

однако на практике операцию дифференцирования реализовать невозможно, поскольку АЧХ схемы $|C_1j\omega/G_0| \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow \infty$, т. е. высокочастотная помеха неограниченно усиливается и нормальный режим работы ОУ нарушается.

Примечание. При решении уравнений состояния

$$s[U_{\text{вых}}(s)] = [A][U_{\text{вых}}(s)] + [B][U_{\text{вх}}(s)], \quad (11.20)$$

систему (11.20) можно преобразовать к виду

$$[U_{\text{вых}}(s)] = \frac{1}{s} ([A][U_{\text{вых}}(s)] + [B][U_{\text{вх}}(s)]), \quad (11.21)$$

а для решения (11.21) необходимо, как видно, реализовать операции интегрирования и независимого суммирования с умножением на различные коэффициенты, что и обеспечивает на основании (11.19) «решающая схема на ОУ», показанная на рисунке 11.18а.

11.5.3. Особенности применения МУН при расчете схем с ОУ

При расчете цепей с ОУ необходимо иметь в виду следующее:

- Составляют обычные уравнения МУН для всех независимых узлов цепи, кроме выходных узлов ОУ (так как выходные токи ОУ $I_{\text{вых}}^{\text{OY}}(s)$ неизвестны — см рис. 11.17).
- В качестве дополнительных уравнений МУН используют третье свойство идеального ОУ — эквипотенциальность его входов при $k_{\text{OY}} = \infty$.

Примечание. Если $k_{\text{OY}} \neq \infty$, в качестве дополнительного уравнения МУН используют уравнение ОУ как ИНУН, указанное на рисунке 11.17а:

$$U_{\text{вых}}^{\text{OY}}(s) = k_{\text{OY}} (U_{\text{вх+}}^{\text{OY}}(s) - U_{\text{вх-}}^{\text{OY}}(s)).$$

11.5.4. Использование схем с ОУ для преобразования сопротивлений

Среди задач современной электроники отметим две:

- Реализацию отрицательных сопротивлений ($R < 0$), необходимых, например для компенсации активных потерь в реальном LC -контуре, что позволяет создать генератор незатухающих синусоидальных сигналов.
- Реализацию характеристик идеального L -элемента без использования реальных катушек индуктивности (обычно

имеющих большие габариты и активные потери, сложных в изготовлении, обладающих значительным разбросом значений L , нелинейностью и недостаточным диапазоном изменения индуктивности).

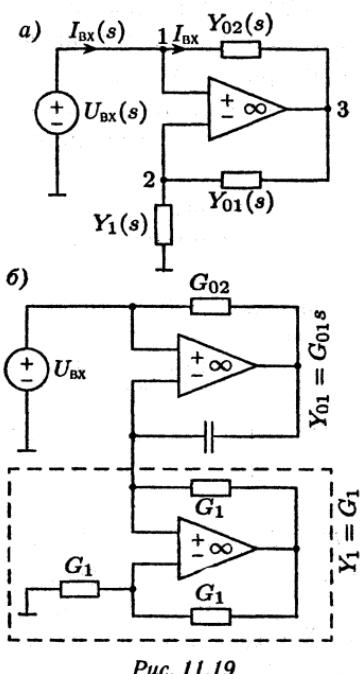


Рис. 11.19

Исходная схема решения указанных задач приведена на рисунке 11.19а. Уравнения МУН схемы имеют вид: $U_{bx} = U_3^y$; $(Y_1 + Y_{01})U_3^y - Y_{01}U_3^y = 0$, а дополнительное уравнение: $U_3^y = U_1^y = U_{bx}$.

В результате получим: $(Y_1 + Y_{01})U_{bx} = Y_{01}U_3^y$, откуда $U_3^y = (1 + Y_1/Y_{01})U_{bx}$. Тогда входной ток цепи будет $I_{bx} = Y_{02}(U_{bx} - U_3^y) = Y_{02}U_{bx}(1 - 1 - Y_1/Y_{01}) = -Y_{02}Y_1U_{bx}/Y_{01}$.

Таким образом, входная проводимость цепи записывается как

$$\frac{I_{bx}(s)}{U_{bx}(s)} = Y_{bx}(s) = \frac{Y_{02}(s)Y_1(s)}{-Y_{01}(s)}. \quad (11.22)$$

Рассмотрим частные случаи (11.22).

1. При $Y_{02} = G_{02}$, $Y_1 = G_1$, $Y_{01} = G_{01}$ получим $Y_{bx} = -G_{02}G_1/G_{01} = -G_{\text{экв}}$, т. е. схема реализует характеристики R -элемента с отрицательным сопротивлением.

2. При $Y_{02} = G_{02}$, $Y_1 = G_1$, $Y_{01} = C_{01}s$, получим

$$Y_{bx}(s) = -\frac{G_{02}G_1}{C_{01}s} = -\frac{1}{L_3 s},$$

т. е. схема реализует характеристики L -элемента с отрицательной индуктивностью. Чтобы получить положительную индуктивность, необходимо реализовать отрицательную проводимость $Y_1 = -G_1$ с помощью рассмотренной схемы частного случая 1, как показано на рисунке 11.19б.

11.5.5. Об устойчивости цепей с ОУ

Если во всех рассмотренных ранее схемах с ОУ поменять местами входы «+» и «-» у ОУ, то при $k_{OY} = \infty$ полученные результаты формально не изменяются. Однако у реальных ОУ $k_{OY} \neq \infty$ (хотя k_{OY} очень велико), и в этом случае наличие малых «паразитных параметров» цепи, например входной емкости C_n , может привести к потере цепью устойчивости, т. е. к появлению положительных корней характеристического полинома (ХП) цепи.

Действительно, рассмотрим простейшие схемы с ОУ, изображенные на рисунке 11.20 и соответствующие в целом рисунку 11.18б.

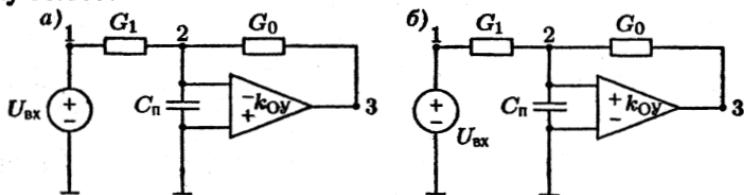


Рис. 11.20

Уравнения МУН имеют вид $U_1^y = U_{вх}$, $(G_1 + G_0 + C_n s)U_2^y - G_1 U_1^y - G_0 U_3^y = 0$. Дополнительное уравнение для схемы, показанной на рисунке 11.20а, будет $U_3^y = (0 - U_2^y)k_{OY}$; в результате получим $(G_1 + G_0 + C_n s)U_2^y + k_{OY}G_0 U_2^y = G_1 U_{вх}$, т. е. ХП цепи $(G_1 + G_0 + k_{OY}G_0) + C_n s = 0$, корень ХП.

$$s_1 = -(G_1 + G_0 + k_{OY}G_0)/C_n < 0$$

расположен в левой полуплоскости и цепь устойчива.

В то же время дополнительное уравнение для схемы, показанной на рисунке 11.20б, $U_3^y = U_2^y k_{OY}$; откуда имеем

$$(G_1 + G_0 + C_n s)U_2^y - k_{OY}G_0 U_2^y = G_1 U_{вх},$$

т. е. ХП цепи $(-k_{OY}G_0 + G_0 + G_1) + C_n s = 0$,

корень ХП $s_1 = (k_{OY}G_0 - G_0 - G_1)/C_n > 0$ при больших значениях $k_{OY} > 0$ и, следовательно, цепь неустойчива.

Поэтому в общем случае сложных схем с ОУ необходимо анализировать влияние паразитных параметров ОУ на устойчивость цепи.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЛЬТРОВ

§ 12.1. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕАКТИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

12.1.1. Определение резонансных частот реактивных двухполюсников

Считаем, что R -элементы отсутствуют. Следовательно, в уставновившемся синусоидальном режиме входное сопротивление (проводимость) идеального LC -двуихполюсника (ДП) содержит только мнимую (реактивную) составляющую

$$Z_{LC}(j\omega) = jx(\omega); \quad Y_{LC}(j\omega) = jb(\omega) = \frac{1}{Z_{LC}},$$

причем очевидно, что

$$x(\omega) = \frac{-1}{b(\omega)}. \quad (12.1)$$

На частоте резонанса напряжений $\omega_{\text{рн}}$, когда $\text{Im } Z_{LC} = 0$, из (12.1) имеем

$$x(\omega_{\text{рн}}) = 0, \quad b(\omega_{\text{рн}}) = \infty, \quad (12.2)$$

т. е. LC -двуихполюсник эквивалентен короткозамкнутому участку цепи (КЗ), а на частоте резонанса токов $\omega_{\text{рт}}$, когда $\text{Im } Y_{LC} = 0$,

$$b(\omega_{\text{рт}}) = 0, \quad x(\omega_{\text{рт}}) = \infty, \quad (12.3)$$

при этом LC -двуихполюсник эквивалентен разорванному участку цепи — холостому ходу (ХХ).

Чтобы найти резонансные частоты, вначале записывают операторное сопротивление $Z_{LC}(s)$. Нули s_{0k} (т. е. корни числителя Z_{LC}) и полюсы s_k (т. е. корни знаменателя Z_{LC}) определяют резонансные частоты $\omega_{\text{рн}}$ и $\omega_{\text{рт}}$ (здесь k — номер корня).

Действительно, как показано в § 6.4, нули и полюсы входного сопротивления двухполюсника — это собственные частоты ДП (корни характеристических уравнений ДП) соответственно в режимах его КЗ и ХХ. Поскольку активных потерь в LC -ДП

нет, собственные частоты располагаются на мнимой оси комплексной плоскости, т. е. имеем нули $s_{0k} = j\omega_{0k} = j\omega_{ph}$, поскольку при этом $Z_{LC}(j\omega_{0k}) = 0$, что соответствует (12.2). Аналогично, полюсы будут $s_k = j\omega_k = j\omega_{pt}$, так как при этом $Z_{LC}(j\omega_k) = \infty$, что соответствует (12.3).

12.1.2. Свойства частотных характеристик реактивных двухполюсников

1. Мнимые частотные характеристики $x(\omega)$ и $b(\omega)$ являются нарастающими функциями, т. е. их производные будут

$$\frac{dx(\omega)}{d\omega} > 0, \quad \frac{db(\omega)}{d\omega} > 0. \quad (12.4)$$

Докажем (12.4) по крайней мере для ДП лестничной структуры. У простейших LC -двусполюсников, изображенных на рисунках 12.1а и 12.2а, соответственно имеем $x(\omega) = \text{Im } Z(j\omega) = \omega L - 1/(\omega C)$, $b(\omega) = \text{Im } Y(j\omega) = \omega C - 1/(\omega L)$.

На рисунке 12.1б (и соответственно 12.2б) представлены мнимые частотные характеристики (МЧХ) реактивного ДП, которые связаны соотношением (12.1). Из анализа МЧХ следует, что свойство (12.4) справедливо, как для L --, C -элементов, так и для их простейших соединений. Также очевидны следующие свойства нарастающих функций (НФ): а) сумма НФ дает НФ; б) функция, обратная НФ по значению и знаку, также НФ. При расчете $x(\omega)$ или $b(\omega)$ реактивных ДП лестничной структуры реализуются именно указанные операции: суммируют сопротивления (проводимости), либо их обращают.

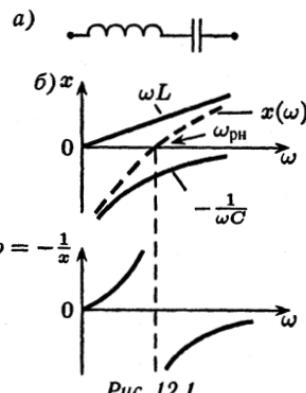


Рис. 12.1

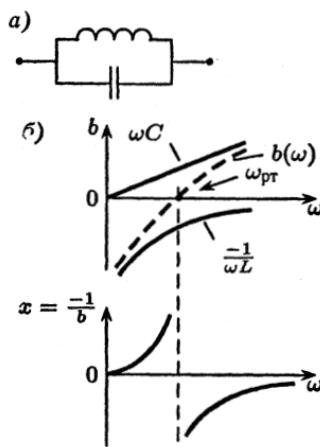


Рис. 12.2

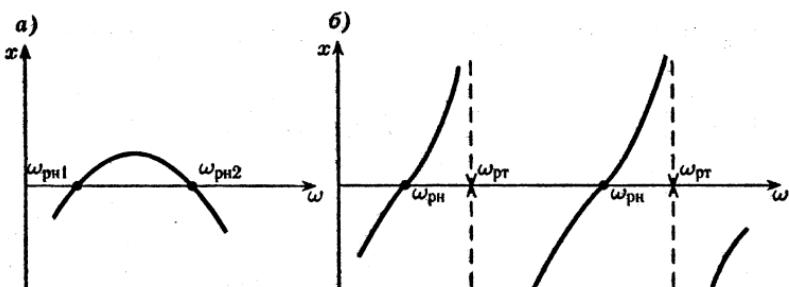


Рис. 12.3

2. У реактивных ДП частоты резонансов напряжений и токов чередуются.

Доказательство — от противного. Допустим, имеем подряд два резонанса напряжений на частотах ω_{ph1} , ω_{ph2} , где $x = 0$ согласно (12.2). Тогда график $x(\omega)$ обязан иметь вид, представленный на рисунке 12.3а. Однако в этом случае имеем зону частот, где $x'(\omega) < 0$, что противоречит свойству 1. Таким образом, на основании свойства 2 график МЧХ $x(\omega)$ или $b(\omega)$ должен соответствовать рисунку 12.3б.

3. Если на частотах, меньших резонансной, LC -ДП имел индуктивный (емкостной) характер, то на частотах, больших резонансной, ДП имеет емкостной (индуктивный) характер, т. е. «характер реактивности» LC -ДП меняется на противоположный.

Действительно, у LC -двухполюсника $\operatorname{Re} Z = r = 0$, т. е. угол сдвига фаз между синусоидами тока и напряжения ДП

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{x(\omega)}{r(\omega)} = \pm 90^\circ,$$

а $x(\omega)$ согласно рисунку 12.3б изменяет знак «после прохождения» резонансной частоты при изменении частоты ω .

4. На нулевой и бесконечной частотах Z_{LC} имеет либо нуль, либо полюс.

Действительно, при $\omega = 0$ сопротивления $Z_L = j\omega L = 0$, $Z_C = 1/(j\omega C) \rightarrow \infty$, т. е. L -элемент эквивалентен КЗ, а C -элемент эквивалентен ХХ; при $\omega \rightarrow \infty$ C -элемент эквивалентен КЗ, а L -элемент — ХХ, т. е. либо $Z_{LC} \rightarrow 0$, либо $Z_{LC} \rightarrow \infty$.

§ 12.2. СИММЕТРИЧНЫЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК В СОГЛАСОВАННОМ РЕЖИМЕ

12.2.1. Характеристическое сопротивление четырехполюсника и согласованная нагрузка

Если входное сопротивление $Z_{\text{вх}}(s)$ симметричного четырехполюсника (ЧП) равно сопротивлению его нагрузки $Z_{\text{н}}(s)$, такой режим называется согласованным (режимом характеристической нагрузки), а сопротивление $Z_{\text{н}}$ — характеристическим сопротивлением Z_{c} , т. е.

$$Z_{\text{c}} = Z_{\text{вх}} = Z_{\text{н}}. \quad (12.5)$$

Найдем Z_{c} , используя уравнения ЧП с a -параметрами:

$$U_1 = a_{11}U_2 + a_{12}(-I_2), \quad I_1 = a_{21}U_2 + a_{22}(-I_2), \quad (12.6)$$

где $U \equiv U(s)$, $I \equiv I(s)$. Уравнение нагрузки записывается как

$$U_2 = Z_{\text{н}}(-I_2). \quad (12.7)$$

Используя (12.6), (12.7), находим входное сопротивление симметричного ЧП

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{a_{11}Z_{\text{н}}(-I_2) + a_{12}(-I_2)}{a_{21}Z_{\text{н}}(-I_2) + a_{22}(-I_2)}.$$

С учетом (12.5) и условий симметрии ЧП

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \quad (12.8)$$

получим

$$Z_{\text{c}} = \frac{a_{11}Z_{\text{c}} + a_{12}}{a_{21}Z_{\text{c}} + a_{22}},$$

откуда формула для расчета характеристического сопротивления имеет вид

$$Z_{\text{c}} = \left(\frac{a_{12}}{a_{21}} \right)^{1/2} \quad (12.9)$$

12.2.2. Передаточная функция симметричного четырехполюсника в согласованном режиме

С учетом (12.5)–(12.7) и (12.9) функция передачи ЧП по напряжению

$$H_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{U_2}{a_{11}U_2 + a_{12}U_2/Z_{\text{c}}} = \frac{1}{a_{11} + (a_{12}a_{21})^{1/2}}. \quad (12.10)$$

Аналогично находим передаточную функцию по току:

$$H_I(s) = \frac{-I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{-I_2}{a_{21}Z_c(-I_2) + a_{22}(-I_2)} = \frac{1}{Z_c a_{21} + a_{22}},$$

откуда с учетом (12.8), (12.9) тоже получим (12.10).

ВЫВОД: у симметричного ЧП в согласованном режиме передаточные функции по напряжению и току одинаковы

$$H_U(s) = H_I(s) = \frac{1}{a_{11} + (a_{12}a_{21})^{1/2}} = e^{-\gamma}, \quad (12.11)$$

при этом так называемая характеристическая мера передачи симметричного ЧП будет следующей

$$\gamma(s) = \ln \left[a_{11} + (a_{12}a_{21})^{1/2} \right]. \quad (12.12)$$

Примечание. Формулы согласованного режима (12.9), (12.11) описываются иррациональными соотношениями, в то время как входные и передаточные функции *RLCM*-цепей описываются дробно-рациональными выражениями; поэтому точное согласование *RLCM*-четырехполюсников возможно лишь на конкретной частоте в установившемся синусоидальном режиме.

Рассмотрим частотные характеристики симметричного ЧП в установившемся синусоидальном режиме (при $s = j\omega$). Характеристическая мера передачи (12.12) при этом является комплексной функцией

$$\gamma(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega), \quad (12.13)$$

а обобщенные частотные характеристики в (12.11) записываются так:

$$H_U(j\omega) = H_I(j\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} = e^{-\gamma(j\omega)} = e^{-\alpha(\omega)}e^{-j\beta(\omega)},$$

т. е. амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) будет

$$A(\omega) = e^{-\alpha(\omega)} = \frac{|\dot{U}_2|}{|\dot{U}_1|} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_2}{I_1}, \quad (12.14)$$

а фазочастотная характеристика (ФЧХ) будет

$$\Phi(\omega) = -\beta(\omega) = \alpha_{u2} - \alpha_{u1}.$$

В (12.13) величину α называют коэффициентом затухания (иногда затуханием или характеристическим затуханием) и измеряют в неперах (Нп), а величину β — коэффициентом фазы.

Из (12.14) следует, что $\alpha = \ln(U_1/U_2)$ в установившемся синусоидальном режиме: если $\alpha = 1$ Нп, то $U_1/U_2 = e$; если же $\alpha = 3$ Нп, то $U_1/U_2 = e^3 \cong 20$. На практике коэффициент затухания очень часто измеряют в децибеллах (дБ) $\alpha = 20 \lg(U_1/U_2)$: если $\alpha = 20$ дБ, то $U_1/U_2 = 10$; при $\alpha = 40$ дБ имеем $U_1/U_2 = 100$.

12.2.3. Гиперболическая форма уравнений симметричного четырехполюсника

Величины Z_c , γ называют вторичными параметрами симметричного ЧП, так как с их помощью можно описать уравнения ЧП. Для этого вначале второе из соотношений (12.8) рассмотрим как разность квадратов:

$$\left[(a_{11}a_{22})^{1/2} - (a_{12}a_{21})^{1/2} \right] \left[(a_{11}a_{22})^{1/2} + (a_{12}a_{21})^{1/2} \right] = 1. \quad (12.15)$$

Поскольку на основании (12.11) второй сомножитель в (12.15) с учетом $a_{11} = a_{22}$

$$a_{11} + (a_{12}a_{21})^{1/2} = e^\gamma, \quad (12.16)$$

то первый сомножитель

$$a_{11} - (a_{12}a_{21})^{1/2} = e^{-\gamma}; \quad (12.17)$$

кроме того, на основании (12.8), (12.9) имеем

$$\left(\frac{a_{12}}{a_{21}} \right)^{1/2} = Z_c, \quad a_{11} = a_{22}. \quad (12.18)$$

Далее с использованием (12.16)–(12.18) и формул для описания гиперболических функций (гиперболических косинуса и синуса) выражаем a -параметры симметричного ЧП:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(e^\gamma + e^{-\gamma}) &= \operatorname{ch} \gamma = a_{11} = a_{22}, \\ \frac{1}{2}(e^\gamma - e^{-\gamma}) &= \operatorname{sh} \gamma = (a_{12}a_{21})^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (12.19)$$

откуда

$$Z_c \operatorname{sh} \gamma = a_{12}, \quad \frac{\operatorname{sh} \gamma}{Z_c} = a_{21}. \quad (12.20)$$

В результате с учетом (12.19), (12.20) можно записать гиперболическую форму уравнений симметричного ЧП:

$$\begin{cases} U_1(s) = U_2(s) \operatorname{ch} \gamma(s) - I_2(s) Z_c(s) \operatorname{sh} \gamma(s), \\ I_1(s) = U_2(s) \frac{\operatorname{sh} \gamma(s)}{Z_c} - I_2(s) \operatorname{ch} \gamma(s). \end{cases} \quad (12.21)$$

12.2.4. Использование сопротивлений холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника для расчета характеристических параметров

У симметричного ЧП сопротивления его короткого замыкания (при $U_2 = 0$) и холостого хода (при $I_2 = 0$) будут

$$\begin{cases} Z_{K3} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = 1/y_{11}, \\ Z_{XX} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = z_{11}, \end{cases} \quad (12.22)$$

а характеристическое сопротивление с учетом (12.8), (12.9) можно формально преобразовать к виду

$$Z_c = \left(\frac{a_{12}}{a_{21}} \right)^{1/2} = \left(\frac{a_{11}}{a_{21}} \cdot \frac{a_{12}}{a_{22}} \right)^{1/2}. \quad (12.23)$$

Находим сомножители в последнем варианте (12.23) с учетом (12.22) и уравнений ЧП (12.6):

$$\begin{cases} \frac{a_{11}}{a_{21}} = \left. \frac{U_1/U_2}{I_1/U_2} \right|_{I_2=0} = Z_{XX}; \\ \frac{a_{12}}{a_{22}} = \left. \frac{U_1/(-I_2)}{I_1/(-I_2)} \right|_{U_2=0} = Z_{K3}, \end{cases} \quad (12.24)$$

откуда получаем характеристическое сопротивление

$$Z_c = (Z_{XX} Z_{K3})^{1/2} = \left(\frac{z_{11}}{y_{11}} \right)^{1/2}. \quad (12.25)$$

Можно доказать, что второй характеристический параметр — характеристическая мера передачи

$$e^\gamma = \left(\frac{Z_{XX} + Z_c}{Z_{XX} - Z_c} \right)^{1/2}. \quad (12.26)$$

Действительно, преобразуем (12.26) с учетом (12.24), (12.23) и соотношений (12.16), (12.17):

$$\begin{aligned} e^\gamma &= \sqrt{\frac{a_{11}/a_{21} + (a_{12}/a_{21})^{1/2}}{a_{11}/a_{21} - (a_{12}/a_{21})^{1/2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{a_{11} + (a_{12}a_{21})^{1/2}}{a_{11} - (a_{12}a_{21})^{1/2}}} = \sqrt{\frac{e^\gamma}{e^{-\gamma}}}. \end{aligned}$$

§ 12.3. РАСЧЕТ КЛАССИЧЕСКИХ СИММЕТРИЧНЫХ РЕАКТИВНЫХ ФИЛЬТРОВ ПО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ

12.3.1. Понятие о фильтрах

Фильтром называется ЧП, у которого в некоторой полосе частот, находящейся обычно в районе максимума АЧХ $A(\omega)$ и называемой полосой пропускания (ПП) или зоной неискажения (зоной прозрачности), сигналы проходят на выход с малым затуханием α , а в остальной полосе частот, называемой полосой задерживания (ПЗ), сигналы на выход практически не проходят или проходят с большим затуханием.

При идеализации частотных характеристик фильтров часто используют понятие идеальных фильтров, у которых в ПП АЧХ $A(\omega) = k = \text{const}$ или $A(\omega) = 1$ (т. е. согласно (12.14) коэффициент затухания $\alpha = 0$), а в полосе задерживания $A(\omega) = 0$, т. е. $\alpha = \infty$. Идеальные фильтры физически не реализуемы, так как их частотная характеристика $H(j\omega)$ не является дробно-рациональной функцией частоты $j\omega$.

Классическим фильтром будем называть находящийся в согласованном режиме реактивный ЧП, у которого в полосе пропускания затухание $\alpha = 0$ (т. е. АЧХ постоянна), а в полосе задерживания $\alpha \neq 0$. Границные частоты полосы пропускания называют частотами среза $\omega_{\text{ср}}$.

Изложение материала начнем с классических симметричных фильтров типа k , у которых как схемы, так и физическая трактовка режимов наиболее просты.

Обычно фильтры классифицируют следующим образом.

1. Фильтры низких частот (ФНЧ) имеют ПП в области низких частот (НЧ) $0 \leq \omega \leq \omega_{\text{ср}}$, а ПЗ — в области высоких

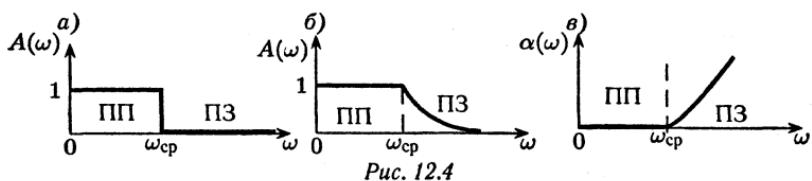


Рис. 12.4

частот (ВЧ) $\omega_{cp} \leq \omega < \infty$. На рисунке 12.4а приведена АЧХ идеального ФНЧ, на рисунке 12.4б — АЧХ так называемого классического фильтра типа k , на рисунке 12.4в — его коэффициент затухания; на рисунках 12.5а, б изображены соответственно Т-образная и П-образная схемы ФНЧ типа k .

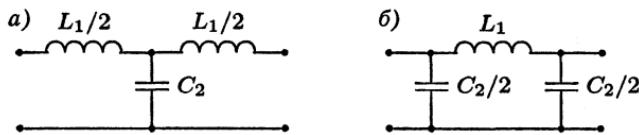


Рис. 12.5

Очевидна физическая трактовка этих схем при $\omega \rightarrow 0$ и при $\omega \rightarrow \infty$. Так, на рисунке 12.6а приведена эквивалентная схема цепи, изображенной на рисунке 12.5а, при $\omega \rightarrow 0$, а на рисунке 12.6б — при $\omega \rightarrow \infty$. Как видно, при $\omega \rightarrow 0$ сигналы к нагрузке Z_H проходят без затухания, а при $\omega \rightarrow \infty$ сигналы к нагрузке не проходят.

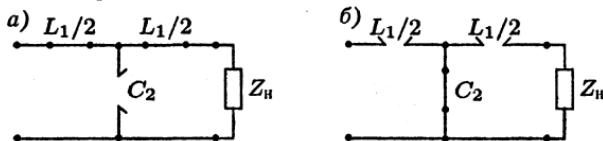


Рис. 12.6

2. Фильтры верхних частот (ФВЧ) имеют ПП на ВЧ, а ПЗ — на НЧ. АЧХ идеального ФВЧ изображена на рисунке 12.7а, АЧХ фильтра типа k — на рисунке 12.7б, а на рисунке 12.7в — его коэффициент затухания. На рисунке 12.8а приведена Т-образная схема ФВЧ, а на рисунках 12.8б, в — эквивалентные схемы ФВЧ при $\omega \rightarrow 0$ и при $\omega \rightarrow \infty$.

3. Полосовой пропускающий фильтр (ППФ) пропускает сигналы в некоторой полосе между частотами среза ω_{cp1} и ω_{cp2} . АЧХ идеального ППФ приведена на рисунке 12.9а, характеристики ППФ типа k — на рисунке 12.9б, в. Т-образная схема

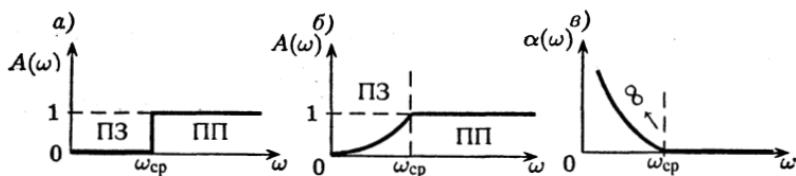


Рис. 12.7

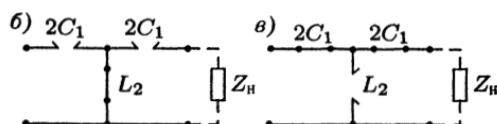
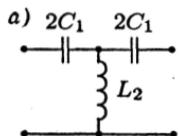


Рис. 12.8

ППФ типа k изображена на рисунке 12.10 a , причем резонансные частоты «продольного» и «поперечного» плеч ППФ одинаковы: $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$. Эквивалентные схемы ППФ при $\omega \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$, $\omega = \omega_0$ изображены соответственно на рисунке 12.10 b, δ, e . Поскольку на частоте резонанса напряжений (РН) последовательная LC -цепь эквивалентна КЗ, а на частоте резонанса токов (РТ) параллельная — ХХ, условия пропускания сигналов на указанных частотах очевидны.

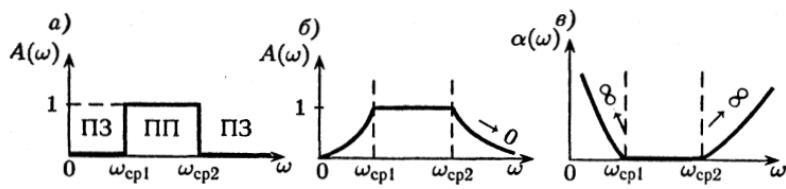


Рис. 12.9

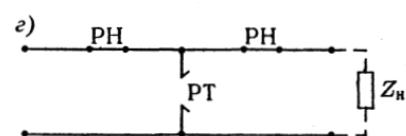
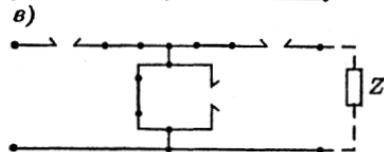
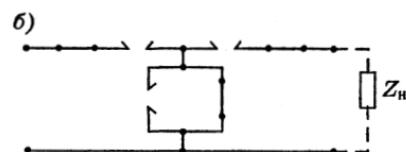
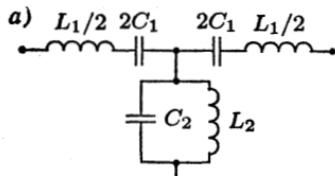


Рис. 12.10

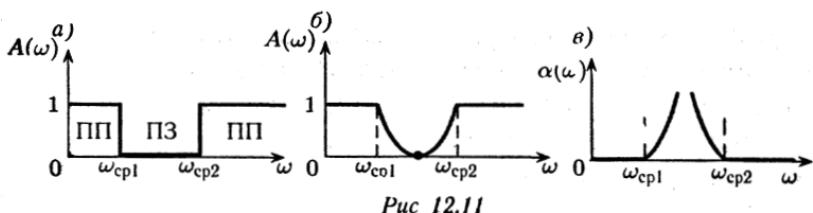


Рис. 12.11

4. Полосовой заграждающий фильтр (ПЗФ) в идеале не пропускает сигналы в некоторой области частот между $\omega_{\text{ср}1}$ и $\omega_{\text{ср}2}$ (см. рис. 12.11а). Характеристики ПЗФ типа k приведены на рисунке 12.11б,в, а схема на рисунке 12.12а, причем резонансные частоты одинаковы:

$$\omega_{\text{pt}} = 1/\sqrt{L_1 C_1} = \omega_{\text{ph}} = 1/\sqrt{L_2 C_2};$$

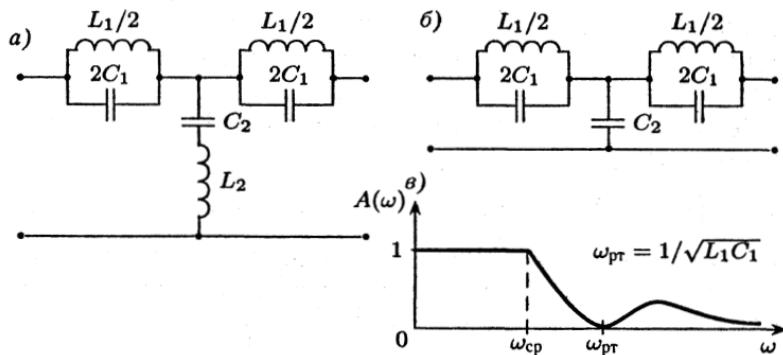


Рис. 12.12

Примечание. Кроме приведенных простых схем фильтров типа k , существуют классические фильтры типа m , у которых на дополнительной резонансной частоте в ПЗ вблизи от $\omega_{\text{ср}}$ АЧХ «проваливается» до нуля, благодаря чему АЧХ «лучше приближается» к идеальной (так, на рисунке 12.12б приведена схема ФНЧ типа m , а на рисунке 12.12в — его АЧХ).

12.3.2. Достаточные условия работы классического фильтра в полосе пропускания

Ограничимся рассмотрением условий достаточности.

1. Если у симметричного реактивного фильтра в согласованном установившемся синусоидальном режиме сопротивление нагрузки положительно, то фильтр работает в полосе пропускания.

Действительно, внутри LC -фильтра активных потерь нет; следовательно, потребляемая на входе фильтра активная мощность полностью расходуется в указанной характеристической нагрузке, т. е. $P_{\text{вх}} = P_{\text{н}}$ или с учетом $Z_{\text{н}} = Z_{\text{вх}} = Z_{\text{c}} = R_{\text{c}} > 0$

$$R_{\text{c}} I_1^2 = \frac{U_1^2}{R_{\text{c}}} = R_{\text{c}} I_2^2 = \frac{U_2^2}{R_{\text{c}}};$$

тогда $I_1 = I_2$, $U_1 = U_2$, АЧХ $A(\omega) = 1$, затухания нет ($\alpha = 0$), частота работы фильтра соответствует полосе пропускания.

ВЫВОД: классический фильтр предполагается нагруженным согласованно на любой частоте.

2. Если сопротивления симметричного ЧП Z_{XX} и Z_{KZ} «разнореактивны» (т. е. одно имеет чисто индуктивный характер, а другое — чисто емкостной), то такой фильтр работает в полосе пропускания.

Действительно, с учетом (12.25) и условия 1 имеем в полосе пропускания для LC -фильтра:

$$Z_{\text{c}} = [Z_{\text{XX}}(j\omega)Z_{\text{KZ}}(j\omega)]^{1/2} = [jx_{\text{XX}}(\omega)jx_{\text{KZ}}(\omega)]^{1/2} = R_{\text{c}} > 0,$$

следовательно, чтобы подкоренное выражение было положительным, значения x_{XX} и x_{KZ} должны быть различными по знаку (т. е. «разнореактивными»).

Следствия:

1. Если Z_{XX} и Z_{KZ} имеют одинаковый характер реакции, то фильтр работает в полосе задерживания.
2. Классический фильтр не может состоять из реактивных элементов одного вида (например, из L -элементов).

На практике полосу пропускания классического фильтра определяют следующим образом:

1. Находят операторные сопротивления $Z_{\text{XX}}(s)$ и $Z_{\text{KZ}}(s)$, а затем их нули s_{0k} и полюсы s_k .
2. Размечают s_{0k} и s_k на мнимой оси и на каждом частотном интервале между ними определяют характер реакции («реактивности») двухполюсника отдельно для Z_{XX} и для Z_{KZ} , как указано в 12.1.2; зоны, где характер реакции Z_{XX} и Z_{KZ} различен, определяют ПП.

12.3.3. Фильтр нижних частот типа k

Классический реактивный фильтр называется фильтром k -типа (рис. 12.4–12.12), если произведение сопротивлений его продольного $Z_1(j\omega)$ и поперечного $Z_2(j\omega)$ плеч на любой частоте равно постоянному положительному числу, обозначаемому k^2 .

Так, для ФНЧ типа k , схемы которых приведены на рисунке 12.5, выполняется

$$Z_1(j\omega)Z_2(j\omega) = j\omega L_1 \frac{1}{j\omega C_2} = L_1/C_2 = k^2. \quad (12.27)$$

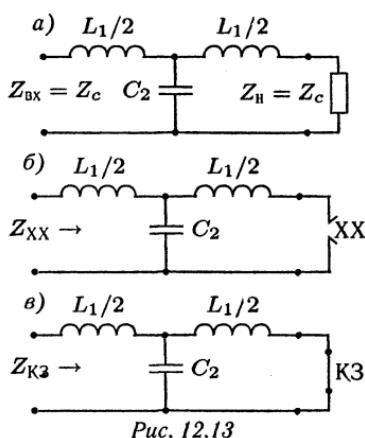


Рис. 12.13

Далее будем рассматривать лишь Т-схему ФНЧ в согласованном режиме (см. рис. 12.13a). В соответствии с методикой, изложенной в 12.3.2, найдем полосу пропускания. Схемы ФНЧ в режимах ХХ и КЗ приведены на рисунке 12.13б и 12.13в. Им соответствует

$$\begin{aligned} Z_{XX}(s) &= \frac{sL_1}{2} + \frac{1}{C_2 s} = \\ &= \frac{s^2 L_1 C_2 + 2}{2 s C_2}, \end{aligned} \quad (12.28)$$

откуда нули $s_{01,2} = \pm j\sqrt{2/(L_1 C_2)}$, полюсы $s_1 = 0$, $s_2 = \infty$. Затем находим

$$Z_{K3}(s) = \frac{sL_1}{2} + \left(sC_2 + \frac{2}{L_1 s} \right)^{-1} = \frac{L_1 s (s^2 L_1 C_2 + 4)}{2(s^2 L_1 C_2 + 2)}, \quad (12.29)$$

откуда нули $s_{01} = 0$, $s_{02,3} = \pm j2/\sqrt{L_1 C_2}$, полюсы $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2/(L_1 C_2)}$, $s_3 = \infty$.

Укажем нули и полюсы на мнимой оси комплексной плоскости отдельно для Z_{XX} и для Z_{K3} , как показано на рисунке 12.14a, где в соответствии со свойством 3 из 12.1.2 произведена также разметка частотных диапазонов с различным характером реакции ДП (чисто индуктивным или емкостным). В центре рисунка 12.14a заштрихована полоса пропускания

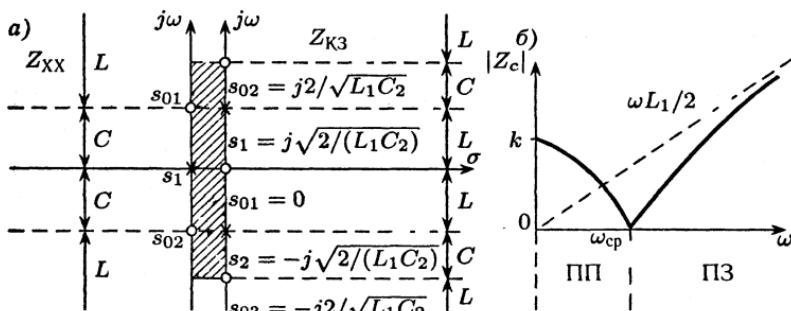


Рис. 12.14

фильтра, в которой Z_{XX} и Z_{K3} «разнореактивны». Итак, частота среза ФНЧ будет

$$\omega_{\text{cp}} = 2/\sqrt{L_1 C_2}. \quad (12.30)$$

Покажем, используя (12.28), (12.29), что характеристическое сопротивление ФНЧ существенно зависит от частоты уставновившегося синусоидального режима ($s = j\omega$).

$$Z_c(j\omega) = (Z_{\text{XX}} Z_{\text{K3}})^{1/2} = \left(\frac{L_1 (-\omega^2 L_1 C_2 + 4)}{4 C_2} \right)^{1/2},$$

откуда с учетом (12.27), (12.30) окончательно получим

$$Z_c(j\omega) = k \sqrt{1 - (\omega/\omega_{\text{cp}})^2}. \quad (12.31)$$

Построенный на основании (12.31) график зависимости $|Z_c(j\omega)|$ от частоты изображен на рисунке 12.14б, при этом $Z_c = R_c > 0$ в полосе пропускания, а в полосе задерживания характер $Z_c(j\omega)$ чисто индуктивный, что вытекает как из рисунка 12.14а, так и из трактовки $Z_{\text{вх}} = Z_c = Z_h$ на рисунке 12.13а при $\omega \rightarrow \infty$ (см. пунктирную прямую $\omega L_1/2$ на рисунке 12.14б).

ВЫВОД: характеристическое сопротивление $Z_c = Z_{\text{вх}} = Z_h$ классических фильтров не является дробно-рациональной функцией от частоты $j\omega$, вследствие чего невозможно согласовать нагрузку фильтра в бесконечном диапазоне частот, что является одним из основных недостатков классических фильтров (второй недостаток — сильная зависимость $|Z_c|$ от частоты в ПП).

Поэтому обычно обеспечивают согласование нагрузки фильтра на наиболее характерных частотах, например, для ФНЧ — при $\omega = 0$, когда на основании (12.31), (12.27)

$$Z_c(0) = R_h = k = \sqrt{L_1/C_2}; \quad (12.32)$$

далее, зная сопротивление нагрузки ФНЧ R_h и граничную частоту полосы пропускания ω_{cp} , определяют параметры элементов фильтра L_1 и C_2 согласно (12.30), (12.32).

§ 12.4. РАСЧЕТ ФИЛЬТРОВ МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТОТЫ

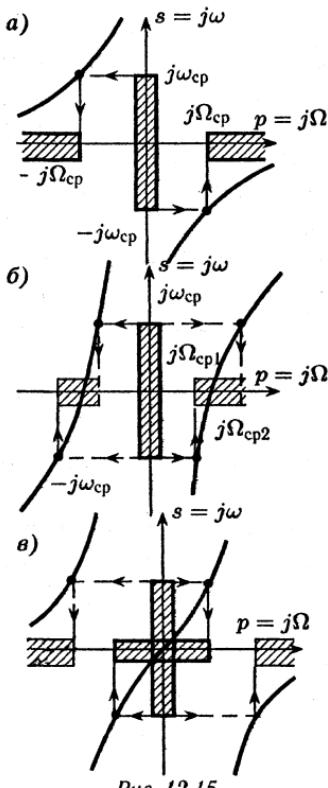


Рис. 12.15

С помощью методики, изложенной в п. 12.3.3, можно рассчитывать любые классические фильтры. Однако целесообразно, зная параметры ФНЧ, находить параметры фильтров остальных типов методом преобразования частоты.

Сравним характеристики ФНЧ и ФВЧ, показанные на рисунке 12.15а. Необходимо установившемуся синусоидальному режиме обобщенную частоту ФНЧ $s = j\omega$ преобразовать в обобщенную частоту ФВЧ $p = j\Omega$; при этом характерная частота ФНЧ $\omega = 0$ должна преобразоваться в характерную частоту ФВЧ $\Omega \rightarrow \infty$, а частота среза ФНЧ $\pm j\omega_{cp}$ — в частоту среза ФВЧ $\mp j\Omega_{cp}$. Формула такого преобразования может быть записана в любом из следующих вариантов:

$$s = \frac{\omega_0^2}{p}, \quad j\omega = \frac{\omega_0^2}{j\Omega}, \quad \omega = -\frac{\omega_0^2}{\Omega}, \quad (12.33)$$

причем кривая, которая описывается уравнением (12.33), также показана на рисунке 12.15а. Из условия пересчета частот среза находим коэффициент $\omega_0^2 = \omega_{cp}\Omega_{cp}$, (12.34)

а затем на основании (12.33) определяем параметры $C_{Bq} = C_1$, $L_{Bq} = L_2$ схемы ФВЧ (см. рис. 12.8а) по известным параметрам $L_1 = L_{Hq}$, $C_2 = C_{Hq}$ схемы ФНЧ:

$$sL_{Hq} = \frac{\omega_0^2}{p}L_{Hq} = \frac{1}{pC_{Bq}}, \quad sC_{Hq} = \frac{\omega_0^2}{p}C_{Hq} = \frac{1}{pL_{Bq}},$$

откуда

$$C_{Bq} = (\omega_0^2 L_{Hq})^{-1}, \quad L_{Bq} = (\omega_0^2 C_{Hq})^{-1}. \quad (12.35)$$

Таким образом, по формулам (12.34), (12.35), зная параметры фильтра-прототипа ω_{cp} , L_{Hq} , C_{Hq} и частоту среза Ω_{cp} , можно рассчитать параметры ФВЧ. Аналогично можно определить и другие характеристики ФВЧ по данным ФНЧ.

Рассмотрим далее преобразование характеристик ФНЧ и ППФ (см. рис. 12.15б). Обобщенная частота $s = j\omega$ ФНЧ должна пересчитываться к частоте $p = j\Omega$ ППФ, характеристическая частота $\omega \rightarrow \infty$ к характерным частотам $\Omega = 0$ и $\Omega \rightarrow \infty$, частота среза $|\omega_{cp}|$ к $|\Omega_{cp1}|$ и $|\Omega_{cp2}|$. Формула преобразования частоты имеет вид

$$s = \frac{p^2 + \omega_0^2}{ap}, \quad (12.36)$$

соответствующий указанному требованию: $s \rightarrow \infty$ и при $p \rightarrow 0$, и при $p \rightarrow \infty$.

Для отыскания параметров ω_0^2 и a необходимо, как указано на рисунке 12.15б, обеспечить преобразование частоты $s = j\omega_{cp}$ к частоте $p = j\Omega_{cp2}$, а $s = -j\omega_{cp}$ — к частоте $p = j\Omega_{cp1}$. Тогда из (12.36) получим

$$j\omega_{cp} = \frac{-\Omega_{cp2}^2 + \omega_0^2}{aj\Omega_{cp2}}, \quad -j\omega_{cp} = \frac{-\Omega_{cp1}^2 + \omega_0^2}{aj\Omega_{cp1}},$$

или

$$a\Omega_{cp2}\omega_{cp} = \Omega_{cp2}^2 - \omega_0^2, \quad a\Omega_{cp1}\omega_{cp} = -\Omega_{cp1}^2 + \omega_0^2,$$

откуда

$$a\omega_{cp}(\Omega_{cp2} + \Omega_{cp1}) = \Omega_{cp2}^2 - \Omega_{cp1}^2, \quad a\omega_{cp}\Omega_{cp1} + \Omega_{cp1}^2 = \omega_0^2.$$

Окончательно находим

$$a = \frac{\Omega_{\text{ср}2} - \Omega_{\text{ср}1}}{\omega_{\text{ср}}}; \quad \omega_0^2 = \Omega_{\text{ср}1}\Omega_{\text{ср}2}, \quad (12.37)$$

т. е. характерная частота ФНЧ $s = 0$ преобразуется согласно (12.36), (12.37) к частоте ППФ $p = \pm j\omega_0 = \pm j\sqrt{\Omega_{\text{ср}1}\Omega_{\text{ср}2}}$ и, как показано на рисунке 12.15б, находится между частотами среза $\Omega_{\text{ср}1}$, $\Omega_{\text{ср}2}$.

Параметры $L_{1\text{ПФ}}$, $C_{1\text{ПФ}}$ продольного плеча полосового пропускающего фильтра (см. рис. 12.10а) определяют из очевидного соотношения

$$sL_{\text{НЧ}} = \frac{p^2 + \omega_0^2}{ap} L_{\text{НЧ}} = \frac{pL_{\text{НЧ}}}{a} + \frac{\omega_0^2 L_{\text{НЧ}}}{ap} = pL_{1\text{ПФ}} + \frac{1}{pC_{1\text{ПФ}}},$$

откуда $L_{1\text{ПФ}} = L_{\text{НЧ}}/a$, $C_{1\text{ПФ}} = a(\omega_0^2 L_{\text{НЧ}})^{-1}$. Аналогично находят параметры поперечного плеча ППФ.

Характеристики ПЗФ определяют по данным ФНЧ, как указано на рисунке 12.15в, на основании преобразования

$$s = \frac{ap}{p^2 + \omega_0^2}, \quad (12.38)$$

причем $a = (\Omega_{\text{ср}2} - \Omega_{\text{ср}1})\omega_{\text{ср}}$; $\omega_0^2 = \Omega_{\text{ср}1}\Omega_{\text{ср}2}$.

Примечание. Формулы преобразования частоты (12.33), (12.36), (12.38) справедливы не только для классических фильтров, но и для фильтров других типов; сопротивление нагрузки R_n не изменяется.

§ 12.5. ФИЛЬТРЫ БАТТЕРВОРТА

12.5.1. Сравнение характеристик идеальных и полиномиальных фильтров

Как указано в п. 12.3.3, классические фильтры согласованы с нагрузкой лишь на конкретных (характерных) частотах. В остальном частотном диапазоне режим работы фильтра оказывается несогласованным. В результате требуемые характеристики фильтра в ПП ($\alpha = 0$, АЧХ $A = \text{const}$) существенно искажаются. Поэтому в современной теории фильтров широко используется иной подход, когда задают сопротивление нагрузки и требуемую передаточную функцию (или частотную характеристику) фильтра. В дальнейшем будем рассматривать

лишь ФНЧ, так как остальные типы фильтров можно получить методом преобразования частоты по ФНЧ-прототипу.

Как указано в п. 12.3.1, при проектировании фильтров стремится приблизиться к ЧХ идеального ФНЧ (см. рис. 12.4a), АЧХ которого

$$|H_{\text{ид}}(j\omega)| = A_{\text{ид}}(\omega) = \begin{cases} k, & |\omega| < \omega_{\text{ср}} \\ 0, & |\omega| > \omega_{\text{ср}} \end{cases} \quad (12.39)$$

не может быть реализована *RLCM*-цепями. Поэтому приходится использовать аппроксимацию (12.39) такими выражениями, которые можно реализовать цепью (решив тем самым задачу синтеза фильтра).

Рассмотрим наиболее простые из таких фильтров — полиномиальные, передаточная функция (ПФ) которых имеет вид

$$H(s) = \frac{b_0}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots + a_n s^n}, \quad (12.40)$$

причем ниже для определенности будем анализировать лишь ПФ по напряжению. Наиболее простыми (и вместе с тем фундаментальными с позиций теории) являются следующие 2 типа аппроксимации идеальной АЧХ при использовании ПФ (12.40): фильтры Баттервортса (рис. 12.16a), когда используют монотонную так называемую максимально плоскую аппроксимацию $A(\omega)$ идеальной АЧХ, и фильтры Чебышева (рис. 12.16б), когда применяют так называемую равномерную аппроксимацию $A(\omega)$ идеальной АЧХ в полосе пропускания. На рисунке 12.16a использован критерий ширины ПП по уровню 0,707 от $A_{\text{max}} = k$, а на рисунке 12.16б в ПП $A(\omega)$ не выходит из зоны между k

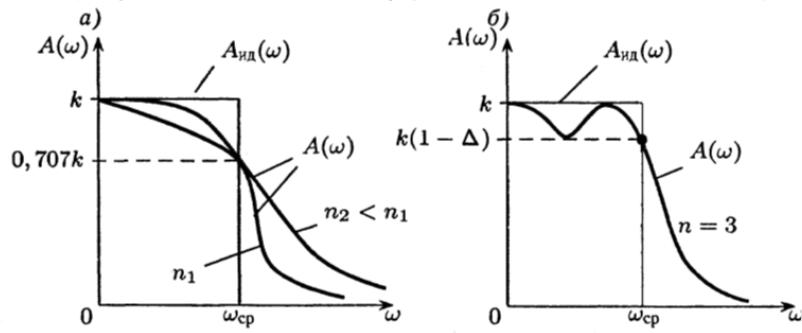


Рис. 12.16

и $k(1 - \Delta)$, причем Δ — заданная достаточно малая величина (называемая неравномерностью АЧХ), n — порядок ПФ (12.40) определяет число экстремумов в ПП на рисунке 12.16б.

С ростом порядка n АЧХ фильтра приближается к идеальной, однако реализация усложняется.

12.5.2. Передаточные функции фильтров Баттервортса

Найдем АЧХ полиномиальных фильтров (12.40):

$$H(j\omega) = \frac{b_0}{(1 - a_2\omega^2) + j\omega(a_1 - a_3\omega^2) + \dots},$$

откуда

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |H(j\omega)| = \\ &= \frac{b_0}{\sqrt{(1 - 2a_2\omega^2 + a_2^2\omega^4 + \dots) + (a_1^2\omega^2 - 2a_1a_3\omega^4 + a_3^2\omega^6 + \dots)}}. \end{aligned} \quad (12.41)$$

У фильтров Баттервортса (см. рис. 12.16а) используется аппроксимация АЧХ идеального фильтра монотонно убывающей функцией вида

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{cp})^{2n}}}, \quad (12.42)$$

т. е. на границе ПП будет $A(\omega_{cp}) = k/\sqrt{2}$.

Применяем нормировку (масштабирование) по частоте и со- противлению нагрузки, считая базисными значения $\omega_b = \omega_{cp}$. $R_b = R_h$. Тогда нормированные значения согласно п. 5.5.3

$$R_{h*} = \frac{R_h}{R_b} = 1, \quad \omega_* = \frac{\omega}{\omega_{cp}}, \quad L_* = \frac{\omega_b L}{R_h}, \quad C_* = \omega_b C R_h, \quad (12.43)$$

в результате вместо (12.42) получим

$$A(\omega_*) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega_*^{2n}}}, \quad (12.44)$$

т. е. нормированная частота среза $\omega_{cp*} = 1$.

В дальнейшем для простоты опускаем индекс нормирования (*), считая записанные выражения нормированными; при необходимости можно вернуться к ненормированным значениям, используя формулы (12.43).

Приравнивая (12.41) и (12.44), находим, например, при $n = 3 : b_0 = k, a_1 = a_2 = 2; a_3 = 1$ (поскольку $-2a_2 + a_1^2 = 0; a_2^2 - 2a_1a_3 = 0; a_3 = 1$, следовательно, $a_2 = a_1^2/2$, тогда $a_1^4/4 - 2a_1 = 0$, т. е. $a_1^3 = 8$). Итак, при $n = 3$ ПФ фильтра Баттервортса (12.40) будет следующей

$$H(s) = \frac{k}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}. \quad (12.45)$$

Примечание. Полиномы знаменателя (12.40) в случае (12.44) называют полиномами Баттервортса; они приведены в справочниках для фильтров различного порядка, например, $(1+s)$ при $n = 1$, $(1 + \sqrt{2}s + s^2)$ при $n = 2$, $(1 + 2s + 2s^2 + s^3)$ при $n = 3$.

12.5.3. Реализация фильтров Баттервортса

Рассмотрим некоторые варианты реализации фильтров Баттервортса на примере ПФ (12.45). Задача реализации имеет множество решений. Однако, поскольку ПФ (12.45) не имеет нулей, кроме трехкратного нуля при $s \rightarrow \infty$, структура фильтра Баттервортса должна быть во многом аналогична схемам ФНЧ, приведенным на рисунке 12.5.

Для случая $k = 1$ на рисунке 12.17а приведен вариант схемы фильтра, ПФ которого, найденная, например, методом пропорциональных величин, имеет вид

$$H(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{1}{L_1 L_2 C s^3 + CL_1 s^2 + (L_1 + L_2)s + 1}.$$

Из сравнения с (12.45) имеем: $L_1 L_2 C = 1, CL_1 = 2$ (откуда $L_2 = 1/2$), $L_1 + L_2 = 2$; следовательно, $L_1 = 3/2, C = 4/3$.

Если выходное сопротивление эквивалентного источника должно быть согласовано с сопротивлением нагрузки (т. е. $k = 0,5$), может быть использована схема, изображенная на

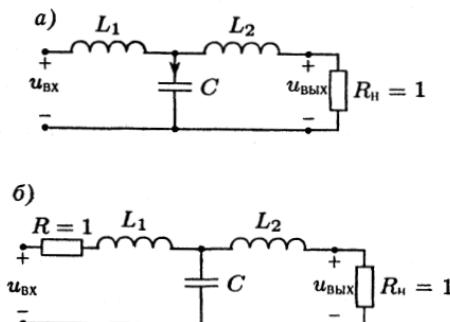


Рис. 12.17

рисунке 12.17б, расчет которой аналогично предыдущей дает $L_1 = L_2 = 1, C = 2$.

Примечание. На практике порядок n фильтра Баттервортча часто определяется по требуемому затуханию на нормированной частоте $\omega_* = 2$ в полосе задерживания, где согласно (12.44) АЧХ $A(2) = k/\sqrt{1+2^{2n}} \cong k/2^n$; так, при $n = 3$ имеем $A(2) \cong k/8$, т. е. входной сигнал ослабляется в 8 раз в сравнении с входным.

§ 12.6. ФИЛЬТРЫ ЧЕБЫШЕВА

12.6.1. Частотные характеристики фильтров Чебышева

Общий вид АЧХ фильтра Чебышева 3-го порядка описан в п. 12.5.1 и представлен на рисунке 12.16б. Нормированные АЧХ фильтров 3-го и 2-го порядков в предположении $k = 1$ изображены, соответственно, на рисунке 12.18а, б.

Фильтр Чебышева как полиномиальный имеет ПФ вида (12.40) с АЧХ (12.41), которая обычно аппроксимирует АЧХ идеального фильтра следующей нормированной функцией:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 D_n^2(\omega)}}, \quad (12.46)$$

где D_n — полином Чебышева порядка n , причем

$$\begin{cases} D_0 = 1, & D_1 = \omega, & D_2 = 2\omega^2 - 1, \\ D_3 = 4\omega^3 - 3\omega, \dots, & D_n(\omega) = 2\omega D_{n-1}(\omega) - D_{n-2}(\omega), \dots \end{cases} \quad (12.47)$$

Следует отметить, что полиномы Чебышева описываются соотношениями

$$D_n(\omega) = \operatorname{ch}(n \operatorname{arcch} \omega), \quad (12.48)$$

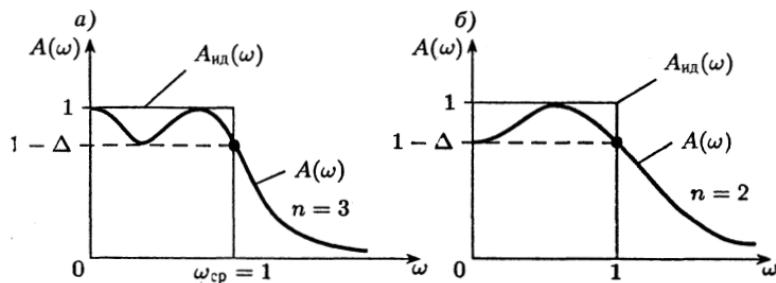


Рис. 12.18

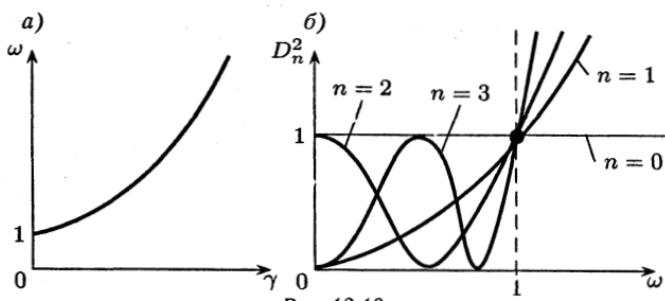


Рис. 12.19

которые для ФНЧ в ПП (при $0 < \omega < 1$) приводятся к виду

$$D_n(\omega) = \cos(n \arccos \omega), \quad (12.49)$$

поскольку согласно (12.19) графику «гиперболического косинуса», приведенному на рисунке 12.19.а, при $0 < \omega < 1$ имеем в (12.48) $\gamma = \operatorname{arcch} \omega = j\beta$, $\operatorname{ch}(j\beta) = \cos \beta = \omega$. Отсюда несложно получить (12.49) и полиномы (12.47) при $n = 1, 2, 3, \dots$. Так как при $0 < \omega < 1$ имеем $|D_n(\omega)| = |\cos n\gamma| \leq 1$, то графики квадратов полиномов Чебышева в ПП изменяются от 0 до 1 (как качественно показано на рисунке 12.19б), а при $\omega > 1$ возрастают с увеличением частоты ω и порядка n , откуда и вытекает вид АЧХ фильтров Чебышева на рисунке 12.18 при малых ε^2 в (12.46).

Из рисунка 12.19б и формулы (12.47) следует, что на границе ПП полиномы Чебышева $D_n(1) = 1$; следовательно, АЧХ фильтра (12.46) при этом

$$A(1) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \cong 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} = 1 - \Delta, \quad (12.50)$$

причем в записи (12.50) использованы в предположении малых ε^2 первые два члена разложения функции в ряд Тейлора в окрестности $\varepsilon^2 = 0$, т. е. приближенные соотношения $\sqrt{1 + \beta} \cong 1 + \beta/2$, $1/(1 + \delta) \cong 1 - \delta$ при малых β, δ . Таким образом, задаваясь требуемой неравномерностью Δ в ПП, находим $\varepsilon^2 \cong 2\Delta$.

Порядок n полинома Чебышева находят, как и у фильтров Баттерворта, по требуемому затуханию в полосе задерживания обычно при $\omega_* = 2$, т. е. при $\omega = 2\omega_{cp}$, с учетом (12.48) из

$$A(2) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 D_n^2(2)}} \cong \frac{1}{\varepsilon D_n(2)} = \frac{1}{\varepsilon \operatorname{ch}(1,32n)}, \quad (12.51)$$

причем при одинаковом порядке n спад АЧХ фильтра Чебышева в ПЗ больше, чем у фильтра Баттервортса. Так, при $n = 3$ и неравномерности $\Delta = 0,1$, соответствующей $\varepsilon = \sqrt{0,2}$ имеем согласно (12.47) $D_3(2) = 4\omega^3 - 3\omega = 26$, откуда на основании (12.51) $A(2) \cong (26\sqrt{0,2})^{-1} < 1/8$, т. е. сигналы ослабляются сильнее, чем в аналогичном примере в п. 12.5.3. При этом из анализа рисунка 12.16 (при $\Delta = 0,1$) следует, что и в ПП отличие АЧХ фильтра Чебышева от идеальной АЧХ представляется меньшим, чем у фильтра Баттервортса.

12.6.2. Реализация фильтров Чебышева

Определив параметр ε^2 и полином D_n , записываем ПФ фильтра Чебышева в виде (12.40) и по ней реализуем схему фильтра.

Рассмотрим простейший пример реализации фильтра порядка $n = 2$ при неравномерности $\Delta = 0,05$, откуда согласно (12.50) $\varepsilon^2 = 2\Delta = 0,1$. Используя (12.47), определяем на основании (12.46) выражение для квадрата АЧХ фильтра

$$A^2(\omega) = \frac{1}{1 + 0,1(2\omega^2 - 1)^2} \cong \frac{0,9}{1 - 0,36\omega^2 + 0,36\omega^4}. \quad (12.52)$$

С другой стороны, согласно (12.40) для полиномиального фильтра второго порядка можем записать

$$H(s) = \frac{k}{1 + a_1 s + a_2 s^2}, \quad H(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega a_1 - \omega^2 a_2^2},$$

откуда квадрат АЧХ получаем аналогично (12.41)

$$A^2(\omega) = |H(j\omega)|^2 = \frac{k^2}{1 + \omega^2 (a_1^2 - 2a_2) + \omega^4 a_2^2}. \quad (12.53)$$

Из равенства (12.52) и (12.53) находим $k \cong 0,95$; $a_2 \cong 0,6$; $a_1 \cong 0,9$. Итак, приближенно ПФ фильтра Чебышева будет

$$H(s) \cong \frac{0,95}{1 + 0,9s + 0,6s^2}.$$

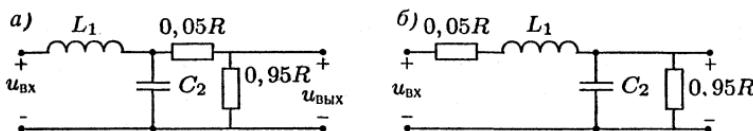


Рис. 12.20

Таким образом, фильтр должен быть реализован цепью второго порядка, которая обеспечивает два нуля передачи на бесконечной частоте, а на нулевой частоте имеет коэффициент передачи $H(0) = 0,95$. Два очевидных варианта схемы приведены на рисунке 12.20 a,b . Использовав, например указанную в п. 12.5.3 методику, несложно найти параметры схем.

НАЧАЛА СИНТЕЗА ЦЕПЕЙ

§ 13.1. СИНТЕЗ РЕАКТИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Как известно, в задаче синтеза необходимо при заданных $f_{\text{вх}}(t)$ и $f_{\text{вых}}(t)$ найти структуру цепи и ее параметры. Задачу синтеза обычно делят на две:

1. Задачу аппроксимации заданной передаточной $H(s)$ или входной $Z(s)$ функций цепи таким выражением, которое можно практически реализовать.
2. Собственно задачу реализации ПФ цепью.

13.1.1. Основное свойство реактивных двухполюсников

С позиции синтеза $Z_{LC}(s)$ важнейшим свойством является следующее: входное сопротивление реактивных двухполюсников описывается дробно-рациональной функцией (с положительными коэффициентами) обобщенной частоты s , причем нули и полюсы $Z_{LC}(s)$ располагаются на мнимой оси, они чередуются и являются простыми (некратными).

Очевидно, что это свойство полностью следует из 12.1.2. Таким образом, возможны лишь 2 варианта записи $Z_{LC}(s)$:

1. В начале координат располагается полюс $Z_{LC}(s)$, т. е.

$$Z_{LC}(s) = \frac{k(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega_2^2)\dots}{s(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2)\dots}, \quad (13.1)$$

где $\omega_0 = 0 < \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots$; k — коэффициент.

2. В начале координат — нуль, т. е.

$$Z_{LC}(s) = \frac{ks(s^2 + \omega_{01}^2)(s^2 + \omega_{02}^2)\dots}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)\dots}, \quad (13.2)$$

где $\omega_{00} = 0 < \omega_1 < \omega_{01} < \omega_2 < \omega_{02} < \dots$.

Следует отметить, что в (13.1), (13.2) порядок полинома числителя отличается от порядка знаменателя на единицу, что вытекает из требования некратности полюса или нуля «в бесконечности» (при $s \rightarrow \infty$).

13.1.2. Условие реализуемости $Z(s)$ в виде реактивного двухполюсника

Если некоторое входное сопротивление $Z(s)$ удовлетворяет основному свойству $Z_{LC}(s)$, то $Z(s)$ можно реализовать LC -двусполюсником.

Для доказательства этого условия реализуемости вначале преобразуем (13.1) и (13.2):

1. Если в начале координат — полюс, то согласно (13.1)

$$Z_1(s) = ks \left[\frac{(s^2 + \omega_{01}^2)(s^2 + \omega_{02}^2)\dots}{s^2(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)\dots} \right] = ks \left[\frac{B_1(s^2)}{D_1(s^2)} \right], \quad (13.3)$$

причем значения $\omega_{01}^2 < \omega_1^2 < \omega_{02}^2 < \omega_2^2 < \dots$ определяют отрицательные корни числителя и знаменателя выражения в квадратных скобках (при замене $s^2 = p$):

$$\omega_{01}^2 = -\omega_{01}^2 > s_1^2 = -\omega_1^2 > s_{02}^2 = -\omega_{02}^2 > \dots;$$

кроме того, выражение $B_1(p)/D_1(p)$ при $p = s^2$ имеет еще полюс в начале координат $p_0 = s_0^2 = 0$.

2. Если же преобразуется (13.2), то

$$Z_2(s) = ks \left[\frac{(s^2 + \omega_{01}^2)(s^2 + \omega_{02}^2)\dots}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)\dots} \right] = ks \left[\frac{B_2(s^2)}{D_2(s^2)} \right], \quad (13.4)$$

где значения $s_1^2 = -\omega_1^2 > s_{01}^2 = -\omega_{01}^2 > s_2 = -\omega_2^2 > \dots$ определяют отрицательные чередующиеся нули и полюсы функции $B_2(p)/D_2(p)$ при $p = s^2$.

Заменяя условно $s^2 = p$, разложим выражения в квадратных скобках в (13.3), (13.4) на простейшие дроби на основании теоремы разложения преобразования Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{B_1(s^2)}{D_1(s^2)} &= A_\infty + \frac{A_0}{s^2} + \sum \frac{A_k}{s^2 + \omega_k^2}; \\ \frac{B_2(s^2)}{D_2(s^2)} &= A_\infty + \sum \frac{A_k}{s^2 + \omega_k^2}. \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

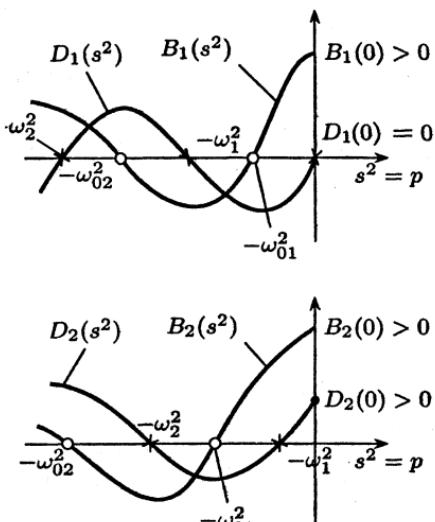


Рис. 13.1

Очевидно, что коэффициенты A_∞ и A_0 положительны (возможно, что $A_\infty = 0$, если степень числителя ниже степени знаменателя). Докажем, что остальные коэффициенты A_k в (13.5) тоже положительны. Для этого качественно построим графики полиномов $B(s^2)$, $D(s^2)$, как показано на рисунке 13.1 с учетом чередования нулей и полюсов в функциях (13.1), (13.2), а следовательно, и в (13.5).

Из теоремы разложения преобразования Лапласа известно, что коэффициенты A_k можно находить по формулам

$$A_k = (s^2 + \omega_k^2) \frac{B(s^2)}{D(s^2)} \Big|_{s^2 = -\omega_k^2} = \frac{B(s^2)}{\frac{dD(s^2)}{ds^2}} \Big|_{s^2 = -\omega_k^2}.$$

Воспользовавшись второй формулой, заключаем, что $A_k > 0$, поскольку из рисунка 13.1 следует, что в полюсах $p = s^2 = -\omega_k^2$ значения $B(s^2)$ и $dD(s^2)/ds^2$ имеют одинаковые знаки.

Доказанная положительность коэффициентов в разложениях (13.5) фактически обосновывает реализуемость $Z(s)$ реактивным ДП, как показано ниже, в п. 13.1.3.

13.1.3. Реализация реактивных двухполюсников разложением $Z_{LC}(s)$ на простейшие составляющие

Пусть подлежащее реализации сопротивление $Z(s)$ удовлетворяет основному свойству $Z_{LC}(s)$. Рассмотрим самый общий случай, когда $Z_{LC}(s)$ имеет полюсы и «в нуле» (при $s = 0$) и «в бесконечности» (при $s \rightarrow \infty$). Тогда разложение $Z(s)$ на простые дроби имеет вид с учетом (13.5) и вынесенного множителя s в (13.3), (13.4):

$$Z(s) = Z_{LC}(s) = A_\infty s + \frac{A_0}{s} + \sum \frac{A_k s}{s^2 + \omega_k^2} = \\ = Z_\infty + Z_0 + \sum Z_k, \quad (13.6)$$

при этом коэффициенты разложения (13.6) отыскиваем по аналогии с формулами преобразования Лапласа

$$A_\infty = \left. \frac{Z_{LC}(s)}{s} \right|_{s \rightarrow \infty}, \\ A_0 = \left. s Z_{LC}(s) \right|_{s \rightarrow 0}, \\ A_k = \left. \frac{s^2 + \omega_k^2}{s} Z_{LC}(s) \right|_{s^2 = -\omega_k^2}.$$

причем все коэффициенты, как доказано 13.1.2, положительны.

Схема, соответствующая (13.6), — это последовательное соединение сопротивлений (см. рис. 13.2a), причем

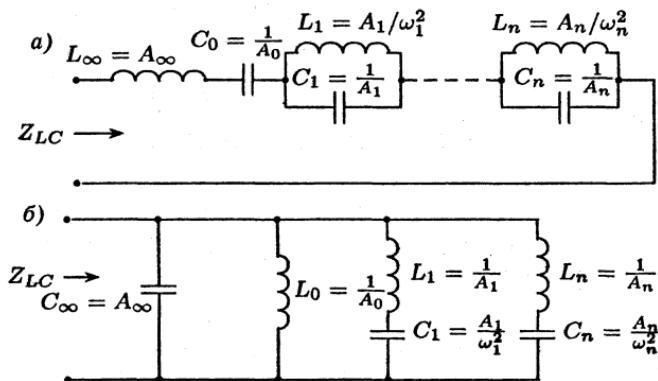


Рис. 13.2

$Z_\infty = A_\infty s = L_\infty s$ определяет индуктивный элемент, $Z_0 = A_0/s = 1/(C_0 s)$ определяет C -элемент, а сопротивление

$$Z_k = \frac{A_k s}{s^2 + \omega_k^2} = \frac{1}{Y_k} = \frac{1}{\frac{s}{A_k} + \frac{\omega_k^2}{A_k s}} = \frac{1}{C_k s + \frac{1}{L_k s}} = \frac{1}{Y_{k1} + Y_{k2}}$$

определяет параллельное соединение элементов C_k и L_k .

Сопротивление ДП $Z_{LC}(s)$ можно реализовать по выражению его проводимости, использовав схему параллельного соединения проводимостей (как показано на рисунке 13.2б), значения которых определяются дуально (13.6):

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{LC}(s)} &= Y_{LC}(s) = A_\infty s + \frac{A_0}{s} + \sum \frac{A_k s}{s^2 + \omega_k^2} = \\ &= Y_\infty + Y_0 + \sum Y_k. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Примечание. Реализация реактивных ДП разложением $Z_{LC}(s)$ на простейшие дроби (13.6), (13.7) называется реализацией по Фостеру.

13.1.4. Множество вариантов реализации LC -двухполюсников

Операторное сопротивление $Z(s)$, удовлетворяющее основному свойству $Z_{LC}(s)$, может быть реализовано по-разному:

1. Разложением на простейшие дроби (13.6), т. е. схемой последовательного соединения простых ДП.
2. Разложением (13.7), т. е. схемой параллельного соединения.
3. Часть $Z_{LC}(s)$ реализуется схемой $Z_I(s)$ последовательного соединения простых ДП, остальная часть $Z_{II}(s)$, т. е. остаток $Z_{LC}(s)$, обращается и реализуется как параллельное соединение $Y_{II}(s) = 1/Z_{II}(s)$, например,

$$Z_{LC}(s) = \left(A_\infty s + \frac{A_0}{s} \right) + \left(\sum \frac{A_k s}{s^2 + \omega_k^2} \right) = Z_I + Z_{II}, \quad (13.8)$$

причем подобное разделение Z_{LC} на «укрупненные» составляющие можно совершать по-разному и многократно на любой стадии реализации.

4. Можно реализовать отдельные составляющие в (13.6), (13.7) частично (т. е. не полностью), а остаток обращать, реализовывать частично и далее повторять эту процедуру, например,

$$Z_{LC} = \left(\frac{1}{3} A_\infty s + \frac{0,5 A_0}{s} \right) + \\ + \left(\frac{2}{3} A_\infty s + \frac{0,5 A_0}{s} + \sum \frac{A_k s}{s^2 + \omega_k^2} \right) = Z_I + Z_{II}.$$

Примечание. Большое распространение получила так называемая реализация по Кауэру, которая фактически является вариантом (13.8), когда в виде Z_I реализуется только составляющая (13.6), соответствующая, например, $A_\infty s$, т. е. полюс «в бесконечности» (или A_0/s , т. е. полюсу «в нуле»); остаток Z_{II} , естественно, имеет теперь «в бесконечности» нуль (см. свойство 4 из п. 12.1.2), т. е. после обращения остатка проводимость $Y_{II} = 1/Z_{II}$ будет иметь «в бесконечности» опять полюс, который выделяется как проводимость $Y_2 = A_\infty s$; остаток $Y_{II} - Y_2 = Y_{III}$ вновь обращается и т. д. процедура повторяется до полной реализации остатка; в результате формируется схема лестничной структуры.

ПРИМЕР 1. Для примера реализуем $Z(s) = 0,5s(s^2+2)/(s^2+1)$.

Поскольку нули и полюсы $Z(s)$ расположены на мнимой оси, чередуются и являются простыми, как показано на рисунке 13.3a, то $Z(s) = Z_{LC}(s)$.

Используем вариант реализации по Кауэру с выделением полюса «в бесконечности».

Процедура реализации часто называется «делением по старшим степеням» с многократным обращением остатка и поясняется нижеприведенным расчетом:

$$\frac{0,5s^3 + s}{s^2 + 1} = 0,5s + \frac{1}{(s^2 + 1)/(0,5s)} = \\ = 0,5s + \frac{1}{2s + 1/(0,5s)}.$$

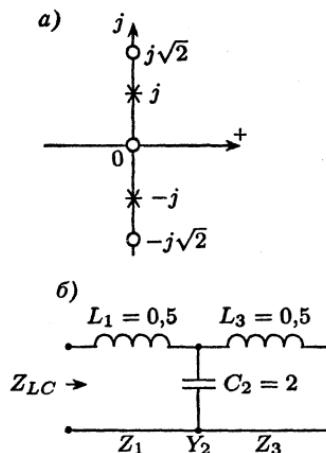


Рис. 13.3

После первого деления Z_{LC} «по старшим степеням» выделена составляющая $Z_I = 0,5s$, соответствующая схеме последовательного соединения, как показано на рисунке 13.3б. Остаток $Z_{II} = 0,5s/(s^2 + 1)$ обращен, т. е. сделан переход к проводимости $Y_{II} = 1/Z_{II}$ и вновь делением «по старшим степеням» выделена составляющая $Y_2 = 2s$, соответствующая теперь уже схеме параллельного соединения. Остаток $Y_{III} = Y_{II} - Y_2 = 1/(0,5s)$ вновь обращен и в результате последнего деления получена составляющая $Z_{III} = 0,5s$.

§ 13.2. СИНТЕЗ RC -ДВУХПОЛЮСНИКОВ

13.2.1. Соответствие сопротивлений RC - и LC -двуихполюсников

Рассмотрим RC -двуихполюсник произвольной структуры, подключенный к источнику напряжения $u_1(t)$, который входит только в контур № 1. Тогда изображение входного тока будет на основании МКТ

$$I_1(s) = \begin{vmatrix} U_1 & Z_{12} & Z_{13} & \dots \\ 0 & Z_{22} & Z_{23} & \dots \\ 0 & Z_{32} & Z_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \dots \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \dots \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \frac{U_1 \Delta_{11}}{\Delta_{\text{МКТ}}}.$$

Отсюда получим входное сопротивление RC -двуихполюсника

$$Z_{RC}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{\Delta_{\text{МКТ}RC}(s)}{\Delta_{11RC}(s)}. \quad (13.9)$$

При этом взаимные и собственные сопротивления в определителях (13.9) имеют вид

$$Z_{RCmn}(s) = R_{mn} + \frac{1}{C_{mn}s}, \quad (13.10)$$

где R_{mn} и C_{mn} — результирующие сопротивления и емкости во взаимных или собственных операторных сопротивлениях контуров.

Заменим $s = p^2$ и преобразуем (13.10):

$$\begin{aligned} Z_{RCmn}(s) \Big|_{s=p^2} &= \frac{1}{p} \left(R_{mn}p + \frac{1}{C_{mn}p} \right) = \\ &= \frac{1}{p} \left(L_{mn}p + \frac{1}{C_{mn}p} \right) \Big|_{L_j=R_j}. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Подставляем (13.11) в (13.9) и, вынося множители $1/p$ из каждой строки, получим:

$$Z_{RC}(s) \Big|_{\substack{s=p^2 \\ R_j=L_j}} = \frac{\frac{1}{p^n} \Delta_{MKTLC}(p)}{\frac{1}{p^{n-1}} \Delta_{LC11}(p)} \Big|_{\substack{p^2=s \\ L_j=R_j}} = \frac{1}{p} Z_{LC}(p) \Big|_{\substack{p^2=s \\ L_j=R_j}}. \quad (13.12)$$

Формула (13.12) устанавливает связь между сопротивлениями RC - и LC -двуихполюсников одинаковой структуры, в которых резисторы R_j заменены на индуктивности L_j .

13.2.2. Условие реализуемости $Z(s)$ в виде RC -двуихполюсника

С позиции синтеза $Z_{RC}(s)$ основным является следующее свойство: входное сопротивление RC -двуихполюсников описывается дробно-рациональной функцией (с положительными коэффициентами) обобщенной частоты s , причем нули и полюсы $Z_{RC}(s)$ располагаются на отрицательной полуоси, они чередуются, являются простыми и ближайшим к началу координат является полюс.

Для доказательства вначале рассмотрим переход к $Z_{RC}(s)$ от функции $Z_{LC}(p)$, имеющей полюс в начале координат, как указано в (13.1):

$$\begin{aligned} Z_{RC}(s) &= \frac{1}{p} Z_{LC}(p) \Big|_{\substack{p^2=s \\ L_j=R_j}} = \\ &= \frac{1}{p} \left[\frac{k(p^2 + \omega_{01}^2)(p^2 + \omega_{02}^2) \dots}{p(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2) \dots} \right] \Big|_{p^2=s} = \\ &= \frac{k(s + \sigma_{01})(s + \sigma_{02}) \dots}{s(s + \sigma_1)(s + \sigma_2) \dots}, \end{aligned} \quad (13.13)$$

где $\sigma_0 = 0 < \sigma_{01} = \omega_{01}^2 < \sigma_1 = \omega_1^2 < \sigma_{02} = \omega_{02}^2 < \sigma_2 = \omega_2^2 < \dots$; при этом (13.13) полностью соответствует

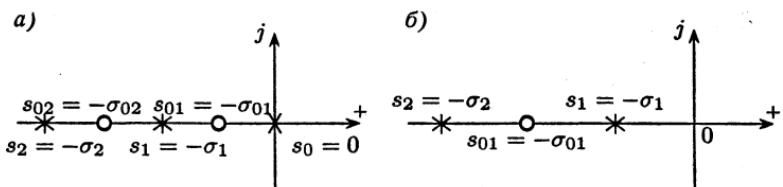


Рис. 13.4

основному свойству $Z_{RC}(s)$, и ближайшим к началу координат является полюс $s_0 = \sigma_0 = 0$ (см. рис. 13.4а).

Далее проанализируем второй вариант, когда $Z_{LC}(p)$ имеет в начале координат нуль, как указано в (13.2):

$$Z_{RC}(s) = \frac{1}{p} \left[\frac{kp(p^2 + \omega_{01}^2) \dots}{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2) \dots} \right] = \frac{k(s + \sigma_{01}) \dots}{(s + \sigma_1)(s + \sigma_2) \dots}, \quad (13.14)$$

где $\sigma_1 = \omega_1^2 < \sigma_{01} = \omega_{01}^2 < \sigma_2 = \omega_2^2 < \dots$, т. е. ближайшим к началу координат в (13.14) опять-таки является полюс $s_1 = -\sigma_1 < 0$ (см. рис. 13.4б).

Очевидно, если входная функция $Z(s)$ удовлетворяет основному свойству $Z_{RC}(s)$, то $Z(s)$ можно реализовать RC -двуухполюсником, поскольку на основании (13.12) может быть реализована соответствующая функция $Z_{LC}(p)$, после чего заменой L_j на R_j осуществляется переход к искомому RC -двуухполюснику.

13.2.3. Реализация RC -двуухполюсников

Для реализации RC -двуухполюсников проще всего использовать (13.12) и описанную ниже последовательность действий.

1. Проверяют, что подлежащая реализации входная функция $Z(s)$ удовлетворяет основному свойству $Z_{RC}(s)$.

2. На основании (13.12) переходят к соответствующему со противлению $Z_{LC}(p)$: $Z_{LC}(p) = pZ_{RC}(s)|_{s=p^2}$. (13.15)

3. Изложенными в § 13.1 способами реализуют LC -двуухполюсником найденную на основании (13.15) функцию $Z_{LC}(p)$; заменяя индуктивности L_j на резисторы R_j , получают искомый RC -двуухполюсник.

Рекомендуется у реализованной цепи проконтролировать значения $Z_{RC}(0)$ и $Z_{RC}(\infty)$.

§ 13.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦЕПЕЙ С ОПЕРАЦИОННЫМИ УСИЛИТЕЛЯМИ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

13.3.1. Реализация передаточных функций с отрицательными нулями и полюсами

Для реализации передаточных функций (ПФ) с отрицательными нулями и полюсами проще всего использовать так называемые «решающие схемы» на операционных усилителях (ОУ). Схема, изложенная на рисунке 13.5 a , реализует операцию

$$\frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = H(s) = -\frac{Y_1(s)}{Y_0(s)}, \quad (13.16)$$

а схема с четным числом каскадов, приведенная на рисунке 13.5 b , дает

$$\frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = H(s) = \frac{Y_{1I}(s)}{Y_{0I}(s)} \frac{Y_{1II}(s)}{Y_{0II}(s)}. \quad (13.17)$$

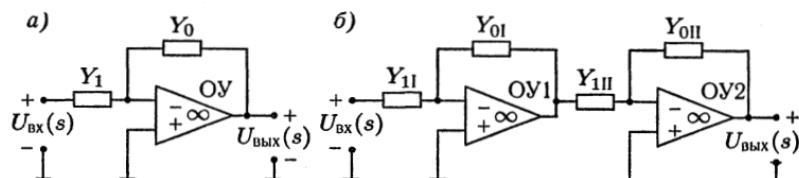


Рис. 13.5

Чтобы реализовать ПФ $H(s)$ с отрицательными нулями и полюсами, ее необходимо преобразовать к виду (13.16) или (13.17) таким образом, чтобы отдельные проводимости $Y_{1k}(s)$, $Y_{0k}(s)$ удовлетворяли основному свойству $Y_{RC}(s)$ — имели отрицательные, простые, чередующиеся нули и полюсы, причем ближайшим к началу координат должен быть нуль. Каждая из проводимостей реализуется RC -двусполюсником, как описано в 13.2.3.

ПРИМЕР 2. Для примера реализуем ПФ

$$H(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{2(s+1)^2(s+4)^2}{(s+2)^2(s+3)(s+5)}.$$

Преобразуем $H(s)$ к виду (13.17), например, следующим образом:

$$H(s) = \frac{\frac{2(s+1)(s+4)}{(s+2)(s+5)}}{\frac{s+3}{s+4}} \frac{\frac{s+1}{s+2}}{1},$$

причем операторные сопротивления

$$\begin{aligned} Z_{1I}(s) &= \frac{(s+2)(s+5)}{2(s+1)(s+4)}; & Z_{0I}(s) &= \frac{s+4}{s+3}; \\ Z_{1II}(s) &= \frac{s+2}{s+1}; & Z_{0II} &= 1 \end{aligned}$$

реализуются RC -двуухполюсниками.

Примечания:

1. У заданных ПФ могут быть кратные и нечредующиеся нули и полюсы.
2. Иногда приходится использовать большее, чем на рисунке 13.5, число каскадов схем на ОУ

13.3.2. Реализация описанных уравнениями состояния передаточных функций с произвольными нулями и полюсами

Как указано в п. 11.5.2, уравнение показанной на рисунке 13.6 «решающей схемы» на ОУ с n — резистивными входами (с проводимостями G_k) и емкостью в цепи обратной связи (с операторной проводимостью $Y_0 = C_0 s$) описывается соотношением

$$U_{\text{вых}}(s) = - \sum_{k=1}^n \frac{G_k}{C_0 s} U_k(s). \quad (13.18)$$

которое соответствует любому из уравнений состояния следующей системы, записанной в матричной форме:

$$s[U_{\text{вых}}(s)] = [A][U_{\text{вых}}(s)] + [B][U_{\text{вх}}(s)]. \quad (13.19)$$

Действительно, (13.19) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} [U_{\text{вых}}(s)] &= \frac{1}{s} ([A][U_{\text{вых}}(s)] + [B][U_{\text{вх}}(s)]) = \\ &= \frac{1}{s} [D][U(s)], \quad (13.20) \end{aligned}$$

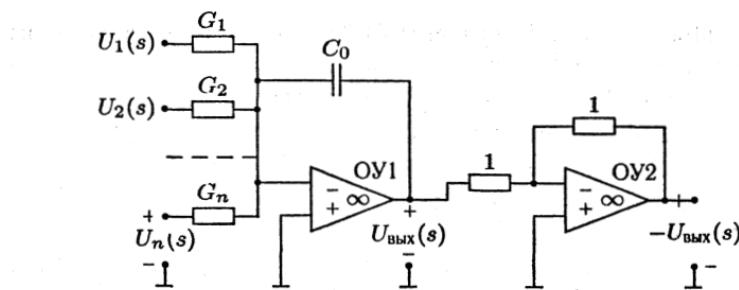


Рис. 13.6

что соответствует (13.18), поскольку в каждой строке матричного уравнения (13.20) имеем справа выражение $\sum D_k U_k(s)$, где D_k — элементы матрицы коэффициентов $[D]$.

