МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по домашнему заданию №1

по дисциплине «Элементы функционального анализа»

Студентка гр. 8382	____________________	Звегинцева Е.Н.
Преподаватель	____________________	Коточигов А.М.

Санкт-Петербург

2021

Задание.

Вариант 6.

Многогранник симметричен по координатным плоскостям, заданы вершины в первом октанте(положительном):

{A{5, 6, 0}, B{7, 0, 4}, H{0, 6, 4}, AA {10, 0, 0}, BB {0, 0, 0}, HH{0, 0, 5}}

Проверить неравенство треугольника для векторов W1 (-4, 8, -7), W2 (7, -8, -5)

Найти наибольшее и наименьшее значение евклидовой нормы на векторах, имеющих норму 1 в норме, порожденной многогранником.

Выполнение работы.

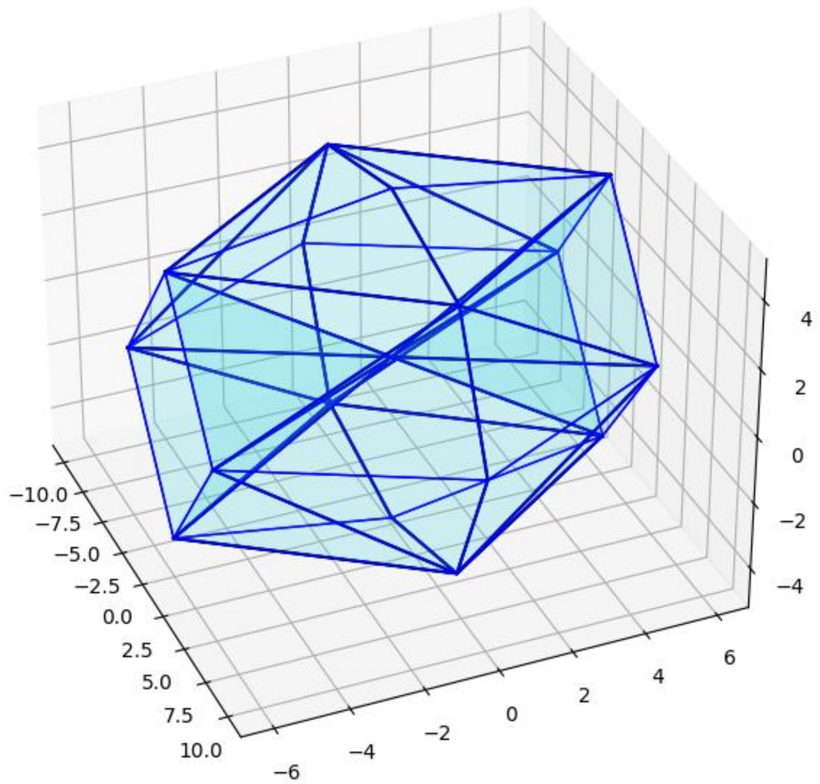
Для построения многогранника нужно трижды отразить известные координаты относительно координатных плоскостей.

W1 → W2 $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, z)$

W2 → W3 $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$

W3 → W$(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$

Результат представлен на рисунке



Для нахождения норм векторов заданных точек, мы рассмотрим угол OABH(нам нужен угол, в котором коэффициенты разложения вектора будут положительны), в котором построим биортогональный базис для $O\ A$, $O\ B$, $O\ H$:

$$OA' = \frac{1}{(OA_1, OA)} OA_1$$

$$OB' = \frac{1}{(OB_1, OB)} OB_1$$

$$OH' = \frac{1}{(OH_1, OH)} OH_1$$

$$OA_1 = OB \times OH$$

$$OB_1 = OA \times OH$$

$$OH_1 = OA \times OB$$

Следовательно, раскладываем вектор по базису

$OW \quad = k_1 OA + k_2 OB + k_3 OH,\ где$

$$k_1 = (OW \quad , OA'), k_2 = (OW \quad , OB'), k_2 = (OW \quad , OH')$$

Норма в данном случае, считается как:

$$\left| |W \quad | \right| = k_1 + k_2 + k_3$$

Найдем нормы для заданных векторов:

- Для точки $W_1(-4, 8, -7)$

Базис	K1	K2	K3	||W||
[5 6 0] [7 0 4] [0 6 4]	1.465	-1.618	-0.132	-0.285
[5 6 0] [0 7 0] [0 6 4]	-0.8	3.329	-1.75	0.779
[5 6 0] [7 0 4] [10 0 0]	1.333	-1.75	0.158	-0.258
[0 0 5] [7 0 4] [0 6 4]	-2.01	-0.571	1.333	-1.248
[5 -6 0] [7 0 4] [0 -6 4]	-0.09	-0.507	-1.243	-1.84
[5 -6 0] [0 -7 0] [0 -6 4]	-0.8	1.043	-1.75	-1.507
[5 -6 0] [7 0 4] [10 0 0]	-1.333	-1.75	1.492	-1.592
[0 0 5] [7 0 4] [0 -6 4]	0.124	-0.571	-1.333	-1.781
[-5 6 0] [-7 0 4] [0 6 4]	2.132	-0.951	-0.799	0.382
[-5 6 0] [0 7 0] [0 6 4]	0.8	1.957	-1.75	1.007
[-5 6 0] [-7 0 4] [-10 0 0]	1.333	-1.75	0.958	0.542