Связь воздействия $u_{\text{вх}}(t)$ и реакции $u_{\text{вых}}(t)$ можно описать, естественно, как передаточной функцией (в общем случае с произвольными нулями и полюсами), так и эквивалентно — системой уравнений состояния. Переход от уравнений состояния (13.19) к ПФ изложен в п. 6.4.4, а обратный переход рассматривается в п. 13.3.3.

Таким образом, если искомая цепь задана уравнениями состояния (13.19) или (13.20), то каждое из этих уравнений можно реализовать схемой, показанной на рисунке 13.6 и описанной соотношением (13.18). Остается лишь соединить входные и выходные «клеммы» подобных схем в соответствии с нумерацией переменных в уравнениях (13.19), (13.20).

13.3.3. Переход от передаточной функции к уравнениям состояния

Передаточной функции общего вида

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (13.21)$$

соответствует следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} a_n u_2^{(n)}(t) + a_{n-1} u_2^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 u_2'(t) + a_0 u_2(t) &= \\ &= b_m u_1^{(m)}(t) + b_{m-1} u_1^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 u_1'(t) + b_0 u_1(t). \end{aligned} \quad (13.22)$$

Процедура перехода от (13.22) к уравнениям состояния неоднозначна и достаточно сложна. Рассмотрим один из наиболее общих приемов, когда степени числителя и знаменателя (13.21) одинаковы ($m = n$). Преобразуем (13.22), группируя члены при производных одного и того же порядка:

$$\{\dots [(\langle a_n u_2 - b_n u_1 \rangle)' + (a_{n-1} u_2 - b_{n-1} u_1)]' + \dots + \\ + (a_1 u_2 - b_1 u_1)\}' + (a_0 u_2 - b_0 u_1) = 0. \quad (13.23)$$

Комбинации переменных в фигурных, квадратных, «специальных» скобках (13.23) считаем переменными состояния x_1, \dots, x_{n-1}, x_n . В результате получаем искомую систему уравнений состояния:

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = b_0 u_1 - a_0 u_2, \\ x'_2 = x_1 + (b_1 u_1 - a_1 u_2), \\ \dots \\ x'_{n-1} = x_{n-2} + (b_{n-2} u_1 - a_{n-2} u_2), \\ x'_n = x_{n-1} + (b_{n-1} u_1 - a_{n-1} u_2). \end{array} \right\} \quad (13.24)$$

Реализация каждого из уравнений состояния в (13.24) описана в 13.3.2. Кроме этого, необходимо реализовать, как показано, например, на рисунке 13.7, уравнение связи, получаемое в соответствии с принятыми обозначениями для членов соотношения (13.23):

$$x_n = a_n u_2 - b_n u_1,$$

откуда уравнение связи будет следующим:

$$u_2 = x_n / a_n + b_n u_1 / a_n. \quad (13.25)$$

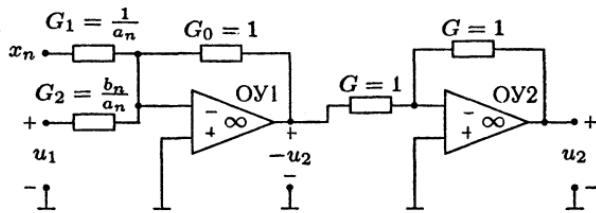


Рис. 13.7

В схеме, реализующей (13.25), имеется два операционных усилителя, причем второй каскад (на ОУ2) используется в соответствии с (13.16) лишь для обращения знака выходной переменной

ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 14.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ

14.1.1. Общая характеристика цепей с распределенными параметрами

Рассмотренные ранее цепи являются цепями с сосредоточенными параметрами и состоят из соединений R --, L --, C -элементов. Процессы в таких цепях зависят только от времени и не зависят от протяженности цепи; ток, втекающий в отдельный элемент и вытекающий из него, является одинаковым; считается, что электромагнитное поле мгновенно распространяется по цепи.

Однако в ряде электротехнических устройств, в частности, в длинных соединительных кабелях ЭВМ, в линиях связи при анализе процессов необходимо учитывать размеры (т. е. протяженность, длину) устройства. Например, рассмотрим кабель длиной $\ell = 100$ м, по которому распространяются сигналы, допустим, со скоростью света $v = 3 \cdot 10^8$ м/с, причем частота их равна $f_1 = 50$ Гц (период $T_1 = 0,02$ с) и $f_2 = 3 \cdot 10^6$ Гц = 3 МГц ($T_2 = 10^{-6}/3$ с). Тогда длины волн в линии составляют $\lambda_1 = vT_1 = 6 \cdot 10^6$ м = 6000 км $\geq \ell$ и $\lambda_2 = vT_2 = 100$ м = ℓ , т. е. в последнем случае длина кабеля соизмерима с длиной волны и протяженность кабеля нужно учитывать при анализе передачи сигналов.

В линиях связи, коаксиальных кабелях, волноводах, предназначенных для передачи высокочастотных сигналов, активные потери, электрическое и магнитное поля распределяются по всей длине устройства. Такие цепи называют цепями с распределенными параметрами или длинными линиями (ДЛ). Если же $\lambda \gg \ell$, т. е. длина волны передаваемого сигнала много больше протяженности устройства, то схему замещения такого устройства можно рассматривать как цепь с сосредоточенными параметрами.

14.1.2. Однородная линия и ее первичные параметры

Обычно элемент длины Δx цепи с распределенными параметрами изображают в виде схемы замещения, приведенной на рисунке 14.1а. Будем отсчитывать координату x от конца длинной линии, а выходной ток $\Delta L i_2 = i_h$ направлять к сопротивлению нагрузки Z_h .

Примечание. Изображенный на рисунке 14.1а элемент Δx линии правильнее представлять симметричной Т- или П-схемой, но рассматриваемый вариант также допустим, если пренебречь малыми высшего порядка.

Тепловые потери в схематично изображенных на рисунке 14.1а проводах линии приводят к учету элементарного продольного сопротивления $R_0 \Delta x$. Несовершенство изоляции между жилами — к учету элементарной поперечной проводимости $G_0 \Delta x$; емкость между жилами и по отношению к внешним предметам — к учету элементарной емкости $C_0 \Delta x$, магнитное поле, сцепленное с жилами, — к учету элементарной индуктивности $L_0 \Delta x$.

Линия, у которой погонные параметры R_0 (с размерностью $\Omega \cdot \text{м}$), G_0 ($\text{См}/\text{м}$), C_0 ($\Phi/\text{м}$), L_0 ($\text{Гн}/\text{м}$) постоянны по длине, называется однородной линией. Примеры однородных линий — линия связи, коаксиальный кабель — изображены схематично на рисунке 14.1б, в соответственно. Погонные параметры R_0 , G_0 , C_0 , L_0 часто называют первичными параметрами линии.

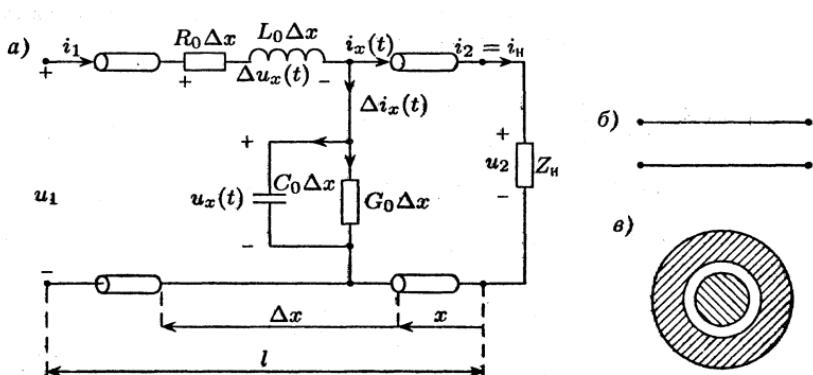


Рис. 14.1

14.1.3. Телеграфные уравнения однородной линии

Из рисунка 14.1 a следует, что элементарное изменение тока в линии будет

$$\Delta i_x = \Delta i_G + \Delta i_C = G_0 \Delta x u_x + C_0 \Delta x \frac{\partial u_x}{\partial t},$$

а элементарное изменение напряжения

$$\Delta u_x = \Delta u_R + \Delta u_L = R_0 \Delta x (i_x + \Delta i_x) + L_0 \Delta x \frac{\partial (i_x + \Delta i_x)}{\partial t},$$

при этом использование частных производных обусловлено тем, что переменные $u_x \equiv u(x, t)$, $i_x \equiv i(x, t)$, т. е. зависят и от координаты, и от времени.

Переходя к бесконечно малым приращениям координаты ($\Delta x \rightarrow dx$) и пренебрегая бесконечно малыми высшими порядков, приходим к так называемым телеграфным уравнениям однородной линии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_x}{\partial x} &= G_0 u_x + C_0 \frac{\partial u_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} &= R_0 i_x + L_0 \frac{\partial i_x}{\partial t}, \end{aligned} \quad (14.1)$$

где $i_x \equiv i_x(t) \equiv i(x, t)$, $u_x \equiv u_x(t) \equiv u(x, t)$.

Примечания:

1. Уравнения (14.1) симметричны и дуальны.
2. Уравнения (14.1), определяющие элементарные изменения тока и напряжения, являются исходными дифференциальными уравнениями для описания происходящих в линии процессов, которые зависят как от времени t , так и от координаты x .

§ 14.2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛИНИИ И ЕЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

14.2.1. Решение телеграфных уравнений

Преобразуем по Лапласу уравнения линии (14.1), считая начальные условия нулевыми:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_x(s)}{dx} &= (R_0 + L_0 s) I_x(s), \\ \frac{dI_x(s)}{dx} &= (G_0 + C_0 s) U_x(s), \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

при этом $Z_0(s) = R_0 + L_0 s$, $Y_0(s) = G_0 + C_0 s$ — операторные погонные сопротивление и проводимость. Дифференцируя одно из полученных уравнений (14.2) и подставляя в другое, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 U_x(s)}{dx^2} &= Z_0(s) Y_0(s) U_x(s), \\ \frac{d^2 I_x(s)}{dx^2} &= Z_0(s) Y_0(s) I_x(s). \end{aligned} \right\} \quad (14.3)$$

Характеристический полином, естественно, от выбора переменной не зависит: $p^2 - Z_0 Y_0 = 0$; далее находим собственные частоты $p_{1,2} = \pm \sqrt{Z_0 Y_0} = \pm \gamma_0$, при этом коэффициентом распространения называют величину

$$\gamma_0(s) = \sqrt{Z_0(s) Y_0(s)}. \quad (14.4)$$

Таким образом, решение дифференциальных уравнений (14.2) в области изображений по Лапласу имеет вид

$$U_x(s) = A_1 e^{\gamma_0 x} + A_2 e^{-\gamma_0 x}, \quad (14.5)$$

$$I_x(s) = \frac{1}{Z_0} \frac{dU_x}{dx} = \frac{A_1 e^{\gamma_0 x} - A_2 e^{-\gamma_0 x}}{Z_0}, \quad (14.6)$$

где Z_0 — волновое (или характеристическое) сопротивление линии, введенное с учетом (14.4)

$$Z_0(s) = \frac{Z_0(s)}{\gamma_0(s)} = \sqrt{\frac{Z_0(s)}{Y_0(s)}}. \quad (14.7)$$

Примечания:

- 1 Величины γ_0 , Z_0 часто называют вторичными (или характеристическими) параметрами линии.
2. Решения (14.5), (14.6) содержат только свободную составляющую, поскольку уравнения (14.3) являются однородными.

Постоянные интегрирования в (14.5), (14.6) определяют по начальным условиям при $x = 0$ (т. е. в конце линии): $U_2 = A_1 + A_2$; $I_2 = (A_1 - A_2)/Z_0$, откуда находим $A_1 = 0,5(U_2 + Z_0 I_2)$, $A_2 = 0,5(U_2 - Z_0 I_2)$. Таким образом, решение уравнений линии будет следующим:

$$\left. \begin{aligned} U_x &= 0,5(U_2 + Z_0 I_2)e^{\gamma_0 x} + 0,5(U_2 - Z_0 I_2)e^{-\gamma_0 x}, \\ I_x &= \frac{1}{Z_0} [0,5(U_2 + Z_0 I_2)e^{\gamma_0 x} - 0,5(U_2 - Z_0 I_2)e^{-\gamma_0 x}]. \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

14.2.2. Понятие о падающей и отраженной волнах в линии

Первые слагаемые в уравнениях (14.8) называют падающими волнами в линии ($U_{\text{п}x}$, $I_{\text{п}x}$), а вторые слагаемые — отраженными ($U_{\text{o}x}$, $I_{\text{o}x}$); при этом (14.8) записывают в виде

$$U_x(s) = U_{\text{п}x}(s) + U_{\text{o}x}(s) = U_{\text{п}2}(s)e^{\gamma_0 x} + U_{\text{o}2}(s)e^{-\gamma_0 x}, \quad (14.9)$$

$$I_x(s) = I_{\text{п}x}(s) - I_{\text{o}x}(s) = I_{\text{п}2}(s)e^{\gamma_0 x} - I_{\text{o}2}(s)e^{-\gamma_0 x}, \quad (14.10)$$

где $U_{\text{п}2} = 0,5(U_2 + Z_B I_2)$, $U_{\text{o}2} = 0,5(U_2 - Z_B I_2)$, $I_{\text{п}2} = U_{\text{п}2}/Z_B$, $I_{\text{o}2} = U_{\text{o}2}/Z_B$ — значения падающей и отраженной волн напряжения и тока при $x = 0$, т. е. в конце линии (см. рис. 14.1a), так что согласно (14.9) получаем $U_2 = U_{\text{п}2} + U_{\text{o}2}$, а на основании (14.10) оказывается $I_2 = I_{\text{п}2} - I_{\text{o}2}$.

Из (14.8)–(14.10) следует, что в любой точке линии отношение волны напряжения к соответствующей волне тока равно волновому сопротивлению:

$$\frac{U_{\text{п}x}(s)}{I_{\text{п}x}(s)} = Z_B(s), \quad \frac{U_{\text{o}x}(s)}{I_{\text{o}x}(s)} = Z_B(s). \quad (14.11)$$

Отношение отраженной волны к падающей в конце линии называют коэффициентом отражения

$$n = \frac{U_{\text{o}2}}{U_{\text{п}2}} = \frac{I_{\text{o}2}}{I_{\text{п}2}} = \frac{U_2 - Z_B I_2}{U_2 + Z_B I_2} = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}, \quad (14.12)$$

причем в (14.12) учтено уравнение нагрузки $U_2 = Z_H I_2$, которое следует из рисунка 14.1a.

Рассмотрим частные случаи:

1. При холостом ходе (ХХ) нагрузки, т. е. при $Z_H \rightarrow \infty$ из (14.12) следует, что $n = 1$, $U_{\text{o}2} = U_{\text{п}2}$, откуда $U_2 = U_{\text{п}2} + U_{\text{o}2} = 2U_{\text{п}2}$, т. е. падающая волна напряжения удваивается; кроме того, $I_{\text{o}2} = I_{\text{п}2}$, следовательно, при $x = 0$ согласно (14.10) $I_2 = I_{\text{п}2} - I_{\text{o}2} = 0$, т. е. ток в конце линии отсутствует, что и имеет место в режиме ХХ нагрузки.

2. При коротком замыкании (КЗ) нагрузки, т. е. при $Z_H = 0$, коэффициент отражения $n = -1$, следовательно,

$U_{02} = -U_{n2}$, $I_{o2} = -I_{n2}$, откуда согласно (14.9), (14.10) в конце линии $I_2 = 2I_{n2}$, $U_2 = 0$.

Примечание. Смысл терминов «падающая и отраженная волны» приведен ниже (в § 14.4 и § 14.5), однако и здесь просматривается определенная аналогия выражения $U_{nx} = U_{n2}e^{\gamma_0 x}$ с графиком экспоненты, как бы убывающей (падающей) с уменьшением координаты x (см. рис. 14.1a), а выражения $U_{ox} = U_{o2}e^{-\gamma_0 x}$ — с графиком экспоненты, как бы убывающей в обратном направлении (в направлении отражения — см. рис. 14.1a)

§ 14.3. ЛИНИЯ КАК СИММЕТРИЧНЫЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК

14.3.1. Сравнение уравнений линии и симметричного четырехполюсника

В решении уравнений линии (14.8) используем формулы Эйлера для гиперболических функций

$$\begin{cases} U_x = \frac{U_2 + Z_b I_2}{2} (\operatorname{ch} \gamma_0 x + \operatorname{sh} \gamma_0 x) + \frac{U_2 - Z_b I_2}{2} (\operatorname{ch} \gamma_0 x - \operatorname{sh} \gamma_0 x), \\ I_x = \frac{U_2 + Z_b I_2}{2Z_b} (\operatorname{ch} \gamma_0 x + \operatorname{sh} \gamma_0 x) - \frac{U_2 - Z_b I_2}{2Z_b} (\operatorname{ch} \gamma_0 x - \operatorname{sh} \gamma_0 x), \end{cases}$$

далее после очевидных преобразований получим

$$\begin{cases} U_x = U_2 \operatorname{ch} \gamma_0 x + I_2 Z_b \operatorname{sh} \gamma_0 x, \\ I_x = U_2 \frac{\operatorname{sh} \gamma_0 x}{Z_b} + I_2 \operatorname{ch} \gamma_0 x. \end{cases} \quad (14.13)$$

Сравним (14.13) с гиперболической формой уравнений симметричного четырехполюсника (12.21):

$$\begin{cases} U_1 = U_2 \operatorname{ch} \gamma + (-I_2) Z_c \operatorname{sh} \gamma, \\ I_1 = U_2 \frac{\operatorname{sh} \gamma}{Z_c} + (-I_2) \operatorname{ch} \gamma; \end{cases} \quad (14.14)$$

учтем при этом, что в (14.13) у линии (см. рис. 14.1a) ток нагрузки $I_n(s) = I_2(s)$, в то время как в (14.14) у четырехполюсника $I_n(s) = -I_2(s)$.

Вывод: однородная линия и любая ее часть являются симметричным ЧП, причем характеристические параметры линии как ЧП $Z_c = Z_b$, т. е. характеристическое сопротивление равно волновому, а характеристическая мера передачи всей линии $\gamma = \gamma_0 \ell$, т. е. коэффициент распространения $\gamma_0 = \gamma / \ell$ является погонной мерой передачи линии.

Следствия:

- Для линии справедливы все свойства симметричного ЧП, в том числе находящегося в режиме характеристической (согласованной) нагрузки.
- Справедливы формулы (12.25), (12.26) расчета характеристических параметров с использованием сопротивлений холостого хода и короткого замыкания линии как ЧП

$$Z_b = Z_c = \sqrt{Z_{XX} Z_{K3}},$$

$$e^\gamma = e^{\gamma_0 \ell} = \sqrt{\frac{Z_{XX} + Z_b}{Z_{XX} - Z_b}}. \quad (14.15)$$

На основании (14.15), зная сопротивления ХХ и КЗ линии, можно найти ее характеристические параметры в установившемся синусоидальном режиме ($s = j\omega$), а далее, используя формулы (14.4), (14.7) и получив

$$Z_b = \sqrt{\frac{Z_0(j\omega)}{Y_0(j\omega)}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}, \quad \gamma_0 = \sqrt{Z_0(j\omega) Y_0(j\omega)},$$

можно определить первичные параметры линии R_0, L_0, G_0, C_0 из решения уравнений $Z_0 = Z_b \gamma_0, Y_0 = \gamma_0 / Z_b$.

14.3.2. Линия без отражения

Линия без отражения — это линия в согласованном режиме, когда $Z_h = Z_c = Z_b$. При этом коэффициент отражения согласно (14.12) $n = 0$, т. е. отраженных волн в линии нет: согласно (14.9), (14.10) напряжение и ток на входе линии (при $x = \ell$) будут

$$U_1 = U_2 e^{\gamma_0 \ell}, \quad I_1 = I_2 e^{\gamma_0 \ell}, \quad (14.16)$$

поскольку $U_{02} = 0, I_{02} = 0, U_2 = U_{n2}, I_2 = I_{n2}$.

Передаточные функции в этом случае согласно (14.16) оказываются

$$H_I(s) = H_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} = e^{-\gamma_0(s)\ell} = e^{-\gamma(s)\ell},$$

а входное сопротивление линии записывается в виде

$$Z_{bx}(s) = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = Z_h = Z_b = Z_c,$$

что, естественно, соответствует формулам ЧП в режиме согласованной нагрузки.

Выясним, искажает ли линия без отражения. Для этого рассмотрим АЧХ и ФЧХ. В установившемся синусоидальном режиме коэффициент распространения γ_0 является комплексным числом:

$$\gamma_0(j\omega) = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega), \quad (14.17)$$

а сопротивление нагрузки

$$Z_H = Z_B = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

не является дробно-рациональной функцией обобщенной частоты $s = j\omega$, т. е. согласование линии без отражения возможно лишь на конкретной частоте ω .

Определим частотные характеристики линии из функции передачи, например,

$$H_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = e^{-\gamma_0(j\omega)\ell} = e^{-\alpha_0\ell} e^{-j\beta_0\ell}, \quad (14.18)$$

отсюда АЧХ линии будет $A(\omega) = |H_U| = e^{-\alpha(\omega)\ell} \neq \text{const}$, т. е. зависит от частоты, а ФЧХ будет $\Phi(\omega) = -\beta_0(\omega)\ell \neq -\omega t_3$, т. е. не является линейной функцией.

Вывод: линия без отражения искажает проходящие по ней сигналы.

Из (14.18) и из сравнения с (12.14) следует, что

$$\alpha_0 = \frac{1}{\ell} \ln \frac{U_1}{U_2} \quad (\text{Нп/м})$$

является погонным коэффициентом затухания, а $\beta_0 = (\alpha_{u1} - \alpha_{u2})/\ell$ — погонным коэффициентом фазы линии в согласованном режиме.

14.3.3. Линия без искажения

Однородная линия со следующим искусственным сочетанием параметров:

$$\frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0} \quad (14.19)$$

называется линией без искажения, поскольку в режиме согласованной нагрузки она не искажает.

Действительно, при выполнении (14.19) имеем

$$\left. \begin{aligned} Z_B &= \sqrt{\frac{R_0 + sL_0}{G_0 + sC_0}} = \sqrt{\frac{R_0(1+sL_0/R_0)}{G_0(1+sC_0/G_0)}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} = \text{const}, \\ \gamma_0 &= \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{R_0 G_0 (1 + s \frac{L_0}{R_0})^2} = \sqrt{R_0 G_0} + s \sqrt{L_0 C_0}, \end{aligned} \right\} (14.20)$$

т. е. согласно (14.16), (14.20) в согласованном режиме будет

$$\begin{aligned} U_2(s) &= U_1(s)e^{-\gamma_0 \ell} = \\ &= U_1(s)e^{-\ell(\sqrt{R_0 G_0} + s \sqrt{L_0 C_0})} \div u_2(t) = k u_1(t - t_{3Л}), \end{aligned} \quad (14.21)$$

где $k = e^{-\ell \sqrt{R_0 G_0}}$; $t_{3Л} = \ell \sqrt{L_0 C_0}$ — время запаздывания проходящих по линии сигналов, форма которых на основании (14.21) не искажается.

Об этом же свидетельствуют и частотные характеристики линии без искажения:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0(j\omega) &= \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0} = \alpha_0 + j\beta_0; \\ H_U(j\omega) &= e^{-\gamma_0 \ell} = e^{-\ell \sqrt{R_0 G_0}} e^{-j\omega \ell \sqrt{L_0 C_0}} = k e^{-j\omega t_{3Л}}, \end{aligned} \right.$$

т. е. получили АЧХ $A(\omega) = |H_U| = k = \text{const}$ и ФЧХ $\Phi(\omega) = -\omega t_{3Л}$.

Скорость движения сигналов (волны) вдоль линии будет

$$v = \ell/t_{3Л} = 1/\sqrt{L_0 C_0}.$$

Примечание Линия без искажения довольно сложное искусственное образование, поскольку в отличие от (14.19) у реальных однородных линий обычно

$$L_0/R_0 < C_0/G_0.$$

§ 14.4. ЛИНИЯ БЕЗ ПОТЕРЬ

14.4.1. Основные характеристики линии без потерь

Однородная линия, у которой активными потерями можно пренебречь (т. е. $R_0 \rightarrow 0$, $G_0 \rightarrow 0$), называется линией без потерь. Отметим ее следующие свойства и характеристики:

1 Волновое сопротивление

$$Z_B = Z_c = \sqrt{Z_0/Y_0} = \sqrt{sL_0/(sC_0)} = \sqrt{L_0/C_0} \quad (14.22)$$

постоянно и не зависит от частоты.

2. Коэффициент распространения

$$\gamma_0 = \sqrt{Z_0 Y_0} = s \sqrt{L_0 C_0} \quad (14.23)$$

не является иррациональной функцией обобщенной частоты s .

3. Передаточная функция в согласованном режиме следующая:

$$H_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = e^{-\gamma_0 \ell} = e^{-s \ell \sqrt{L_0 C_0}} = e^{-s t_{3L}}, \quad (14.24)$$

т. е. сигналы проходят к нагрузке без искажения и не изменяются по амплитуде, а значит, $u_2(t) = u_1(t - t_{3L})$, причем $H_U(s) = H_I(s)$.

4. Частотные характеристики в согласованном режиме следующие:

$$H_U(j\omega) = e^{-\gamma_0(j\omega)\ell} = e^{-j\omega\ell\sqrt{L_0 C_0}} = k e^{-j\omega t_{3L}},$$

т. е. АЧХ $A(\omega) = k = 1$, ФЧХ $\Phi(\omega) = -\omega t_{3L}$, коэффициент распространения в установившемся синусоидальном режиме $\gamma_0 = \alpha_0 + \beta_0 = j\omega\sqrt{L_0 C_0}$, $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = \omega\sqrt{L_0 C_0}$.

5. Скорость прохождения сигналов по линии будет

$$v = \ell/t_{3L} = 1/\sqrt{L_0 C_0}. \quad (14.25)$$

Примечание. На практике многие линии имеют малые потери и приближенно описываются соотношениями (14.22)–(14.25); условия $\omega L_0 \gg R_0$ и $\omega C_0 \gg G_0$ выполняются также обычно, если спектр передаваемых по линии сигналов содержит в основном высокочастотные составляющие.

14.4.2. Трактовка падающей и отраженной волн в линии без потерь

Рассмотрим уравнение (14.9) для линии без потерь

$$U_x(s) = U_{n2} e^{s\sqrt{L_0 C_0}x} + U_{o2} e^{-s\sqrt{L_0 C_0}x} \div u_x(t) = \\ = u_{n2}(t + t_{3x}) + u_{o2}(t - t_{3x}), \quad (14.26)$$

причем в (14.26) $t_{3x} = x\sqrt{L_0 C_0}$ — время прохождения волны по участку линии длиной x .

Вывод: видно, что процессы в линии без потерь можно представить во временной области как взаимодействие падающей и отраженной волн, причем отраженная волна

- $u_{0x}(t) = u_{02}(t - t_{3x})$ приходит в точку x линии с запаздыванием на время t_{3x} относительно момента пребывания ее в конце линии (см. рис. 14.1a), а падающая волна $u_{\text{п}x}(t) = u_{\text{п}2}(t + t_{3x})$, что соответствует $u_{\text{п}2}(t) = u_{\text{п}x}(t - t_{3x})$, приходит из точки x в конец линии с запаздыванием на t_{3x} .

Коэффициент отражения $n = (Z_h - Z_b)/(Z_h + Z_b)$ показывает, какая часть падающей волны отражается от нагрузки и движется назад к началу линии, искажая сигналы в линии. Если выходное сопротивление источника $Z_{\text{вых}} = Z_h$ не согласовано ($Z_{\text{вых}} \neq Z_b$), то эта отраженная волна вновь отражается от источника с коэффициентом отражения

$$n_{\text{ист}} = \frac{Z_h - Z_b}{Z_h + Z_b} \quad (14.27)$$

и такая новая отраженная волна «идет» к концу линии и т. д.

14.4.3. Подключение линии без потерь к источнику постоянного напряжения

Схема рассматриваемой цепи приведена на рисунке 14.2a. Необходимо найти напряжение $u_2(t)$ на сопротивлении нагрузки линии $Z_h = R_h$ при $t > 0$ и выяснить картину распределения напряжения вдоль линии длиной ℓ при включении цепи к идеальному

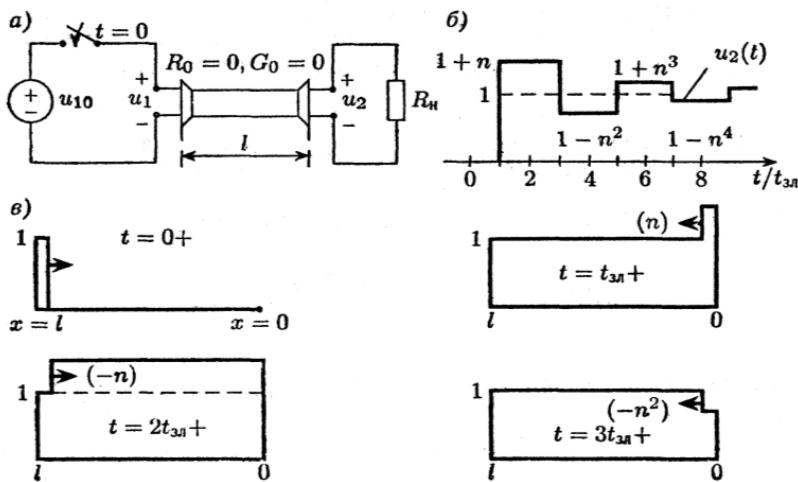


Рис. 14.2

источнику напряжения $u_1(t) = u_{10} = \text{const}$, имеющему, естественно, внутреннее (выходное) сопротивление $Z_i = Z_{\text{вых}} = 0$.

В линии без потерь согласно (14.23)–(14.24) будет $Z_b = \sqrt{L_0/C_0}$, $\gamma_0 = s\sqrt{L_0C_0}$, а время прохождения волны вдоль линии $t_{3Л} = \ell\sqrt{L_0C_0}$.

Для анализа процессов в линии без потерь используем, например, решение (14.9) и (14.26) при $x = \ell$, т. е. рассматриваем связь напряжений на входе и выходе линии:

$$\begin{aligned} U_1(s) &= U_{n2}(s)e^{\gamma_0(s)\ell} + U_{o2}(s)e^{-\gamma_0(s)\ell} = \\ &= U_{n2}(s)e^{st_{3Л}}(1 + ne^{-2t_{3Л}s}). \end{aligned}$$

Поскольку выполняется $U_2(s) = U_{n2} + U_{o2} = U_{n2}(1 + n)$, где $n = U_{o2}/U_{n2}$ — коэффициент отражения, то $U_{n2}(s) = U_2(s)/(1 + n)$, откуда

$$U_1(s) = \frac{U_2(s)}{1+n}e^{st_{3Л}}(1 + ne^{-2t_{3Л}s}).$$

Таким образом, передаточная функция цепи будет

$$H_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = (1+n)e^{-t_{3Л}s} \frac{1}{1+ne^{-2t_{3Л}s}}. \quad (14.28)$$

Трактуя последний сомножитель в (14.28) как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $(-ne^{-2t_{3Л}s})$, получим с учетом $u_1(t) = u_{10} \div U_1(s) = u_{10}/s$

$$\begin{aligned} U_2(s) &= \frac{u_{10}(1+n)}{s}e^{-t_{3Л}s} \times \\ &\times (1 - ne^{-2t_{3Л}s} + n^2 e^{-4t_{3Л}s} - n^3 e^{-6t_{3Л}s} + \dots) \div u_2(t) = \\ &= u_{10}(1+n) [\delta_1(t - t_{3Л}) - n\delta_1(t - 3t_{3Л}) + \\ &+ n^2 \delta_1(t - 5t_{3Л}) - \dots]. \quad (14.29) \end{aligned}$$

График сигнала на выходе линии, соответствующий (14.29), приведен на рисунке 14.2б в предположении, что коэффициент отражения $n = 0,5$, а входной сигнал $u_1 = u_{10} = 1$ имеет единичный уровень.

Картина распределения напряжения по линии с учетом падающей и отраженной волн изображена на рисунке 14.2в для моментов времени $t = 0+$, $t_{3Л}+$, $2t_{3Л}+$, $3t_{3Л}+$, ... При $t = 0+$ падающая волна, обусловленная включением источника $u = u_{10} = 1$,

имеет место лишь на входе линии (при $x = \ell$) и начинает распространяться в сторону нагрузки. В момент $t = t_{3L} +$ падающая волна достигает нагрузки (вдоль всей линии установленось напряжение $u_x = 1$), отражается от нагрузки с коэффициентом $n = 0,5$ (т. е. $u_2 = u_{n2} + n u_{p2} = 1 + 0,5 = 1,5$), и отраженная волна $u_{o2} = n u_{p2} = 0,5$ начинает распространяться к началу линии. При $t = 2t_{3L} +$ отраженная волна $u_{ox} = u_{o2} = 0,5$ достигает источника (вдоль линии установленось напряжение $u_x = 1,5$), отражается от источника согласно (14.27) с коэффициентом отражения $n_{ист} = (0 - Z_B)/(0 + Z_B) = -1$ (т. е. значение «новой отраженной — второй падающей волны» $n_{ист} u_{o2} = (-1)n = -n = -0,5$, в результате на входе $u_1 = u_{n2} + u_{o2} + n_{ист} u_{o2} = = 1,5 - 0,5 = 1 = u_{o1} = \text{const}$), и вторая падающая волна ($-n = -0,5$) начинает распространяться к нагрузке. В момент $t = 3t_{3L} +$ эта волна достигает нагрузки, отражается с коэффициентом отражения $n = 0,5$ и новая отраженная от нагрузки волна, имеющая значение $n(-n) = -n^2$, начинает вновь распространяться к источнику и т. д. Естественно, напряжение на входе при $t > 0$ постоянно и равно $u_1 = u_{10}$, а на выходе соответствует (14.29) и рисунку 14.26.

§ 14.5. ЛИНИЯ В УСТАНОВИВШЕМСЯ СИНУСОИДАЛЬНОМ РЕЖИМЕ

14.5.1. Общая характеристика процессов в линии

Уравнения процессов в линии (14.9) запишем для комплексов действующих значений в установившемся синусоидальном режиме ($s = j\omega$)

$$\dot{U}_x = \dot{U}_{n2} e^{\alpha_0 x} e^{j\beta_0 x} + \dot{U}_{o2} e^{-\alpha_0 x} e^{-j\beta_0 x}, \quad (14.30)$$

где аналогично (14.18) коэффициент распространения $\gamma_0 = = \alpha_0 + j\beta_0$, а действующие значения $\dot{U}_{n2} = U_{n2} e^{j\alpha_{пад}}$, $\dot{U}_{o2} = = U_{o2} e^{j\alpha_{отр}}$. На основании (14.30) описание процессов в t -области имеет вид

$$u_x(t) = U_{n2} \sqrt{2} e^{\alpha_0 x} \cos(\omega t + \beta_0 x + \alpha_{пад}) + + U_{o2} \sqrt{2} e^{-\alpha_0 x} \cos(\omega t - \beta_0 x + \alpha_{отр}). \quad (14.31)$$

Рассмотрим слагаемое в (14.31), характеризующее падающую волну в точке линии на расстоянии x от нагрузки,

$$u_{nx}(t) = U_{n2} \sqrt{2} e^{\alpha_0 x} \cos(\omega t + \beta_0 x + \alpha_{\text{пад}}), \quad (14.32)$$

причем $\omega = 2\pi/T$ — частота графика косинусоиды в (14.32), т. е. последнего сомножителя, построенного в функции от времени t в некоторой фиксированной точке x линии; $\beta_0 = 2\pi/\lambda$ — частота графика косинусоиды в (14.32), построенного в функции от координаты x линии в некоторый фиксированный момент времени t (здесь λ — период по координате).

На рисунке 14.3а приведен график падающей волны (14.32) как функции координаты x линии для фиксированного момента времени $t = t_1$.

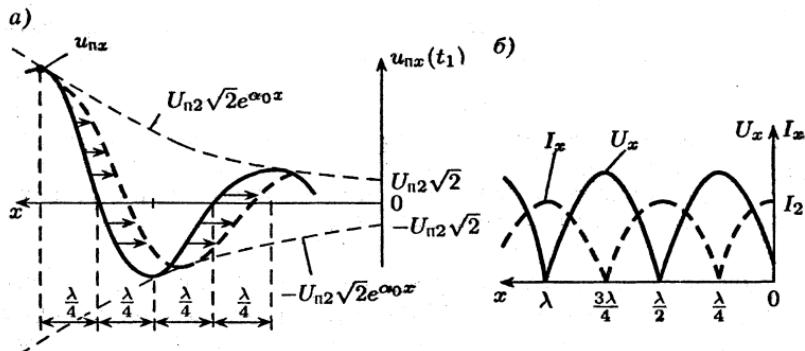


Рис. 14.3

Оценим расстояние Δx , на которое сдвинется через интервал Δt точка падающей волны (14.32), имеющая неизменную суммарную фазу. При этом

$$\omega t_1 + x\beta_0 + \alpha_{\text{пад}} = \omega(t_1 + \Delta t) + (x + \Delta x)\beta_0 + \alpha_{\text{пад}},$$

или $0 = \omega\Delta t + \Delta x\beta_0$, откуда

$$\Delta x = -\omega\Delta t/\beta_0 < 0, \quad (14.33)$$

т. е. падающая волна u_{nx} через промежуток времени Δt действительно сдвинется к концу линии, как показано пунктиром и стрелками на рисунке 14.3а.

14.5.2. Фазовая скорость, длина волны и движение волн в линии

Фазовой скоростью v_ϕ называется скорость движения вдоль линии точки волны, например (14.32), суммарная фаза колебаний в которой неизменна. Из (14.33) имеем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-\omega}{\beta_0},$$

откуда, отбрасывая знак «минус», который зависит от начала отсчета координаты и вида волны, получим

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta_0}. \quad (14.34)$$

Примечания:

1. В общем случае в однородной линии погонный коэффициент фазы $\beta_0(\omega)$ согласно (14.17) является нелинейной функцией частоты, т. е. волны различных частот ω проходят по линии с различной скоростью и даже в согласованном режиме «линия работает с искажениями».
2. В линии без потерь $\gamma_0(j\omega) = \alpha_0 + j\beta_0 = j\omega\sqrt{L_0C_0}$, следовательно, согласно (14.34) $v_\phi = 1/\sqrt{L_0C_0}$, т. е. фазовая скорость не зависит от частоты сигналов, время движения волны по линии $t_{зл} = \ell/v_\phi = \ell\sqrt{L_0C_0}$ соответствует (14.25); в результате в согласованном режиме линия без потерь не искажает — сигналы на выход проходят с запаздыванием $t_{зл}$ относительно входа.

Длина волны λ в линии — это минимальное расстояние между точками волны (см. рис. 14.3а), суммарная фаза колебаний в которых отличается на 2π радиан. На примере падающей волны (14.32) в этом случае имеем для момента $t = t_1$:

$$[\omega t_1 + \beta_0(x + \lambda) + \alpha_{пад}] - [\omega t_1 + \beta_0x + \alpha_{пад}] = 2\pi,$$

откуда $\beta_0\lambda = 2\pi$, т. е. длина волны в линии (период по координате)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_0}. \quad (14.35)$$

С учетом (14.34), (14.35) найдем временный интервал, за который волна проходит расстояние, равное длине волны: $\lambda/v_\phi = 2\pi/\omega = T$, откуда

$$\lambda = v_\phi T. \quad (14.36)$$

ВЫВОД на основании (14.36): длина волны в линии равна произведению фазовой скорости на период сигнала (см. п. 14.1.1).

14.5.3. Стоячие волны в линии без потерь

Как известно, в линии без потерь волновое сопротивление $Z_B = \sqrt{L_0/C_0}$, а коэффициент распространения $\gamma_0 = j\omega\sqrt{L_0C_0} = j\beta_0$, т. е. $\alpha_0 = 0$ и затухание амплитуд волн в линии отсутствует. Поэтому в случае равенства амплитуд падающей и отраженной волн (если коэффициент отражения $|n| = 1$) эти волны в некоторой точке линии могут оказаться в противофазе, что приведет к их полной компенсации.

Рассмотрим частный случай КЗ линии ($Z_h = 0$, $\dot{U}_2 = 0$, $n = -1$, $\dot{I}_2 = \dot{I}_{n2} - \dot{I}_{o2} = 2\dot{I}_{n2}$). Тогда уравнения линии как четырехполюсника (14.13) имеют вид в установившемся синусоидальном режиме для комплексов действующих значений

$$\dot{U}_x = \dot{I}_2 Z_B \operatorname{sh} \gamma_0 x; \quad \dot{I}_x = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma_0 x,$$

причем в линии без потерь с учетом (14.35) $\gamma_0 = j\beta_0 = j2\pi/\lambda$, т. е. $\operatorname{ch}(j\beta_0 x) = \cos \beta_0 x$, $\operatorname{sh}(j\beta_0 x) = j \sin \beta_0 x$, откуда уравнения линии будут

$$\dot{U}_x = j\dot{I}_2 Z_B \sin \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad \dot{I}_x = \dot{I}_2 \cos \frac{2\pi x}{\lambda}. \quad (14.37)$$

Примечание. Из (14.37) с учетом $Z_B = \sqrt{L_0/C_0} = \text{const} > 0$ следует, что в любой точке линии синусоиды напряжения и тока сдвинуты на 90° , т. е. мощность $P_x = U_x I_x \cos \varphi_x = 0$.

Находим распределение действующих значений этих синусоид в функции от координаты линии:

$$U_x = I_2 Z_B \left| \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right|, \quad I_x = I_2 \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|; \quad (14.38)$$

графики соответствующие (14.38), приведены на рисунке 14.3б.

Вывод: существуют точки линии, называемые узлами (напряжения, если $U_x = 0$, и тока, если $I_x = 0$), в которых падающая и отраженная волны полностью компенсируются; имеются также точки максимумов, называемые пучностями, в которых падающая и отраженная волны находятся в фазе (т. е. амплитуда результирующей синусоиды волн удваивается); пучности отстоят от узлов на расстоянии четверть длины волны; амплитуда тока (напряжения) в каждой точке линии

неизменна, т. е. похожие на волны графики на рисунке 14.3б как бы «стоят» (стоячие волны).

Примечание. Режим стоячих волн в линии без потерь, когда коэффициент отражения $|n| = 1$, наблюдается также при $\lambda/2$ на выходе линии ($Z_h \rightarrow \infty$) и при реактивной нагрузке ($Z_h = \pm j|Z_h|$).

В заключение рассмотрим характеристики отрезка линии в четверть длины волны в режиме КЗ нагрузки (см. рис. 14.3б). Из (14.37) при $x = \lambda/4$ следует, что входное сопротивление линии в этом случае бесконечно, т. е. $Z_{\lambda/4} = \dot{U}_{\lambda/4}/\dot{I}_{\lambda/4} \rightarrow \infty$. Практическое применение такого закороченного четвертьволнового отрезка линии разнообразно: высокодобротный резонатор, узкополосный фильтр для устранения помех, металлический изолятор волноводов и др.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ И ЦЕПЕЙ

§ 15.1. ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ И ТЕОРЕМА ДИСКРЕТИЗАЦИИ

15.1.1. Аналоговые и дискретные сигналы

В учебной литературе в основном рассматривают непрерывные во времени, т. е. аналоговые сигналы, существующие для любых t ; анализируют процессы в аналоговых цепях из $RLCM$ -элементов и источников аналоговых сигналов.

Вместе с тем, в технике широко используются дискретные цепи и сигналы. На рисунке 15.1 a приведен пример дискретного сигнала $f_{1d}(t)$, который соответствует некоторому аналоговому сигналу $f_1(t)$, показанному на рисунке 15.1 a пунктиром. При этом $f_{1d}(t) = f_1(nT)$ в интервалах времени от nT до $nT + \Delta t$ (где T — период дискретизации, $n = 0, 1, 2, \dots$) и $f_{1d}(t) = 0$ для остальных t .

Если докажем, что по $f_{1d}(t)$ может быть восстановлен исходный непрерывный сигнал, то очевидны преимущества дискретных сигналов:

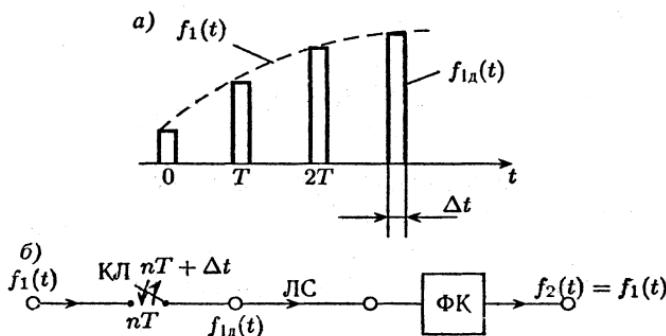


Рис. 15.1

1. Во время пауз можно передавать другую информацию (телефон Котельникова).
2. Во время пауз помеха не действует.
3. Если дополнительно использовать квантование (дискретизацию) сигналов по уровню, т. е. перейти к цифровым сигналам и передавать их в двоичном коде (0; 1), помехоустойчивость резко возрастает.

Пример цепи для формирования и передачи дискретных сигналов приведен на рисунке 15.1б, где КЛ — идеальный ключ, ЛС — линия (канал) связи, ФК — фильтр Котельникова, назначение которого восстановить исходный аналоговый сигнал.

15.1.2. Идеализация дискретных сигналов

Так как на практике интервалы T и Δt очень малы, дискретный сигнал можно приближенно описать суммой дельта-функций с коэффициентами, равными площади отдельных импульсов:

$$f_{1d}(t) \cong \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) \Delta t \delta(t - nT). \quad (15.1)$$

Примечания:

1. Считаем $f_1(t) = 0$, $f_{1d}(t) = 0$ при $t < 0$; в противном случае нижний предел может быть расширен до « $-\infty$ ».
2. Верхний предел n — это целая часть t/T , но запись (15.1) также справедлива, так как $\delta(t - nT) = 0$ при $t < nT$.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением идеализированных дискретных сигналов вида

$$f_{1d}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) \delta(t - nT). \quad (15.2)$$

считая, что каскадно с ключом (рис. 15.2) поставлен усилитель с коэффициентом усиления $1/\Delta t$ (это ограничение при доказательстве теоремы Котельникова будет снято).

С учетом свойства выборки преобразуем (15.2), расширив суммирование до $n = -\infty$

$$f_{1d}(t) = f_1(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = f_1(t) f_{\delta}(t), \quad (15.3)$$

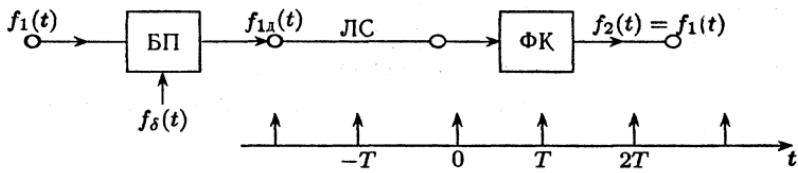


Рис. 15.2

следовательно, схема для передачи дискретных сигналов может быть представлена в виде рисунка 15.2, где $f_\delta(t)$ — периодическая последовательность дельта-функций, БП — блок произведения.

15.1.3. Теорема Котельникова (Найквиста, Шеннона)

Аналоговый сигнал $f_1(t)$, имеющий ограниченный по частоте спектр, так что $F_1(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_m$, может быть полностью восстановлен по дискретным значениям этого сигнала $f_1(nT_0)$, которые считаются с частотой $\omega_0 = 2\omega_m$.

Рассмотрим доказательство в частотной области. В (15.3) периодическая последовательность дельта-функций $f_\delta(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$ с частотой $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\omega_m$ имеет комплексный дискретный спектр $\dot{A}_k = 2\mathcal{F}[\delta(t)]/T_0 = 2/T_0$, где \mathcal{F} — символ прямого преобразования Фурье. Таким образом, вяд Фурье в комплексной форме записывается как

$$f_\delta(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}.$$

Тогда спектр дискретного сигнала, т. е. преобразование Фурье (15.3) будет

$$\begin{aligned} F_{1\Delta}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{1\Delta}(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - k\omega_0)t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_1(j(\omega - k\omega_0)), \quad k = 0, 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (15.4)$$

ВЫВОД: спектр дискретного сигнала (с учетом коэффициента $1/T_0$) имеет ту же форму, что и спектр исходного непрерывного сигнала, но является его периодическим продолжением с периодом $\omega_0 = 2\omega_m$, как показано на рисунке 15.3.

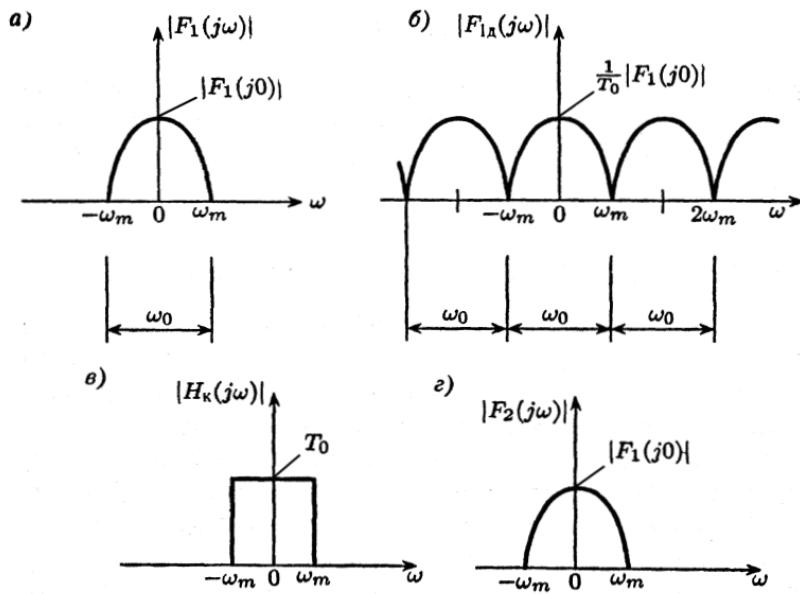


Рис. 15.3

Теперь очевидны требования к частотной характеристике фильтра Котельникова $H_k(j\omega)$. Она должна соответствовать идеальному ФНЧ, имеющему АЧХ вида: $|H_k(j\omega)| = T_0$ при $|\omega| < \omega_m$, $|H_k(j\omega)| = 0$ при $|\omega| > \omega_m$, т. е. на выход ФК гармоники с частотами $|\omega| > \omega_m$ не проходят.

Примечание. В принципе в отличие от (15.2) можно было рассматривать исходный дискретный сигнал (15.1) с множителем Δt ; в этом случае у фильтра Котельникова $|H_k(j0)| = T_0/\Delta t$.

Таким образом, спектр выходного сигнала

$$F_2(j\omega) = F_{1d}(j\omega)H_k(j) = F_1(j\omega),$$

т. е. $f_2(t) = f_1(t)$, и исходный входной аналоговый сигнал восстановлен.

15.1.4. Практика применения теоремы Котельникова

Очевидны причины несоблюдения условий теоремы:

1. Идеальный ФНЧ невозможно реализовать, поскольку его передаточная функция $H(s)$ не является дробно-рациональной. АЧХ реальных ФНЧ (см., например, кривую 2 на рисунке 15.4а в сравнении с характеристикой 1 идеального ФНЧ) «пропустит» на выход фильтра Котельникова часть спектра дискретного сигнала из области $\omega > \omega_m$, что вызовет искажения.

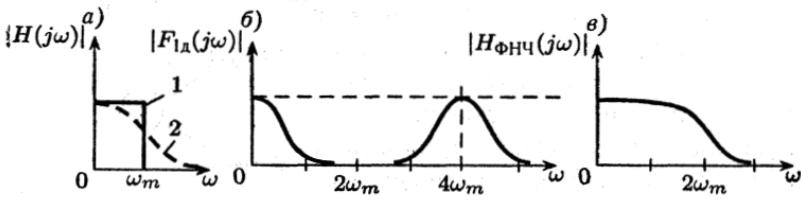


Рис. 15.4

2. Спектр реальных сигналов не ограничен частотой ω_m , например, $\mathcal{F}(\exp t) = 1/(1 + j\omega) \rightarrow 0$ лишь при $\omega \rightarrow \infty$. Поэтому на практике (см. рис. 15.4б), ограничившись частотой ω_m так, что при $\omega > \omega_m$ амплитудный спектр $|F_1(j\omega)|$ пре-небрежимо мал, тем не менее увеличивают частоту дискретизации в 2–5 раз и больше в сравнении с требованиями теоремы Котельникова. Например, если принять $\omega_0 = 4\omega_m$, то в соответствии с (15.4) амплитудный спектр дискретного сигнала будет иметь вид, изображенный на рисунке 15.4б. При этом реальный ФНЧ, характеристика которого показана на рисунке 15.4в, практически решает задачу восстановления исходного непрерывного сигнала.

§ 15.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

15.2.1. Дискретные последовательности (решетчатые функции)

Множество дискретных значений $\{f(nT)\}_{n=0}^{\infty}$ непрерывного сигнала $f(t)$ называется дискретной последовательностью или решетчатой функцией и обычно записывается сокращенно в виде

$$f(nT) = f^*(n). \quad (15.5)$$

Примечания:

- Часто (15.5) называют дискретным сигналом, но строго говоря это не соответствует (15.1), (15.2).
- Часто (15.5) называют цифровой последовательностью, но для этого необходимо дополнить (15.5) квантованием по уровню; поскольку у современных ЦВМ интервал квантования по уровню очень мал, отличие (15.5) от цифровой последовательности невелико.

Дискретные сигналы обрабатывают средствами цифровой техники в ЦВМ или процессорах с целью получить новую последовательность с желаемыми свойствами. Цепь, преобразующая входную последовательность дискретных сигналов $f_1(nT)$ в некоторую выходную последовательность $f_2(nT)$, как указано на рисунке 15.5а, называется дискретной цепью (ДЦ) или дискретным фильтром (или цифровым фильтром, если пренебречь особенностями квантования по уровню).

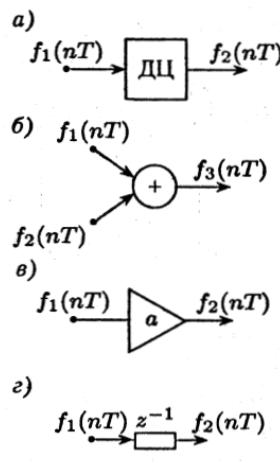


Рис. 15.5

15.2.2. Элементы линейных дискретных цепей

Будем рассматривать только линейные дискретные цепи, которые можно составить из трех простейших элементов, обозначение которых дано на рисунке 15.5б, в, г:

- Элемент суммирования (см. рис. 15.5б), у которого $f_3^*(n) = f_1^*(n) + f_2^*(n)$.
- Элемент масштабирования (рис. 15.5в), уравнение которого $f_2^*(n) = af_1^*(n)$, где a — коэффициент.
- Элемент сдвига или задержки сигнала на один (z^{-1}) или несколько (z^{-m}) дискретных интервалов (рис. 15.5г):

$$f_2(nT) = f_1(nT - T); \\ f_2^*(n) = f_1^*(n - 1),$$

при этом должно быть обязательно задано предначальное условие $f_1^*(-1)$, которому в данном случае соответствует начальное

значение $f_2^*(0) = f_1^*(-1)$, т. е. значение f_2^* при $n = 0$. Если используется элемент « z^{-2} », необходимо знать два предначальных условия $f_1^*(-2)$ и $f_1^*(-1)$.

Очевидно, элементы линейных ДЦ отражают простейшие операции ЦВМ или процессоров.

15.2.3. Схемы дискретных цепей и разностные уравнения

Рассмотрим пример простейшей ДЦ, схема которой приведена на рисунке 15.6а. Это ДЦ первого порядка, которая описывается так называемым разностным уравнением первого порядка:

$$f_2(nT) = 2f_1(nT) - 0,5f_2(nT - T), \quad (15.6)$$

причем должно быть задано предначальное условие $f_2(-T)$.

Примечание. Разностное уравнение может быть получено на основании использования формул численного решения дифференциальных уравнений.

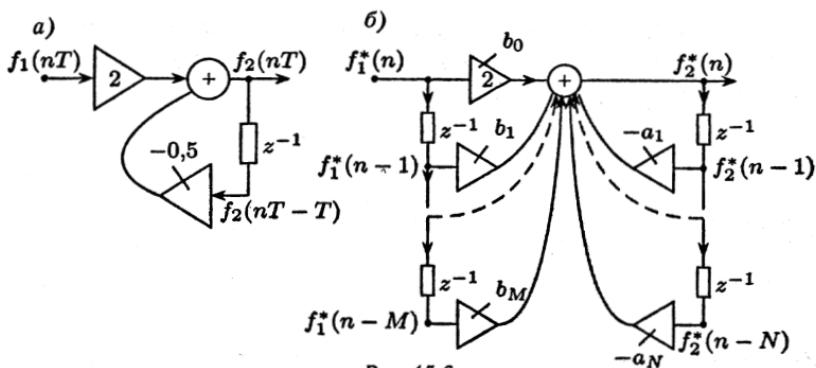


Рис. 15.6

ПРИМЕР 1. Решить методом Эйлера уравнение состояния первого порядка $f_2'(t) = -15f_2(t) + 20f_1(t)$. Переходя к конечным малым приращениям, находим для n -го интервала численного расчета с шагом $T = \Delta t$:

$$\Delta f_2(n) = f_2(n) - f_2(n-1) = -15\Delta t f_2(n-1) + 20\Delta t f_1(n),$$

откуда получим уравнение, которое по форме соответствует разностному уравнению (15.6):

$$\begin{aligned} f_{2(n)} &= b_0 f_{1(n)} - a_1 f_{2(n-1)} = \\ &= 20\Delta t f_{1(n)} - (-1 + 15\Delta t) f_{2(n-1)}. \end{aligned}$$

В общем случае ДЦ N -порядка описывается разностным уравнением порядка N вида:

$$\begin{aligned} f_2^*(n) + a_1 f_2^*(n-1) + a_2 f_2^*(n-2) + \dots \\ \dots + a_N f_2^*(n-N) = b_0 f_1^*(n) + b_1 f_1^*(n-1) + \dots \\ \dots + b_M f_1^*(n-M), \quad (15.7) \end{aligned}$$

причем должны быть заданы предначальные условия $f_2^*(-1), \dots, f_2^*(-N); f_1^*(-1), \dots, f_1^*(-M)$.

Примечания:

1. Уравнение (15.7) имеет так называемую приведенную форму, поскольку $a_0 = 1$.
2. $M \leq N$.

Вывод: по разностному уравнению (15.7) всегда можно составить схему дискретной цепи, например, в варианте, показанном на рисунке 15.6б.

§ 15.3. АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ ЦЕПЕЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

15.3.1. Численное решение разностных уравнений

Используем непосредственную подстановку в разностные уравнения значений реакции и воздействия на каждом шаге численного расчета.

ПРИМЕР 2. Уравнение $f_2^*(n) + 0,5f_2^*(n-1) = 2f_1^*(n)$, где $f_1(nT) = 2nT$, при предначальном условии $f_2^*(-1) = 0$ преобразуем к виду

$$f_2^*(n) = 2nT - 0,5f_2^*(n-1).$$

Численные значения реакции будут

$$\begin{aligned}f_2^*(0) &= 0 - 0,5f_2^*(-1) = 0; \quad f_2^*(1) = 2T - 0,5f_2^*(0) = 2T; \\f_2^*(2) &= 2 \cdot 2T - 0,5f_2^*(-1) = 4T - 0,5 \cdot 2T = 3T; \\f_2^*(3) &= 2 \cdot 3T - 0,5f_2^*(-2) = 6T - 0,5 \cdot 3T = 4,5T;\end{aligned}$$

Графики входной и выходной дискретных последовательностей, т. е. решетчатых функций, приведены на рисунке 15.7.

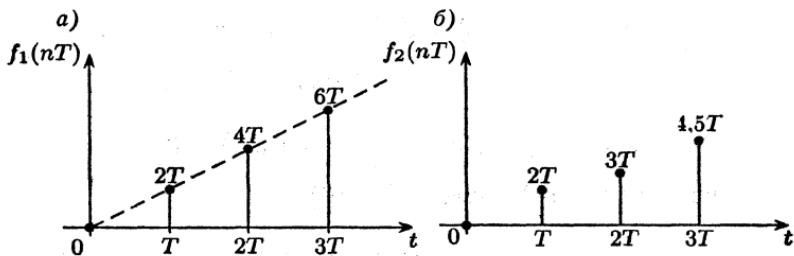


Рис. 15.7

Примечание. Численный расчет соответствует процедуре вычислений в ЦВМ. Однако хотелось бы получить решение «в замкнутой форме» для любого шага n расчета. Математика во многих случаях позволяет найти такое аналитическое решение разностного уравнения ДЦ в t -области в виде суммы двух составляющих — свободной и вынужденной:

$$f_2(nT) = f_{2\text{св}}(nT) + f_{2\text{вын}}(nT). \quad (15.8)$$

15.3.2. Свободная составляющая решения уравнений ДЦ

Свободная составляющая $f_{2\text{св}}(nT)$ — это общее решение однородного разностного уравнения

$$f_2^*(n) + a_1 f_2^*(n-1) + \cdots + a_N f_2^*(n-N) = 0. \quad (15.9)$$

В большинстве случаев свободная составляющая отыскивается в следующей форме:

$$f_{2\text{св}}^*(n) = \sum_{k=1}^N A_k p_k^n = \sum_{k=1}^N A_k e^{\alpha_k nT}, \quad p_k = e^{\alpha_k T}, \quad (15.10)$$

где p_k — корни характеристического полинома (ХП) уравнений ДЦ

$$p^N + a_1 p^{N-1} + \cdots + a_N = 0. \quad (15.11)$$

Примечание. Если корень p_1 — кратный, то подобно аналоговым цепям выполняется

$$f_{2\text{cb}}(nT) = A_1 p_1^n + A_2 n p_1^n + A_3 n^2 p_1^n + \dots,$$

причем A_k в (15.10) — неизвестные коэффициенты, определяемые по предначальным условиям.

Решение в форме $f_2^*(n) = Ap^n$ подставляем в (15.9):

$$A(p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_N p^{n-N}) = 0,$$

откуда

$$Ap^{n-N}(p^N + a_1 p^{N-1} + \cdots + a_N) = 0,$$

что приводит к (15.11) и далее к (15.10).

ПРИМЕР 3. Уравнению $f_2^*(n) + 0,5 f_2^*(n-1) = 2f_1^*(n)$ соответствует ХП $p + 0,5 = 0$, корень которого $p_1 = -0,5$, т. е. $f_{2\text{cb}}^*(n) = A_1(-0,5)^n$.

ПРИМЕР 4. Разностному уравнению второго порядка $f_2^*(n) - 0,25 f_2^*(n-2) = f_1^*(n)$ соответствует ХП $p^2 - 0,25 = 0$; корни будут $p_{1,2} = \pm 0,5$, следовательно, $f_{2\text{cb}}^*(n) = A_1 0,5^n + A_2 (-0,5)^n$.

Примечание. Очевидно, чтобы ДЦ была устойчива, т. е. решение не расходилось, необходимо выполнение условия

$$|p_k| < 1, \quad (15.12)$$

тогда $f_{2\text{cb}}(nT) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

15.3.3. Вынужденная составляющая решения уравнений ДЦ

Вынужденная составляющая $f_{2\text{вын}}(nT)$ — это частное решение неоднородного разностного уравнения (15.7).

Обычно $f_{2\text{вын}}^*(n)$ ищут в математической форме воздействия, например,

если $f_1 = a(nT)^2$, то $f_{2\text{вын}} = A(nT)^2 + B(nT) + D$;

если $f_1 = ap^n$, то $f_{2\text{вын}} = Ap^n$;

если $f_1 = a \sin(n\gamma)$, то $f_{2\text{вын}} = A \sin(n\gamma) + B \cos(n\gamma)$,

причем $f_{2\text{вын}}$ с неизвестными коэффициентами A , B , D подставляют в неоднородное уравнение (15.7); приравнивая его левую и правую части, находят A , B , D .

ПРИМЕР 5. Разностному уравнению $f_2^*(n) + 0,5f_2^*(n-1) = 2nT$ при начальном условии $f_2^*(-1) = 0$ соответствует вынужденная составляющая решения в форме аналога полинома первого порядка $f_{2\text{вын}} = AnT + B$. Подставляя ее в уравнение ДЦ, получим

$$(AnT + B) + 0,5[A(n-1)T + B] = 2nT.$$

Приравнивая слева и справа коэффициенты при $(nT)^1$ и $(nT)^0$, получим соответственно уравнения:

$$A + 0,5A = 2; \quad B - 0,5AT + 0,5B = 0,$$

откуда $A = 4/3$; $B = 4T/9$. Используя данные примера 3, находим согласно (15.8)

$$f_2(nT) = f_{2\text{св}} + f_{2\text{вын}} = A_1(-0,5)^n + 4nT/3 + 4T/9.$$

Неизвестный коэффициент A_1 в свободной составляющей определяем по предначальных условиям:

$$f_2^*(-1) = 0 = A_1(-0,5)^{-1} - 4T/3 + 4T/9; \quad A_1 = -4T/9.$$

Итак, $f_2(nT) = (-4T/9)(-0,5)^n + 4nT/3 + 4T/9$, что полностью соответствует данным численного решения примера 2.

15.3.4. Переходная характеристика ДЦ

Переходной характеристикой ДЦ $h_1^*(n)$ называют реакцию цепи при нулевых предначальных условиях на единственное в цепи воздействие вида единичной ступенчатой последовательности импульсов, изображенной на рисунке 15.8а:

$$1^*(n) = \delta_1^*(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0. \end{cases} \quad (15.13)$$

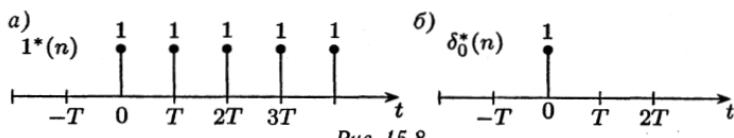


Рис. 15.8

Способ отыскания $h_1(nT)$ — обычное решение разностного уравнения ДЦ.

ПРИМЕР 6. ДЦ описывается уравнением $f_2^*(n) + 0,5f_2^*(n - 1) = 2f_1^*(n)$. Для расчета дискретной переходной характеристики $h_1^*(n)$ принимаем $f_1^*(n) = 1$, $f_2^*(-1) = 0$. На основании примера 2 имеем $h_{1\text{cb}}^*(n) = f_{2\text{cb}}^*(n) = A_1(-0,5)^n$. Вынужденная составляющая должна быть постоянной $h_{1\text{вын}}^*(n) = f_{2\text{вын}}^*(n) = B$, подстановка которой в уравнение ДЦ дает: $B + 0,5B = 2$, т. е. $B = 4/3$. Таким образом, решением будет $f_2^*(n) = A_1(-0,5)^n + 4/3$. Поскольку выполняется $f_2^*(-1) = 0 = A_1(-0,5)^{-1} + 4/3$, то $A_1 = 2/3$. Итак, для любых n (начиная с $n = -\infty$) имеем $h_1^*(n) = [(2/3)(-0,5)^n + 4/3]1^*(n)$.

15.3.5. Импульсная характеристика ДЦ

Дискретной импульсной характеристикой $h^*(n)$ называют реакцию ДЦ при нулевых начальных условиях на единственное в цепи воздействие вида одного импульса единичной высоты (см. рис. 15.8б), которое называют δ_0 -последовательностью

$$\delta_0^*(n) = \delta_0(nT) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (15.14)$$

Способ отыскания $h(nT)$ следующий: так как из рисунка 15.8 и формул (15.13), (15.14) очевидно, что δ_0 -последовательность является разностью двух смешенных единичных последовательностей

$$\delta_0(nT) = 1(nT) - 1(nT - T), \quad (15.15)$$

то по принципу наложения получаем

$$h(nT) = h_1(nT) - h_1(nT - T); \quad (15.16)$$

причем очевидно, что $h^*(0) = h_1^*(0) = b_0$. (15.17)

Следует отметить, что для дискретных линейных цепей справедливы при нулевых начальных условиях свойства линейности — принципы пропорциональности и наложения:

если

$$f_{\text{вх}}^*(n) = Af_{1I}^*(n) + Bf_{1II}^*(n),$$

то

$$f_{\text{вых}}^*(n) = Af_{2I}^*(n) + Bf_{2II}^*(n),$$

где f_{2I} , f_{2II} — реакции ДЦ на воздействия f_{1I} и f_{1II} .

ПРИМЕР 7. Найти $h^*(n)$ для ДЦ примера 6. В соответствии с (15.15), (15.16) находим

$$\begin{aligned} h^*(n) &= \left[\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \frac{4}{3} \right] 1^*(n) - \\ &\quad - \left[\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{4}{3} \right] 1^*(n-1), \end{aligned}$$

что для $n \geq 1$ дает

$$\begin{aligned} h_1^*(n) &= \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} - \frac{4}{3} = \\ &= \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{-1} \right] = 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

Поскольку, на основании (15.17) и примера 6 имеем $h_1^*(0) = h^*(0) = 2$, то, объединяя результаты, можем для любых n записать $h^*(n) = 2(-0,5)^n 1^*(n)$.

15.3.6. Дискретная свертка импульсной характеристики с дискретным воздействием

Дискретный входной сигнал $f_1^*(n)$ можно представить суммой смещенных функций $\delta_0^*(n-k)$ с коэффициентами $f_1^*(n)$. Элементарное воздействие $f_1^*(k)\delta_0^*(n-k)$ даст к моменту $t = nT$ реакцию $f_1^*(k)h^*(n-k)$, причем здесь величина $f_1^*(k)$ играет роль коэффициента, учитываемого в линейных ДЦ по принципу пропорциональности.

Таким образом, по принципу наложения суммарная реакция от совокупности элементарных воздействий имеет вид

$$f_2^*(n) = \sum_{k=0}^n f_1^*(k) h^*(n-k). \quad (15.18)$$

Примечание. Дискретная свертка (15.18) по форме согласуется с записью интеграла свертки $f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)h(t-\tau) d\tau$.

Основной недостаток (15.18) заключается в том, что с ростом n число слагаемых возрастает и получить аналитическую запись $f_2^*(n)$ «в замкнутой форме» сложно. В то же время в отличие от 15.3.1 расчет значения $f_2^*(n)$ по формуле (15.18) не требует предварительного вычисления $f_2^*(n-1)$.

Вывод: рассмотренный в § 15.3 анализ дискретных цепей во временной области в целом подобен расчету переходных процессов в аналоговых цепях в t -области; достоинство анализа — физичность, недостаток — разноплановость и трудоемкость расчетов во многих случаях.

§ 15.4. ПРИМЕНЕНИЕ z -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ В ДИСКРЕТНЫХ ЦЕПЯХ

15.4.1. Понятие о прямом z -преобразовании

Используем из 15.1.2 представление дискретных сигналов суммой дельта-функций:

$$f_{\Delta}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT). \quad (15.19)$$

Преобразовав (15.19) по Лапласу с учетом $\delta(t-nT) \div e^{-nTs}$, переходим к так называемому дискретному преобразованию Лапласа:

$$f_{\Delta}(t) \div F_{\Delta}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-snT}. \quad (15.20)$$

Введя в (15.20) замену переменных $e^{sT} = z$, получим z -преобразование дискретного сигнала:

$$F_{\Delta}(s)|_{e^{sT}=z} = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \div f_{\Delta}(t); \quad (15.21)$$

однако обычно формулу (15.21) прямого z -преобразования записывают в сокращенной условной форме:

$$f(nT) = f^*(n) \div F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} = \mathcal{Z}[f^*(n)], \quad (15.22)$$

где z — символ прямого z -преобразования.

Итак, z -преобразование целиком вытекает из преобразования Лапласа.

15.4.2. Основные свойства и теоремы z -преобразования

Запишем основные свойства и теоремы z -преобразования.

1. Свойство линейности:

$$\Sigma a_k f_k(nT) \div \Sigma a_k F_k(z). \quad (15.23)$$

2. Свойство коммутативности с операциями взятия вещественной и мнимой частей:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(nT) &\div \operatorname{Re} F(z), \\ \operatorname{Im} f(nT) &\div \operatorname{Im} F(z). \end{aligned} \quad (15.24)$$

3. Теорема о дифференцировании z -преобразования вытекает из теоремы преобразования Лапласа о дифференцировании изображения:

$$tf(t) \div -\frac{\partial F(s)}{\partial s};$$

аналогично с учетом (15.21), (15.22) при z -преобразовании получим

$$\begin{aligned} nTf(nT) \div -\frac{\partial F_d(s)}{\partial s} \Big|_{e^{sT}=z} &= \\ &= -\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial F(z)}{\partial z} = -Tz \frac{\partial F(z)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (15.25)$$

4. Теорема запаздывания для непрерывных сигналов, начинаяющихся с момента t_0 , имела вид $f(t-t_0)\delta_1(t-t_0) \div F(s)e^{-st_0}$. Аналогично для дискретных сигналов имеем

$$\begin{aligned} f(nT-mT)1(nT-mT) \div \\ \div F_d(s)e^{-mTs} \Big|_{e^{sT}=z} = z^{-m}F(z). \end{aligned} \quad (15.26)$$

5. Теорема о начальном и конечном значениях:

$$f^*(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z), \quad (15.27)$$

что следует из (15.22): $F(z) = f^*(0) + f^*(1)z^{-1} + f^*(2)z^{-2} + \dots$;

$$f^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z), \quad (15.28)$$

что согласуется с формулой $A1^*(n) \div Az/(z-1)$, которая будет обоснована в п. 15.4.3

6. Теорема свертки:

$$f_2^*(n) = \sum_{k=0}^n f_1^*(k)h^*(n-k) \div F_2(z) = F_1(z)H(z), \quad (15.29)$$

где $h(nT) \div H(z)$. Таким образом, необходимо доказать, что в правой части (15.29)

$$\begin{aligned} F_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_2^*(n)z^{-n} = \\ &= \left(\sum_{0}^{\infty} f_1^*(n)z^{-n} \right) \left(\sum_{0}^{\infty} h^*(n)z^{-n} \right). \end{aligned} \quad (15.30)$$

Определим в (15.30) величины слева и справа при одинаковых степенях z , например, при z^{-n} :

$$f_2^*(n) = f_1^*(0)h^*(n) + f_1^*(1)h^*(n-1) + \dots + f_1^*(n)h^*(0),$$

что полностью соответствует левой части (15.29).

7. Теорема об учете ненулевых предначальных условий. Пусть $f_2^*(n) = f_1^*(n-1)$, причем на основании (15.22) имеем

$$F_1(z) = f_1^*(0) + f_1^*(1)z^{-1} + f_1^*(2)z^{-2} + \dots.$$

Тогда будет

$$\begin{aligned} F_2(z) &= f_2^*(0) + f_2^*(1)z^{-1} + f_2^*(2)z^{-2} + f_2^*(3)z^{-3} + \dots = \\ &= f_1^*(-1) + f_1^*(0)z^{-1} + f_1^*(1)z^{-2} + f_1^*(2)z^{-3} + \dots = \\ &= f_1^*(-1) + z^{-1}F_1(z) \div f_1^*(n-1). \end{aligned}$$

Аналогично получаем $f^*(n-2) \div f^*(-2) + z^{-1}f^*(-1) + z^{-2}F(z)$, и в общем случае записываем

$$f^*(n-m) \div f^*(-m) + z^{-1}f^*(-m+1) + \dots + z^{-m+1}f^*(-1) + z^{-m}F(z), \quad (15.31)$$

причем (15.31) отличается от теоремы запаздывания (15.26), где благодаря множителю $1^*(n-m)$ предначальные условия были нулевыми.

15.4.3. Таблицы z -преобразования

1. Одиночный дискретный сигнал в виде δ_0 -последовательности (см. (15.14) и рисунок 15.1б) по определению прямого z -преобразования (15.22):

$$\delta_0^*(n) \div 1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + \dots = 1. \quad (15.32)$$

2. Единичная ступенчатая последовательность (см. (15.13) и рисунок 15.1а)

$$1^*(n) \div 1 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} + \dots \\ \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}, \quad (15.33)$$

что следует из формулы суммы убывающей геометрической прогрессии в области $|z| > 1$, которая на основании (15.21) соответствует правой полуплоскости аргумента s преобразования Лапласа.

На основании (15.23) $A \cdot 1^*(n) \div Az/(z - 1)$.

3. Линейно нарастающая последовательность (аналог $t\delta_1(t)$).

Используя (15.25), получим

$$nT \cdot 1(nT) \div -Tz \frac{\partial}{\partial z} [\mathcal{Z}(1^*(n))] = \\ = -Tz \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{z - 1} \right) = \frac{Tz}{(z - 1)^2}. \quad (15.34)$$

Аналогично имеем

$$(nT)^2 1(nT) \div -Tz \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{Tz}{(z - 1)^2} \right].$$

4. Степенная решетчатая функция (аналог экспоненты $e^{\alpha T}$, т. е. $e^{\alpha nT} = a^n$)

$$a^n \div a_0 + a^1 z^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad (15.35)$$

что следует из формулы убывающей геометрической прогрессии при $|z/a| > 1$.

5. Произведение линейно нарастающей и степенной последовательностей (аналог $te^{\alpha t}$).

На основании (15.25) находим

$$nTa^n \div -Tz \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{z - a} \right) = \frac{Taz}{(z - a)^2}, \quad (15.36)$$

что легко запомнить, прочитав «по-русски» числитель и учитывая по аналогии с непрерывными сигналами, что двукратному полюсу $F(z)$ соответствует появление nT в оригиналe.

6. Аналог синусоиды. На основании (15.24)

$$\sin \omega nT = \operatorname{Im} e^{j\omega nT} = \operatorname{Im} a^n \Big|_{a=e^{j\omega T}} \div \operatorname{Im} \frac{z}{z - a} \Big|_{a=e^{j\omega T}}.$$

Примечание. Фактически важны лишь три формулы (15.32), (15.35), (15.36), поскольку (15.33), (15.34) получают из (15.35), (15.36) при $a = 1$.

15.4.4. Понятие об обратном z -преобразовании.

Численный расчет оригинала

Формула обратного z -преобразования имеет вид

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} F(z) z^{n-1} dz,$$

причем интегрирование ведут по контуру γ так, чтобы все осо- бые точки $F(z)$ лежали внутри контура.

Однако на практике для перехода к оригиналe $f(nT)$ от дробно-рациональной функции $F(z)$ используют другие методы. Иногда используют метод численного расчета дискретной последовательности по z -преобразованию $F(z)$.

Действительно, по определению $F(z) = f^*(0) + f^*(1)z^{-1} + f^*(2)z^{-2} + \dots$, т. е. коэффициенты при убывающих степенях

этого ряда (ряда Лорана) определяют значения дискретного сигнала. Если $F(z)$ — дробно-рациональная функция, для получения ее разложения в ряд Лорана достаточно осуществить деление числителя $F(z)$ на знаменатель по старшим степеням z .

15.4.5. Использование теоремы разложения для обратного z -преобразования

По аналогии с теоремой разложения преобразования Лапласа, зная полюсы z_k дробно-рациональной функции $F(z)$, можно для перехода к оригиналу использовать разложение $F(z)$ на простейшие составляющие:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{b_M z^M + \dots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + \dots + a_1 z + a_0} = \frac{B(z)}{A(z)} = \\ &= \frac{B(z)/a_N}{\prod_{k=1}^N (z - z_k)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k z}{z - z_k} + A_0 \div f^*(n) = \\ &= \sum_{k=1}^N A_k z_k^n + A_0 \delta_0^*(n), \end{aligned} \quad (15.37)$$

$$A_0 = \lim_{z \rightarrow 0} F(z), \quad A_k = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{z} F(z), \quad (15.38)$$

причем достоинство и наглядность структуры каждой формулы в (15.38) в том, что ее использование «исключает» все коэффициенты A_k , кроме искомого, сохраняя равенство левой и правой частей в (15.37).

ПРИМЕР 8.

$$F(z) = \frac{2z}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{4})} = \frac{A_1 z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{A_2 z}{z + \frac{1}{4}} + A_0.$$

$$A_0 = F(0) = 0,$$

$$A_1 = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{z - \frac{1}{2}}{z} F(z) = \frac{2}{z + \frac{1}{4}|_{z=\frac{1}{2}}} = \frac{8}{3},$$

$$A_2 = \frac{2}{z - \frac{1}{2}|_{z=-\frac{1}{4}}} = -\frac{8}{3}.$$

Тогда получим

$$f^*(n) = \frac{8}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{8}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n.$$

Проведем контроль оригинала на основании (15.27),
(15.28):

$$f^*(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0;$$

$$f^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) = 0.$$

ПРИМЕР 9.

$$F(z) = \frac{4}{z^2 + 2z + 2} = \frac{4}{(z+1-j)(z+1+j)} = \\ = A_0 + \frac{A_1 z}{z+1-j} + \frac{A_2 z}{z+1+j}.$$

$$A_0 = F(0) = 2. \quad A_1 = \frac{4}{z(z+1+j)|_{z=-1+j}} = \sqrt{2}e^{j135^\circ}; \\ A_2 = A_1^* = \sqrt{2}e^{-j135^\circ},$$

т. е. коэффициенты A_1 и A_2 , как и полюсы $z_{1,2} = -1 \pm j$, являются сопряженными. Решетчатая функция (дискретная последовательность, оригинал) записывается как

$$f^*(n) = 2\delta_0^*(n) + \\ + \left[\sqrt{2}e^{j135^\circ}(-1+j)^n + \sqrt{2}e^{-j135^\circ}(-1-j)^n \right] = \\ = 2\delta_0^*(n) + \\ + \left[\sqrt{2}e^{j135^\circ} \left(\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}} \right)^n + \sqrt{2}e^{-j135^\circ} \left(\sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}} \right)^n \right] = \\ = 2\delta_0^*(n) + 2\sqrt{2} \left(\sqrt{2} \right)^n \cos \left(\frac{3\pi}{4}n + 135^\circ \right).$$

Контроль: $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0 = 2 + 2\sqrt{2} \cos 135^\circ$, формула (15.28) в данном случае неприемлема, поскольку при $|z_k| > 1$ оригинал расходится, ДЦ неустойчива, что соответствует (15.12).

Примечания:

1. Теорема разложения (15.37) приведена для случая простых полюсов z_k . При наличии кратных полюсов функции $F(z)$ ее разложение производится аналогично (15.37), но с учетом (15.34), (15.36), например

$$F(z) = \frac{\dots}{(z+0,5)^2 \dots} = \frac{A_1 z}{z+0,5} + \frac{A_2 z}{(z+0,5)^2} + \dots \div \\ \div f^*(n) = A_1(-0,5)^n + \frac{A_2}{0,5} n(-0,5)^n + \dots,$$

причем A_2 можно найти по аналогии с (15.38) по формуле

$$A_2 = \lim_{z \rightarrow 0,5} \frac{(z + 0,5)^2}{z} F(z),$$

а A_1 — методом неопределенных коэффициентов.

2. Если в знаменателе $F(z)$ содержится множитель z^{-m} , то при использовании теоремы разложения (15.37) необходимо учитывать и теорему запаздывания (15.26), например,

$$F(z) = z^{-m} F_1(z) \div f^*(n) = f_1^*(n - m) \cdot 1^*(n - m).$$

причем для отыскания оригинала $F_1(z)$ применяют (15.37).

15.4.6. Передаточная функция ДЦ и связь ее с разностным уравнением цепи

Передаточной функцией $H(z)$ дискретной цепи называют z -преобразование дискретной импульсной характеристики при нулевых начальных условиях, а также отношение z -преобразований реакции и воздействия при нулевых начальных условиях:

$$h^*(n) \div H(z) = \frac{F_2(z)}{F_1(z)}. \quad (15.39)$$

Отыскивать дискретную передаточную функцию можно на основании (15.39), но проще использовать связь $H(z)$ с разностным уравнением ДЦ:

$$\begin{aligned} f_2^*(n) + a_1 f_2^*(n - 1) + \cdots + a_N f_2^*(n - N) &= \\ = b_0 f_1^*(n) + b_1 f_1^*(n - 1) + \cdots + b_M f_1^*(n - M). \end{aligned} \quad (15.40)$$

Найдем z -преобразование (15.40), учитывая нулевые начальные условия и формулы (15.26), (15.31) для запаздывающих сигналов

$$\begin{aligned} F_2(z)(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}) &= \\ = F_1(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}), \end{aligned}$$

откуда на основании (15.39) получим

$$H(z) = \frac{F_2(z)}{F_1(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}. \quad (15.41)$$

Вывод: по разностному уровню ДЦ (15.40) может быть просто найдена передаточная функция ДЦ (15.41) и наоборот.

Следствие: из сравнения (15.11) и (15.41) вытекает, что знаменатель передаточной функции полностью определяет характеристический полином ДЦ, а корни последнего — это полюсы $H(z)$.

Из (15.39) вытекает формула для расчета переходной характеристики ДЦ: $h_1(nT) \div H_1(z) = \frac{z}{z-1} H(z)$. (15.42)

ПРИМЕР 10. $f_2^*(n) + 0,5f_2^*(n-1) = 2f_1^*(n)$. На основании (15.41) получим

$$H(z) = \frac{2}{1+0,5z^{-1}} = \frac{2z}{z+0,5} \div h^*(n) = 2 \cdot (-0,5)^n 1^*(n),$$

что совпадает с результатом примера 7.

§ 15.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНОЙ ЦЕПИ ПО ПРОТОТИПУ-АНАЛОГУ

Необходимо спроектировать дискретную цепь, которая преобразовывала бы дискретные сигналы точно так же, как соответствующая ей аналоговая цепь, для которой известны требования к обработке непрерывных входных сигналов.

Существуют различные методы перехода от аналогового фильтра-прототипа к соответствующей ДЦ. Некоторые из этих методов базируются на численных алгоритмах решения уравнений состояния (см., например, пример 1). Наиболее удачной считается так называемая билинейная форма перехода от неявного алгоритма Эйлера. В этом случае от уравнений состояния в матричной форме

$$\left[\frac{df_2}{dt} \right] = [\Phi(t)], \quad (15.43)$$

где $[\Phi(t)] = [A][f_2(t)] + [B][f_1(t)]$, переходят к численному расчету путем приближенной записи (15.43) в следующем виде для n -го шага расчета

$$\frac{[f_2^*(n)] - [f_2^*(n-1)]}{T} = \frac{[\Phi^*(n)] + [\Phi^*(n-1)]}{2}, \quad (15.44)$$

причем в (15.44) шаг численного интегрирования принят равным $\Delta t = T$, и, главное, в правой части берут среднее

значение на данном шаге расчета, а не значение $[f_2^*(n - 1)]$ предшествующего шага, как в алгоритме явной формы метода Эйлера.

Преобразуем (15.43) по Лапласу при нулевых начальных условиях:

$$s[F_2(s)] = [\Phi(s)], \quad (15.45)$$

возьмем z -преобразование от (15.44):

$$\frac{(1 - z^{-1})[F_2(z)]}{T} = \frac{(1 + z^{-1})[\Phi(z)]}{2},$$

или

$$\frac{2(z - 1)}{T(z + 1)}[F_2(z)] = [\Phi(z)]. \quad (15.46)$$

Вывод: из сравнения (15.45), (15.46) следует, что для определения параметров передаточной функции ДЦ $H(z)$ необходимо в передаточной функции $H(s)$ аналогового фильтра-прототипа произвести следующую замену:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}}. \quad (15.47)$$

При использовании явной формы алгоритма Эйлера получим вместо (15.47) формулу

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=(z-1)/T}.$$

Кроме того, применяют метод полного соответствия переходных характеристик аналоговой цепи $h_1(t)$ и ДЦ $h_1(nT)$ при $t = nT$. Определив переходную характеристику ДЦ $h_1(nT) \div H_1(z)$, далее на основании (15.42) находим ПФ.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

§ 16.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ЦЕПЕЙ

16.1.1. Понятие о нелинейной цепи

Рассматриваемые выше линейные аналоговые и дискретные цепи описывались линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями. Параметры линейных цепей не зависели от интенсивности электромагнитных процессов, т. е. от величин токов и напряжений. Однако линейные аналоговые *RLCM*-цепи — это идеализация реальных цепей, которые в широком диапазоне изменения переменных являются нелинейными. Характеристики нелинейных элементов описываются нелинейными уравнениями $u_R = u_R(i_R)$, $\psi_L = \psi_L(i_L)$, $q_C = q_C(u_C)$.

Цепь, содержащая хотя бы один нелинейный элемент, называется нелинейной. Параметры нелинейного элемента (НЭ) зависят от значений его токов или напряжений, например, $R_{\text{НЭ}}(i)$ или $G_{\text{НЭ}}(i)$.

16.1.2. Статические и дифференциальные параметры НЭ

Статический параметр обычно характеризует рабочую точку НЭ по постоянному току, а дифференциальный — работу НЭ в окрестности этой рабочей точки.

Обозначение нелинейных *R*-, *L*-, *C*-элементов с указанием полярности напряжения, согласованной с направлением тока, приведено на рисунке 16.1а.

Пусть *R*-НЭ имеет вольт-амперную характеристику, указанную на рисунке 16.1б. Тогда графики его статического

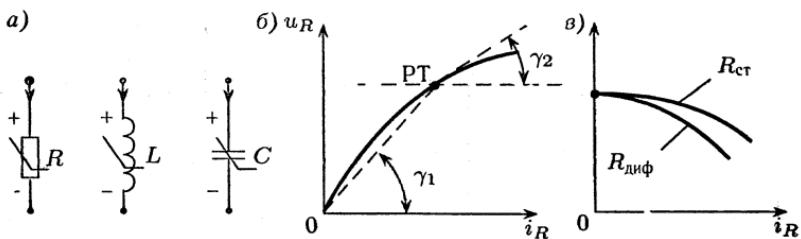


Рис. 16.1

и дифференциального сопротивлений, определяемых в каждой рабочей точке характеристики по формулам

$$R_{ct} = \frac{u_R}{i_R} \Big|_{PT} \sim \operatorname{tg} \gamma_1, \quad R_{dif} = \frac{du_R}{di_R} \Big|_{PT} \sim \operatorname{tg} \gamma_2,$$

имеют вид, изображенный на рисунке 16.1в (где PT-рабочая точка).

Аналогично для накопителей будет

$$\begin{aligned} L_{ct} &= \frac{\psi_L}{i_L} \Big|_{PT}, & L_{dif} &= \frac{d\psi_L}{di_L} \Big|_{PT}; \\ C_{ct} &= \frac{q_C}{u_C} \Big|_{PT}, & C_{dif} &= \frac{dq_C}{du_C} \Big|_{PT}. \end{aligned}$$

При расчете процессов в накопителе в окрестности некоторой рабочей точки, например, при анализе напряжения

$$u_L = \frac{d\psi_L}{dt} = \frac{d\psi_L}{di_L} \frac{di_L}{dt} = L_{dif}(i_L) i'_L(t)$$

приходится работать с дифференциальными параметрами.

16.1.3. Классификация нелинейных элементов и цепей

Существует множество признаков классификации. Рассмотрим некоторые.

1. *Нелинейные резистивные цепи и нелинейные динамические цепи.* Первые описываются нелинейными алгебраическими уравнениями, вторые — нелинейными дифференциальными.

2. *Нелинейные цепи с одним НЭ и с несколькими.* Особенность цепи о одним НЭ заключается в том, что ее можно рассчитать методом эквивалентных источников, что существенно

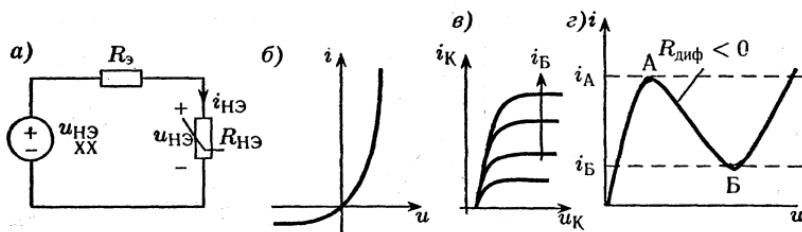


Рис. 16.2

упрощает задачу. Например, эквивалентную схему нелинейной R -цепи можно представить в виде, указанном на рисунке 16.2а.

3. *НЭ с неуправляемой* (рис. 16.2б) и *управляемой* (рис. 16.2в) *характеристикой*. В случае рисунка 16.2б, где для примера представлена характеристика полупроводникового диода, НЭ является двухполюсником, а в случае рисунка 16.2в, где приведена зависимость тока коллектора i_k транзистора от напряжения u_k при различных токах базы i_B , приходится иметь дело с активным трехполюсником. Здесь имеется в виду зависимость (управляемость) характеристики от электрического фактора i_B : при различных температурах на рисунке 16.2б тоже будет семейство характеристик.

4. *НЭ с положительными дифференциальными параметрами* (рис. 16.2б) и *НЭ, имеющие падающие участки характеристик*. На рисунке 16.2г представлена для примера характеристика туннельного диода, где $R_{\text{диф}} < 0$ на участке АБ, что, в частности, может быть использовано в генераторах для компенсации активных потерь.

5. *НЭ с однозначной* (рис. 16.2б) *характеристикой* и *НЭ с неоднозначной характеристикой*. Последнему соответствует, например, характеристика катушки индуктивности с сердечником, изображенная на рисунке 16.3а, где стрелками указано движение по частным петлям гистерезиса в зависимости от начальных условий $i_L(0)$, $\psi_L(0)$ и знака производной $i'_L(0)$ в исходной рабочей точке. Кстати, характеристика туннельного диода (рис. 16.2г) неоднозначна для напряжений в диапазоне токов от i_B до i_A .

6. *НЭ с несимметричными* (рис. 16.2б) и *НЭ с симметричными характеристиками*. Примеры последних

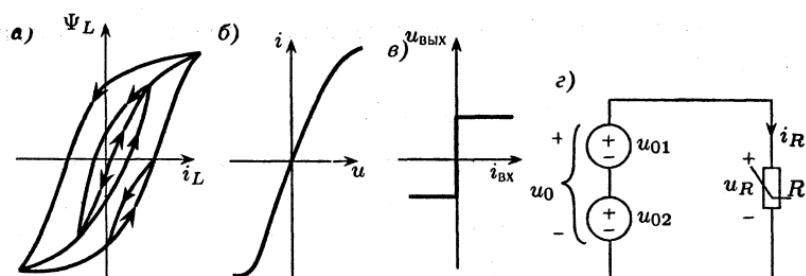


Рис. 16.3

приведены на рисунке 16.3б (лампа накаливания), а также на рисунке 16.3в (реле), причем здесь выходное напряжение $u_{\text{вых}}$ ИНУТ, т. е. источник напряжения управляемого током, зависит только от знака входного тока $i_{\text{вх}}$. Если в цепи присутствуют НЭ только с симметричными характеристиками, то при симметричном периодическом воздействии, обладающем свойством $f(t) = -f(t \pm 0,5T)$, где T — период, реакции будут обладать таким же свойством.

Следует отметить, что каждому классу нелинейных цепей, как правило, соответствует специфичный аппарат приближенного расчета, поскольку общих точных аналитических методов анализа нелинейных цепей не существует.

16.1.4. Общие свойства нелинейных цепей

1. Справедливы уравнения, составляемые по законам Кирхгофа, т. е. уравнения соединений.

2. Остаются справедливыми принципы непрерывности потокосцепления в L -элементах и заряда в C -элементах.

3. Несправедливы в общем случае все свойства линейности (пропорциональности, т. е. однородности; дифференцируемости и интегрируемости, т. е. стационарности; наложения, т. е. аддитивности, суперпозиции).

Действительно, пусть в цепи, изображенной на рисунке 16.3г, вольт-амперная характеристика R -НЭ имеет вид $i_R = au_R^2$. Тогда $i_R = au_0^2 = a(u_{01} + u_{02})^2 \neq au_{01}^2 + au_{02}^2$, т. е. принцип наложения не выполняется.

4. Нелинейные цепи в общем случае обладают свойством преобразовывать спектр входного периодического сигнала.

У линейных цепей спектр выходного периодического сигнала определяется по формуле

$$\dot{A}_{k\text{вых}} = \dot{A}_{k\text{вх}} H(j\omega)|_{\omega=k\omega_1},$$

т. е. частоты гармоник ряда Фурье реакции и воздействия $k\omega_1$ одинаковы. На выходе нелинейных цепей при периодическом воздействии могут появиться гармоники новых частот, и спектральный состав периодического сигнала на выходе может не соответствовать спектральному составу на входе.

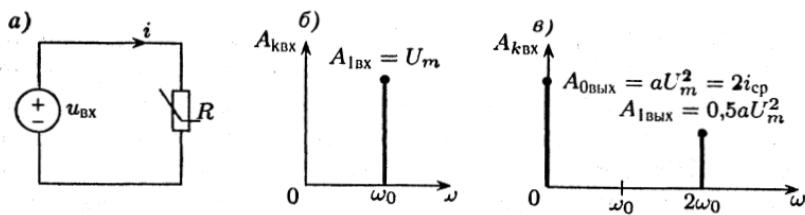


Рис. 16.4

Действительно, пусть в простейшей цепи, изображенной на рисунке 16.4а, воздействие будет $u_{\text{вх}} = U_m \cos \omega_0 t$, i — реакция, причем $i_R = au_R^2$. Тогда выполняется $i = au_{\text{вх}}^2 = aU_m^2 \cos^2 \omega_0 t = 0,5aU_m^2[1 + \cos 2\omega_0 t]$. Спектральные составы воздействия и реакции, представленные соответственно на рисунке 16.4б, в, различны.

§ 16.2. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

16.2.1. Графический расчет нелинейных R -цепей

Основные черты метода будут очевидны из рассмотренного ниже примера.

ПРИМЕР 1. Схема цепи приведена на рис. 16.5а, вольт-амперные характеристики (ВАХ) резистивных элементов указаны на рисунке 16.5б, где также отражены все графические построения. Вначале находят результирующую ВАХ $u_{23}(i_1)$ двухполюсника R_{23} , соответствующего параллельному соединению R_2 и R_3 . Поскольку $i_1 = i_{23} = i_2 + i_3$, то ВАХ R_{23} на рисунке 16.5б получена графически суммированием токов ВАХ R_2 и R_3 при одинаковых напряжениях.

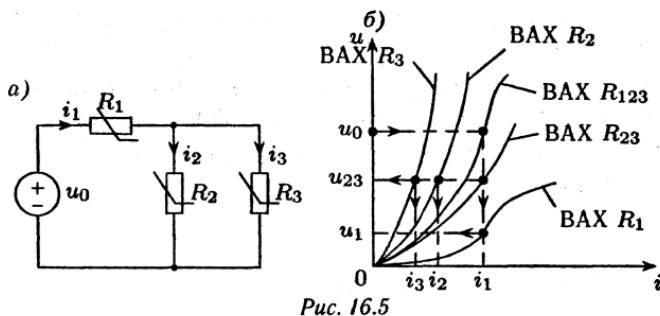


Рис. 16.5

Далее находят результирующую ВАХ R_{123} последовательного соединения R_1 и R_{23} , суммируя напряжения ВАХ R_1 и R_{23} при одинаковых токах, поскольку $u_{\text{вх}} = u_1 + u_{23}$.

Последовательность определения рабочих точек на всех ВАХ при некотором значении $u_{\text{вх}} = u_0$ указана на рисунке 16.5б пунктиром со стрелками. Таким образом могут быть найдены все искомые реакции.

Если необходимо найти передаточную характеристику цепи, например $u_{23}(u_0)$, то задаются рядом значений u_0 , находят соответствующие значения u_{23} , затем строят требуемый график.

Метод имеет множество вариантов, описанных в литературе. Он эффективен при расчете простых цепей, в частности, с одним нелинейным элементом.

ПРИМЕР 2. В цепи, приведенной на рисунке 16.6а, $u_0 = 80$ В, $R_1 = R_2 = 20$ Ом. ВАХ нелинейного резистора $u_{\text{НЭ}}(i)$ изображена на рис. 16.6б. Необходимо найти $u_{\text{НЭ}}$, $i_{\text{НЭ}}$.

На основании теоремы Тевенена аналогично рис. 16.2а переходим к эквивалентной схеме рисунка 16.6в, где

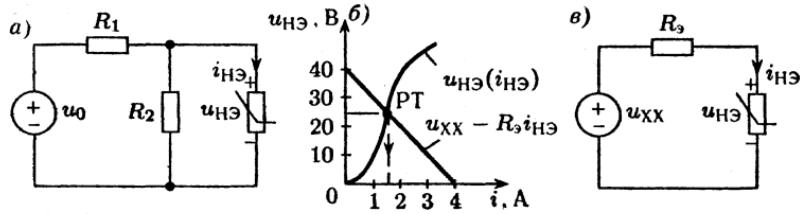


Рис. 16.6

$u_{XX} = u_0 R_2 / (R_1 + R_2) = 40$ В, $R_3 = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 10$ Ом. Поскольку из уравнений схемы рисунка 16.6 α следует, что $u_{HE} = u_{XX} - R_3 i = 40 - 10i$, то показанная на рисунке 16.6 δ точка пересечения ВАХ $u_{HE}(i)$ и прямой $u = (40 - 10i)$ является рабочей точкой, откуда $u_{HE} \cong 25$ В, $i_{HE} \cong 1,5$ А.

16.2.2. Аналитический расчет нелинейных R -цепей при аппроксимации ВАХ НЭ полиномами

Последовательность расчета здесь такая же, как и в ряде других аналитических методов.

1. Аппроксимируют ВАХ нелинейных элементов удобным аналитическим выражением, в данном случае степенным многочленом. По формуле ряда Тейлора для ВАХ, например $i(u)$, имеем

$$\begin{aligned} i(u) &= i(u_0) + \frac{i'(u_0)}{1!}(u - u_0) + \frac{i''(u_0)}{2!}(u - u_0)^2 + \dots = \\ &= a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n + \dots \quad (16.1) \end{aligned}$$

т. е. ВАХ в данном случае должна быть непрерывной, однозначной и абсолютно гладкой (должна иметь производные любого порядка).

В практических расчетах обычно ВАХ не дифференцируют, а требуют, например, чтобы аппроксимирующая кривая (16.1) прошла через заданные точки. В так называемом методе трех точек необходимо, чтобы некоторые 3 точки ВАХ: (i_1, u_1) , (i_2, u_2) , (i_3, u_3) , — отвечали полиному (16.1). Из уравнений

$$\left. \begin{array}{l} i_1 = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 \\ i_2 = a_0 + a_1 u_2 + a_2 u_2^2 \\ i_3 = a_0 + a_1 u_3 + a_2 u_3^2 \end{array} \right\} \quad (16.2)$$

несложно найти искомые коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 , поскольку относительно них система (16.2) линейна.

Если ВАХ сильно изрезана и требуется отразить ее особенности, необходимо учитывать большее число точек ВАХ. Система типа (16.2) становится сложной, однако ее решение

может быть найдено по формуле Лагранжа, определяющей уравнение полинома, проходящего через n точек:

$$i = \sum_{k=1}^n i_k \frac{A_k(u)}{A_k(u_k)}, \quad (16.3)$$

где $A_k(u) = (u - u_1) \dots (u - u_{k-1})(u - u_{k+1}) \dots (u - u_n)$.

2. Составляют систему независимых уравнений Кирхгофа, т. е. записывают уравнения соединений.

3. Исключают из системы промежуточные переменные и находят нелинейное функциональное уравнение (НФУ) для отыскания реакции:

$$\Phi(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = 0, \quad (16.4)$$

где $x = f_2 = f_{\text{вых}}$ — искомая реакция.

4. Решают НФУ (16.4) для каждого момента времени t и находят искомые значения реакции.

Выводы:

1. Необходимо знать методы решения НФУ.

2. Сложным также является исключение переменных. Например, имея уравнение $i_5(i_5) = 2i_5 + 3i_5^2 + 4i_5^3$, исключить переменную i_5 несложно, однако, если требуется исключить i_5 , необходимо обратить это уравнение, получив на основании (16.3) зависимость $i_5(u_5)$ в виде полинома (с целыми степенями).

Следует отметить, что аппроксимировать нелинейную ВАХ можно и иными удобными в каждом конкретном случае аналитическими выражениями. Например, если ВАХ проходит через точки $\{(i, u) := (0, 0), (1, 1), (4, 2)\}$, возможны следующие аппроксимирующие уравнения:

$$i = u^2: \quad u = i^{0,5}; \quad u \cong 2 \sin(\pi i / 8),$$

однако в конце расчета необходимо в любом случае решать НФУ.

ПРИМЕР 3. Решить задачу примера 2, учитывая, что в эквивалентной схеме нелинейной цепи рисунка 16.6в $u_{XX} = 40$ В, $R_3 = 10$ Ом.

Потребуем, чтобы аппроксимирующий степенной многочлен прошел через следующие точки ВАХ НЭ (рис 16.6б):

$\{(u_{\text{НЭ}}, i_{\text{НЭ}}) := (0, 0), (10, 1), (40, 2), (50, 3)\}$. Тогда на основании (16.3) получим

$$\begin{aligned} u_{\text{НЭ}} = 0 + 10 \frac{(i-0)(i-2)(i-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} + \\ + 40 \frac{(i-0)(i-1)(i-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 50 \frac{(i-0)(i-1)(i-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \\ = -6,7i^3 + 30i^2 - 13,3i. \end{aligned}$$

Уравнение Кирхгофа для цепи рисунка 16.6в имеет вид $-u_{xx} + Ri + u_{\text{НЭ}}(i) = 0$, т. е. $-40 + 10i + (-6,7i^3 + 30i^2 - 13,3i) = 0$. Таким образом, для отыскания тока цепи необходимо найти корни следующего НФУ:

$$-6,7i^3 - 30i^2 + 3,3i + 40 = 0.$$

16.2.3. Решение нелинейных функциональных уравнений цепей

Для решения НФУ используют методы последовательных приближений, т. е. итерационные методы. Среди них самым быстрым по сходимости является метод Ньютона–Рафсона.

НФУ $\Phi(x) = 0$ в окрестности некоторого приближения x_k раскладываем в ряд Тейлора:

$$\Phi(x) = \Phi(x_k) + \frac{\Phi'(x_k)}{1!}(x - x_k) + \frac{\Phi''}{2!}(x - x_k)^2 + \dots$$

Необходимо найти такую поправку на очередном шаге расчета, чтобы $\Phi(x_{k+1}) \cong 0$. Подставив $x = x_{k+1}$ в ряд и ограничившись двумя его первыми членами, получим

$$\Phi(x_k) + \Phi'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0,$$

откуда расчетная формула метода Ньютона–Рафсона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\Phi(x_k)}{\Phi'(x_k)}. \quad (16.5)$$

ПРИМЕР 4. Решить НФУ примера 3.

Имеем $\Phi(i) = 6,7i^3 - 30i^2 + 3,3i + 40 = 0$. Находим $\Phi'(i) = 20i^2 - 60i + 3,3$. Считая нулевым приближением $i_0 = 0$, получим на основании (16.5) первое приближение

$i_1 = i_0 - \Phi(i_0)/\Phi'(i_0) = 0 - 40/3,3 = -13,3$. Поскольку в цепи рисунка 16.6в ток $i > 0$, прекращаем расчет и выбираем новое значение $i_0 = 1$. Тогда на первом шаге расчета $i_1 = 1 - (6,7 - 30 + 3,3 + 40)/(20 - 60 + 3,3) = 1,55$. Следующий шаг итерационного расчета дает значение $i_2 = 1,55 - (6,7 \cdot 1,55^3 - 30 \cdot 1,55^2 + 3,3 \cdot 1,55 + 40)/(20 \cdot 1,55^2 - 60 \cdot 1,55 + 3,3) = 1,502$, что практически соответствует данным графического расчета в примере 2.

Как видим, при расчете большое значение имеет удачный выбор исходного приближения. В относительно простых задачах нулевое приближение очень часто определяют на основании данных приближенного графического расчета.

16.2.4. Аналитический расчет нелинейных R -цепей методом кусочно-линейных схем

Последовательность действий:

- Производится кусочно-линейная аппроксимация ВАХ всех НЭ. Тогда на каждом интервале аппроксимации нелинейному R -элементу соответствует линейное уравнение $y = ax + b$, т. е. в нашем случае, например, $u_{H\dot{E}} = R_k i_{H\dot{E}} + u_{0k}$, где k — номер интервала. Таким образом, эквивалентная схема R -НЭ имеет вид последовательного соединения линейного резистора R_k и источника постоянного напряжения u_{0k} .
- Составляется эквивалентная схема всей цепи и на основании любого метода анализа линейных цепей выводится в общем виде формула для расчета искомой реакции.
- Перебором R_k и u_{0k} для всех интервалов аппроксимации всех нелинейных элементов находят по выведенной формуле значения реакции и проверяют их соответствие рассматриваемым интервалам аппроксимации.

ПРИМЕР 5. Используем данные примера 2, указанные на рисунке 16.7а, где $u_{XX} = 40$ В, $R_3 = 10$ Ом.

В качестве узлов аппроксимации R -НЭ выбираем точки ВАХ $\{(u_{H\dot{E}}, i_{H\dot{E}}) : (0, 0), (10, 1), (40, 2), (50, 3)\}$. На участке I уравнение прямой имеет вид $u_{H\dot{E}} = 10i_{H\dot{E}} + 0$, т. е.

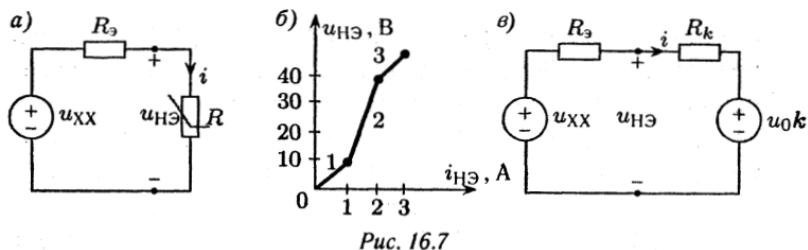


Рис. 16.7

$R_1 = 10 \Omega$, $u_{01} = 0$. На участке 2 уравнение $u_{H\bar{E}} = 30i_{H\bar{E}} - 20$, т. е. $R_2 = 30 \Omega$, $u_{02} = -20$ В. На участке 3 $u_{H\bar{E}} = 10i_{H\bar{E}} + 20$, т. е. $R_3 = 10 \Omega$, $u_{03} = 20$ В. Схема цепи с учетом эквивалентной замены R -НЭ кусочно-линейной схемой приведена на рисунке 16.7 β , причем ее ток очевидно $i = i_{H\bar{E}} = (u_{XX} - u_{0k})/(R_3 + R_k) = (40 - u_{0k})/(10 + R_k)$. На первом участке $i_1 = (40 - 0)/(10 + 10) = 2$ А не соответствует диапазону изменения тока на участке 1 рисунка 16.7 β , где $0 < i_1 < 1$ А. На втором участке $i_2 = (40 + 20)/(10 + 30) = 1,5$ А соответствует $1 < i_2 < 2$ А на рисунке 16.7 β . На третьем участке $i_3 = (40 - 20)/(10 + 10) = 1$ А не соответствует $2 < i < 3$. Итак, получили $i = i_{H\bar{E}} = i_2 = 1,5$ А, далее из схемы рисунка 16.7 β , находим $u_{H\bar{E}} = u_{XX} - R_3 i = 40 - 10 \cdot 1,5 = 25$ В, что соответствует данным примера 2.

§ 16.3. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗИСТИВНЫЕ ЦЕПИ С ДИОДАМИ

16.3.1. Идеализация диодных характеристик

Одна из типовых ВАХ диодов была приведена на рис. 16.2б. Реальные диоды обладают ярко выраженным вентильным эффектом, т. е. односторонней проводимостью. Их ВАХ резко несимметрична: как показано на рисунке 16.2б, даже при малом положительном напряжении ток велик и диод открыт, а при отрицательном напряжении ток крайне мал и диод закрыт (заперт). В связи с аналогичными свойствами все диоды часто называют вентилями.

При расчете схем с диодами во многих случаях используется идеализация диодных характеристик. Вводят так называемый

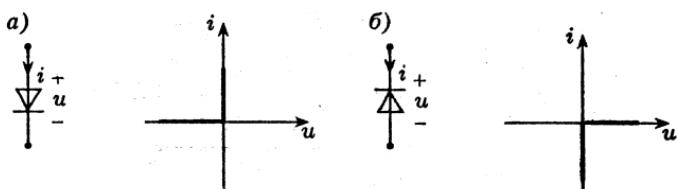


Рис. 16.8

идеальный диод (ИД), обозначение (аналогичное полупроводниковому диоду) и ВАХ которого приведены на рис. 16.8а.

Если идеальный диод открыт ($i > 0$), то он эквивалентен короткозамкнутому участку цепи (КЗ). Говорят, что при этом напряжение (которое в идеале при КЗ равно нулю) приложено в прямом направлении.

Если напряжение приложено в обратном направлении, т. е. $u < 0$ на рисунке 16.8а, то идеальный диод эквивалентен холостому ходу (ХХ), т. е. обрыву.

Дуальным элементом к идеальному диоду является сам идеальный диод в обратном включении. Его ВАХ и обозначение с указанием условно положительной полярности напряжения изображены на рисунке 16.8б. Таким образом введены два новых идеализированных двухполюсных элемента.

16.3.2. Реализация нарастающих ВАХ нелинейных R -элементов кусочно-линейными диодными моделями

Для реализации нарастающих кусочно-линейных ВАХ (например, показанной на рисунке 16.7б) используют 4 типа кусочно-линейных диодных моделей:

Модель 1: последовательное соединение источника постоянного напряжения (ИН), линейного R -элемента и ИД в прямом включении, как показано на рисунке 16.9а. Там же изображена (пунктиром) результирующая ВАХ соединения (ВАХ-1), полученная графическим методом путем суммирования напряжений ВАХ элементов при одинаковых токах.

ВЫВОД: модель 1 реализует вогнутую ВАХ в верхней полу-плоскости.

Модель 2 (рис. 16.9б): последовательное соединение источника постоянного напряжения, линейного R -элемента

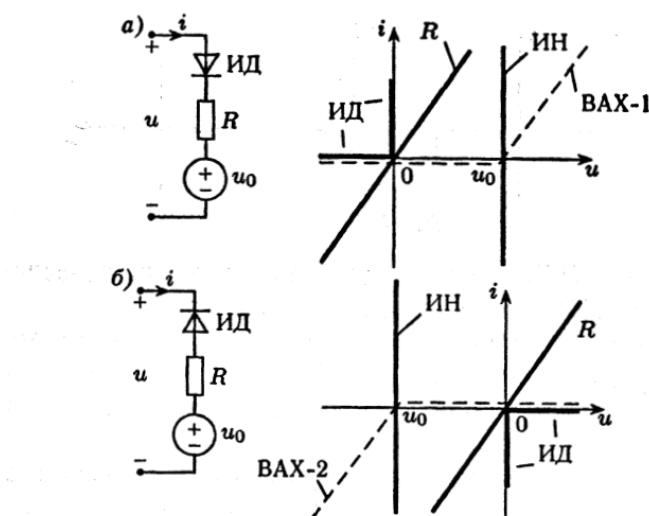


Рис. 16.9

и идеального диода в обратном включении. При получении результирующей ВАХ (ВАХ-2) для удобства построений принято, что $u_0 < 0$.

Вывод: модель 2 реализует выпуклую ВАХ в нижней полуплоскости.

Модель 3 (рис. 16.10а): параллельное соединение источника постоянного тока (ИТ), R -элемента и идеального диода в прямом включении. При построении результирующей ВАХ (ВАХ-3) принято $i_0 < 0$.

Вывод: модель 3 реализует вогнутую характеристику в левой полуплоскости.

Модель 4 (рис. 16.10б): параллельное соединение источника постоянного тока, R -элемента и идеального диода в обратном включении. Результирующая ВАХ обозначена ВАХ-4.

Вывод: модель 4 реализует выпуклую ВАХ в правой полуплоскости.

Следует иметь в виду, что ИН и R -элемент, ИТ и R -элемент всегда можно в схемах эквивалентно преобразовать, что важно при практической реализации.

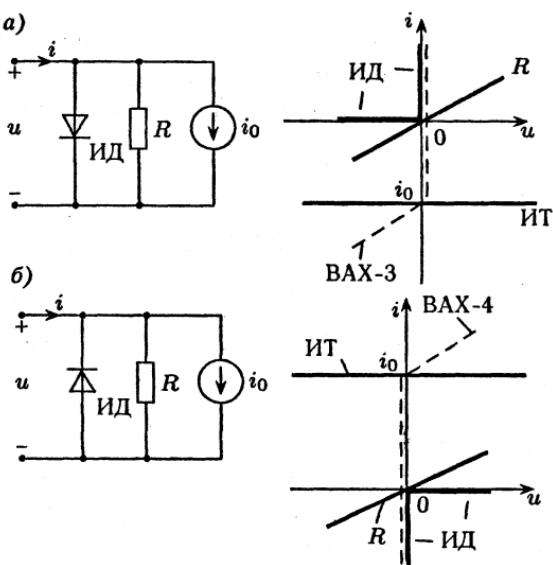


Рис. 16.10

ПРИМЕР 6. Подлежащая реализации кусочно-линейная ВАХ изображена на рисунке 16.11а, сплошной линией. Там же пунктиром показано представление ее составляющими (1), (2), (3). Поскольку результирующая ВАХ (1, 2) соединения (1) и (2) получается суммированием напряжений при одинаковых токах, а затем к ней добавляется (3) суммированием токов при одинаковых напряжениях, то общая схема нелинейной цепи соответствует показанной на рисунке 16.11б, причем двухполюсники (1) и (3) реализуются кусочно-линейными диодными моделями 1, а двухполюсник (2) — моделью 4. На рисунке 16.11а

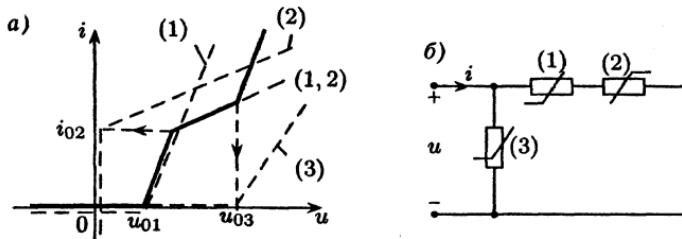


Рис. 16.11

указанны значения напряжений и токов источников, используемых в типовых моделях и определяемых изломами заданной кусочно-линейной ВАХ (см. пунктирные линии со стрелками).

§ 16.4. АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

16.4.1. Численный расчет по уравнениям состояния

Для расчета переходных процессов в нелинейных динамических цепях составляют уравнения состояния и решают их численно на ЦВМ, используя варианты алгоритма Эйлера или дискретные резистивные схемы замещения или иные методы численного анализа. В отличие от линейных цепей решаемые уравнения являются нелинейными, в связи с чем процедура их составления и решения может быть более сложной.

ПРИМЕР 7. Схема цепи, взятой в качестве примера, и основная кривая намагничивания нелинейной индуктивности приведены на рисунке 16.12. Необходимо при $u_0 = \text{const}$ численно рассчитать переходный процесс, пренебрегая эффектом гистерезиса и считая независимые начальные условия нулевыми.

Уравнение состояния очевидно

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = u_0 - Ri(\psi).$$

Отсюда формулы численного расчета при использовании, например, явной формы алгоритма Эйлера имеют вид

$$\begin{cases} \Delta\psi_k = \Delta t[u_0 - R i(\psi_{k-1})] \\ \psi_k = \psi_{k-1} + \Delta\psi_k, \quad \psi_0 = 0. \end{cases}$$

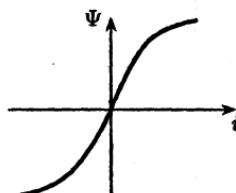
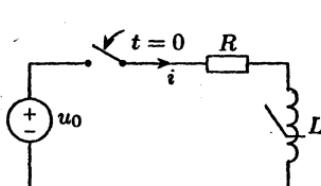


Рис. 16.12

Как видим, внешне все аналогично анализу линейных цепей, однако в данном случае в память ЦВМ должна быть введена нелинейная характеристика $i(\psi)$, причем она должна быть определена для каждой точки диапазона токов от $i = 0$ до $i_{\text{уст}} = u_0/R$.

Следует отметить, что могут быть составлены различные варианты уравнений состояния. Например, если в примере 7 в качестве переменной состояния выбрать ток, то, учитывая, что

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{di} \frac{di}{dt} = L_{\text{диф}}(i) \frac{di}{dt},$$

получим уравнение состояния вида

$$\frac{di}{dt} = \frac{u_0 - Ri}{L_{\text{диф}}(i)},$$

т. е. в памяти ЦВМ должна быть зависимость дифференциальной индуктивности нелинейного L -элемента от тока.

16.4.2. Метод припасовывания (кусочно-линейной аппроксимации)

Общая характеристика расчета переходных процессов:

1. Производится кусочно-линейная аппроксимация характеристик нелинейных элементов. На каждом участке аппроксимации НЭ заменяется линейным уравнением или эквивалентной кусочно-линейной схемой, как, например, для R -НЭ показано на рисунке 16.7_в.

2. Определяются независимые начальные условия и соответствующие им участки аппроксимации, характеристики которых необходимо учитывать на начальном этапе анализа переходных процессов.

3. Любым методом рассчитывают переходный процесс в получившейся таким образом линейной цепи, причем на стыке участков аппроксимации должны выполняться принципы непрерывности: $i_L(t^-) = i_L(t^+)$, $u_C(t^-) = u_C(t^+)$,

или в общем случае

$$\psi_L(t^-) = \psi_L(t^+), \quad q_C(t^-) = q_C(t^+).$$

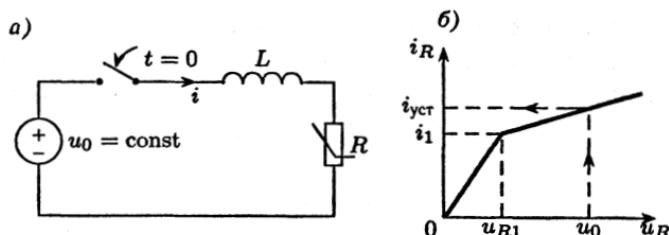


Рис. 16.13

4. Получаемые на каждом участке решения «сшиваются» друг с другом, т. е. стыкуются — припасовываются.

В качестве примера рассчитаем переходный процесс в цепи, изображенный на рисунке 16.13, где также приведена характеристика R -НЭ. Независимое начальное условие считаем нулевым, т. е. $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$.

Поскольку воздействие постоянно, то в установившемся режиме L -элемент эквивалентен КЗ, тогда $u_{R\text{уст}} = u_0$ и графическое определение значения установившегося тока $i_{\text{уст}} = i(\infty)$ показано на рисунке 16.13 (см. пунктир со стрелками).

Линейное уравнение для первого участка аппроксимации ВАХ R -НЭ ($0 < i_R < i_1; 0 < u_R < u_{R1}$) имеет вид $u_R = R_1 i_R$, где $R_1 = u_{R1}/i_1$, а для второго участка

$$u_R = u_{R1} + (u_0 - u_{R1}) \frac{i_R - i_1}{i_{\text{уст}} - i_1} = R_2 i_R + u_{02},$$

где $R_2 = \frac{u_0 - u_{R1}}{i_{\text{уст}} - i_1}$, $u_{02} = u_{R1} - (u_0 - u_{R1}) \frac{i_1}{i_{\text{уст}} - i_1}$.

Поскольку $i(0) = 0$, при расчете переходного процесса вначале учитываются параметры первого участка аппроксимации, затем — второго. Непосредственный расчет в t -области очевидно дает при учете эквивалентных схем замещения R -НЭ: $i(t) = [1 - \exp(-t/\tau_1)]u_0/R_1$, причем постоянная времени будет $\tau_1 = L/R_1$. На первом интервале $0 < t < t_1$ момент окончания интервала t_1 находят на основании полученного уравнения из условия перехода на второй участок аппроксимации: $i(t_1) = i_1 = [1 - \exp(-t_1/\tau_1)]u_0/R_1$. Решение на втором интервале $t_1 < t < \infty$ имеет вид $i(t) = i_{\text{уст}} + (i_1 - i_{\text{уст}}) \exp[-(t - t_1)/\tau_2]$, где $\tau_2 = L/R_2$. Очевидно, на стыке интервалов выполняется принцип непрерывности $i_1(t_1-) = i_1(t_1+)$.

16.4.3. Метод гармонического баланса

Метод обычно используется при расчете установившихся периодических режимов в нелинейных цепях при симметричных характеристиках НЭ. Последовательность анализа следующая:

1. Характеристики НЭ аппроксимируют нечетным степенным многочленом (полином нечетных степеней).
2. Составляют систему нелинейных дифференциальных уравнений цепи.
3. Предполагая, что периодические реакции в основном определяются своими первыми гармониками, подставляют их в систему уравнений и осуществляют баланс (равенство) левых и правых частей уравнений только по первым гармоникам.
4. Решают полученную систему тригонометрических уравнений (с применением, например, метода комплексных амплитуд) и таким образом приближенно определяют параметры первой гармоники искомой реакции. При необходимости далее можно осуществить баланс по следующим гармоникам и приближенно найти их.

ПРИМЕР 8. Рассчитать первую гармонику установившегося периодического тока в цепи схемы, приведенной в п. 16.4.1 (рис. 16.12), если $u_0(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u)$.

Приближенно аппроксимируем нелинейную вебер-амперную характеристику нелинейного L -элемента кубическим полиномом $\psi(i) = a_1 i - a_3 i^3$, причем здесь $a_1 > 0$, $a_3 > 0$. Уравнение цепи имеет вид $u_L + u_R = u_0$ или $\psi' + R i = u_0$. Считая, что периодический ток в основном определяется первой гармоникой, т. е. $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i)$, и используя формулу $\cos^3 \gamma = 0,75 \cos \gamma + 0,25 \cos 3\gamma$, находим

$$\begin{aligned} \psi(i) = a_1 I_m \cos(\omega t + \alpha_i) - 0,75 a_3 I_m^3 \cos(\omega t + \alpha_i) - \\ - 0,25 a_3 I_m^3 \cos(3\omega t + 3\alpha_i). \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в уравнение цепи и ограничиваясь только гармониками частоты ω , получим

приближенно уравнение гармонического баланса по первой гармонике

$$\omega I_m (a_1 - 0,75a_3 I_m^2) \cos(\omega t + \alpha_i + 90^\circ) + RI_m \cos(\omega t + \alpha_i) = U_m \cos(\omega t + \alpha_u). \quad (16.6)$$

Нелинейное тригонометрическое уравнение решаем, используя метод комплексных амплитуд:

$$\omega I_m (a_1 - 0,75a_3 I_m^2) e^{j(\alpha_i + 90^\circ)} + RI_m e^{j\alpha_i} = U_m e^{j\alpha_u},$$

откуда получаем

$$[\omega I_m (a_1 - 0,75a_3 I_m^2) j + RI_m] e^{j\alpha_i} = U_m e^{j\alpha_u},$$

или

$$A(I_m) e^{j(\alpha_i + \varphi)} = U_m e^{j\alpha_u}.$$

Таким образом, нелинейное функциональное уравнение баланса амплитуд имеет вид

$$A(I_m) = \sqrt{\omega^2 I_m^2 (a_1 - 0,75a_3 I_m^2)^2 + R^2 I_m^2} = U_m$$

и может быть решено относительно искомой амплитуды тока I_m графически или, например, методом Ньютона-Рафсона.

Затем определяется начальная фаза первой гармоники тока

$$\alpha_i = \alpha_u - \varphi = \alpha_u - \arctg \frac{\omega I_m (a_1 - 0,75a_3 I_m^2)}{RI_m}.$$

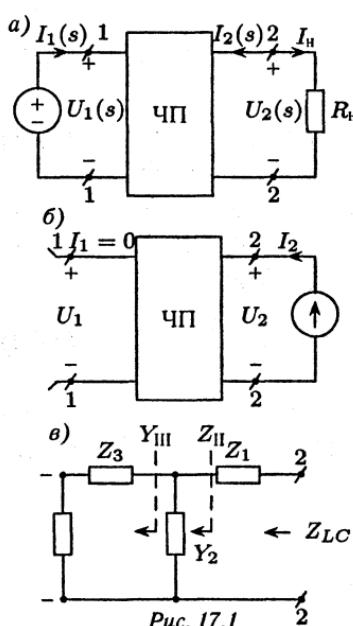
Следует отметить, что в (16.6) амплитудой напряжения L -элемента является $U_{mL} = \omega I_m (a_1 - 0,75a_3 I_m^2) = \omega L_{\text{экв}} I_m$, т. е. эквивалентная индуктивность нелинейного L -элемента будет

$$L_{\text{экв}}(I_m) = a_1 - 0,75a_3 I_m^2$$

действительно зависит от интенсивности электромагнитных процессов в цепи и падает с ростом амплитуды тока.

НАЧАЛА СИНТЕЗА ПАССИВНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

§ 17.1. НОРМИРОВАНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ



Рассмотрим основные принципы реализации (т. е. заключительного этапа синтеза) простых пассивных четырехполюсников лестничной структуры, наиболее часто использующихся при проектировании фильтров, а также в качестве корректирующих цепей в устройствах автоматики и радиотехники.

Для вывода передаточных функций (ПФ) четырехполюсников (ЧП) запишем вторые уравнения Z - и Y -форм (см. рис. 17.1a):

$$\begin{cases} U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2, \\ I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2, \end{cases} \quad (17.1)$$

причем в (17.1) имеем $I \equiv I(s)$, $U \equiv U(s)$, $Z \equiv Z(s)$, $Y \equiv Y(s)$ — операторные токи,

напряжения, сопротивления и проводимости.

В случае резистивной нагрузки ЧП, когда $Z_h = R_h$, используя уравнения закона Ома $U_2 = Z_h(-I_2)$, $I_2 = -Y_h U_2$, можно (17.1) преобразовать к виду

$$Z_{21}I_1 = -I_2(Z_h + Z_{22}), \quad Y_{21}U_1 = -U_2(Y_h + Y_{22}). \quad (17.2)$$

На основании (17.2) находим ПФ с учетом свойств $Z_{12} = Z_{21}$, $Y_{12} = Y_{21}$ у пассивных ЧП:

$$H_I(s) = \frac{I_h}{I_1} = \frac{-I_2}{I_1} = \frac{Z_{21}}{Z_h + Z_{22}} = \frac{Z_{12}}{Z_h + Z_{22}}, \quad (17.3)$$

$$H_U(s) = \frac{U_h}{U_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-Y_{21}}{Y_h + Y_{22}} = \frac{-Y_{12}}{Y_h + Y_{22}}, \quad (17.4)$$

$$Z_{2-1}(s) = \frac{U_2}{I_1} = \frac{Z_h(-I_2)}{I_1} = Z_h H_I = \frac{Z_h Z_{12}}{Z_h + Z_{22}}, \quad (17.5)$$

$$Y_{2-1}(s) = \frac{I_h}{U_1} = \frac{-I_2}{U_1} = \frac{Y_h U_2}{U_1} = Y_h H_U = \frac{-Y_h Y_{12}}{Y_h + Y_{22}}, \quad (17.6)$$

причем в (17.3)–(17.6) рассматриваются ПФ по току H_I , по напряжению H_U , передаточное сопротивление Z_{2-1} и проводимость Y_{2-1} .

При нормированной нагрузке $Z_h^* = R_h^* = 1$ формулы нормированных ПФ упрощаются:

$$H_I^* = Z_{2-1}^* = \frac{Z_{12}}{1 + Z_{22}}; \quad H_U^* = Y_{2-1}^* = \frac{-Y_{12}}{1 + Y_{22}}. \quad (17.7)$$

В режиме короткого замыкания (КЗ) или холостого хода (ХХ) нагрузки (т. е. при $Z_h = 0$ или $Y_h = 0$) можно на основании (17.3), (17.4) записать еще две ПФ:

$$H_I^{K3}(s) = \frac{Z_{12}}{Z_{22}}; \quad H_U^{XX}(s) = \frac{-Y_{12}}{Y_{22}}. \quad (17.8)$$

Вывод из (17.7), (17.8): при синтезе ЧП фактически необходимо реализовывать только 2 его параметра (Z_{22} и Z_{12} , либо Y_{22} и Y_{12}).

§ 17.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА РЕАКТИВНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ ЛЕСТНИЧНОЙ СТРУКТУРЫ

17.2.1. Свойство о нулях и полюсах Z_{22} и Y_{22}

Z_{22} и Y_{22} удовлетворяют основному свойству $Z_{LC}(s)$, т. е. их нули и полюсы мнимые, простые и чередуются согласно § 12.1.

Обоснование свойства базируется на (17.1): при $I_1 = 0$ (т. е. при ХХ на выводах 1–1 рисунка 17.1а) $Z_{22} = U_2/I_2$;

при $U_1 = 0$ (т. е. при КЗ выводов 1–1 на входе ЧП) $Y_{22} = I_2/U_2$. Таким образом, $Z_{22}(s)$ — это входное сопротивление ЧП со стороны 2–2 при ХХ на 1–1, $Y_{22}(s)$ — это входная проводимость со стороны 2–2 при КЗ на 1–1. Поскольку рассматриваются реактивные ЧП, то Z_{22} — это Z_{LC} , Y_{22} — это Y_{LC} , т. е. они должны удовлетворять основному свойству Z_{LC} .

17.2.2. Свойство о полюсах Z_{12} и Z_{22} (Y_{12} и Y_{22})

Полюсы Z_{12} совпадают с полюсами Z_{22} , полюсы Y_{12} — с полюсами Y_{22} .

Обоснование аналогично предыдущему и вытекает из следующих формул: при $I_1 = 0$ (т. е. при ХХ на выводах 1–1, как показано на рисунке 17.1б) $Z_{22} = U_2/I_2$, что следует из (17.1), а $Z_{12} = U_1/I_2$, что вытекает из первого уравнения Z -формы ($U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$). Таким образом, $Z_{22}(s)$ и $Z_{12}(s)$ — это различные ПФ одной и той же цепи (рис. 17.1б). Согласно § 6.4 знаменатель любой ПФ определяет один и тот же характеристический полином (ХП) цепи, следовательно, полюсы (т. е. корни знаменателя) Z_{12} совпадают с полюсами Z_{22} . Вторая часть свойства доказывается аналогично.

Использование этого и предыдущего свойств при синтезе: реализуют ЧП по Z_{22} (или Y_{22}) со стороны 2–2 по правилам синтеза входного сопротивления ДП $Z_{LC}(s)$ лестничной структуры (т. е. выделяют, например, некоторый полюс Z_{LC} в виде Z_1 , остаток $Z_{II} = Z_{LC} - Z_1$ обращают и выделяют полюс $Y_{II} = 1/Z_{II}$ в виде Y_2 ; остаток $Y_{III} = Y_{II} - Y_2$ опять обращают и т. д.; процедуру повторяют до полной реализации Z_{LC} , как показано на рисунке 17.1в). При этом полюсы Z_{12} (или Y_{12}) будут реализованы автоматически.

17.2.3. Свойство о частных полюсах Z_{22} (и Y_{22})

Частные полюсы Z_{22} — это такие, которых нет среди полюсов Z_{12} , т. е. речь идет об исключении из предыдущего свойства.

Если при синтезе ЧП по Z_{22} первым элементом со стороны 2–2 (см. рис. 17.1в) будет продольное сопротивление $Z_1(s)$, то его полюсы являются частными полюсами $Z_{22}(s)$ и их нет у $Z_{12}(s)$; если при синтезе ЧП по Y_{22} первым

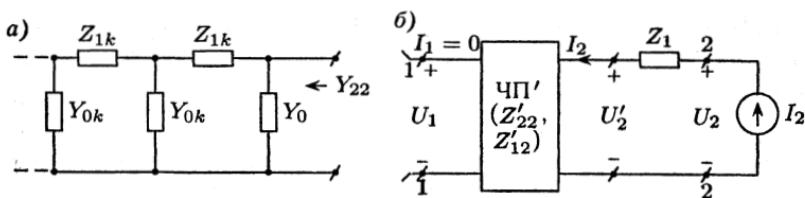


Рис. 17.2

элементом со стороны 2–2 является поперечная проводимость Y_0 (см. рис. 17.2а), то ее полюсы отсутствуют среди полюсов Y_{12} .

Для обоснования первой части свойства рассмотрим рисунок 17.2б, где выделены продольное сопротивление $Z_1(s)$ и остальной четырехполюсник ЧП', параметры которого $Z'_{22}(s)$ и $Z'_{12}(s)$ имеют совпадающие полюсы.

Из уравнений Z -формы при $I_1 = 0$ (т. е. при ХХ на выводах 1–1) получаем

$$\begin{aligned} Z_{22} &= \frac{U_2}{I_2} = \frac{U'_2 + Z_1 I_2}{J_2} = Z'_{22} + Z_1; \\ Z_{12} &= \frac{U_1}{I_2} = Z'_{12}, \end{aligned}$$

следовательно, полюсы Z_1 находятся только среди полюсов Z'_{22} . Аналогично обосновывается вторая часть свойства.

17.2.4. Свойство о нулях ПФ четырехполюсника

Нули s_{0k} передаточной функции ЧП (17.7) (17.8)

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{kB(s)}{A(s)} = \\ &= k \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \\ &= \frac{k \prod_{(m)}(s - s_{0k})}{\prod_{(n)}(s - s_k)}, \quad (17.9) \end{aligned}$$

т. е. корни числителя (17.9) определяются нулями Z_{12} и частными полюсами Z_{22} (или нулями Y_{12} и частными полюсами Y_{22}).

Действительно, согласно (17.7), (17.8) ПФ ЧП имеют вид

$$\begin{aligned} H_I^{K3} &= \frac{Z_{12}}{Z_{22}}, & H_I &= \frac{Z_{12}}{1 + Z_{22}}, \\ H_U^{XX} &= \frac{-Y_{12}}{Y_{22}}, & H_U &= \frac{-Y_{12}}{1 + Y_{22}}, \end{aligned} \quad (17.10)$$

где параметры $Z(s)$ и $Y(s)$ — это тожедробно-рациональные функции, как и (17.9). Следовательно, полином числителя $B(s)$ в (17.9) формируется (в случае двух первых формул (17.10)) из полинома числителя $Z_{12}(s)$ и из несократившейся части знаменателя Z_{22} , т. е. нули s_{0k} определяются нулями Z_{12} и частными полюсами Z_{22} . Аналогично обосновывается вторая часть свойства.

Использование этого и предыдущего свойств при синтезе: если среди нулей ПФ ЧП есть самая легкая категория нулей — частные полюсы Z_{22} , их необходимо сразу же реализовать (выделить как полюсы) в виде продольного сопротивления Z_1 (как показано на рисунке 17.1в и 17.2б; если же есть частные полюсы Y_{22} , их реализуют в первую очередь как поперечную проводимость Y_0 (как показано на рисунке 17.2а).

17.2.5. Свойство о формировании нулей ПФ реактивных ЧП лестничной структуры

Маркировка элементов ЧП лестничной структуры фактически показана на рисунке 17.2: продольные сопротивления обозначают $Z_{1k}(s)$ или $Z_1(s)$, а поперечные проводимости — $Y_{0k}(s)$ или $Y_0(s)$.

Нули ПФ ЧП формируются полюсами Z_{1k} и Y_{0k} , причем они должны быть мнимыми (так как рассматриваются LC-ЧП).

Действительно, пусть, Z_{1k} и Y_{0k} имеют полюсы при $s = \pm j\omega_0$, т. е.

$$Z_{1k}(s) = \frac{\cdots}{\cdots (s^2 + \omega_0^2)}, \quad Y_{0k}(s) = \frac{\cdots}{\cdots (s^2 + \omega_0^2)}.$$

Тогда на частоте этих полюсов $Z_{1k}(j\omega_0) \rightarrow \infty$, $Y_{0k}(j\omega_0) \rightarrow -\infty$, т. е. продольное сопротивление Z_{1k} , например,

на рисунке 17.2а эквивалентно ХХ, а поперечная проводимость Y_{0k} эквивалентна КЗ. Следовательно, входной сигнал на этой частоте на выход ЧП не пройдет и полюс $s = j\omega_0$ — это нуль ПФ ЧП согласно (17.9).

Поскольку Z_{1k} и Y_{0k} у LC -ЧП удовлетворяют основному свойству $Z_{LC}(s)$, то нули ПФ должны быть мнимыми.

Использование этого свойства при синтезе: вторая категория нулей ПФ (17.9) — это те нули, которые совпадают с нулями остатков от реализации Z_{22} (или Y_{22}), как показано, например, в форме остатков Z_{II} или Y_{III} на рисунке 17.1в; такие нули ПФ следует реализовывать, обратив остатки (переходом к Y_{II} или Z_{III} на рисунке 17.1в) и полностью выделив полюсы $s = j\omega_0$ в виде Y_{0k} (или Z_{1k}).

Примечание. Осталось рассмотреть самые трудные в реализации нули ПФ, которые не совпадают с нулями остатков от реализации Z_{22} (или Y_{22}).

17.2.6. Свойство об отсутствии нуля ПФ при частичном выделении полюса

Исключение из предыдущего свойства: *если при синтезе остатка от реализации Z_{22} или Y_{22} какой-то полюс этого остатка выделен частично (т. е. не полностью) в виде Y_{0k} или Z_{1k} , то этот полюс не является нулем ПФ.*

Для пояснения свойства допустим, что при синтезе Z_{22} (или Y_{22}) получили на какой-то стадии остаток от реализации, например

$$Y_n = \frac{\dots}{\dots(s^2 + \omega_i^2)},$$

и решили полюс $s = \pm j\omega_i$ выделить не полностью, т. е. частично в виде $Y_{0k} = k_q s / (s^2 + \omega_i^2)$, где k_q — только часть полного коэффициента k_n (причем $0 < k_q < k_n$), соответствующего полностью выделенному полюсу при $s = j\omega_i$ в обычном разложении $Y_n(s)$ по полюсам. Тогда остаток от такой реализации тоже будет содержать этот полюс:

$$Y_{n+1} = Y_n - Y_{0k} = \frac{\dots}{\dots(s^2 + \omega_i^2)}, \quad (17.11)$$

что отражено схематично на рисунке 17.3а, б, где для определенности предполагается, что $u_{\text{вх}}(t)$, $u_{\text{вых}}(t)$ — это воздействие

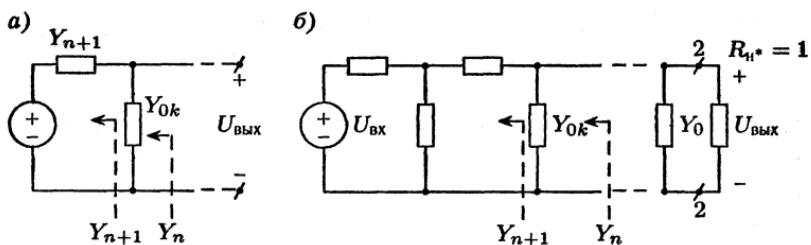


Рис. 17.3

и реакция ЧП. Очевидно, на частоте $s = \pm j\omega_i$ проводимости $Y_{0k} \rightarrow \infty$, $Y_{n+1} \rightarrow \infty$ и, следовательно, эквивалентны КЗ. Поэтому в формуле делителя напряжений в схеме на рисунке 17.3а на частоте $s = \pm j\omega_i$ будет неопределенность, которая не равна нулю, т. е. $s = \pm j\omega_i$ не является нулем ПФ.

Примечание. Лестничная структура ЧП (рис. 17.3б), в общем случае, многократным эквивалентным преобразованием источник напряжения (ИН) — источник тока (ИТ) — ИН — ... может быть приведена к рассмотренной на рисунке 17.3а схеме.

Использование данного свойства при синтезе: допустим, необходимо в остатке Y_{n+1} в (17.11) получить нуль на частоте $s = \pm j\omega_0$; тогда приравниваем Y_n и Y_{0k} в (17.11) на этой частоте (при частичном выделении полюса $s = \pm j\omega_i$) и, следовательно, получим

$$Y_{n+1} = Y_n - Y_{0k} = \frac{\dots (s^2 + \omega_0^2)}{\dots (s^2 + \omega_i^2)}, \quad (17.12)$$

затем находим, обращая остаток (17.12):

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= \frac{1}{Y_{n+1}} = \frac{\dots}{\dots (s^2 + \omega_0^2)} = \\ &= \frac{As}{(s^2 + \omega_0^2)} + Z_{n+2} = Z_{1k} + Z_{n+2}, \end{aligned} \quad (17.13)$$

т. е. полюс $s = \pm j\omega_0$ полностью выделен в (17.13) и реализован в виде последовательного сопротивления Z_{1k} , чем будет обеспечен нуль ПФ ЧП на частоте $s = \pm j\omega_0$.

Вывод: частичное выделение полюсов позволяет реализовать нули ПФ (нули третьей категории), которые не совпадают с нулями остатков от реализации Z_{22} (или Y_{22}).

17.2.7. Условие Фиалкова об ограничении коэффициентов передаточной функции

Коэффициенты ПФ (17.9) положительны, причем коэффициенты числителя при одинаковых степенях s не превышают соответствующих коэффициентов знаменателя.

Поясним свойство на примере ЧП лестничной структуры (см. рис. 17.3б). При использовании метода пропорциональных величин при выводе ПФ первое действие обычно имеет следующий вид: допустим, $F_{\text{вых}}(s) = 1$, а последнее: $F_{\text{вх}}(s) = F_{\text{вых}}(s) + V(s)/W(s) = 1 + V(s)/W(s)$, что для примера на рисунке 17.3б очевидно из рассмотрения закона напряжений Кирхгофа (ЗНК) для большого контура, или закона токов Кирхгофа (ЗТК) для «нижнего» узла при расчете H_I . Таким образом, ПФ будет

$$H(s) = \frac{F_{\text{вых}}(s)}{F_{\text{вх}}(s)} = \frac{1}{1 + V(s)/W(s)} = \frac{W(s)}{W(s) + V(s)}, \quad (17.14)$$

где $V(s)/W(s)$ —дробно-рациональная функция.

Из анализа (17.14) следует справедливость условия Фиалкова.

Использование этого свойства при синтезе:

- Если в числителе ПФ имеются степени s , которых нет в знаменателе, то такую ПФ синтезировать невозможно.
- При реализации ПФ (17.9) коэффициент k не контролируется; он автоматически получит такое значение, что будет выполнено условие Фиалкова $a_i \geq k b_i$.

17.2.8. Свидетельство правильного окончания синтеза

Если реализацию вели по Z_{22} , то последним элементом синтеза, т. е. первым со стороны I—I, должна быть попечная проводимость Y_{0k} (если реализацию вели по Y_{22} , то последним элементом должно быть последовательное сопротивление Z_{1k}).

Доказательство от обратного. Пусть при синтезе по Z_{22} последним элементом оказалось Z_{1k} , как показано на рисунке 17.4а. Но на основании уравнений Z -формы имеем

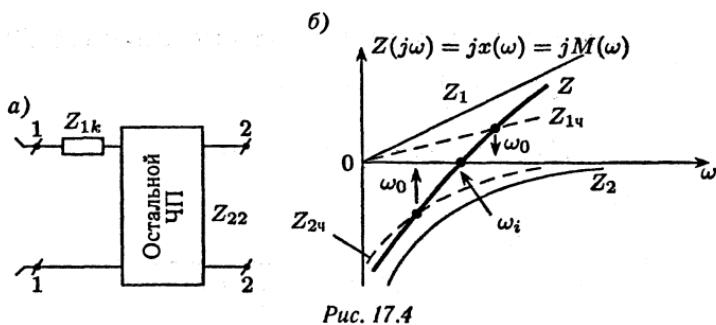


Рис. 17.4

$Z_{22} = U_2/I_2$, $Z_{12} = U_1/I_2$ при $I_1 = 0$, т. е. при ХХ со стороны 1–1. Следовательно, Z_{1k} «не работает» и не влияет на параметры Z_{22} и Z_{12} , по которым реализуется ЧП в этом случае.

Использование данного свойства при синтезе: если при реализации ЧП, например, по Z_{22} и Z_{12} последним элементом оказалось Z_{1k} , то синтез закончен неверно и на какой-то его стадии нужно изменить процедуру реализации.

§ 17.3. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗУЕМОСТИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕАКТИВНОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА ПО ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

17.3.1. Определение параметров по H_I^{K3} и H_U^{XX}

Задана подлежащая реализации ПФ (17.9) вида $H(s) = kB(s)/A(s)$, причем согласно (17.10) это $H_I^{K3}(s) = Z_{12}/Z_{22}$ или $H_U^{XX}(s) = -Y_{12}/Y_{22}$.

1. Вначале осуществляют общую проверку ПФ на реализуемость:

- условие Фиалкова должно выполняться;
- нули и полюсы ПФ должны быть мнимыми, причем полюсы простыми.

Примечание. Минимость нулей была обоснована в свойстве 17.2.5; вторая часть проверки следует из (17.9) и (17.10), поскольку полином $A(s)$ формируется числителем функций Z_{22} или Y_{22} , которые должны удовлетворять основному свойству $Z_{LC}(s)$, указанному в 17.2.1.

2. Далее определяют параметры ЧП. Так как из общей проверки на реализуемость следует, что полиномы

$A(s)$ и $B(s)$ — четные, то делят числитель и знаменатель ПФ на произвольный нечетный полином $D(s)$, корни которого мнимые, простые и чередуются с корнями $A(s)$, т. е.

$$H_I^{K3}(s) = \frac{k \frac{B(s)}{D(s)}}{\frac{A(s)}{D(s)}} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}}, \quad H_U^{XX}(s) = \frac{k \frac{B(s)}{D(s)}}{\frac{A(s)}{D(s)}} = \frac{-Y_{12}}{Y_{22}}, \quad (17.15)$$

и таким образом согласно (17.15) определяют параметры ЧП.

Примечания:

- Для страховки тут же проверяют, что Z_{22} и Y_{22} удовлетворяют основному свойству $Z_{LC}(s)$, т. е. их нули и полюсы мнимые, простые и чередуются.
- Нередко в качестве $D(s)$ выбирают дробно-рациональную функцию — главное, чтобы Z_{22} и Y_{22} соответствовали $Z_{LC}(s)$.

17.3.2. Определение параметров ЧП по H_I и H_U

Задана подлежащая реализации ПФ (17.9), причем согласно (17.10) это $H_I(s) = Z_{12}/(1 + Z_{22})$ или $H_U(s) = -Y_{12}/(1 + Y_{22})$, т. е. к ЧП подключена нормированная нагрузка $R_H^* = 1$.

1. Вначале осуществляют предварительную проверку ПФ на реализуемость:

- условие Фиалкова должно выполняться;
- нули ПФ должны быть мнимыми (могут быть кратными).

2. Определяют параметры ЧП, для чего сначала разбивают полином $A(s)$ на сумму $A(s) = A_{\text{чт}}(s) + A_{\text{нчт}}(s)$, — где $A_{\text{чт}}$ — полином четных степеней s , $A_{\text{нчт}}$ — полином нечетных степеней. Затем, если $B(s)$ — полином четных степеней, делят числитель и знаменатель ПФ на $A_{\text{нчт}}$ и определяют параметры:

$$H_I(s) = \frac{k \frac{B(s)}{A_{\text{нчт}}(s)}}{1 + \frac{A_{\text{чт}}(s)}{A_{\text{нчт}}(s)}} = \frac{Z_{12}}{1 + Z_{22}}, \quad (17.16)$$

$$H_U(s) = \frac{k \frac{B}{A_{\text{нчт}}}}{1 + \frac{A_{\text{чт}}}{A_{\text{нчт}}}} = \frac{-Y_{12}}{1 + Y_{22}};$$

если же $B(s)$ — нечетный полином, то делят на $A_{\text{чт}}(s)$:

$$H_I = \frac{k \frac{B}{A_{\text{чт}}}}{1 + \frac{A_{\text{нчт}}}{A_{\text{чт}}}} = \frac{Z_{12}}{1 + Z_{22}}, \quad H_U = \frac{k \frac{B}{A_{\text{чт}}}}{1 + \frac{A_{\text{нчт}}}{A_{\text{чт}}}} = \frac{-Y_{12}}{1 + Y_{22}}. \quad (17.17)$$

Тут же Z_{22} или Y_{22} , найденные на основании (17.16) или (17.17), проверяют на соответствие основному свойству $Z_{LC}(s)$.

Примечание. Если эта проверка на соответствие $Z_{LC}(s)$ «не проходит», то заданную ПФ невозможно реализовать реактивными ЧП лестничной структуры.

ПРИМЕР 1. Задана ПФ фильтра Баттервортса 3-го порядка.

$$H_U(s) = \frac{k}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{kB(s)}{A(s)} = \frac{-Y_{12}}{1 + Y_{22}} = \frac{\frac{kB}{A_{\text{нчт}}}}{1 + \frac{A_{\text{нчт}}}{A_{\text{нчт}}}}.$$

Предварительная проверка на реализуемость выполняется при условиях:

1. При достаточно малых k (здесь при $k \leq 1$) коэффициенты числителя ПФ не превышают соответствующих коэффициентов знаменателя.
2. ПФ имеет трехкратный нуль передачи на бесконечной частоте. Очевидно, что $A_{\text{нчт}} = 2s^2 + 1 = 2(s^2 + 0,5)$; $A_{\text{нчт}} = s^3 + 2s = s(s^2 + 2)$; $B(s) = 1$ — полином четных степеней s . Расчет параметров очевиден: $-Y_{12} = 1/[s(s^2 + 2)]$, $Y_{22} = 2(s^2 + 0,5)/[s(s^2 + 2)]$, т. е. $Y_{22}(s)$ удовлетворяет основному свойству $Z_{LC}(s)$ и заданная ПФ может быть реализована.

§ 17.4. РЕАЛИЗАЦИЯ РЕАКТИВНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ ЛЕСТНИЧНОЙ СТРУКТУРЫ

Строго процедура синтеза состоит из двух этапов: подбора ПФ, которую необходимо синтезировать (этот этап изучается в спецдисциплинах); собственно реализации ПФ цепью, что фактически и рассматривается здесь.

17.4.1. Три положения, лежащие в основе реализации ЧП

1. Что синтезируют? Синтезируют ЧП по найденным параметрам Z_{12} и Z_{22} (или $-Y_{12}$ и Y_{22}). Фактически реализуют Z_{22} (или Y_{22}) в виде лестничной структуры $Z_{LC}(s)$, как указано на рисунке 17.1в и в 17.2.2. При этом полюсы Z_{12}

(или $-Y_{12}$) синтезируются автоматически и в процессе реализации не контролируются.

2. В чем специфика реализации? При синтезе Z_{22} (или Y_{22}) стремятся попутно синтезировать нули Z_{12} (или $-Y_{12}$), т. е. реализовать нули ПФ $H(s) = kB(s)/A(s)$ и, следовательно, всю ПФ. Вначале синтезируют первую категорию нулей ПФ — частные полюсы Z_{22} в виде первого со стороны 2–2 продольного со-противления Z_1 (или частные полюсы Y_{22} в виде первой со стороны 2–2 поперечной проводимости Y_0), как указано в 17.2.4. Затем реализуется вторая категория нулей ПФ — это нули ПФ (нули Z_{12} или $-Y_{12}$), которые совпадают с нулями остатков от реализации Z_{22} (или Y_{22}). Их реализуют как полностью выделенные полюсы обращенных остатков в виде продольных сопротивлений Z_{1k} или поперечных проводимостей Y_{0k} , как описано в 17.2.5.

3. Как реализуется третья категория нулей ПФ, которая не совпадает с нулями остатков? «Пытаются» частично выделить какой-либо полюс остатка (или обращенного остатка), чтобы в новом остатке получить нуль, совпадающий с нулем третьей категории, как описано в (17.11)–(17.13) в 17.2.6.

17.4.2. Обоснование возможности получения нуля остатка на любой частоте при частичном выделении полюса

Рассмотрим простой пример. Допустим, в результате синтеза получили остаток вида

$$Z = \frac{s^2 + \omega_i^2}{as} = \frac{1}{a}s + \frac{\omega_i^2}{as} = Z_1 + Z_2 = L_1 s + \frac{1}{C_2 s}, \quad (17.18)$$

т. е. в (17.18) остаток Z представлен эквивалентно в виде суммы составляющих.

Изобразим на рисунке 17.4б мнимые частотные характеристики (ЧХ) остатка $Z(j\omega)$ и его составляющие $Z_1 = j\omega L_1$ и $Z_2 = -j/(\omega C_2)$, причем в (17.18) Z_1 и Z_2 — это полностью выделенные полюсы при $s = \infty$ и $s = 0$ соответственно.

Если первая составляющая выделена частично, т. е. не полностью, в виде пунктирно показанной на рисунке 17.4б

прямой $Z_{1\text{q}}(j\omega)$, то нуль нового остатка ($Z - Z_{1\text{q}}$) будет на частоте $\omega_0 > \omega_i$. Если частично выделена вторая составляющая $Z_{2\text{q}}(j\omega)$, то нуль остатка будет на частоте $\omega_0 < \omega_i$. Таким образом, «перекрыт» весь частотный диапазон $0 < \omega < \infty$ для получения нуля остатка на требуемой частоте.

В общем случае:

1. Анализируют мнимую ЧХ остатка $Z(j\omega)$ или $Y(j\omega) = 1/Z$ и выясняют, за счет частичного выделения какого из полюсов Z или Y можно получить нуль нового остатка на требуемой частоте.

2. Поскольку частотный анализ трудоемок, то на практике обычно используют «метод проб и ошибок»; выясняют, между какими корнями остатка находится требуемый нуль ПФ на частоте ω_0 (точнее, $s = \pm j\omega_0$); сначала пытаются выделить частично полюс, соответствующий одному из этих корней; если не получилось (т. е. частично выделенная составляющая оказалась больше полной — полностью выделенной — или оказалась отрицательной), то пытаются частично выделить полюс, соответствующий второму ближайшему корню.

17.4.3. Последовательность действий при реализации нуля третьей категории

В общих чертах процедура реализации нуля третьей категории была описана в п. 17.2.6. Рассмотрим вопрос детальнее. Допустим, в результате синтеза ЧП получили остаток, например $Z_{\text{III}}(s)$, корни которого не совпадают с еще нереализованными нулями ПФ. Предположим, что «методом проб» решили получить в новом остатке $Z_{\text{IV}} = Z_{\text{III}} - Z_3$ нуль на частоте $s = \pm j\omega_0$ за счет частичного выделения полюса Z_{III} на некоторой частоте $s = \pm j\omega_i$, т. е.

$$\begin{aligned} Z_{\text{III}}(s) &= \frac{\cdots}{\dots(s^2 + \omega_i^2)} = \\ &= \frac{k_q s}{(s^2 + \omega_i^2)} + \frac{\dots(s^2 + \omega_0^2)}{\dots(s^2 + \omega_i^2)} = Z_3(s) + Z_{\text{IV}}(s), \end{aligned} \quad (17.19)$$

причем в (17.19) составляющую $Z_3 = k_q s / (s^2 + \omega_i^2)$ называют обычно «частичной» в отличие от «полной» $k_p s / (s^2 + \omega_i^2)$,

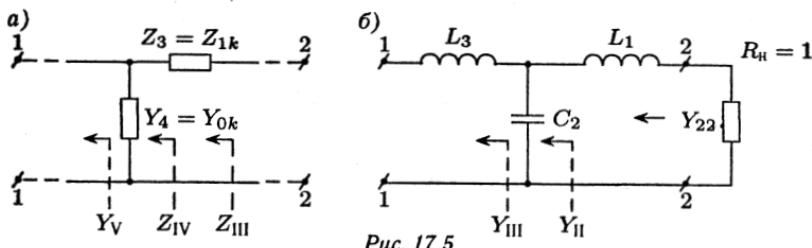


Рис. 17.5

соответствующей полностью выделенному полюсу, когда $k_{\text{п}} = (s^2 + \omega_i^2)Z_{\text{III}}(s)/s$ при $s^2 \rightarrow -\omega_i^2$.

Чтобы в новом остатке $Z_{\text{IV}}(s)$ получить нуль на частоте $s = \pm j\omega_0$, приравнивают в (17.19) Z_{III} и Z_3 на этой частоте и находят «частичный» коэффициент $k_{\text{ч}}$, который должен быть меньше «полного» коэффициента $k_{\text{п}}$, т. е.

$$0 < k_{\text{ч}} < k_{\text{п}}. \quad (17.20)$$

Реализуют $Z_3(s)$ в виде продольного сопротивления $Z_{1k}(s)$, как показано на рисунке 17.5, а. В «новом» остатке $Z_{\text{IV}}(s)$, как указано в (17.19), обязательно будет нуль на требуемой частоте $s = \pm j\omega_0$. Реализуем этот нуль ПФ как полностью выделенный полюс обращенного остатка:

$$Y_{\text{IV}} = \frac{1}{Z_{\text{IV}}} = \frac{\dots}{\dots (s^2 + \omega_0^2)} = \frac{k_{\text{п}} s}{s^2 + \omega_0^2} + Y_V;$$

$$k_{\text{п}} = \frac{(s^2 + \omega_0^2)}{s} Y_{\text{IV}}(s) \Big|_{s^2 = -\omega_0^2},$$

т. е. $Y_{\text{IV}} = Y_4 + Y_V$, и составляющая $Y_4(s)$ реализуется в виде поперечной проводимости Y_{0k} (см. рис. 17.5а), обеспечивая требуемый нуль третьей категории.

Если условие (17.20) не выполняется, необходимо изменить процедуру реализации, как указано в п. 17.4.2.

17.4.4. Общая последовательность синтеза ЧП

Необходимо реализовать ПФ (17.9) одного из вариантов (17.10).

1. Осуществляют общую проверку на реализуемость, как описано в § 17.3.

2. В соответствии с указаниями § 17.3 определяют параметры ЧП Z_{12} и Z_{22} (или $-Y_{12}$ и Y_{22}).

3. Записывают нули ПФ ЧП на основании найденных параметров ЧП. В соответствии с п. 17.2.3—17.2.5 необходимо записать нули Z_{12} и частные полюсы Z_{22} (или нули $-Y_{12}$ и частные полюсы Y_{22}).

Примечание. Среди записанных могут быть и так называемые лишние нули, которых нет в исходной ПФ $H(s)$ вида (17.9).

4. Синтезируют Z_{22} (или Y_{22}) со стороны 2—2, причем сначала реализуется первая категория нулей ПФ — частные полюсы (в виде Z_1 при синтезе Z_{22} или в виде Y_0 при синтезе Y_{22}).

5. Затем рекомендуется реализовывать вторую категорию нулей ПФ — тех, которые совпадают с нулями остатков от реализации Z_{22} или Y_{22} (путем полного выделения полюсов обращенных остатков в виде поперечных проводимостей Y_{0k} или продольных сопротивлений Z_{1k}).

6. Далее рекомендуется реализовывать третью категорию нулей ПФ, как описано в 17.4.3, до полной реализации всех записанных нулей ПФ.

7. Проверяют, что синтез закончен правильно (как указано в 17.2.8), рассчитывают ПФ схемы и находят k .

Примечание. Очередность реализаций нулей второй и третьей категорий можно изменять (в частности, если «условие правильного окончания синтеза» оказалось нарушенным).

ПРИМЕР 2. Синтезировать фильтр Баттерворта 3-го порядка. Первые 2 пункта реализации выполнены в примере 1 в п. 17.3.2, т. е. осуществлена полная проверка на реализуемость и определены параметры ЧП: $-Y_{12}(s) = 1/[s(s^2 + 2)]$; $Y_{22}(s) = 2(s^2 + 0,5)/[s(s^2 + 2)]$. Формально опишем остальную процедуру синтеза.

3. Записываем нули ПФ на основании параметров ЧП:
 - а) нули « $-Y_{12}$ » — это $s_{01,2,3} = \infty$, т. е. трехкратный нуль «в бесконечности»;
 - б) частные полюсы Y_{22} — отсутствуют.
4. Нулей первой категории ПФ не имеет.
5. Остаток от реализации Y_{22} (т. е. в данном примере сама проводимость $Y_{22} = Y_I$) имеет нуль, совпадающий с нулем ПФ $s_{01} = \infty$, который является, таким образом, нулем второй категории. Реализуем его как

полностью выделенный полюс (при $s = \infty$) обратной функции:

$$Z_I = \frac{1}{Y_I} = \frac{1}{Y_{22}} = \frac{s(s^2 + 2)}{2(s^2 + 0,5)} = Z_1 + Z_{II} = 0,5s + \frac{0,75s}{s^2 + 0,5},$$

что отражено на рисунке 17.5б в виде продольного сопротивления $Z_{1k} = Z_1 = 0,5s$, т. е. элемента $L_1 = 0,5$.

Новый остаток $Z_{II} = Z_I - Z_1$ тоже имеет нуль на частоте $s_{02} = \infty$ (еще один нуль второй категории). Реализуем его как полностью выделенный полюс обратной функции:

$$Y_{II} = \frac{1}{Z_{II}} = \frac{s^2 + 0,5}{0,75s} = \frac{4}{3}s + \frac{2}{3s} = Y_2 + Y_{III},$$

что отражено на рисунке 17.5б в виде поперечной проводимости $Y_{0k} = Y_2 = 4s/3$, т. е. элемента $C_2 = 4/3$.

Следующий остаток $Y_{III} = Y_{II} - Y_2 = 2/3s$ опять имеет нуль на требуемой частоте нуля $\Pi\Phi$ $s_{03} = \infty$ (нуль второй категории). Реализуем его как полностью выделенный полюс обратной функции: $Z_{III} = 1/Y_{III} = 3s/2 = Z_3$, что отражено на рисунке 17.5б в виде элемента $L_3 = 3/2$.

6. Реализация завершена — $\Pi\Phi$ ЧП не имеет нулей третьей категории.
7. Синтез схемы ЧП закончен правильно, так как при реализации ЧП по Y_{22} последним элементом (первым — со стороны I—I) должно быть продольное сопротивление $Z_{1k} = Z_3$.

Примечание. По условию нормированная нагрузка фильтра Баттервортса будет $R_H = 1$.

§ 17.5. СИНТЕЗ РЕЗИСТИВНО-ЕМКОСТНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

17.5.1. Свойства RC -четырехполюсников

1. Функции Z_{22} и Y_{22} удовлетворяют основному свойству $Z_{RC}(s)$, т. е. их нули и полюсы отрицательные простые, чередуются и ближайшим к началу координат у Z_{RC} является полюс.

2. Полюсы Z_{12} совпадают с полюсами Z_{22} , полюсы $-Y_{12}$ совпадают с полюсами Y_{22} .

3. Исключение из свойства 2: полюсы первого со стороны 2–2 продольного сопротивления Z_1 являются частными полюсами Z_{22} ; полюсы первой со стороны 2–2 поперечной проводимости Y_0 являются частными полюсами Y_{22} .

4. Нули ПФ ЧП — это нули Z_{12} и частные полюсы Z_{22} (или — нули $-Y_{12}$ и частные полюсы Y_{22}).

5. Полюсы продольных сопротивлений Z_{1k} и поперечных проводимостей Y_{0k} ЧП лестничной структуры — это нули ПФ ЧП, которые должны быть отрицательными.

6. Исключение из свойства 5: если при синтезе ЧП какой-либо полюс остатка выделен частично (т. е. не полностью) в виде Z_{1k} или Y_{0k} , то этот полюс не является нулем ПФ ЧП.

7. Условие Фиалкова должно выполняться, т. е. коэффициенты числителя ПФ не должны превышать соответствующих коэффициентов знаменателя.

8. Свидетельство правильного окончания синтеза должно выполняться.

9. Новое свойство в сравнении со свойствами LC -ЧП: полюсы ПФ RC -ЧП должны быть отрицательными и простыми.

Действительно, если ПФ ЧП $H(s) = kB(s)/A(s)$ имеет вид $H_I^{K3} = Z_{12}/Z_{22}$ или $H_U^{XX} = -Y_{12}/Y_{22}$, то полином $A(s)$ — это числитель Z_{22} и Y_{22} , а они должны удовлетворять основному свойству $Z_{RC}(s)$. Если ПФ имеет вид $H_I = Z_{12}/(1 + Z_{22})$ или $H_U = -Y_{12}/(1 + Y_{22})$, то знаменатель H_I можно трактовать как последовательное соединение единичного сопротивления и сопротивления $Z_{RC} = Z_{22}$, т. е. такое соединение должно удовлетворять основному свойству Z_{RC} . Знаменатель H_U дуально трактуется как параллельное соединение 1 и Y_{RC} ; числитель проводимости такого соединения имеет отрицательные и простые корни на основании свойства Z_{RC} .

17.5.2. Условие реализуемости

и определение параметров RC -ЧП по H_I^{K3} и H_U^{XX}

Задана подлежащая реализации ПФ $H(s) = kB(s)/A(s)$ вида $H_I^{K3} = Z_{12}/Z_{22}$ или $H_U^{XX} = -Y_{12}/Y_{22}$.

1. Вначале осуществляют проверку $H(s)$ на реализуемость:

а) условие Фиалкова должно выполняться (т. е. при достаточно малом $k > 0$ коэффициенты числителя ПФ

не превышают коэффициентов знаменателя при одинаковых степенях s);

- б) нули и полюсы ПФ отрицательные, причем полюсы простые.

2. Далее находят параметры ЧП: делят числитель и знаменатель $H(s)$ на такую произвольную дробно-рациональную функцию $D(s)$, чтобы Z_{22} удовлетворяло основному свойству Z_{RC} , а Y_{22} — основному свойству Y_{RC} (у Y_{22} ближайшим к началу координат должен быть нуль), т. е. определяют $Z_{12} = kB(s)/D(s)$, $Z_{22} = A(s)/D(s) = Z_{RC}$; или $-Y_{12} = kB(s)/D(s)$, $Y_{22} = A(s)/D(s) = Y_{RC}$.

Примечание. В простейшем случае $D(s)$ — это полином, корни которого отрицательные, простые и чередуются с корнями полинома $A(s)$, но такие, что $Z_{22} = Z_{RC}$, $Y_{22} = Y_{RC}$.

17.5.3. Определение параметров ЧП по $H_I(s)$ и $H_U(s)$

Подлежит реализации ПФ $H(s) = kB(s)/A(s)$ вида $H_I = Z_{22}/(1 + Z_{22})$ или $H_U = -Y_{12}/(1 + Y_{22})$ при нормированной нагрузке $R_h = 1$.

1. Вначале осуществляют проверку ПФ на реализуемость (см. 17.5.2).

2. Затем определяют параметры ЧП. Для этого полином знаменателя ПФ раскладывают на сумму двух полиномов $A(s) = A_{\text{пр}}(s) + A_{\text{лев}}(s)$, причем корни $A_{\text{пр}}(s)$ выбирают правее, а корни $A_{\text{лев}}(s)$ — левее корней полинома $A(s)$, т. е.

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n = \\ = \prod_{i=1}^n (s - s_i), \quad (17.21)$$

$$A_{\text{пр}}(s) = k_{\text{пр}}(a_{0\text{пр}} + a_{1\text{пр}} s + \cdots + s^n) = \\ = k_{\text{пр}} \prod_{i=1}^n (s - s_{i\text{пр}}), \quad (17.22)$$

$$A_{\text{лев}}(s) = k_{\text{лев}}(a_{0\text{лев}} + a_{1\text{лев}} s + \cdots + s^n) = \\ = k_{\text{лев}} \prod_{i=1}^n (s - s_{i\text{лев}}), \quad (17.23)$$

где $a_i = k_{\text{пр}} a_{i\text{пр}} + k_{\text{лев}} a_{i\text{лев}}$, $0 < k_{\text{пр}} \leq 1$, $0 < k_{\text{лев}} \leq 1$.

Обычно выбирают (в общем случае — произвольно) корни $s_{i\text{пр}}$ полинома (17.22). Тогда корни $s_{i\text{лв}}$ полинома (17.23) автоматически будут «формироваться» левее корней s_i полинома знаменателя (17.21).

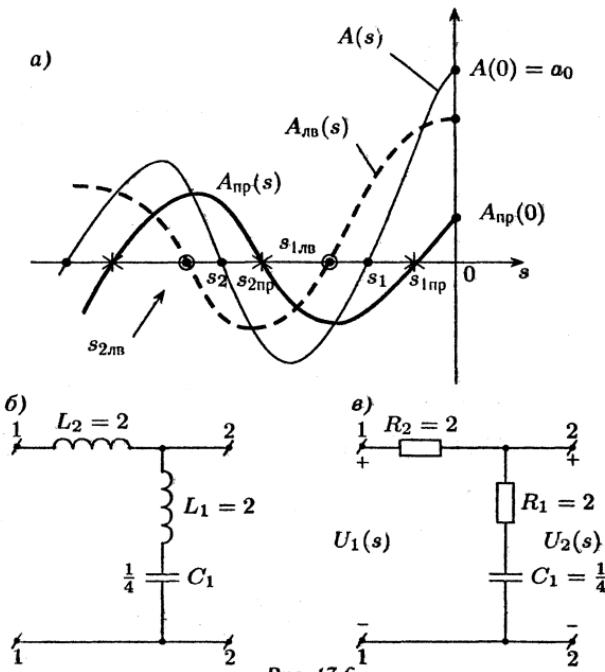


Рис. 17.6

Обоснование этого вытекает из рассмотрения схематично представленных на рисунке 17.6а графиков полиномов при $s_i < 0$. График полинома $A(s)$ при вещественных отрицательных значениях аргумента s считаем исходным; очевидно, что $A(0) = a_0 = \prod_{i=1}^n (-s_i) > 0$.

Правее s_i произвольно намечаем корни $s_{i\text{пр}}$ полинома $A_{\text{пр}}(s)$ и схематично показываем график полинома, учитывая, что $A_{\text{пр}}(0) = k_{\text{пр}} a_{0\text{пр}} = k_{\text{пр}} \prod_{i=1}^n (-s_{i\text{пр}}) > 0$, но $A_{\text{пр}}(0) < A(0)$. После этого графическим вычитанием несложно разметить характерные значения полинома $A_{\text{лв}}(s) = A(s) - A_{\text{пр}}(s)$ и указать его корни $s_{i\text{лв}}$, которые «автоматически оказываются» левее корней s_i .

Дальнейшая процедура определения параметров ЧП очевидна, если учесть, что $Z_{22} = Z_{RC}$ и ближайшим к началу

координат должен быть полюс, а $Y_{22} = Y_{RC}$ и ближайшим к началу координат должен быть нуль:

$$\begin{aligned} H_I(s) &= \frac{kB(s)}{A_{\text{пр}}(s) + A_{\text{лв}}(s)} = \frac{Z_{12}}{1 + Z_{22}} = \frac{kB/A_{\text{пр}}}{1 + A_{\text{лв}}/A_{\text{пр}}} \\ H_U(s) &= \frac{-Y_{12}}{1 + Y_{22}} = \frac{kB/A_{\text{лв}}}{1 + A_{\text{пр}}/A_{\text{лв}}}, \end{aligned} \quad (17.24)$$

т. е. значения Z_{12} и Z_{22} определяются первой формулой (17.24), а параметры $-Y_{12}$ и Y_{22} — второй формулой.

17.5.4. Реализация RC -четырехполюсников

Последовательность действий очевидна:

1. Осуществляют проверку ПФ на реализуемость (см. п. 17.5.2, 17.5.3).
2. Определяют параметры ЧП Z_{12} , Z_{22} или $-Y_{12}$, Y_{22} (см. п. 17.5.2, 17.5.3).
3. Переходят к параметрам соответствующего LC -четырехполюсника по формулам

$$\begin{aligned} Z_{LC}(p) &= pZ_{RC}(s) \Big|_{\substack{s=p^2 \\ L_k=R_k}}, \\ Y_{RC}(p) &= \frac{1}{p}Y_{RC}(s) \Big|_{\substack{s=p^2 \\ L_k=R_k}}. \end{aligned} \quad (17.25)$$

4. Синтезируют LC -четырехполюсник (как описано в § 17.4) и, заменяя индуктивности резисторами (численно $R_k = L_k$), получают искомый RC -четырехполюсник.

5. Выводят ПФ синтезированного ЧП $H(s) = kB(s)/A(s)$ и находят коэффициент k , не контролировавшийся при реализации.

17.5.5. Примеры синтеза RC -четырехполюсников

ПРИМЕР 3. Реализовать ПФ $H_U^{XX}(s) = k(s+2)/(s+1) = kB(s)/A(s) = -Y_{12}/Y_{22}$. Рассмотрим детально все пункты формального расчета.

1. Проверка на реализуемость выполняется, так как нули и полюсы ПФ отрицательные, причем полюсы простые, а условие Фиалкова справедливо при $k \leq 0.5$.

2. Делением числителя и знаменателя на $D(s)$ находим параметры ЧП $-Y_{12} = kB/D$, $Y_{22} = A/D$, причем необходимо, чтобы $Y_{22} = Y_{RC}(s)$, т.е. ближайшим к началу координат у Y_{22} должен быть нуль. Возможны варианты:
- $D(s) = s+2$; тогда $-Y_{12} = k$, $Y_{22} = (s+1)/(s+2)$, и этот вариант является удачным, поскольку Y_{22} явно имеет частный полюс;
 - $D(s) = (s + 1)/s$; тогда $-Y_{12} = ks(s + 2)/(s + 1)$, $Y_{22} = s = Y_{RC}$, но этот вариант нереализуем, так как не выполняется свойство 2 (по которому параметр Y_{22} должен содержать все полюсы Y_{12});
 - $D(s) = s + 3$; тогда $-Y_{12} = k(s + 2)/(s + 3)$, $Y_{22} = (s + 1)/(s + 3) = Y_{RC}(s)$; данный вариант неудачен, поскольку явно просматривается, что у ПФ будет самый трудный в реализации нуль III категории. Тем не менее рассмотрим реализацию вариантов а) и в).
3. В варианте а) переходим, используя (17.25), к параметрам соответствующего LC -четырехполюсника: $-Y_{12}(p) = k/p$, $Y_{22}(p) = (p^2 + 1)/[p(p^2 + 2)]$.
4. Записываем нули ПФ LC -ЧП по параметрам ЧП: $-Y_{12}$ имеет нуль при $p_{01} = \infty$; Y_{22} имеет частные полюсы при $p_{02,3} = \pm j\sqrt{2}$.
5. Переходим непосредственно к синтезу схемы ЧП. Вначале реализуем частный полюс Y_{22} , т. е. нуль ПФ на частоте $p_{02,3}$:

$$Y_{22} = \frac{p^2 + 1}{p(p^2 + 2)} = Y_1 + Y_{II} = \frac{0,5p}{p^2 + 2} + \frac{0,5}{p};$$

причем очевидно, что $Y_1 = 0,5p/(p^2 + 2) = 1/(2p + 4/p)$, т. е. поперечная проводимость ЧП «состоит» из последовательного соединения $L_1 = 2$ и $C_1 = 1/4$.

Остаток $Y_{II} = Y_{22} - Y_1 = 0,5/p$ имеет нуль на частоте еще не реализованного нуля ПФ при $p_{01} = \infty$ (т. е. это нуль II категории). Реализуем его как полностью выделенный полюс обратной функции: $Z_{II} = 1/Y_{II} = 2p = Z_2 = L_2 p$, т. е. реализуем нуль ПФ продольным сопротивлением Z_2 в виде $L_2 = 2$, как показано на рисунке 17.6б. Синтез закончен правильно, так как выполнено свойство 8.

6. Схема искомого RC -ЧП приведена на рисунке 17.6в (после замены $R_k = L_k$ в схеме на рисунке 17.6б с учетом (17.25)). Расчет ПФ схемы дает $H_U^{XX}(s) = U_2(s)/U_1(s) = 0,5(s+2)/(s+1)$, т. е. $k = 0,5$.

Рассмотрим также реализацию варианта в) параметров ЧП. Переход к LC -ЧП дает: $-Y_{12}(p) = k(p^2+2)/[p(p^2+3)]$, $Y_{22}(p) = (p^2+1)/[p(p^2+3)]$.

Записываем нули ПФ LC -ЧП по параметрам: $-Y_{12}$ имеет нули при $p_{01} = \infty$ и при $p_{02,3} = \pm j\sqrt{2}$; Y_{22} не имеет частных полюсов.

Реализуем LC -ЧП. Поскольку Y_{22} имеет нуль на частоте $p_{01} = \infty$, реализуем этот нуль II категории как полностью выделенный полюс обратной функции: $Z_I = 1/Y_{22} = p(p^2 + 3)/(p^2 + 1) = Z_1 + Z_{II} = p + 2p/(p^2 + 1)$. Продольное сопротивление $Z_1 = p$, т. е. $L_1 = 1$, как показано на рисунке 17.7а.

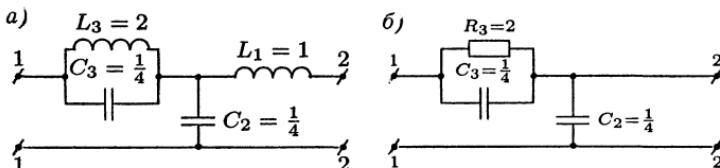


Рис. 17.7

Остаток $Z_{II} = 2p/(p^2 + 1)$ не имеет нуля, совпадающего с еще нереализованным нулем ПФ при $p_{02,3} = \pm j\sqrt{2}$, который «находится» между корнями Z_{II} при « ∞ » и при « $\pm j$ ». Методом «проб» пытаемся один из них выделить частично в виде полюса. Естественно для простоты начать «пробу» с полюса $Y_{II} = 1/Z_{II} = (p^2 + 1)/(2p)$ при $p = \infty$ (кроме того, полюс $p^2 = -1$ выделять частично здесь бесполезно, так как он соответствует простейшей составляющей).

Итак, имеем

$$Y_{II}(p) = \frac{p^2 + 1}{2p} = k_{qI}p + Y_{III} = Y_2 + Y_{III},$$

причем необходимо в новом остатке Y_{III} получить нуль при $p_{02,3} = \pm j\sqrt{2}$. Поэтому приравниваем $Y_{II} = Y_2$ на этой частоте: $(p^2 + 1)/2p = k_{qI}p$; $p^2 = -2$, откуда $k_{qI} = 1/4 < k_{II} = 1/2 = Y_{II}(p)/p$ при $p = \infty$, т. е. частичный коэффициент

(вычет) k_q меньше полного (что и требуется на основании п. 17.4.3). Итак, оказывается $Y_2 = 0,25p = C_2p$, что отражено на рисунке 17.7а.

Остаток $Y_{III} = Y_{II} - Y_2 = (p^2 + 1)/(2p) - 0,25p = (p^2 + - 2)/(4p)$ имеет нуль на требуемой частоте $p_{02,3} = \pm j\sqrt{2}$. Реализуем его как полностью выделенный полюс обратной функции:

$$Z_{III} = \frac{4p}{p^2 + 2} = \frac{1}{0,25p + 1/(2p)} = \frac{1}{C_3p + 1/(L_3p)},$$

что отражено на рисунке 17.7а.

Переходим к схеме искомого RC -ЧП (см. рис. 17.7б) и, определяя ее ПФ в режиме XX $H_U^{XX} = 0,5(s + 2)/(s + 1)$, находим $k = 0,5$, причем элемент R_1 из схемы исключен, так как рассматривается режим XX.

ПРИМЕР 4. Необходимо при единичном сопротивлении нагрузки синтезировать ПФ

$$H_U(s) = \frac{k(s + 2)}{(s + 1)} = \frac{-Y_{12}}{1 + Y_{22}} = \frac{kB(s)}{A(s)} = \frac{\frac{kB(s)}{A_{lb}(s)}}{1 + \frac{A_{np}(s)}{A_{lb}(s)}}.$$

Проверка на реализуемость выполняется (см. пример 3).

Разбиваем знаменатель ПФ на сумму полиномов $A(s) = A_{np}(s) + A_{lb}(s)$, как описано в п. 17.5.3. Делим числитель и знаменатель на $A_{lb}(s)$, чтобы проводимость $Y_{22}(s)$ соответствовала $Y_{RC}(s)$. Возможны различные варианты.

- Если $A_{np} = s$, то $A_{lb} = 1$. Тогда $-Y_{12} = k(s + 2)$, $Y_{22} = s$. Однако этот вариант нереализуем, так как при дополнительной проверке у ПФ $H_U^{XX} = -Y_{12}/Y_{22}$ не выполняется условие Фиалкова.
- Если $A_{np} = s + 0,5$, то $A_{lb} = 0,5$; следовательно, $-Y_{12} = 2k(s + 2)$, $Y_{22} = 2(s + 0,5)$. Но это не лучший вариант, поскольку явно «просматривается» трудно реализуемый нуль III категории.
- Вопреки рекомендациям (см. п. 17.5.3), пытаемся выбрать в качестве исходного полином $A_{lb} = 0,5(s + 2)$; следовательно, получаем $A_{np} = 0,5s$. Тогда $-Y_{12} = 2k$, $Y_{22} = s/(s + 2)$. Однако этот вариант, в котором у ПФ явно нет нулей III категории, реализовать невозможно,

поскольку дополнительная проверка $H_U^{XX} = -Y_{12}/Y_{22}$ на выполнение условия Фиалкова «не проходит».

4. Видоизменяя предыдущий вариант, выбираем $A_{\text{лв}} = 0,25(s + 2)$, тогда $A_{\text{пр}} = 0,75(s + 2/3)$. При этом $-Y_{12} = 4k$, $Y_{22} = 3(s + 2/3)/(s + 2)$, т. е. нет нулей III категории. Реализуем этот вариант.

Находим параметры LC -четырехполюсника:

$$-Y_{12} = 4k/p, \quad Y_{22} = \frac{3(p^2 + 2/3)}{p(p^2 + 2)}.$$

Определим нули ПФ LC -четырехполюсника по параметрам ЧП: $-Y_{12}$ имеет нуль при $p_{01} = \infty$; Y_{22} имеет частный полюс на частоте $p_{02,3} = \pm j\sqrt{2}$.

Реализуем вначале частный полюс:

$$Y_{22} = \frac{3(p^2 + 2/3)}{p(p^2 + 2)} = \frac{2p}{p^2 + 2} + \frac{1}{p} = Y_1 + Y_{II};$$

Остаток $Y_{II} = Y_{22} - Y_1 = 1/p$ имеет нуль при $p_{01} = \infty$. Синтезируем этот нуль ПФ как полностью выделенный полюс обратной функции $Z_{II} = 1/Y_{II} = p = L_2 p = Z_2$, как указано на рисунке 17.8а.

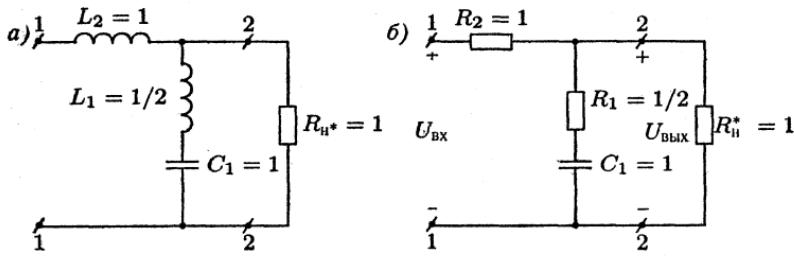


Рис. 17.8

После формальной замены $R_k = L_k$ получим показанную на рисунке 17.8б схему RC -четырехполюсника. Расчет ПФ по схеме дает $H_U(s) = 0,25(s+2)/(s+1)$, т. е. $k = 0,25$.

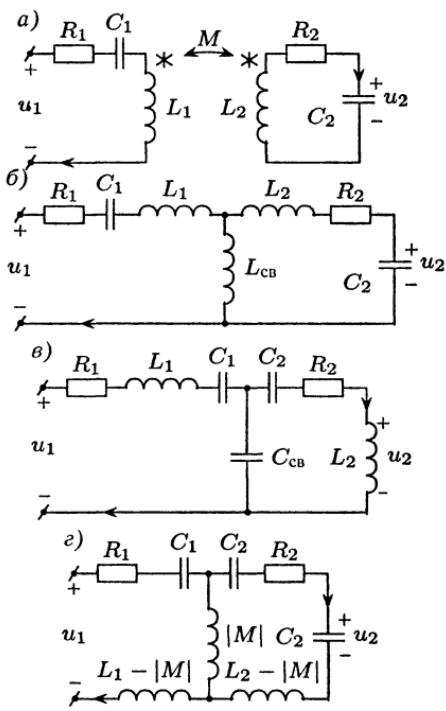
Обобщим полученные результаты.

ВЫВОД: при синтезе RC -ЧП важно так подбирать $D(s)$, $A_{\text{пр}}(s)$, $A_{\text{лв}}(s)$, чтобы среди нулей ПФ соответствующего LC -четырехполюсника оказалось побольше легко реализуемых нулей I и II категорий.

СВЯЗАННЫЕ КОНТУРЫ С БОЛЬШОЙ ДОБРОТНОСТЬЮ

§ 18.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

18.1.1. Виды связи



Связанным контуром называют 2 последовательных или параллельных колебательных RLC -контура, соединенных между собой реактивным элементом связи. На рисунке 18.1 приведены электрические схемы связанных контуров некоторых типов. В зависимости от типа элемента, с помощью которого осуществляется взаимосвязь между контурами, различают контуры с трансформаторной (рис. 18.1a), индуктивной (рис. 18.1б) и емкостной (рис. 18.1в) связями.

Схема, изображенная на рисунке 18.1a, может быть приведена к структуре схемы на рисунке 18.1б, если

воспользоваться эквивалентной схемой замещения без индуктивной связи (рис. 18.1г). На рисунке 18.1 воздействием u_1 является ИН, подключенный ко входу первичного контура, а реакцией считается напряжение u_2 вторичного контура.

Рис. 18.1

Степень связи между контурами характеризуют коэффициентом связи, равным $k_{\text{св}} = |M|/\sqrt{L_1 L_2}$ — для трансформаторной связи, $k_{\text{св}} = L_{\text{св}}/\sqrt{(L_1 + L_{\text{св}})(L_2 + L_{\text{св}})}$ — для индуктивной связи, $k_{\text{св}} = C_{\text{св}}/\sqrt{C_{\text{Ik}} C_{\text{IIk}}}$ — для емкостной связи, причем параметры $1/C_{\text{Ik}} = 1/C_1 + 1/C_{\text{св}}$; $1/C_{\text{IIk}} = 1/C_2 + 1/C_{\text{св}}$ определяют общие емкости в контурах.

Примечания:

- Схемам на рисунке 18.1б, в могут быть поставлены в соответствие дуальные с параллельными RLC -цепями и питанием от источников тока.
- Схемы на рисунке 18.1 с учетом рисунка 18.1г имеют одинаковую структуру; в связи с этим можно ограничиться рассмотрением характеристик только последовательных связанных контуров.

Поскольку связанные контуры имеют улучшенные частотные характеристики по сравнению с характеристиками одиночных RLC -контуров, их широко используют в частотно-избирательных устройствах.

18.1.2. Общие соотношения связанных контуров

Всем типам последовательных связанных контуров (рис. 18.1) соответствует общая эквивалентная схема, представленная на рисунке 18.2а, где полное операторное сопротивление первичного контура: $Z_1 = R_1 + 1/(sC_1) + sL_1$ — для трансформаторной связи; $Z_1 = R_1 + 1/(sC_1) + s(L_1 + L_{\text{св}})$ — для индуктивной связи; $Z_1 = R_1 + 1/(sC_{\text{Ik}}) + sL_1$ — для емкостной связи.

Аналогично, имеем полное сопротивление вторичного контура: $Z_2 = R_2 + sL_2 + 1/(sC_2)$ — для трансформаторной связи; $Z_2 = R_2 + 1/(sC_2) + s(L_2 + L_{\text{св}})$ — для индуктивной связи; $Z_2 = R_2 + 1/(sC_{\text{IIk}}) + sL_2$ — для емкостной связи.

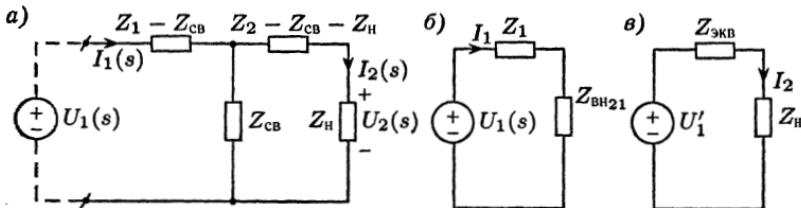


Рис. 18.2

Сопротивление связи следующее: $Z_{\text{св}} = sM$ — для трансформаторной связи; $Z_{\text{св}} = sL_{\text{св}}$ — для индуктивной связи; $Z_{\text{св}} = 1/(sC_{\text{св}})$ — для емкостной связи.

Уравнения введенной общей эквивалентной схемы имеют вид

$$U_1(s) = Z_1 I_1(s) - Z_{\text{св}} I_2(s), \quad (18.1)$$

$$0 = -Z_{\text{св}} I_1(s) + Z_2 I_2(s). \quad (18.2)$$

Решая систему (18.1), определяем токи:

$$I_1 = \frac{Z_2 U_1}{Z_1 Z_2 - Z_{\text{св}}^2}, \quad (18.3)$$

$$I_2 = \frac{Z_{\text{св}}}{Z_2} I_1 = \frac{Z_{\text{св}} U_1}{Z_1 Z_2 - Z_{\text{св}}^2}. \quad (18.4)$$

Из (18.3) находим входное сопротивление связанных контуров:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} \doteq \frac{Z_1 Z_2 - Z_{\text{св}}^2}{Z_2} = Z_1 - \frac{Z_{\text{св}}^2}{Z_2} = Z_1 + Z_{\text{вн}_{21}}, \quad (18.5)$$

которое равно сумме сопротивлений первичного контура Z_1 и вносимого сопротивления $Z_{\text{вн}_{21}} = -Z_{\text{св}}^2/Z_2$, учитывающего влияние вторичного контура на первичный.

Выражению (18.5) можно поставить в соответствие схему замещения связанных контуров, приведенную к первичному контуру (рис. 18.2б).

Аналогичную схему замещения, приведенную ко вторичному контуру, составляют, используя метод эквивалентного источника напряжения, т. е. ток во вторичном контуре рассчитывают по схеме, изображенной на рисунке 18.2в.

Напряжение холостого хода $U_{\text{ХХ}} = U'_1$ находят из схемы, представленной на рисунке 18.3а, а $Z_{\text{экв}}$ — на рисунке 18.3б.

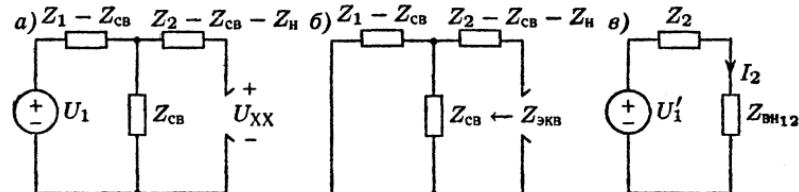


Рис. 18.3

Таким образом, $U'_1 = U_{XX} = U_1 Z_{\text{cb}} / Z_1$, а $Z_{\text{ЭКВ}} = Z_2 - Z_{\text{cb}} - Z_{\text{H}} + (Z_1 - Z_{\text{cb}})Z_{\text{cb}} / Z_1 = Z_2 - Z_{\text{H}} - Z_{\text{cb}}^2 / Z_1$, откуда на основании схемы, представленной на рисунке 18.2в, получают схему замещения, приведенную ко вторичному контуру (рис. 18.3в), т. е. аналогично (18.5) представляют входное сопротивление, приведенное ко вторичному контуру Z_{BX_2} , в виде

$$Z_{\text{BX}_2} = Z_2 - \frac{Z_{\text{cb}}^2}{Z_1} = Z_2 + Z_{\text{BH}_{12}}, \quad (18.6)$$

где вносимое сопротивление $Z_{\text{BH}_{12}}$ учитывает влияние первичного контура на вторичный.

Из выражений (18.3)–(18.5) находят передаточные функции связанных контуров по току

$$H_I(s) = \frac{I_2}{I_1} = \frac{Z_{\text{cb}}}{Z_2} \quad (18.7)$$

и по напряжению

$$H_U(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_{\text{H}} I_2}{Z_{\text{BX}} I_1} = \frac{Z_{\text{H}} Z_{\text{cb}}}{Z_1 Z_2 - Z_{\text{cb}}^2}. \quad (18.8)$$

Вывод: общие соотношения для последовательных связанных контуров подобны формулам для линейного трансформатора.

Примечания:

1. Соответствующие выражения для параллельных связанных контуров могут быть получены дуальным путем.
2. Соотношения записаны в операторной форме; для перехода к формулам установившегося синусоидального режима достаточно выполнить формальные замены:

$$U(s) \rightarrow \dot{U}, \quad I(s) \rightarrow \dot{I}, \quad s \rightarrow j\omega.$$

§ 18.2. РЕЗОНАНС В СВЯЗАННЫХ КОНТУРАХ

18.2.1. Общая характеристика видов резонанса

Настройкой колебательных контуров в резонанс называют изменение реактивных параметров контура при неизменной частоте и амплитуде входного сигнала с целью получения максимального значения тока во вторичном контуре.

Примечание. При настройке изменяют только реактивные параметры контуров (L и C), а сопротивления R оставляют постоянными.

По определению, в установившемся синусоидальном режиме резонанс в цепи на частоте $\omega_{\text{рез}}$ с учетом выражения (18.5) наблюдается при выполнении следующего условия:

$$x_{\text{вх}}(j\omega_{\text{рез}}) = \text{Im } Z_{\text{вх}}(j\omega_{\text{рез}}) = \text{Im} \left[Z_1 - \frac{Z_{\text{cb}}^2}{Z_2} \right] = 0. \quad (18.9)$$

Введем следующие обозначения:

$$Z_1 = r_1 + jx_1, \quad Z_2 = r_2 + jx_2, \quad Z_{\text{cb}} = \pm jx_{\text{cb}},$$

т. е. представим сопротивления контуров в алгебраической форме (очевидно $r_1 = R_1$, $r_2 = R_2$ в схемах на рисунке 18.1). Тогда с учетом (18.5), (18.6) вносимые сопротивления будут

$$\begin{aligned} Z_{\text{вн}_{21}} &= -\frac{Z_{\text{cb}}^2}{Z_2} = \frac{x_{\text{cb}}^2}{r_2 + jx_2} = \\ &= \frac{r_2 x_{\text{cb}}^2}{r_2^2 + x_2^2} + j \frac{-x_2 x_{\text{cb}}^2}{r_2^2 + x_2^2} = r'_1 + jx'_1; \end{aligned} \quad (18.10)$$

$$Z_{\text{вн}_{12}} = -\frac{Z_{\text{cb}}^2}{Z_1} = \frac{r_1 x_{\text{cb}}^2}{r_1^2 + x_1^2} + j \frac{-x_1 x_{\text{cb}}^2}{r_1^2 + x_1^2} = r'_2 + jx'_2. \quad (18.11)$$

В связанных контурах обычно различают 4 вида резонансов и соответствующие способы настройки:

1. Частный резонанс.
2. Индивидуальный резонанс.
3. Сложный резонанс.
4. Полный резонанс.

18.2.2. Частный резонанс

Различают первый и второй частные резонансы. В первом случае, изменяя только реактивные параметры первичного контура, не изменяя Z_{cb} , добиваются выполнения условия (18.9), которое применительно к введенным обозначениям (18.10) будет иметь вид:

$$\text{Im } Z_{\text{вх}} = x_1 + x'_1 = 0,$$

или

$$x_1 - \frac{x_2 x_{\text{cb}}^2}{r_2^2 + x_2^2} = 0.$$

Из 18.1.2 следует, что равенство нулю может быть достигнуто, например, изменением реактивного сопротивления первичного

контура $x_1 = x_{LC} + x_{cb}$, причем изменением только составляющей x_{LC} , определяемой элементами L_1 и C_1 .

При возникновении первого частного резонанса входное со-противление контуров минимально: $Z_{bx} = r_1 + r_2 x_{cb}^2 / (r_2^2 + x_2^2)$, следовательно, входной ток, а потому и ток I_2 максимальны:

$$I_1 = I_{1 \max_{q.p.}} = \frac{U_1}{|Z_{bx}|} = \frac{U_1}{r_1 + \frac{r_2 x_{cb}^2}{r_2^2 + x_2^2}}, \quad (18.12)$$

причем с учетом (18.7) имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{2 \max_{q.p.}} = |H_I| I_{1 \max_{q.p.}} = \\ &= \left| \frac{Z_{cb}}{Z_2} \right| I_{1 \max_{q.p.}} = \frac{U_1}{|Z_2| \left(\frac{r_1}{x_{cb}} + \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} x_{cb} \right)}. \end{aligned} \quad (18.13)$$

Второй частный резонанс возникает при равенстве нулю мнимой части (18.6):

$$\operatorname{Im} Z_{bx_2} = 0,$$

т. е. при выполнении условия:

$$x_2 + x'_2 = x_2 - \frac{x_1 x_{cb}^2}{r_1^2 + x_1^2} = 0. \quad (18.14)$$

Равенство (18.14) достигается путем изменения только реактивных параметров элементов L_2 и C_2 вторичного контура, без изменения Z_{cb} . При этом, как следует из схемы замещения (см. рис. 18.3в), ток во вторичном контуре будет максимальен:

$$I_{2 \max_{q.p.}} = \frac{U'_1}{|Z_{bx_2}|} = \frac{U_1 \left| \frac{Z_{cb}}{Z_1} \right|}{r_2 + \frac{r_1 x_{cb}^2}{(r_1^2 + x_1^2)}}, \quad (18.15)$$

где (18.15) записано с учетом (18.6), (18.11) и (18.14).

18.2.3. Индивидуальный резонанс

Настройку на индивидуальный резонанс выполняют, изменения параметры реактивных элементов обоих контуров (без регулировки Z_{cb}) так, чтобы

$$x_1 = x_2 = 0. \quad (18.16)$$

При этом, как видно из 18.2.2 и (18.14), одновременно реализуются первый и второй частные резонансы.

Максимальные токи найдем из (18.12), (18.13), (18.15) с учетом (18.16):

$$\left. \begin{aligned} I_{1 \max_{\text{н.р.}}} &= \frac{U_1}{|Z_{\text{вх}}|} = \frac{U_1}{r_1 + x_{\text{cb}}^2/r_2}, \\ I_{2 \max_{\text{н.р.}}} &= |H_I| I_1 = \frac{U_1}{x_{\text{cb}} + r_1 r_2 / x_{\text{cb}}}. \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

Настройку на данный резонанс осуществляют, обеспечивая поочередно резонанс в каждом из контуров при отключенном другом контуре.

18.2.4. Сложный резонанс

Настройку на сложный резонанс выполняют в несколько этапов. Сначала, изменения Z_1 , добиваются выполнения условия (18.9), обеспечивая максимальное значение тока $I_{1 \max}$. Далее, изменения Z_{cb} , находят максимально возможное значение тока I_2 (при этом условие (18.9) нарушается). Затем вновь подстраивают Z_1 до выполнения условия (18.9) и т. д. Так итерационным путем обеспечивают последовательное приближение к максимально возможным значениям (максимуму максиморуму) токов: $I_{1 \max \max}$, $I_{2 \max \max}$ и напряжения на нагрузке $U_{2 \max \max}$.

Найдем эти максимальные значения, учитывая, что при резонансе $Z_h = \rho_2$ (так как по определению характеристическое сопротивление RLC -контура $\rho = \omega_0 L = 1/(\omega_0 C) = \sqrt{L/C}$ — это сопротивление емкости или индуктивности на резонансной частоте ω_0).

Анализируя (18.13), видим, что максимум максиморума тока I_2 достигается при минимуме его знаменателя. Приравнивая нуль первую производную знаменателя по x_{cb} , получаем

$$-\frac{r_1}{x_{\text{cb}}^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} = 0,$$

откуда находим оптимальное значение модуля сопротивления связи

$$X_{\text{cb opt}_{\text{с.р.}}} = |Z_2| \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}, \quad (18.18)$$

где $|Z_2|^2 = r_2^2 + x_2^2$.

При таком оптимальном значении (18.18) токи (18.12), (18.13), (18.15) будут максимально возможными:

$$I_{1 \max \max} = 0,5U_1/r_1, \quad (18.19)$$

$$I_{2 \max \max} = 0,5U_1/\sqrt{r_1 r_2}, \quad (18.20)$$

а максимально возможное напряжение на нагрузке имеет вид

$$U_{2 \max \max} = Z_h I_{2 \max \max} = \rho_2 0,5U_1/\sqrt{r_1 r_2}. \quad (18.21)$$

18.2.5. Полный резонанс

Настройка на полный резонанс выполняется в 2 этапа. На первом этапе контуры настраиваются на индивидуальный резонанс, а на втором этапе подбирают оптимальное значение $Z_{\text{св}}$ до получения $I_{1 \max \max}$, $I_{2 \max \max}$, $U_{2 \max \max}$. Таким образом осуществляется оптимальная настройка, причем наиболее простым способом.

Анализируя (18.17), находим, что максимально возможное значение тока I_2 достигается при минимуме его знаменателя. Из равенства нулю первой производной знаменателя по $x_{\text{св}}$ находим оптимальное значение модуля сопротивления связи:

$$X_{\text{св опт}_{n.p.}} = \sqrt{r_1 r_2}, \quad (18.22)$$

причем согласно (18.18), (18.22) оказывается, что значение $X_{\text{св опт}_{n.p.}} < X_{\text{св с.р.}}$, так как $r_2 < |Z_2|$. При этом в (18.17) токи $I_{1 \max \max} = 0,5U_1/r_1$, $I_{2 \max \max} = 0,5U_1/\sqrt{r_1 r_2}$, т. е. достигают точно таких же значений (18.19), (18.20), как при сложном резонансе.

Коэффициент связи при настройке на полный резонанс и одинаковых контурах будет

$$k_{\text{св}} = \frac{x_{\text{св}}}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2}} = \frac{r}{\rho} = \frac{1}{Q},$$

где Q — добротность RLC -контура.

Выводы:

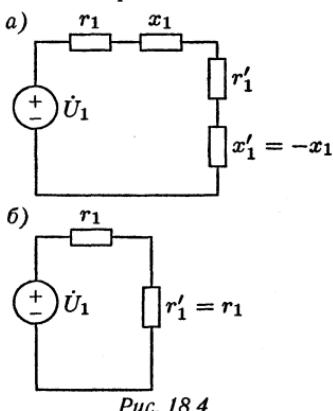
1. Значения максимально возможных токов в случае сложного резонанса и в случае полного резонанса одинаковы, однако полный резонанс реализовать проще.

2. Из (18.22) и (18.18) следует, что $X_{\text{св опт}_{n.p.}} < X_{\text{св опт}_{c.p.}}$, т. е. оптимальная связь при полном резонансе обеспечивает-ся проще особенно при трансформаторной связи, так как требуется меньшее значение взаимной индуктивности $|M|$.

18.2.6. Энергетические соотношения

При резонансе в первичном контуре обеспечивают выполнение условия $x_{\text{вх}} = x_1 + x'_1 = 0$, где $x'_1 = x_{\text{вн}21}$, т. е. $x_1 = -x_{\text{вн}21}$.

В режиме сложного резонанса согласно (18.19) $I_{1 \text{ max max}} = 0,5U_1/r_1 = U_1/(r_1 + r_{\text{вн}21})$, т. е. $r_1 = r_{\text{вн}21} = r'_1$; в режиме полного резонанса тоже $r_1 = r'_1$, но при этом $x_1 = x'_1 = 0$.



Таким образом, эквивалентные схемы замещения, приведенные к первичному контуру, в случаях сложного резонанса (рис. 18.4а) и полного резонанса (рис. 18.4б) позволяют сделать вывод, что оба случая удовлетворяют условию передачи максимальной мощности во вторичный контур.

Суммарная активная мощность при этом будет

$$P_{\Sigma} = r_{\text{вх}}I_1^2 = 2r_1 \left(\frac{U_1}{2r_1} \right)^2 = \frac{U_1^2}{2r_1},$$

а мощность, передаваемая во вторичный контур, с учетом (18.20), (18.21) следующая:

$$P_2 = U_1^2 / (4r_1) = 0,5P_{\Sigma},$$

т. е. КПД связанных контуров равен 50%.

§ 18.3. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

18.3.1. Допущения и обобщенные параметры

Связанные контуры, содержащие 5 реактивных элементов, — это цепь четвертого порядка и выполнять исследования частотных характеристик такой системы в общем виде очень сложно. Поэтому практический интерес представляют исследования

с учетом ряда допущений, которые не изменяют существа изучаемых явлений.

Первое допущение: контуры считают одинаковыми, т. е. $r_1 = r_2 = r$, $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$ и, следовательно, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $Q_1 = Q_2 = Q = \rho/r$.

Второе допущение: исследуют частотный диапазон вблизи частоты ω_0 при малых, так называемых абсолютных расстройках $\delta\omega = \omega - \omega_0$ по сравнению с $\omega \approx \omega_0$. Тогда $\omega + \omega_0 = 2\omega_0 + \delta\omega = 2\omega - \delta\omega \approx 2\omega_0 \approx 2\omega$.

Кроме абсолютной, используют также относительную расстройку

$$\delta\omega_* = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_0} - 1 = \omega_* - 1,$$

где ω_* — нормированная частота, и вводят 2 обобщенных параметра.

Для характеристики расстройки вводят обобщенную расстройку:

$$\varepsilon = \frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \frac{x}{r} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{r} = \frac{L}{r\omega} (\omega^2 - \omega_0^2), \quad (18.23)$$

которая с учетом допущений приблизительно равна:

$$\varepsilon = \frac{x}{r} \approx 2Q \frac{\delta\omega}{\omega_0} = 2Q\delta\omega_*. \quad (18.24)$$

Для характеристики связи контуров используют фактор связи:

$$a = \frac{|x_{cb}|}{r} = Q \frac{|x_{cb}|}{\rho} \approx Qk_{cb}. \quad (18.25)$$

18.3.2. Резонансные частоты

Используя допущения и введенные обобщенные параметры, запишем входное сопротивление (18.5) с учетом (18.10):

$$Z_{bx} = Z_1 + Z_{bh21} = r \left(1 + \frac{x_{cb}^2}{r^2 + x^2} \right) + jx \left(1 - \frac{x_{cb}^2}{r^2 + x^2} \right)$$

или

$$Z_{bx} = r \left(1 + \frac{a^2}{1 + \varepsilon^2} \right) + jx \left(1 - \frac{a^2}{1 + \varepsilon^2} \right). \quad (18.26)$$

Резонансные частоты связанных контуров найдем, используя (18.9):

$$\operatorname{Im} Z_{\text{вх}} = x \left(1 - \frac{a^2}{1 + \varepsilon^2} \right) = 0;$$

отсюда с учетом (18.24) определим резонансные частоты:

1. $x = r\varepsilon = 0$, следовательно, $\omega_{\text{рез}_1} = \omega_0$, т. е. частота совпадает с резонансной частотой для одиночного контура;
2. $(1 - \frac{a^2}{1 + \varepsilon^2}) = 0$, откуда $\varepsilon = \pm\sqrt{a^2 - 1}$, и с учетом (18.24), где $\varepsilon \approx 2Q(\omega - \omega_0)/\omega_0$, находим:

$$\omega_{\text{рез}_{2,3}} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \sqrt{a^2 - 1} \right). \quad (18.27)$$

ВЫВОДЫ:

1. При слабой связи ($a^2 < 1$, т. е. $a = Qk_{\text{св}} < 1$ согласно (18.25)) система связанных контуров имеет одну резонансную частоту $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, совпадающую с резонансной частотой одиночного контура, что соответствует индивидуальному резонансу.
2. При сильной связи ($a = Qk_{\text{св}} = |x_{\text{св}}|/r > 1$, т. е. $|x_{\text{св}}| > r$) появляются дополнительно еще 2 резонансные частоты (18.27), расположенные симметрично относительно ω_0 (согласно (18.18), (18.22) — это случай сложного резонанса).
3. При критической связи ($a = 1$, т. е. $|x_{\text{св}}| = r$) система имеет трехкратный резонанс на частоте ω_0 (согласно (18.22) — это случай полного резонанса).

18.3.3. Частотная характеристика функции передачи по напряжению

Частотная характеристика, соответствующая передаточной функции связанных контуров по напряжению (18.8), имеет вид

$$H_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_h Z_{\text{св}}}{Z_1 Z_2 - Z_{\text{св}}^2} = \frac{(\mp j\rho)(\pm j|x_{\text{св}}|)}{Z_1 Z_2 + x_{\text{св}}^2},$$

где верхние знаки соответствуют трансформаторной и индуктивной связям, а нижние — емкостной.

Переходя к обобщенным параметрам (18.24), (18.25), запишем разделив числитель и знаменатель на r^2 :

$$H_U(j\omega) = \frac{\rho|x_{cb}|}{Z_1 Z_2 + x_{cb}^2} = \frac{Qa}{(1+j\varepsilon)^2 + a^2}, \quad (18.28)$$

причем в ЧХ (18.28) частота ω задана неявно, поскольку она входит в обобщенную расстройку согласно (18.23), (18.24).

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) будет

$$A(\omega) = |H_U(j\omega)| = \frac{Qa}{\sqrt{(1+a^2-\varepsilon^2)^2 + (2\varepsilon)^2}}. \quad (18.29)$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) следующая

$$\Phi(\omega) = -\arctg\left(\frac{2\varepsilon}{1+a^2-\varepsilon^2}\right).$$

Оценим характерные значения ЧХ на следующих частотах:

- При $\omega = \omega_0$, когда обобщенная расстройка (18.23) $\varepsilon = 0$, имеем $A(\omega_0) = Qa/(1+a^2)$, $\Phi(\omega_0) = 0$;
- На нулевой частоте $\omega = 0$, когда согласно (18.23) $\varepsilon = -\infty$, получим $A(0) = 0$; $\Phi(0) = +180^\circ$;
- На частоте $\omega = \infty$, т. е. при $\varepsilon = +\infty$, находим $A(\infty) = 0$, $\Phi(\infty) = -180^\circ$.

18.3.4. Исследование АЧХ при различной связи

Уточним вид ЧХ вблизи ω_0 . Для этого определим экстремальные точки АЧХ. Приравнивая нулю первую производную знаменателя (18.29) по ε , получим следующее уравнение:

$$-(1+a^2-\varepsilon^2)\varepsilon + 2\varepsilon = 0,$$

откуда находим 3 решения: $\varepsilon_1 = 0$, т. е. $\omega_1 = \omega_0$, $\varepsilon_{2,3} = \pm\sqrt{a^2 - 1}$, или с учетом (18.23), (18.27) получим

$$\omega_{2,3} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \sqrt{a^2 - 1}\right).$$

Значения АЧХ (18.29) в точках экстремума будут равны:

- $A(\omega_0)|_{\varepsilon=0} = Qa/(1+a^2)$, причем при $a = 1$ имеем максимум $A(\omega_0)|_{a=1} = A_{\max} = Q/2$;

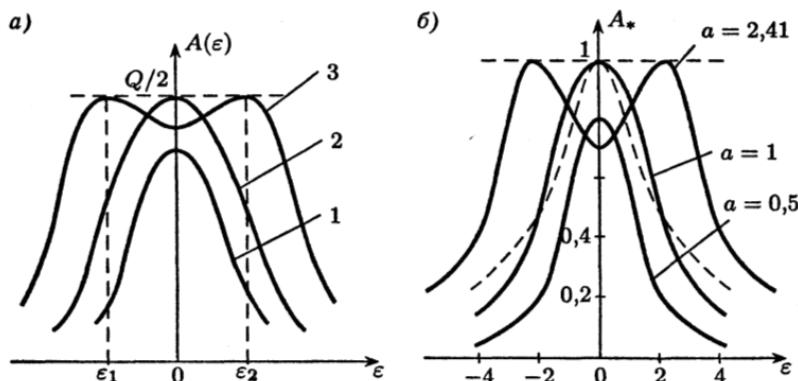


Рис. 18.5

$$2. A(\omega_{2,3})|_{\epsilon=\pm\sqrt{a^2-1}} = Qa/(\sqrt{4+4a^2-4}) = 0,5Q = \\ = A_{\max \max}.$$

ВЫВОДЫ:

- При слабой связи ($a < 1$, т. е. $k_{\text{св}} < 1/Q$, $|x_{\text{св}}| < r$ или $|x_{\text{св}}| < X_{\text{св опт}_{n,p}}$) имеем «одногорбую» кривую (кривая 1 на рисунке 18.5а) с максимальным значением $A_{\max} = Qa/(1+a^2)$ при $\omega = \omega_0$; это случай индивидуального резонанса.
- При критической связи ($a = 1$, $k_{\text{св}} = 1/Q$, $|x_{\text{св}}| = r = X_{\text{св опт}_{n,p}}$ согласно (18.22)) имеем предельно плоскую «одногорбую» кривую с одним максимумом максиморумом: $A_{\max \max} = Q/2$ при $\omega = \omega_0$ (кривая 2 на рисунке 18.5а). Это соответствует полному резонансу в контурах.
- При сильной связи ($a > 1$, $k_{\text{св}} > 1/Q$, $|x_{\text{св}}| > r = X_{\text{св опт}_{n,p}}$) получаем «двугорбую» кривую, причем на частоте $\omega = \omega_0$, соответствующей $\epsilon = 0$, значение АЧХ $A(\omega_0) = Qa/(1+a^2) < Q/2$ дает минимум, а 2 максимума располагаются симметрично относительно частоты $\omega = \omega_0$ (кривая 3 на рисунке 18.5а) на частотах $\epsilon_{2,3}$, соответствующих (18.27). При этом максимумы «разбегаются» с увеличением фактора связи. Это случай сложного резонанса, т. е. настройка в «частный резонанс» с последующим переходом к сложному резонансу ($X_{\text{св опт}_{c,p}} > X_{\text{св опт}_{n,p}}$) дает 2 абсолютных максимума $A_{\max \max} = Q/2$ при ϵ_2 и ϵ_3 .

18.3.5. Сравнение АЧХ связанных контуров и одиночного контура

Для сравнения изобразим семейство нормированных АЧХ $A^*(\varepsilon) = A(\varepsilon)/A_{\max \max}$ в зависимости от фактора связи a (рис. 18.5б).

Частотная характеристика одиночного колебательного контура на рисунке 18.5б показана пунктиром. Как известно, у одиночного контура на частоте $\omega = \omega_0$ ток принимает значение $I_{1 \max} = U_1/R$, а в случае связанных контуров $I_{1 \max} = U_1/(2R)$ согласно (18.19).

Выходное напряжение $U_{C \max} = U_{C0} = |x_{C0}|U_1/R = QU_1$ для одиночного контура, а для связанных контуров $U_{2 \max \max} = 0,5QU_1$ согласно (18.21). Таким образом, у одиночного контура максимальное значение АЧХ будет $A_{\max} = Q$, а у связанных контуров — $A_{\max \max} = 0,5Q$, т. е. при их использовании потери в усилении в 2 раза.

Преимущество связанных контуров, как показано в § 18.4, заключается в значительно лучшей избирательности. На границе полосы пропускания (на уровне $0,707A_{\max}$) крутизна спада АЧХ связанных контуров выше, чем у одиночного контура. ЧХ системы связанных контуров при $a > 1$ (но $a < 2,41$, иначе $A(\omega_0) < 0,707A_{\max}$) ближе по форме к характеристикам идеального фильтра, чем ЧХ одиночного контура.

§ 18.4. ПРОЕКТИРОВАНИЕ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ

18.4.1. Определение полосы пропускания

Полосой пропускания (ПП) связанных контуров $\Delta\omega_{c.k.}$ называют диапазон частот, вне которого АЧХ $A(\omega) < 0,01nA_{\max}$, где $n = 100/\sqrt{2} = 70,7\%$.

Это определение подходит и к «двугорбой» кривой (рис. 18.5б при $a > 1$) и к «одногорбой» (при $a \leq 1$).

Для одиночного контура ПП определялась как $\Delta\omega_{1k} = \omega_0/Q$. У системы связанных контуров $\Delta\omega_{c.k.} < \Delta\omega_{1k}$ при слабой связи ($a \ll 1$), однако при критической и сильной связи ($a \geq 1$) имеем $\Delta\omega_{c.k.} > \Delta\omega_{1k}$, как показано ниже.

Вычислим ПП для двух случаев:

1. Критическая связь ($a = 1$), т. е. в цепи наблюдается полный резонанс. На границах ПП значение АЧХ (18.29) должно быть равно значению $A_{\max}/\sqrt{2}$, т.е.

$$\frac{Qa}{\sqrt{(a^2 + 1 - \varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2}} = \frac{Q}{2\sqrt{2}}. \quad (18.30)$$

Из (18.30) при $a = 1$ находим $\varepsilon = \pm\sqrt{2}$; следовательно, ширина ПП будет $\Delta\varepsilon = 2\sqrt{2}$. С учетом (18.24) определяем ПП связанных контуров:

$$\Delta\omega_{\text{с.к.}} = \frac{\omega_0}{2Q} \Delta\varepsilon = \sqrt{2}\Delta\omega_{1\kappa} > \Delta\omega_{1\kappa}.$$

2. Случай сильной связи ($a > 1$). При этом на частоте ω_0 , когда значение АЧХ равно $A(\omega_0)$, наблюдается локальный минимум. Определим предельное значение фактора связи $a_{\text{пр}}$, превышение которого приводит к тому, что ПП связанных контуров распадается на 2 участка. Это значение находим из условия:

$$\frac{Q}{2\sqrt{2}} = A(\omega_0)|_{\varepsilon=0} = \frac{Qa}{a^2 + 1},$$

откуда $a_{\text{пр}} \approx 2,41$.

Используя выражение (18.30) при $a = a_{\text{пр}}$, находим ПП $\Delta\varepsilon \approx 6,2$ откуда с учетом (18.24) получаем

$$\Delta\omega_{\text{с.к.}} = \frac{\omega_0 \Delta\varepsilon}{2Q} \cong 3,1 \Delta\omega_{1\kappa}.$$

18.4.2. Определение параметров контуров по заданным требованиям

Для определения параметров необходимо иметь семейство нормированных АЧХ связанных контуров $A(\omega)/A_{\max} = f(\omega)$ в функции от частоты ω или в функции от обобщенной расстройки ε при различных значениях фактора связи a . Эти семейства типа рисунка 18.5б приводятся в справочной литературе.

Первый вариант. Наиболее полное задание должно содержать следующие исходные данные: резонансную частоту — ω_0 , значение максимума АЧХ — A_{\max} , ширину ПП — $\Delta\omega$

и коэффициент прямоугольности — $k_{\text{пр}}$, определяющий избирательные свойства контуров:

$$k_{\text{пр}} = \frac{\Delta\omega_n}{\Delta\omega_m} = \frac{\Delta\varepsilon_n}{\Delta\varepsilon_m}, \quad (18.31)$$

где значение $\Delta\omega_n$ определяется на уровне nA_{\max} (обычно $n = 0,707$), а значение $\Delta\omega_m$ — на уровне mA_{\max} (обычно $m = 0,2$). Как видно из выражения (18.31), чем больше коэффициент прямоугольности, тем ближе форма АЧХ к прямоугольной (т. е. к АЧХ идеального фильтра).

Последовательность расчета:

1. По графикам семейства АЧХ определяют для заданных m и n тип зависимости $k_{\text{пр}}(a)$. Для требуемого $k_{\text{пр}}$ вычисляют значение фактора связи a и соответствующую ПП $\Delta\varepsilon$.

2. Из формулы $\Delta\varepsilon \approx 2Q\Delta\omega/\omega_0$, соответствующей (18.24), определяют требуемую добротность контура: $Q = 0,5\Delta\varepsilon\omega_0/\Delta\omega$.

3. Определяют максимум АЧХ $A_{\max} = Q/2$ при $a \geq 1$ или $A_{\max} = Qa/(1+a^2)$ при $a < 1$ и проверяют, что A_{\max} не меньше заданного значения.

4. Определяют по (18.25) коэффициент связи $k_{\text{св}} = a/Q$.

5. Проектируют индуктивность контура L , которая «обеспечивала» бы требуемую добротность: индуктивность L и потери r контура должны быть таковы, чтобы $\omega_0L/r = Q$.

6. Определяют емкость контура из условия $1/\omega_0^2 = LC$.

7. Вычисляют на основании (18.25) значение сопротивления связи: $|x_{\text{св}}| = k_{\text{св}}\rho = k_{\text{св}}\sqrt{L/C}$ и реализуют его по заданной схеме контуров.

Примечание. Если $k_{\text{пр}}$ и A_{\max} не обеспечены, применяют каскадное соединение контуров.

Второй вариант: исходные данные — ω_0 , $\Delta\omega$, A_{\max} .

Последовательность расчета:

1. Считая $a \geq 1$, определяют добротность из выражения $Q/2 = A_{\max}$.

2. Вычисляют ПП $\Delta\varepsilon \approx 2Q\Delta\omega/\omega_0$.

3. По значению $\Delta\varepsilon$ и семейству нормированных графиков АЧХ находят значение фактора связи a .

4. Определяют значение коэффициента связи $k_{\text{св}} = a/Q$ и затем находят остальные параметры, как указано в первом варианте.

ОСНОВЫ МАШИННО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ

Ряд вопросов применения вычислительной техники при анализе электрических цепей был рассмотрен ранее в темах: «Дискретные цепи и сигналы» и «Уравнения состояния и методы их численного решения».

§ 19.1. СТРУКТУРНАЯ МАТРИЦА

19.1.1. Запись уравнений закона токов Кирхгофа с использованием структурной матрицы

При расчете цепей на ЦВМ необходимо вводить полную информацию о структуре цепи в максимально компактной форме. Такую информацию можно получить из системы уравнений ЗТК, составленных по ориентированному графу цепи, в котором:

1. Отражены все элементы и узлы, в том числе устранимые.
2. У всех элементов согласованная полярность и указано направление тока.

ПРИМЕР 1. Схема цепи и её ориентированный граф приведены на рисунке 19.1а,б. Уравнения ЗТК в матричной форме, записанные для всех узлов, имеют вид

$$\begin{matrix}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 1 & \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) & \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
 \end{matrix}$$

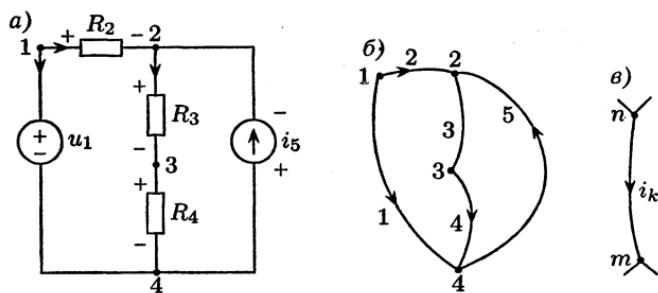


Рис. 19.1

или в сокращенной форме

$$[A_a][i] = [0], \quad (19.1)$$

причем элементы абсолютно полной структурной матрицы $[A_a]$, которую также называют матрицей соединений или инциденций, определяются так:

$$\begin{cases} a_{nm} = 1, & \text{если ток ветви № } m \text{ вытекает из узла № } n; \\ a_{nm} = -1, & \text{если ток ветви № } m \text{ втекает в узел № } n; \\ a_{nm} = 0, & \text{если ветвь № } m \text{ к узлу № } n \text{ не присоединена.} \end{cases}$$

Очевидны свойства абсолютно полной матрицы $[A_a]$:

1. В ней содержится информация о всех узлах (по строкам), о всех элементах (по столбцам), о направлении всех токов, т. е. она полностью раскрывает структуру цепи.

2. В каждом столбце должны быть только «+1» и «-1» (а остальные параметры — нули).

3. Одна из строк системы (19.1) является зависимой и равной сумме остальных, взятой с обратным знаком, т. е. может трактоваться как уравнение ЗТК для базисного узла.

Поэтому при вводе информации о структуре цепи в ЦВМ используют независимую структурную матрицу $[A]$, которую получают из $[A_a]$ исключением строки для базисного узла.

ПРИМЕР 2. Если в примере 1 узел 4 считать базисным, то

$$[A][i] = [0], \quad (19.2)$$

или

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19.3)$$

Примечание. Обычно используемая запись уравнений ЗТК в узле в виде $\sum i_k = 0$, очевидно, некорректна; правильнее записывать $\sum a_k i_k = 0$, где $a_k = -1$ или 1, или 0

19.1.2. Запись уравнений закона напряжений Кирхгофа с использованием структурной матрицы

На дуальной основе уравнения ЗНК также должны содержать полную информацию о структуре цепи.

ПРИМЕР 3. Выразим в примере 1 напряжения ветвей через узловые напряжения, считая узел 4 базисным, т. е. $u_{4y} = 0$. Получим $u_1 = u_{1y} - 0$, $u_2 = u_{1y} - u_{2y}$, $u_3 = u_{2y} - u_{3y}$, $u_4 = u_{3y} - 0$, $u_5 = 0 - u_{2y}$, т. е. в матричной форме

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1y} \\ u_{2y} \\ u_{3y} \end{bmatrix}, \quad (19.4)$$

или сокращенно $[u] = [A_y][u_y]$, (19.5)

где в (19.5) $[A_y]$ — так называемая узловая матрица.

Вывод: из сравнения (19.3) и (19.4) следует, что

$$[A_y] = [A]^T, \quad (19.6)$$

т. е. узловая матрица в (19.5) и структурная матрица в (19.2) являются транспонированными.

Поясним транспонирование в (19.6) на примере произвольной ветви № k ориентированного графа, изображенной

на рисунке 19.1в. В матрице соединений $[A]$ в столбце № k будет «+1» в строке № n , так как ток i_k вытекает из узла № n , и «-1» в строке № m . В узловой матрице $[A_y]$ в строке № k будет «+1» в столбце № n и «-1» в столбце № m на основании уравнения $u_k = u_{ny} - u_{my}$, т. е. действительно имеем транспонирование.

§ 19.2. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЦЕПИ

19.2.1. Главные сечения, главные контуры и фундаментальная матрица цепи

Для практического ввода задачи в машину обычно необходимо еще более жесткое упорядочение. Используется следующая последовательность действий при анализе резистивных цепей:

1. Составляют ориентированный граф цепи, в котором указывают все узлы, в том числе устранимые, и все элементы, предполагая везде полярность согласованной.
2. Выбирают какое-либо дерево графа, в которое обязательно включают все источники напряжения (ИН) и не включают источники тока (ИТ).
3. Устанавливают жесткую нумерацию ветвей:
 - а) первые номера присваивают источникам напряжения;
 - б) вторые номера — резистивным ветвям дерева;
 - в) третии номера — резистивным хордам;
 - г) последние номера — источникам тока, как показано на рисунке 19.2а, где приведены граф и схема цепи для примера 1 с измененной нумерацией элементов.
4. Составляют уравнения ЗТК для всех главных сечений.

Главное сечение (ГС) — это сечение, которое содержит только одну ветвь дерева и какое-то количество хорд; номер ГС соответствует номеру «его» ветви дерева; направление выхода из ГС соответствует направлению «его» ветви дерева.

На графе (рис. 19.2а) пунктиром указаны три ГС цепи (ГС1, ГС2, ГС3). В матричной форме уравнения для ГС имеют вид

$$[Q][i] = [0], \quad (19.7)$$

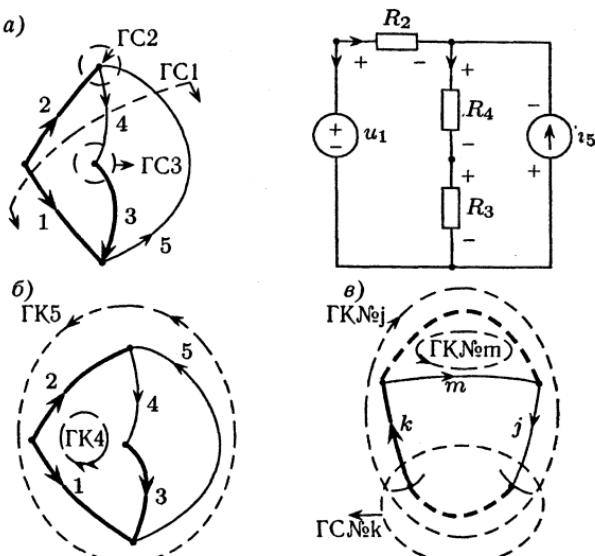


Рис. 19.2

причем элементы q_{mn} матрицы главных сечений $[Q]$ в (19.7) равны: «+1», если ток i_n выходит из ГС № m ; «-1», если ток i_n входит в ГС № m ; «0», если i_n не относится к ГС № m . Нумерация строк матрицы $[Q]$ соответствует номерам ГС, а нумерация столбцов — номерам элементов.

ПРИМЕР 4. Для рисунка 19.2а запишем (19.7) в виде

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{matrix} \left[\begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]. \quad (19.8)$$

(E) (F)

Матрицы главных сечений $[Q]$ и токов $[i]$ обычно разбивают на 2 подматрицы и представляют (19.7), (19.8) в форме

$$[(E); (F)] \begin{bmatrix} (i_d) \\ (i_x) \end{bmatrix} = [0], \quad (19.9)$$

где (E) — единичная матрица (точнее подматрица), обусловленная тем, что каждая ветвь дерева входит только

в «своё» уравнение один раз; (F) — так называемая фундаментальная матрица; (i_d) — матрица токов ветвей дерева, (i_x) — матрица токов хорд.

5. Составляют уравнения ЗНК для всех главных контуров.

Главный контур (ГК) — это контур, который содержит только одну хорду и сколько-то ветвей дерева; номер ГК соответствует номеру «его» хорды; направление ГК соответствует направлению «его» хорды.

На графе (рис. 19.2б) пунктиром указаны 2 ГК цепи на рисунке 19.2а (ГК4, ГК5). В матричной форме уравнения для ГК имеют вид

$$[B][u] = [0], \quad (19.10)$$

где элементы b_{mn} матрицы главных контуров $[B]$ в (19.10) равны: «+1», если напряжение u_n согласовано с обходом ГК № m ; «-1», если напряжение u_n не согласовано с обходом ГК № m ; «0», если u_n не входит в ГК № m . Нумерация строк матрицы $[B]$ соответствует номерам ГК, а нумерация столбцов — номерам элементов.

ПРИМЕР 5. Для рисунка 19.2б запишем (19.10) в виде

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{matrix} \begin{matrix} (F_B) \\ (E) \end{matrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19.11)$$

Матрицы главных контуров $[B]$ и напряжений элементов $[u]$ обычно разбивают на 2 подматрицы и представляют (19.10), (19.11) в форме

$$[(F_B); (E)] \begin{bmatrix} (u_d) \\ (u_x) \end{bmatrix} = [0], \quad (19.12)$$

где (E) — единичная матрица, обусловленная тем, что хорды имеют «последние» номера и напряжение каждой хорды входит только «в свое» уравнение, (F_B) — фундаментальная подматрица матрицы $[B]$; (u_d) — матрица напряжений дерева; (u_x) — матрица напряжений хорд.

Вывод: из сравнения (19.8), и (19.11) вытекает связь фундаментальных матриц $[F_B] = -[F]^T$, (19.13)

причем соотношение (19.13) является следствием жесткого упорядочения в соответствии с п.3.

6. Записывают уравнения закона Ома для всех резисторов $u_{Rk} = R_k i_{Rk}$, или в матричной форме

$$[R][i_R] = [u_R], \quad (19.14)$$

где $[i_R]$, $[u_R]$ — матрицы токов и напряжений R -ветвей цепи.

В примере на рисунке 19.2а получим

$$\begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix},$$

следовательно, в (19.14) матрица сопротивлений резистивных ветвей $[R]$ является диагональной.

Вывод: в машину достаточно ввести матрицы $[F]$, $[R]$, данные об источниках напряжения и тока; она «сама» восстановит систему (19.7), (19.10), (19.14) в соответствии с очевидным алгоритмом и решит ее.

19.2.2. Пояснение связи фундаментальных матриц

Как показано на рисунке 19.2в, учитываем только ветвь k дерева, а также хорды m и j графа некоторой гипотетической цепи.

В строке k матрицы главных сечений $[Q]$ рассмотрим столбцы j и m . В ГС № k ветви № j , очевидно, учитывается как «-1» в столбце № j , а ветвь № m — как «0» в столбце № m (она не входит в ГС № k).

Далее в столбце k матрицы главных контуров $[B]$ рассмотрим строки j и m . В ГК № j (т. е. в строке j) ветвь № k учитывается как «+1» в столбце № k . В ГК № m (т. е. в строке m) ветвь № k учитывается как «0» в столбце № k (поскольку она не входит в ГК № m).

Таким образом, в матрицах ГС $[Q] = [(E); (F)]$ и ГК $[B] = [(F_B); (E)]$ имеем транспонирование с обращением знака именно для связи фундаментальных матриц $[F_B] = -[F]^T$.

19.2.3. Независимость упорядоченных уравнений цепи

Очевидно, число уравнений ЗТК для главных сечений $n_{\Gamma C}$ в (19.7)–(19.9) равно числу ветвей дерева n_d , причем

$$n_{\Gamma C} = n_d = n_y - 1, \quad (19.15)$$

поскольку дерево графа получают соединением всех его узлов без образования замкнутых контуров. Следовательно, число ветвей дерева в (19.15) на единицу меньше числа узлов n_y . Все уравнения для ГС независимы, так как ток каждой ветви дерева входит только в «своё» уравнение и, следовательно, не может быть получен из остальных уравнений для ГС.

Примечания:

1. Таким образом, получено ещё одно (в сравнении с § 1.7) строгое доказательство числа независимых уравнений ЗТК $n_{\text{ЗТК}} = n_{\Gamma C} = n_y - 1$.
2. Из п. 19.2.1 очевидно, почему при составлении уравнений ЗТК с «плюсом» учитывали выходящие из узла токи.

Число уравнений ЗНК для главных контуров $n_{\Gamma K}$ в (19.10)–(19.12) равно числу хорд n_x , т. е.

$$n_{\Gamma K} = n_x = n_b - n_d = n_b - n_y + 1, \quad (19.16)$$

причем в (19.16) n_b — число ветвей графа (в нашем случае — число элементов цепи). Все уравнения для ГК независимы, поскольку напряжение каждой хорды входит только в «своё» уравнение и поэтому не может быть получено из остальных уравнений для ГК.

Примечание. В результате получено еще одно (в сравнении с § 1.7) строгое доказательство числа независимых уравнений ЗНК $n_{\text{ЗНК}} = n_{\Gamma K} = n_b - n_y + 1$.

Число уравнений (19.14) закона Ома для резистивных элементов будет

$$n_R = n_b - n_{\text{ИН}} - n_{\text{ИТ}}, \quad (19.17)$$

где $n_{\text{ИН}}$ — число ИН, $n_{\text{ИТ}}$ — число ИТ. Все уравнения (19.14) вида $u_{Rk} = R_k i_{Rk}$ также независимы, поскольку каждое значение R_k входит только в «свое» уравнение.

Таким образом, суммарное число уравнений системы (19.15)–(19.17) $n_{\Gamma\Gamma} + n_{\Gamma K} + n_R = 2n_B - n_{IH} - n_{IT}$ и все уравнения независимы. Суммарное число неизвестных в системе — такое же, так как неизвестными являются токи ИН n_{IH} , напряжения ИТ n_{IT} , а также напряжения и токи R -элементов $2n_R = 2n_B - 2n_{IH} - 2n_{IT}$.

§ 19.3. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ МАШИННЫХ УРАВНЕНИЙ ЦЕПЕЙ

19.3.1. Метод токов дерева и напряжений хорд

Из многообразия алгоритмов решения матричных уравнений цепей на ЦВМ рассмотрим наиболее простые.

В качестве обобщенного элемента, образующего ветвь дерева, рассмотрим последовательное соединение резистора и ИН, как показано на рисунке 19.3а.

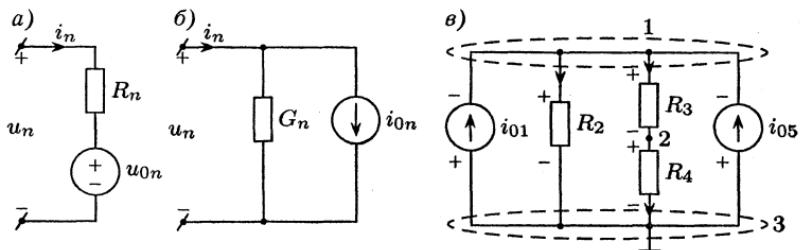


Рис. 19.3

В матричной форме уравнения для напряжений ветвей дерева $[u_d]$ можно записать в виде

$$[u_d] = [R_d][i_d] + [u_0], \quad (19.18)$$

причем в (19.18) $[R_d]$ — матрица сопротивлений обобщенных элементов дерева, $[u_0]$ — матрица напряжений ИН обобщенных элементов дерева.

В качестве примера рассмотрим схему на рисунке 19.2а считая для простоты каждый ее элемент — обобщенным и обозначив ИН $u_1 = u_{01}$, а ИТ $i_5 = i_{05}$.

Тогда уравнения (19.18) примут вид:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{01} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19.19)$$

Примечание. Запись (19.19) поясняет, как необходимо поступать, если обобщенный элемент дерева не содержит резистора или ИН.

Аналогично в качестве обобщенного элемента, образующего хорду, рассмотрим параллельное соединение резистора с проводимостью G и ИТ, как показано на рисунке 19.3б. В матричной форме уравнения для всех токов хорд i_x можно записать в виде

$$[i_x] = [G_x][u_x] + [i_0], \quad (19.20)$$

где G_x — матрица проводимостей обобщенных элементов хорд; $[i_0]$ — матрица токов ИТ обобщенных элементов хорд.

В примере на рисунке 19.2а, где каждый элемент, как уже отмечалось, считаем обобщенным, получим уравнения (19.20) в форме

$$\begin{bmatrix} i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ i_{05} \end{bmatrix}. \quad (19.21)$$

Примечание. Запись (19.21) поясняет, как необходимо поступать, если обобщенные элементы хорд не содержат резистор или ИТ.

Раскрывая уравнения ЗТК (19.9) для ГС и уравнения ЗНК (19.12) с учетом (19.13) для ГК, можно записать

$$[i_d] + [F][i_x] = [0], \quad -[F]^T[u_d] + [u_x] = [0]. \quad (19.22)$$

Поскольку рассматривается метод токов дерева и напряжений хорд, исключаем матрицы $[u_d]$ и $[i_x]$ из системы (19.18), (19.19), (19.22). Следовательно, (19.20) подставляем в первое уравнение (19.22): $[i_d] + [F]([G_x][u_x] + [i_0]) = [0]$,

а (19.18) — во второе уравнение (19.22):

$$-[F]^T([R_d][i_d] + [u_0]) + [u_x] = [0]. \quad (19.24)$$

Решая систему двух уравнений (19.23), (19.24) с двумя неизвестными, получим после очевидных подстановок:

$$\begin{cases} [i_d] + [F][G_x]([F]^T[R_d][i_d] + [F]^T[u_0]) + [F][i_0] = [0]; \\ [F]^T[R_d]([F][G_x][u_x] + [F][i_0]) - [F]^T[u_0] + [u_x] = [0], \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} ([E] + [F][G_x][F]^T[R_d])[i_d] + ([F][G_x][F]^T[u_0] + [F][i_0]) = [0]; \\ ([F]^T[R_d][F][G_x] + [E])[u_x] + ([F]^T[R_d][F][i_0] - [F]^T[u_0]) = [0]. \end{cases}$$

Окончательно, алгоритм расчета имеет вид

$$\begin{cases} [i_d] = -([E] + [F][G_x][F]^T[K_d])^{-1}([F][G_x][F]^T[u_0] + [F][i_0]), \\ [u_x] = -([E] + [F]^T[R_d][F][G_x])^{-1}([F]^T[R_d][F][i_0] - [F]^T[u_0]) \end{cases} \quad (19.25)$$

Определив $[i_d]$ и $[u_x]$, на основании (19.18), (19.20) находят $[u_d]$ и $[i_x]$.

Примечание. Уравнения (19.25) дуальны, если учесть, что $[F]^T = -[F_B]$ согласно (19.13).

19.3.2. Применение структурной матрицы при расчете цепей методом узловых напряжений

При использовании метода узловых напряжений (МУН) все ИН должны быть эквивалентно преобразованы к ИТ. В качестве обобщенного элемента цепи рассматривают параллельное соединение резистора и ИТ (рис. 19.3б). Тогда в матричной форме уравнения для токов $[i]$ всех элементов можно записать аналогично (19.20):

$$[i] = [G][u] + [i_0], \quad (19.26)$$

причем в (19.26) $[G]$, $[u]$, $[i_0]$ — матрицы соответственно проводимостей, напряжений и токов ИТ всех элементов.

ПРИМЕР 6. В качестве примера используем схему на рисунке 19.3в с учетом преобразования ИН в цепи (рис. 19.1а) к эквивалентному ИТ. Считая для простоты каждый элемент цепи обобщенным, получим систему вида (19.26):

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{01} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ i_{05} \end{bmatrix}. \quad (19.27)$$

Примечание. Запись (19.27) поясняет, как необходимо поступать, если в обобщенном элементе нет резистора или ИТ.

Уравнения ЗТК (19.2) с независимой структурной матрицей $[A]$ применительно к примеру (рис. 19.3 σ) имеют вид, в предположении, что узел 3 — базисный:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (19.28)$$

причем в (19.28) для компактной записи (19.2) матрица токов $[i]$ транспонирована.

Выражая напряжения элементов через узловые напряжения, как указано в (19.5), с учетом (19.6) получим

$$[u] = [A]^T [u_y]. \quad (19.29)$$

Подставляем (19.29) в (19.26):

$$[i] = [G][A]^T [u_y] + [i_0], \quad (19.30)$$

а затем (19.30) в уравнения ЗТК (19.2):

$$[A][G][A]^T [u_y] + [A][i_0] = [0].$$

Таким образом, уравнения МУН имеют вид

$$[A][G][A]^T [u_y] = -[A][i_0]. \quad (19.31)$$

Примечание. Естественно, (19.31) соответствует стандартной матричной форме МУН $[G_{\text{МУН}}][u_y] = [i_y]$, т. е. матрица проводимостей МУН $[G_{\text{мун}}] = [A][G][A]^T$, а матрица узловых токов $[i_y] = -[A][i_0]$ учитывает «обратное» правило знаков для ИТ $[i_0]$.

В соответствии с (19.31) алгоритм расчета цепи методом узловых напряжений на ЦВМ можно записать в форме

$$[u_y] = - \left([A][G][A]^T \right)^{-1} [A][i_0];$$

далее с учетом (19.29) определяются напряжения элементов, а затем по формуле (19.26) — токи.

Примечание. Описанные в данном разделе базисные понятия, методы анализа и алгоритмы расчета, ориентированные, естественно, на резистивные цепи высокой сложности, «распространяются» на динамические цепи; в частности, при анализе установившегося синусоидального режима токи и напряжения следует заменить их комплексными амплитудами, а пассивным элементам цепи — присвоить комплексные сопротивления.

§ 19.4. МАТРИЧНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

Покажем возможность применения данных метода токов дерева и напряжений хорд (МТДНХ) для составления уравнений состояния динамических цепей.

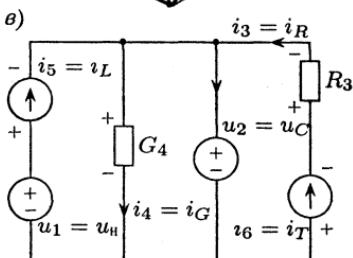
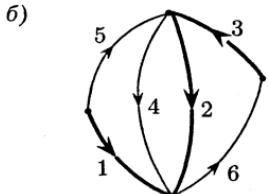
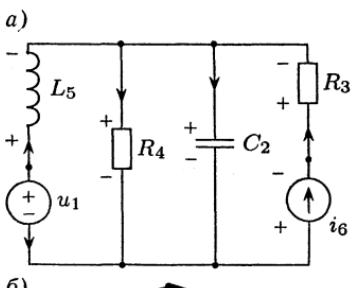


Рис. 19.4

В случае динамических цепей (см. пример на рисунке 19.4а) изменяют нумерацию элементов, описанную в п. 19.2.1: вторые номера присваивают C -элементам, которые в ориентированном графе (рис. 19.4б) относят к ветвям дерева и при составлении уравнений состояния замещают вспомогательными ИН (рис. 19.4в); предпоследние номера присваивают L -элементам, которые относят к хордам и замещают вспомогательными ИТ.

Хотя формально используют понятия обобщенных элементов (рис. 19.3а), однако на практике каждый элемент схемы и графа удобно считать обобщенным (аналогично примеру из п. 19.3.1). В случае примера (рис. 19.4) исходные матрицы, используемые в МТДНХ, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 [u_0] &= \begin{bmatrix} u_H \\ u_C \\ 0 \end{bmatrix}, & [i_0] &= \begin{bmatrix} 0 \\ i_L \\ i_T \end{bmatrix}, & [i_d] &= \begin{bmatrix} i_H \\ i_C \\ i_R \end{bmatrix}, \\
 [u_x] &= \begin{bmatrix} u_G \\ u_L \\ u_T \end{bmatrix}, & [R_d] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix}, & [G_x] &= \begin{bmatrix} G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
 [Q] &= [(E); (F)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & & & & (19.32)
 \end{aligned}$$

причем в (19.32) и на рисунке 19.4 α индексы H , T , C , L , R , G , относятся соответственно к ИН, ИТ, C - и L -элементами, R -ветвям дерева и G -хордам; при этом, как указано в первых двух матрицах источников, $u_R = 0$ и $i_G = 0$, поскольку R -ветвь дерева и G -хорда источников не содержит.

На основании матричных соотношений МТДНХ (19.25) можно записать

$$[i_d] = [D][u_0] + [T][i_0]; \quad [u_x] = [V][u_0] + [W][i_0], \quad (19.33)$$

причем согласно (19.25) используемые в (19.33) матрицы:

$$[D] = -([E] + [F][G_x][F]^T[R_d])^{-1}[F][G_x][F]^T;$$

$$[T] = -([E] + [F][G_x][F]^T[R_d])^{-1}[F];$$

$$[V] = ([E] + [F]^T[R_d][F][G_x])^{-1}[F]^T;$$

$$[W] = -([E] + [F]^T[R_d][F][G_x])^{-1}[F]^T[R_d][F].$$

При составлении уравнений состояния вначале необходимо вывести формулы для токов C -элементов $[i_c]$ и напряжений L -элементов $[u_L]$, поэтому матрицы-столбцы (19.33) представим в виде:

$$\begin{aligned} [u_0] &= \begin{bmatrix} (u_H) \\ (u_C) \\ (u_R) \end{bmatrix}, & [i_0] &= \begin{bmatrix} (i_G) \\ (i_L) \\ (i_T) \end{bmatrix}, \\ [i_d] &= \begin{bmatrix} (i_H) \\ (i_C) \\ (i_R) \end{bmatrix}, & [u_x] &= \begin{bmatrix} (u_G) \\ (u_L) \\ (u_T) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (19.34)$$

где обозначения, смысл и индексация используемых в (19.34) подматриц аналогичны (19.32); как и в (19.32), в (19.34) подматрицы $[u_R] = [0]$ и $[i_G] = [0]$ ввиду отсутствия источников в R -ветвях дерева и G -хордах.

Матрицы коэффициентов в (19.34) также разобьем на подматрицы:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (i_H) \\ (i_C) \\ (i_R) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (D_{HH}); & (D_{HC}); & (D_{HR}) \\ (D_{CH}); & (D_{CC}); & (D_{CR}) \\ (D_{RH}); & (D_{RC}); & (D_{RR}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_H) \\ (u_C) \\ (u_R) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} (T_{HG}); & (T_{HL}); & (T_{HT}) \\ (T_{CG}); & (T_{CL}); & (T_{CT}) \\ (T_{RG}); & (T_{RL}); & (T_{RT}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (i_G) \\ (i_L) \\ (i_T) \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (19.35)$$

$$\begin{bmatrix} (u_G) \\ (u_L) \\ (u_T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (V_{GH}); & (V_{GL}); & (V_{GR}); \\ (V_{LH}); & (V_{LC}); & (V_{LR}); \\ (V_{TH}); & (V_{TC}); & (V_{TR}); \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_H) \\ (u_C) \\ (u_R) \end{bmatrix} + \\ - \begin{bmatrix} (W_{GC}); & (W_{GL}); & (W_{GT}); \\ (W_{LC}); & (W_{LL}); & (W_{LT}); \\ (W_{TG}); & (W_{TL}); & (W_{TT}); \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (i_G) \\ (i_L) \\ (i_T) \end{bmatrix},$$

причем в (19.35), например, подматрица D_{HC} содержит элементы матрицы $[D]$, относящиеся к строкам ИН и столбцам C -элементов и т. д.

Осталось на основании (19.36) найти $[i_C]$ и $[u_L]$ с учетом $[u_R] = [0]$, $[i_G] = [0]$, а затем, используя матричные уравнения вольт-амперных характеристик накопителей

$$[i_C] = [C][u'_C], \quad [u_L] = [L][i'_L], \quad (19.36)$$

окончательно записать уравнения состояния в виде

$$\begin{cases} [u'_C] = [C]^{-1} [(D_{CC})(u_C) + (T_{CL})(i_L) + \\ \quad + (D_{CH})(u_H) + (T_{CT})(i_T)], \\ [i'_L] = [L]^{-1} [(V_{LC})(u_C) + (W_{LL})(i_L) + \\ \quad + (V_{LH})(u_H) + (W_{LT})(i_T)], \end{cases} \quad (19.37)$$

причем в (19.36), (19.37) матрицы $[C]$, $[L]$ и $[C]^{-1}$, $[L]^{-1}$ являются диагональными вида

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & C_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & L_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad [L]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЦЕПЕЙ К ИЗМЕНЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ

§ 20.1. ТЕОРЕМА КОМПЕНСАЦИИ

Параметры цепей не идеальны и на практике отличаются от указанных номинальных. Следовательно, реакции также отклоняются от номинальных расчетных. Эти отклонения необходимо уметь оценивать.

20.1.1. Доказательство исходной теоремы компенсации

Приращения реакций Δu_n , Δi_n на резисторах R_n при изменении сопротивления R_k на ΔR_k можно найти по присоединенной цепи (ПЦ-1) — модели чувствительности: а) которую получают из исходной цепи исключением всех источников; б) в которой последовательно с ветвью $(R_k + \Delta R_k)$ включают дополнительный (компенсирующий) ИН $u_d = u_k = \Delta R_k i_k$.

Для доказательства теоремы рассмотрим исходную резистивную цепь, выделив в ней резисторы R_k и R_n (рис. 20.1а).

Если сопротивление R_k получило приращение ΔR_k , то токи i_n и напряжения u_n изменились на Δi_n , Δu_n , как показано на рисунке 20.1б. Напряжение на сопротивлении ΔR_k на основании теоремы замещения заменим ИН

$$u_3 = \Delta R_k(i_k + \Delta i_k) = \Delta R_k i_k + \Delta R_k \Delta i_k. \quad (20.1)$$

Далее для расчета используем метод наложения:

1. Реакции от действия всех исходных источников — это реакции исходной цепи i_n , u_n .

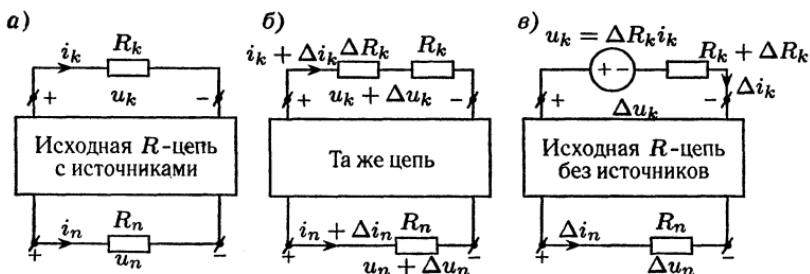


Рис. 20.1

2. Следовательно, реакции от одного замещающего ИН (20.1) дадут искомые приращения Δi_n , Δu_n .

Схема с одним замещающим ИН фактически дает ПЦ-1. Второе слагаемое в (20.1) трактуем как напряжение на ΔR_k и относим к изменившемуся сопротивлению ($R_k + \Delta R_k$), как показано на рисунке 20.1в. Первое слагаемое в (20.1) рассматриваем как компенсирующий (дополнительный) источник u_k в ПЦ-1 (рис. 20.1в).

Примечания:

- Дополнительный источник u_k в ПЦ-1 (рис. 20.1в) называют компенсирующим, так как он как бы заменяет действие остальных.
- ИН u_k называют компенсирующим, поскольку при включении его в схему на рисунке 20.1б последовательно с ($R_k + \Delta R_k$), но с обратной полярностью будут скомпенсированы все приращения и восстановлены исходные реакции.

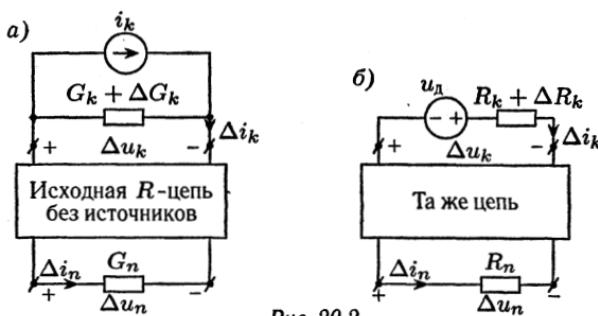
20.1.2. Эквивалентность расчета по дуальным ПЦ, составленным по теореме компенсации

Естественно, имеется дуальная теорема компенсации: приращения реакций Δu_n , Δi_n при изменении некоторой проводимости G_k на ΔG_k можно найти по ПЦ-2,

которая получается из исходной цепи исключением всех источников;

в которую параллельно ветви ($G_k + \Delta G_k$) включается дополнительный компенсирующий ИТ $i_k = \Delta G_k u_k$, как показано на рисунке 20.2а.

Естественно, в ПЦ-1 (рис. 20.1в) и в ПЦ-2 (рис. 20.2а) приращения переменных, а также соответствующие сопротивления и проводимости должны быть одинаковы.



Подтвердим это, вычислив вначале приращения проводимости

$$\Delta G_k = \frac{1}{R_k + \Delta R_k} - \frac{1}{R_k} = \frac{-\Delta R_k}{R_k(R_k + \Delta R_k)}. \quad (20.2)$$

С учетом (20.2) компенсационный ИТ

$$i_k = \Delta G_k u_k = \frac{-\Delta R_k u_k}{R_k(R_k + \Delta R_k)} = \frac{-\Delta R_k i_k}{R_k + \Delta R_k}. \quad (20.3)$$

Преобразуем ИТ (20.3) к эквивалентному дополнительному ИН u_d , как показано на рисунке 20.2б:

$$u_d = i_k(R_k + \Delta R_k) = -\Delta R_k i_k. \quad (20.4)$$

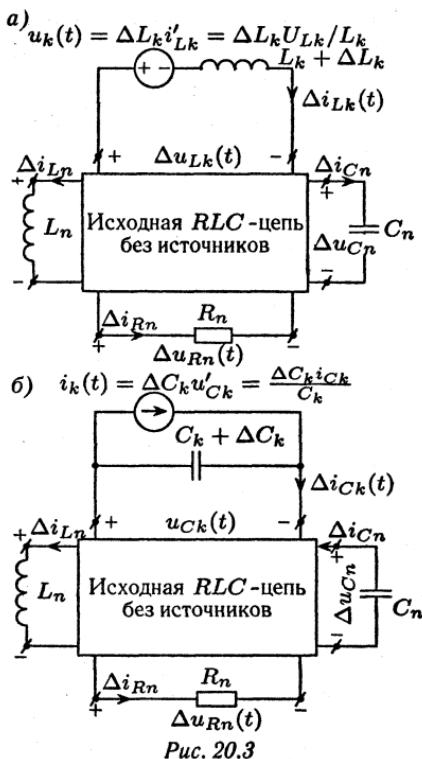
С учетом инверсии знака в (20.4) приходим к выводу, что схема на рисунке 20.2б полностью соответствует ПЦ-1.

20.1.3. Теоремы компенсации и присоединенные цепи при расчете динамических цепей

В целом идеяная канва теоремы компенсации сохраняется для динамических цепей и расчет отдельных режимов, и анализ переходных процессов в целом.

Если рассматривается изменение резистора R_k на ΔR_k , то формулировка исходной теоремы компенсации и формирование присоединенной цепи остаются без изменения при расчете приращений реакций $\Delta u_n(t)$, $\Delta i_n(t)$ любого из элементов цепи.

Если происходит изменение индуктивности L_k на ΔL_k , то ПЦ для расчета приращений любой реакции $\Delta u_n(t)$, $\Delta i_n(t)$ формируется следующим образом (рис. 20.3а):



1. Из исходной цепи исключаются источники.

2. Последовательно с индуктивностью ($L_k + \Delta L_k$) включается компенсирующий ИН $u_k(t) = \Delta L_k i'_{Lk}(t) = \Delta L_k u_{Lk}(t)/L_k$.

Доказательство теоремы аналогично приведенному в п. 20.1.1. Следует лишь учесть, что при изменении L_k на ΔL_k напряжение замещающего источника в сравнении с (20.1) будет

$$\begin{aligned} u_3(t) &= u_{\Delta Lk} = \\ &= \Delta L_k (i_{Lk} + \Delta i_{Lk})' = \\ &= \Delta L_k i'_{Lk} + \Delta L_k \Delta i'_{Lk}, \end{aligned} \quad (20.5)$$

причем (20.5) в ПЦ на рисунке 20.3а трактуется как уравнение последовательного соединения; первое

слагаемое в (20.5) определяет компенсирующий источник $u_k(t)$, а второе слагаемое учитывается в составе элемента ($L_k + \Delta L_k$) в ПЦ.

Если изменяется емкость C_k на ΔC_k , то формирование ПЦ для расчета приращения любой реакции $\Delta u_n(t)$, $\Delta i_n(t)$ происходит несколько иначе (см. рис. 20.3б):

1. Из исходной цепи исключаются источники.

2. Параллельно емкости ($C_k + \Delta C_k$) включается компенсирующий источник тока $i_k(t) = \Delta C_k u'_{Ck}(t) = \Delta C_k i_{Ck}(t)/C_k$.

При доказательстве этого варианта теоремы следует учесть, что при изменении C_k на ΔC_k используют, в отличие от (20.5), замещающий ИТ

$$\begin{aligned} i_3(t) &= i_{\Delta Ck}(t) = \Delta C_k (u_{Ck} + \Delta u_{Ck})' = \\ &= \Delta C_k u'_{Ck}(t) + \Delta C_k \Delta u'_{Ck}(t), \end{aligned} \quad (20.6)$$

причем (20.6) трактуется в ПЦ на рисунке 20.3б как уравнение параллельного соединения; первое слагаемое в (20.6) определяет компенсирующий ИТ $i_k(t)$, а второе слагаемое учитывается в составе элемента $(C_k + \Delta C_k)$, который в свою очередь удобно трактовать как параллельное соединение C_k и ΔC_k .

Примечания:

1. Ключи или «коммутирующие» функции вида $\delta_1(t)$ и $\delta(t)$, имеющиеся в исходной цепи, учитываются в ПЦ.
2. При анализе приращений импульсной характеристики цепи $\Delta h(t)$ и передаточной функции $\Delta H(s) \div \Delta h(t)$ также может быть использована изложенная теорема компенсации, только при вычислении $\Delta H(s)$ необходимо ПЦ для $\Delta h(t)$ рассчитать операторным методом.
3. Очевидно, варианты теоремы компенсации, изложенные в 20.1.3, могут быть использованы и при «появлении» «паразитного» элемента, в том числе приводящего к изменению порядка цепи.

ПРИМЕР 1. В цепи (рис. 20.4а) необходимо найти изменение импульсной характеристики для тока i , если емкость увеличилась вдвое.

Расчет исходной цепи дает переходную характеристику $h_1(t) = \exp(-t)\delta_1(t)$ и импульсную характеристику $h(t) = -\exp(-t)\delta_1(t) + \delta(t)$.

При расчете этой же цепи (рис. 20.4а) для $(C + \Delta C) = (1 + 1) = 2$ получим переходную характеристику

$$h_1(t) = e^{-t/2}\delta_1(t),$$

импульсную характеристику

$$h_0(t) = -0,5e^{-t/2}\delta_1(t) + \delta(t).$$

Таким образом, искомое изменение будет

$$\Delta h(t) = h_0(t) - h(t) = (-0,5e^{-t/2} + e^{-t})\delta_1(t).$$

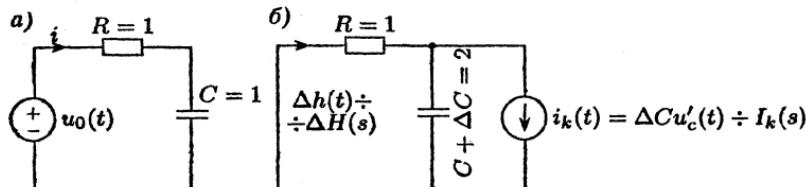


Рис. 20.4

Присоединенная цепь для непосредственного расчета $\Delta h(t) \div \Delta H(s)$ приведена на рисунке 20.4б. Значение компенсационного ИТ в данной задаче следующее

$$\begin{aligned} i_k(t) &= \Delta C u'_C(t) = \\ &= \frac{\Delta C i_C(t)}{C} = i_C(t) = h(t) \div H(s) = \frac{s}{s+1} = I_k(s). \end{aligned}$$

Тогда искомое приращение передаточной функции по формуле делителя тока

$$\Delta H(s) = \frac{I_k(s)}{2s+1} = \frac{s}{2(s+0,5)(s+1)} = \frac{-0,5}{s+0,5} + \frac{1}{s+1},$$

естественно, соответствует полученному изменению $\Delta h(t)$.

§ 20.2. РАСЧЕТ ФУНКЦИЙ АБСОЛЮТНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ НА ОСНОВАНИИ ТЕОРЕМЫ КОМПЕНСАЦИИ

20.2.1. Исходные понятия

На практике значение ΔR_k обычно неизвестно, поэтому говорят об относительном влиянии возможного изменения R_k на dR_k ; соответствующие изменения реакций также будут бесконечно малыми (du_n , di_n). В рассмотрение вводят так называемые функции абсолютной чувствительности (ФАЧ), которые представляют собой производные реакций к изменению соответствующих параметров:

$$\frac{du_n}{dR_k} = T_{u_n - R_k}, \quad \frac{di_n}{dR_k} = T_{i_n - R_k}. \quad (20.7)$$

Если ФАЧ (20.7) определены и известно приращение ΔR_k , то приращение реакции приближенно можно оценить по формуле

$$\Delta f_{\text{вых}} \cong T_{f_{\text{вых}} - R_k} \Delta R_k, \quad (20.8)$$

которая фактически учитывает лишь первый член ряда Тейлора в разложении $f_{\text{вых}}$ в окрестности параметра R_k .

Примечание. Формула (20.8) и разложение в ряд Тейлора предполагают, что $f_{\text{вых}}$ — непрерывная и дифференцируемая функция от изменяемого параметра; это положение является ограничением теории чувствительности, базирующейся на рассмотрении ФАЧ.

20.2.2. Построение ПЦ для расчета ФАЧ на основании теоремы компенсации

В исходном варианте теоремы компенсации устремим ΔR_k к dR_k . Тогда реакции будут du_n , di_n , а дополнительный (компенсирующий) источник $u_{\text{доп}} = u_k$ на рисунке 20.1в стремится к $dR_k i_k$. По принципу пропорциональности, уменьшая значение напряжения источника (рис. 20.1в) в ΔR_k раз, получим уменьшение всех реакций тоже в ΔR_k раз. При стремлении ΔR_k к dR_k получим показанную на рисунке 20.5а присоединенную цепь для расчета ФАЧ.

Таким образом, исходная ПЦ для расчета ФАЧ получается из исходной цепи:

1. Исключением всех источников.
2. Включением дополнительного ИН $u_{\text{доп}} = 1i_k$ последовательно с сопротивлением R_k . Токи такой ПЦ дают ФАЧ токов, напряжения — ФАЧ напряжений.

Примечание. Кроме ФАЧ используются также функции относительной чувствительности

$$S_{f_{\text{вых}} - R_k} = \frac{df_{\text{вых}} / f_{\text{вых}}}{dR_k / R_k} = T_{f_{\text{вых}} - R_k} \frac{R_k}{f_{\text{вых}}}.$$

20.2.3. Получение ПЦ дифференцированием уравнений Кирхгофа и Ома

Присоединенную цепь (рис. 20.5а) можно получить совершенно иным путем, не применяя теорему компенсации. Запишем уравнения Кирхгофа и Ома исходной цепи (см. рис. 20.1а):

$$\sum_{(R_n, \text{ИН})} i_k + \sum_{(\text{ИТ})} i_{0k} = 0, \quad (20.9)$$

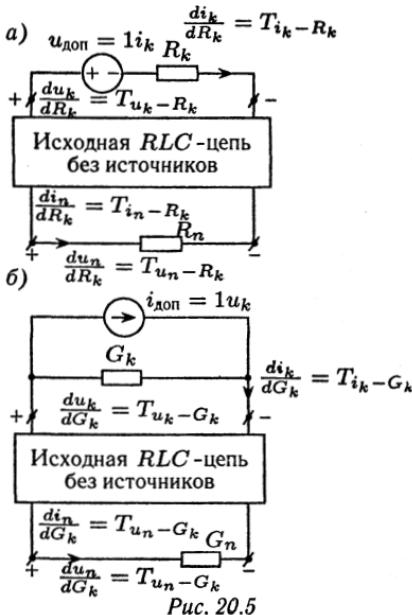


Рис. 20.5

$$\sum_{(R_n, \text{ИТ})} u_k + \sum_{(\text{ИН})} u_{0k} = 0, \quad (20.10)$$

$$u_n = R_n i_n. \quad (20.11)$$

В уравнениях ЗТК (20.9) первое слагаемое соответствует алгебраическому суммированию в узле токов ИН и R -ветвей, подключенных к узлу, а второе слагаемое — токов ИТ. Аналогичные указания даны в уравнениях ЗНК (20.10).

Продифференцируем (20.9)–(20.11) по R_k , т. е. перейдем к уравнениям ПЦ для расчета ФАЧ:

$$\sum_{(R_n, \text{ИН})} T_{i_k - R_k} + 0 = 0, \quad (20.12)$$

$$\sum_{(R_n, \text{ИТ})} T_{u_k - R_k} + 0 = 0, \quad (20.13)$$

$$T_{u_n - R_k} = R_n T_{i_n - R_k}, \quad (20.14)$$

причем в (20.12), (20.13) вторые слагаемые равны нулю, так как в (20.9) токи ИТ i_{0k} , а в (20.10) напряжения ИН u_{0k} не зависят от R_k .

Вывод: в ПЦ все ИТ исходной цепи необходимо заменить обрывом — холостым ходом, а все ИН исходной цепи — короткозамкнутым участком; ветви с резисторами R_n (при $n \neq k$) неизменны, согласно (20.14).

Осталось среди уравнений (20.11) рассмотреть соответствующее резистору R_k , т. е. уравнение $u_k = R_k i_k$. Дифференцируя его по R_k , получим:

$$\frac{du_k}{dR_k} = 1i_k + R_k \frac{di_k}{dR_k} = 1i_k + R_k T_{i_k - R_k} = T_{u_k - R_k}. \quad (20.15)$$

Таким образом, согласно (20.15) в ветвь с резистором R_k в ПЦ необходимо последовательно включить дополнительный ИН $u_{\text{доп}} = 1i_k$, что и показано на рисунке 20.5а в 20.2.2.

20.2.4. Эквивалентность дуальных ПЦ, составленных для расчета ФАЧ на основании теоремы компенсации

Естественно, на основании дуальной теоремы компенсации может быть составлена дуальная ПЦ для расчета ФАЧ:

1. Она формируется из исходной цепи путем исключения всех источников.

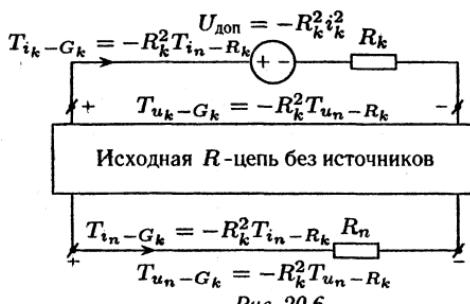


Рис. 20.6

2. Параллельно резистору R_k (с проводимостью G_k) включается дополнительный ИТ $i_{\text{доп}} = 1u_k$; токи такой ПЦ, показанной на рисунке 20.5б, дают ФАЧ соответствующих токов $T_{i_n-G_k}$ к изменению проводимости G_k , а напряжения — ФАЧ $T_{u_n-G_k}$.

Перед доказательством эквивалентности ПЦ (рис. 20.5а, б) найдем связь между ФАЧ по сопротивлению и по проводимости:

$$T_{f_{\text{вых}}-G_k} = \frac{df_{\text{вых}}}{dG_k} = \frac{df_{\text{вых}}}{d(\frac{1}{R_k})} = -R_k^2 \frac{df_{\text{вых}}}{dR_k} = -R_k^2 T_{f_{\text{вых}}-R_k}. \quad (20.16)$$

С учетом (20.16) преобразуем дополнительный ИТ (рис. 20.5б) к эквивалентному ИН $u_{\text{доп}} = R_k i_{\text{доп}} = R_k u_k = R_k^2 i_k$ и изменим его полярность, как показано на рисунке 20.6.

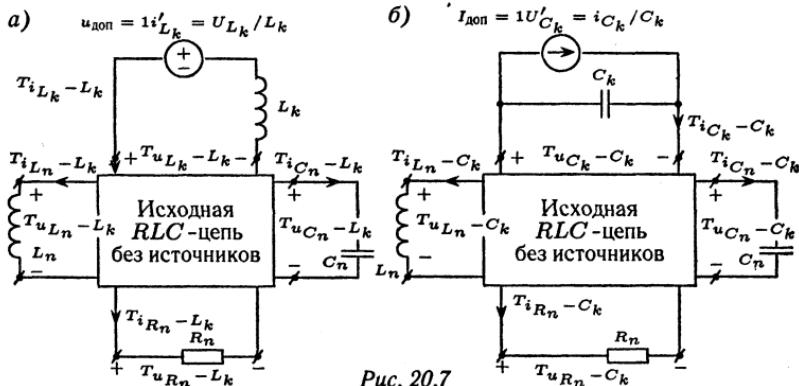
Изменяя напряжение ИН (рис. 20.6) в $(-R_k^2)$ раз. По принципу пропорциональности все реакции изменятся во столько же раз, т. е. переходим к исходной ПЦ, показанной на рисунке 20.5а.

20.2.5. Расчет ФАЧ динамических цепей

Аналогично п. 20.2.1 и рисунку 20.5а можно перейти к ПЦ для расчета ФАЧ динамических цепей. В качестве исходных рассмотрим ПЦ, представленные на рисунке 20.3. При устремлении ΔL_k к dL_k и ΔC_k к dC_k получим искомые ПЦ, как показано на рисунке 20.7а, б.

Таким образом, при расчете ФАЧ к изменению индуктивности L_k следует (см. рис. 20.7а):

1. Из исходной цепи исключить все источники.
2. В ветвь L_k последовательно включить дополнительный ИН $u_{\text{доп}} = 1i'_{L_k} = u_{L_k}(t)/L_k$. В случае расчета ФАЧ к изменению емкости C_k (см. рис. 20.7б) параллельно ветви C_k включают



дополнительный ИТ $i_{\text{доп}} = 1u'_{C_k}(t) = i_{C_k}/C_k$. В случае изменения R_k в динамической цепи ПЦ составляется очевидным образом как комбинация схем, приведенных на рисунке 20.5 и 20.7.

Примечания:

- Естественно, ключи и обобщенные функции (типа $\delta(t)$ и $\delta_1(t)$) исходной цепи сохраняются и в ПЦ, хотя очевидно, что при ненулевых независимых начальных условиях расчет ФАЧ может быть непростым.
- Полученные ПЦ непосредственно могут быть использованы также для вычисления ФАЧ импульсных характеристик, передаточных функций и частотных характеристик $h(t) \div H(s) \div H(j\omega)$ к изменению любого параметра N цепи (здесь N — это R_k или L_k , или C_k), т. е. для расчета ФАЧ $T_{h-N} \div T_{H-N}$, в том числе с применением операторного метода аналогично примеру 1.

§ 20.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ АБСОЛЮТНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ НА ОСНОВАНИИ ТЕОРЕМЫ ТЕЛЕДЖЕНА

20.3.1. Теорема Теледжена

У двух цепей с одинаковыми ориентированными графами равна нулю сумма произведений напряжений ветвей одной цепи u_{kI} (где k — номер элемента) на токи соответствующих ветвей другой (или той же) цепи i_{kII} , т. е.

$$\sum_{(n)} u_{kI} i_{kII} = \sum_{(n)} u_{kII} i_{kI} = \sum_{(n)} u_{kI} i_{kI} = \sum_{(n)} u_{kII} i_{kII} = 0, \quad (20.17)$$

где n — число элементов.

Примечание. Последние 2 суммы в (20.17) — это известный баланс мощностей в цепи.

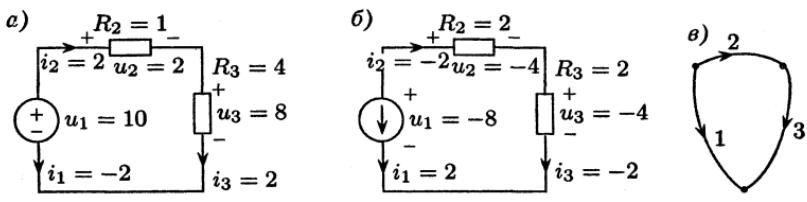


Рис. 20.8

ПРИМЕР 2. Рассмотрим 2 цепи (рис. 20.8 a, b), одинаковый ориентированный граф которых приведен на рисунке 20.8 ε . На схемах цепей указаны также напряжения, токи и сопротивления элементов.

Вычислим, например, первую сумму в (20.17): $u_{1I}i_{1II} + u_{2I}i_{2II} + u_{3I}i_{3II} = 10 \cdot 2 + 2(-2) + 8(-2) = 0$.

Самый простой вариант доказательства (20.17) базируется на матричном соотношении

$$[V] = [W]^T = [(D)(B)]^T = [B]^T[D]^T, \quad (20.18)$$

т. е. транспонированное произведение матриц $[D]$ и $[B]$ равно произведению транспонированных матриц в обратной последовательности.

Рассмотрим первую сумму в (20.17), рассматривая ее как произведение матрицы-строки напряжений ветвей первой цепи на матрицу-столбец токов соответствующих ветвей второй цепи:

$$\sum u_{kI}i_{kII} = [u_I]^T[i_{II}], \quad (20.19)$$

причем в (20.19) $[u_I]^T = [u_{1I}, u_{2I}, \dots, u_{nI}]$, $[i_{II}]^T = [i_{1II}, i_{2II}, \dots, i_{nII}]$.

В соответствии с (19.5)

$$[u_I] = [A_y][u_{yI}] = [A]^T[u_{yI}], \quad (20.20)$$

где $[A_y]$ — узловая матрица, которая согласно (19.6) равна транспонированной структурной независимой матрице $[A]$; $[u_{yI}]$ — матрица узловых напряжений первой цепи. Подставив (20.20) в (20.19) и учитывая, что двойное транспонирование дает исходную матрицу, получим:

$$\sum u_{kI}i_{kII} = ([A]^T[u_{yI}])^T[i_{II}] = [u_{yI}]^T[A][i_{II}] = [u_{yI}]^T[0] = 0,$$

поскольку согласно п. 19.1.1 независимые уравнения ЗТК в матричной форме соответствуют $[A_{II}][i_{III}] = [0]$, а структуры цепей одинаковы по условию теоремы, т. е. $[A] = [A_I] = [A_{II}]$. *Примечание.* Для пояснения (20.18) учтем, что в матрицах $[V]$ и $[W]$ элемент v_{nm} , с одной стороны, может быть рассчитан по формуле $v_{nm} = w_{mn} = \sum d_{mk} b_{kn}$, вытекающей из предпоследнего соотношения в (20.18), а с другой стороны, из последнего соотношения в (20.18) следует, что $v_{nm} = \sum b_{kn} d_{mk}$, т. е. то же самое (здесь d_{mk} и b_{km} — элементы матриц $[D]$ и $[B]$).

20.3.2. Определение ФАЧ выходного напряжения на основании теоремы Теледжена

Рассмотренные ранее ПЦ позволяли определять ФАЧ всех реакций к изменению только одного параметра цепи, например R_k . На практике более важной является задача расчета ФАЧ одной реакции $f_{\text{вых}}$, но к изменению всех сопротивлений. Эту задачу решает цепь, составленная на основании теоремы Теледжена.

Сконструируем ПЦ так, чтобы ее ориентированный граф соответствовал графу исходной цепи и чтобы параметры цепей, по возможности, совпадали.

Составим разность двух первых сумм теоремы Теледжена (20.17):

$$\sum u_k \tilde{i}_k - \sum i_k \tilde{u}_k = 0, \quad (20.21)$$

где « $\tilde{\cdot}$ » — это символ ПЦ.

Примечание. В (20.21) каждая из сумм сама по себе тоже равна нулю, что справедливо и для двух следующих соотношений.

Допустим, сопротивление R_k цепи изменилось на dR_k . Тогда напряжения и токи исходной цепи тоже изменились, и вместо (20.21) можем записать

$$\sum (u_k + du_k) \tilde{i}_k - \sum (i_k + di_k) \tilde{u}_k = 0. \quad (20.22)$$

Вычитая (20.21) из (20.22), переходим к так называемому уравнению чувствительности:

$$\sum du_k \tilde{i}_k - \sum di_k \tilde{u}_k = 0. \quad (20.23)$$

Рассмотрим по отдельности составляющие уравнения (20.23) для каждого элемента, обозначив их символом Δ .

1. У ИН имеем $\Delta_{ИН} = du_{ИН}\tilde{i}_{ИН} - di_{ИН}\tilde{u}_{ИН} = 0$,

поскольку $u_{ИН}$ от R_k не зависит (т. е. $du_{ИН} = 0$), а в ПЦ для упрощения принимаем $\tilde{i}_{ИН} = 0$, что соответствует исключению ИН в ПЦ, как и в теореме компенсации.

2. У ИТ имеем $\Delta_{ИТ} = du_{ИТ}\tilde{i}_{ИТ} - di_{ИТ}\tilde{u}_{ИТ} = 0$,

поскольку $i_{ИН}$ от R_k не зависит (т. е. $di_{ИН} = 0$), а в ПЦ для упрощения принимаем $\tilde{i}_{ИТ} = 0$, что соответствует исключению ИТ в ПЦ, как и в теореме компенсации.

3. У резистора R_n (при $n \neq k$)

$$\Delta_{R_n} = du_n\tilde{i}_n - di_n\tilde{u}_n = R_n di_n\tilde{i}_n - di_n\tilde{R}_n\tilde{i}_n = 0,$$

поскольку для упрощения ПЦ следует принять $\tilde{R}_n = R_n$, как и в теореме компенсации.

4. Осталось рассмотреть изменяющийся резистор R_k :

$$\Delta_{R_k} = du_k\tilde{i}_k - di_k\tilde{u}_k;$$

с учетом $du_k = d(R_k i_k) = dR_k i_k + R_k di_k$ и при выборе $\tilde{R}_k = R_k$ получим

$$\Delta_{R_k} = dR_k i_k \tilde{i}_k + R_k di_k \tilde{i}_k - di_k R_k \tilde{i}_k = dR_k i_k \tilde{i}_k \neq 0, \quad (20.24)$$

если в (20.24) $\tilde{i}_k \neq 0$.

Примечания:

1. $\tilde{i}_k \neq 0$, если в ПЦ будет введен дополнительный источник (которого там пока нет).
2. Результат (20.24) вступает в противоречие с (20.23), которое необходимо устранить.

Поэтому в рассмотрение необходимо ввести еще один элемент, который не искаляет исходную цепь, обеспечивает нуль в (20.23) и в явной форме учитывает исследуемую реакцию, т. е. $f_{вых} = u_{вых}$ в данной задаче.

5. Параллельно элементу, реакция которого (напряжение $u_{вых}$) анализируется, в исходную цепь вводим дополнительный элемент — ХХ, а в ПЦ — дополнительный ИТ $\tilde{i}_{доп} = 1$. Тогда составляющая (20.23) для этого элемента будет

$$\Delta_{доп} = du_{доп}\tilde{i}_{доп} - di_{доп}\tilde{u}_{доп} = du_{доп} = du_{вых}, \quad (20.25)$$

поскольку $di_{доп} = 0$ вследствие «холостого хода».

С учетом (20.24), (20.25) уравнение чувствительности (20.23) имеет вид $\Delta_{R_k} + \Delta_{\text{доп}} = dR_k i_k \tilde{i}_k + du_{\text{вых}} = 0$,

так как $u_{\text{доп}} = u_{\text{вых}}$. Следовательно, искомая ФАЧ записывается как

$$\frac{du_{\text{вых}}}{dR_k} = -i_k \tilde{i}_k = T_{u_{\text{вых}} - R_k}. \quad (20.26)$$

Таким образом, для вычисления ФАЧ выходного напряжения к изменению любого из резисторов R_k следует:

1. Из исходной цепи исключить все источники.
2. Параллельно «клеммам» (выводам) $u_{\text{вых}}$ в ПЦ ввести ИТ $i_{\text{доп}} = 1$ и произвести расчет по формуле (20.26).

Примечание. Используя формулу связи ФАЧ (20.16), можем записать

$$T_{u_{\text{вых}} - G_k} = -R_k^2 T_{u_{\text{вых}} - R_k} = -R_k^2 (-i_k \tilde{i}_k) = u_k \tilde{u}_k.$$

20.3.3. Определение ФАЧ выходного тока на основании теоремы Теледжена

Если реакцией является выходной ток $f_{\text{вых}} = i_{\text{вых}}$, то элементом, который не изменяет исходную цепь, является короткозамкнутый элемент, который «включается» последовательно в ветвь, где протекает ток $i_{\text{вых}}$. В эту же ветвь в ПЦ включаем дополнительный ИН $\tilde{u}_{\text{доп}} = 1$.

Уравнение для дополнительного элемента имеет вид

$$\Delta_{\text{доп}} = du_{\text{доп}} \tilde{u}_{\text{доп}} - di_{\text{доп}} \tilde{u}_{\text{доп}} = -di_{\text{доп}} = -di_{\text{вых}}, \quad (20.27)$$

поскольку $du_{\text{доп}} = du_{\text{КЗ}} = 0$.

С учетом (20.27) и (20.24) общее уравнение чувствительности (20.23) будет

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{доп}} + \Delta_{R_k} &= -di_{\text{вых}} + dR_k i_k \tilde{i}_k = 0, \\ \text{откуда ФАЧ} \quad \frac{di_{\text{вых}}}{dR_k} &= T_{i_{\text{вых}} - R_k} = i_k \tilde{i}_k. \end{aligned} \quad (20.28)$$

Таким образом, в ПЦ для расчета ФАЧ:

1. Должны быть исключены все исходные источники.
2. В ветвь, соответствующую $i_{\text{вых}}$, последовательно вводят ИН $\tilde{u}_{\text{доп}} = 1$; вычисления проводят на основании (20.28).

Примечание. Используя формулу связи ФАЧ (20.16), можем записать

$$T_{i_{\text{вых}} - G_k} = -R_k^2 T_{i_{\text{вых}} - R_k} = -u_k \tilde{u}_k.$$

РЕЛЕЙНЫЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

§ 21.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЛЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

21.1.1. Особенности процессов в релейных цепях

Релейным элементом (РЭ) называют нелинейный активный элемент электрической цепи (управляемый источник), у которого связь между выходной переменной $y(t)$ и входным (управляющим) сигналом $x(t)$ описывается характеристиками, показанными на рисунке 21.1, т. е. при прохождении входным сигналом $x(t)$ некоторого порогового значения (d , b) выходная величина $y(t)$ скачком переходит с одного фиксированного уровня на другой. Из вида характеристик очевидно, что РЭ является элементом нелинейным.

На рисунке 21.1 a приведена характеристика идеального РЭ с нулевым порогом срабатывания, на рисунке 21.1 b — характеристика РЭ с гистерезисом (величины $2d$), на рисунке 21.1 c — РЭ с зоной нечувствительности (величины $2d$), на рисунке 21.1 g — РЭ с зоной нечувствительности и гистерезисом ($d - b$). Существуют и более сложные виды характеристик РЭ, в том числе несимметричные (смещенные вдоль оси абсцисс или ординат).

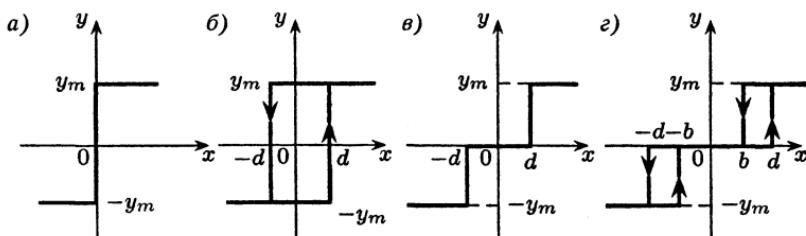


Рис. 21.1

Цепь, содержащая хотя бы один РЭ, называется релейной цепью (РЦ). Релейные цепи являются распространенным классом нелинейных цепей.

Если на вход РЭ подан, например, сигнал $x(t)$ синусоидальной формы, амплитуда которого превышает порог срабатывания d , то сигнал на выходе РЭ будет представлять собой периодическую последовательность знакопеременных прямоугольных импульсов с амплитудой y_m , чередующихся — в случаях, рассмотренных на рисунке 21.1 a, b , — без пауз (пример такого сигнала показан на рисунке 21.2 a), а в случаях, приведенных на рисунке 21.1 b, c , — с паузами.

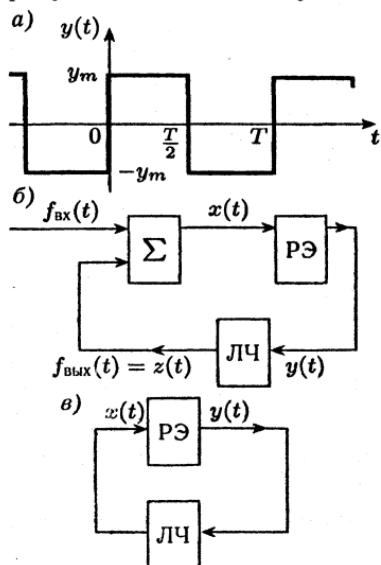


Рис. 21.2

В релейных цепях ярко выражена одна из присущих нелинейным цепям характерных особенностей: при отсутствии внешних воздействий (т. е. в свободном режиме) в них могут возникнуть и установиться незатухающие периодические колебания, которые называют автоколебаниями (АК).

Действительно, пусть, на выходе РЭ с гистерезисом (рис. 21.1 b) формируется сигнал $y(t)$, показанный на рисунке 21.2 a . Если этот сигнал подается на вход, например, идеальной интегрирующей цепи с инверсией знака, а сигнал с выхода этой цепи при $0 < t < T/2$

$$z(t) = - \int_0^t y_m dt + C = -y_m t + C,$$

где C — постоянная интегрирования, в свою очередь является входным сигналом $x(t) = z(t)$ для РЭ, то $x(t) = -y_m t + C$, убывая, обязательно достигнет порога « $-d$ ». При этом РЭ «сработает» в обратном направлении, т. е. при $T/2 < t < T$ будет $y(t) = -y_m$ и, следовательно, на выходе интегрирующей цепи (с учетом инверсии знака) начнется рост значений $x(t)$.

При достижении $x(t)$ порога « $+d$ » РЭ «сработает» в прямом направлении, т. е. $y(t) = +y_m$ и процесс будет повторяться с некоторым периодом T .

В общем случае, для произвольных характеристик нелинейных элементов, задача точного аналитического расчета автоколебательного процесса (периода T , формы колебаний) очень сложна. Однако в случае РЦ с простой формой АК на входе РЭ, показанной на рисунке 21.2а, задача может быть решена с требуемой точностью при использовании известных методов теоретической электротехники: метода выделения свободной составляющей, применяемого при точном расчете установившегося периодического режима, и методов решения нелинейных функциональных уравнений.

Примечание. В практике расчета параметров АК широко используются и сугубо приближенные методы, некоторые черты которых аналогичны методу гармонического баланса по первой гармонике при анализе установившегося периодического режима в нелинейных цепях.

21.1.2. Исходные соотношения и допущения

Рассмотрим РЦ, схемы которых могут быть приведены к эквивалентным структурам с выделенными РЭ и линейной частью ЛЧ, как показано на рисунке 21.2б, где $f_{\text{вх}}(t)$ — воздействие, $z(t) = f_{\text{вых}}(t)$ — реакция цепи; \sum — сумматор, реализованный, например, на идеальном операционном усилителе (ОУ), осуществляющий операцию $x(t) = f_{\text{вх}}(t) + z(t)$.

Для режима автоколебаний в РЦ структуру можно упростить, считая $f_{\text{вх}}(t) = 0$, как показано на рисунке 21.2в. При этом передаточная функция ЛЧ имеет приведенный вид

$$H(s) = - \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \\ = \frac{B(s)}{\prod_{(n)}(s - s_k)}, \quad (21.1)$$

т. е. считаем всегда коэффициент $a_n = 1$, а знак «минус» вносим в полином $B(s)$.

Для простоты изложения методики расчета автоколебаний предположим:

1. Что в ПФ (21.1) обязательно реализуется инверсия знака.
2. В ПФ (21.1) $m < n$, т. е. степень числителя меньше степени знаменателя и для ЛЧ переходная характеристика (ПХ) $h_1(t)$ является непрерывной функцией.
3. Полюсы s_k ПФ (21.1) считаем простыми (некратными) и ненулевыми.
4. Характеристика РЭ симметрична и соответствует рисунку 21.2а, б.

Указанные ограничения (допущения) не являются принципиальными и при необходимости могут быть сняты.

§ 21.2. АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ В ПРОСТЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЛЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

21.2.1. Расчет автоколебаний в случае идеального РЭ без гистерезиса

Предположим, что в РЦ (см. рис. 21.1в) возникают автоколебания (см. рис. 21.2а) с неизвестным периодом $T = 2T_0$, обладающие в силу симметрии цепи следующим свойством:

$$x(t) = -x(t \pm T_0), \quad y(t) = -y(t \pm T_0), \quad (21.2)$$

где $T_0 = 0,5T$ — неизвестный искомый полупериод АК: при этом (21.2) объясняется нечетно-симметричной характеристикой как идеального РЭ (см. рис. 21.1а), так и ЛЧ (21.1).

Пусть выходная переменная РЭ следующая:

$$y(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T_0; \\ -1, & T_0 < t < 2T_0 = T, \end{cases} \quad (21.3)$$

причем в (21.3), в отличие от рисунков 21.1, 21.2а, осуществлена нормировка по высоте ($y_{m\ast} = 1$), а параметр y_m может быть отнесен как коэффициент к ЛЧ.

Из анализа характеристики идеального реле (рис. 21.1а) и процесса на его выходе (рис. 21.2а) вытекают условия срабатывания РЭ:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & x'(0-) &> 0, \\ x(T_0) &= 0, & x'(T_0-) &< 0. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Цель расчета — найти полупериод АК, а затем их аналитическое описание внутри полупериода при $0 < t < T_0$.

Предположим, что в отличие от рисунка 21.2 a сигнал $y(t) = 0$ при $t < 0$. Записываем его изображение по Лапласу

$$Y(s) = \frac{Y_1(s)}{1 - e^{-sT}}, \quad (21.5)$$

причем в (21.5) $Y_1(s) \doteq y_1(t)$ — описание условного первого импульса такого квазипериодического сигнала $y(t)$ в интервале первого периода при $0 < t < T = 2T_0$. В нашем случае

$$\begin{aligned} y_1(t) &= [\delta_1(t) - 2\delta_1(t - T_0) + \delta_1(t - 2T_0)] \doteq Y_1(s) = \\ &= \frac{1}{s} (1 - e^{-sT_0})^2, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$Y(s) = \frac{Y_1(s)}{(1 - e^{-sT_0})(1 + e^{-sT_0})} = \frac{1 - e^{-sT_0}}{s(1 + e^{-sT_0})}, \quad (21.6)$$

т. е. нечетно-симметричный сигнал (21.2) согласно (21.6) достаточно рассматривать на интервале полупериода $0 < t < T_0$, как и указано в цели расчета.

Полная реакция ЛЧ согласно рисунку 21.2 σ и ПФ (21.1) будет

$$\begin{aligned} X_{\Pi}(s) &= H(s)Y(s) = \frac{H(s)(1 - e^{-sT_0})}{s(1 + e^{-sT_0})} = \\ &= \frac{B(s)(1 - e^{-sT_0})}{\prod_{(n)}(s - s_k)s(1 + e^{-sT_0})}. \quad (21.7) \end{aligned}$$

Аналогично методу выделения свободной составляющей раскладываем (21.7) на сумму двух составляющих:

$$X_{\Pi}(s) = X_{\Pi,\text{св}}(s) + X_{\Pi,\text{вын}}(s) = \sum_{(n)} \frac{A_k}{s - s_k} + \frac{X_1(s)}{1 + e^{-sT_0}}, \quad (21.8)$$

причем в (21.8) изображение свободной составляющей $X_{\Pi,\text{св}}(s)$ определяется разложением (21.7) на сумму дробей по полюсам s_k ПФ (21.1), а изображение вынужденной составляющей $X_{\Pi,\text{вын}}(s)$ «обязано» иметь математическую форму условного для ЛЧ воздействия (21.5), (21.6). При этом $X_1(s) \doteq x_1(t)$ — искомое описание вынужденных периодических АК на входе РЭ в интервале $0 < t < T_0$, т. е. в этом интервале искомое $x(t) = x_1(t)$.

Находим коэффициенты A_k (вычты в полюсах s_k):

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) X_{\Pi}(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{(s - s_k) H(s) (1 - e^{-sT_0})}{s (1 + e^{-sT_0})} = A_k(T_0), \quad (21.9) \end{aligned}$$

т. е. коэффициенты A_k в (21.9) зависят от искомого полупериода АК T_0 .

Зная (21.7) и свободную составляющую в (21.8), определяем

$$\begin{aligned} X_1(s) &= [X_{\Pi}(s) - X_{\Pi,\text{св}}(s)] (1 + e^{-sT_0}) = \\ &= \frac{H(s)}{s} (1 - e^{-sT_0}) - \sum_{(n)} \frac{A_k}{s - s_k} (1 + e^{-sT_0}). \quad (21.10) \end{aligned}$$

Учитывая, что рассматриваемый интервал $0 < t < T_0$, выражение (21.10) можно упростить:

$$X_1(s) = \frac{H(s)}{s} - \sum_{(n)} \frac{A_k}{s - s_k}. \quad (21.11)$$

Первое слагаемое в (21.11), являющееся изображением переходной характеристики ЛЧ, тоже раскладываем на сумму простейших дробей:

$$H_1(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{B_0}{s} + \sum_{(n)} \frac{B_k}{s - s_k}. \quad (21.12)$$

С учетом (21.12) записываем (21.11) в виде

$$X_1(s) = \frac{B_0}{s} + \sum_{(n)} \frac{(B_k - A_k)}{s - s_k}. \quad (21.13)$$

Применяем к (21.13) теорему о начальном значении оригинала:

$$x_1(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X_1(s) = - \sum_{(n)} A_k(T_0) = 0, \quad (21.14)$$

где учтено:

1. В интервале $0 < t < T_0$ искомая переменная $x(t) = x_1(t)$.
2. По условию срабатывания (21.14) у идеального РЭ $x(0) = 0$.
3. По второму допущению из п. 21.1.2 ПХ непрерывна, следовательно, $h_1(0) = 0 = B_0 + \sum_{(n)} B_k$.

Итак, для расчета полупериода АК в РЦ с идеальным РЭ необходимо решить нелинейное функциональное уравнение (НФУ)

$$F(T_0) = - \sum_{(n)} A_k(T_0) = 0, \quad (21.15)$$

причем $A_k(T_0)$ в (21.15) записываются согласно (21.9).

Для определения T_0 используют описанные, например, в теории нелинейных цепей методы решения НФУ. В частности, при получении исходного приближения для значения T_0 можно решить (21.15) графически. Найдя T_0 , далее вычисляют согласно (21.9) коэффициенты и записывают на основании (21.13) оригинал искомого описания АК в интервале $0 < t < T_0$

$$x(t) = x_1(t) = B_0 + \sum_{(n)} (B_k - A_k) e^{s_k t}. \quad (21.16)$$

Затем строят график (21.16) и проверяют согласно (21.4) контрольные точки: $x(0) = x(T_0) = 0$, $x'(T_0-) < 0$. После этого периодически продолжают график для остальных значений t , используя свойство (21.2).

21.2.2. Особенности расчета автоколебаний в случае релейной характеристики с гистерезисом

В данном случае в схеме РЦ, изображенной на рисунке 21.2в, РЭ имеет характеристику, показанную на рисунке 21.1б в предположении нормированного значения $y_m = 1$. Методика расчета АК в основном соответствует описанной в п. 21.2.1. Отметим лишь некоторые отличия.

Изменяется условие срабатывания РЭ (21.4):

$$\begin{aligned} x(0) &= d, & x'(0^-) &> 0; \\ x(T_0) &= -d, & x'(T_0) &< 0, \end{aligned} \quad (21.17)$$

поскольку порог срабатывания определяется величиной гистерезиса релейной характеристики d .

Примечание. При необходимости здесь также может быть использовано масштабирование. В случае выбора единичного нормированного значения порога $d_* = 1$ параметр d можно «отнести» к ЛЧ путем уменьшения в d раз ПФ $H(s)$.

Из анализа (21.17) также следует физическая трактовка возникновения АК в данном случае: чтобы сигнал $x(t)$ на выходе

ЛЧ (т. е. сигнал на входе РЭ) в некоторый момент (называемый моментом переключения или срабатывания) достиг порога срабатывания d , модуль переходной характеристики $|h_1(t)|$ линейной части в некотором интервале времени должен превышать значение d .

Поскольку сигнал на выходе РЭ в рассматриваемом случае удобно принять полностью соответствующим рисунку 21.2а, методика расчета АК подобна изложенной в п. 21.2.1. Отличие касается НФУ (21.14), (21.15), которое на основании (21.17) имеет вид

$$F(T_0) = - \sum_{(n)} A_k(T_0) = d, \quad (21.18)$$

т. е. методы решения (21.18) и (21.15) аналогичны.

21.2.3. Пример расчета параметров автоколебаний

Пусть РЭ с гистерезисом (см. рис. 21.1б) имеет полностью нормированную характеристику $y_m = 1$, $d = 1$. Схема цепи соответствует рисунку 21.2в; причем схема линейной части приведена на рисунке 21.3а. Необходимо определить ПФ ЛЧ и найти параметры АК, т. е. полупериод T_0 и описание АК на выходе ЛЧ $x(t)$ в интервале полупериода $0 < t < T_0$.

Используя формулу «решающей схемы» на идеальном ОУ, находим ПФ ЛЧ (как отношение проводимостей — входной и обратной связь):

$$H(s) = -\frac{Y_1(s)}{Y_0(s)} = \frac{-G_1}{G_0 + G_0 s} = \frac{-2}{s + 1},$$

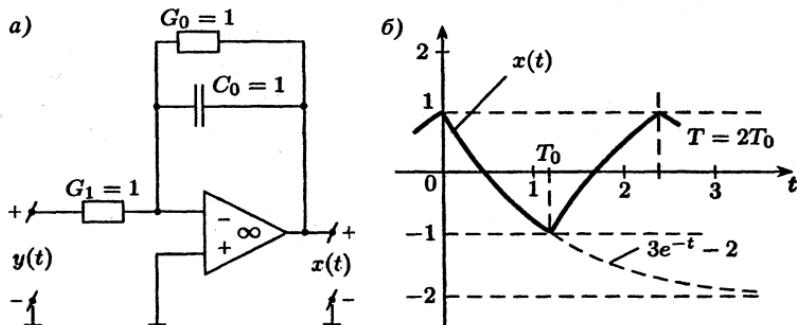


Рис. 21.3

причем ПХ ЛЧ $H_1(s) = H(s)/s \div h_1(t) = -2 + 2e^{-t}$ по модулю $|h_1(t)| > d = 1$, т. е. превышает порог срабатывания на значительном интервале времени t (при $t > \ln 2$); следовательно, АК возможны.

На основании (21.7) записываем полную реакцию ЛЧ на сигнал, показанный на рисунке 21.2а (в предположении $y(t) = 0$ при $t < 0$):

$$\begin{aligned} X_{\pi}(s) &= H(s)Y(s) = \\ &= \frac{-2(1 - e^{-sT_0})}{(s+1)s(1 + e^{-sT_0})} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{X_1(s)}{1 + e^{-sT_0}}, \end{aligned}$$

где

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)X_{\pi}(s) = \frac{2(1 - e^{T_0})}{1 + e^{T_0}} = A_1(T_0). \quad (21.19)$$

Описание полупериода АК

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \left[X_{\pi}(s) - \frac{A_1}{s+1} \right] (1 + e^{-sT_0}) = \\ &= \frac{-2(1 - e^{-sT_0})}{(s+1)s} - \frac{A_1}{s+1} (1 + e^{-sT_0}) \end{aligned}$$

которое с учетом рассматриваемого интервала $0 < t < T_0$ упрощаем:

$$X_1(s) = \frac{-2}{(s+1)s} - \frac{A_1}{s+1} = -\frac{2}{s} + \frac{2 - A_1}{s+1},$$

откуда искомый оригинал будет

$$x(t) = x_1(t) = -2 + (2 - A_1)e^{-t}. \quad (21.20)$$

На основании условия переключения (21.17) записываем НФУ (21.18):

$$x(0) = d = 1 = -A_1 = \frac{-2(1 - e^{T_0})}{1 + e^{T_0}}. \quad (21.21)$$

НФУ (21.21) решается в радикалах, т. е. точно. При замене $e^{T_0} = z$ получим $-2(1 - z)/(1 + z) = 1$, откуда $z = 3$, следовательно, полупериод АК будет $T_0 = \ln 3$.

Далее на основании (21.19) находим $A_1 = -1$ (хотя в данной простой цепи первого порядка это очевидно следует из (21.21)). Затем по формуле (21.20) определяем $x(t) = -2 + 3e^{-t}$ при $0 < t < T_0 = \ln 3$.

Контрольные точки

$$x(0) = 1 = d, \quad x(T_0) = -1 = -d, \quad x'(t) = -3e^{-t}, \\ x'(T_{0-}) = -3e^{-\ln 3} = -1 < 0,$$

соответствуют (21.17), т. е. полученное решение соответствует условиям переключения РЭ с гистерезисом.

График процесса АК показан на рисунке 21.3б в интервале периода $T = 2T_0 = 2\ln 3$. Как видно, в данном простом примере сигнал на выходе ЛЧ не выходит за пределы порога срабатывания $\pm d = \pm 1$.

МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТНЫХ ПОТОКАХ

§ 22.1. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ И ФЕРРОМАГНИТНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

22.1.1. Исходные понятия

Магнитной цепью (МЦ) называют совокупность устройств, содержащих ферромагнитные тела, которые служат для сосредоточения в них магнитного потока. Ферромагнитные материалы обладают большой относительной магнитной проницаемостью μ , которая непостоянна, поэтому МЦ являются классом нелинейных цепей.

Существуют МЦ с постоянными магнитами. В других МЦ магнитный поток создается током обмотки на ферромагнитном сердечнике. МЦ называют однородной, если вся она выполнена из одного и того же ферромагнитного материала. Если МЦ состоит из материалов с различными магнитными свойствами, в том числе воздушных зазоров, то ее называют неоднородной.

Магнитную цепь называют неразветвленной, если во всех ее сечениях магнитный поток одинаков, и разветвленной, если в сечениях разных участков магнитный поток различен. Примеры МЦ (без указания обмоток с током) приведены на рисунке 22.1. Магнитные цепи на рисунке 22.1 a (измерительный прибор — амперметр) и рисунке 22.1 b (реле на ферромагнитном сердечнике) являются неразветвленными, а МЦ, показанная на рисунке 22.1 c (трансформатор), — разветвленная МЦ.

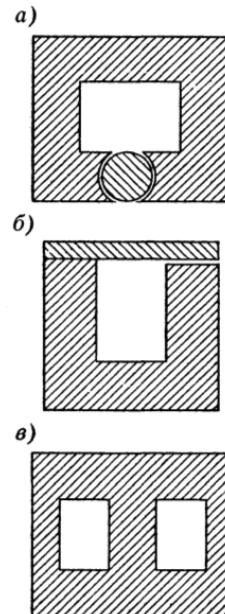


Рис. 22.1

22.1.2. Основные законы магнитных цепей

При анализе МЦ исходными являются 3 следующих закона.

1. Магнитный поток Φ вектора магнитной индукции \vec{B} через замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\Phi = \oint \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (22.1)$$

т. е. (22.1) отражает принцип непрерывности и замкнутости линий вектора \vec{B} . Размерность Φ в (22.1) — веберы (Вб), B — Tesla (Tc), S — квадратные метры (m^2).

2. Циркуляция вектора напряженности магнитного поля \vec{H} по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint \vec{H} dl = \sum i_k = F_\Sigma, \quad (22.2)$$

причем эту сумму токов часто называют намагничивающей силой F_Σ или магнитодвижущей силой (МДС). Размерность МДС в (22.2) — амперы (A), l — метры (m), а, значит, размерность $[H] = A/m$. Физическая трактовка (22.2): наличие тока в катушке приводит к созданию вектора \vec{H} .

3. Связь между векторами магнитной индукции и напряженности магнитного поля определяется формулой

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad (22.3)$$

причем в (22.3) $\mu_a = \mu \mu_0$ — абсолютная магнитная проницаемость материала; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ — магнитная постоянная; μ — относительная магнитная проницаемость материала (безразмерная величина), которая показывает, во сколько раз увеличивается магнитная индукция \vec{B} в данной среде по сравнению с вакуумом при одинаковых значениях \vec{H} (у вакуума $\mu_{\text{вак}} = 1$, $\mu_{\text{а.вак}} = \mu_0$).

Примечание. В отличие от (22.3) направления векторов \vec{B} и \vec{H} не совпадают в так называемых анизотропных материалах, в которых величина μ , зависит от направления вектора \vec{H} .

Для примера рассмотрим показанный на рисунке 22.2а торoidalный сердечник, на который намотаны 2 катушки с токами i_1 и i_2 ; N_1 , N_2 — числа витков катушек, S — поперечное

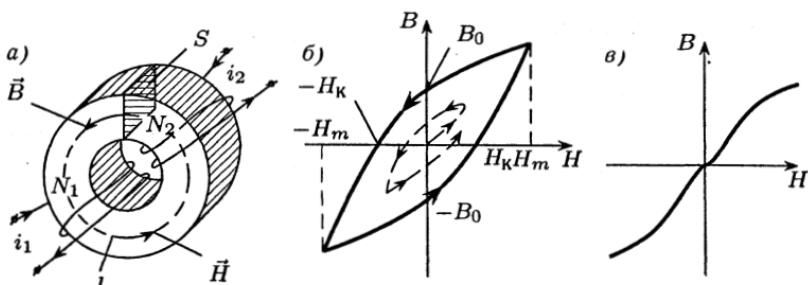


Рис. 22.2

сечение сердечника, l — показанная пунктиром длина замкнутого контура интегрирования применительно к (22.2), на котором стрелками указаны условно положительные направления векторов \vec{H} и \vec{B} . Знак тока i_k в (22.2) определяется по правилу правого винта относительно принятого условно положительного направления вектора \vec{H} .

В данном примере направления согласованные, поэтому выполняется

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 = N_1 i_1 + N_2 i_2.$$

22.1.3. Основная кривая намагничивания ферромагнитных материалов

Зависимость $B(H)$ у ферромагнитных материалов двузначна и имеет петлю гистерезиса (т. е. различные характеристики прямого и обратного хода), как показано на рисунке 22.2б). При $H'(t) > 0$ магнитная индукция B изменяется по нижней части петли, а при убывании напряженности ($H' < 0$) — по верхней. Шириной петли гистерезиса принято считать $2H_k$, где H_k — коэрцитивная сила, т. е. то значение H , которое необходимо, чтобы довести до нуля магнитную индукцию B , если в предварительно намагниченном веществе остаточная индукция равнялась B_0 .

Ширина петли гистерезиса $2H_k$ зависит от максимальной напряженности H_m , свойств ферромагнитного материала и скорости $H'(t)$, с которой снимается характеристика. Поэтому для расчета МЦ при постоянных магнитных потоках петлю гистерезиса при заданном H_m снимают при очень медленном изменении H (чтобы скорость H' не влияла). Необходимо также учесть, что для перехода на установившуюся петлю гистерезиса

нужно совершить несколько циклов перемагничивания (см. на рисунке 22.2б показанный пунктиром переход на малую петлю).

Материалы с широкой петлей гистерезиса ($H_k > 4000 \text{ A/m}$) называют магнитотвердыми и используют для создания постоянных магнитов, так как у них остаточная индукция B_0 очень велика (сплав Al-Ni-Co). Материалы с узкой петлей гистерезиса ($H_k < 200 \text{ A/m}$) называют магнитомягкими и используют при переменных магнитных потоках (например, в трансформаторах, чтобы нелинейность характеристики и потери на гистерезис влияли мало). Таким образом, индукция является сложной функцией многих переменных $B = B(H, H_m, H', \text{sign}(H'), H_k, H(0))$, которая не имеет аналитического описания.

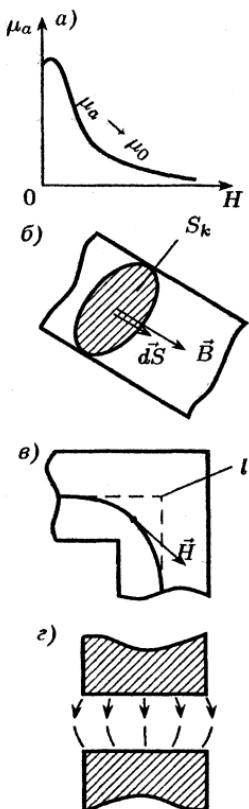


Рис. 22.3

Если для большого числа H_m построить семейство установившихся петель гистерезиса при медленном перемагничивании, то вершины этих петель расположатся на кривой, которую называют основной кривой намагничивания ферромагнитного материала (см. рис. 22.2в) и приводят в справочниках. Эта нечетносимметричная нелинейная характеристика в основном и используется в случае расчета МЦ при постоянных магнитных потоках.

Абсолютная магнитная проницаемость $\mu_a = B/H$, естественно, также является функцией многих переменных (т. е. для разных петель и условий она различна). Если в среднем оценивать μ_a по основной кривой намагничивания (ОКН), зависимость $\mu_a(H)$ имеет вид, показанный на рисунке 22.3а, причем при $H \rightarrow \infty$ относительная магнитная проницаемость $\mu = \mu_a/\mu_0 \rightarrow 1$.

Как известно из курса физики, обычно используют следующую трактовку вида характеристик $B(H)$. Считают, что ферромагнитный материал состоит из микрообластей (доменов) с сильным

самопроизвольным намагничиванием \vec{B}_d , причем векторы \vec{B}_d этих микрообластей ориентированы хаотично друг относительно друга. Под действием напряженности внешнего магнитного поля \vec{H} векторы \vec{B}_d ориентируются по направлению \vec{H} . Степень ориентации зависит от значения H . При достаточно больших H все векторы \vec{B}_d доменов оказываются направленно ориентированными — наступает «насыщение» характеристики $B(H)$, т. е. при дальнейшем увеличении H приращение индукции $\Delta B \approx \approx \mu_{a, \text{вак}} \Delta H$ аналогично приращению в вакууме (точнее — в воздухе). Это явление переориентации доменов обладает инерционными свойствами, поэтому характеристика обратного хода на рисунке 22.2б имеет иной вид (как бы запаздывает). При уменьшении H до нуля в ферромагнитном материале остается превалирующее влияние направленной ориентации доменов — остается остаточная индукция B_0 . Это свойство у магнитотвердых материалов и используется для создания постоянных магнитов.

Абсолютные магнитные проницаемости воздуха и вакуума обычно считают одинаковыми ($\mu_{a, \text{возд}} \approx \mu_{a, \text{вак}}$). Но в ферромагнитных материалах создается очень большая дополнительная составляющая индукции от направленной ориентации доменов, обладающих значительными B_d . В результате B возрастает во много раз в сравнении с воздухом.

§ 22.2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

22.2.1. Исходные допущения

Расчет МЦ базируется на формулах (22.1)–(22.3), причем в них используются скалярное произведение векторов (результатирующая скалярная величина равна произведению модулей векторов и косинуса угла между ними).

На практике с учетом ряда допущений вместо (22.1)–(22.3) используют более простые выражения.

1. Считают, что вектор B одинаков во всех точках поперечного сечения S_k материала МЦ и перпендикулярен сечению, как условно отражено на рисунке 22.3б, где показана часть МЦ. Тогда от скалярного произведения векторов $\vec{B} d\vec{S} = B dS \cos(\vec{B} \wedge d\vec{S})$ переходят к скалярному произведению

скалярных величин и определяют магнитный поток Φ_k через поперечное сечение следующим образом:

$$\Phi_k = B_k S_k, \quad (22.4)$$

хотя на самом деле, в отличие от (22.4), вектор индукции \vec{B} все же неодинаков по сечению и не перпендикулярен ему.

2. Интеграл от $\vec{H} d\vec{l}$ заменяют $\sum H_k l_k$, считая, что вектор напряженности \vec{H} совпадает по направлению с контуром интегрирования. На самом деле направление \vec{H} совпадает с линией вектора \vec{H} , а за контур интегрирования l обычно берут среднюю длину МЦ, т. е. считают, что контур l проходит по центрам поперечных сечений МЦ, как отражено на рисунке 22.3в, где показана схематично часть МЦ. С учетом этого допущения вместо (22.2) записывают

$$\sum H_k l_k = \sum i_k = F_\Sigma, \quad (22.5)$$

причем в (22.5) обычно обозначают $H_k l_k = V_k$ и называют разностью магнитных потенциалов, или магнитным напряжением участка l_k цепи. Итак, вместо (22.5) и (22.2) имеем

$$\sum V_k = \sum i_k = F_\Sigma, \quad (22.6)$$

следовательно, согласно (22.6) алгебраическая сумма магнитных напряжений в некотором контуре МЦ равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, т. е. суммарной намагничивающей силе.

3. Считают, что векторы магнитной индукции \vec{B} и напряженности магнитного поля \vec{H} совпадают по направлению и их связь определяется ОКН (что, как указано в § 22.1, несправедливо как в отношении анизотропных материалов, так и — петли гистерезиса). Итак, вместо (22.3) записывают

$$B = \mu_a H, \quad (22.7)$$

причем в (22.7) абсолютную магнитную проницаемость рассчитывают по ОКН.

4. Вне МЦ магнитным потоком пренебрегают, т. е. считают нулевым в практических расчетах (поскольку у ферромагнитного материала $\mu_{\phi/m} \gg \mu_{\text{возд}}$ и магнитный поток в основном сосредоточен в МЦ; это напоминает пренебрежение потоками рассеяния при анализе свойств совершенного трансформатора в § 9.3).

С учетом этого допущения и (22.1) делают вывод, что магнитный поток на всех участках неразветвленной МЦ одинаков, а в разветвленной МЦ сумма магнитных потоков $\Phi_{k\text{вх}}$, «входящих» в место разветвления, равна сумме потоков $\Phi_{k\text{вых}}$, «выходящих» из него, т. е.

$$\sum \Phi_{k\text{вх}} = \sum \Phi_{k\text{вых}}, \quad (22.8)$$

причем форма (22.8) аналогична уравнениям ЗТК электрических цепей.

5. Указанные допущения касаются и расчета воздушных зазоров (участков МЦ), где, строго говоря, линии вектора \vec{B} не являются параллельными, как условно пунктиром показано на рисунке 22.3г. Однако в большинстве случаев зазоры в МЦ (см. рис. 22.1а,б) конструктивно очень малы; поэтому в них линии вектора \vec{B} считают практически параллельными, а площадь поперечного сечения МЦ в воздушном зазоре $S_{\text{в/з}}$ считают практически равной площади поперечного сечения «подходящего» к зазору участка МЦ из ферромагнитного материала $S_{\phi/\text{м}}$, т. е. $S_{\text{в/з}} \approx S_{\phi/\text{м}}$.

Примечание. Подавляющее число этих допущений используется при расчете МЦ, состоящих из магнитомягких материалов с узкой петлей гистерезиса и имеющих минимальные воздушные зазоры; в конкретных ситуациях (например, при расчете МЦ из магнитотвердых материалов или при наличии больших воздушных зазоров) используют только часть допущений.

22.2.2. Аналоги законов Кирхгофа при расчете магнитных цепей

Если указанные в п. 22.2.1 допущения приемлемы, то расчету МЦ можно сопоставить расчет электрических цепей. Наблюдается определенная математическая аналогия (подобие): току i_k электрической цепи сопоставляется поток Φ_k в магнитной цепи, напряжению u_k — магнитное напряжение V_k , источнику постоянного напряжения u_{0k} — намагничивающая (магнитодвижущая) сила обмотки с током $F_k = N_k i_k$.

Действительно, аналог первого закона Кирхгофа (22.8) для разветвления МЦ $\sum \Phi_{k\text{вх}} = \sum \Phi_{k\text{вых}}$ подобен по форме уравнению ЗТК $\sum i_{k\text{вх}} = \sum i_{k\text{вых}}$ для узла.

Аналог второго закона Кирхгофа (22.6) для любого контура МЦ $\sum V_k = \sum F_k$ подобен ЗНК $\sum u_k = \sum u_{0k}$ и формулируется следующим образом: в замкнутом контуре МЦ алгебраическая сумма магнитных напряжений равна алгебраической сумме намагничивающих сил, каждая из которых определяется как сумма токов (намотанных на МЦ катушек), охваченных этим контуром. Правила знаков: магнитное напряжение V_k «берут» со знаком «плюс», если обход контура соответствует направлению вектора \vec{H} ; намагничающую силу F_k учитывают со знаком «плюс», если обход контура соответствует правилу правого винта относительно заданного направления тока катушки i_k (или, что то же, направление тока соответствует правилу правого винта относительно обхода). Выбор условно положительного направления \vec{H} на участке МЦ, где отсутствует катушка с током, может быть произвольным. Рекомендуется направление \vec{H} согласовывать с током одной из катушек, а условно положительные направления V , Φ , \vec{B} , \vec{H} считать согласованным (кроме магнитотвердых материалов, у которых рабочие точки находятся во втором и четвертом квадрантах петли гистерезиса).

Составим аналог закона Ома для участка МЦ. У электрической цепи имеем $u_k = R_k i_k$, а у магнитной цепи

$$V_k = H_k l_k = \frac{B_k l_k}{\mu_{ak}} = \frac{\Phi_k l_k}{S_k \mu_{ak}};$$

следовательно, можно записать аналог закона Ома для МЦ

$$V_k = R_{mk} \Phi_k, \quad (22.9)$$

причем в (22.9) магнитное сопротивление

$$R_{mk} = \frac{l_k}{S_k \mu_{ak}} \quad (22.10)$$

будет пропорционально длине участка МЦ и обратно пропорционально площади сечения и абсолютной магнитной проницаемости. В (22.10) наблюдается аналогия с сопротивлением реального проводника, которое пропорционально его длине

и обратно пропорционально площади поперечного сечения и удельной электропроводности проводника.

Примечания:

1. Из-за нелинейности μ_a магнитное сопротивление (22.10) тоже нелинейно.
2. Поскольку $\mu_{\text{воз}} \approx \mu_0 \ll \mu_{\text{ф/m}}$, то в МЦ обычно $R_{\text{M.B/3}} > R_{\text{M.Ф/m}}$ т. е. магнитное сопротивление воздушных зазоров обычно является наибольшим в МЦ и линейным:

$$R_{\text{M.B/3}} = \frac{l_{\text{B/3}}}{S_{\text{B/3}} \mu_0}. \quad (22.11)$$

ВЫВОД: расчет МЦ при постоянных магнитных потоках подобен расчету нелинейных R -цепей, находящихся под действием источников постоянных напряжений.

§ 22.3. РАСЧЕТ ПРОСТЫХ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

22.3.1. Прямая задача расчета неразветвленной МЦ

Пусть дана МЦ (т. е. известны l_k , S_k , μ_{ak} всех ее участков) и требуемый магнитный поток Φ . Необходимо найти намагничающую силу и ток i в обмотке, который обеспечивает данный поток (предполагается, что число витков N обмотки известно).

Эта задача подобна задаче анализа последовательной электрической цепи, если заданы ток, вольт-амперные характеристики (ВАХ) всех резистивных нелинейных элементов (НЭ) и требуется найти напряжение источника. Очевидно, прямая задача анализа МЦ аналогична обратной задаче расчета электрической цепи.

В качестве примера неразветвленной МЦ рассмотрим рисунок 22.4а (электромагнитное реле), где l_k и S_k — длины и площади поперечных сечений участков МЦ, $l_{\text{B/3}}$ — величина воздушного зазора.

При решении прямой задачи можно обойтись без графического суммирования характеристик участков МЦ.

1. По заданному потоку Φ определяют индукцию на всех участках неразветвленной МЦ: $B_k = \Phi/S_k$.

2. По основной кривой намагничивания $B(H)$ определяют напряженность H_k каждого участка. Для воздушного зазора она будет $H_{\text{B/3}} = B_{\text{B/3}}/\mu_0$.

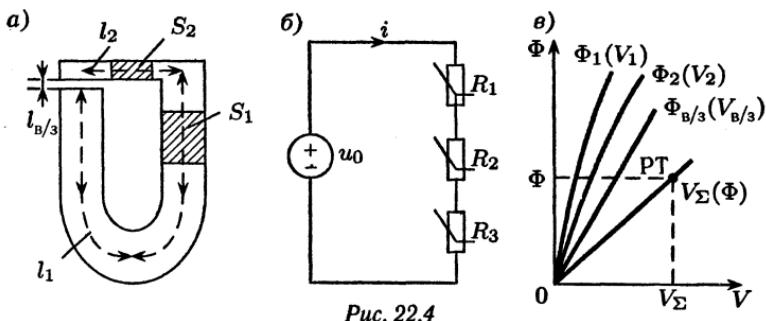


Рис. 22.4

3. Находят магнитное напряжение каждого участка: $V_k = H_k l_k$.

4. Находят намагничивающую силу обмотки с током: $F_\Sigma = \sum V_k$.

5. Определяют ток обмотки: $i = F_\Sigma / N$.

22.3.2. Обратная задача расчета неразветвленной МЦ

Даны параметры МЦ (l_k , S_k , μ_{ak}), ток i и число витков N обмотки. Требуется определить магнитный поток Φ (см. пример на рис. 22.4а).

Эта задача аналогична прямой задаче расчета электрической цепи: даны ВАХ нелинейных R -элементов, соединенных последовательно, и напряжение источника u_0 ; необходимо определить ток i (см. пример на рис. 22.4б). В такой задаче используется графический путь расчета.

1. По ОКН $B(H)$ пересчетом находят нелинейные характеристики $\Phi_k(V_k)$ каждого ферромагнитного участка МЦ

$$\Phi_k = B_k S_k, \quad V_k = H_k l_k.$$

Для воздушного зазора будет $\Phi_{B/3} = V_{B/3}/R_{M.B/3}$, причем на основании (22.11) определяют линейное магнитное сопротивление воздушного зазора $R_{M.B/3}$ (аналог линейного сопротивления R_3 на рисунке 22.4б), т. е. характеристика $\Phi_{B/3}(V_{B/3})$ является линейной.

Таким образом для примера МЦ из двух ферромагнитных участков и воздушного зазора (рис. 22.4а) получают систему характеристик $\Phi_k(V_k)$ каждого участка $\{\Phi_1(V_1), \Phi_2(V_2), \Phi_{B/3}(V_{B/3})\}$, как показано, например, на рисунке 22.4в.

2. Результирующую характеристику МЦ $V_\Sigma(\Phi)$, т. е. зависимость суммарного магнитного напряжения от потока, получают (см. рис. 22.4в) сложением значений V_k при одинаковых значениях Φ_k . Это подобно графическому сложению напряжений при одинаковых токах в последовательной цепи (рис. 22.4б).

3. По известному току определяют суммарную намагничивающую силу $F_\Sigma = Ni = V_\Sigma$, которая по второму закону Кирхгофа для МЦ должна быть равна суммарному магнитному напряжению V_Σ .

4. Зная V_Σ , находят рабочую точку (РТ на рисунке 22.4в) и общий поток Φ .

Примечание. При построении характеристик необходимо хотя бы ориентировочно знать, до каких значений Φ_{\max} следует их строить; если в МЦ имеется воздушный зазор, то его магнитное сопротивление $R_{m,в/з} = l_{в/з}/(S_{в/з}\mu_{a,в/з})$ обычно является наибольшим; следовательно, выполняется $\Phi_{\max} = F_\Sigma/R_{m,в/з} > \Phi$, так как последовательно с $R_{m,в/з}$ имеется $R_{m,ф/м}$.

ВЫВОД: расчет неразветвленных МЦ подобен расчету одноконтурной нелинейной R -цепи с источником постоянного напряжения (ИПН); в общем случае разветвленных МЦ их расчет абсолютно аналогичен расчету соответствующих разветвленных нелинейных R -цепей с ИПН.

§ 22.4. О РАСЧЕТЕ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ МАГНИТАМИ

Постоянные магниты широко используются для создания магнитного поля в разнообразных электротехнических устройствах: измерительных приборах, магнето, реле, микродвигателях постоянного тока. В каждом из таких устройств поток постоянного магнита проходит через воздушные зазоры.

Рассмотрим простейшую цепь с постоянным магнитом, показанную на рисунке 22.5а. Поскольку в такой МЦ нет обмотки с током, создающим намагничивающую силу, то по второму закону Кирхгофа для МЦ (так называемому «закону полного тока») имеем

$$0 = V_m + V_{в/з} = H_M l_m + H_{в/з} l_{в/з}.$$

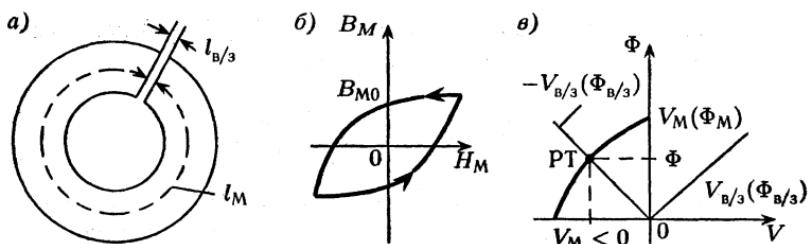


Рис. 22.5

Отсюда напряженность магнитного поля магнита будет

$$H_M = -H_{B/3} l_{B/3} / l_M < 0,$$

если принять $H_{B/3} > 0$.

В воздушном зазоре $\vec{B}_{B/3} = \mu_0 \vec{H}_{B/3}$, т. е. векторы \vec{B} и \vec{H} совпадают по направлению. Однако на основании (22.1) линии вектора магнитной индукции \vec{B} непрерывны и замкнуты, т. е. они сохраняют в «теле магнита» то же направление, что и в воздушном зазоре. Таким образом, в магните $B_M > 0$, $H_M < 0$, т. е. векторы \vec{B}_M и \vec{H}_M направлены в разные стороны.

Этот вывод очевиден, если учесть, что постоянные магниты изготавливают из магнитотвердых материалов с широкой петлей гистерезиса и приближенный расчет по ОКН здесь недопустим. Необходимо пользоваться двузначной петлей гистерезиса (рис. 22.5б), снятой при намагничивании материала (при изготовлении магнита).

При отсутствии воздушного зазора рабочей точкой магнита является B_{M0} . При наличии воздушного зазора $B_M > 0$, $H_M < 0$, чему соответствует второй квадрант петли гистерезиса на рисунке 22.5б — так называемая кривая размагничивания.

Произведем расчет МЦ, изображенной на рисунке 22.5а. Даны параметры МЦ (l_k , S_k и кривая размагничивания). Необходимо найти поток Φ .

Имеем последовательное соединение двух магнитных сопротивлений. Производим пересчет кривой размагничивания (рис. 22.5б) в область $V_M(\Phi_M)$. В результате масштабирования получаем $\Phi_M = S_M B_M$, $V_M = l_M H_M$ и кривую размагничивания $V_M(\Phi_M)$ изображаем на рисунке 22.5в.

Для воздушного зазора характеристика $V_{B/3}(\Phi_{B/3})$ как показано на рисунке 22.5в, является линейной:

$$V_{B/3} = R_{M,B/3} \Phi_{B/3} = \frac{l_{B/3}}{S_{B/3} \mu_0} \Phi_{B/3}.$$

Положение рабочей точки (РТ) на рисунке 22.5в определяется при последовательном соединении двух нелинейных элементов следующими уравнениями Кирхгофа для МЦ:

$$\Phi = \text{const} = \Phi_M = \Phi_{B/3},$$

$$V_M = -V_{B/3},$$

т. е. рабочую точку на рисунке 22.5в получают пересечением характеристик $\Phi_M(\Phi)$ и $-V_{B/3}(\Phi_{B/3})$. В результате находим искомые значения потока Φ и магнитного напряжения $V_M = -V_{B/3} < 0$.

ВЫВОДЫ:

1. При расчете МЦ с постоянными магнитами необходимо пользоваться не основной кривой намагничивания, а характеристикой с петлей гистерезиса.
2. В магните значения B_M и H_M имеют различные знаки, что соответствует второму или четвертому квадранту петли гистерезиса, т. е. кривым размагничивания.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И УРАВНЕНИЯ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 23.1. ФУНКЦИИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ЗАПИСИ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ

23.1.1. Понятие о макроскопической теории поля

Электромагнитное поле — это вид материи, элементарной частицей которого является фотон. Через электромагнитное поле осуществляется взаимодействие элементарных частиц, несущих электрический заряд. Носителями заряда являются, например, электрон, позитрон и ион. Поле входит в состав самих элементарных частиц. Точных границы между частицей и ее электромагнитным полем указать нельзя.

Макроскопическая теория поля оперирует физическими параметрами, усредненными по «физическому бесконечно малому объему». Но этот объем одновременно достаточно велик, чтобы содержать в себе «практически бесконечно большое» число элементарных частиц. Это позволяет считать как поле, так и заряд непрерывно распределенными в объеме тела (или области пространства), пренебречь их дискретной структурой.

Процессы, происходящие в различных устройствах электротехники, в своей основе фактически являются процессами возбуждения, распространения и преобразования электромагнитного поля, а также взаимодействия зарядов (токов) и поля. Поэтому при строгом анализе и проектировании таких объектов в качестве математической модели привлекаются уравнения макроскопической теории поля — уравнения Максвелла. Они являются обобщением экспериментальных фактов в области электромagnetизма.

При изучении теории поля целесообразно избрать дедуктивный путь от уравнений Максвелла, рассматриваемых как постулаты теории, к частным задачам. Мы ограничимся анализом электромагнит-

ных явлений в средах, неподвижных относительно наблюдателя. Теория поля в медленно движущихся средах приведена, например, в [20].

Примечание. Реальные схемы электрических и магнитных цепей — это сложные объекты, при описании которых в ТЦ вводят упрощения, например: а) независимость диссипативной (связанной с необратимым потреблением энергии), магнитной и электрической составляющих процесса (в ТЦ это сосредоточенность идеальных R --, L - и C -элементов); б) квазистационарность, которая выражается в неизменности мгновенного тока во всех сечениях проводника схемы и в отсутствии электромагнитного излучения. В результате удается использовать интегральные величины (напряжение, ток, мощность), не прибегая к рассмотрению поля и заменяя его уравнения более простыми уравнениями Кирхгофа. В цепях с распределенными параметрами (однородных линиях) предполагается квазистационарность поля в поперечном сечении; только тогда можно применить понятия погонных индуктивности и емкости и сформировать телеграфные уравнения [5].

23.1.2. Векторные функции поля

Электромагнитное поле описывается несколькими векторными функциями координат и времени.

На точечный заряд q , движущийся в электромагнитном поле со скоростью \vec{v} , действует сила

$$\vec{f} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}], \quad (23.1)$$

где $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$ — вектор напряженности электрического поля (единица измерения — В/м); $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$ — вектор магнитной индукции (единица измерения — Тл). В соответствии с (23.1) механические проявления поля обусловлены векторами \vec{E} и \vec{B} .

Кроме \vec{E} электрическая составляющая поля описывается вектором электрического смещения $\vec{D} = \vec{D}(x, y, z, t)$ с единицей измерения Кл/м², а магнитная составляющая поля — вектором напряженности магнитного поля $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t)$ с единицей измерения А/м.

Направленное движение электрических зарядов — электрический ток — характеризуется вектором плотности тока $\vec{J} = \vec{N} \lim(\Delta i / \Delta S)$ при $\Delta S \rightarrow 0$, где \vec{N} — вектор, направленный вдоль тока; Δi — ток, протекающий через площадку ΔS , перпендикулярную \vec{N} . Единица измерения — А/м².

В ряде задач используется представление о поверхностном токе, сосредоточенном в бесконечно тонком слое на поверхности S (рис. 23.1).

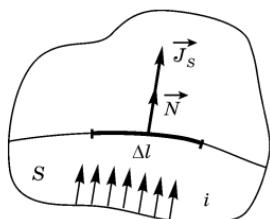


Рис. 23.1

Вектор плотности поверхностного тока

$$\vec{J}_s = \vec{N} \lim(\Delta i / \Delta l) \text{ при } \Delta l \rightarrow 0,$$

где Δi — ток, протекающий через отрезок Δl , перпендикулярный \vec{N} . Единица измерения — А/м.

23.1.3. Уравнения связи векторов поля

В вакууме связь векторов \vec{E}, \vec{D} электрического поля и векторов \vec{B}, \vec{H} магнитного поля определяется соотношениями:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

где электрическая постоянная $\epsilon_0 = (36\pi \cdot 10^9)^{-1} = 8,854 \cdot 10^{-12} \Phi/\text{м}$; магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$.

В материальных средах взаимосвязь \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} , \vec{J} и \vec{E} зависит от электрофизических свойств сред и описывается функциональными соотношениями:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \quad \vec{J} = \vec{J}(\vec{E}). \quad (23.2)$$

Примечание. Смещение $\vec{D}(x, y, z, t)$ вполне определяется напряженностью $\vec{E}(x, y, z, t)$. То же самое можно сказать о \vec{B} и \vec{H} . Таким образом, среды с самопроизвольной поляризацией (сегнетоэлектрики) и намагниченностью (ферромагнетики) исключаются из рассмотрения. В этих средах зависимости $\vec{D}(\vec{E})$ и $\vec{B}(\vec{H})$ являются неоднозначными (гистерезис).

Введем допущения, позволяющие перейти от (23.2) к уравнениям связи для достаточно широкого класса сред:

1. Пусть среда — *изотропная*, т. е. в любой точке ее физические свойства одинаковы по всем направлениям. Тогда \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} , \vec{J} и \vec{E} параллельны.

2. Пусть среда — *линейная*, т. е. пары векторов поля связаны постоянными скалярными множителями.

Теперь (23.2) можно записать в виде:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}, \quad (23.3)$$

где ϵ — абсолютная диэлектрическая проницаемость ($\Phi/\text{м}$); μ — абсолютная магнитная проницаемость (Гн/м); γ — удельная про-

водимость (См/м). Наряду с абсолютными проницаемостями вводят безразмерные относительные проницаемости: $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ и $\mu_r = \mu/\mu_0$.

Уравнения связи (23.3) называют также «материальными уравнениями». Входящие в них макроскопические параметры ϵ , μ , γ определяются в результате измерений.

Примечания:

1. Среда, в которой свойства зависят от направления, называется анизотропной. В случае диэлектрической анизотропии получают разные \vec{D} при различной ориентации \vec{E} , причем эти векторы могут не быть параллельными. Здесь (в отличие от изотропных сред, где $D_x = \epsilon E_x$, $D_y = \epsilon E_y$, $D_z = \epsilon E_z$) любая составляющая \vec{D} записывается в виде линейной комбинации трех составляющих \vec{E} ; например $D_x = \epsilon_{11}E_x + \epsilon_{12}E_y + \epsilon_{13}E_z$. Уравнение связи $\vec{D} = (\epsilon)\vec{E}$, раскрывается при этом по правилам умножения матриц. Девять элементов ϵ_{ik} (где $i, k = 1, 2, 3$) образуют тензор диэлектрической проницаемости.
2. Все реальные среды нелинейны. Но обычно нелинейность проявляется в очень сильных полях (за исключением сегнетоэлектриков и ферромагнетиков).

23.1.4. Векторы поляризации и намагниченности

Для описания электромагнитного состояния среды вводятся еще две векторные функции. Допустим, что поле \vec{E} создано в вакууме; тогда смещение $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}$. В том же поле \vec{E} в материальной среде смещение $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. Определим вектор поляризации как разность:

$$\vec{P} = \vec{D} - \vec{D}_0 = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}. \quad (23.4)$$

Подобным же образом определим вектор намагниченности:

$$\vec{M} = \vec{B} - \vec{B}_0 = (\mu - \mu_0) \vec{H}, \quad (23.5)$$

где \vec{B} и \vec{B}_0 — магнитные индукции при напряженности \vec{H} в среде и в вакууме.

Соотношения (23.4) и (23.5) можно переписать в виде:

$$\vec{P} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \chi^e \vec{E}, \quad \vec{M} = (\mu_r - 1) \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \chi^m \vec{H},$$

причем безразмерные коэффициенты $\chi^e = (\epsilon_r - 1)$ и $\chi^m = (\mu_r - 1)$ называют электрической и магнитной восприимчивостью. Если $\chi^e > 0$, то χ^m может быть положительной (парамагнетики) и отрицательной (диамагнетики). Однако она настолько мала, что относительную магнитную проницаемость веществ (кроме ферромагнетиков) полагают равной единице.

Из (23.4) и (23.5) следуют уравнения, связывающие тройки векторов электрической и магнитной составляющих поля:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}, \quad (23.6)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} = \mu \vec{H}. \quad (23.7)$$

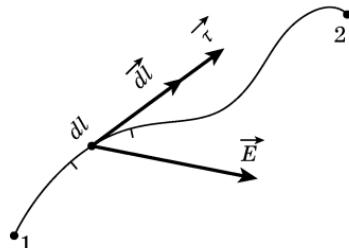
23.1.5. Скалярные функции поля

Наряду с векторными функциями при описании поля используются скалярные функции.

1. *Напряжение* — линейный интеграл вектора напряженности электрического поля \vec{E} вдоль заданного пути между двумя точками. На рис. 23.2а dl — элемент длины; $\vec{\tau}$ — единичная касательная; $d\vec{l} = dl\vec{\tau}$ — векторный элемент длины. Тогда напряжение между точками 1 и 2:

$$u_{12} = \int_1^2 E \cos(\hat{\vec{E}} d\vec{l}) dl = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

а)



б)

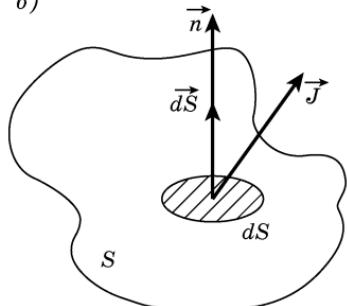


Рис. 23.2

2. *Ток* — поток вектора плотности тока \vec{J} через поверхность S . На рис. 23.2б заштрихованный участок — элемент поверхности dS ; \vec{n} — единичная нормаль; $d\vec{S} = dS\vec{n}$ — векторный элемент поверхности. Элементарный поток вектора \vec{J} через dS определяется его нормальной составляющей

$$di = J \cos(\hat{\vec{J}} \vec{n}) dS = \vec{J} d\vec{S}.$$

Тогда ток, проходящий через S

$$i = \int_S \vec{J} d\vec{S}.$$

3. *Магнитный поток* — поток вектора магнитной индукции \vec{B} через поверхность S :

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

4. *Объемная плотность заряда* $\rho = \lim(\Delta q / \Delta V)$ при $\Delta V \rightarrow 0$, где Δq — заряд в объеме ΔV . Единица измерения — Кл/ m^3 . Тогда заряд, заключенный в объеме V , равен:

$$q = \int_V \rho dV.$$

5. *Поверхностная плотность заряда* $\sigma = \lim(\Delta q / \Delta S)$ при $\Delta S \rightarrow 0$, где Δq — заряд на участке поверхности ΔS . Единица измерения — Кл/ m^2 . Тогда заряд, находящийся на поверхности S ,

$$q = \int_S \sigma dS.$$

Примечание. Предполагается, что поверхностные заряд и ток сосредоточены в бесконечно тонком слое. Такая модель «нулевой толщины» используется, если не проводится анализ поля внутри реального тонкого слоя.

23.1.6. Электромагнитное поле — векторное поле

В каждой точке материальной среды можно построить векторы $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{J}$, т. е. заменить реальное электромагнитное поле математическим объектом — *векторным полем*. К векторным функциям координат и времени применяются операции векторного анализа, который является, таким образом, математической базой макроскопической теории.

Векторное поле имеет наглядное графическое описание. Например, в поле \vec{E} можно провести *векторную линию*, в каждой точке которой вектор \vec{E} направлен по касательной (рис. 23.3). Линия может иметь начало и конец, уходить в бесконечность, быть замкнутой.

Получим дифференциальные уравнения векторной линии. Векторный элемент длины $d\vec{l}$ подобно \vec{E} направлен по касательной. В декартовой системе координат (с единичными ортами $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$)

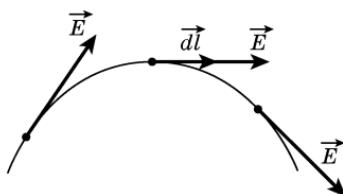


Рис. 23.3

имеем $d\vec{l} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$, а $\vec{E}_x = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z$. Векторы $d\vec{l}$ и \vec{E} параллельны при условии:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}, \quad (23.8)$$

которое эквивалентно дифференциальным уравнениям:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{E_x}{E_y}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{E_x}{E_z}. \quad (23.9)$$

Различают два основных вида векторных полей. Поле вектора \vec{F} называется *потенциальным*, если во всех точках $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Линии поля имеют начало (истоки) и конец (стоки) в тех точках, где $\operatorname{div} \vec{F} \neq 0$. Поле вектора \vec{F} называется *вихревым (соленоидальным)*, если всюду $\operatorname{div} \vec{F} = 0$. Подобно тому, как потенциальное поле определяется заданием дивергенции как функции координат, так вихревое поле полностью определяется заданием ротора поля как функции координат. Примером первого вида являются электростатическое поле \vec{E} и электрическое поле постоянного тока, второго — магнитное поле \vec{B} и возникающее при изменении \vec{B} во времени вихревое электрическое поле.

Примечание. Векторное поле называется лапласовым, если в любой его точке выполняются равенства $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, $\operatorname{div} \vec{F} = 0$. Таким образом, лапласово поле является одновременно и потенциальным, и соленоидальным.

ПРИМЕР 1. Электрическое поле задано составляющими:

1) $E_{1x} = Ay$, $E_{1y} = Ax$, $E_{1z} = 0$; 2) $E_{2x} = -Ay$, $E_{2y} = Ax$, $E_{2z} = 0$. Найти уравнения векторных линий.

В соответствии с (23.9) в первом случае:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{E_{1x}}{E_{1y}} = \frac{y}{x},$$

откуда следует

$$xdx - ydy = 0, x^2 - y^2 = C^2, y = \pm\sqrt{x^2 - C^2}$$

(C — константа). Это — уравнение гиперболы (рис. 23.4a). Во втором случае получаем $x^2 + y^2 = C^2$ — уравнение окружности (рис. 23.4б).

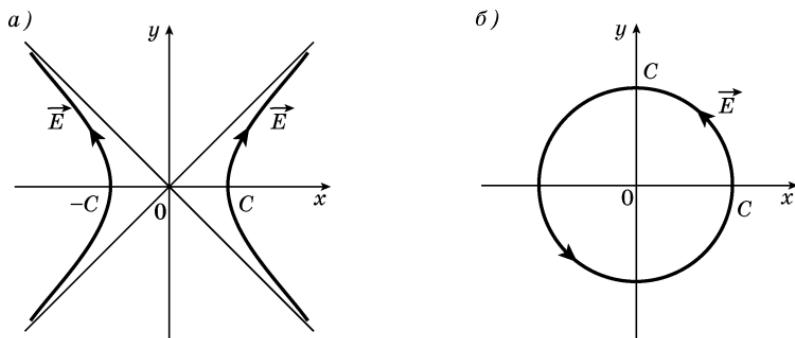


Рис. 23.4

Поле \vec{E}_1 является потенциальным:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}_1 = & (\partial E_{1z} / \partial y - \partial E_{1y} / \partial z) \vec{e}_x + (\partial E_{1x} / \partial z - \partial E_{1z} / \partial x) \vec{e}_y + \\ & + (\partial E_{1y} / \partial x - \partial E_{1x} / \partial y) \vec{e}_z = (A - A) \vec{e}_z = 0. \end{aligned}$$

Поле \vec{E}_2 — вихревое:

$$\operatorname{rot} \vec{E}_2 = (A + A) \vec{e}_z = 2A \vec{e}_z.$$

§ 23.2. ПЕРВОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА

23.2.1. Дифференциальная форма первого уравнения. Ток смещения

Первое уравнение Максвелла выражает один из фундаментальных законов электромагнетизма — **закон полного тока**. Уравнение в дифференциальной форме является векторным уравнением с частными производными, которое связывает вектор \vec{H} и вектор плотности полного тока \vec{J}^n в каждой точке поля:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}^n. \quad (23.10)$$

Магнитное поле — поле вихревое. Вихри поля расположены в областях поля, обтекаемых током.

Уравнение (23.10) не зависит от выбора системы координат и эквивалентно трем скалярным уравнениям для составляющих \vec{H} и \vec{J}^n . Спроектировав (23.10) на оси декартовой системы координат, получим:

$$\operatorname{rot}_x \vec{H} = J_x^n, \quad \operatorname{rot}_y \vec{H} = J_y^n, \quad \operatorname{rot}_z \vec{H} = J_z^n$$

и далее — первое уравнение в координатной форме:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x^n, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y^n, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z^n.$$

В большинстве изучаемых электромагнитных явлений полный ток представляется в виде *суммы токов проводимости и смещения*. Под действием \vec{E} в несовершенных диэлектриках, полупроводниках и металлах устанавливается упорядоченное движение зарядов — ток проводимости, вектор плотности которого в соответствии с (23.3) $\vec{J} = \gamma \vec{E}$. Это уравнение, имеющее локальный характер, связывает векторные функции в каждой точке поля и называется *законом Ома в дифференциальной форме*.

Вектор плотности тока смещения

$$\vec{J}^{\text{cm}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (23.11)$$

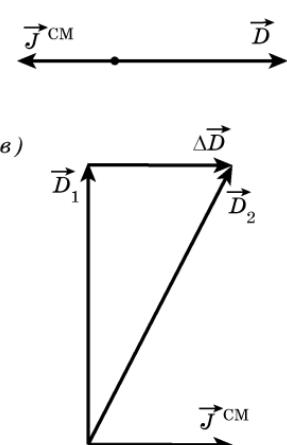


Рис. 23.5

определяется скоростью изменения электрического смещения во времени; это — характеристика переменного электромагнитного поля.

Если \vec{D} не изменяет направления и возрастает, то \vec{J}^{cm} по направлению совпадает с \vec{D} (рис. 23.5а). При уменьшении \vec{D} ток направлен противоположно (рис. 23.5б). Если \vec{D} изменяет направление, переходя от \vec{D}_1 к $\vec{D}_2 = \vec{D}_1 + \Delta \vec{D}$ за время Δt , то \vec{J}^{cm} направлен вдоль приращения $\Delta \vec{D}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ (рис. 23.5в).

Перепишем теперь первое уравнение поля (23.10) в виде:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}^n = \vec{J} + \vec{J}^{\text{cm}} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (23.12)$$

Физическое содержание уравнения: токи проводимости и токи смещения сопровождаются магнитным полем; их роли в образовании поля равнозначны. Направления \vec{H} и \vec{J} (при $\vec{J}^{\text{cm}} = 0$) и \vec{H} и \vec{J}^{cm} (при $\vec{J} = 0$) образуют правовинтовую систему (рис. 23.6).

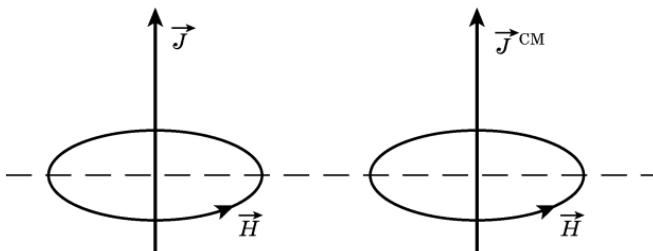


Рис. 23.6

Примечания:

- Если в области наблюдения есть ток переноса (движение зарядов со скоростью \vec{v} в свободном пространстве), в правую часть (23.12) записывается его плотность $\rho\vec{v}$.
- При исследовании поля в движущихся средах в полный ток включается слагаемое $\operatorname{rot}[\vec{D}\vec{v}]$, где \vec{v} — скорость движения среды.
- В ТЦ аналогом уравнения $\vec{J} = \gamma\vec{E}$ является ВАХ резистора $i = GU$.
- Гипотеза Максвелла о токе смещения имела фундаментальное значение в развитии теории поля. Ход рассуждений [17] поясняется рис. 23.7, где изображен конденсатор в цепи переменного тока. Провода окружены замкнутыми линиями магнитного поля \vec{H} , образующими вокруг проводов «магнитную оболочку», которая заканчивается у пластин конденсатора. Максвелл высказал утверждение, что оболочка не прерывается: переменное электрическое поле \vec{E} конденсатора также окружено магнитными линиями. Это поле получило название тока, так как обладает его главным признаком — магнитным полем.

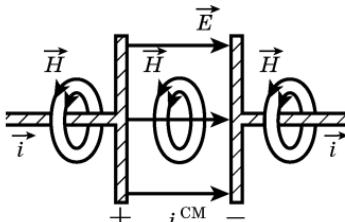


Рис. 23.7

Применяя операцию дивергенции к левой и правой частям уравнения (23.10), получим $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{J}^n$. В соответствии с тождеством векторного анализа $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$ и, следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{J}^n = 0. \quad (23.13)$$

Равенство дивергенции нулю означает, что векторные линии полного тока всегда замкнуты (это — принцип непрерывности полного тока).

Из уравнения (23.13) следует, что $\operatorname{div} \vec{J}^{\text{cm}} = -\operatorname{div} \vec{J}$: ток смещения начинается там ($\operatorname{div} \vec{J}^{\text{cm}} > 0$), где обрывается ток проводимости ($\operatorname{div} \vec{J} < 0$), и заканчивается там, где начинается ток проводимости (см. рис. 23.7). Это не исключает совместного существования обоих токов при обрыве части тока проводимости, если диэлектрик конденсатора обладает сквозной проводимостью.

Для выяснения физической сущности тока смещения подставим (23.6) в (23.11):

$$\vec{J}^{\text{cm}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Ток смещения состоит из двух компонент. Так как вектор поляризации \vec{P} характеризует процессы смещения связанных зарядов микросистем (атомов, молекул) под действием электрического поля, вторая компонента — это электрический ток поляризации. Первая компонента — ток смещения в вакууме, не связанный с движением зарядов. Поскольку не существует наглядной модели, этот ток называют «чистым» током смещения или «движущимся электрическим полем» [20].

23.2.2. Интегральная форма первого уравнения

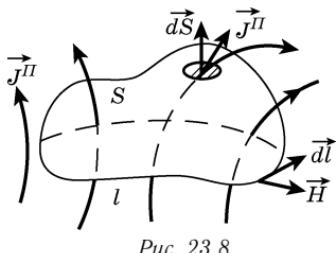


Рис. 23.8

Для получения интегральной формы уравнения (23.10) построим поверхность S , опирающуюся на контур l (рис. 23.8). Переайдем к потокам векторов через S :

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{J}^n d\vec{S}.$$

Интеграл в левой части равенства можно по теореме Стокса заменить циркуляцией вектора \vec{H} по контуру l . Интеграл в правой части выражает ток через поверхность S . Таким образом, получаем первое уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \vec{J}^{\text{cm}}) d\vec{S} = i_S. \quad (23.14)$$

Согласно (23.14) циркуляция вектора \vec{H} по произвольному контуру l равна полному току i_s , который охватывается контуром (проходит через S).

Примечание. Поверхность, «натянутая» на контур, может быть произвольной. В случае плоского контура используется самое простое представление: S — площадь контура.

При заданных токах (23.14) является интегральным уравнением относительно \vec{H} . В общем случае его нельзя применить для расчета поля. Например, в системе проводников с постоянными токами i_1, i_2, i_3 (рис. 23.9) можно записать соотношения:

$$\oint_{l_1} \vec{H} d\vec{l} = i_1, \quad \oint_{l_2} \vec{H} d\vec{l} = i_2 - i_3, \\ \oint_{l_3} \vec{H} d\vec{l} = 0,$$

но найти распределение $\vec{H}(x, y, z)$ нельзя.

Только в ограниченном числе симметричных задач, когда структура магнитного поля заранее известна, используется, например, такой прием. Выбираем «правильный» контур, совпадающий с векторной линией \vec{H} , так что угол между \vec{H} и $d\vec{l}$ равен нулю; тогда $\vec{H} \cdot d\vec{l} = H dl$. Если модуль H одинаков во всех точках контура, интегральное уравнение (23.14) становится простым алгебраическим уравнением:

$$H \cdot l = i_s. \quad (23.15)$$

При известном i_s можно найти H в точках контура. В уравнение (23.15) входят модули H и i_s .

Существуют задачи, где на «правильном» контуре выполняются и другие условия; например, на отдельных участках контура \vec{H} и $d\vec{l}$ перпендикулярны ($\vec{H} d\vec{l} = 0$) или $\vec{H} = 0$.

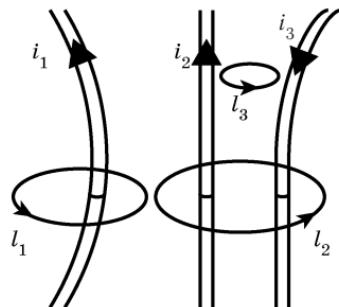


Рис. 23.9

ПРИМЕР 2. Плоский конденсатор образован круглыми пластинами радиуса r_0 , расположенными на расстоянии h (рис. 23.10). Заполнение — идеальный однородный диэлектрик: проницаемость ϵ , удельная проводимость $\gamma = 0$. Найти

электромагнитное поле в конденсаторе при разряде через резистор. Краевым эффектом можно пренебречь, приняв $r_0 \gg h$.

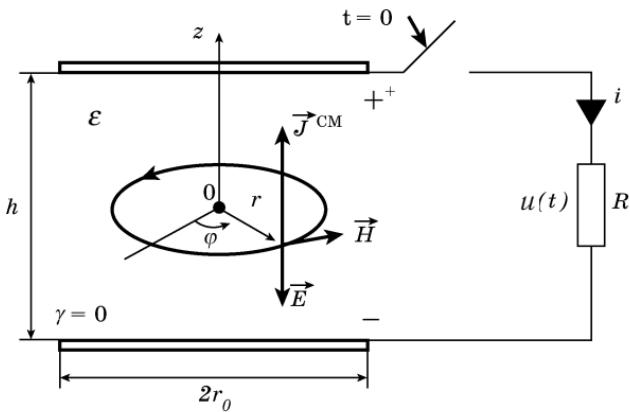


Рис. 23.10

Запишем известный закон изменения напряжения конденсатора в виде $u(t) = U_0 e^{-t/\tau}$. Для решения зададим цилиндрическую систему координат.

Электрическое поле, связанное с зарядами на пластинах, предполагаем однородным; вектор \vec{E} в любой точке диэлектрика имеет только одну составляющую

$$E_z = -\frac{U}{h} = -\frac{U_0}{h} e^{-t/\tau}.$$

Плотность тока смещения согласно (23.11):

$$J_z^{\text{cm}} = \frac{\partial D_z}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\epsilon U_0}{h \tau} e^{-t/\tau}.$$

Ток проводимости в диэлектрике отсутствует: $\vec{J} = \gamma \vec{E} = 0$.

Ток смещения обрывается на верхней пластине. Далее через резистор следует ток проводимости.

Для определения магнитного поля вначале используем уравнение в дифференциальной форме (23.10):

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}^n = \vec{J}^{\text{cm}},$$

которое эквивалентно трем скалярным уравнениям. Но в силу осевой симметрии поля напряженность имеет только

составляющую H_φ ; $H_r = H_z = 0$. Остается одно уравнение:

$$\operatorname{rot}_z \vec{H} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right] = J_z^{\text{cm}}.$$

Отсюда приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r H_\varphi) = J_z^{\text{cm}},$$

решение которого содержит постоянную интегрирования A :

$$H_\varphi = \frac{J_z^{\text{cm}} r}{2} + \frac{A}{r}.$$

Из физических соображений $A = 0$, поскольку иначе при $r \rightarrow 0$ на оси конденсатора $H_\varphi \rightarrow \infty$. Окончательно получаем функцию координат и времени:

$$H_\varphi(r, t) = \frac{J_z^{\text{cm}} r}{2} = \frac{\epsilon U_0}{2h\tau} r e^{-t/\tau}.$$

Магнитное поле в конденсаторе неоднородное; оно отсутствует на оси и максимально на боковой поверхности при $r = r_0$.

Для расчета магнитного поля вторым способом с использованием интегрального уравнения достаточно выбрать контур — окружность радиуса r , так что $l = 2\pi r$. При этом в силу однородности поля вектора \vec{J}^{cm} ток $i_s = J^{\text{cm}} \pi r^2$ и из (23.15) следует $H = J^{\text{cm}} r / 2$.

Примечание. При использовании методов теории цепей в реальных объектах нужно контролировать выполнение условия квазистационарности. Выражение для $u(t)$ справедливо при «достаточно медленном» переходном процессе. Тогда в каждый момент времени поле \vec{E} однородно. Критерий медленного процесса можно получить спектральным методом. Спектральная функция напряжения $U(j\omega) = U_0 \tau / (1 + j\omega\tau)$; амплитудный спектр

$$A(\omega) = U_0 \tau / \left(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right);$$

максимальная частота (ширина) спектра по «десятипроцентному критерию» из условия $A(\omega_{\text{cn}}) = 0,1 U_0 \tau$ составляет $\omega_{\text{cn}} \approx 10/\tau$. Этой элементарной гармонике соответствует минимальная длина волны $\lambda = 2\pi v / \omega_{\text{cn}}$, где скорость волны $v = 3 \cdot 10^8 / \sqrt{\epsilon_r}$; отсюда при $\epsilon_r = 4$ следует $l \gg 10^8 \tau$. Далее условие квазистационарности $\lambda \gg r_0$ приводит к критерию $\tau \gg 10^{-8} r_0$. При $r_0 = 1$ см постоянная времени $\tau \gg 10^{-10}$ с.

§ 23.3. ВТОРОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

23.3.1. Дифференциальная форма второго уравнения

Второе уравнение, выражающее закон электромагнитной индукции, в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (23.16)$$

связывает в каждой точке скорость изменения магнитного поля во времени (правая часть) с пространственными производными составляющих электрического поля (левая часть).

Физическое содержание уравнения: переменное во времени магнитное поле сопровождается электрическим полем. Это поле — вихревое; его векторные линии замкнуты. Знак «минус» указывает на то, что направления \vec{E} и $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ образуют левовинтовую систему (рис. 23.11).

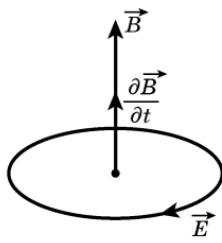
Если вектор \vec{B} не изменяет направления, линии электрического поля — окружности. Направление \vec{E} при увеличении \vec{B} указано на рис. 23.11а, а при уменьшении — на рис. 23.11б.

Второе уравнение поля (23.16) по форме аналогично первому уравнению (23.12) при $\vec{J} = 0$: производная $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ выступает в роли «магнитного тока смещения».

Примечания:

1. Явление электромагнитной индукции приводит нас к заключению: электрическое поле может возбуждаться не только электрическими зарядами (потенциальное кулоново поле), но и изменениями магнитного поля (вихревое поле).

а)



б)

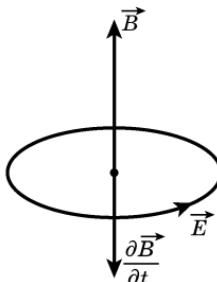


Рис. 23.11

2. Если изменение магнитного поля связано не только со временем, но и с движением среды (наблюдателя) со скоростью \vec{v} , то в правую часть (24.16) нужно добавить слагаемое $\text{rot}[\vec{v}\vec{B}]$. В постоянном магнитном поле ($\partial\vec{B}/\partial t = 0$) вихревое поле $\vec{E} = [\vec{v}\vec{B}]$.

23.3.2. Интегральная форма второго уравнения

Для получения интегральной формы второго уравнения проведем построения подобно тому, как это делалось при рассмотрении первого уравнения: на рис. 23.8 заменим \vec{J}^n на $-\partial\vec{B}/\partial t$, \vec{H} на \vec{E} ; вычислим потоки векторов через S в левой и правой частях уравнения (23.16) и, применяя теорему Стокса, запишем

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (23.17)$$

В (23.17) оператор $\partial/\partial t$ вынесен за знак интеграла, так как поверхность и контур неподвижны.

Окончательно получаем второе уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi_S}{\partial t}. \quad (23.18)$$

Согласно (23.18) циркуляция вектора \vec{E} по произвольному контуру l равна взятой с обратным знаком скорости изменения во времени магнитного потока Φ_S через любую поверхность, опирающуюся на контур.

В случае плоского контура в качестве S удобно выбрать часть плоскости, ограниченную контуром (рис. 23.12a). Отметим, что магнитное поле может быть локализовано на площадке S_0 ; в точках самого контура $\vec{B} = 0$ (рис. 23.12б).

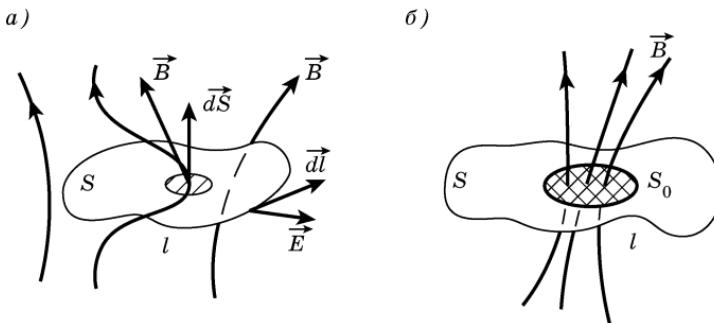


Рис. 23.12

В уравнении Максвелла l — это математический контур, проведенный в любой материальной среде. Если же взять проволочный (проводящий) контур, то (23.18) можно записать в виде

$$e = -\frac{\partial \Phi_S}{\partial t}, \quad (23.19)$$

где e — электродвижущая сила (ЭДС), возникающая в контуре при изменении магнитного потока. Она может быть зарегистрирована и, таким образом, проволочный контур является просто индикатором реального вихревого поля. Частная формулировка (23.19) выражает закон Фарадея, а уравнение Максвелла (23.18) — обобщенный закон электромагнитной индукции.

При заданном поле \vec{B} (23.18) является интегральным уравнением относительно \vec{E} . Его можно применить для расчета в симметричных задачах, выбирая «правильный» контур (см. 23.2.2).

ПРИМЕР 3. Цилиндрическая катушка (соленоид) с однослоиной обмоткой имеет радиус r_0 и длину h (рис. 23.13а). Число витков на единицу длины n ; магнитная проницаемость материала сердечника μ , а удельная проводимость $\gamma = 0$. Найти электромагнитное поле в катушке и в окружающей ее воздушной среде, если ток катушки $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$. При расчете принять $h \gg r_0$ (эталонный соленоид).

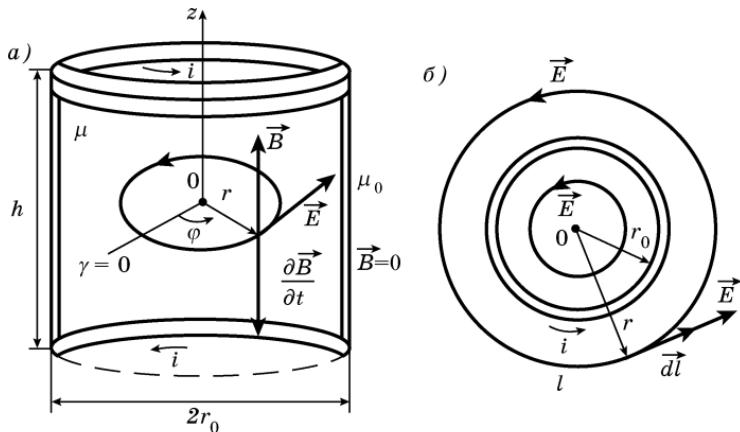


Рис. 23.13

Магнитное поле внутри эталонного соленоида является однородным и направлено вдоль оси. Вне соленоида можно считать поле пренебрежимо малым ($\vec{B} = 0$). Тогда по закону полного тока (23.14) единственная составляющая индукции $B_z = \mu H_z = \mu n i = \mu n I_0 e^{-t/\tau}$.

Для определения вихревого электрического поля внутри катушки ($r < r_0$) используем уравнение в дифференциальной форме (23.16): $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Рассуждения, аналогичные приведенным в примере 2, приводят к результату:

$$E_\phi(r, t) = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \cdot \frac{r}{2} = \frac{\mu n I_0}{2\tau} r e^{-t/\tau}.$$

Производная $\frac{\partial B_z}{\partial t}$ («магнитный ток смещения») выступает в роли электрического тока смещения J_{cmz} . Вектор поля имеет единственную составляющую E_ϕ ; линии поля — окружности; модуль E линейно растет вдоль r ; на оси $E(0, t) = 0$.

Для определения электрического поля вне катушки ($r > r_0$) используем уравнение в интегральной форме (23.18). Выберем «правильный» контур, совпадающий с векторной линией радиуса r (рис. 23.13б). Тогда (23.18) становится алгебраическим уравнением $E \cdot 2\pi r = \frac{\partial \Phi_S}{\partial t}$, куда входят модули E и Φ_S .

Магнитный поток $\Phi_S = B\pi r_0^2$ сосредоточен в сечении катушки (вне ее $\vec{B} = 0$). Следовательно, при $r > r_0$

$$E(r, t) = \frac{1}{2\pi r} \cdot \pi r_0^2 \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_0 n I_0 r_0^2}{2r\tau} e^{-t/\tau}.$$

Вне катушки E убывает как $1/r$. При $r = r_0$ значения E внутреннего и внешнего полей совпадают.

Примечания:

- Предполагается, что магнитное и электрическое поля изменяются «достаточно медленно» (квазистационарность). Тогда можно пренебречь токами смещения и магнитным полем, которое, в свою очередь, сопровождает эти токи. Токов проводимости в сердечнике нет ($\vec{J} = \gamma \vec{E} = 0$).
- Во внешней среде поле \vec{B} отлично от нуля, поскольку магнитные линии должны быть замкнуты. Однако оно значительно слабее внутреннего.
- В вихревом электрическом поле напряжение $u_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ зависит от пути интегрирования. Если в поле находится проволочный проводник (индикатор поля), между его концами существует «наведенное» напряжение,

которое определяется геометрией и расположением проводника. Оно равно нулю, когда во всех точках вектор \vec{E} перпендикулярен векторному элементу длины dl : например, прямой проводник направлен радиально или параллелен оси катушки.

В электростатическом поле напряжение (разность потенциалов) не зависит от пути интегрирования и определяется однозначно (см. 24.2.1).

§ 23.4. ТРЕТЬЕ И ЧЕТВЕРТОЕ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

23.4.1. Дифференциальная форма третьего уравнения

Третье уравнение выражает теорему Гаусса [8]. Доказанная лишь для электростатического поля, она по утверждению Максвелла остается справедливой и в случае переменных полей. Такая обобщенная теорема Гаусса называется также *постулатом Максвелла*.

Третье уравнение в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (23.20)$$

связывает в каждой точке поля вектор смещения \vec{D} и объемную плотность ρ свободного заряда. В координатной форме уравнение имеет вид

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho.$$

Физическое содержание уравнения (23.20) вытекает из самого понятия дивергенции («расхождения»). Те точки, где находится положительный свободный заряд ($\rho > 0$), являются «истоками» поля; здесь начинаются векторные линии \vec{D} . Отрицательные свободные заряды ($\rho < 0$) — это «стоки» линий \vec{D} (рис. 23.14a, б). Если в некоторой области (показанной штриховой линией) $\rho = 0$, то линии \vec{D} проходят сквозь нее либо являются замкнутыми (рис. 23.14в, г).

Термин «свободный» заряд используется, когда говорят: 1) о зарядах (заряженных телах) в пустоте; 2) о зарядах, «внесенных

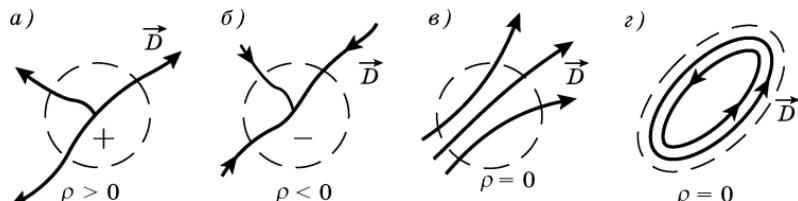


Рис. 23.14.

ных» в материальную среду и нарушающих ее нейтральность; 3) о зарядах, способных перемещаться на макроскопические расстояния, например, под действием поля («свободные электроны» в металлах).

Вещественные тела электрически нейтральны и не создают макроскопически наблюдаемого поля. Однако под действием внешнего (приложенного) поля происходит поляризация среды. Заряды внутри микросистем (атомов, молекул, ионов) смещаются на *макроскопические* расстояния в пределах систем. При этом в объеме и на поверхности тел появляются *макроскопические* области, занятые «связанными» зарядами, объемная плотность которых $\rho_{\text{св}}$, а поверхностная — $\sigma_{\text{св}}$. Естественно, что при выключении поля связанные заряды «исчезают».

Если V — объем среды, а V_m — объем микросистем, то установлено, что $V_m/V \gg 10^{-15}$. Подавляющую часть объема занимает вакуум. Поэтому в качестве модели поляризованной среды можно принять систему связанных зарядов в вакууме. При учете свободных и связанных зарядов вместо (23.20) можно записать, приняв $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$:

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho + \rho_{\text{св}}. \quad (23.21)$$

Истоками (стоками) поля вектора \vec{E} являются как свободные, так и связанные заряды.

Получим еще одно соотношение, объединяющее две характеристики поляризованной среды: вектор поляризации и связанные заряды. Вычитая уравнение (23.21) из уравнения (23.20), получим $\operatorname{div}(\vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}) = -\rho_{\text{св}}$. Отсюда с учетом (23.6) следует

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{\text{св}}. \quad (23.22)$$

Истоки поля вектора \vec{P} находятся в местах расположения отрицательных связанных зарядов.

Примечание. Подчеркнем, что поле \vec{E} имеет две составляющие; одна из них связана с зарядами, другая с переменным магнитным полем (см. 23.3).

23.4.2. Интегральная форма третьего уравнения

Построим в поле замкнутую поверхность S , ограничивающую некоторый объем V . В общем случае в объеме находится произвольно распределенный заряд, так что в каждой точке выполняется

(23.26). Для получения интегральной формы уравнения проинтегрируем его левую и правую части по объему V :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Интеграл в левой части равенства можно по теореме Остроградского заменить потоком вектора \vec{D} через поверхность S . Интеграл в правой части дает свободный заряд внутри V . Таким образом получаем третье уравнение (постулат) Максвелла в интегральной форме

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q. \quad (23.23)$$

Согласно (23.23) поток вектора смещения \vec{D} через произвольную замкнутую поверхность S равен находящемуся внутри нее свободному заряду q . Характер распределения заряда не имеет значения; наряду с объемными внутри поверхности могут находиться точечные и поверхностные заряды; полный заряд может быть равен нулю.

Интегральные формы уравнений (23.21) и (23.22) содержат полные связанные заряды, находящиеся внутри S :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q_{cb}); \quad \oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q_{cb}. \quad (23.24)$$

При заданных зарядах (23.23) является интегральным уравнением относительно \vec{D} . В общем случае оно говорит лишь о потоке смещения. Однако в некоторых задачах с известной структурой поля удается подобрать поверхность, на которой удовлетворяются два условия: 1) угол между \vec{D} и $d\vec{S}$ равен нулю; тогда $\vec{D} d\vec{S} = D dS$; 2) модуль D неизменен. В этом случае интегральное уравнение становится простым алгебраическим соотношением

$$DS = q. \quad (23.25)$$

Существуют задачи, где на поверхности S выполняются и другие условия; например, на некоторых участках \vec{D} и $d\vec{S}$ перпендикулярны ($\vec{D} d\vec{S} = 0$) или $\vec{D} = 0$.

Примечание. Теорема Гаусса следует из закона Кулона — закона обратных квадратов $1/r^2$. Таким образом, достоверность третьего уравнения Максвелла зависит от того, насколько точен закон Кулона. В настоящее время экспериментально установлено, что вплоть до атомных расстояний показатель при r отличается от «двух» не более, чем на 10^{-9} [21].

ПРИМЕР 4. На поверхности металлического шара радиуса r_0 находится положительный свободный заряд q (рис. 23.15). Окружающая среда — однородный диэлектрик с проницаемостью ϵ . Найти векторы электрического поля $\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$ и распределение связанных зарядов.

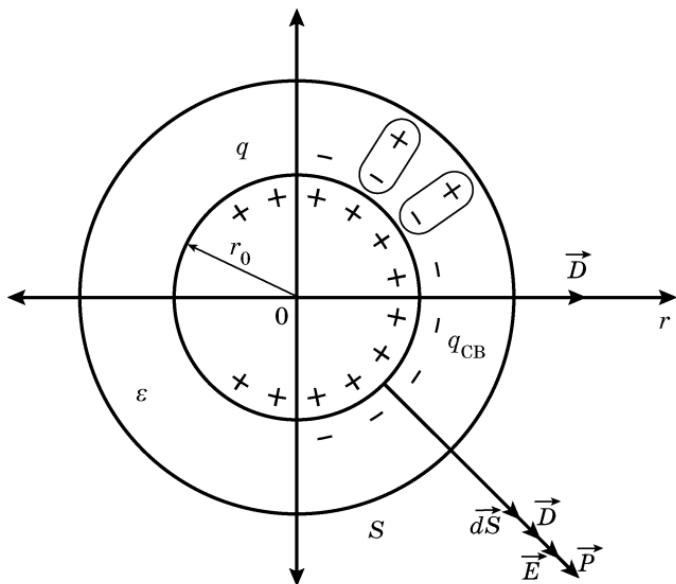


Рис. 23.15

Заряд q равномерно распределен по поверхности шара. Линии поля — радиальные прямые. В каждой точке векторы $\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$ совпадают по направлению. На сфере S радиуса r выполняется уравнение (23.25), откуда следует, что $D = q/(4\pi r^2)$. Теперь на основании (23.3) и (23.4) можно записать

$$E_r = \frac{D}{\epsilon} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}; \quad P_r = (\epsilon - \epsilon_0)E_r = \frac{q}{4\pi r^2} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right)$$

Объемная плотность связанного заряда в диэлектрике определяется на основании (23.22). Проводя вычисления в сферической системе координат, получим

$$\rho_{cb} = -\operatorname{div} \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = 0.$$

Отрицательный связанный заряд находится только в тонком сферическом слое у поверхности шара (на рис. 23.15 показаны ориентированные в поле «молекулярные диполи»). Применяя второе уравнение (23.24), имеем

$$q_{\text{св}} = -P_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon} q < 0.$$

Примечания:

1. Напряженность поля выражается формулой, в которую входит только свободный заряд q , а свойства диэлектрика учитываются параметром ϵ . Эту формулу можно переписать в виде $E_r = (q + q_{\text{св}})/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, откуда следует, что E — это суммарное поле свободных и связанных зарядов, находящихся в вакууме (концепция Лоренца).
2. Если в примере диэлектрик неоднороден, причем $\epsilon = \epsilon(r)$, то линии поля остаются радиальными. При этом D на основании (23.25) сохраняется, но E и P уже не подчиняются закону $1/r^2$; в объеме возникают связанные заряды ($\rho_{\text{св}} \neq 0$).

23.4.3. Четвертое уравнение.

Принцип непрерывности магнитного потока

Четвертое уравнение в дифференциальной форме имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (23.26)$$

Это означает, что линии вектора магнитной индукции \vec{B} всегда замкнуты (непрерывны).

Физическое содержание (23.26) нетрудно установить, сравнив его с третьим уравнением (23.20): магнитное поле не имеет источников в виде магнитных зарядов (магнитных масс); магнитное поле всегда связано с электрическими токами.

Интегральная форма четвертого уравнения получается с использованием теоремы Остроградского так же, как уравнение (23.23), и имеет вид

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (23.27)$$

Уравнение (23.27) выражает принцип непрерывности магнитного потока: магнитный поток через любую замкнутую поверхность S равен нулю.

Примечание. Отсутствие в природе магнитных зарядов следует понимать в макроскопическом смысле. Возможное существование элементарных магнитных зарядов и сам факт их экспериментального обнаружения не должны привести к пересмотру (23.26) как одного из основных уравнений макроскопической электродинамики.

§ 23.5. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

23.5.1. Дифференциальные уравнения поля

Запишем систему четырех уравнений поля в неподвижных средах:

$$\begin{aligned} 1) \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; & 2) \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ 3) \operatorname{div} \vec{D} &= \rho; & 4) \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (23.28)$$

В изотропных линейных средах система дополняется уравнениями связи

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}; \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}.$$

В изучаемой области могут действовать *сторонние* электродвигущие силы, которые рассматриваются как причины (источники) возникновения поля: индукционные, гальванические, термоэлектрические и др. элементы. Для описания этих сил используются два подхода, сводящиеся к изменению первого уравнения в (23.28). В одном варианте в правую часть добавляется слагаемое $\vec{J}^{\text{ст}}$ — *плотность стороннего тока*, а в другом — третье уравнение связи записывается в виде *обобщенного закона Ома* $\vec{J} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{ст}})$, где $\vec{E}^{\text{ст}}$ — *сторонняя напряженность поля*.

Рассматриваемая система уравнений обладает свойством *линейности*: в векторном поле, являющимся математическим образом реального поля, выполняется принцип наложения (суперпозиции): $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}$. При $\vec{E}_2 = -\vec{E}_1$ результат наложения $\vec{E} = 0$. Конечно же, физически здесь не происходит «уничтожения» одного поля другим; происходит перераспределение в пространстве.

Первое и второе уравнения в (23.28) принадлежат к числу основных уравнений. Покажем, что из них вытекают два других уравнения.

Действительно, образовав дивергенцию от обеих частей второго уравнения, получим

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B}.$$

В соответствии с тождеством векторного анализа $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = 0$ и, значит, дивергенция \vec{B} не зависит от времени: $\operatorname{div} \vec{B} = f(x, y, z) = \text{const}$. При «выключении» поля ($\vec{B} = 0$) эта постоянная, естественно, равна нулю. Отсюда следует, что вообще $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

Третье уравнение следует из первого с привлечением дифференциальной формы закона сохранения заряда [15]:

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (23.29)$$

Запишем последовательные преобразования:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{J} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = 0;$$

далее, используя (23.29), получим $\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D} - \rho) = 0$ и, наконец, $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$.

Несмотря на то, что третье и четвертое уравнения не являются вполне независимыми, их включают в систему (23.28), которая является *полной системой уравнений* макроскопической теории поля, выражающей ее общие принципы. Она является достаточной для однозначного решения частных задач. Многие разделы теории и практики электротехники (генераторы, электрические машины, трансформаторы, высокочастотная электротермия, техника высоких напряжений, вихревоковая дефектоскопия, расчет электромагнитных *RLC*-параметров передающих линий, цепи сверхвысоких частот и др.) связаны с теорией поля более тесно, чем с теорией цепей.

Примечание. Поскольку рассматривается поле в неподвижных средах, операторы, содержащие только время, коммутируют с операторами, содержащими только координаты, т. е. порядок операций div и $\partial/\partial t$ можно изменять.

23.5.2. Частные виды электромагнитных явлений

Полная система уравнений Максвелла в ряде частных случаев упрощается.

1. *Постоянное во времени поле при отсутствии токов проводимости.* Система (23.28) распадается на две независимые системы:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho; \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}; \quad (23.30)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (23.31)$$

Уравнения (23.30) содержат функции только электрического поля, а уравнения (23.31) — только магнитного поля. Таким об-

разом, в рассматриваемом случае электрические и магнитные явления формально независимы. Система (23.30) есть полная система уравнений электростатики, а (23.31) — магнитостатики.

2. Постоянное во времени поле в присутствии токов проводимости. При условии « $\partial/\partial t = 0$ » уравнения, описывающие электрическое поле, не отличаются от уравнений электростатики. Однако в данном случае мы имеем дело с единым электромагнитным полем, так как с напряженностью \vec{E} связан вектор плотности тока $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, входящий в первое уравнение (23.28).

3. Квазистационарное электромагнитное поле. При условии, что переменные во времени процессы протекают достаточно медленно, в первом уравнении (23.28) при наличии токов проводимости можно пренебречь токами смещения. Второе уравнение записывается в обычном виде.

Примечание. Конечно же, в идеальном диэлектрике ($\gamma = 0$) токи смещения необходимо учитывать (см. пример 2 в 23.2.2).

4. Переменное во времени поле при отсутствии токов проводимости. Из уравнений

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

следует, что изменение во времени напряженности электрического поля сопровождается переменным во времени магнитным полем и наоборот. Таким образом, электромагнитное поле может существовать и распространяться в пространстве, не будучи связанным с токами и зарядами.

23.5.3. Энергетические соотношения

В теории цепей используются простые соотношения, позволяющие определить электрическую энергию емкости, магнитную энергию индуктивности, мощность двухполюсника: $W_C = qu/2$, $W_L = \psi i/2$, $p = ui$. В эти формулы входят интегральные величины u , i , q , ψ , но не функции поля. Однако нужно помнить, что энергетические процессы в электромагнитных устройствах — это процессы, обусловленные полем, протекающие в поле и выражаемые уравнениями поля. Поэтому нужно дополнить теорию энергетическими соотношениями.

1. Объемные плотности энергии электрического w^e и магнитного w^m полей:

$$w^e = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2}; \quad w^m = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2}; \quad (23.32)$$

единица измерения — Дж/м³.

2. Объемная плотность энергии электромагнитного поля:

$$w = w^e + w^m. \quad (23.33)$$

3. Энергия поля в объеме V :

$$W = \int_V w dV. \quad (23.34)$$

4. Объемная плотность мощности тепловых потерь:

$$p = \vec{J}\vec{E} = \gamma E^2 = J^2 / \gamma, \quad (23.35)$$

единица измерения — Вт/м³. Соотношение (23.35) называется законом Джоуля—Ленца в дифференциальной форме. В ТЦ его аналог — мощность резистора:

$$p = iu = Gu^2 = i^2/G = Rl^2.$$

Заметим, что принцип суперпозиции, справедливый для векторных функций поля, не выполняется для энергии. Пусть энергии полей \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , существующих по отдельности в объеме V , равны соответственно W^e_1 и W^e_2 . При их одновременном существовании энергия суммарного поля $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ с учетом (23.32), (23.34) и уравнения связи $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$

$$\begin{aligned} W^e &= \frac{1}{2} \int_V \epsilon \vec{E}^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \epsilon (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \epsilon \vec{E}_1^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \epsilon \vec{E}_2^2 dV + \int_V \epsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2 dV, \end{aligned}$$

и, следовательно, $W^e = W^e_1 + W^e_2 + W^e_{12}$, где дополнительное слагаемое W^e_{12} — взаимная энергия полей. Она может быть положительной и отрицательной; если поля перпендикулярны, то $W^e_{12} = 0$.

Примечание. В эталонном соленоиде при токе $i = 100$ А и числе витков на единицу длины $n = 10^4$ магнитная индукция $B = \mu_0 n i \approx 1$ Тл; объемная плот-

ность энергии $w^m = B^2/2\mu_0 \approx 4 \cdot 10^5$ Дж/м³. Максимальная напряженность электрического поля в воздухе (до наступления пробоя) $E = 3 \cdot 10^6$ В/м; объемная плотность энергии $w^e = \epsilon_0 E^2/2 \approx 40$ Дж/м³.

ПРИМЕР 5. Плоский конденсатор с воздушным заполнением образован круглыми пластинами радиуса r_0 , расположенными на расстоянии h (рис. 23.16a). Напряжение на пластинах изменяется по гармоническому закону $u(t) = U_m \cos \omega t$. Найти: 1) электромагнитное поле в конденсаторе в первом (квазистационарном) приближении; 2) вихревую поправку к квазистационарному электрическому полю. Краевым эффектом пренебречь ($r_0 \gg h$).

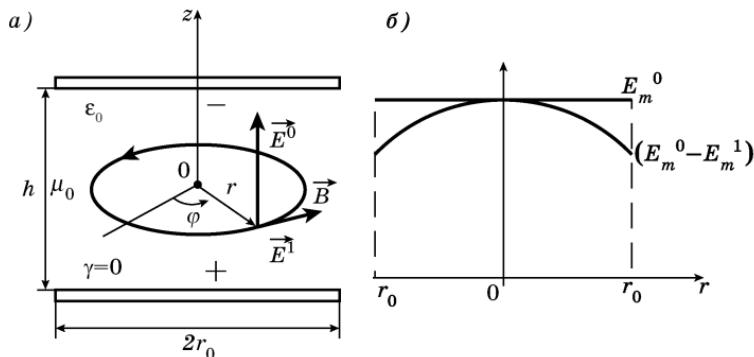


Рис. 23.16

1. На начальном этапе рассмотрим конденсатор как квазистационарную систему (см. пример 2 в 23.2.2). Источниками поля являются заряды на пластинах. Напряженность этого поля

$$E_z^0 = E_m^0 \cos \omega t = \frac{U_m}{h} \cos \omega t.$$

Далее находим плотность тока смещения

$$J_z^{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial E_z^0}{\partial t} = -\frac{\epsilon_0 \omega U_m}{h} \sin \omega t$$

и из первого уравнения в (23.28) магнитную индукцию

$$B_\phi(r, t) = \mu_0 H_\phi = \mu_0 \frac{J_z^{\text{см}} r}{2} = -\frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega U_m r}{2h} \sin \omega t.$$

На картине поля направление \vec{E}^0 определяется мгновенной полярностью (знаком) зарядов пластин. Ток смещения и магнитная индукция опережают электрическое поле по фазе на $\pi/2$; поэтому $J_{\text{см}}^{\text{cm}} > 0$ и $B_{\varphi} > 0$ при $\pi < \omega t < 2\pi$.

2. Согласно второму уравнению в (23.28) переменное магнитное поле \vec{B} сопровождается вихревым электрическим полем \vec{E}^1 , которое и является поправкой к \vec{E}^0 :

$$\text{rot } \vec{E}^1 = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Поскольку вектор \vec{B} имеет только одну составляющую ($B_r = B_z = 0$), данное уравнение в координатной форме имеет вид:

$$\text{rot}_{\varphi} \vec{E}^1 = \frac{\partial E_r^1}{\partial z} - \frac{\partial E_z^1}{\partial r} = -\frac{\partial B_{\varphi}}{\partial t}.$$

В осесимметричном магнитном поле $B_{\varphi}(r, t)$ существует единственная составляющая вихревого поля $E_z^1(r, t)$, причем на оси $E_z^1(0, t) = 0$. Окончательное выражение для вихревой поправки

$$E_z^1(r, t) = -E_m^1(r) \cos \omega t = \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 U_m r^2}{4h} \cos(\omega t + \pi).$$

Поля \vec{E}^0 и \vec{E}^1 находятся в противофазе. Максимальное значение амплитуда E_m^1 принимает при $r = r_0$. На рис. 23.16б приведены графики распределения амплитуд напряженностей E_m^0 и «исправленного» поля ($E_m^0 - E_m^1$). Количество поправок можно увеличивать, переходя к новым значениям тока смещения, магнитной индукции, вихревого электрического поля и т. д. Здесь мы ограничимся сравнением двух составляющих при $r = r_0$:

$$\frac{E_m^1}{E_m^0} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 r_0^2}{4} = \left(\frac{\pi r_0}{\lambda} \right)^2,$$

где $\lambda = 2\pi/(\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0})$ — длина волны. При условии $E_m^1 < 0,01 E_m^0$ получим соотношение $\lambda > 10\pi r_0$, которое можно считать критерием квазистационарности электрического поля конденсатора.

§ 23.6. ПОЛЕ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

23.6.1. Постановка задачи

Рассмотрим границу раздела S двух сред 1 и 2 с различными электромагнитными параметрами ϵ, μ, γ (рис. 23.17). Пусть \vec{n} — единичная нормаль, направленная из первой среды во вторую; $\vec{\tau}$ — единичный касательный вектор. Для общности положим, что на границе сосредоточены свободные поверхностные заряды с плотностью σ и поверхностные токи с плотностью \vec{J}_S .

В макроскопической теории предполагается, что граница бесконечно тонкая. При переходе через нее параметры изменяются скачком. В таком случае скачком изменяются некоторые составляющие векторов поля и, следовательно, в точках границы дифференциальные уравнения поля теряют смысл. Однако их интегральные формы остаются справедливыми. Именно эти уравнения и используются для изучения поведения векторов поля при переходе из одной среды в другую, т. е. для получения граничных условий.

Ниже граничные условия приведены без вывода. Необходимо только помнить, что они подобно уравнениям Максвелла являются постулатами теории и представляют собой *поверхностную форму* дифференциальных уравнений поля.

23.6.2. Поведение нормальных составляющих векторов поля

Отметим индексом «1» векторные функции поля на границе в первой среде: $\vec{D}_1, \vec{B}_1, \vec{J}_1, \vec{J}_1^n$, а индексом «2» — во второй среде: $\vec{D}_2, \vec{B}_2, \vec{J}_2, \vec{J}_2^n$. Запишем три группы граничных условий.

1. Следствие из третьего уравнения Максвелла (23.23):

$$\vec{n}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma; \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (23.36)$$

Нормальная составляющая вектора \vec{D} на границе раздела изменяется скачком на величину поверхностной плотности *свободного заряда*.

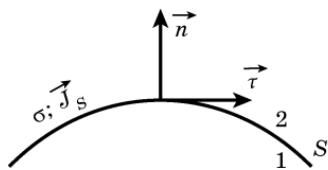


Рис. 23.17

Из интегральных уравнений (23.24) следуют соотношения

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma + \sigma_{cb}}{\epsilon_0}; \quad (23.37)$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_{cb}. \quad (23.38)$$

Скачок нормальной составляющей вектора \vec{E} определяется *и свободным, и связанным* зарядами. Нормальные составляющие вектора поляризации \vec{P} по обе стороны границы раздела отличаются на величину σ_{cb} .

2. Следствие из четвертого уравнения Максвелла (23.27):

$$\vec{n}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0; \quad B_{2n} = B_{1n}. \quad (23.39)$$

Нормальная составляющая вектора \vec{B} на границе раздела всегда непрерывна. Это свидетельство непрерывности магнитного потока.

Нормальная составляющая вектора \vec{H} , как следует из уравнения связи $\vec{B} = \mu \vec{H}$, испытывает скачок:

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}; \quad H_{1n}/H_{2n} = \mu_2/\mu_1.$$

3. Следствие принципа непрерывности полного тока, т. е. замкнутости линий вектора плотности полного тока (23.13):

$$\vec{n}(\vec{J}_2^n - \vec{J}_1^n) = 0; \quad J_{2n}^n = J_{1n}^n. \quad (23.40)$$

Естественно, что выражения (23.40) аналогичны (23.39), поскольку линии вектора магнитной индукции согласно (23.26) также всегда замкнуты.

23.6.3. Поведение касательных составляющих векторов поля

1. Следствие из второго уравнения Максвелла (23.18):

$$\vec{\tau}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0; \quad E_{2\tau} = E_{1\tau}. \quad (23.41)$$

Касательная составляющая вектора \vec{E} на границе раздела всегда непрерывна.

Возможна другая запись этого граничного условия с использованием векторного произведения: $[\vec{n}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)] = 0$.

2. Следствие из первого уравнения Максвелла (23.14):

$$[\vec{n}(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = \vec{J}_S; \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = J_{Sk}. \quad (23.42)$$

Касательная составляющая вектора \vec{H} на границе раздела изменяется скачком. Величина скачка определяется проекцией вектора плотности поверхностного тока \vec{J}_S на вектор $\vec{k} = [\vec{n}\vec{\tau}]$. При выборе $\vec{\tau} \perp \vec{J}_S$ получаем

$$|H_{2\tau} - H_{1\tau}| = J_S.$$

В большинстве задач представление о поверхностном токе не вводится, и тогда граничные условия принимают вид, подобный (23.41):

$$\vec{\tau}(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0; \quad H_{2\tau} = H_{1\tau}. \quad (23.43)$$

Касательная составляющая вектора \vec{H} на границе раздела непрерывна.

Примечание. Граничные условия дают нам представление о поведении поля на границе раздела, тогда как само поле в обеих средах может быть неизвестным.

§ 23.7. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

23.7.1. Уравнение энергетического баланса. Качественные представления

В соответствии с законом сохранения и превращения энергии во всех природных процессах энергия не создается и не уничтожается, а лишь превращается из одной формы в другую. Применительно к электромагнитным процессам закон был сформулирован впервые английским физиком Пойнтингом в 1884 г., и независимо в том же году Хевисайдом.

Запишем уравнение *энергетического баланса*, для чего выделим в линейной изотропной среде объем V , ограниченный поверхностью S (рис. 23.18). Пусть энергия поля в этом объеме $W = W(t)$. Для общности положим, что в нем действуют сторонние силы (источники).

За время Δt в объеме происходит ряд энергетических превращений. В уравнение баланса следует включить: 1) работу

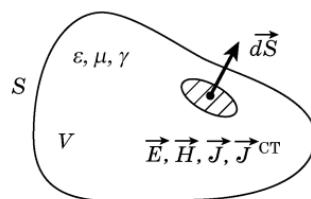


Рис. 23.18

источников ΔW^{ct} ; 2) энергию тепловых потерь (затраты энергии поля на поддержание токов проводимости) ΔW_{n} ; 3) изменение энергии поля в объеме ΔW ; 4) перенос энергии через поверхность S в окружающую среду ΔW_S . Следовательно, выполняется равенство

$$\Delta W^{\text{ct}} + \Delta W_{\text{n}} + \Delta W + \Delta W_S = 0, \quad (23.44)$$

в котором $\Delta W^{\text{ct}} < 0$, если источники за счет происходящих в них процессов увеличивают энергию поля; $\Delta W_{\text{n}} > 0$ всегда, а ΔW и ΔW_S могут иметь любой знак.

Разделив (23.44) на Δt , при $\Delta t \rightarrow 0$ получим уравнение *баланса мощностей*

$$p^{\text{ct}} + p_{\text{n}} + \frac{\partial W}{\partial t} + p_S = 0. \quad (23.45)$$

В него входят мощность источников p^{ct} ; мощность тепловых потерь p_{n} ; мощность, переносимая через поверхность p_S ; слагаемое $\partial W / \partial t$ — скорость изменения энергии поля во времени.

В электрической цепи уравнение баланса записывается в виде (1.7) как сумма мгновенных мощностей элементов. Например, для последовательного *RLC*-контура с источником напряжения $p_u + p_R + p_L + p_C = 0$. Здесь мощность источника $p_u < 0$; мощность *R*-элемента $p_R > 0$; мощность *L*-элемента $p_L = \partial W_L / \partial t$; мощность *C*-элемента $p_C = \partial W_C / \partial t$. Таким образом, уравнение баланса

$$p_u + p_R + \frac{\partial W_{LC}}{\partial t} = 0 \quad (23.46)$$

включает в себя мощности источника и тепловых потерь, а также скорость изменения запасенной в *L*- и *C*-элементах энергии.

Сравнивая (23.46) с (23.45), приходим к выводу: в теории цепей не учитывается последнее слагаемое в (23.45) — мощность электромагнитного поля, которая характеризует отток ($p_S > 0$) или приток ($p_S < 0$) энергии через поверхность S .

23.7.2. Теорема Пойнтинга. Количественные представления

В каждой точке объема V выполняется первое уравнение Максвелла, в правую часть которого включен вектор плотности стороннего тока $\vec{J}^{\text{ст}}$, и второе уравнение в обычном виде:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{\text{ct}}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

После скалярного умножения на \vec{E} первого уравнения, а на \vec{H} — второго, произведем вычитание левой и правой частей:

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{J}^{\text{ct}} \vec{E} + \vec{J} \vec{E} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (23.47)$$

Левую часть преобразуем по известной формуле векторного анализа

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div}[\vec{E} \vec{H}].$$

Слагаемое

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E} \left(\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \epsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right) = \frac{\partial w^{\epsilon}}{\partial t}$$

имеет смысл скорости изменения во времени объемной плотности энергии электрического поля (23.32) в изотропной среде ($w^{\epsilon} = \vec{D} \vec{E} / 2 = \epsilon E^2 / 2$). Последнее слагаемое в (23.47)

$$\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial w^M}{\partial t},$$

где $w^M = \vec{B} \vec{H} / 2 = \mu H^2 / 2$ — объемная плотность энергии магнитного поля. Учитывая, что плотность энергии электромагнитного поля (23.33) $w = w^{\epsilon} + w^M$, после всех преобразований вместо (23.47) окончательно получим:

$$\vec{J}^{\text{ct}} \vec{E} + \vec{J} \vec{E} + \frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}[\vec{E} \vec{H}] = 0. \quad (23.48)$$

Уравнение (23.48) является локальной характеристикой баланса энергии поля. Согласно (23.35) слагаемое $\vec{J} \vec{E} = J \vec{E} = \gamma E^2 = J^2 / \gamma > 0$ — плотность мощности тепловых потерь. Слагаемое $\vec{J}^{\text{ct}} \vec{E} < 0$, когда \vec{E} имеет составляющую, ориентированную против \vec{J}^{ct} ; тогда сторонний ток отдает энергию электромагнитному полю.

Более наглядной является интегральная форма уравнения (23.48). Прежде всего введем новую функцию поля — вектор Пойнтинга

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \vec{H}]. \quad (23.49)$$

Далее проинтегрируем (23.48) почленно по объему V и учтем, что согласно (23.34)

$$\int_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \omega dV = \frac{\partial W}{\partial t},$$

а объемный интеграл от $\operatorname{div} \vec{\Pi}$ преобразуется по теореме Остроградского в поток вектора $\vec{\Pi}$. В результате получим уравнение, выражающее закон сохранения энергии в электродинамике — теорему Пойнтинга (см. рис. 23.18):

$$\int_V \vec{J}^{\text{ct}} \vec{E} dV + \int_V J E dV + \frac{\partial W}{\partial t} + \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = 0. \quad (23.50)$$

Смысл каждого слагаемого в (23.50) был установлен при качественном представлении уравнения баланса (23.45). Важнейшим является вывод о существовании потока электромагнитной энергии, мощность которого

$$p_S = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S}. \quad (23.51)$$

Вектор $\vec{\Pi}$ может быть интерпретирован как плотность потока: 1) направление $\vec{\Pi}$, определяемое правилом векторного произведения \vec{E} и \vec{H} , указывает направление движения энергии; 2) модуль $\Pi = EH \sin(\vec{E}\vec{H})$ — это количество энергии, переносимой в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную $\vec{\Pi}$ (единица измерения — Дж/с·м² = Вт/м²).

Вектор Пойнтинга как основная энергетическая функция поля используется при описании процессов распространения и преобразования электромагнитной энергии в постоянных (стационарных), квазистационарных и волновых полях.

Примечания:

1. Из того, что поток через замкнутую поверхность представлен выражением (23.51), нельзя сделать однозначный вывод о том, что его плотность равна Π . К вектору $\vec{\Pi}$ можно добавить любой вектор, поток которого через S равен нулю. Поэтому запись плотности потока в виде $\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}]$ имеет характер гипотезы [20].

2. Пусть в некоторой области созданы постоянные во времени поля \vec{E}, \vec{H} (например заряд в поле магнита), а \vec{J}^{ct} и J равны нулю. Тогда из уравнения баланса (23.48) следует, что $\operatorname{div} \vec{\Pi} = 0$, и, следовательно, в постоянном электромагнитном поле циркулируют замкнутые энергетические потоки [20].

ПРИМЕР 6. В развитие примера 2 (см. рис. 23.10) найдем вектор Пойнтинга электромагнитного поля в конденсаторе. Очевидно, что в цилиндрической системе координат $\vec{\Pi}$ имеет одну составляющую:

$$\Pi_r(r,t) = -E_z H_\varphi = -\frac{E_z J_z^{\text{cm}} r}{2} = \frac{\epsilon U_0^2 r}{2\tau h^2} e^{-2t/\tau} > 0.$$

Как видно, в процессе разряда конденсатора энергия черпается из запасов ее в форме энергии электрического поля и направляется к боковой поверхности диэлектрического заполнения. На рис. 23.19 a показан вид сверху (против оси z), на котором обозначены направление \vec{E} , линия магнитного поля \vec{H} радиуса r и радиальные линии $\vec{\Pi}$. Мгновенная мощность, переносимая через боковую поверхность S ,

$$p_S(t) = \int_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \Pi_r \Big|_{r=r_0} \cdot 2\pi r_0 h = \frac{U_0^2}{\tau} \cdot \frac{\epsilon \pi r_0^2}{h} e^{-2t/\tau} = \frac{U_0^2}{\tau} \cdot C \cdot e^{-2t/\tau},$$

где $C = \epsilon \pi r_0^2 / h$ — емкость плоского конденсатора. Энергия, «покинувшая» конденсатор к моменту окончания разрядки,

$$W = \int_0^\infty p_s(t) dt = \frac{C U_0^2}{2}$$

равна начальной запасенной энергии электрического поля.

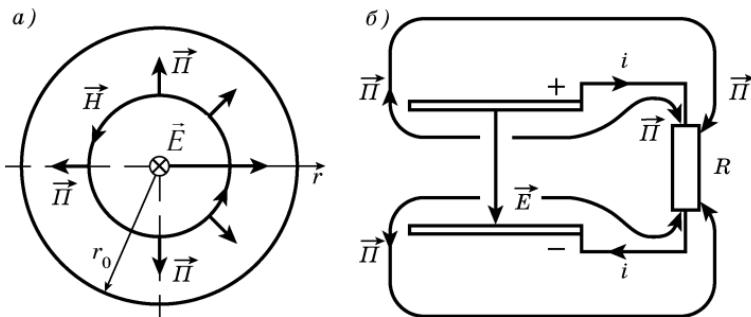


Рис. 23.19

Поскольку детальный анализ поля вне конденсатора не проводится, можно лишь качественно указать векторные линии $\vec{\Pi}$ — пути движения электромагнитной энергии к резистору R (рис. 23.19б). Важно подчеркнуть, что энергия переносится не токами, а полем. Она следует в окружающей среде вдоль проводов и поступает в резистор с «двух сторон». Пропода же играют здесь роль «полеводов».

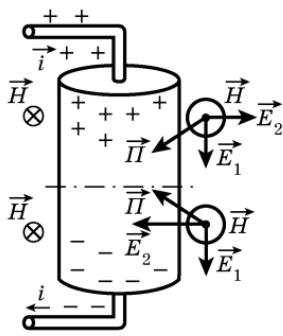


Рис. 23.20

На рис. 23.20 представлена качественная картина поля у поверхности резистора. Причина \vec{E}_2 — поверхностные заряды. Плотность положительного заряда убывает от верхнего торца к нейтральному сечению; далее поверхностный заряд — отрицательный. Поле \vec{E}_1 обязано току в резисторе. В соответствии с законом Ома и граничным условием (23.41) оно направлено по току. Вектор $\vec{\Pi} = [(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)\vec{H}]$ направлен от поверхности в резистор. Это свидетельство того, что электромагнитная энергия «втекает» через боковую поверхность. В объеме резистора происходит ее превращение в тепло.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ИДЕАЛЬНЫХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

§ 24.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

24.1.1. Допущения электростатики

Электростатическое поле — это постоянное во времени электростатическое поле неподвижных зарядов.

Известно, что все реальные среды обладают отличной от нуля проводимостью. Следовательно, в них не могут длительно существовать объемные заряды. Это можно доказать, используя уравнение непрерывности, уравнения связи и третье уравнение поля. Действительно, подставляя в (23.29) соотношения $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ и учитывая (23.20), приходим к уравнению для объемной плотности заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon} \rho = 0,$$

решение которого $\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z, 0)e^{-t/\tau}$, где ρ_0 — начальная плотность заряда при $t = 0$, $\tau = \epsilon/\gamma$ — постоянная времени (время релаксации). Плотность заряда экспоненциально убывает, причем для морской воды ($\epsilon = 81\epsilon_0$, $\gamma = 4 \text{ См}/\text{м}$) постоянная времени очень мала: $\tau = 1,8 \cdot 10^{-10} \text{ с}$. Для хорошего диэлектрика — стекла ($\epsilon = 4\epsilon_0$, $\gamma = 10^{-12} \text{ См}/\text{м}$) время «рассеивания» заряда $t = 3\tau = 105 \text{ с}$.

Таким образом, мы будем считать, что электростатическое поле и заряды существуют в идеальном диэлектрике, вообще лишенном проводимости ($\gamma = 0$). Внутри проводящих тел поле отсутствует, а заряды располагаются на поверхности тел (явление электростатической индукции).

Очевидно, что электростатические явления в чистом виде не могут быть физически реализованы. Однако **электростатика — это плодотворная идеализация**, в рамках которой вводятся

такие важнейшие понятия электротехники как потенциал, диполь, поляризация, емкость и другие.

Примечания:

1. На заряды действуют кулоновы силы, поэтому электростатическая система не может быть устойчивой без дополнительных сил или связей неэлектростатической природы [20]. Например, на поверхности проводников должны действовать силы, не позволяющие зарядам покинуть ее и удалиться в бесконечность. В то же время в электростатике остается в стороне вопрос о связях, удерживающих заряды в фиксированных положениях.
2. Явление электростатической индукции в проводнике можно рассматривать как его поляризацию, связанную с перераспределением свободных зарядов. Формально проводник — это диэлектрик с неограниченной поляризацией; в ряде задач ему приписывают проницаемость $\epsilon = \infty$.

24.1.2. Основные уравнения

Математические формы и физическое содержание уравнений Максвелла рассмотрены в 23.1–23.5. Система дифференциальных уравнений электростатического поля получается из (23.28) при условии независимости векторов поля от времени и при отсутствии тока проводимости:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \quad (24.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (24.2)$$

где $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ — уравнение связи.

Аналогично с учетом (23.18) и (23.23) записываются соответствующие уравнения в интегральной форме:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad (24.3)$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q. \quad (24.4)$$

Согласно (24.1) электростатическое поле является потенциальным. Интегральный признак (24.3) потенциальности поля утверждает: циркуляция вектора \vec{E} по произвольному контуру равна нулю. Уравнения (24.2) и (24.4) устанавливают связь поля и свободных зарядов.

24.1.3. Границные условия

Законы изменения электромагнитного поля на границе раздела двух сред были рассмотрены в 23.6. В электростатике задача формули-

руется следующим образом: на поверхности S , разделяющей два идеальных диэлектрика (рис. 24.1 α), проницаемость изменяется скачком; в общем случае на границе раздела находится свободный и связанный заряды (с плотностями σ и σ_{CB} соответственно).

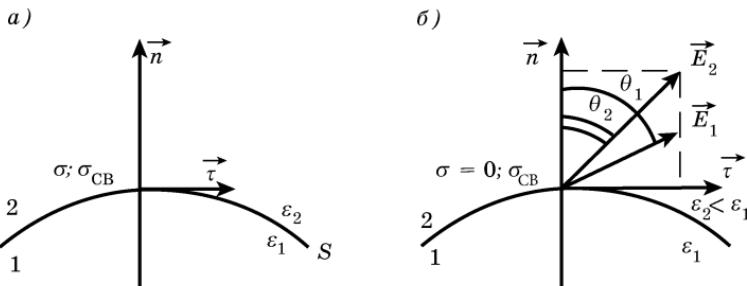


Рис. 24.1

На границе раздела согласно (23.41) и (23.36) касательная составляющая вектора напряженности \vec{E} непрерывна:

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad (24.5)$$

а нормальная составляющая вектора смещения \vec{D} изменяется скачком:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (24.6)$$

Если граница не заряжена ($\sigma = 0$) вместо (24.6) имеем

$$D_{2n} = D_{1n}, \quad (24.7)$$

т. е. нормальная составляющая \vec{D} непрерывна.

В этом случае нормальная составляющая \vec{E} изменяется скачком

$$\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (24.8)$$

и, следовательно, при переходе через границу раздела вектор \vec{E} изменяет направление (происходит «преломление» линии поля). Используя (24.5) и (24.8), находим закон преломления

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \quad (24.9)$$

где θ_1 и θ_2 — углы между нормалью \vec{n} и векторами \vec{E}_1 и \vec{E}_2 (рис. 24.1 β). Линии \vec{D} преломляются точно так же. В соответствии с

(24.9), если $\epsilon_2 < \epsilon_1$, то $\theta_2 < \theta_1$; при переходе во вторую среду векторы поля приближаются к нормали.

Полезно усвоить правило, следующее из (24.5) и (24.7), когда в однородном поле находится плоская граница раздела. Если линии поля перпендикулярны границе, векторы смещения в обоих диэлектриках равны ($\vec{D}_1 = \vec{D}_2$). Если поле направлено вдоль границы, то равными оказываются векторы напряженности поля ($\vec{E}_1 = \vec{E}_2$).

Наконец, укажем, что связанные заряды, возникающие на границе вследствие поляризации двух диэлектриков, включены в соотношения (23.38) и (23.37):

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_{CB}, E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma + \sigma_{CB}}{\sigma_0}. \quad (24.10)$$

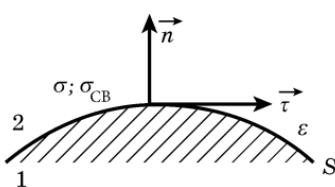


Рис. 24.2

Для получения условий на границе раздела проводник—диэлектрик учтем, что электростатическое поле в проводниках существовать не может. Если первая среда — проводник, то $\vec{E}_1, \vec{D}_1, \vec{P}_1$ равны нулю (рис. 24.2).

Из (24.5) следует (индекс «2» в дальнейшем опускаем):

$$E_\tau = 0. \quad (24.11)$$

Касательная составляющая поля в диэлектрике на поверхности проводника отсутствует; линии поля подходят к поверхности по нормали.

Обратившись к условию (24.6), получим:

$$D_n = \sigma, E_n = \frac{\sigma}{\epsilon}. \quad (24.12)$$

Равенства (24.12) связывают поле на границе с плотностью свободного заряда. Если заряда нет, то $D_n = 0$; это в сочетании с условием (24.11) указывает на отсутствие поля на границе. Особенно просто записывается (24.12) для модулей векторов поля и заряда без учета его знака:

$$D = \sigma, E = \frac{\sigma}{\epsilon}.$$

В соотношениях, вытекающих из (24.10),

$$P_n = -\sigma_{CB}; E_n = \frac{\sigma + \sigma_{CB}}{\epsilon_0}$$

учтены связанные заряды, которые в данном случае — следствие поляризации только одного диэлектрика.

§ 24.2. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

24.2.1. Скалярный потенциал. Разность потенциалов

Сопоставим первое уравнение поля $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ и тождество векторного анализа $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$. Вектор \vec{E} можно считать градиентом некоторой скалярной функции. Принято писать:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U. \quad (24.13)$$

Функция $U = U(x, y, z)$ называется скалярным потенциалом электростатического поля. Градиент — это вектор, направленный в сторону максимальной скорости возрастания функции в заданной точке; знак «минус» указывает на то, что вектор \vec{E} всегда направлен в сторону убывания потенциала. Уравнения $U(x, y, z) = \text{const}$ являются уравнениями поверхностей равного потенциала. Векторные линии \vec{E} пересекают эти поверхности под прямым углом.

Использование потенциала существенно упрощает задачу расчета поля. Во-первых, это проявляется при использовании метода наложения, ибо суммирование векторных функций поля заменяется простым сложением скалярных потенциалов. Во-вторых, знание одной только функции U позволяет найти путем дифференцирования по правилу (24.13) все три составляющие вектора \vec{E} . Например, в декартовых координатах

$$\vec{E} = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z, \quad (24.14)$$

так что составляющая $E_x = -\partial U / \partial x$ и т. д.

Потенциал — неоднозначная функция поля: для описания данного поля \vec{E} вместо U можно использовать $U' = U + C$ (где C — любая константа), ибо $\operatorname{grad} U' = \operatorname{grad} U$.

Получим теперь выражение, обратное по отношению к (24.13), определяющее потенциал через напряженность поля. Для этого запишем линейный интеграл вектора \vec{E} по произвольной кривой, соединяющей две точки поля M и N :

$$\begin{aligned} \int\limits_M^N \vec{E} d\vec{l} &= \int\limits_M^N (E_x dx + E_y dy + E_z dz) = \\ &= - \int\limits_M^N \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = - \int\limits_M^N dU. \end{aligned}$$

Здесь скалярное произведение \vec{E} и векторного элемента длины $d\vec{l}$ под интегралом переписано в декартовой системе координат с учетом (24.14). Оно оказывается взятым с обратным знаком полным дифференциалом потенциала. Следовательно, сам интеграл суть разность значений потенциала в двух точках — начале и конце кривой. Окончательно запишем важное соотношение, позволяющее найти разность потенциалов между двумя точками в заданном поле \vec{E} :

$$U_M - U_N = \int\limits_M^N \vec{E} d\vec{l}. \quad (24.15)$$

Подчеркнем следующее: 1) путь интегрирования в (24.15) — произвольный; 2) разность потенциалов — однозначная функция, так как $U'_M - U'_N = U_M - U_N$; 3) сила, действующая на заряд, равна $q\vec{E}$, и поэтому разность потенциалов можно трактовать как работу сил поля при перемещении единичного положительного заряда из точки M в точку N .

Поскольку потенциал определяется с точностью до постоянного слагаемого, можно принять потенциал точки N равным нулю ($U_N = 0$) и назвать ее точкой отсчета (базисной точкой). Тогда на основании (24.15) потенциал

$$U_M = U = \int\limits_M^N \vec{E} d\vec{l}. \quad (24.16)$$

Выражение (24.16) позволяет найти потенциал в любой точке M — точке наблюдения.

Внутри проводника $\vec{E} = 0$, и на основании (24.13) можно заключить, что в условиях электростатики во всех точках проводящего тела потенциал одинаков. Поверхность тела эквипотенциальна.

При решении конкретных задач необходимо выбирать точку отсчета, геометрическое место этих точек, а часто — целую область с нулевым потенциалом. Перечислим возможные варианты: бесконечно удаленные точки, металлические корпус прибора и экран, земля и др.

24.2.2. Уравнения Пуассона и Лапласа — уравнения для потенциала

Первое уравнение электростатического поля (24.1) позволило ввести потенциал соотношением (24.13). Теперь, используя второе уравнение (24.2) и уравнение связи, можно получить уравнение, связывающее распределение потенциала с распределением свободного заряда:

$$\operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} U) = -\rho.$$

В однородных средах с постоянной проницаемостью ($\epsilon = \text{const}$) имеем: $\epsilon(\operatorname{div} \operatorname{grad} U) = -\rho$. Далее с учетом тождества $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U$ запишем уравнение Пуассона — дифференциальное уравнение второго порядка с частными производными

$$\Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (24.17)$$

В тех областях, где заряд отсутствует ($\rho = 0$), уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа:

$$\Delta U = 0. \quad (24.18)$$

24.2.3 Две типичные задачи электростатики

Все многообразие задач электростатики можно свести к двум типам.

1. *Прямая (краевая) задача* заключается в расчете поля при заданном распределении зарядов. Если среда однородна, для решения можно привлечь уравнения Пуассона (Лапласа). Как и всякие дифференциальные уравнения, они имеют бесчисленное множество решений. Для выбора единственного верного, соответствующего данной задаче, используются так называемые краевые условия. Способ задания их может быть различным.

При расчете поля в конечной области, ограниченной поверхностью S , на этой поверхности должно быть задано: 1) либо распределение потенциала $U(x, y, z)$; 2) либо распределение его нормальной производной $\partial U(x, y, z)/\partial n$. Возможно также задание смешанных условий. Для области, простирающейся в бесконечность, краевые условия должны определять поведение потенциала и его производной в бесконечности.

Если поверхность S образована эквипотенциальными проводящими телами, должен быть известен потенциал каждого из них. Задание же краевого условия второго типа физически означает задание заряда, поскольку (24.12) с учетом (24.13) можно переписать в виде $|\partial U/\partial n| = \sigma/\epsilon$.

В том случае, когда область состоит из однородных областей с различными диэлектрическими проницаемостями (кусочно-однородная область), поля в каждой из них должны удовлетворять граничным условиям.

Выразим граничные условия через потенциал. Так как $E_\tau = -\partial U/\partial \tau$, то из (24.5) следует условие непрерывности касательных производных $\partial U_2 / \partial \tau = \partial U_1 / \partial \tau$. Это справедливо при непрерывности самого потенциала:

$$U_2 = U_1. \quad (24.19)$$

Таким образом, потенциал — непрерывная функция координат, в противном случае (24.13) теряет смысл.

Так как $E_n = -\partial U/\partial n$, то из (24.6) следует второе условие, описывающее поведение потенциала на границе:

$$-\epsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} + \epsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \sigma. \quad (24.20)$$

При решении прямой задачи расчета поля важное значение имеет *теорема единственности*: из множества функций, удовлетворяющих уравнениям поля, существует только одна, удовлетворяющая заданным краевым условиям и представляющая единственно верное решение. На основании этого можно утверждать, что, если нам удалось каким-то путем найти решение краевой задачи, то оно и только оно является искомым решением.

Примечание. Поиск или подбор решения могут включать в себя экспериментальный и интуитивный опыт, как это имело место в развитии метода зеркальных изображений [16].

2. Обратная задача электростатики заключается в отыскании зарядов по заданному распределению потенциала. Это распределение может быть найдено, например, при экспериментальном исследовании реальных устройств электротехники и электроники.

Определение объемных зарядов по уравнению Пуассона фактически сводится к дифференцированию потенциала: $\rho = -\epsilon \Delta U$. Поверхностный заряд на проводящих телах находят с помощью граничного условия (24.12) $\sigma = \epsilon E_n$. При наличии в поле особых точек, где $U \rightarrow \infty$ для поиска заряда используется уравнение в интегральной форме (24.4).

ПРИМЕР 1. В области, ограниченной двумя бесконечными параллельными плоскостями, находится объемный заряд (рис. 24.3a). В левой части ($-h_1 < x < 0$) расположен равномерно заряженный слой отрицательных зарядов ($\rho_1 < 0$), в правой части ($0 < x < h_2$) — слой положительных зарядов ($\rho_2 > 0$). Диэлектрическое заполнение однородное. Система зарядов электрически нейтральна. Найти распределение потенциала и напряженности поля.

Примечание. Условия задачи соответствуют упрощенной модели резкого электронно-дырочного перехода в полупроводнике, когда концентрация ионизированных примесей в месте контакта изменяется скачком, а далее остается постоянной. Вне перехода $E = 0$.

Из условия электрической нейтральности следует, что $\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 = 0$. Положив $\rho_2 = \rho > 0$, получим $\rho_1 = -\rho h_2 / h_1 = -kr < 0$. Для определенности будем считать, что $h_2 > h_1$; тогда $|\rho_1| = k\rho > \rho$.

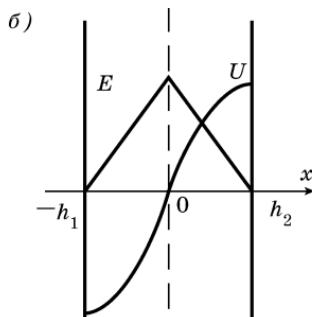
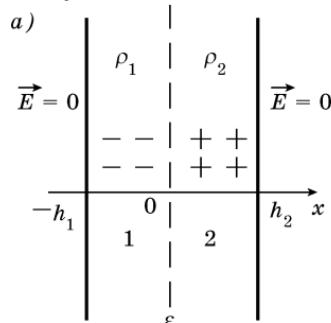


Рис. 24.3

В первой подобласти потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta U_1 = -\rho_1/\epsilon$. Так как задача одномерна, $U_1 = U_1(x)$ и уравнение принимает вид $\partial^2 U_1 / \partial x^2 = -\rho_1/\epsilon$; его решение после двукратного интегрирования

$$U_1(x) = \frac{k\rho}{2\epsilon} x^2 + A_1 x + A_2.$$

Во второй подобласти

$$U_2(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon} + A_3 x + A_4,$$

и, следовательно, для решения задачи требуется определение четырех постоянных.

Выберем точку отсчета потенциала в начале координат, точнее — в плоскости $x = 0$. Тогда из равенства $U_1(0) = U_2(0) = 0$ имеем $A_2 = A_4 = 0$. Теперь уточним краевые условия. Вне центральной заряженной области $\vec{E} = 0$. В этом можно убедиться, используя уравнение (24.4). Поэтому на левой плоскости при $x = -h_1$ напряженность равна нулю и, значит, $\partial U_1 / \partial x = 0$. На правой плоскости при $x = h_2$ должно выполняться краевое условие $\partial U_2 / \partial x = 0$. Отсюда находятся постоянные A_1 и A_3 и окончательные выражения

$$U_1(x) = \frac{k\rho}{2\epsilon} x^2 + \frac{k\rho h_1}{\epsilon} x, \quad U_2(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon} x^2 + \frac{\rho h_2}{\epsilon} x.$$

Вектор \vec{E} направлен от «плюса к минусу», его проекция отрицательна:

$$E_{1x} = -\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\frac{k\rho}{\epsilon} (x + h_1), \quad E_{2x} = -\frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon} (x - h_2).$$

Распределения потенциала U и модуля напряженности E показаны на рис. 24.3б.

§ 24.3. ПОЛЯ СТАНДАРТНЫХ СИСТЕМ ЗАРЯДОВ

24.3.1. Точечный заряд. Заряженный шар

Положительный точечный заряд q расположен в центре сферической системы координат (рис. 24.4а). Диэлектрик однородный ($\epsilon = \text{const}$).

Очевидно, что поле в таком случае имеет центральную симметрию. Его векторные линии радиальны, а эквипотенциальные

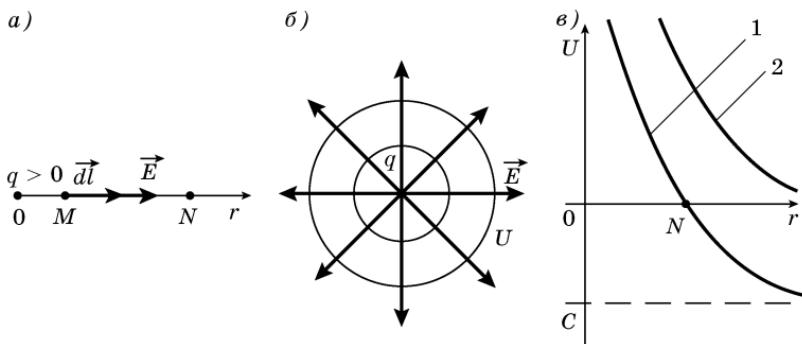


Рис. 24.4

поверхности — концентрические сферы (рис. 24.4б). Используя уравнение (24.4) в форме (23.25), найдем электрическое смещение и затем напряженность поля:

$$D_r = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi r^2}; \quad E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}, \quad (24.21)$$

где $S = 4\pi r^2$ — площадь сферы радиуса r .

Для определения потенциала «назначим» точку отсчета N с координатой r_N , точку наблюдения M с координатой r и наиболее простой путь интегрирования вдоль координатной оси. Тогда в соответствии с (24.16) потенциал поля точечного заряда:

$$U(r) = \int_r^{r_N} E_r dr = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_N} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon r} + C. \quad (24.22)$$

Константа C зависит от выбора точки отсчета. Если она отнесена в бесконечность (т. е. $r_N \rightarrow \infty$), то $C = 0$ и выражение для потенциала принимает наиболее простой вид:

$$U(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon r}. \quad (24.23)$$

Теперь потенциал поля положительного заряда везде является положительным. На рис. 24.4в зависимости (24.22) и (24.23) определяются кривыми 1 и 2 соответственно.

Примечание. Формулы (24.21) и (24.22) при $r = 0$ теряют смысл, поскольку приводят к бесконечно большим значениям E и U . Это, конечно, следствие идеализации. Под «точечным» зарядом следует понимать заряд малого сферического тела (тогда $r \neq 0$).

Поле заряда q , распределенного по объему шара любого радиуса r_0 так, что его плотность $\rho = \rho(r)$ зависит только от одной координаты, остается центрально симметричным. Вне заряда при $r > r_0$ поле описывается прежними формулами (24.21) и (24.23). Они справедливы и в случае, если диэлектрическая проницаемость вещества шара отличается от ϵ . Внутри заряда при $r < r_0$ потенциал монотонно возрастает и достигает экстремума при $r = 0$, а напряженность поля в центре равна нулю.

Если шар проводящий, заряд q сосредоточен в тонком сферическом слое. Внутри шара $\vec{E} = 0$, а потенциал постоянен. Вне шара поле таково, как будто создается точечным зарядом, помещенным в его центр.

24.3.2. Бесконечная прямая нить. Заряженный цилиндр

Направим ось z цилиндрической системы координат вдоль нити. На рис. 24.5а нить перпендикулярна плоскости чертежа. Нить заряжена равномерно так, что на отрезке длиной l находится положительный заряд q .

Заряд, приходящийся на единицу длины $\tau = q/l$, называется линейной плотностью заряда. Нить находится в однородном диэлектрике ($\epsilon = \text{const}$).

Очевидно, что поле имеет осевую симметрию. Его векторные линии радиальны, а эквипотенциальные поверхности — коаксиальные цилиндры (рис. 24.5б). Используя уравнение (24.4) в форме (23.25), где $S = 2\pi rl$ — площадь боковой поверхности цилиндра,

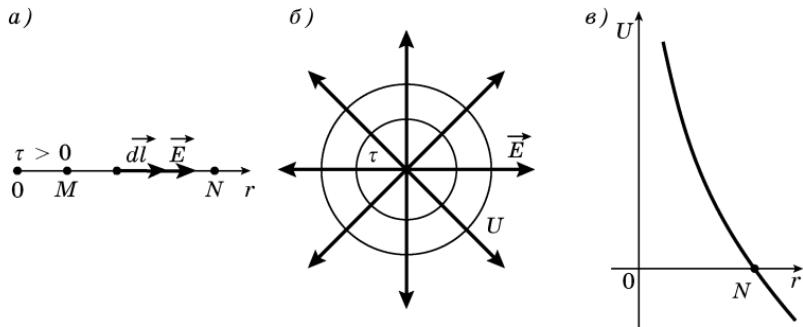


Рис. 24.5

ра радиуса r и длиной l . Основания цилиндра исключаются, поскольку там $\vec{D}d\vec{S}=0$.

Таким образом, электрическое смещение и напряженность поля нити:

$$\begin{aligned} D_r &= \frac{q}{S} = \frac{\tau}{2\pi r}; \\ E_r &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon r}. \end{aligned} \quad (24.24)$$

Потенциал в соответствии с (24.16):

$$U(r) = \int_r^{r_N} E_r dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} (\ln r_N - \ln r) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r + C. \quad (24.25)$$

Константа C зависит от выбора точки отсчета N . Очевидно, что в поле нити ее нельзя отнести в бесконечность (т. е. $r_N \rightarrow \infty$); тогда везде $U(r) \rightarrow \infty$.

Распределение потенциала показано на рис. 24.5в. Как видно, потенциал поля положительного заряда в области $r > r_N$ становится отрицательным.

Примечания.

- Напряженность поля точечного заряда убывает по закону обратных квадратов $1/r^2$. Напряженность поля нити убывает медленнее, по закону $1/r$.
- Потенциалы этих полей удовлетворяют уравнению Лапласа (24.18). Например, в цилиндрических координатах

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{1}{r} \right) = 0.$$

«Кулоновский потенциал» (24.22) и «логарифмический потенциал» (24.25) называют фундаментальными решениями уравнения Лапласа.

Пусть заряд, имеющий линейную плотность τ , распределен по объему цилиндра любого радиуса r_0 так, что его плотность $\rho = \rho(r)$ зависит только от одной координаты. Тогда осевая симметрия поля сохраняется, и вне заряженного цилиндра ($r > r_0$) справедливы формулы (24.24) и (24.25) при условии $r_N > r_0$. Диэлектрическая проницаемость вещества цилиндра может отличаться от ϵ . Внутреннее поле ($r < r_0$) зависит от распределения $\rho(r)$; на оси при $r = 0$ потенциал имеет экстремум, а напряженность равна нулю.

Проводящий цилиндр **эквипотенциален**; внутри $\vec{E} = 0$, а внешнее поле при $r > r_0$ таково, как будто создается заряженной нитью, находящейся на оси.

24.3.3. Нейтральная система точечных зарядов. Электрический диполь

Пусть система, состоящая из n точечных зарядов q_k , находится в однородном диэлектрике и занимает объем V (рис. 24.6а). Система удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^n q_k = 0, \quad (24.26)$$

т. е. является нейтральной.

Потенциал поля в точке наблюдения M записываем, используя (24.23) и принцип суперпозиции:

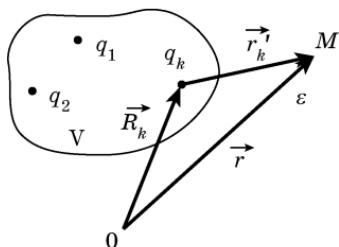
$$U = \sum_{k=1}^n U_k = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{r'_k}, \quad (24.27)$$

где r'_k — расстояние от заряда до точки M .

Во многих задачах представляет интерес поле на больших расстояниях от системы зарядов. Тогда формулу (24.27) можно преобразовать следующим образом. Выбрав начало координат вблизи от системы, построим вектор \vec{R}_k к заряду q_k и вектор \vec{r} в точку наблюдения. Так как модуль R_k есть характеристика размеров системы, условие больших расстояний можно записать в виде $r \gg R_k$. В этом случае

$$r'_k = (r^2 - 2r\vec{R}_k + R_k^2)^{1/2} \approx (r^2 - 2r\vec{R}_k)^{1/2} \approx r \left(1 - \frac{\vec{R}_k}{r^2}\right),$$

а)



б)

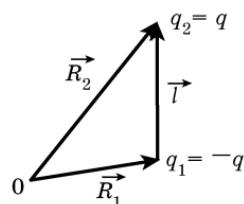


Рис. 24.6

и далее

$$\frac{1}{r'_k} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \vec{R}_k}{r^2} \right) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \vec{R}_k}{r^3}. \quad (24.28)$$

Здесь использованы приближенные формулы: при $x \ll 1$ имеем $(1 - x)^{1/2} \approx 1 - x/2$; $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x$.

Подставляя (24.28) в (24.27), получаем выражение

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon r} \sum_{k=1}^n q_k + \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon r^3} \sum_{k=1}^n q_k \vec{R}_k, \quad (24.29)$$

в котором первое слагаемое при условии (24.26) равно нулю.

Введем вектор

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^n q_k \vec{R}_k, \quad (24.30)$$

характеризующий распределение зарядов; это — электрический (дипольный) момент нейтральной системы зарядов. Теперь из (24.29) следует формула для расчета потенциала на больших расстояниях:

$$U = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon r^3}. \quad (24.31)$$

Электрический момент не зависит от выбора начала координат. Действительно, если сместить точку O в положение O' вдоль некоторого вектора \vec{a} , то новое значение $\vec{R}'_k = \vec{R}_k - \vec{a}$. При этом момент

$$\vec{p}' = \sum_{k=1}^n q_k \vec{R}'_k = \sum_{k=1}^n q_k (\vec{R}_k - \vec{a}) = \vec{p}.$$

Простейшей нейтральной системой является диполь — совокупность двух разноименных зарядов $q_1 = -q$ и $q_2 = q$, расположенных на расстоянии l (рис. 24.6б). Дипольный момент в соответствии с (24.30)

$$\vec{p} = q_1 \vec{R}_1 + q_2 \vec{R}_2 = q(\vec{R}_2 - \vec{R}_1) = q\vec{l}. \quad (24.32)$$

Момент направлен от отрицательного заряда к положительному.

Определим напряженность поля нейтральной системы: $\vec{E} = -\text{grad}U$. Целесообразно использовать сферическую систему

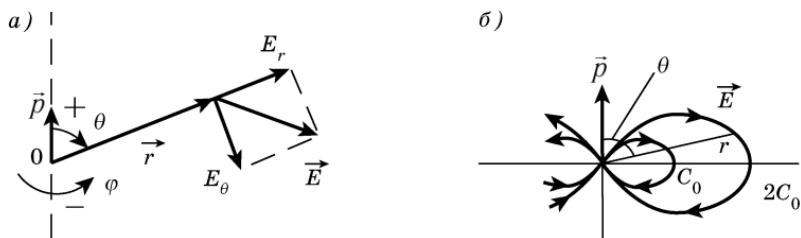


Рис. 24.7

координат, поместив вектор \vec{p} в ее центр и направив его вдоль полярной оси (пунктир на рис. 24.7а). В этой системе формула (24.31) для потенциала принимает вид

$$U = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2}.$$

Вектор напряженности $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$ имеет две составляющие, не зависящие от азимутальной координаты j :

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon r^3}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon r^3}. \quad (24.33)$$

Потенциал диполя убывает с расстоянием, как $1/r^2$, а напряженность — как $1/r^3$.

Найдем уравнение векторных линий поля. Для этого в пропорцию (23.8) следует внести составляющие элемента длины $d\vec{l}$ в сферической системе координат: $dr/E_r = rd\theta/E_\theta$. Далее с учетом (24.33) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta} d\theta = 2 \operatorname{ctg} \theta d\theta,$$

решение которого $\ln r = 2 \ln(\sin \theta) + \ln C$ удобно записать в виде $r = C \sin^2 \theta$. Задавая значения постоянной C , можно построить линии поля в меридиональной плоскости (рис. 24.7б).

Примечание. Если заряд распределен в объеме V с плотностью ρ , его можно представить как совокупность малых зарядов ρdV . Затем вместо суммы вида (24.27) записывается интеграл. Разложение подинтегральной функции $1/r'$ в ряд Тейлора для больших расстояний приводит, как указано в [19], к представлению: поле можно рассматривать как сумму полей мультиполей (диполь, квадруполь, октуполь).

24.3.4. Две противоположно заряженные нити. Двухпроводная линия

Рассмотрим две параллельные нити, находящиеся на расстоянии h ; линейные плотности зарядов $\tau_1 = \tau$ и $\tau_2 = -\tau$ (рис. 24.8а).

Потенциал в точке наблюдения M находим, используя выражение (24.25) для потенциала поля нити и принцип суперпозиции:

$$\begin{aligned} U = U_1 + U_2 &= \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{N1}}{r_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{N2}}{r_2} = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_{N1}}{r_{N2}} \right). \end{aligned}$$

Формула упрощается, если точку отсчета N поместить в плоскости симметрии. При этом $r_{N1} = r_{N2}$, и потенциал определяется только отношением расстояний до «отрицательной» и «положительной» нити:

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (24.34)$$

Уравнение эквипотенциальных поверхностей $r_2/r_1 = C$ описывает поверхности цилиндров, оси которых параллельны нитям, но не совпадают с ними (рис. 24.8б).

Двухпроводная линия образована проводами конечного сечения. Однако в ряде случаев радиусы проводов существенно меньше расстояния между их геометрическими осями. Таковы, например, высоковольтная линия передачи и контактная линия троллейбуса. Тогда можно считать, что поле каждого провода сохраняет осевую симметрию, как поле одиночного заряженного цилиндра. Поэтому формула (24.34) обеспечивает достаточную для расчета точность.

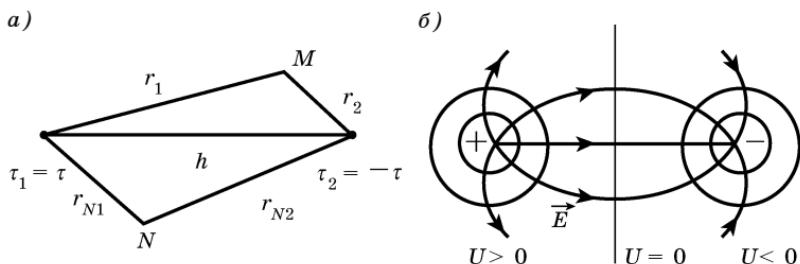


Рис. 24.8

Когда радиусы сравнимы с расстоянием, проявляется встречное смещение зарядов. Их распределение по поверхности проводов становится заметно неравномерным. В этом случае при расчете поля используется понятие электрических осей, не совпадающих с геометрическими осями [8]. Это прием решения краевой задачи, когда вместо зарядов с неизвестным распределением вводятся заряженные нити, но таким образом, чтобы сохранялись краевые условия — эквипотенциальность поверхности проводов.

24.3.5. Бесконечная плоскость. Двойной электрический слой

Бесконечная равномерно заряженная плоскость ($\sigma = \text{const}$) находится в однородном диэлектрике (рис. 24.9a). По соображениям симметрии вектор \vec{E} перпендикулярен плоскости и по обеим сторонам от нее имеет противоположные направления. Модуль поля постоянен в двух полупространствах: $E = \text{const}$; поле является однородным. Эквипотенциальные поверхности — также бесконечные плоскости.

Смещение \vec{D} можно определить, используя уравнение (24.4). Здесь мы воспользуемся граничными условиями (24.6). Поскольку $D_{1n} = -D_{2n}$ и $D_{2n} = D_{2x} = D_x$, для электрического смещения и напряженности поля в области $x > 0$ имеем

$$D_x = \frac{\sigma}{2}; \quad E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon}. \quad (24.35)$$

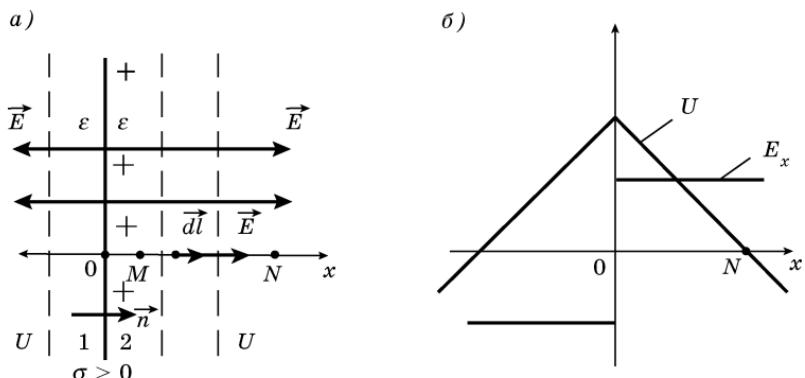


Рис. 24.9

Потенциал в соответствии с (24.16)

$$U(x) = \int_x^{x_N} E_x dx = \frac{\sigma}{2\epsilon}(x_N - x). \quad (24.36)$$

Как и в поле бесконечной нити, здесь точку отсчета нельзя отнести в бесконечность. На рис. 24.9б показаны зависимости $E_x(x)$ и $U(x)$. Потенциал однородного поля (24.36) — линейная функция; он становится отрицательным при $|x| > |x_N|$.

Теперь рассмотрим систему двух противоположно заряженных плоскостей, находящихся на расстоянии h ; поверхностные плотности зарядов $\sigma_1 = \sigma$ и $\sigma_2 = -\sigma$ (рис. 24.10а).

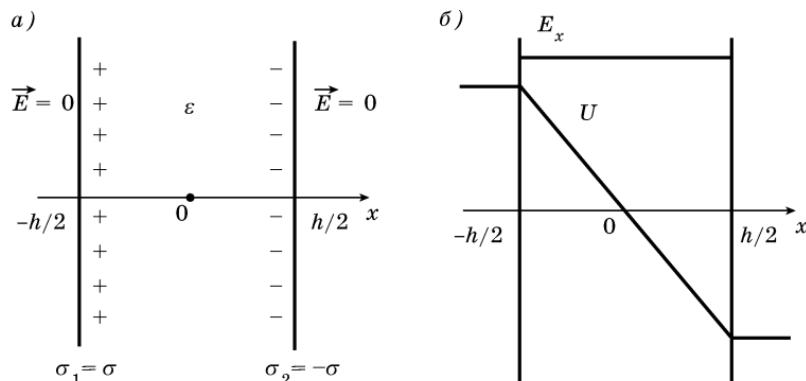


Рис. 24.10

Применяя принцип суперпозиции и формулу (24.35), приходим к заключению, что между плоскостями напряженность однородного поля $E_x = \sigma/\epsilon$, а во внешней области при $|x| > h/2$ поле $\vec{E} = 0$. Поместив точку отсчета в начало координат ($x_N = 0$), по (24.16) находим потенциал в области $|x| < h/2$:

$$U(x) = \int_x^0 E_x dx = -\frac{\sigma}{\epsilon} x.$$

Распределения $E_x(x)$ и $U(x)$ приведены на рис. 24.10б. Разность потенциалов между положительно и отрицательно заряженными плоскостями ($U_1 - U_2 = \sigma h/\epsilon$).

В теории используется представление о двойном электрическом слое. Это — две весьма близко расположенные поверхности ($h \rightarrow 0$), заряженные так, что в противолежащих точках $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$. Если не интересоваться распределением поля внутри слоя, может показаться, что при переходе через него потенциал изменяется скачком.

Примечание. В действительности непрерывность потенциала никогда не нарушается, так как только при этом условии напряженность поля остается конечной. Введение двойного слоя, точечного заряда, заряженной нити является искусственным приемом, облегчающим расчеты поля.

24.3.6. Объемный, поверхностный и линейный заряды

Выражение (24.23) для потенциала поля точечного заряда и принцип суперпозиции позволяют указать общий метод нахождения потенциала при заданном распределении зарядов в однородном диэлектрике.

Пусть заряд q распределен по объему V с объемной плотностью ρ (рис. 24.11).

Выделим элементарный объем dV с зарядом $dq = \rho dV$. Потенциал в точке наблюдения M , определяемый этим элементарным зарядом, согласно (24.23), $dU = \rho dV / (4\pi\epsilon r)$. Потенциал поля заряда q находится в результате суммирования:

$$U = \int_V dU = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho dV}{r}. \quad (24.37)$$

Выражение (24.37) является решением уравнения Лапласа (24.18). Если точка наблюдения лежит внутри V , то это — решение уравнения Пуассона (24.17). Потенциал остается конечным и в точках, где $\rho \neq 0$.

Если заряд q занимает поверхность S , то его можно разбить на элементарные заряды $dq = \sigma dS$. Выражение для потенциала имеет вид

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\sigma dS}{r}, \quad (24.38)$$

где r — расстояние от dq до точки наблюдения.

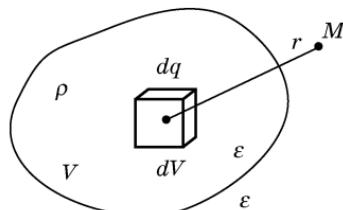


Рис. 24.11

Если заряд q находится на нити (весьма тонком линейном проводе) длиной l , то $dq = \tau dl$, и потенциал

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\tau dl}{r}. \quad (24.39)$$

Формулу (24.39) нельзя использовать для прямого провода при $l \rightarrow \infty$. Она записана на основе (24.23), когда точка отсчета находится в бесконечности. При этом, как следует из (24.25), потенциал всюду обращается в бесконечность.

Примечание. Формулы (24.37)–(24.39) позволяют найти поле при известном распределении зарядов. Достаточно только преодолеть трудности интегрирования.

ПРИМЕР 2. Двойной электрический слой имеет форму тонкого диска радиуса r_0 . Толщина диска $h \ll r_0$. Заряды распределены равномерно, так что $|\sigma_1| = |\sigma_2| = \sigma = \text{const}$ (рис. 24.12). Найти потенциал и напряженность поля на оси z .

Будем рассматривать тонкий электрический слой как систему диполей, распределенных по площади круга радиуса r_0 . Тогда элементу поверхности dS с зарядами $dq = \pm\sigma dS$ согласно (24.32) можно приписать дипольный момент $d\vec{p} = \sigma h dS$. Потенциал диполя в точке наблюдения M в соответствии с (24.31)

$$dU = \frac{d\vec{p} \cos \theta}{4\pi\epsilon R^2}.$$

В цилиндрической системе координат $dS = r dr d\phi$, $\cos \theta = z/R$, $R = (z^2 + r^2)^{1/2}$. Выполняя суммирование потенциалов элементарных диполей, получим

$$U(z) = \int_S dU = \frac{\sigma h}{2\epsilon} \left(1 - \frac{z}{(z^2 + r_0^2)^{1/2}} \right).$$

На положительной стороне слоя при $z = 0$ потенциал $U(0) = \sigma h / 2\epsilon$. При увеличении z потенциал стремится к нулю.

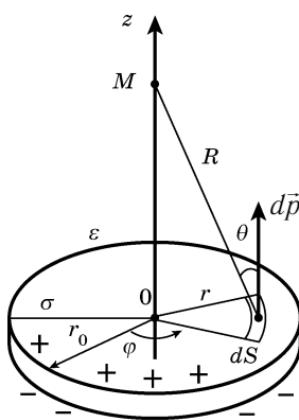


Рис. 24.12

Напряженность поля на оси z имеет одну составляющую

$$E_z(z) = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\sigma h}{2\epsilon} \cdot \frac{r_0^2}{(z^2 + r_0^2)^{3/2}};$$

на поверхности слоя $E_z(0) = \sigma h / (2\epsilon r_0)$.

При $r_0 \rightarrow \infty$ переходим к системе двух бесконечных заряженных плоскостей: $U(z) = \sigma h / 2\epsilon$; $E_z(z) = 0$ (см. 24.3.5).

§ 24.4. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЗАРЯДОВ

24.4.1. Граница диэлектрика и проводника

Пусть точечный заряд $q > 0$ расположен на высоте h над бесконечной плоской границей раздела диэлектрик–проводник (рис. 24.13a). Поле в проводнике отсутствует ($\vec{E} = 0$), граница — эквипотенциальна ($U = 0$). Поле в диэлектрике подлежит определению.

Отметим сложность задачи. Векторные линии поля начинаются на положительном заряде и заканчиваются на проводнике, где находятся индуцированные поверхностные заряды (свободные и связанные). Искомое поле есть результат суперпозиции полей заданного заряда q и поверхностных зарядов, распределение которых неизвестно и, в свою очередь, зависит от искомого поля. Это следует из граничных условий $\sigma = \epsilon E_n$ и $\sigma_{CB} = -P_n = (\epsilon_0 - \epsilon) E_n$.

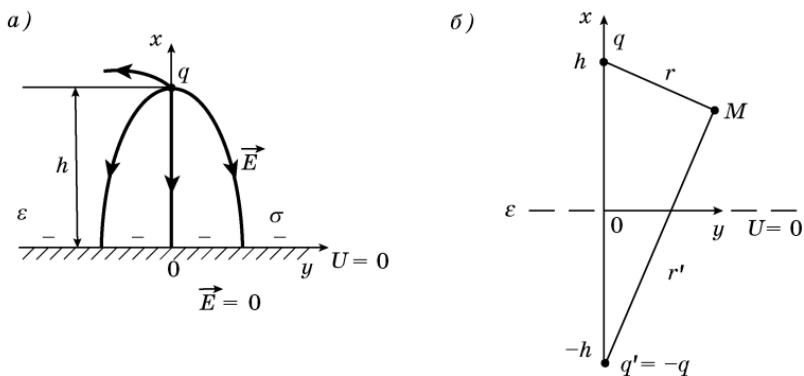


Рис. 24.13

Однако задача решается очень просто, если воспользоваться следующей идеей. Будем считать, что поле поверхностных зарядов таково, будто создается точечным «зарядом-эквивалентом» $q' = -q$, находящимся в точке $x = -h$. При этом проводник устраняется, а все пространство заполняется однородным диэлектриком (рис. 24.13б).

Эту систему зарядов называют расчетной моделью исходной задачи. Модель «работает» при $x \geq 0$ и позволяет элементарно рассчитать искомое поле. Например, потенциал в точке M находится на основании принципа суперпозиции как сумма потенциалов (24.23) точечных зарядов в однородной среде:

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon r'} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right). \quad (24.40)$$

Остается определить, достоверна ли столь простая модель и правильно ли эквивалентный заряд выражает действие поверхностных зарядов.

Для обоснования метода эквивалентных зарядов привлекается теорема единственности (см. 24.2.3). Действительно, «построенная» функция (24.40) удовлетворяет уравнению Лапласа. Кроме того, она удовлетворяет краевым условиям исходной задачи, так как обращается в нуль в плоскости $x = 0$ (при $r = r'$). Поэтому, как утверждает теорема, функция (24.40) является единственным и верным решением.

Примечание. Рассмотренный подход носит также историческое наименование «метод зеркальных изображений». Здесь усматривается аналогия: q — пламя свечи, q' — его отражение в зеркале.

Приведем задачи, которые легко решаются в рамках расчетной модели.

1. Сила притяжения заряда к проводящей плоскости:

$$f = qE' = q \frac{|q'|}{4\pi\epsilon(2h)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon h^2},$$

где $E' = E(q')$ — напряженность поля (внешнего для заряда q), создаваемого зарядами на плоскости. Такая «сила зеркального изображения» действует на электрон, покинувший металл при термоэлектронной эмиссии.

2. Работа по удалению заряда из точки с координатой $x = h_0$ в бесконечность («работа выхода»):

$$A = \int_{h_0}^{\infty} f dh = \frac{q^2}{16\pi\epsilon h_0}.$$

3. Напряженность поля в точке плоскости с координатой y при $r = r' = (h^2 + y^2)^{1/2}$ находится в результате суммирования $\vec{E} = \vec{E}(q) + \vec{E}(q')$:

$$E_x(y) = -2 \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \cdot \frac{h}{r} = -\frac{qh}{2\pi\epsilon(h^2 + y^2)^{3/2}}.$$

4. Плотность свободного заряда $\sigma = D_x = \epsilon E_x < 0$; плотность связанного заряда $\sigma_{CB} = (\epsilon_0 - \epsilon)E_x > 0$. Плотности максимальны под зарядом q ($y = 0$).

5. Полный свободный заряд на бесконечной плоскости равен $-q$. Он определяется путем интегрирования плотности σ по всей плоскости или с использованием уравнения (24.4).

24.4.2. Граница двух диэлектриков

Пусть источник поля — точечный заряд $q > 0$ расположен над бесконечной плоской границей раздела двух диэлектриков с различными проницаемостями (рис. 25.14a). Свободный заряд на границе отсутствует ($\sigma = 0$). Поверхностный заряд является следствием поляризации. Плотность связанного заряда в соответствии с граничным условием (24.10) определяется полем у границы, но это поле в свою очередь зависит от неизвестного нам распределения

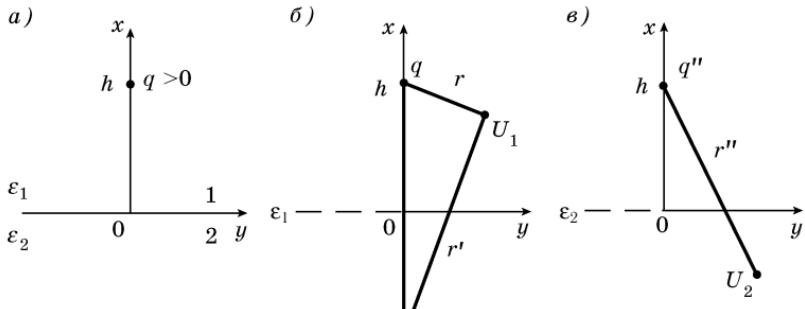


Рис. 24.14

связанного заряда. Таким образом, задача расчета поля является достаточно сложной.

Для того, чтобы учесть влияние поверхностного связанного заряда на поле заряда q , построим две расчетные модели. Будем полагать, что в первой среде ($x \geq 0$) поле таково, будто создается зарядом q и зарядом-эквивалентом q' , расположенным в точке $x = -h$. Оба заряда находятся в однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ_1 (рис. 24.14б). В таком случае потенциал поля в точке с координатами x, y, z

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_1 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_1 r'} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{\sqrt{(x-h)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+h)^2 + y^2 + z^2}} \right). \end{aligned} \quad (24.41)$$

Далее положим, что во второй среде ($x \leq 0$) поле таково, будто создается только одним зарядом-эквивалентом q'' , расположенным в точке $x = h$. Окружающая среда — однородный диэлектрик с проницаемостью ϵ_2 (рис. 24.14в). Потенциал поля

$$U_2 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_2 r''} = \frac{q''}{4\pi\epsilon_2 \sqrt{(x-h)^2 + y^2 + z^2}}. \quad (24.42)$$

Для определения неизвестных эквивалентных зарядов q' и q'' подчиним поля (24.41) и (24.42) граничным условиям (24.19) и (24.20). На поверхности раздела диэлектриков при $x = 0$

$$U_1 = U_2; \quad \epsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = \epsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad (24.43)$$

поскольку $\sigma = 0$.

Первое условие (непрерывность потенциала) в (24.43) приводит к уравнению

$$\frac{q + q'}{\epsilon_1} = \frac{q''}{\epsilon_2},$$

а второе (непрерывность нормальной составляющей смещения) — к уравнению

$$q - q' = q''.$$

Совместное решение дает:

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q; \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q. \quad (24.44)$$

Таким образом, найдены все параметры двух расчетных моделей, показанных на рис. 24.14б, в. Нужно помнить, что в первой модели область расчета поля $x \geq 0$, а во второй — $x \leq 0$.

На основании теоремы единственности (см. 24.2.3) можно утверждать, что модели дают истинное и единственное решение. Действительно, функции (24.41) и (24.42), являясь «кулоновскими потенциалами» вида (24.23), удовлетворяют уравнению Лапласа и при выполнении (24.44) — краевым (граничным) условиям исходной задачи.

Линии поля $\vec{E}(q)$ заряда, находящегося в однородной среде, радиальны (см. рис. 24.4б). При наличии границы поле в первой среде (при $x \geq 0$) — результат суперпозиции: $\vec{E}_1 = \vec{E}(q) + \vec{E}(q')$. Если $\epsilon_2 > \epsilon_1$, то $q' < 0$ и линии поля (прежде радиальные) искривляются, как в системе двух разноименных зарядов. Поле «втягивается» в среду с большей проницаемостью.

Линии поля $\vec{E}_2 = \vec{E}_2(q'')$ во второй среде (при $x \leq 0$) — прямые (лучи), исходящие из точки $x = h$.

Примечания:

1. Знак q' соответствует знаку поверхностных связанных зарядов: при $\epsilon_2 > \epsilon_1$ поверхность заряжена отрицательно.
2. На заряд q действует сила

$$f = qE(q') = \frac{|\epsilon_1 - \epsilon_2|}{16\pi\epsilon_1 h^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} q^2;$$

при $\epsilon_2 > \epsilon_1$ — это сила притяжения.

3. Если вторая среда — проводник, работает только первая модель. Формально можно принять $\epsilon_2 = \infty$ (см. 24.1.1) и тогда из (24.44) следует $q' = -q$.
4. Если источник поля — заряженная нить, в моделях и (24.44) производится замена q на τ .

24.4.3. Расчетная модель при двух проводящих границах

Пусть равномерно заряженная нить, несущая заряд с линейной плотностью τ , находится в средней части области, образованной двумя параллельными бесконечными проводящими плоскостями — пластинами 1 и 2 (рис. 24.15а). Нить направлена по оси z . Ди-

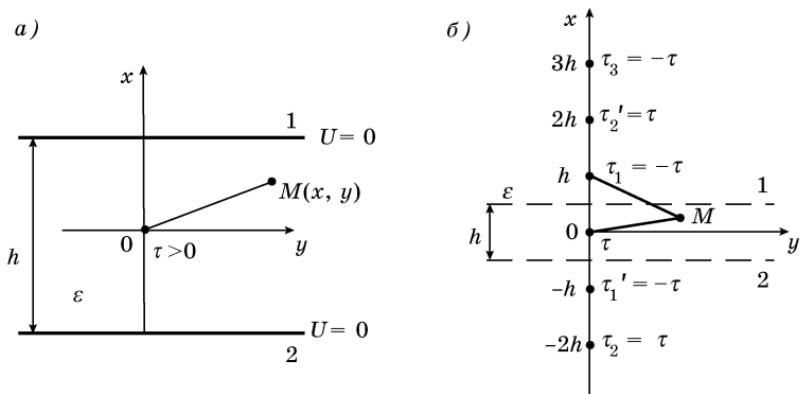


Рис. 24.15

электрическое заполнение однородно ($\epsilon = \text{const}$). Требуется найти распределение потенциала в указанной области, полагая потенциал пластин $U = 0$.

Поставленная задача относится к числу краевых задач для уравнения Лапласа. Проведем ее решение методом эквивалентных зарядов (методом зеркальных изображений). Построение расчетной модели можно начать с введения нити с плотностью заряда τ_1 , т. е. с отображения заданного заряда τ в плоскости 1 (рис. 24.15б). Заряды τ и $\tau_1 = -\tau$ согласно (24.34) обеспечивают на ней нулевой потенциал; потенциал же нижней плоскости 2 отличен от нуля. Для того, чтобы восстановить краевое условие, вводим заряды-эквиваленты τ'_1 и τ_2 , т. е. отображения τ и τ_1 в нижней плоскости 2. Система зарядов τ , τ_1 , τ'_1 и τ_2 обеспечивает на ней нулевой потенциал. Однако теперь нарушается краевое условие на верхней плоскости 1, которое может быть удовлетворено путем отображения в ней пары зарядов τ'_1 и τ_3 . Так появляются τ'_2 и τ_3 . В результате исходной задаче соответствует расчетная модель в виде бесконечной системы заряженных нитей, расположенных в однородном диэлектрике на расстоянии h друг от друга. Попарным объединением разноименных зарядов τ и τ_1 , τ'_1 и τ'_2 , τ_2 и τ_3 и т. д. система сводится к бесконечному числу пар противоположно заряженных нитей (линейных двухпроводных линий). Применив выражения (24.34) для потенциала линии и принцип суперпозиции, получаем искомое выражение для потенциала в точке наблюдения M :

$$U(x,y) = \frac{\tau}{4\pi\epsilon} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \ln \frac{y^2 + (mh - x)^2}{y^2 + [(m-1)h + x]^2},$$

причем в начале координат $U(0,0) = \infty$; это — особая точка поля.

Примечание. Расчетная модель может быть построена и в том случае, когда проводящие плоскости образуют двугранный угол $\theta = \pi/n$, где n — целое число [8]. При $\theta = \pi/2$ эквипотенциальность плоскостей обеспечивается заданным зарядом и тремя изображениями.

24.4.4. Изображение в проводящей сфере

Пусть точечный заряд $q > 0$ расположен в однородном диэлектрике ($\epsilon = \text{const}$) на расстоянии h от поверхности проводящей сферы радиусом r_0 . Сфера заземлена, ее потенциал $U = 0$. (рис. 24.16а). Требуется построить расчетную модель для определения поля в диэлектрике.

На поверхности сферы находится индуцированный заряд. Для того чтобы учесть его влияние на поле заряда q , заполним *все пространство* диэлектриком, а в некоторую точку на расстоянии h' «внутри сферы» поместим заряд-эквивалент $q' = -kq$ (рис. 24.16б).

В расчетной модели заряд q' и расстояние h' подбираются так, чтобы поле зарядов q и q' имело поверхность нулевого потенциала, совпадающую с заземленной сферой.

Потенциал в точке M

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{r_0^2 + (r_0 + h)^2 - 2r_0(r_0 + h)\cos\theta}} - \right. \\ \left. - \frac{k}{\sqrt{r_0^2 + (r_0 - h')^2 - 2r_0(r_0 - h')\cos\theta}} \right]$$

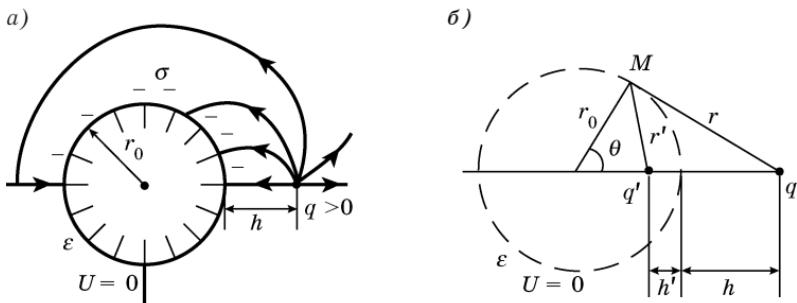


Рис. 24.16

равен нулю (при любом θ), если выполняются равенства

$$k^2 \left[r_0^2 + (r_0 + h)^2 \right] = r_0^2 + (r_0 - h')^2, \quad k^2(r_0 + h) = (r_0 - h').$$

Решив эти уравнения, найдем параметры расчетной модели:

$$q' = -kq = -\frac{r_0}{r_0 + h}q; \quad h' = \frac{r_0}{r_0 + h}h.$$

При $r_0 \rightarrow \infty$ приходим к задаче о плоской проводящей границе: $q' = -q$; $h' = h$ (см. 24.4.1).

Примечания:

1. Индуцированный на сфере заряд равен заряду-эквиваленту. При этом $|q'| < q$, так как в отличие от задачи в 24.4.1 рассматриваемую систему «заряд–сфера» нельзя считать замкнутой: не все линии поля имеют стоки на сфере (см. рис. 24.16a).
2. В случае изолированной сферы ее потенциал не равен нулю, но равен нулю заряд. Расчетная модель дополняется зарядом $(-q') = kq$, помещенным в центр сферы. Изображением заряда q является диполь с моментом $p = kq(r_0 - h')$.
3. Решение краевой задачи о диэлектрическом шаре в поле точечного заряда приведено в [19].

§ 24.5. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

24.5.1. Общее решение уравнения Лапласа в декартовых координатах

Рассмотрим поле, потенциал которого зависит только от двух координат (двухмерная задача). Это значит, что картина поля повторяется во всех плоскостях, перпендикулярных третьей координатной оси. Такое поле называется плоскопараллельным.

В декартовых координатах можно положить $U = U(x, y)$, и тогда уравнение Лапласа (24.18) $\Delta U = 0$ принимает вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \quad (24.45)$$

Найдем решение уравнения методом разделения переменных (методом Фурье), в соответствии с которым $U(x, y)$ представляет-ся в виде произведения двух функций:

$$U(x, y) = X(x)Y(y). \quad (24.46)$$

Каждая из функций зависит только от одной переменной.

Подставляя (24.46) в уравнение (24.45) и деля каждое из слагаемых на произведение (24.46), получаем:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0. \quad (24.47)$$

Первое слагаемое в (24.47) зависит только от x , а второе — только от y . Поскольку x и y — независимые переменные, уравнение (24.47) будет удовлетворяться всегда, если

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = M, \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -M, \quad (24.48)$$

где M — произвольная постоянная.

Как видно из (24.48), методом разделения переменных уравнение с частными производными приводится к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям. Задавая константу в виде $M = m^2$, можно получить решения X_m и Y_m , а затем по (24.46) $U_m = X_m Y_m$ — частное решение уравнения Лапласа для заданного m . Если положить, что $M > 0$, то решение первого уравнения в (24.48)

$$X_m = A_m e^{mx} + B_m e^{-mx}. \quad (24.49)$$

Возможна также запись решения с использованием гиперболических функций:

$$X_m = A_m \operatorname{sh} mx + B_m \operatorname{ch} mx, \quad (24.50)$$

причем в (24.50) $\operatorname{sh} \alpha = (e^\alpha - e^{-\alpha})/2$; $\operatorname{ch} \alpha = (e^\alpha + e^{-\alpha})/2$.

Решение второго уравнения в (24.48)

$$Y_m = C_m \sin my + D_m \cos my \quad (24.51)$$

содержит тригонометрические функции.

Общее решение уравнения Лапласа является суммой частных:

$$U(x, y) = \sum_m (A_m \operatorname{sh} mx + B_m \operatorname{ch} mx)(C_m \sin my + D_m \cos my). \quad (24.52)$$

В одномерных задачах, где потенциал зависит лишь от одной координаты, например от y , при постоянной $m = 0$ решение следует из (24.52). Если учесть, что при малых аргументах $\cos my \approx 1$, а $\sin my \approx my$, то $U(y) = D_0 y + C_0$, что соответствует потенциалу однородного поля: $E_y = -\partial U / \partial y = -D_0$.

При расчете плоскопараллельных полей в конкретных задачах из общего решения (24.52) нужно выбрать необходимые функции и постоянные, руководствуясь физическими соображениями и краевыми условиями.

В качестве иллюстрации найдем частное решение $U_m(x, y)$ для сетки из бесконечных одинаково заряженных линейных проводов; шаг сетки — a (рис. 24.17).

Очевидно, что потенциал должен убывать с ростом x и быть четной функцией y . Выбирая «подходящие» функции из (24.49) и (24.51), принимаем $U_m = A_m e^{-mx} \cos my$. Чтобы обеспечить периодичность по y , следует принять $m = 2\pi k/a$, $k = 1, 2, \dots$.

Примечание. В формулах (24.49)–(24.52) всегда возможна замена x на y , y на x .

24.5.2. Поле внутри полу бесконечной полосы

Рассмотрим область поля $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq \infty$, ограниченную проводящими (металлическими) пластинами. Боковые полубесконечные стороны $x = 0$ и $x = a$ имеют потенциал, равный нулю. Потенциал нижней стороны $y = 0$ равен U_0 (рис. 24.18). Диэлектрик однородный.

Краевые условия записываются следующим образом: $U(0, y) = 0$; $U(a, y) = 0$; $U(x, 0) = U_0$; $U(x, \infty) = 0$. Первому и четвертому условиям удовлетворяет только комбинация функций (24.49) и (24.51):

$$U_m(x, y) = A_m e^{-my} \sin mx.$$

Второе условие удовлетворяется, если $m = k\pi/a$ при $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, общее решение уравнения Лапласа

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{k\pi}{a}y} \sin \frac{k\pi}{a} x \quad (24.53)$$

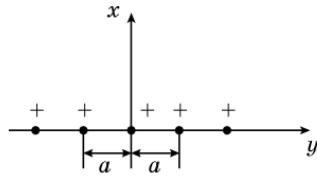


Рис. 24.17

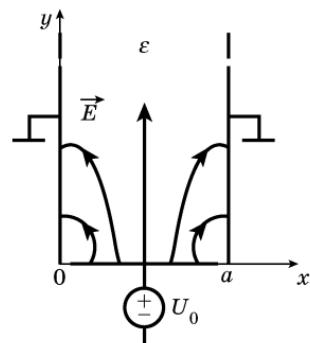


Рис. 24.18

содержит константы A_k , которые определяются по третьему краевому условию. На нижней пластине ($y = 0$) согласно (24.53) потенциал

$$U(x, 0) = U_0 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{a} x \quad (24.54)$$

представляет собой разложение *непериодической функции* $U(x, 0) = U_0$ на промежутке $0 \leq x \leq a$ в ряд Фурье по синусам. Коэффициенты разложения находятся по формуле вида (7.3) при нечетном продолжении $U(x, 0)$ с периодом $T = 2a$:

$$A_k = \frac{2}{a} \int_0^a U(x, 0) \sin \frac{k\pi}{a} x dx. \quad (24.55)$$

Формулы (24.55) и (24.53) выражают результат решения краевой задачи. Вначале проводится определение коэффициентов A_k , затем — расчет потенциала $U(x, y)$. Фиксируем некоторый уровень $y = y_0$. Тогда формулу (24.53) можно трактовать как представление $U(x, y_0)$ в виде суммы пространственных гармоник потенциала с частотами $k\pi/a$.

С учетом того, что $U(x, 0) = U_0 = \text{const}$, из (24.54) следует $A_k = 4U_0/(k\pi)$ при $k = 1, 3, 5, \dots$, т. е. четные гармоники отсутствуют. Ряд (25.53) принимает вид

$$U(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=1, 3, \dots} \frac{1}{k} e^{-\frac{k\pi}{a} y} \sin \frac{k\pi}{a} x.$$

На уровне $y_0 = a/4$ ряд сходится очень быстро:

$$\begin{aligned} U(x, a/4) &= \frac{4U_0}{\pi} \left(e^{-\pi/4} \sin \frac{\pi}{a} x + \frac{1}{3} e^{-3\pi/4} \sin \frac{3\pi}{a} x + \dots \right) = \\ &= \left(0,59 \sin \frac{\pi}{a} x + 0,04 \sin \frac{3\pi}{a} x + \dots \right) U_0, \end{aligned}$$

причем в точке $x = a/2$ потенциал равен $0,55U_0$.

Примечания:

1. Условие однородности диэлектрика позволяет использовать уравнение Лапласа. Но поле от проницаемости ϵ не зависит.
2. Краевое условие на нижней стороне области — это «прямоугольный импульс» потенциала $U(0, x) = U_0[\delta_1(x) - \delta_1(x - a)]$. При его нечетном продолжении получаем «мейндр». Поэтому спектр $A_k = -jA_k$ аналогичен спектру этого известного временного сигнала.

§ 24.6. ИМПУЛЬСНАЯ ФУНКЦИЯ В ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ

24.6.1. Дельта-функция в трехмерной области

Проведем обобщение на трехмерную область свойств дельта-функции (рис. 24.19a).

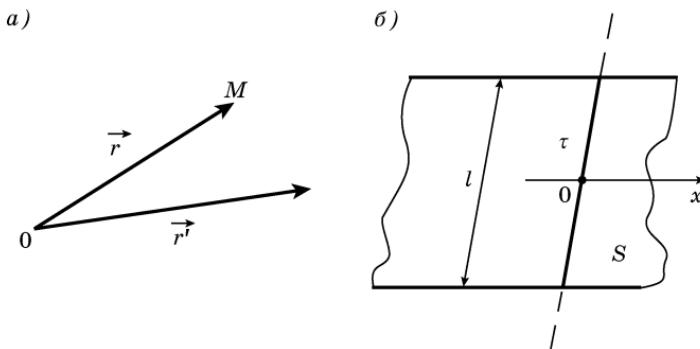


Рис. 24.19

1. Определение:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \begin{cases} \infty, & \vec{r} = \vec{r}', \\ 0, & \vec{r} \neq \vec{r}'. \end{cases}$$

2. Свойство выборки по объему V :

$$\int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = \begin{cases} 0, & M(\vec{r}') \text{ вне } V, \\ f(\vec{r}'), & M(\vec{r}') \text{ внутри } V. \end{cases}$$

3. Интеграл от дельта-функции — частный случай при $f(\vec{r}) = 1$:

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = \begin{cases} 0, & M(\vec{r}') \text{ вне } V, \\ 1, & M(\vec{r}') \text{ внутри } V. \end{cases}$$

Импульсная функция используется для устранения особенностей (бесконечно большие плотности) в случаях точечных и линейных зарядов, поверхностных зарядов и токов. Приведем два примера.

Пусть заряд q располагается в точке с координатой \vec{r}' . Его объемная плотность в этой точке бесконечно велика, а во всех остальных точках пространства равна нулю. Введя координату \vec{r}

точки наблюдения, можно записать объемную плотность точечного заряда в виде

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (24.56)$$

т. е. заряд «размазан» по объему V :

$$\int_V \rho(\vec{r}) dV = q \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = q,$$

если V включает точку $\vec{r} = \vec{r}'$. Используя (24.55), кулоновский потенциал поля точечного заряда (24.23) можно записать в виде (24.37) — потенциала поля объемного заряда.

Пусть заряженная нить расположена в плоскости S перпендикулярно оси x ; линейная плотность заряда $\tau = \text{const}$ (рис. 24.19б). Заряд участка длиной l можно представить *распределенным по плоскости S* с плотностью

$$\sigma(x) = \tau\delta(x). \quad (24.57)$$

Действительно, вычисляя полный заряд плоскости, получаем

$$\int_S \sigma(x) dS = \tau l \int_S \delta(x) dx = \tau l.$$

Здесь использована одномерная импульсная функция. При смещении начала координат влево на x' представление (24.57) принимает вид

$$\sigma(x) = \tau\delta(x - x'). \quad (24.58)$$

24.6.2. Заряженная нить между проводящими плоскостями

Заряженная нить, имеющая линейную плотность заряда τ , расположена между бесконечными параллельными проводящими (металлическими) плоскостями (рис. 24.20а). Диэлектрическое заполнение однородно. Требуется найти распределение потенциала, считая потенциал плоскостей равным нулю.

Решение подобной краевой задачи методом эквивалентных зарядов приведено в 24.4.3. Здесь воспользуемся решением уравнения Лапласа для плоскопараллельного поля и представлением (24.57).

Введем одномерную импульсную функцию $\delta(x - b)$, описывающую распределение заряда (в вертикальной плоскости в зоне $0 \leq x \leq a, y = 0$) с плотностью $\sigma(x) = \tau\delta(x - b)$. Теперь заданная

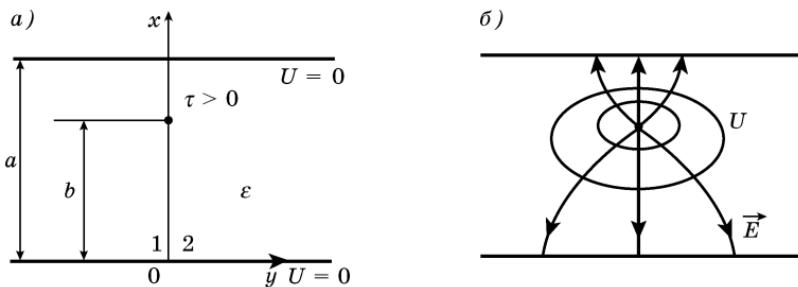


Рис. 24.20

область разделяется на две области 1 и 2 условно заряженной поверхностью.

Искомые потенциалы $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ должны удовлетворять краевым условиям $U_{1,2}(0, y) = 0$, $U_{1,2}(a, y) = 0$ и условию на бесконечности $U_{1,2}(x, y) \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$. Иными словами, каждая область — это полубесконечная полоса, поле которой исследовано в 24.5.2. Это позволяет записать на основании (24.53):

$$U_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\frac{k\pi}{a}y} \sin \frac{k\pi}{a} x, \quad U_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\frac{k\pi}{a}y} \sin \frac{k\pi}{a} x.$$

В точках заряженной поверхности (при $y = 0$) потенциалы подчиняются граничным условиям (24.19) и (24.20):

$$U_1 = U_2; \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial U_2}{\partial y} = \frac{\sigma}{\epsilon}.$$

Из первого условия следует равенство $A_k = B_k$. Тогда второе условие приводит к соотношению

$$\frac{\tau}{\epsilon} \delta(x - b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi k}{a} A_k \sin \frac{k\pi}{a} x = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin \frac{k\pi}{a} x,$$

совпадающее по форме с (24.54). Коэффициенты этого ряда определяются в соответствии с (24.55):

$$D_k = \frac{2k\pi}{a} A_k = \frac{2}{a} \int_0^a \frac{\tau}{\epsilon} \delta(x - b) \sin \frac{k\pi}{a} x dx = \frac{2\tau}{a\epsilon} \sin \frac{k\pi}{a} b, \quad (24.59)$$

причем в (24.59) учтено свойство выборки дельта-функции.

Из (24.59) находят значения A_k . Окончательно потенциал поля представляется в виде суммы пространственных гармоник:

$$U(x, y) = \frac{\tau}{\pi \epsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{a} b\right) e^{-\frac{k\pi}{a} y} \sin \frac{k\pi}{a} x.$$

Составляющие напряженности поля $E_x = -\partial U / \partial x$ и $E_y = -\partial U / \partial y$. На рис. 24.20б приведена картина поля.

Примечание. Эта формула при $b = a/2$ и формула, полученная методом эквивалентных зарядов (см. 24.4.3), дают одинаковые результаты.

§ 24.7. ШАР В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

24.7.1. Решение краевой задачи в кусочно-однородном диэлектрике. Потенциал

В диэлектрике (проницаемость ϵ_1) создано однородное поле $\vec{E}_0 = \text{const}$. В это поле вносится диэлектрический шар (проницаемость ϵ_2), радиус которого r_0 . Требуется найти результирующее поле внутри и вне шара.

В поставленной краевой задаче область определения поля бесконечна и состоит из двух однородных подобластей. В каждой из них поле описывается уравнением Лапласа.

Для решения целесообразно использовать сферическую систему координат, направив полярную ось z по вектору внешнего поля \vec{E}_0 (ри. 24.21а). Тогда потенциал зависит только от координат r и θ ; он не

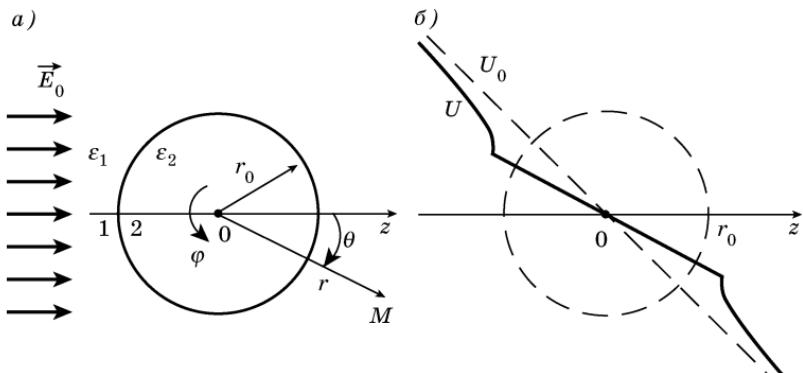


Рис. 24.21

зависит от координаты φ , которая отсчитывается в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{E}_0 . Такое поле называется плоскомеридианным, так как одинаково во всех меридианах плоскостях $\varphi = \text{const}$.

В этом случае решение уравнения Лапласа

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = 0$$

можно получить методом разделения переменных в виде

$$U(r, \theta) = (Ar + Br^{-2}) \cos \theta + C,$$

где A , B и C — постоянные, которые подлежат определению.

Положим потенциал равным нулю в плоскости, перпендикулярной оси z и проходящей через центр шара: $U(r, \pi/2) = 0$. Отсюда следует $C = 0$. Потенциал внутри шара ($0 \leq r \leq r_0$)

$$U_2(r, \theta) = (A_2 r + B_2 r^{-2}) \cos \theta$$

должен оставаться конечным. Это возможно, если $B_2 = 0$, и поэтому

$$U_2(r, \theta) = A_2 r \cos \theta. \quad (24.60)$$

Потенциал вне шара ($r \geq r_0$)

$$U_1(r, \theta) = (A_1 r + B_1 r^{-2}) \cos \theta \quad (24.61)$$

должен удовлетворять *условию на бесконечности*: при $r \rightarrow \infty$ влияние шара на внешнее («приложенное») поле исчезает. Следовательно, потенциал должен совпадать с потенциалом однородного поля \vec{E}_0 ; в соответствии с (24.16)

$$U_0(z) = \int_z^0 E_0 dz = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta. \quad (24.62)$$

Сравнивая (24.61) и (24.62) при условии $r \rightarrow \infty$, находим $A_1 = -E_0$, т. е. потенциал поля вне шара

$$U_2(r, \theta) = (-E_0 r + B_1 r^{-2}) \cos \theta. \quad (24.63)$$

Две константы A_2 и B_1 определяем, подчиняя поля (24.60) и (24.63) граничным условиям (24.19) и (24.20) на поверхности шара при $r = r_0$:

$$U_1 = U_2; \quad \varepsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial r}. \quad (24.64)$$

Здесь учтено, что $\sigma = 0$, а нормалью к границе служит ось r . Два граничных условия (24.64) приводят к системе уравнений

$$A_2 r_0 = -E_0 r_0 + B_1 r_0^{-2}, \quad \epsilon_2 A_2 = \epsilon_1 (-E_0 - 2B_1 r_0^{-3}),$$

из которой определяют A_2 и B_1 . Окончательные выражения для потенциалов:

$$U_1 = -E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{r_0^3}{r^2} E_0 \cos \theta = U_0 + U_p, \quad (24.65)$$

$$U_2 = -\frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0 r \cos \theta = -\frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0 z. \quad (24.66)$$

Из (24.66) следует, что поле внутри шара, как и приложенное поле, является однородным. Эквипотенциальные плоскости $U_2 = \text{const}$ перпендикулярны оси z . Распределение потенциала $U = U_{1,2}$ вдоль оси z при $\epsilon_2 > \epsilon_1$ показано на рис. 24.21б. Пунктирная прямая — потенциал приложенного поля $U_0 = -E_0 z$. При приближении к поверхности шара происходит «деформация поля» (непрерывный переход от U_0 к $U_{1,2}$).

24.7.2. Электрический (дипольный) момент шара

Потенциал (24.65) поля вне шара имеет две составляющие: к потенциальному U_0 добавляется потенциал U_p . Эта «добавка» — поле связанных зарядов, которые находятся на поверхности шара. В случае $\epsilon_2 > \epsilon_1$ в результате поляризации слева (при $z < 0$) собираются отрицательные заряды, а на правом полушарии (при $z > 0$) — положительные.

Зависимость U_p от координат ($U_p \approx \cos \theta / r^2$) позволяет уподобить шар электрическому диполю, помещенному в точку O при условии, что среда всюду имеет проницаемость ϵ_1 . Действительно, в соответствии с (24.31) дипольный потенциал $U = p \cos \theta / (4\pi \epsilon_1 r^2)$. Сравнение выражений U и U_p из (24.65) приводит к формуле для эквивалентного дипольного момента шара:

$$\vec{p} = 4\pi \epsilon_1 r_0^3 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \vec{E}_0. \quad (24.67)$$

Модуль момента пропорционален напряженности E_0 . При $\epsilon_2 > \epsilon_1$ направления \vec{p} и \vec{E}_0 совпадают; при $\epsilon_2 < \epsilon_1$ направления противоположны (на левом полушарии собираются положительные заряды).

Теперь потенциал вне шара можно записать в виде

$$U_1 = -E_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_1 r^2}, \quad (24.68)$$

причем в (24.68) при $\epsilon_2 < \epsilon_1$ момент $p < 0$.

24.7.3. Напряженность поля

Поскольку $\vec{E}_1 = -\nabla U_1$, из (24.68) легко получаются выражения для двух составляющих вектора напряженности внешнего поля:

$$E_{1r} = -\frac{\partial U_1}{\partial r} = E_0 \cos \theta + \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_1 r^3}, \quad (24.69)$$

$$E_{1\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} = -E_0 \sin \theta + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_1 r^3}. \quad (24.70)$$

При $\epsilon_2 > \epsilon_1$ (когда $p > 0$) напряженность E_{1r} максимальна у полюсов шара в точках 1 и 3 при $\theta = \pi$ и $\theta = 0$ (рис. 24.22). На экваторе в точках 2 и 4 при $\theta = \pm\pi/2$ имеется только касательная составляющая ($E_{1r} = 0$).

Вектор напряженности внутреннего поля согласно (24.66) имеет одну составляющую $E_{2z} = -\partial U_2 / \partial z$; в векторной форме

$$\vec{E}_2 = \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \vec{E}_0, \quad (24.71)$$

т. е. внутри шара поле однородно и вектор \vec{E}_2 по направлению совпадает с приложенным полем \vec{E}_0 (см. рис. 24.22). При $\epsilon_2 > \epsilon_1$ происходит ослабление поля и $E_2 < E_0$; если $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$, то $E_2 \ll E_0$. При этом почти утраивается напряженность поля у полюсов вне шара. При $\epsilon_2 < \epsilon_1$ внутреннее поле $E_2 \approx E_0$. Например, в случае $\epsilon_1 = 10\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$ (воздушное включение) $E_2 \approx 1,5E_0$. Такая ситуация может привести к развитию пробоя изоляции из-за электрического разряда внутри включения.

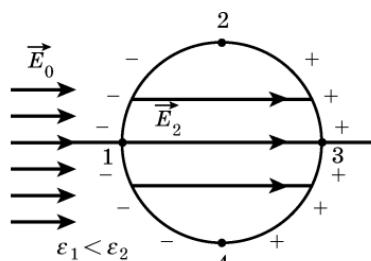


Рис. 24.22

24.7.4. Проводящий (металлический) шар

Найденное решение распространим на случай проводящего шара. Для этого достаточно принять $\epsilon_2 \rightarrow \infty$. Тогда из (24.66) следует, что потенциал шара $U_2 = 0$ (проводящее тело эквипотенциально, а точка отсчета была выбрана в центре). Из (24.71) вытекает естественный результат: $\vec{E}_2 = 0$.

Для дипольного момента шара из (24.67) получаем:

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_1 r_0^3 \vec{E}_0.$$

Напряженность внешнего поля определяется формулами (24.69) и (24.70). На поверхности шара при $r = r_0$ имеется только нормальная составляющая $E_{1r} = 3E_0 \cos\theta$; $E_{1\theta} = 0$. В диэлектрике на экваторе $E_1 = 0$, а у полюсов шара $E_1 = 3E_0$. Этот эффект может быть причиной пробоя изоляции «на проводящем включении». Например, в электрофарфоре, имеющем электрическую прочность 20 кВ/мм, при наличии локального металлического дефекта пробой может начаться уже при напряженности 6,67 кВ/мм. Отметим, что размер дефекта (радиус шара) роли не играет.

24.7.5. Коэффициент деполяризации

Если поле \vec{E}_0 создано в воздухе ($\epsilon_1 = \epsilon_0$), то связанные заряды и их «добавочное» поле \vec{E}_p есть результат поляризации только диэлектрика, из которого сделан шар. На основании принципа суперпозиции, используя (24.71), найдем это поле внутри шара:

$$\vec{E}_p = \vec{E}_2 - \vec{E}_0 = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_2}{2\epsilon_0 + \epsilon_2} \vec{E}_0. \quad (24.72)$$

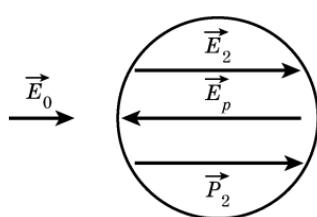


Рис. 24.23

Так как $\epsilon_0 - \epsilon_2 < 0$, однородное поле \vec{E}_p направлено навстречу приложенному; его называют «полем деполяризации» (рис. 24.23).

Принято выражать \vec{E}_p через вектор поляризации $\vec{P}_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \vec{E}_2$. Тогда (24.72) с учетом (24.71) можно переписать в виде

$$\vec{E}_p = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}_2 = -\frac{N}{\epsilon_0} \vec{P}_2, \quad (24.73)$$

где $N = 1/3$ — коэффициент деполяризации для шара.

Примечания:

- Любой эллипсоид в однородном поле поляризуется однородно, но его внутреннее поле \vec{E}_2 зависит от направления \vec{E}_0 относительно осей. В этом случае формулой (24.73) вводятся три разных коэффициента деполяризации.
- При $\epsilon_2 > \epsilon_1$ напряженность $E_2 < E_0$, но смещение D_2 внутри шара больше, чем смещение $D_0 = \epsilon_1 E_0$ однородного поля: с учетом (24.71)

$$D_2 = \epsilon_2 E_2 = \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} D_0 > D_0.$$

Однако даже при $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$ смещение D_2 только в три раза превышает D_0 , что является следствием эффекта деполяризации.

§ 24.8. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

24.8.1. Емкость конденсатора

Рассмотрим систему двух проводящих тел, расположенных в диэлектрике с проницаемостью $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$. Заряды тел равны по величине и обратны по знаку, а потенциалы — U_1 и U_2 (рис. 24.24). Такая система называется конденсатором.

Емкость конденсатора — положительная величина, определяемая выражением

$$C = \left| \frac{q}{U_1 - U_2} \right|, \quad (24.74)$$

зависит только от конфигурации тел, их взаимного расположения и диэлектрической проницаемости среды. Допускается присутствие других незаряженных тел.

Примечание. В предположении, что второе тело удалено в бесконечность, используется понятие емкости уединенного тела $C = q/U$, где U — его потенциал относительно бесконечно удаленных точек. Например, потенциал металлического шара (см. 24.3.1) $U = q/(4\pi\epsilon r_0)$ и, следовательно, емкость шара $C = 4\pi\epsilon r_0$.

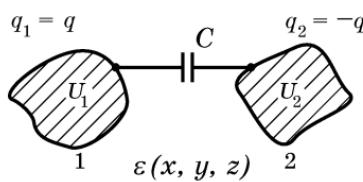


Рис. 24.24

Расчет емкости фактически сводится к расчету поля [10]. В соответствии с определением (24.74) можно назвать два подхода. В первом случае задаются зарядом q , рассчитывают поле \vec{E} и затем — разность потенциалов $U_1 - U_2$. При втором подходе задаются потенциалами тел U_1 и U_2 , а определению подлежит заряд q .

Примечание. Если заряд и поле изменяются во времени, ток смещения через любую поверхность S , охватывающую первое тело,

$$i^{\text{cm}} = \oint_S \vec{J}^{\text{cm}} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \frac{\partial q}{\partial t} = C \frac{\partial}{\partial t} (U_1 - U_2).$$

Здесь для получения «ВАХ конденсатора» использованы два постулата Максвелла — ток смещения (23.11) и третье уравнение поля (23.23). В ТЦ при записи ВАХ емкостного элемента $i = C(dU/dt)$, где i — ток проводимости, учитывается также принцип непрерывности полного тока (23.13).

24.8.2. Частичные емкости

Пусть система состоит из n проводящих тел с зарядами q_1, q_2, \dots, q_n и потенциалами U_1, U_2, \dots, U_n . Потенциалы определены относительно ($n + 1$)-го проводника («земля», экран, корпус прибора), потенциал которого равен нулю. В этом случае в заряде k -го тела можно выделить отдельные составляющие, каждая из которых в соответствии с (24.74) выражается через разность потенциалов k -го тела и всех остальных тел, в том числе и «земли»:

$$q_k = C_{k1}(U_k - U_1) + \dots + C_{ki}(U_k - U_i) + \\ + C_{kk}U_k + \dots + C_{kn}(U_k - U_n). \quad (24.75)$$

Собственная частичная емкость $C_{kk} = |q_k/U_k|$ при $U_1 = \dots = U_k = \dots = U_n$. Взаимная частичная емкость $C_{ki} = |q_k/U_i|$ при $U_1 = \dots = U_k = \dots = U_n = 0$. Можно показать, что $C_{ki} = C_{ik}$ (принцип взаимности).

Примечание. Собственная емкость C_{kk} не равна емкости такого же единственного тела.

Рассмотрим систему, состоящую из двух проводящих тел ($n = 2$). На рис. 24.25 изображены передающие полосковые линии. Они образованы длинными металлическими пластинами («прямые провода»), находящимися над заземленной плоскостью

(«обратный провод»). Для описания линий используем линейные плотности зарядов τ_1 и τ_2 и «погонные» частичные емкости:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= C_{11}U_1 + C_{12}(U_1 - U_2); \\ \tau_2 &= C_{12}(U_2 - U_1) + C_{22}U_2.\end{aligned}\quad (24.76)$$

Этой системе уравнений соответствует показанная на рис. 24.25 схема включения емкостей.

Приведем пример действия емкостной (электрической) связи между двумя линиями. Если к первой линии подключен источник напряжения $U_1 = U_0$, а вторая линия изолирована ($\tau_2 = 0$), то из второго уравнения в (24.76) находится «наведенное» напряжение на второй линии:

$$U_2 = C_{12}U_0/(C_{12} + C_{22}).$$

Этот же результат можно получить по формуле емкостного делителя напряжения. Из первого уравнения в (24.76) определяется погонный заряд на первой линии $\tau_1 = [C_{11} + C_{12}C_{22}/(C_{12} + C_{22})]U_0$.

Приведенную конструкцию можно рассматривать иначе, а именно, как двухпроводную линию (пластины — прямой и обратный провода) над проводящей плоскостью. Погонная емкость такой линии рассчитывается по схеме включения емкостей: учитывая, что C_{11} и C_{22} соединены последовательно, можно записать $C = C_{12} + C_{11}C_{22}/(C_{11} + C_{12})$.

Примечание. Величина C — это «конденсаторная емкость» двух тел. Ее нельзя отождествлять со взаимной емкостью ($C \neq C_{12}$).

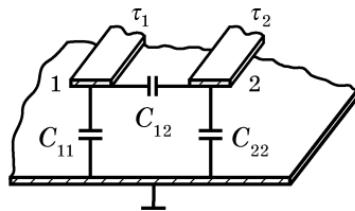


Рис. 24.25

24.8.3. Емкостные коэффициенты

Систему (24.75) перепишем, раскрывая скобки и группируя множители при U_i . Получим систему уравнений, в которых заряд каждого тела есть линейная функция потенциалов всех тел:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \beta_{11}U_1 + \beta_{12}U_2 + \dots + \beta_{1n}U_n; \\ \dots\dots\dots \\ q_n = \beta_{n1}U_1 + \beta_{n2}U_2 + \dots + \beta_{nn}U_n. \end{array} \right. \quad (24.77)$$

Входящие в уравнения (24.77) величины β_{ik} называются емкостными коэффициентами (собственными — при $i = k$ и взаимными — при $i \neq k$). Как видно, $\beta_{kk} = C_{1k} + C_{2k} + \dots + C_{nk} > 0$; взаимный коэффициент $\beta_{ik} = -C_{ik} < 0$. Уравнения (24.76) двух связанных линий принимают вид:

$$\begin{cases} \tau_1 = (C_{11} + C_{12})U_1 - C_{12}U_2 = \beta_{11}U_1 + \beta_{12}U_2; \\ \tau_2 = -C_{12}U_1 + (C_{22} + C_{12})U_2 = \beta_{21}U_1 + \beta_{22}U_2. \end{cases}$$

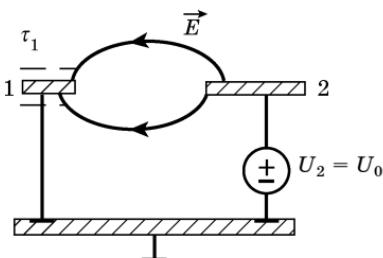
Отметим аналогию полученных уравнений и уравнений МУН при двух независимых узлах: $\beta_{11} = C_{11} + C_{12}$ и $\beta_{22} = C_{22} + C_{12}$ — суммы емкостей, сходящихся в первом и втором узлах; $\beta_{12} = \beta_{21} = -C_{12}$ — емкость, соединяющая первый узел со вторым, взятая со знаком минус. При этом равенство $\beta_{12} = \beta_{21}$ выражает принцип взаимности.

Если первая линия заземлена, а $U_2 = U_0$, индуцированный заряд $\tau_1 = \beta_{12}U_0$ (рис. 24.26а). При заземлении второй линии ($U_2 = 0$) и $U_1 = U_0$ (рис. 24.26б) индуцированный заряд $\tau_2 = \beta_{21}U_0$. Заряды в обоих опытах равны. Здесь усматривается аналогия с принципом взаимности в теории цепей, где речь идет о переносе единственного в цепи источника из одной ветви в другую.

Коэффициенты системы (24.77) образуют емкостную матрицу $[\beta]$. Она используется при расчетах двухпроводной и трехфазной линий передачи, а также различных цепей сверхвысоких частот (фильтры, направленные ответвители, цепи связи).

Примечание. Если заряды известны, систему (24.77) можно решить относительно потенциалов: $U_k = \alpha_{k1}q_1 + \alpha_{k2}q_2 + \dots + \alpha_{kn}q_n$. Величины α_{ik} называются потенциальными коэффициентами.

а)



б)

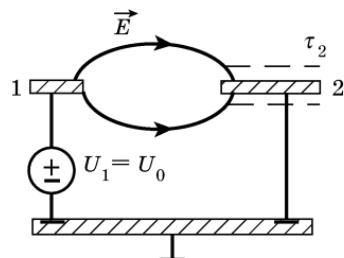


Рис. 24.26

§ 24.9. РАСЧЕТ ПОГОННОЙ ЕМКОСТИ ПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ МЕТОДОМ СРЕДНИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

24.9.1. Постановка задачи

Полосковая линия образована двумя параллельными металлическими пластинаами и внутренней пластиной шириной W , находящейся на границе раздела двух диэлектрических слоев толщиной h_1 и h_2 (рис. 24.27а). Предполагается, что внешние заземленные пластины и диэлектрические слои имеют бесконечную протяженность в направлении y , а толщина внутренней пластины пренебрежимо мала. Требуется найти погонную емкость линии.

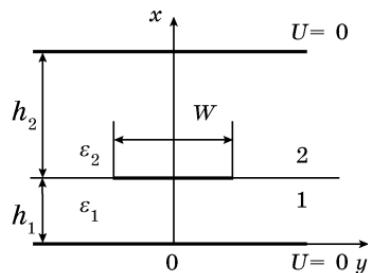
На основании (24.74) искомая емкость $C = \tau/U$, где τ — линейная плотность заряда на внутренней пластине, а U — ее потенциал.

При заданном потенциале расчет должен быть направлен на отыскание заряда и, прежде всего — поверхностной плотности $\sigma(y)$. Подчеркнем, что потенциал пластины $U = \text{const}$, тогда как заряд распределен неравномерно; его плотность максимальна на краях при $|y| = W/2$. На рис. 24.27б показаны качественные зависимости $U(h_1, y)$ и $\sigma(y)$. При удалении от пластины в направлении оси y вдоль границы $x = h_1$ потенциал $U \rightarrow 0$.

Примечание. Согласно определениям, приведенным в 24.2.3, расчет емкости сводится к решению прямой краевой задачи для уравнения Лапласа в кусочно-однородной области при заданных потенциалах.

Применим другой, приближенный подход к расчету емкости (*от заряда к потенциальному*), для чего воспользуемся методом средних потенциалов (методом Г. Хоу) [10].

а)



б)

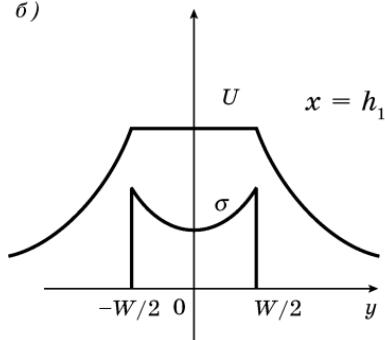


Рис. 24.27

Поскольку истинное (равновесное) распределение $\sigma(y)$ неизвестно, примем допущение о том, что заряд распределен равномерно: $\sigma(y) = \sigma = \text{const}$. При этом, естественно, пластина оказывается неэквипотенциальной. Однако ей приписывается постоянный потенциал U_{cp} , равный среднему значению потенциала во всех точках пластины. Емкость можно искать по формуле $C = \sigma W / U_{\text{cp}}$.

24.9.2. Решение уравнения Лапласа спектральным методом

Для расчета среднего потенциала найдем его распределение на границе раздела диэлектрических слоев при «известной» ($\sigma = \text{const}$) плотности заряда на пластине. Поле линии в поперечном сечении является плоскопараллельным, и потенциалы $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ в слоях 1 и 2 удовлетворяют уравнению Лапласа (24.18)

$$\frac{\partial^2 U_{1,2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{1,2}}{\partial y^2} = 0, \quad (24.78)$$

которое можно преобразовать, используя интегральное преобразование Фурье по координате y .

Введем спектральную функцию потенциала:

$$F[U_{1,2}(x, y)] = \tilde{U}_{1,2}(x, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{1,2}(x, y) e^{-j\beta y} dy.$$

Так как $U_{1,2} \rightarrow 0$ и $\partial U_{1,2} / \partial y \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$, то спектральная функция второй производной $F[\partial^2 U_{1,2} / \partial y^2] = -\beta^2 \tilde{U}_{1,2}$, т. е. уравнение (24.78) с частными производными переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \tilde{U}_{1,2}}{dx^2} - \beta^2 \tilde{U}_{1,2} = 0. \quad (24.79)$$

Решение (24.79) имеет простой вид:

$$\tilde{U}_{1,2}(x, \beta) = A_{1,2} e^{\beta x} + B_{1,2} e^{-\beta x}. \quad (24.80)$$

Для определения постоянных интегрирования спектральные функции потенциалов нужно подчинить краевым условиям задачи и граничным условиям (24.19) и (24.20):

$$\begin{cases} \tilde{U}(0, \beta) = 0; \quad \tilde{U}_2(h_1 + h_2, \beta) = 0; \\ \tilde{U}_1(h_1, \beta) = \tilde{U}_2(h_1, \beta); \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \tilde{U}_1(h_1, \beta)}{\partial x} - \varepsilon_2 \frac{\partial \tilde{U}_2(h_1, \beta)}{\partial x} = \tilde{\sigma}(\beta), \end{cases} \quad (24.81)$$

где $\tilde{\sigma}(\beta)$ — спектральная функция поверхностной плотности заряда $\sigma(y)$ на внутренней пластине.

Используя (24.80) и (24.81), можно получить, например, решение для первой области:

$$\tilde{U}_1(x, \beta) = \frac{\tilde{\sigma}(\beta) \operatorname{sh}(\beta x)}{\beta [\varepsilon_1 \operatorname{ch}(\beta h_1) + \varepsilon_2 \operatorname{sh}(\beta h_1) \operatorname{cth}(\beta h_2)]}. \quad (24.82)$$

Приняв в соответствии с идеей метода средних потенциалов $\sigma(y) = 1$ при $|y| \leq W/2$ и $\sigma(y) = 0$ при $y \geq W/2$, находим спектральную функцию «прямоугольного импульса» $\sigma(y)$:

$$\tilde{\sigma}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(y) e^{-j\beta y} dy = \frac{2}{\beta} \sin \frac{\beta W}{2}. \quad (24.83)$$

После подстановки (24.83) в (24.82) получаем на границе раздела слоев ($x = h_1$):

$$\tilde{U}(h_1, \beta) = \frac{2 \sin(\beta W / 2)}{\beta^2 [\varepsilon_1 \operatorname{cth}(\beta h_1) + \varepsilon_2 \operatorname{cth}(\beta h_2)]}. \quad (24.84)$$

Обратное преобразование Фурье позволяет найти искомое распределение потенциала:

$$U(h_1, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(h_1, \beta) e^{j\beta y} d\beta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{U}(h_1, \beta) \cos \beta y d\beta, \quad (24.85)$$

причем в (24.85) учтено, что $\tilde{U}(h_1, \beta)$ — вещественная функция.

24.9.3. Определение емкости

Среднее значение потенциала на внутренней пластине линии

$$U_{cp} = \frac{2}{W} \int_0^{W/2} U(h_1, y) dy. \quad (24.86)$$

Подставляя (24.85) в (24.86) и выполняя интегрирование по y , получаем

$$U_{\text{cp}} = \frac{2}{\pi W} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{U}(h_l, \beta)}{\beta} \sin \frac{\beta W}{2} d\beta.$$

Поскольку при $\sigma(y) = 1$ $C = W/U_{\text{cp}}$, окончательное выражение для расчета погонной емкости линии с учетом (24.84) принимает вид:

$$C = \frac{\pi W^2}{4} \left[\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\beta W/2)}{\beta^3 [\epsilon_1 \operatorname{cth}(\beta h_l) + \epsilon_2 \operatorname{cth}(\beta h_2)]} d\beta \right]^{-1}.$$

Примечания:

1. Метод средних потенциалов базируется на задании фиктивного распределения зарядов. Он дает заниженное значение емкости. Это следует из того, что энергия электростатического поля $W^s = q^2/2C$ при равновесном распределении зарядов минимальна (емкость максимальна).
2. Погрешность метода тем меньше, чем ближе истинное распределение заряда к равномерному.
3. Выбор фиктивного распределения зарядов может быть различным; он зависит от конкретной задачи. Например, при расчете емкостных коэффициентов системы параллельных проводников (линии передачи, фильтры сверхвысоких частот) предполагают, что линейные заряды локализованы на осях.

ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

§ 25.1. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

25.1.1. Дифференциальные уравнения поля

Постоянный ток — это физический процесс, заключающийся в равномерном движении электрических зарядов в проводнике под действием постоянного электрического поля.

Система дифференциальных уравнений поля тока получается из основных уравнений поля при условии независимости функций поля от времени.

Из второго уравнения Максвелла (23.16) получаем

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (25.1)$$

Согласно (25.1) электрическое поле постоянного тока, как и поле электростатическое, является потенциальным.

Примечание. В каждой точке проводника происходит смена во времени одних зарядов другими. Это не сказывается на их общем распределении, которое остается неизменным (стационарным). В этом смысле электрическое поле подобно электростатическому полю аналогично распределенных неподвижных зарядов [20].

При отсутствии токов смещения условие замкнутости линий полного тока (23.13) принимает вид

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0. \quad (25.2)$$

Согласно (25.2) векторные линии постоянного тока всегда замкнуты. В ТЦ постоянный ток может протекать только в замкнутых контурах.

Примечание. К уравнению (25.2) приводит также уравнение непрерывности (23.2.9) при условии стационарности — неизменности плотности зарядов ($\rho = \text{const}$).

В линейных изотропных средах (25.1) и (25.2) дополняются уравнением связи — законом Ома в дифференциальной форме

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}. \quad (25.3)$$

Для описания потенциального электрического поля в проводниках можно ввести, как в электростатическом поле, скалярный потенциал U соотношением, подобным (24.13):

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U. \quad (25.4)$$

Эквипотенциальные поверхности $U(x, y, z) = \text{const}$ пересекаются линиями \vec{E} и \vec{J} под прямым углом; линии тока направлены в сторону убывания потенциала.

После подстановки (25.4) в (25.3) и далее в (25.2) можно записать уравнение для потенциала: $\operatorname{div}(\gamma \operatorname{grad} U) = 0$. В однородных проводниках с постоянной удельной проводимостью ($\gamma = \text{const}$) с учетом тождества $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U$ получаем:

$$\Delta U = 0. \quad (25.5)$$

Потенциал поля постоянного тока удовлетворяет уравнению Лапласа.

25.1.2. Интегральные уравнения поля. Законы Кирхгофа

Уравнению (25.1) соответствует интегральная форма

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (25.6)$$

Циркуляция вектора напряженности поля \vec{E} по произвольному замкнутому контуру l равна нулю. Разность потенциалов (напряжение) между двумя точками контура определяется линейным интегралом (24.15). Следовательно, уравнение (25.6) выражает закон напряжений Кирхгофа (ЗНК).

Интегральная форма второго уравнения поля тока (25.2) имеет вид

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = 0. \quad (25.7)$$

Поток вектора плотности тока проводимости \vec{J} через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю. Поскольку по оп-

релению поток \vec{J} — это ток, то уравнение (25.7) выражает закон токов Кирхгофа (ЗТК) для любого сечения цепи, а в частном случае — для узла.

25.1.3. Границные условия

Рассмотрим границу раздела двух проводников (рис. 25.1 a). Отметим составляющие векторов поля, которые при переходе через границу остаются непрерывными. Прежде всего повторим граничное условие (23.41):

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad (25.8)$$

а соотношение (23.40) при отсутствии тока смещения запишем в виде

$$J_{2n} = J_{1n}. \quad (25.9)$$

Таким образом, в поле постоянного тока на границе раздела всегда непрерывны касательная составляющая вектора \vec{E} и нормальная составляющая вектора \vec{J} .

В то же время, согласно (25.9) и (25.3), нормальная составляющая вектора \vec{E} изменяется скачком: $E_{2n}/E_{1n} = \gamma_1/\gamma_2$. Поэтому при переходе через границу раздела векторы \vec{E} и \vec{J} изменяют направление (рис. 25.1 b). Используя (25.8) и (25.9), можно получить выражение

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad (25.10)$$

которое называется законом преломления векторных линий \vec{E} или \vec{J} .

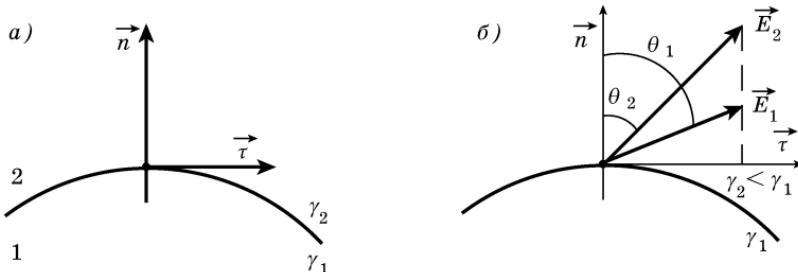


Рис. 25.1

Если $\gamma_2 < \gamma_1$, то на основании (25.10) $\theta_2 < \theta_1$; при переходе во вторую среду векторы поля приближаются к нормали. В некоторых случаях ток переходит из «хорошего» (металлического) проводника в «плохой», так что $\gamma_2 \ll \gamma_1$. В качестве примера можно привести стальной заземлитель ($\gamma_1 \approx 10^6 \text{ См/м}$) в почве ($\gamma_2 \approx 10^{-2} \text{ См/м}$). В этом случае $\operatorname{tg}\theta_2 = \gamma_2 \operatorname{tg}\theta_1 / \gamma_1 \approx 10^{-8} \operatorname{tg}\theta_1$. Под каким бы углом не подходили линии поля к поверхности заземлителя, в почву они выходят практически по нормали. Тогда согласно (25.4) можно приблизенно считать, что поверхность «хорошего» проводника, находящегося в окружении «плохого», является эквипотенциальной.

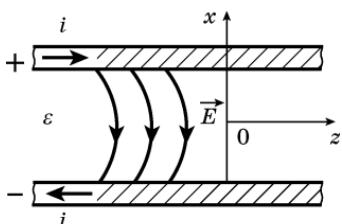


Рис. 25.2

Реальная линия передачи образована металлическими проводниками, находящимися в совершенном диэлектрике (рис. 25.2). При отсутствии тока (нагрузка отключена) поле в диэлектрике ничем не отличается от электростатического: $E = E_x$; проводники эквипотенциальны. Протекание тока приводит к появлению «продольного» поля E_z

и связанной с этим неэквипотенциальности проводников. В соответствии с граничным условием (25.8) это поле направлено вдоль токов в проводниках, так что при $x > 0$ $E_z > 0$, а при $x < 0$ $E_z < 0$. Векторные линии поля искривляются.

Присутствие продольного поля существенно усложняет расчет поля линии. Однако на практике во многих случаях (двухпроводная, кабельная, полосковая линии) можно полагать $E_z \ll E_x$. При этом используются результаты, полученные в «электростатическом приближении». В частности, применяется само понятие и формулы для расчета емкости, строго справедливые только при эквипотенциальных проводниках.

В заключение выразим граничные условия (25.8) и (25.9) через потенциал подобно тому, как это сделано при получении (24.19) и (24.20):

$$U_2 = U_1; \quad \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} = \gamma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n}.$$

Потенциал — непрерывная функция, а его нормальная производная изменяется скачком.

ПРИМЕР 1. Плоский конденсатор с двухслойной изоляцией подключен к источнику постоянного напряжения U_0 . Толщина слоев h_1, h_2 ; диэлектрическая проницаемость материалов ϵ_1, ϵ_2 ; удельная проводимость — γ_1, γ_2 . Найти напряженность электрического поля в каждом слое, а также связанный и свободный заряд на границе слоев.

Имеем пример краевой задачи расчета поля в кусочно-однородной области. В каждом слое поля \vec{E} и \vec{J} однородны, а их векторные линии перпендикулярны границе раздела. Тогда из граничного условия (25.9) следует, что плотности токов в слоях равны ($J_1 = J_2 = J$) и, следовательно, $\gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2$. С другой стороны, разность потенциалов (напряжение) между пластинаами конденсатора $U_0 = E_1 h_1 + E_2 h_2$. Из приведенных соотношений находим выражения для напряженности поля в слоях изоляции:

$$E_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1} U_0; \quad E_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} E_1.$$

В несовершенной изоляции ($\gamma \neq 0$) распределение электрического поля зависит только от соотношения удельных проводимостей.

Поверхностная плотность связанных зарядов на границе слоев определяется разностью поляризаций (24.10):

$$\sigma_{\text{св}} = P_1 - P_2 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) E_1 - (\epsilon_2 - \epsilon_0) E_2.$$

Поверхностная плотность свободных зарядов согласно (24.6)

$$\sigma = D_2 - D_1 = \epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = J \left(\frac{\epsilon_2}{\gamma_2} - \frac{\epsilon_1}{\gamma_1} \right).$$

Следовательно, при $\epsilon_1/\gamma_1 = \epsilon_2/\gamma_2$ свободный заряд на границе слоев отсутствует.

Если диэлектрики идеальные ($\gamma = 0$), поле в конденсаторе электростатическое. Из граничного условия (24.7) следует, что электрические смещения в слоях равны ($D_1 = D_2$) и, следовательно, $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$. Соотношение для напряжения U_0 сохраняется, а выражения для напряженности поля можно

записать, произведя замену γ на ϵ . Распределение электрического поля зависит от соотношения диэлектрических проницаемостей.

Примечание. Решение задачи подключения конденсатора к источнику постоянного напряжения приводит к результату: вначале устанавливается распределение поля «по ϵ », а в установившемся режиме — «по γ » [16].

ПРИМЕР 2. Пространство между параллельными плоскостями заполнено неоднородной проводящей средой, диэлектрическая проницаемость которой $\epsilon = \text{const}$, а удельная проводимость $\gamma = \gamma_1 - ax$, где a — константа; x — координатная ось, перпендикулярная плоскостям. Толщина этого плоского слоя h , напряжение между границами (плоскостями) U_0 . Найти напряженность электрического поля и распределение свободных и связанных объемных зарядов.

В отличие от предыдущего примера здесь удельная проводимость $\gamma(x)$ изменяется непрерывно. При этом поле \vec{J} является однородным, а поле $\vec{E} = \vec{E}(x)$. Действительно, в поле тока $\text{div } \vec{J} = 0$. Так как вектор \vec{J} имеет только одну составляющую J_x , то $\partial J_x / \partial x = 0$, и, следовательно, $J_x = \text{const}$. Напряженность поля $E_x = J_x / \gamma = J_x / (\gamma_1 - ax)$; при этом напряжение

$$U_0 = \int_0^h E_x dx = \frac{J_x}{a} \ln \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - ah}.$$

Определив из этой формулы J_x , получим выражение для напряженности:

$$E_x = \frac{a U_0}{(\gamma_1 - ax) \ln [\gamma_1 / (\gamma_1 - ah)]}.$$

Для нахождения объемных зарядов необходимо использовать дифференциальные уравнения поля (23.20) и (23.22):

$$\rho = \text{div } \vec{D} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial x};$$

$$\rho_{\text{св}} = -\text{div } \vec{P} = -(\epsilon - \epsilon_0) \frac{\partial E_x}{\partial x}.$$

§ 25.2. СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛ

25.2.1. Понятия о сопротивлении и проводимости

Рассмотрим проводящее тело произвольной формы, находящееся в идеальном диэлектрике ($\gamma = 0$); удельная проводимость материала тела $\gamma = \gamma(x, y, z)$. Ток i подводится электродами 1 и 2 (рис. 25.3). Удельная проводимость электродов $\gamma_{\text{эл}} \gg \gamma$. Это неравенство позволяет считать электроды эквипотенциальными и приписать им постоянные потенциалы U_1 и U_2 (см. 25.1.3).

Понятие о сопротивлении базируется на законе Ома: это положительная величина, определяемая выражением

$$R = \left| \frac{U_1 - U_2}{i} \right|. \quad (25.11)$$

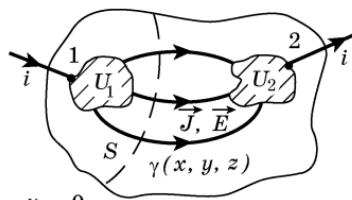


Рис. 25.3

Интегральные величины, входящие в (25.11), запишем через векторные функции \vec{E} и \vec{J} поля тока внутри тела:

$$R = \left| \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \Big/ \int_S \vec{J} d\vec{S} \right|; \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}. \quad (25.12)$$

В формуле (25.12) поверхность S — сечение тела, разделяющее электроды (пунктирная кривая на рис. 25.3). В частности, S может совпадать с поверхностью одного из электродов.

Очевидно, что сопротивление зависит от формы и размеров тела, свойств материала, а также от конфигурации (размеров, форм и взаимного расположения) системы электродов.

Расчет сопротивления сводится к расчету поля. В соответствии с (25.11) используют два подхода. В одном — задаются током и определяют разность потенциалов; в другом — задаются потенциалами электродов, а определяют ток.

Проводимость тела — величина, обратная сопротивлению:

$$G = \left| i / (U_1 - U_2) \right| = \left| \int_S \vec{J} d\vec{S} \Big/ \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \right|. \quad (25.13)$$

Примечания:

1. Тело может иметь неограниченные размеры; тогда условие диэлектрического окружения ($\gamma = 0$) снимается. В этом случае говорят о сопротивлении среды, в которую помещены электроды.
2. Если S — замкнутая поверхность электрода, то при определении тока i следует исключить точку подвода тока к электроду, так как иначе по (25.12) поверхностный интеграл в (25.12) должен быть равен нулю.

ПРИМЕР 3. На проводящем полусферическом слое располагаются электроды, также имеющие форму полусфер. Радиусы электродов r_1 и r_2 (рис. 25.4). Найти сопротивление слоя.

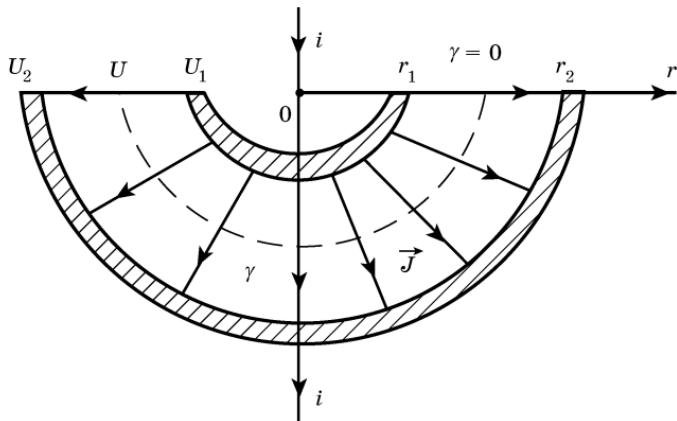


Рис. 25.4

Задаемся током i . Из симметрии конструкции следует, что линии тока радиальные, а эквипотенциали полусферические. Плотность тока в точках полусферы радиуса r равна $J_r = i/(2\pi r^2)$, а напряженность поля $E_r = J_r/\gamma = i/(2\pi\gamma r^2)$. Разность потенциалов (напряжение) между электродами

$$U_1 - U_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{i}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right);$$

следовательно, сопротивление слоя $R = (r_2 - r_1)/(2\pi\gamma r_1 r_2)$.

Примечание. Задача решается элементарно только потому, что электроды — полусфера. Если на слой нанести электроды другой формы, эффективное решение возможно только численными методами.

ПРИМЕР 4. Полусферический электрод радиуса r_0 погружен в проводящее полупространство (рис. 25.5). Найти «сопротивление полупространства».

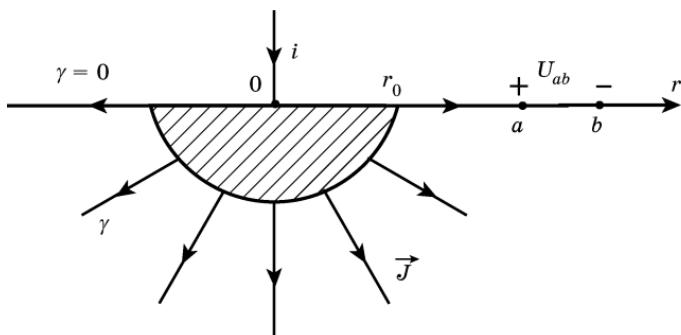


Рис. 25.5

В электротехнике эта конструкция называется «полусферическим заземлителем», а сопротивление — «сопротивлением заземления». Предполагается, что второй электрод располагается «достаточно далеко».

Положив в примере $3 r_1 = r_0, r_2 \rightarrow \infty$, находим

$$R = 1/(2\pi\gamma r_0).$$

Сопротивление заземления зависит только от радиуса электрода. Удельная проводимость почвы (земли) $\gamma = 10^{-2}$ См/м. Тогда, приняв $r_0 = 1,5$ м, получим $R = 10,6$ Ом; уменьшение размеров электрода приводит к росту сопротивления заземления: при $r_0 = 0,15$ м имеем $R = 106$ Ом.

Примечания:

- Хорошее заземление должно иметь малое сопротивление. В этом случае напряжение между заземлителем и точками на земле в его окрестности также мало. Считая $r_a = r_0$ и $r_b = r_0 + h$, получаем $U_{ab} = Ri/(1 + r_0/h)$. Это напряжение при $h = 1$ м называется «шаговым напряжением». Если ток, отводимый в землю, $i = 10$ А, то для большой полусферы $U_{ab} \approx 42$ В, а для меньшей — $U_{ab} \approx 923$ В.
- Сферический заземлитель, находящийся столь глубоко, что поверхность земли «не мешает» растеканию тока и его плотность $J_r = i/(4\pi r^2)$, имеет сопротивление $R = 1/(4\pi\gamma r_0)$.

ПРИМЕР 5. Обратимся к примеру 3 и рассмотрим чертеж на рис. 25.4 как сечение слоя, заключенного между двумя полуцилиндрами. Если длина слоя h , то плотность тока $J_r = i/S$, где $S = \pi r h$ — поверхность полуцилиндра радиуса r . Записав $E_r = J_r/\gamma$ и вычислив напряжение $U_1 - U_2$, находим сопротивление слоя $R = (\ln r_2/r_1)/(\pi\gamma h)$.

Примечание. Сопротивление несовершенной изоляции цилиндрического конденсатора или коаксиального кабеля, отнесенное к единице длины, $R = (\ln r_2/r_1)/(2\pi\gamma)$. Оно называется «сопротивлением утечки» и является важным первичным параметром коаксиальной линии.

25.2.2. Проводник с однородным внутренним полем

На рис. 25.6 представлен цилиндрический проводник с дисковыми электродами. Длина проводника l , площадь сечения S . При условии, что материал проводника однородный ($\gamma = \text{const}$), поля плотности тока \vec{J} и напряженности поля $\vec{E} = \vec{J}/\gamma$ также однородны: $\vec{J} = \text{const}$; $\vec{E} = \text{const}$. В этом случае основное определение сопротивления (25.12) можно переписать в виде $R = El/JS$. Отсюда сле-

дует формула для расчета сопротивления проводников с однородным полем:

$$R = \frac{l}{\gamma S}; \quad (25.14)$$

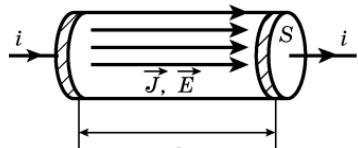


Рис. 25.6

формула для расчета проводимости $G = \gamma S/l$.

Теперь можно предложить следующий метод расчета сопротивления проводящего тела с неоднородным полем: 1) разбиение тела на области с приблизительно однородным полем; 2) расчет сопротивления (проводимости) каждой области согласно (25.14); 3) суммирование сопротивлений областей по правилам последовательного и параллельного соединения резисторов.

Используем этот метод в рассмотренных примерах. В поле полусферического заземлителя областью с однородным полем является бесконечно тонкий полушаровой слой радиуса r : длина (толщина) слоя в направлении тока $dl = dr$, площадь сечения $S = 2\pi r^2$. В соответствии с (25.14) сопротивление этого элементарного слоя

$dR = dr/(2\pi\gamma r^2)$. Так как слои соединены последовательно, $R = \int_{r_0}^{\infty} dR$; отсюда следует уже известный результат: $R = 1/(2\pi\gamma r_0)$.

В коаксиальном кабеле область однородного поля в изоляции — элементарный цилиндрический слой, сопротивление которого (при $h = 1$ м) $dR = dr/2\pi\gamma r$. Слои соединены последовательно; поэтому сопротивление изоляции находится путем интегрирования dR в пределах от r_1 до r_2 .

ПРИМЕР 6. Проводящая пластина имеет толщину h , внутренний радиус r_1 и внешний r_2 (рис. 25.7). Электроды находятся на торцах. Найти сопротивление пластины.

Область с однородным полем — это элементарная трубка тока радиуса r , образованная линиями \vec{J} . Длина трубы $\pi r/2$, сечение $h dr$ и, следовательно, ее сопротивление $dR = \pi r/2 h \gamma dr$. По отношению к электродам трубы соединены параллельно. Проводя суммирование проводимостей трубок, получаем выражение для проводимости пластины: $G = \int_{r_1}^{r_2} (1/dR) = (2\pi\gamma \ln r_2/r_1)/\pi$; сопротивление $R = 1/G$.

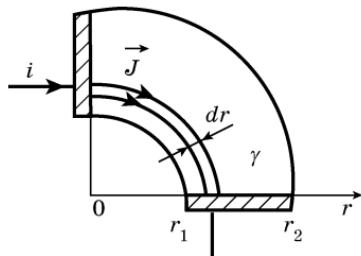


Рис. 25.7

§ 25.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА И ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

25.3.1. Основные уравнения двух полей. Электромоделирование

Для описания поля постоянного тока вне области действия сторонних сил (см. 23.5.1) используются следующие уравнения:

$$\text{rot } \vec{E} = 0; \text{ div } \vec{J} = 0; \Delta U = 0; \vec{J} = \gamma \vec{E}. \quad (25.15)$$

Основные уравнения электростатического поля в области, где отсутствуют свободные заряды ($\rho = 0$), имеют вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \operatorname{div} \vec{D} = 0; \Delta U = 0; \vec{D} = \epsilon \vec{E}. \quad (25.16)$$

Предполагается, что среда — однородная.

Соотношения (25.15) и (25.16) и характеризуемые ими поля при названных ограничениях являются *математически аналогичными*. Перечислим очевидные величины-аналоги:

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{E}, \vec{J} \leftrightarrow \vec{D}, U \leftrightarrow U, \gamma \leftrightarrow \epsilon.$$

Математическая аналогия лежит в основе электромоделирования: исследование электростатического поля проводится на токовой модели. В этом случае область, занимаемая полем, заполняется проводящей средой. Необходимым условием адекватной модели является геометрическое подобие модели и натуры. Кроме того, должны быть аналогичны краевые и граничные условия. Например, электростатическая задача о поле в кусочно-однородной среде с двумя областями (ϵ_1, ϵ_2) требует создания модели с двумя проводящими областями (γ_1, γ_2). При этом для выполнения законов преломления векторных линий (24.9) и (25.10) требуется соблюдение равенства $\gamma_1/\gamma_2 = \epsilon_1/\epsilon_2$.

При исследовании плоскопараллельных электростатических полей (полосковые линии) обычно используются листы проводящей бумаги. Для моделей трехмерных задач (электростатическая линза) применяются слабо проводящие жидкости в электролитических ваннах. Эквипотенциальность электродов (металл) обеспечивается с достаточной точностью, если их удельная проводимость значительно превышает проводимость среды модели (см. 25.1.3).

Сплошную проводящую среду можно заменить «электрической решеткой» из *сосредоточенных* резисторов. Этот метод моделирования основан на математическом описании полей уравнениями в конечных разностях. Он может быть использован при построении модели сложного электротехнического объекта (например, алюминиевого электролизера).

Примечание. Постоянное магнитное поле в области, где отсутствуют токи проводимости, описывается уравнениями (23.31): $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$; $\operatorname{div} \vec{B} = 0$; $\vec{B} = \mu \vec{H}$. Очевидна математическая аналогия с рассмотренными полями.

25.3.2. Аналогия проводимости и емкости

Пусть в слабо проводящей среде расположены два металлических тела (два электрода) с потенциалами U_1 и U_2 (рис. 25.8). Проводимость среды в этой системе согласно (25.13)

$$\begin{aligned} G &= i/(U_1 - U_2) = \\ &= \oint_S \vec{J} d\vec{S} / (U_1 - U_2) = \oint_S \gamma \vec{E} d\vec{S} / (U_1 - U_2), \end{aligned} \quad (25.17)$$

где S — поверхность, окружающая один из электродов. С другой стороны, с учетом (24.74) и (23.23), емкость двух тел

$$\begin{aligned} C &= q/(U_1 - U_2) = \\ &= \oint_S \vec{D} d\vec{S} / (U_1 - U_2) = \oint_S \epsilon \vec{E} d\vec{S} / (U_1 - U_2). \end{aligned} \quad (25.18)$$

Сравнивая выражения (25.17) и (25.18), приходим к выводу: формула для проводимости получается из формулы для емкости при замене ϵ на γ . Если среда однородная, емкость пропорциональна проницаемости и тогда $G = C\gamma/\epsilon$.

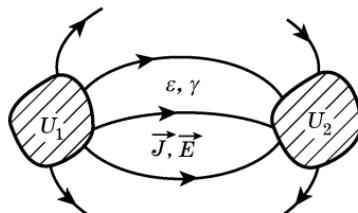


Рис. 25.8

25.3.3. Частичные проводимости

Для описания системы электродов в проводящей среде используются частичные проводимости. Они являются аналогами частичных емкостей (см. 24.8.2). На рис. 25.9а показан пленочный резистор, который имеет один базовый и два входных электрода. Токи i_1 и i_2 можно выразить через потенциалы (напряжения) U_1 и U_2 , записав соотношения, подобные (24.76):

$$\begin{aligned} i_1 &= G_{11} U_1 + G_{12}(U_1 - U_2); \\ i_2 &= G_{21}(U_2 - U_1) + G_{22} U_2, \end{aligned} \quad (25.19)$$

где G_{11} , G_{22} и $G_{12} = G_{21}$ — собственные и взаимные частичные проводимости. Они могут быть определены экспериментально. Например, при условии $U_1 = U_2$ собственные проводимости

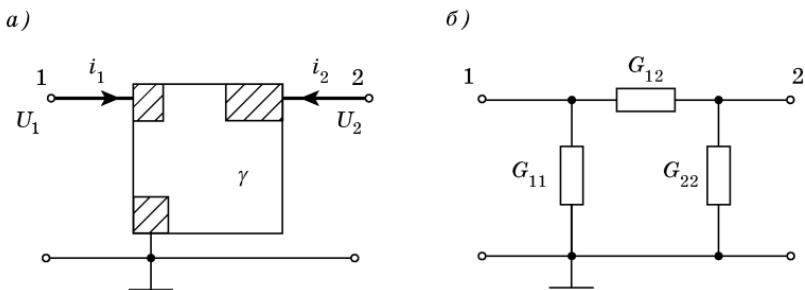


Рис. 25.9

$G_{11} = i_1/U_1$; $G_{22} = i_2/U_2$. При «заземлении» второго электрода ($U_2 = 0$) взаимная проводимость $G_{21} = |i_2/U_1|$.

Уравнениям (25.19) соответствует схема замещения распределенного резистора несимметричным П-образным четырехполюсником (рис. 25.9б). По этой схеме можно найти параметры резистора в различных вариантах включения. Проводимость со стороны первого электрода при отключенном втором (холостой ход) $G_{1x} = G_{11} + G_{12}G_{22}/(G_{12} + G_{22})$; при соединении второго электрода с базовым (короткое замыкание) $G_{1k} = G_{11} + G_{12}$.

25.3.4. Шар в поле тока

Пусть в однородном поле тока находится проводящий шар (рис. 25.10а). Решение этой задачи можно записать на основе математической аналогии полей, произведя в формулах задачи о шаре в электростатическом поле (см. 24.7) замену величин: ϵ_1 на γ_1 , ϵ_2 на γ_2 , \vec{E}_0 на \vec{J}_0 , \vec{D}_0 на \vec{J}_0 .

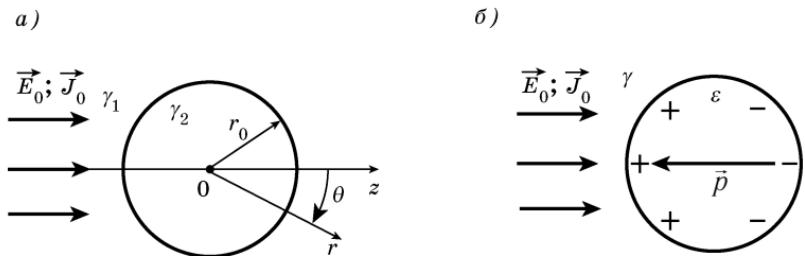


Рис. 25.10

Представляет интерес предельный случай — непроводящий шар с удельной проводимостью $\gamma_2 = 0$ (рис. 25.10б). После преобразований можно получить: 1) ток «огибает» шар, так что при $r = r_0$ имеем $E_{1r} = 0, E_{1\theta} = -1,5E_0 \sin\theta$; 2) внутреннее поле $E_{2z} = 1,5E_0$; 3) дипольный момент шара $\vec{p} = -2\pi\gamma_1 r_0^3 \vec{E}_0 = -2\pi r_0^3 \vec{J}_0$ направлен против тока; 4) свободный заряд на поверхности шара согласно (23.36) $\sigma = D_{1r} - D_{2r} = -D_{2r} = -\epsilon E_{2r} = -\epsilon E_{2z} \cos\theta$ и, следовательно, $\sigma = -1,5\epsilon E_0 \cos\theta = -1,5\epsilon J_0 \cos\theta/\gamma$.

Примечания:

1. Полученные выражения позволяют оценить «дипольное» влияние локального дефекта на однородное поле тока.
2. В электростатике подобную задачу поставить нельзя, так как диэлектрическая проницаемость не может принимать нулевых значений.

25.3.5. Метод эквивалентных токов-изображений

Пусть малый сферический электрод с током i расположен в среде с удельной проводимостью γ_1 на расстоянии h от плоской границы раздела. Удельная проводимость второй среды γ_2 . Для расчета поля можно использовать метод эквивалентных токов-изображений, аналогичный методу эквивалентных зарядов в электростатике (см. 24.4.2). На основании соотношений (24.44) в первую расчетную модель вводится ток-изображение $i' = i(\gamma_1 - \gamma_2)/(\gamma_1 + \gamma_2)$, а во вторую — ток $i'' = 2i\gamma_2/(\gamma_1 + \gamma_2)$. Если $\gamma_2 = 0$, то первая модель содержит два одинаковых тока: $i' = i$.

Примечание. Сказанное справедливо и в отношении «тонких» цилиндрических электролов.

ПРИМЕР 7. Ток подводится к длинной ленте проходящими сквозь нее симметрично расположенным цилиндрическими электродами 1 и 2 (рис. 25.11а). Толщина ленты a , ширина b , удельная проводимость материала γ . Расстояние между осями электролов d , радиус их r_0 . Найти сопротивление ленты при условии «тонких» электролов.

Учтем влияние обеих границ ленты в первом приближении только двумя токами-изображениями $i_3 = i$ и $i_4 = -i$ (рис. 25.11б). Плотность тока каждого электрода на расстоянии r от его оси $J = i/S = i/2\pi r a$, где S — площадь цилиндра. В точке M

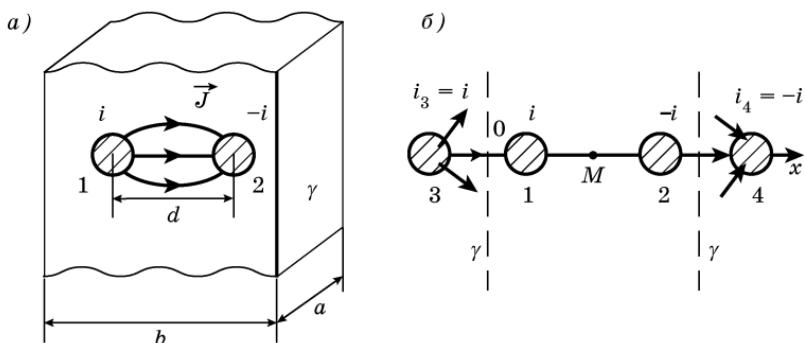


Рис. 25.11

на расстоянии x от начала координат суммируются поля $E = J/\gamma$ электродов 1, 2, 3 и 4 (рис. 25.11 δ):

$$E_x = \frac{i}{2\pi\gamma a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} + \frac{1}{b-d+x} + \frac{1}{b-x} \right).$$

Тогда напряжение

$$U_1 - U_2 = \int_{r_0}^{d-r_0} E_x dx = \frac{i}{\pi\gamma a} \ln \frac{db}{r_0(b-d)},$$

и, следовательно, сопротивление ленты

$$R = \frac{1}{\pi\gamma a} \ln \frac{db}{r_0(b-d)}.$$

Если не учитывать влияние границ и оставить в выражении для E_x только первые слагаемые, то получим $R = \frac{1}{\pi\gamma a} \ln \frac{d}{r_0}$. Эта формула дает заниженное значение сопротивления.

Примечание. Для повышения точности модели необходимо увеличивать число токов-изображений.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, ПОСТОЯННОЕ ВО ВРЕМЕНИ

§ 26.1 ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

26.1.1. Основные уравнения. Границные условия

Система основных дифференциальных уравнений постоянного магнитного поля получается из (23.38) при условии независимости векторных функций поля от времени:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \quad (26.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (26.2)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (26.3)$$

Уравнения свидетельствуют о том, что магнитное поле является вихревым ($\operatorname{rot} \vec{H} \neq 0$); векторные линии магнитной индукции ($\operatorname{rot} \vec{H} \neq 0$); всегда замкнуты.

Границные условия, представляющие собой поверхностную форму дифференциальных уравнений, имеют вид (23.42) и (23.39):

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = J_{sk}; \quad B_{2n} - B_{1n} = 0. \quad (26.4)$$

При отсутствии поверхностного тока проводимости ($\vec{J}_S = 0$) согласно (23.43) $H_{2l} = H_{1l}$ и на границе раздела векторы поля изменяют направление в соответствии с законом преломления $\operatorname{tg}\theta_1/\operatorname{tg}\theta_2 = \mu_1/\mu_2$. Если первая среда — хороший магнетик ($\mu_1 = 100\mu_0$), а вторая среда — немагнитная ($\mu_2 = \mu_0$), то $\operatorname{tg}\theta_2 = 0,01\operatorname{tg}\theta_1$. Как видно, в таких случаях можно считать, что линии поля во второй среде практически перпендикулярны поверхности магнетика.

Примечание. Подобные аналогии имеем в поле постоянного тока (см. формулу (25.10) и рис. 25.1).

26.1.2. Векторный потенциал. Уравнения для потенциала

Второе уравнение поля (26.2) тождественно выполняется, если

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (26.5)$$

Вспомогательная функция $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ называется векторным потенциалом магнитного поля. Потенциал \vec{A} — неоднозначная функция. Для описания заданного поля \vec{B} можно использовать сумму \vec{A} и потенциального вектора $(\vec{A} + \operatorname{grad} \phi)$, так как $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi \equiv 0$.

Получим уравнение для векторного потенциала, используя первое уравнение поля. Подстановка (26.5) в (26.3) и далее в (26.1) приводит к уравнению $\operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{A}) = \vec{J}$. Для однородной среды ($\mu = \text{const}$) имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu \vec{J}. \quad (26.6)$$

Уравнение (26.6) можно упростить, имея в виду отмеченный выше произвол в выборе \vec{A} . Наложим дополнительное условие на поле векторного потенциала. Будем считать, что оно не имеет источников, его векторные линии всегда замкнуты и, следовательно, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. Тогда (26.6) принимает вид векторного уравнения Пуассона

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}. \quad (26.7)$$

В области, где токи проводимости отсутствуют, выполняется уравнение Лапласа $\Delta \vec{A} = 0$.

26.1.3. Векторный потенциал объемных и линейных токов

Векторное уравнение (26.7) эквивалентно трем скалярным. Например, в декартовых координатах имеем: $\Delta A_x = -\mu J_x$, $\Delta A_y = -\mu J_y$, $\Delta A_z = -\mu J_z$. Эти уравнения по форме не отличаются от уравнения Пуассона (24.17) для скалярного потенциала электростатического поля: $\Delta U = -\rho/\epsilon$. Его решением является выражение (24.37), в котором кулоновский потенциал элементарного заряда $dq = \rho dV$ записан в виде $dU = \rho dV / 4\pi\epsilon r$. По аналогии можно записать векторный потенциал элементарного объема dV , плотность тока в котором \vec{J} , в идентичной форме $d\vec{A} = \mu \vec{J} dV / (4\pi r)$. Векторный потенциал соправлен с током (рис. 26.1a).

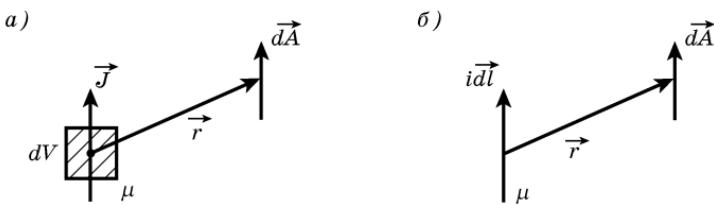


Рис. 26.1

Примечание. В качестве примера использования полученного выражения найдем векторный потенциал поля равномерно движущегося заряда q . Приняв $\vec{J} = \rho \vec{v} = nq\vec{v}$, где n — концентрация зарядов, а \vec{v} — скорость, получим $A_q = d\vec{A} / ndV = \mu q \vec{v} / 4\pi r$.

Рассмотрим линейный ток, протекающий по проводнику, размеры сечения которого весьма малы по сравнению с его длиной l и расстояниями r до точек наблюдения поля. В этом случае $\vec{J} dV = \vec{J} d\vec{S} dl = idl$, где $d\vec{S}$ — векторный элемент сечения, dl — векторный элемент длины проводника, i — ток в проводнике. На рис. 26.1б показан элемент линейного тока idl ; векторный потенциал $d\vec{A} = \mu idl / 4\pi r$.

На основании принципа суперпозиции векторные потенциалы объемного тока, занимающего объем V , и линейного тока в проводнике длиной l , выражаются формулами

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{r} dV; \quad \vec{A} = \frac{\mu i}{4\pi} \int_l \frac{dl}{r}, \quad (26.8)$$

позволяющими по заданному распределению токов найти потенциал \vec{A} , а затем по (26.5) — магнитную индукцию \vec{B} .

ПРИМЕР 1. Двухпроводная линия, поперечное сечение которой представлено на рис. 26.2, образована проводами, радиусы которых значительно меньше расстояния между осями ($r_0 \ll h$). Ток линии (прямой и обратный) равен i . Найти: 1) векторный потенциал поля линии; 2) уравнение векторных линий индукции.

По условиям задачи векторный потенциал имеет только одну составляющую $A_z \neq 0$. Поле является плоскопараллельным и повторяется во всех плоскостях, перпендикулярных

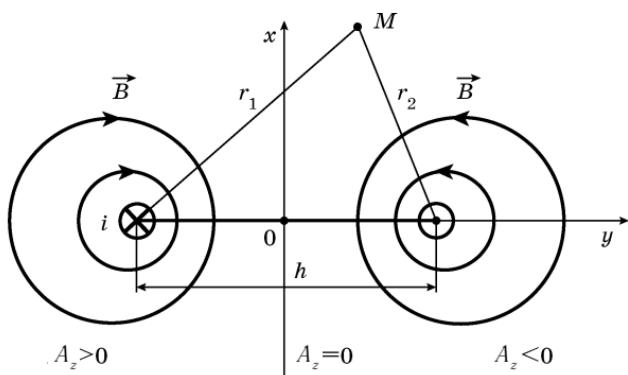


Рис. 26.2

проводам линии. Определение \vec{A} по второму соотношению в (26.8) сводится к интегрированию по z в бесконечных пределах. Однако проще воспользоваться математическим подобием данной задачи и задачи об электростатическом поле двухпроводной линии (см. формулу (24.34) и рис. 24.8). Тогда выражение для векторного потенциала в точке наблюдения M можно записать сразу (ось z направлена от наблюдателя):

$$A_z = \frac{\mu i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

В левой области поля линии ($y < 0$) преобладает влияние тока вдоль z и $A_z > 0$. В правой области поля $A_z < 0$.

Эквипотенциальные линии $A_z = \text{const}$ в плоскости xOy удовлетворяют условию $r_2/r_1 = \text{const}$ и являются окружностями с центрами, смещенными вдоль оси y . В предельном случае ($A_z = 0$) эквипотенциал совпадает с осью x .

Уравнение векторных линий индукции в соответствии с (23.8) $dx/B_x = dy/B_y$; выражения составляющих согласно

$$(26.5) \quad B_x = \text{rot}_x \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = \text{rot}_y \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \text{и, следовательно,}$$

$\frac{\partial A_z}{\partial x} dx + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy = 0$. В точках векторной линии \vec{B} полный дифференциал $dA_z = 0$. Таким образом, векторные линии \vec{B} совпадают с эквипотенциалами \vec{A} .

§ 26.2. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ КРУГЛОГО КОНТУРА (ВИТКА). МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ

26.2.1. Преобразование линейного интеграла

Определим поле линейного кругового контура с током i . Радиус контура r_0 , площадь S (рис. 26.3). Векторный потенциал в точке наблюдения M определяется второй формулой в (26.8):

$$\vec{A} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_l \frac{d\vec{l}}{r}. \quad (26.9)$$

Интеграл в (26.9) можно преобразовать в поверхностный. Обозначив

$$\oint_l d\vec{l}/r = \vec{C}$$

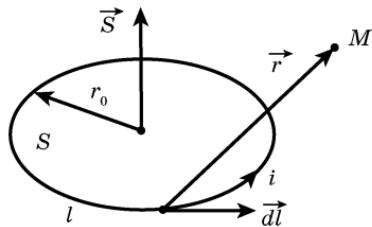


Рис. 26.3

и взяв в декартовых координатах составляющую $C_x = \vec{e}_x \cdot \vec{C}$, перепишем ее по формуле Стокса:

$$C_x = \oint_l \frac{\vec{e}_x}{r} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \frac{\vec{e}_x}{r} d\vec{S}. \quad (26.10)$$

Заметим, что здесь операция rot проводится по координатам точки истока радиуса-вектора \vec{r} . Воспользуемся тождеством векторного анализа

$$\text{rot} \frac{\vec{e}_x}{r} = \frac{1}{r} \text{rot} \vec{e}_x + \left[\text{grad} \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_x \right]. \quad (26.11)$$

В этой формуле первое слагаемое равно нулю, а во втором слагаемом

$$\text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \text{grad} r = \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Подставляя указанное в (26.11) и затем в (26.10), находим

$$C_x = \int_S \frac{[\vec{r} \cdot \vec{e}_x]}{r^3} d\vec{S} = \vec{e}_x \int_S \frac{[d\vec{S} \cdot \vec{r}]}{r^3} = \vec{e}_x \cdot \vec{C}.$$

Таким образом, вместо (26.9) имеем

$$\vec{A} = \frac{\mu i}{4\pi} \int_S \frac{[d\vec{S}\vec{r}]}{r^3}. \quad (26.12)$$

26.2.2. Приближение «больших расстояний». Диполь

Интегралы (26.9) и (26.12) в общем случае приводятся к табличным функциям — полным эллиптическим интегралам [8]. Однако на больших расстояниях при $r \gg r_0$ в (26.12) можно положить $r = \text{const}$, и тогда с достаточной точностью

$$\vec{A} = \frac{\mu i [\vec{S}\vec{r}]}{4\pi r^3}, \quad \vec{S} = \int_S d\vec{S}.$$

Введем вектор — магнитный момент плоского контура

$$\vec{m} = \mu i \vec{S}, \quad (26.13)$$

причем в (26.13) вектор \vec{m} перпендикулярен плоскости контура и связан с направлением тока правилом правого винта. Теперь окончательное выражение для векторного потенциала контура на больших расстояниях можно представить в виде

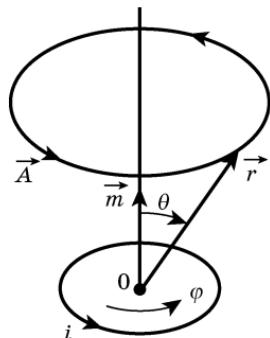


Рис. 26.4

$$\vec{A} = \frac{[\vec{m}\vec{r}]}{4\pi r^3}. \quad (26.14)$$

Для определения напряженности поля поместим \vec{m} в центр сферической системы координат (рис. 26.4). Вектор \vec{A} перпендикулярен плоскости, содержащей \vec{m} и \vec{r} ; линии потенциала — окружности. В соответствии с (26.14) $A_r = A_\theta = 0$; $A_\phi = m \sin \theta / 4\pi r^2$. Вычисляя $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}$ в сферических координатах, получаем:

$$H_r = \frac{2m \cos \theta}{4\pi \mu r^3}; \quad H_\theta = \frac{m \sin \theta}{4\pi \mu r^3}; \quad H_\phi = 0. \quad (26.15)$$

Вектор \vec{H} имеет радиальную и меридианальную составляющие, убывающие с расстоянием как $1/r^3$. Структура поля аналогична структуре поля *электрического диполя* (см. формулу (24.33) и рис. 24.7). По этой причине контур (виток) с током называют *магнитным диполем*.

Примечания:

1. Продолжая аналогию с электростатикой, можно представить виток как двойной слой фiktивных магнитных зарядов, занимающий площадь S (см. пример 2 в 24.3.6).
2. На больших расстояниях характер поля не зависит от формы контуров. Формулы (26.15) используются и для витков некруговой конфигурации.

§ 26.3. СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

26.3.1. «Безвихревое» магнитное поле. Потенциал. Принцип соответствия

В области, где плотность тока проводимости равна нулю, $\operatorname{rot} \vec{H} = 0$ и, следовательно, выполняются условия потенциальности. Для описания поля можно привлечь функцию $U_m = U_m(x, y, z)$ — скалярный потенциал магнитного поля. В этом случае вектор напряженности магнитного поля представляется в виде

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} U_m. \quad (26.16)$$

Знак «минус» берется по аналогии с электростатикой и указывает на то, что вектор \vec{H} направлен в сторону убывания U_m (единица измерения потенциала — А).

Получим уравнение для потенциала, подставив (26.16) в (26.2):

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div}(\mu \vec{H}) = -\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} U_m) = 0.$$

В однородном магнетике ($\mu = \text{const}$) с учетом тождества $\operatorname{div} \operatorname{grad} U_m = \Delta U_m$ имеем $\Delta U_m = 0$. Скалярный потенциал магнитного поля удовлетворяет уравнению Лапласа.

Рассмотрим плоскопараллельное поле цилиндрического провода с током i (рис. 26.5). Ток направлен к наблюдателю (вдоль оси z); на основании (23.15) напряженность поля $H_\phi = i/2\pi r$.

Из соотношения (26.16) следует $H_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U_m}{\partial \phi}$ и, следовательно,

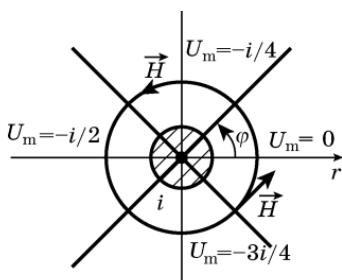


Рис. 26.5.

$U_m = -i\varphi/2\pi + \text{const}$. Считая потенциал равным нулю при $\varphi = 0$, получаем выражение $U_m = -i\varphi/2\pi$. Линии (плоскости) равного потенциала подчиняются уравнению $\varphi = \text{const}$. Это — радиальные линии, проходящие через ось провода. Естественно, физический смысл имеют только их части, расположенные вне провода.

Примечание. Скалярный магнитный потенциал — многозначная функция. Значение φ может быть увеличено на $2\pi k$, где k — целое число. Однако при расчете, например, магнитных цепей используется разность магнитных потенциалов (магнитное напряжение участка цепи).

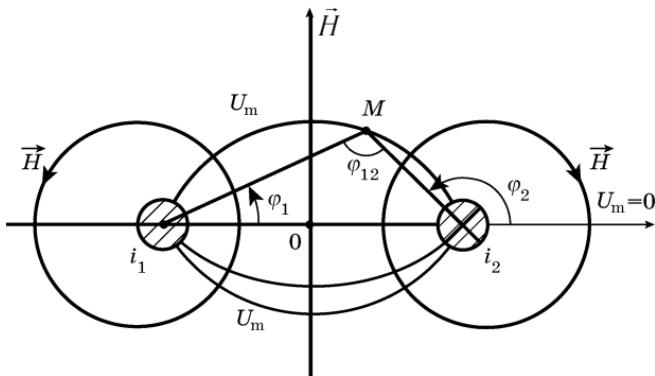


Рис. 26.6

Потенциал поля двухпроводной линии можно найти, применяя принцип наложения (рис. 26.6). Потенциал в точке M с учетом того, что $i_2 = -i_1 = -i$, имеет вид $U_m = i(\varphi_2 - \varphi_1)/2\pi = i\varphi_{12}/2\pi$. Уравнение линий равного потенциала $\varphi_{12} = \text{const}$. Эти линии являются дугами окружностей, проходящих через оси проводов.

Сравнивая картины магнитного поля линейных токов и электростатического поля линейного заряда (см. рис. 24.5) и двухпроводной линии (см. рис. 24.8), можно заметить «принцип соответствия полей»: эквипотенциали U_m находятся на месте векторных линий \vec{E} ; векторные линии \vec{H} совпадают с эквипотенциалами U .

Примечания:

- Если радиус проводов линии сравним с расстоянием между ними, в электростатическом поле контур сечения провода остается эквипотенциальным. Но магнитная линия не совпадает с этим контуром: на поверхности «толстого» провода вектор \vec{H} имеет не только касательную, но и нормальную составляющую.
- Рассматривая соотношения (26.15) как составляющие вектора $(-\operatorname{grad}U_m)$, можно найти выражение для скалярного потенциала поля магнитного диполя: $U_m = \bar{m} \vec{r} / 4\pi\mu r^3$.

ПРИМЕР 2. Сферическая оболочка радиуса r_0 , несущая равномерно распределенный заряд $q > 0$, вращается вокруг оси z (рис. 26.7). Частота вращения равна n (1/с); магнитная проницаемость всюду μ_0 . Найти напряженность поля внутри и вне оболочки.

Вращающаяся оболочка представляет собой сферический поверхностный ток. Чтобы найти его распределение, выделим элементарное кольцо радиуса $R = r_0 \sin\theta$. Заряд, находящийся на этом кольце, $dq = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi R r_0 d\theta = 2\pi\sigma r_0^2 \sin\theta d\theta$, где $\sigma = q/4\pi r_0^2$ — поверхностная плотность заряда. Соответствующий кольцевой ток (заряд, переносимый за секунду) $di = ndq$, а плотность поверхностного тока $J_{sq} = di/(r_0 d\theta)$. После простых преобразований получаем $J_{sq}(\theta) = q n \sin\theta / (2r_0)$.

Поскольку и внутри, и вне оболочки токи отсутствуют, магнитное поле описывается скалярным потенциалом, удовлетворяющим уравнению Лапласа $\Delta U_m = 0$. Поле имеет осевую симметрию ($\partial U_m / \partial \varphi = 0$), и общее решение уравнения можно записать так же, как в электростатической задаче о шаре (см. 24.7.1): $U_m(r, \theta) = (Ar + D/r^2)\cos\theta + C$. Положив в плоскости экватора $U_m(r, \pi/2) = 0$, получим $C = 0$. В центре ($r = 0$) и в бесконечности ($r \rightarrow \infty$) потенциал и его производные, т. е. \vec{H} , должны быть конечны. Поэтому внутри оболочки скалярный потенциал $U_{m1}(r, \theta) = A \cos\theta$, а во внешней области $U_{m2}(r, \theta) = D \cos\theta / r^2$.

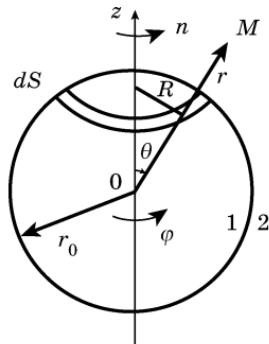


Рис. 26.7

Для определения констант A и D воспользуемся граничными условиями (26.4), записав их в сферической системе координат. При $r = r_0$ должны выполняться соотношения: $H_{2\theta} - H_{1\theta} = J_{S\phi}$; $B_{2r} = B_{1r}$. Принимая во внимание, что $\vec{H} = -\operatorname{grad}U_m$ и среда однородна, получим

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_{m1}}{\partial \theta} - \frac{\partial U_{m2}}{\partial \theta} \right) = J_{S\phi}; \quad \frac{\partial U_{m1}}{\partial r} = \frac{\partial U_{m2}}{\partial r}.$$

После подстановки сюда выражений для $U_{m1}(r, \theta)$, $U_{m2}(r, \theta)$ и $J_{S\phi}(\theta)$ приходим к двум уравнениям для расчета A и D :

$$-A + D/r_0^3 = qn/2r_0; \quad A + 2D/r_0^3 = 0.$$

Вычисляя градиенты известных потенциалов, окончательно получаем:

$$H_1 = H_{1z} = qn/3r_0;$$

$$H_{2r} = qnr_0^2 \cos \theta / 3r^3;$$

$$H_{2\theta} = qnr_0^2 \sin \theta / 6r^3.$$

Поле внутри оболочки однородное; векторные линии направлены вдоль оси вращения. Поле вне оболочки ($r > r_0$) подобно полю магнитного диполя, помещенного в ее центр.

Сравнивая полученные выражения для H_{2r} и $H_{2\theta}$ с (26.15), найдем эквивалентный магнитный момент вращающейся сферы: $m = 2\pi\mu_0 r_0^2 nq/3$. Момент направлен вдоль оси z в соответствии с направлением поверхностных токов.

26.3.2. Математическая аналогия магнитного и электростатического полей. Магнитостатика

Магнитное поле в области, не содержащей тока ($\vec{J} = 0$), описывается следующими уравнениями:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \Delta U_m = 0; \quad \vec{H} = -\operatorname{grad}U_m; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (26.17)$$

Основные уравнения электростатики в области, где отсутствуют свободные заряды ($\rho = 0$), имеют вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \operatorname{div} \vec{D} = 0; \Delta U = 0; \vec{E} = -\operatorname{grad} U; \vec{D} = \epsilon \vec{E}. \quad (26.18)$$

Уравнения Лапласа справедливы в однородных средах, где $\mu = \text{const}$, $\epsilon = \text{const}$.

Соотношения (26.17), (26.18) и характеризуемые ими поля являются математически аналогичными. При этом (26.17) называется системой уравнений магнитостатики.

Укажем еще на аналогию граничных условий ($H_{2t} = H_{1t}$, $B_{2n} = B_{1n}$ и $E_{2t} = E_{1t}$, $D_{2n} = D_{1n}$) и перечислим аналогичные величины: $\vec{H} \leftrightarrow \vec{E}$, $\vec{B} \leftrightarrow \vec{D}$, $U_m \leftrightarrow U$, $\mu \leftrightarrow \epsilon$.

Примечание. В 26.1 показано, что линии \vec{B} практически перпендикулярны поверхности ферромагнитного тела. Таким образом, поверхность эквипотенциальна ($U_m = \text{const}$) подобно проводящей поверхности в электростатике. Существует, однако, принципиальное отличие: линии \vec{B} непрерывны, а линии \vec{D} на поверхности проводника прерываются.

Воспользуемся аналогией полей для решения задачи о шаре в однородном магнитном поле (рис. 26.8). Производя в соотношениях, записанных в 24.7, замену ϵ_1 на μ_1 , ϵ_2 на μ_2 , \vec{E}_0 на \vec{H}_0 , \vec{D}_0 на \vec{B}_0 , получим формулы для интересующего нас случая.

Пусть шар помещен в немагнитную

среду: $\mu_1 = \mu_0$, $\mu_2 = \mu$. Тогда можно записать: 1) напряженность поля в шаре $\vec{H}_2 = 3\mu_0 \vec{H}_0 / (2\mu_0 + \mu) < \vec{H}_0$; 2) магнитная индукция $\vec{B}_2 = \mu \vec{H}_2 = 3\mu \vec{B}_0 / (2\mu_0 + \mu) > \vec{B}_0$; 3) поле размагничивания $\vec{H}_m = (\mu_0 - \mu) \vec{H}_0 / (2\mu_0 + \mu)$. Это поле направлено навстречу приложенному полю \vec{H}_0 . Его существование можно объяснить присутствием на поверхности шара фиктивных магнитных зарядов, причем положительные заряды — на правом полушарии (аналогично рис. 24.22).

С ростом μ усиливается поле размагничивания \vec{H}_m и уменьшается внутреннее поле \vec{H}_2 . Однако индукция \vec{B}_2 в шаре растет. В пределе при $\mu \rightarrow \infty$ имеем: $\vec{H}_m = -\vec{H}_0$; $\vec{H}_2 = 0$; $\vec{B}_2 = 3\vec{B}_0$. Индукция только в три раза превышает индукцию приложенного поля. В этом проявляется эффект размагничивания, аналогичный эффекту деполяризации.

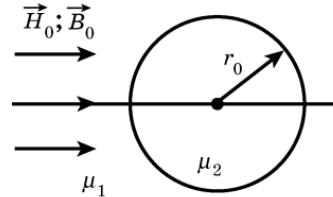


Рис. 26.8

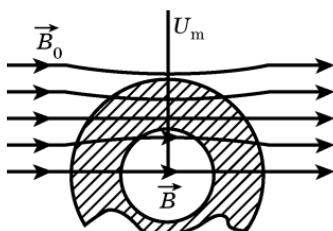


Рис. 26.9

Поле размагничивания в соответствии с (24.73) можно представить в виде $\vec{H}_m = -N\vec{M}_2/\mu_0$, где $\vec{M}_2 = (\mu - \mu_0)\vec{H}_2$ — вектор намагничивания; N — коэффициент размагничивания (для шара $N = 1/3$).

Уравнения магнитостатики используются при расчете магнитных экранов (рис. 26.9). Так как при увеличении отношения μ/μ_0 внутреннее

поле в шаре \vec{H}_2 уменьшается, можно предположить, что при наличии в шаре внутренней полости поле \vec{H} в ней будет ослаблено в сравнении с внешним полем \vec{H}_0 . Отношение $H/H_0 = B/B_0$ (коэффициент экранирования) находится в результате решения краевой задачи в кусочно-однородной области. Границные условия выражаются через скалярный потенциал (см. (24.19) и (24.20) в 24.2.3): равенство касательных составляющих \vec{H} эквивалентно равенству $U_{m1} = U_{m2}$; непрерывность нормальных составляющих \vec{B} — равенству $\mu_1 \partial U_{m1} / \partial n = \mu_2 \partial U_{m2} / \partial n$. Действие экрана объясняется тем, что линии магнитной индукции, будучи непрерывными, «стремятся пройти» в стенках экрана по пути наименьшего «магнитного» сопротивления.

Примечание. Внутри экрана помещается объект, который желательно защитить от воздействия магнитного поля. Очевидно, что замкнутость экрана не всегда допустима. В электротехнике находят применение и незамкнутые «теневые» экраны.

26.3.3. Моделирование магнитного поля

В 25.3 рассмотрена аналогия поля постоянного тока и электростатического поля, которая лежит в основе электромоделирования. Очевидно, что токовые модели позволяют эффективно решать и задачи исследования магнитного поля.

Магнитное моделирование бывает прямым и обратным. Если в модели два электрода совмещены с линиями магнитного поля оригинала, то электрические эквипотенциали модели совпадают с магнитными линиями, а на месте линий электрического поля проходят эквипотенциали магнитного потенциала (принцип соответствия). Это — обратное моделирование. При прямом моделиро-

вании электроды совмещаются с эквипотенциалами магнитного поля (например, в модели «полюсный наконечник статора — поверхность якоря» электрической машины). В этом случае линии $\vec{J}(\vec{E})$ модели совпадают с линиями $\vec{B}(\vec{H})$ оригинала.

§ 26.4. ИНДУКТИВНОСТЬ

26.4.1. Взаимная индуктивность замкнутых контуров

Рассмотрим два плоских линейных контура l_1 и l_2 с токами i_1 и i_2 , расположенных в однородном магнетике ($\mu = \text{const}$) (рис. 26.10). Пусть \vec{A}_1 и \vec{B}_1 — векторный потенциал и магнитная индукция поля первого тока, а \vec{A}_2 и \vec{B}_2 — соответствующие величины поля второго тока. По определению взаимная индуктивность первого и второго контуров

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{1}{i_1} \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2, \quad (26.19)$$

где Φ_{21} — магнитный поток поля тока i_1 через площадь S_2 второго контура.

Примечание. В общем случае Φ_{21} определяется через любую поверхность S_2 , опирающуюся на контур l_2 .

Используя соотношение (26.5) и теорему Стокса, выразим магнитный поток через векторный потенциал \vec{A}_1 магнитного поля:

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \text{rot } \vec{A}_1 d\vec{S}_2 = \oint_{l_2} \vec{A}_1 d\vec{l}_2. \quad (26.20)$$

Вычисление циркуляции потенциала часто оказывается более простой операцией, нежели вычисление потока индукции.

Привлекая выражение (26.8) для записи \vec{A}_1 , после подстановки его в (26.20) и затем в (26.19) получим:

$$M_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r}. \quad (26.21)$$

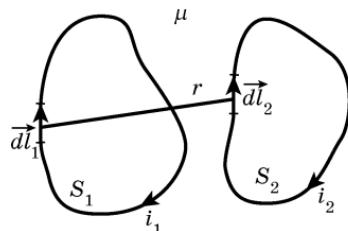


Рис. 26.10

Взаимная индуктивность зависит от конфигурации и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости среды.

Взаимная индуктивность второго и первого контуров $M_{12} = \Phi_{12}/i_2$, где Φ_{12} — магнитный поток поля тока i_2 через площадь S_1 первого контура. Очевидно, что выражение для M_{12} совпадает с (26.21), поскольку является результатом простой перестановки индексов 1 и 2. Таким образом, непосредственно доказывается равенство $M_{12} = M_{21} = M$.

При перемене направления одного из токов (например, i_2) знак M изменяется на обратный, так как в (26.21) изменяется направление $d\vec{l}_2$ (согласное и встречное включение контуров).

Если первый и второй контуры содержат n_1 и n_2 витков, взаимная индуктивность увеличивается в $n_1 n_2$ раз. Действительно, в этом случае $M_{21} = n_2 \Phi_{21}/i_1 = \Psi_{21}/i_1$, где Ψ_{21} — потокосцепление поля тока i_1 со вторым контуром. В свою очередь, индукция \vec{B}_1 и, следовательно, поток Φ_{21} возрастают в n_1 раз.

Примечания:

1. Если среда неоднородная ($\mu \neq \text{const}$), потенциал \vec{A} не может быть выражен простой формулой (26.8) и, таким образом, соотношение (26.21) не применимо. Однако по-прежнему \vec{A} пропорционален току и $\Phi_{21} = M_{21} i_1$.
2. Если среда нелинейная (ферромагнетик), то $\mu = \mu(H)$; тогда взаимная индуктивность зависит и от токов.

Переход от линейных контуров к объемным проводится по обычному правилу замены $i_1 d\vec{l}_1$ на $\vec{J}_1 dV_1$, $i_2 d\vec{l}_2$ на $\vec{J}_2 dV_2$. При этом условие магнитной однородности среды распространяется и на объемы V_1 и V_2 контуров. Формула (26.21) приобретает вид

$$M = \frac{\mu}{4\pi i_1 i_2} \int \int \frac{\vec{J}_1 \vec{J}_2}{r} dV_1 dV_2, \quad (26.22)$$

где r — расстояние между элементарными объемами dV_1 и dV_2 . Подчеркнем, что взаимная индуктивность зависит не от токов i_1 и i_2 , а от их распределения \vec{J}_1/i_1 и \vec{J}_2/i_2 по объему контуров.

26.4.2. Собственная индуктивность контура

Общее выражение для собственной индуктивности L объемного контура выводится из (26.22). Для этого достаточно принять $i_1 = i_2 = i$ и $V_1 = V_2 = V$ (рис. 26.11):

$$L = \frac{\mu}{4\pi i^2} \iint_{VV'} \frac{\vec{J} \vec{J}'}{r} dV dV', \quad (26.23)$$

где \vec{J} и \vec{J}' — плотности токов в элементарных объемах dV и dV' ; r — расстояние между ними. Индуктивность есть функция геометрических параметров контура, распределения тока в нем и магнитных свойств среды.

Примечание. Если принять всюду $\mu = \mu_0$, то индуктивность изменяется, например, при замене части объема контура материалом с другой удельной проводимостью (медное включение в алюминиевом проводнике), так как это приводит к изменению путей протекания тока.

Понятие собственной индуктивности линейного контура не имеет смысла: записав (26.23) при $l_1 = l_2 = l$ и $i_1 = i_2 = i$, получаем выражение, которое при $r = 0$ обращается в бесконечность. Поэтому для определения индуктивности контура, образованного тонким проводником, используется следующий подход (рис. 26.12a). Определим *внешнюю* индуктивность контура соотношением $L = \Phi/i$, где Φ — магнитный поток через площадь контура S . Считаем, что ток i течет по оси проводника l_1 . Тогда согласно (26.20) магнитный поток

$$\Phi = \oint_{l_2} \vec{A}_l d\vec{l}_2.$$

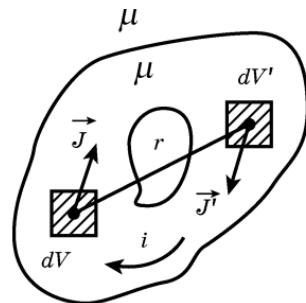
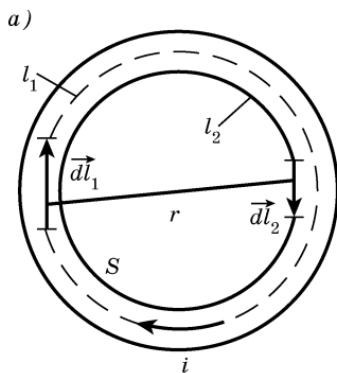


Рис. 26.11

Рис. 26.12

Контур l_2 ограничивает поверхность S . В свою очередь, по формуле (26.8) векторный потенциал

$$\vec{A}_l = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_l \frac{d\vec{l}}{r},$$

и, следовательно,

$$L = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r}.$$

Если контур содержит n витков, его индуктивность увеличивается в n^2 раз.

Примечание. Полная индуктивность контура наряду со внешней включает внутреннюю индуктивность проводника $\mu l/8\pi$, пропорциональную его длине l и независящую от сечения.

Найдем внешнюю индуктивность отрезка двухпроводной линии длиной l (рис. 26.12б). Рассматривая линию как замкнутый контур и выделяя «виток» длиной l , определим магнитный поток через S . Векторный потенциал линии записан в 26.1.3, пример 1:

$$A_z = \frac{\mu i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Следовательно, на внутренней стороне левого провода

$$A_z = \frac{\mu i}{2\pi} \ln \frac{h - r_0}{r_0};$$

на правом проводе потенциал отличается знаком. Поэтому магнитный поток, определяемый по (26.20) как циркуляция \vec{A} по контуру 1234,

$$\Phi = 2l \frac{\mu i}{2\pi} \ln \frac{h - r_0}{r_0}.$$

Таким образом, внешняя индуктивность отрезка двухпроводной линии

$$L = \frac{\mu l}{\pi} \ln \frac{h - r_0}{r_0}.$$

ПРИМЕР 3. Тороидальная катушка (рис. 26.13) на сердечнике с магнитной проницаемостью μ имеет плотную обмотку, содержащую n витков. Сечение сердечника S , длина средней (осевой) линии l_0 . Найти: 1) приближенное значение

индуктивности L катушки; 2) индуктивность L_b при наличии малого воздушного зазора d в сердечнике при условии $l_0 = l_c + d$, причем $d \ll l_c$; 3) коэффициент размагничивания.

1. При плотной обмотке и $\mu \gg \mu_0$ магнитный поток сосредоточен в сердечнике. Магнитные линии представляют собой окружности, охватывающие ток ni . По закону полного тока напряженность поля в точках средней линии $H = ni/l_0$. При этом индукция $B = \mu ni/l_0$, усредненный магнитный поток $\Phi = BS$, потокосцепление $\Psi = n\Phi$, и, следовательно, $L = \mu n^2 S/l_0$.

2. При малом воздушном зазоре в силу непрерывности магнитного потока значения индукции в воздухе B_b и в сердечнике B_c равны: $\mu_0 H_b = \mu H_c$. По закону полного тока $H_b d + H_c l_c = ni$. Из этих двух соотношений получаем выражение для напряженности поля в сердечнике $H_c = ni/(l_c + \mu d/\mu_0)$. Очевидно, что $H_c < H$. Если зазор составляет лишь одну сотую средней линии ($d = 0,01l_0$, $l_c = 0,99l_0$), то при $\mu = 100\mu_0$ напряженность поля уменьшается почти вдвое: $H_c = ni/(1,99l_0)$. Индуктивность катушки с зазором в сердечнике $L_b = \mu n^2 S/(l_c + \mu d/\mu_0)$; т. е. при тех же условиях $L_b \approx 0,5L$.

3. Неравенство $H_c < H$ можно объяснить тем, что воздушный зазор в сердечнике приводит к возникновению поля размагничивания (см. 26.3.2): $H_m = H_c - H = -(\mu - \mu_0)H_c d / \mu_0 l_0 = -M d / \mu_0 l_0$, где $M = (\mu - \mu_0)H_c$ — намагниченность сердечника. Поскольку принято записывать $H_m = -NM/\mu_0$, то коэффициент размагничивания тороида с зазором $N = d/l_0$.

Примечание. Строгое введение коэффициента размагничивания возможно лишь при однородном намагничивании эллипсоидов. Во всех других случаях это представление является приближенным.

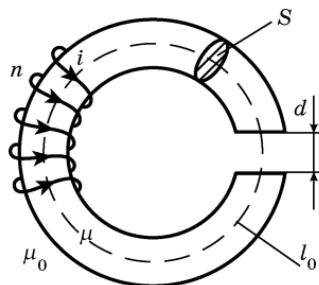


Рис. 26.13

ПРИМЕР 4. Тороидальная катушка, рассмотренная в примере 3, охватывается контуром, как показано на рис. 26.14. Найти взаимную индуктивность в этой системе.

В соответствии с принципом взаимности $M_{12} = M_{21} = M$ и, следовательно, расчет можно вести по любой из двух схем:
 1) $i_1 \rightarrow \bar{B}_1 \rightarrow \Psi_{21} \rightarrow M_{21}$; 2) $i_2 \rightarrow \bar{B}_2 \rightarrow \Psi_{12} \rightarrow M_{12}$. При выборе второй из них мы встречаемся с непреодолимыми трудностями и при расчете поля \bar{B}_2 контура, и при расчете потокосцепления Ψ_{12} с тором. Если же задаться током i_1 , то решение элементарно. Напряженность поля в сердечнике $H_1 = n_1 i_1 / l_0$, индукция $B_1 = \mu n_1 i_1 / l_0$. Поток, создаваемый катушкой, локализован только на части S всей площади контура. Он определяет потокосцепление $\Psi_{12} = \Phi = B_1 S$. Взаимная индуктивность $M = \mu n_1 S / l_0$.

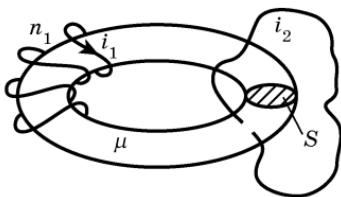


Рис. 26.14

Примечания:

1. Результат не зависит от формы контура и остается неизменным при любых его деформациях.
2. Если контур содержит n_2 витков, то $M = \mu n_1 n_2 S / l_0$.

26.4.3. Индуктивность и энергия магнитного поля

Процессы в двух индуктивно связанных контурах просто описываются методами теории цепей: $u_1 = L_1 di_1/dt + M di_2/dt$, $u_2 = L_2 di_2/dt + M di_1/dt$, где L_1 , L_2 — собственные индуктивности контуров; M — взаимная индуктивность.

От этих соотношений можно перейти к мгновенным мощностям $p_1 = u_1 i_1$ и $p_2 = u_2 i_2$. Далее, выполняя интегрирование в пределах от $i_1 = i_2 = 0$ до некоторых установившихся значений i_1 и i_2 , приходим к выражению для полной энергии, запасенной в магнитном поле:

$$W^M = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 i_2 = W_1^M + W_2^M + W_{12}^M, \quad (26.24)$$

где W_1^M и W_2^M — собственные энергии контуров, а W_{12}^M — взаимная энергия.

В формуле (26.24) нет указаний на место локализации энергии. Но макроскопическая теория поля исходит из того, что энергия поля распределена в пространстве с плотностью

$\omega^M = \vec{B} \cdot \vec{H} / 2 = \mu H^2 / 2$ (см. 23.7.2). При этом энергия магнитного поля $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$ двух токов

$$\begin{aligned} W^M &= \frac{1}{2} \int_V \mu H_1^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \mu H_2^2 dV + \int_V \mu \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 dV = \\ &= W_1^M + W_2^M + W_{12}^M. \end{aligned} \quad (26.25)$$

Сравнивая (26.25) и (26.24), получаем соотношения, которые позволяют трактовать индуктивность как «меру энергии магнитного поля» (при заданных токах):

$$L_1 = \frac{1}{i_1^2} \int_V \mu H_1^2 dV; \quad M = \frac{1}{i_1 i_2} \int_V \mu \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 dV. \quad (26.26)$$

Расчет индуктивностей при известной конфигурации проводников сводится к расчету поля. Причем формулы (26.26) справедливы для общего случая неоднородной среды ($\mu \neq \text{const}$), тогда как (26.23) и (26.22) применимы лишь в однородной среде.

ПРИМЕР 5. На рис. 26.15 изображено поперечное сечение коаксиального кабеля: r_1 — радиус жилы, r_2, r_3 — внутренний и внешний радиусы оболочки. Магнитная проницаемость материала жилы μ , изоляции — μ_0 . Найти индуктивность участка кабеля длиной l , пренебрегая полем в оболочке.

Задавая ток i в жиле и оболочке, по закону полного тока в виде (23.15) находим напряженность поля: в жиле ($r \leq r_1$) $H_1 = ir/(2\pi r_1^2)$; в изоляции ($r_1 \leq r \leq r_2$) $H_2 = i/(2\pi r)$. В оболочке напряженность поля убывает от $i/(2\pi r_2)$ до нуля, и поэтому энергией поля можно пренебречь. Вне кабеля $\vec{H} = 0$.

Энергия поля кабеля — сумма энергий отдельных областей. Энергия поля в жиле

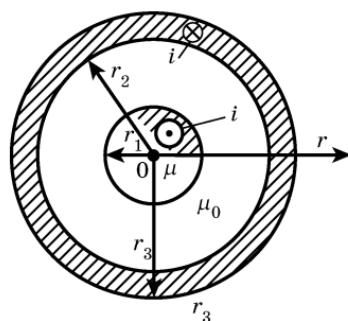


Рис. 26.15

$$W_1 = \int_{V_1} \frac{\mu H_1^2}{2} dV = \frac{\mu}{2} \int_0^{r_1} \frac{i^2 r^2 l}{(2\pi r_1^2)^2} 2\pi r dr = \frac{\mu i^2 l}{16\pi},$$

а соответствующая ей индуктивность $L_1 = 2W_1/i^2$. Энергия поля в изоляции

$$W_2 = \int_{V_2} \frac{\mu_0 H_2^2}{2} dV = \frac{\mu_0}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{i^2}{(2\pi r)^2} 2\pi r dr = \frac{\mu_0 l i^2}{4\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

а соответствующая индуктивность $L_2 = 2W_2/i^2$. Индуктивность отрезка кабеля $L = L_1 + L_2 = \frac{\mu l}{8\pi} + \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$.

Примечания:

1. Индуктивность L_1 называется внутренней индуктивностью цилиндрического проводника. Она не зависит от его радиуса.
2. Индуктивность L_2 — мера энергии поля в изоляции кабеля — может быть названа внешней.
3. При гармоническом токе вследствие поверхностного эффекта (поле вытесняется из проводника) индуктивность L_1 уменьшается при увеличении частоты; величина L_2 остается неизменной.

26.4.4. «Наведенное» потокосцепление

Пусть в магнитное поле \vec{H}_i контура с током вносится тело из магнетика. Как показано в [16], изменение потокосцепления, обусловленное намагниченным телом,

$$\Delta\Psi = \frac{1}{i} \int_V \vec{H}_i \vec{M} dV,$$

где \vec{M} — намагниченность, а V — объем тела. Формула упрощается в случае, когда поле тока \vec{H}_i и намагниченность \vec{M} в пределах V однородны:

$$\Delta\Psi = \frac{1}{i} \vec{H}_i \vec{M} V. \quad (26.27)$$

Рассмотрим две задачи с применением этого соотношения.

1. В тороидальной катушке без сердечника (см. пример 3 в 26.4.2) $H_i = ni/l_0$, $B_i = \mu_0 H_i$, $\Psi_0 = \mu_0 n^2 S_i / l_0$. При наличии сплош-

ногого сердечника напряженность поля остается прежней и намагниченность $\vec{M} = (\mu - \mu_0)\vec{H}_i$. Следовательно, изменение (прирост) потокосцепления $\Delta\Psi = (\mu - \mu_0)n^2Si/l_0$, где принято $V = Sl_0$. Потокосцепление тороида $\Psi = \Psi_0 + \Delta\Psi = \mu n^2Si/l_0$, что соответствует п. 1 примера 3.

2. В соленоид с однородным полем $H_i = ni$ (n — число витков на единицу длины) вносится шар радиуса r_0 , имеющий магнитную проницаемость μ . Намагниченность шара выражается через напряженность внутреннего поля (см. 26.3.2): $\vec{M} = (\mu - \mu_0)\vec{H}_2$. При условии $\mu \gg \mu_0$ получим $\vec{M} = 3\mu_0(\mu - \mu_0)\vec{H}_i/(2\mu_0 + \mu) \approx 3\mu_0\vec{H}_i$. Прирост потокосцепления в соответствии с (26.27) $\Delta\Psi = \frac{1}{i} \cdot ni \cdot 3\mu_0 H_i V = 3\mu_0 n^2 i V$. С этим связано увеличение индуктивности соленоида на величину $\Delta L = \Delta\Psi/i = 4\pi\mu_0 n^2 r_0^3$.

Приложение

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Интегральные соотношения

Теорема Остроградского—Гаусса: $\int_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} d\vec{S}$.

Теорема Стокса: $\int_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S} = \oint_L \vec{A} d\vec{l}$.

Основные тождества

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0; \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0; \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A};$$

$$\operatorname{div} [\vec{A} \vec{B}] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}; \operatorname{rot} (U \vec{A}) = [\operatorname{grad} U \vec{A}] + U \operatorname{rot} \vec{A};$$

$$\operatorname{grad} (\varphi U) = \varphi \operatorname{grad} U + U \operatorname{grad} \varphi; \operatorname{div} (U \vec{A}) = \vec{A} \operatorname{grad} U + U \operatorname{div} \vec{A}.$$

Представление операций в декартовой системе координат (x, y, z)

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z;$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z;$$

$$\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

**Представление операций
в цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$**

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z;$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z;$$

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

**Представление операций
в сферической системе координат $\{r, \theta, \varphi\}$**

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi;$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi; \end{aligned}$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Атабеков Г. И., Тимофеев А. В., Хухриков С. С. Теоретические основы электротехники. Нелинейные цепи. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1962.
2. Балабанян Н. Синтез электрических цепей. М.: Госэнергоиздат, 1961.
3. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов по спец. «Радиотехника». М.: Высшая школа, 1988.
4. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1996.
5. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Советское радио, 1957.
6. Вольман В. И., Пименов Ю. В. Техническая электродинамика. М.: Связь, 1971.
7. Данилов Л. В., Матханов П. Я., Филиппов Е. С. Теория нелинейных электрических цепей. Л.: Энергоатомиздат, 1990.
8. Демирчян К. С., Нейман Л. Р., Коровкин Н. В., Чечурин В. Л. Теоретические основы электротехники: В 3-х т. СПб.: Питер, 2003.
9. Карташев В. Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1982.
10. Носсель Ю. Я., Качанов Э. С., Струнский М. Г. Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981.
11. Крылов В. В., Корсаков С. Я. Основы теории цепей для системотехников. М.: Высшая школа, 1990.
12. Матханов П. Н. Основы синтеза линейных электрических цепей. М., Высшая школа, 1976.
13. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи. М.: Высшая школа, 1986.
14. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. М.: Высшая школа, 1990.
15. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1973.
16. Поливанов К. М. Теория электромагнитного поля. М.: Энергия, 1969.
17. Поль Р. В. Учение об электричестве. М.: Физматгиз, 1962.
18. Сборник задач по теории электрических цепей: Учебное пособие для вузов / Под ред. П. Н. Матханов, Л. В. Данилов. М.: Высшая школа, 1980.
19. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948.
20. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
21. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. Электричество и магнетизм. М.: Мир, 1966.
22. Цыпкин Я. З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Основные понятия и законы теории цепей	5
§ 1.1 Ток, напряжение, энергия и мощность в цепи	5
1.1.1. Ток в электрической цепи	5
1.1.2. Напряжение	6
1.1.3. Согласованная полярность	7
1.1.4. Энергия и мощность	8
§ 1.2. Резистивный элемент и его характеристики	9
1.2.1. Определение резистивного элемента	9
1.2.2. Вольт-амперные характеристики резистивного элемента	10
1.2.3. Энергетические характеристики R -элемента	11
§ 1.3. Идеализированные источники электромагнитной энергии	12
1.3.1. Источник напряжения	12
1.3.2. Источник тока	14
§ 1.4. Индуктивный элемент цепи и его характеристики	15
1.4.1. Определение индуктивного элемента цепи	15
1.4.2. Вольт-амперная характеристика L -элемента	16
1.4.3. Энергетические характеристики L -элемента	17
1.4.4. Принцип (закон) непрерывности потокосцепления L -элемента	18
§ 1.5. Емкостной элемент цепи и его характеристики	19
1.5.1. Определение C -элемента цепи	19
1.5.2. Вольт-амперные характеристики C -элемента	20
1.5.3. Энергетические характеристики C -элемента	20
1.5.4. Принцип (закон) непрерывности заряда C -элемента	22
§ 1.6. Геометрия цепей	23
1.6.1. Основные понятия геометрии цепей	23
1.6.2. Основные понятия топологии цепей	25
§ 1.7. Законы Кирхгофа	27
1.7.1. Закон токов Кирхгофа	27
1.7.2. Число независимых уравнений ЗТК	27
1.7.3. Закон напряжений Кирхгофа	29
1.7.4. Число независимых уравнений ЗНК	30
§ 1.8. Дуальность элементов и цепей	31
1.8.1. Дуальность элементов цепи	31
1.8.2. Дуальность контура и узловой пары	31
1.8.3. Разветвленные дуальные цепи	32

Глава 2. Анализ резистивных цепей	33
§ 2.1. Эквивалентные преобразования структуры цепи	33
2.1.1. Эквивалентные преобразования источников	33
2.1.2. Преобразование соединения звездой в соединение треугольником и обратное преобразование	35
2.1.3. Теорема замещения	37
§ 2.2. Анализ резистивных цепей сложной структуры	38
2.2.1. Метод узловых напряжений	38
2.2.2. Метод контурных токов	43
§ 2.3. Теоремы об эквивалентных источниках	47
§ 2.4. Теорема взаимности	49
2.4.1. Определение проводимостей передачи на основании метода контурных токов	49
2.4.2. Принцип взаимности (обратимости, пассивности)	50
2.4.3. Теорема взаимности	51
Глава 3. Анализ переходных процессов в линейных цепях во временной области при постоянных воздействиях	52
§ 3.1. Дифференциальные уравнения и свойства линейности динамических цепей	52
3.1.1. Уравнения линейных цепей	52
3.1.2. Первое свойство линейности уравнений цепи — принцип пропорциональности (однородности)	53
3.1.3. Второе свойство линейности — принцип дифференцируемости (стационарности)	54
3.1.4. Третье свойство линейности — принцип наложения (суперпозиции, аддитивности)	55
§ 3.2. Общая характеристика классического метода анализа переходных процессов во временной области	56
3.2.1. Понятие о коммутации и переходных процессах	56
3.2.2. Общая характеристика свободной составляющей решения уравнений, цепи и свободных режимов в цепи	57
3.2.3. Вынужденная составляющая	58
3.2.4. Законы коммутации, начальные условия и порядок цепи	59
§ 3.3. Анализ переходных процессов в разветвленных цепях первого порядка	60
3.3.1. Расчет свободной составляющей	60
3.3.2. Расчет вынужденного (установившегося) режима	61
3.3.3. Расчет независимых начальных условий	62
3.3.4. Расчет зависимых начальных условий	62
3.3.5. Определение постоянной интегрирования, запись решения и построение его графика	62
§ 3.4. Анализ переходных процессов в цепях высокого порядка по уравнениям состояния	63
3.4.1. Общая характеристика уравнений состояния	63
3.4.2. Методика составления уравнений состояний	64
3.4.3. Аналитическое решение уравнений состояния	66
§ 3.5. Численный расчет переходных процессов	68

3.5.1. Понятие о численном решении уравнений состояния	68
3.5.2. Численный расчет переходных процессов по дискретным резистивным схемам замещения	69
§ 3.6. Переходные процессы в простых <i>RC</i> - и <i>RL</i> -цепях	70
3.6.1. Свободный режим в <i>RC</i> -цепи	70
3.6.2. Подключение последовательной <i>RC</i> -цепи к источнику постоянного напряжения	71
3.6.3. Свободный режим в <i>RL</i> -цепи	73
3.6.4. Подключение последовательной <i>RL</i> -цепи к источнику постоянного напряжения	74
§ 3.7. Переходные процессы в последовательной <i>RLC</i> -цепи	76
3.7.1. Уравнения последовательного <i>RLC</i> -контура	76
3.7.2. Общая характеристика свободных режимов и частот собственных колебаний в цепи	78
3.7.3. Расчет вынужденной составляющей и начальных условий	80
3.7.4. Подключение идеальной <i>LC</i> -цепи к источнику постоянного напряжения	81
3.7.5. Свободный режим в идеальном <i>LC</i> -контуре	82
3.7.6. Подключение последовательной <i>RLC</i> -цепи к источнику (случай комплексных собственных частот)	83
3.7.7. Свободный режим в <i>RLC</i> -контуре (случай комплексных корней ХП)	84
3.7.8. Подключение последовательного <i>RLC</i> -контура к источнику (случай простых вещественных корней ХП)	84
3.7.9. Свободный режим в последовательной <i>RLC</i> -цепи (случай простых вещественных корней ХП)	85
3.7.10. Подключение последовательной <i>RLC</i> -цепи к источнику (случай кратных собственных частот)	86

Глава 4. Применение обобщенных функций

для анализа переходных процессов при воздействии сигналов произвольной формы	87
§ 4.1. Единичная ступенчатая функция	87
4.1.1. Определение	87
4.1.2. Применение единичной ступенчатой функции	88
§ 4.2. Единичная импульсная функция (дельта-функция)	89
4.2.1. Определение	89
4.2.2. Свойства дельта-функций	90
4.2.3. Применение дельта-функций	92
4.2.4. Особые случаи коммутации	93
§ 4.3. Переходная и импульсная характеристики цепи	95
4.3.1. Переходная характеристика	95
4.3.2. Импульсная характеристика	96
§ 4.4. Определение реакции при воздействии произвольной формы	97
4.4.1. Интеграл свертки (интеграл наложения, выраженный через импульсную характеристику цепи)	97
4.4.2. Интеграл Диоамеля (интеграл наложения, выраженный через переходную характеристику цепи)	99

4.4.3. Семейства стандартных воздействий и соответствующих характеристик цепи	100
4.4.4. Определение реакции при воздействии кусочно-линейной формы	102
Глава 5. Анализ линейных цепей при синусоидальных и экспоненциальных воздействиях	
§ 5.1. Основные понятия синусоидальных напряжений и токов	104
5.1.1. Основные определения	104
5.1.2. Среднее и действующее значения синусоидальных токов и напряжений	106
5.1.3. Задача анализа установившегося синусоидального режима	107
§ 5.2. Метод комплексных амплитуд	108
5.2.1. Представление синусоидальных функций через экспоненты с мнимым аргументом	108
5.2.2. Законы Кирхгофа в комплексной форме записи	112
5.2.3. Элементы электрической цепи в установившемся синусоидальном режиме	113
5.2.4. Комплексное сопротивление произвольного двухполюсника. Закон Ома в комплексной форме	120
§ 5.3. Анализ простых цепей в установившемся синусоидальном режиме. Комплексная схема замещения	121
5.3.1. Установившийся синусоидальный режим в последовательной RLC-цепи	122
5.3.2. Установившийся синусоидальный режим в параллельной RLC-цепи	123
5.3.3. О расчете установившегося синусоидального режима в разветвленных RLC-цепях	125
§ 5.4. Мощность в установившемся синусоидальном режиме	126
5.4.1. Мгновенная, активная, реактивная и полная мощности пассивного двухполюсника	126
5.4.2. Коэффициент мощности и его технико-экономическое значение	128
5.4.3. Комплексная форма записи мощности	129
5.4.4. Условие передачи максимума активной мощности в нагрузку	130
§ 5.5. Резонансные явления в электрических цепях.	
Частотные характеристики	131
5.5.1. Резонанс в последовательном RLC-контуре	131
5.5.2. Частотные характеристики последовательного RLC-контура	133
5.5.3. Нормировка частотных характеристик	134
5.5.4. Комплексные функции и частотные характеристики	135
5.5.5. Обобщенная экспонента и комплексная частота	137
Глава 6. Применение преобразования Лапласа для анализа переходных процессов в цепях	
§ 6.1. Связь формы сигналов с полюсами их изображений по Лапласу	139

6.1.1. Общая характеристика преобразуемых по Лапласу сигналов	139
6.1.2. Применение теоремы разложения для отыскания оригиналов	140
6.1.3. Свойства и теоремы преобразования Лапласа	143
6.1.4. Связь формы оригинала с полюсами изображения (таблица соответствия оригиналов и изображений)	145
§ 6.2. Операторный метод расчета переходных процессов	148
6.2.1. Законы Кирхгофа в операторной форме	148
6.2.2. Операторная схема замещения R -элемента	148
6.2.3. Операторная схема замещения L -элемента	148
6.2.4. Операторная схема замещения C -элемента	149
6.2.5. Расчет переходных процессов в цепях операторным методом	151
§ 6.3. Использование теоремы запаздывание для описания изображений импульсных сигналов	153
6.3.1. Изображение периодических сигналов	153
6.3.2. Получение изображений путем описания сигнала суммой простейших составляющих	153
6.3.3. Определение изображений сигналов кусочно-линейной формы методом двойного дифференцирования	154
§ 6.4. Передаточная функция цепи и ее связь с дифференциальным уравнением, импульсной, переходной и частотными характеристиками цепи	155
6.4.1. Изображение интеграла наложения, выраженного через импульсную характеристику цепи	155
6.4.2. Передаточная функция цепи и ее свойства	156
6.4.3. Связь собственных частот с нулями и полюсами входного сопротивления цепи	158
6.4.4. Матрицы передаточных функций и импульсных характеристик цепи (использование преобразования Лапласа для решения уравнений состояния)	159
Глава 7. Анализ установившихся периодических режимов в цепях	160
§ 7.1. Периодические сигналы и их спектры	160
7.1.1. Периодические сигналы и условия Дирихле	160
7.1.2. Тригонометрические формы рядов Фурье	161
7.1.3. Ряд Фурье в комплексной форме	163
7.1.4. Дискретные спектры периодических сигналов	164
7.1.5. Использование преобразования Лапласа для отыскания коэффициентов РФ	166
§ 7.2. Мощность и действующие значения переменных в установившемся периодическом режиме	168
7.2.1. Мощность в УПР	168
7.2.2. Действующее значение в УПР	169
§ 7.3. Анализ установившихся периодических режимов в цепи	170
7.3.1. Приближенный расчет УПР с использованием РФ	170
7.3.2. Точный расчет реакции в УПР (РФ в «замкнутой форме»)	172

Глава 8. Спектральный метод анализа цепей	174
§ 8.1. Апериодические сигналы и их спектры	174
8.1.1. Переход от рядов к интегралу Фурье и от дискретных спектров к сплошным	174
8.1.2. Одностороннее преобразование Фурье как частный случай преобразования Лапласа	176
8.1.3. Спектральные характеристики апериодического сигнала	177
8.1.4. Связь спектральных и частотных характеристик	179
8.1.5. Связь спектра одиночного импульса со спектром периодического сигнала той же формы	180
§ 8.2. Спектры некоторых абсолютно интегрируемых сигналов	181
8.2.1. Спектр импульса прямоугольной формы	181
8.2.2. Спектр импульса треугольной формы	183
§ 8.3. Ширина спектра и ее связь с длительностью и крутизной сигнала	185
8.3.1. Формула Релея и критерий ширины спектра	185
8.3.2. Связь ширины спектра с длительностью сигнала	187
8.3.3. Понятие о связи ширины спектра с крутизной сигнала	188
§ 8.4. Приближенные методы отыскания сигнала по спектру	190
8.4.1. Приближенный расчет сигнала по его амплитудному и фазовому спектрам	190
8.4.2. Связь сигнала с его вещественным и мнимым спектрами	191
8.4.3. Использование преобразования Лапласа при отыскании сигнала по его вещественному или мнимому спектрам	192
8.4.4. Невозможность реализации идеального фильтра нижних частот (ФНЧ)	193
§ 8.5. Спектральный метод анализа переходных процессов в цепях	194
8.5.1. Основные положения расчета и оценки переходных процессов в цепях спектральным методом	194
8.5.2. Характеристики идеальных неискажающих, дифференцирующих и интегрирующих цепей	196
8.5.3. Характеристики реальной дифференцирующей RC-цепи	198
8.5.4. Характеристики реальной интегрирующей RC-цепи	201
§ 8.6. Спектры единичной ступенчатой функции амплитудно-модулированных сигналов	204
8.6.1. Спектр $\delta(t)$. Понятие об особых спектрах	204
8.6.2. Спектры амплитудно-модулированных сигналов (связь спектра радиоимпульса со спектром видеоимпульса)	205
Глава 9. Цепи с взаимной индукцией	207
§ 9.1. Основные понятия и определения	207
9.1.1. Явление взаимной индукции. Взаимная индуктивность и индуктивность рассеяния	207
9.1.2. Коэффициент связи, согласное и встречное включения индуктивно связанных элементов	210
§ 9.2. Расчет цепей с взаимной индукцией	212
9.2.1. Последовательное соединение индуктивно связанных катушек	212
9.2.2. Параллельное соединение индуктивно связанных катушек	214

9.2.3. Расчет разветвленных цепей с взаимной индукцией	215
9.2.4. Исключение индуктивной связи	216
§ 9.3. Трансформатор в линейном режиме	218
9.3.1. Основные соотношения	218
9.3.2. Совершенный трансформатор без потерь	219
9.3.3. Идеальный трансформатор	220
Глава 10. Трехфазные цепи	222
§ 10.1. Основные понятия трехфазных цепей	222
10.1.1. Трехфазная система напряжений, трехфазный генератор . .	222
10.1.2. Соотношение между фазными и линейными напряжениями симметричного трехфазного генератора	224
10.1.3. Трехфазная цепь и основные схемы соединения	225
§ 10.2. Расчет трехфазных цепей	227
10.2.1. Расчет трехфазной цепи при соединении нагрузки звездой	227
10.2.2. Расчет трехфазной цепи при соединении нагрузки треугольником	230
§ 10.3. Мощность трехфазной цепи	232
Глава 11. Четырехполюсники и активные цепи	234
§ 11.1. Основные уравнения четырехполюсников	234
11.1.1. Общие сведения и классификация четырехполюсников . .	234
11.1.2. Уравнения четырехполюсников через u -параметры	235
11.1.3. Уравнения четырехполюсника через z -параметры	237
11.1.4. Уравнения четырехполюсника через a -параметры	238
11.1.5. Уравнения четырехполюсников через b -, h - и g -параметры	240
11.1.6. Эквивалентные Т- и П-образные схемы замещения пассивных четырехполюсников	241
§ 11.2. Входные и передаточные функции нагруженного четырехполюсника	242
11.2.1. Входные функции	242
11.2.2. Передаточные функции	244
§ 11.3. Соединения четырехполюсников	244
11.3.1. Последовательное соединение четырехполюсников . . .	245
11.3.2. Параллельное соединение четырехполюсников	246
11.3.3. Каскадное соединение четырехполюсников	247
11.3.4. Последовательно-параллельное соединение четырехполюсников	249
11.3.5. Параллельно-последовательное соединение четырехполюсников	249
§ 11.4. Цепи с зависимыми источниками и необратимыми четырехполюсниками	250
11.4.1. Зависимые источники и их свойства	250
11.4.2. Схемы замещения необратимых ЧП	251
11.4.3. Расчет схем с зависимыми источниками	253
11.4.4. Формализованный метод контурных токов для расчета цепей с необратимыми ЧП	254

11.4.5. Формализованный метод узловых напряжений для расчета цепей с необратимыми ЧП	255
11.4.6. Использование формализованных МКТ и МУН для расчета индуктивно связанных цепей	257
§ 11.5. Расчет цепей с операционными усилителями	258
11.5.1. Идеальный операционный усилитель и его свойства	258
11.5.2. Использование простейших схем на ОУ для реализации математических операций и решения уравнений состояния	259
11.5.3. Особенности применения МУН при расчете схем с ОУ	261
11.5.4. Использование схем с ОУ для преобразования сопротивлений	261
11.5.5. Об устойчивости цепей с ОУ	263
Глава 12. Основы теории фильтров	264
§ 12.1. Частотные характеристики реактивных двухполюсников	264
12.1.1. Определение резонансных частот реактивных двухполюсников	264
12.1.2. Свойства частотных характеристик реактивных двухполюсников	265
§ 12.2. Симметричный четырехполюсник в согласованном режиме	267
12.2.1. Характеристическое сопротивление четырехполюсника и согласованная нагрузка	267
12.2.2. Передаточная функция симметричного четырехполюсника в согласованном режиме	267
12.2.3. Гиперболическая форма уравнений симметричного четырехполюсника	269
12.2.4. Использование сопротивлений холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника для расчета характеристических параметров	270
§ 12.3. Расчет классических симметричных реактивных фильтров по характеристическим параметрам	271
12.3.1. Понятие о фильтрах	271
12.3.2. Достаточные условия работы классического фильтра в полосе пропускания	274
12.3.3. Фильтр нижних частот типа k	276
§ 12.4. Расчет фильтров методом преобразования частоты	278
§ 12.5. Фильтры Баттерворта	280
12.5.1. Сравнение характеристик идеальных и полиномиальных фильтров	280
12.5.2. Передаточные функции фильтров Баттерворта	282
12.5.3. Реализация фильтров Баттерворта	283
§ 12.6. Фильтры Чебышева	284
12.6.1. Частотные характеристики фильтров Чебышева	284
12.6.2. Реализация фильтров Чебышева	286
Глава 13. Начала синтеза цепей	288
§ 13.1. Синтез реактивных двухполюсников	288
13.1.1. Основное свойство реактивных двухполюсников	288

13.1.2. Условие реализуемости $Z(s)$ в виде реактивного двухполюсника	289
13.1.3. Реализация реактивных двухполюсников разложением $Z_{LC}(s)$ на простейшие составляющие	291
13.1.4. Множество вариантов реализации LC -двуихполюсников	292
§ 13.2. Синтез RC -двуихполюсников	294
13.2.1. Соответствие сопротивления RC -и LC -двуихполюсников	294
13.2.2. Условие реализуемости $Z(s)$ в виде RC -двуихполюсников	295
13.2.3. Реализация RC -двуихполюсников	296
§ 13.3. Использование цепей с операционными усилителями для реализации передаточных функций	297
13.3.1. Реализация передаточных функций с отрицательными нулями и полюсами	297
13.3.2. Реализация описанных уравнениями состояния передаточных функций с произвольными нулями и полюсами	298
13.3.3. Переход от передаточной функции к уравнениям состояния	299
<i>Глава 14. Цепи с распределенными параметрами</i>	301
§ 14.1. Дифференциальные уравнения однородной линии	301
14.1.1. Общая характеристика цепей с распределенными параметрами	301
14.1.2. Однородная линия и ее первичные параметры	302
14.1.3. Телеграфные уравнения однородной линии	303
§ 14.2. Решение уравнений линии и ее характеристические параметры	303
14.2.1. Решение телеграфных уравнений	303
14.2.2. Понятие о падающей и отраженной волнах в линии	305
§ 14.3. Линия как симметричный четырехполюсник	306
14.3.1. Сравнение уравнений линии и симметричного четырехполюсника	306
14.3.2. Линия без отражения	307
14.3.3. Линия без искажения	308
§ 14.4. Линия без потерь	309
14.4.1. Основные характеристики линии без потерь	309
14.4.2. Трактовка падающей и отраженной волн в линии без потерь	310
14.4.3. Подключение линии без потерь к источнику постоянного напряжения	311
§ 14.5. Линия в установившемся синусоидальном режиме	313
14.5.1. Общая характеристика процессов в линии	313
14.5.2. Фазовая скорость, длина волны и движение волн в линии	315
14.5.3. Стоячие волны в линии без потерь	316
<i>Глава 15. Основы теории дискретных сигналов и цепей</i>	318
§ 15.1. Дискретные сигналы и теорема дискретизации	318
15.1.1. Аналоговые и дискретные сигналы	318
15.1.2. Идеализация дискретных сигналов	319
15.1.3. Теорема Котельникова (Найквиста, Шеннона)	320
15.1.4. Практика применения теоремы Котельникова	322

§ 15.2. Основные понятия дискретных линейных цепей	322
15.2.1. Дискретные последовательности (решетчатые функции)	322
15.2.2. Элементы линейных дискретных цепей	323
15.2.3. Схемы дискретных цепей и разностные уравнения	324
§ 15.3. Анализ дискретных цепей во временной области	325
15.3.1. Численное решение разностных уравнений	325
15.3.2. Свободная составляющая решения уравнений ДЦ	326
15.3.3. Вынужденная составляющая решения уравнений ДЦ	327
15.3.4. Переходная характеристика ДЦ	328
15.3.5. Импульсная характеристика ДЦ	329
15.3.6. Дискретная свертка импульсной характеристики с дискретным воздействием	330
§ 15.4. Применение z -преобразования для анализа процессов в дискретных цепях	331
15.4.1. Понятие о прямом z -преобразовании	331
15.4.2. Основные свойства и теоремы z -преобразования	332
15.4.3. Таблицы z -преобразования	334
15.4.4. Понятие об обратном z -преобразовании. Численный расчет оригинала	335
15.4.5. Использование теоремы разложения для обратного z -преобразования	336
15.4.6. Передаточная функция ДЦ и связь ее с разностным уравнением цепи	338
§ 15.5. Определение параметров дискретной цепи по прототипу-аналогу	339
 <i>Глава 16. Нелинейные цепи</i>	341
§ 16.1. Общая характеристика нелинейных элементов и цепей	341
16.1.1. Понятие о нелинейной цепи	341
16.1.2. Статические и дифференциальные параметры НЭ	341
16.1.3. Классификация нелинейных элементов и цепей	342
16.1.4. Общие свойства нелинейных цепей	344
§ 16.2. Анализ нелинейных резистивных цепей	345
16.2.1. Графический расчет нелинейных R -цепей	345
16.2.2. Аналитический расчет нелинейных R -цепей при аппроксимации ВАХ НЭ полиномами	347
16.2.3. Решение нелинейных функциональных уравнений цепей	349
16.2.4. Аналитический расчет нелинейных R -цепей методом кусочно-линейных схем	350
§ 16.3. Нелинейные резистивные цепи с диодами	351
16.3.1. Идеализация диодных характеристик	351
16.3.2. Реализация нарастающих ВАХ нелинейных R -элементов кусочно-линейными диодными моделями	352
§ 16.4. Анализ динамических нелинейных цепей	355
16.4.1. Численный расчет по уравнениям состояния	355
16.4.2. Метод припасовывания (кусочно-линейной аппроксимации)	356
16.4.3. Метод гармонического баланса	358

Глава 17. Начала синтеза пассивных четырехполюсников	360
§ 17.1. Нормирование передаточных функций четырехполюсников . .	360
§ 17.2. Основные свойства реактивных четырехполюсников	
лестничной структуры	361
17.2.1. Свойство о нулях и полюсах Z_{22} и Y_{22}	361
17.2.2. Свойство о полюсах Z_{12} и Z_{22} (\bar{Y}_{12} и \bar{Y}_{22})	362
17.2.3. Свойство о частных полюсах Z_{22} (и \bar{Y}_{22})	362
17.2.4. Свойство о нулях ПФ четырехполюсника	363
17.2.5. Свойство о формировании нулей ПФ реактивных ЧП лестничной структуры	364
17.2.6. Свойство об отсутствии нуля ПФ при частичном выделении полюса	365
17.2.7. Условие Фиалкова об ограничении коэффициентов передаточной функции	367
17.2.8. Свидетельство правильного окончания синтеза	367
§ 17.3. Условия реализуемости и определение параметров реактивного четырехполюсника по передаточной функции . .	368
17.3.1. Определение параметров по H_I^{K3} и H_U^{XX}	368
17.3.2. Определение параметров ЧП по h_i и H_U	369
§ 17.4. Реализация реактивных четырехполюсников	
лестничной структуры	370
17.4.1. Три положения, лежащие в основе реализации ЧП	370
17.4.2. Обоснование возможности получения нуля остатка на любой частоте при частичном выделении полюса	371
17.4.3. Последовательность действий при реализации нуля третьей категории	372
17.4.4. Общая последовательность синтеза ЧП	373
§ 17.5. Синтез резистивно-емкостных четырехполюсников	375
17.5.1. Свойства RC -четырехполюсников	375
17.5.2. Условие реализуемости и определение параметров RC -ЧП по H_I^{K3} и H_U^{XX}	376
17.5.3. Определение параметров ЧП по $H_I(s)$ и $H_U(s)$	377
17.5.4. Реализация RC -четырехполюсников	379
17.5.5. Примеры синтеза RC -четырехполюсников	379
Глава 18. Связанные контуры с большой добротностью	384
§ 18.1. Общая характеристика связанных контуров	384
18.1.1. Виды связи	384
18.1.2. Общие соотношения связанных контуров	385
§ 18.2. Резонанс в связанных контурах	387
18.2.1. Общая характеристика видов резонанса	387
18.2.2. Частный резонанс	388
18.2.3. Индивидуальный резонанс	389
18.2.4. Сложный резонанс	390
18.2.5. Полный резонанс	391
18.2.6. Энергетические соотношения	392
§ 18.3. Частотные характеристики связанных контуров	392
18.3.1. Допущения и обобщенные параметры	392
18.3.2. Резонансные частоты	393

18.3.3. Частотная характеристика функции передачи по напряжению	394
18.3.4. Исследование АЧХ при различной связи	395
18.3.5. Сравнение АЧХ связанных контуров и одиночного контура	397
§ 18.4. Проектирование связанных контуров	397
18.4.1. Определение полосы пропускания	397
18.4.2. Определение параметров контуров по заданным требованиям	398
 Глава 19. Основы машинно-ориентированных методов расчета цепей	
§ 19.1. Структурная матрица	400
19.1.1. Запись уравнений закона токов Кирхгофа с использованием структурной матрицы	400
19.1.2. Запись уравнений закона напряжений Кирхгофа с использованием структурной матрицы	402
§ 19.2. Упорядоченные матричные уравнения цепи	403
19.2.1. Главные сечения, главные контуры и фундаментальная матрица цепи	403
19.2.2. Пояснение связи фундаментальных матриц	406
19.2.3. Независимость упорядоченных уравнений цепи	407
§ 19.3. Алгоритмы решения машинных уравнений цепей	408
19.3.1. Метод токов дерева и напряжений хорд	408
19.3.2. Применение структурной матрицы при расчете цепей методом узловых напряжений	410
§ 19.4. Матричное формирование уравнений состояния	412
 Глава 20. Основы теории чувствительности цепей к изменению параметров	
§ 20.1. Теорема компенсации	415
20.1.1. Доказательство исходной теоремы компенсации	415
20.1.2. Эквивалентность расчета по дуальным ПЦ, составленным по теореме компенсации	416
20.1.3. Теоремы компенсации и присоединенные цепи при расчете динамических цепей	417
§ 20.2. Расчет функций абсолютной чувствительности на основании теоремы компенсации	420
20.2.1. Исходные понятия	420
20.2.2. Построение ПЦ для расчета ФАЧ на основании теоремы компенсации	421
20.2.3. Получение ПЦ дифференцированием уравнений Кирхгофа и Ома	421
20.2.4. Эквивалентность дуальных ПЦ, составленных для расчета ФАЧ на основании теоремы компенсации	422
20.2.5. Расчет ФАЧ динамических цепей	423
§ 20.3. Вычисление функций абсолютной чувствительности на основании теоремы Теледжена	424

20.3.1. Теорема Теледжена	424
20.3.2. Определение ФАЧ выходного напряжения на основании теоремы Теледжена	426
20.3.3. Определение ФАЧ выходного тока на основании теоремы Теледжена	428
Глава 21. Релейные автоколебательные цепи	429
§ 21.1. Общая характеристика автоколебательных релейных цепей	429
21.1.1. Особенности процессов в релейных цепях	429
21.1.2. Исходные соотношения и допущения	431
§ 21.2. Анализ процессов в простых автоколебательных релейных цепях	432
21.2.1. Расчет автоколебаний в случае идеального РЭ без гистерезиса	432
21.2.2. Особенности расчета автоколебаний в случае релейной характеристики с гистерезисом	435
21.2.3. Пример расчета параметров автоколебаний	436
Глава 22. Магнитные цепи при постоянных магнитных потоках	439
§ 22.1. Магнитные цепи и ферромагнитные материалы	439
22.1.1. Исходные понятия	439
22.1.2. Основные законы магнитных цепей	440
22.1.3. Основная кривая намагничивания ферромагнитных материалов	441
§ 22.2. Основные принципы расчета магнитных цепей	443
22.2.1. Исходные допущения	443
22.2.2. Аналоги законов Кирхгофа при расчете магнитных цепей	445
§ 22.3. Расчет простых магнитных цепей	447
22.3.1. Прямая задача расчета неразветвленной МЦ	447
22.3.2. Обратная задача расчета неразветвленной МЦ	448
§ 22.4. О расчете магнитных цепей с постоянными магнитами	449
Глава 23. Основные законы и уравнения макроскопической теории электромагнитного поля	452
§ 23.1. Функции, используемые при записи уравнений поля	452
23.1.1. Понятие о макроскопической теории поля	452
23.1.2. Векторные функции поля	453
23.1.3. Уравнения связи векторов поля	454
23.1.4. Векторы поляризации и намагниченности	455
23.1.5. Скалярные функции поля	456
23.1.6. Электромагнитное поле — векторное поле	457
§ 23.2. Первое уравнение Максвелла. Закон полного тока	459
23.2.1. Дифференциальная форма первого уравнения. Ток смещения	459
23.2.2. Интегральная форма первого уравнения	462
§ 23.3. Второе уравнение Максвелла. Закон электромагнитной индукции	466

23.3.1. Дифференциальная форма второго уравнения	466
23.3.2. Интегральная форма второго уравнения	467
§ 23.4. Третье и четвертое уравнения Максвелла	470
23.4.1. Дифференциальная форма третьего уравнения	470
23.4.2. Интегральная форма третьего уравнения	471
23.4.3. Четвертое уравнение. Принцип непрерывности магнитного потока	474
§ 23.5. Полная система уравнений Максвелла	475
23.5.1. Дифференциальные уравнения поля	475
23.5.2. Частные виды электромагнитных явлений	476
23.5.3. Энергетические соотношения	477
§ 23.6. Поле на границе раздела сред. Граничные условия	481
23.6.1. Постановка задачи	481
23.6.2. Поведение нормальных составляющих векторов поля	481
23.6.3. Поведение касательных составляющих векторов поля	482
§ 23.7. Закон сохранения энергии в электродинамике	483
23.7.1. Уравнение энергетического баланса.	
Качественные представления	483
23.7.2. Теорема Пойнтинга. Количественные представления	484
Глава 24. Электростатическое поле в идеальных диэлектриках	489
§ 24.1. Основные уравнения электростатического поля.	
Граничные условия	489
24.1.1. Допущения электростатики	489
24.1.2. Основные уравнения	490
24.1.3. Граничные условия	490
§ 24.2. Потенциал электростатического поля	493
24.2.1. Скалярный потенциал. Разность потенциалов	493
24.2.2. Уравнения Пуассона и Лапласа — уравнения для потенциала	495
24.2.3. Две типичные задачи электростатики	495
§ 24.3. Поля стандартных систем зарядов	498
24.3.1. Точечный заряд. Заряженный шар	498
24.3.2. Бесконечная прямая нить. Заряженный цилиндр	500
24.3.3. Нейтральная система точечных зарядов.	
Электрический диполь	502
24.3.4. Две противоположно заряженные нити.	
Двухпроводная линия	505
24.3.5. Бесконечная плоскость. Двойной электрический слой	506
24.3.6. Объемный, поверхностный и линейный заряды	508
§ 24.4. Метод эквивалентных зарядов	510
24.4.1. Граница диэлектрика и проводника	510
24.4.2. Граница двух диэлектриков	512
24.4.3. Расчетная модель при двух проводящих границах	514
24.4.4. Изображение в проводящей сфере	516
§ 24.5. Плоскопараллельное электростатическое поле	517
24.5.1. Общее решение уравнения Лапласа	
в декартовых координатах	517
24.5.2. Поле внутри полубесконечной полосы	519

§ 24.6. Импульсная функция в электростатике	521
24.6.1. Дельта-функция в трехмерной области	521
24.6.2. Заряженная нить между проводящими плоскостями	522
§ 24.7. Шар в однородном электростатическом поле	524
24.7.1. Решение краевой задачи в кусочно-однородном диэлектрике. Потенциал	524
24.7.2. Электрический (дипольный) момент шара	526
24.7.3. Напряженность поля	527
24.7.4. Проводящий (металлический) шар	528
24.7.5. Коэффициент деполяризации	528
§ 24.8. Электрическая емкость	529
24.8.1. Емкость конденсатора	529
24.8.2. Частичные емкости	530
24.8.3. Емкостные коэффициенты	531
§ 24.9. Расчет погонной емкости полосковой линии методом средних потенциалов	533
24.9.1. Постановка задачи	533
24.9.2. Решение уравнения Лапласа спектральным методом	534
24.9.3. Определение емкости	535
Глава 25. Поле постоянного тока в проводящих средах	537
§ 25.1. Уравнения поля постоянного тока. Граничные условия	537
25.1.1. Дифференциальные уравнения поля	537
25.1.2. Интегральные уравнения поля. Законы Кирхгофа	538
25.1.3. Граничные условия	539
§ 25.2. Сопротивление проводящих тел	543
25.2.1. Понятия о сопротивлении и проводимости	543
25.2.2. Проводник с однородным внутренним полем	546
§ 25.3. Математическая аналогия поля постоянного тока и электростатического поля	547
25.3.1. Основные уравнения двух полей. Электромоделирование	547
25.3.2. Аналогия проводимости и емкости	549
25.3.3. Частичные проводимости	549
25.3.4. Шар в поле тока	550
25.3.5. Метод эквивалентных токов-изображений	551
Глава 26. Магнитное поле, постоянное во времени	553
§ 26.1. Векторный потенциал магнитного поля	553
26.1.1. Основные уравнения. Граничные условия	553
26.1.2. Векторный потенциал. Уравнения для потенциала	554
26.1.3. Векторный потенциал объемных и линейных токов	554
§ 26.2. Векторный потенциал круглого контура (витка). Магнитный диполь	557
26.2.1. Преобразование линейного интеграла	557
26.2.2. Приближение «больших расстояний». Диполь	558
§ 26.3. Скалярный потенциал магнитного поля	559
26.3.1. «Безвихревое» магнитное поле. Потенциал. Принцип соответствия	559

26.3.2. Математическая аналогия магнитного и электростатического полей. Магнитостатика	562
26.3.3. Моделирование магнитного поля	564
§ 26.4. Индуктивность	565
26.4.1. Взаимная индуктивность замкнутых контуров	565
26.4.2. Собственная индуктивность контура	566
26.4.3. Индуктивность и энергия магнитного поля	570
26.4.4. «Наведенное» потокосцепление	572
Приложение. Некоторые сведения из векторного анализа	574
Литература	576

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru, www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72;
print@lpbl.spb.ru

**Книги издательства «Лань»
можно приобрести в оптовых книгорынковых организациях:**

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ. ООО «Лань-Трайд»
192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13,
тел./факс: (812)567-54-93,
тел.: (812)567-85-78, (812)567-14-45, 567-85-82, 567-85-91;
trade@lanpbl.spb.ru
www.lanpbl.spb.ru/price.htm

МОСКВА. ООО «Лань-пресс»
109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, 6/19,
тел.: (495)178-65-85; (495)740-43-16;
lanpress@ultimanet.ru; lanpress@yandex.ru

КРАСНОДАР. ООО «Лань-Юг»
350072, Краснодар, ул. Жлобы, 1/1, тел.: (861)274-10-35;
lankrd98@mail.ru

Сдано в набор 27.03.06. Подписано в печать 22.10.07.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $\frac{1}{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 31,08. Тираж 1500 экз.

Заказ № .

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография».
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7.
Качество печати соответствует качеству
предоставленных диапозитивов