[0 0 5] [-7 0 4] [0 6 4]	-2.924	0.571	1.333	-1.019
[-5 -6 0] [-7 0 4] [0 -6 4]	0.576	0.16	-1.91	-1.174
[-5 -6 0] [0 -7 0] [0 -6 4]	0.8	-0.329	-1.75	-1.279
[-5 -6 0] [-7 0 4] [-10 0 0]	-1.333	-1.75	2.292	-0.792
[0 0 5] [-7 0 4] [0 -6 4]	-0.79	0.571	-1.333	-1.552
[5 6 0] [7 0 -4] [0 6 -4]	-0.576	-0.16	1.91	1.174
[5 6 0] [0 7 0] [0 6 -4]	-0.8	0.329	1.75	1.279
[5 6 0] [7 0 -4] [10 0 0]	1.333	1.75	-2.292	0.792
[0 0 -5] [7 0 -4] [0 6 -4]	0.79	-0.571	1.333	1.552
[5 -6 0] [7 0 -4] [0 -6 -4]	-2.132	0.951	0.799	-0.382
[5 -6 0] [0 -7 0] [0 -6 -4]	-0.8	-1.957	1.75	-1.007
[5 -6 0] [7 0 -4] [10 0 0]	-1.333	1.75	-0.958	-0.542
[0 0 -5] [7 0 -4] [0 -6 -4]	2.924	-0.571	-1.333	1.019
[-5 6 0] [-7 0 -4] [0 6 -4]	**0.09**	**0.507**	**1.243**	**1.84**
[-5 6 0] [0 7 0] [0 6 -4]	0.8	-1.043	1.75	1.507
[-5 6 0] [-7 0 -4] [-10 0 0]	1.333	1.75	-1.492	1.592
[0 0 -5] [-7 0 -4] [0 6 -4]	-0.124	0.571	1.333	1.781

Координаты базисных векторов:

$OA_1 = (-5, 6, 0)$

$OB_1 = (-7, 0, -4)$

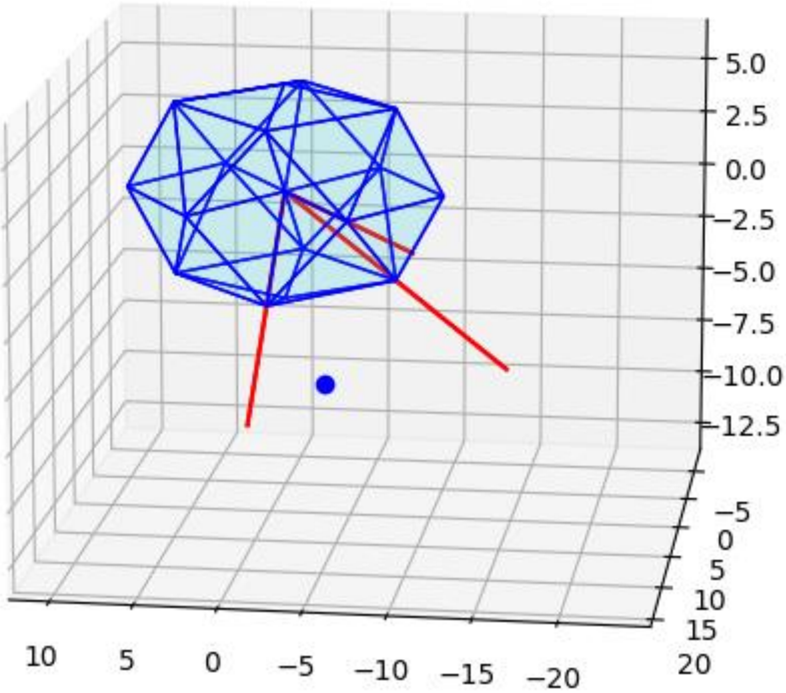
$OH_1 = (0, 6, -4)$

Коэффициенты разложения и норма:

$OW_1 = 0.090278 * OA + 0.50694 * OB + 1.243056 * OH$

$||W_1|| = 1.840278$

На графике показана заданная точка с базисными векторами



- Для точки $W_2(7, -8, -5)$

[5 6 0] [7 0 4] [0 6 4]	0.535	0.618	-1.868	-0.715
[5 6 0] [0 7 0] [0 6 4]	1.4	-1.271	-1.25	-1.121
[5 6 0] [7 0 4] [10 0 0]	-1.333	-1.25	2.242	-0.342
[0 0 5] [7 0 4] [0 6 4]	-0.733	1.0	-1.333	-1.067
[5 -6 0] [7 0 4] [0 -6 4]	2.09	-0.493	-0.757	0.84
[5 -6 0] [0 -7 0] [0 -6 4]	1.4	1.014	-1.25	1.164
[5 -6 0] [7 0 4] [10 0 0]	1.333	-1.25	0.908	0.992
[0 0 5] [7 0 4] [0 -6 4]	-2.867	1.0	1.333	-0.533
[-5 6 0] [-7 0 4] [0 6 4]	-0.632	-0.549	-0.701	-1.882
[-5 6 0] [0 7 0] [0 6 4]	-1.4	1.129	-1.25	-1.521
[-5 6 0] [-7 0 4] [-10 0 0]	-1.333	-1.25	0.842	-1.742
[0 0 5] [-7 0 4] [0 6 4]	0.867	-1.0	-1.333	-1.467
[-5 -6 0] [-7 0 4] [0 -6 4]	0.924	-1.66	0.41	-0.326
[-5 -6 0] [0 -7 0] [0 -6 4]	-1.4	3.414	-1.25	0.764
[-5 -6 0] [-7 0 4] [-10 0 0]	1.333	-1.25	-0.492	-0.408
[0 0 5] [-7 0 4] [0 -6 4]	-1.267	-1.0	1.333	-0.933
[5 6 0] [7 0 -4] [0 6 -4]	-0.924	1.66	-0.41	0.326
[5 6 0] [0 7 0] [0 6 -4]	1.4	-3.414	1.25	-0.764
[5 6 0] [7 0 -4] [10 0 0]	-1.333	1.25	0.492	0.408
[0 0 -5] [7 0 -4] [0 6 -4]	1.267	1.0	-1.333	0.933
[5 -6 0] [7 0 -4] [0 -6 -4]	**0.632**	**0.549**	**0.701**	**1.882**
[5 -6 0] [0 -7 0] [0 -6 -4]	1.4	-1.129	1.25	1.521
[5 -6 0] [7 0 -4] [10 0 0]	1.333	1.25	-0.842	1.742
[0 0 -5] [7 0 -4] [0 -6 -4]	-0.867	1.0	1.333	1.467
[-5 6 0] [-7 0 -4] [0 6 -4]	-2.09	0.493	0.757	-0.84

[-5 6 0] [0 7 0] [0 6 -4]	-1.4	-1.014	1.25	-1.164
[-5 6 0] [-7 0 -4] [-10 0 0]	-1.333	1.25	-0.908	-0.992
[0 0 -5] [-7 0 -4] [0 6 -4]	2.867	-1.0	-1.333	0.533

Координаты базисных векторов:

$OA_2 = (5, -6, 0)$

$OB_2 = (7, 0, -4)$

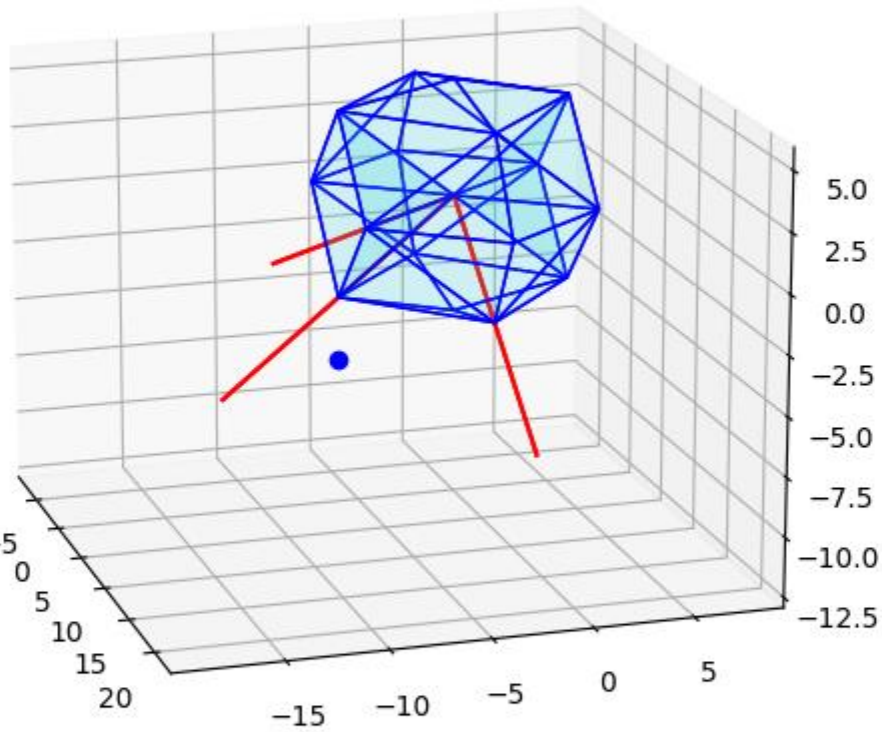
$OH_2 = (0, -6, -4)$

Коэффициенты разложения и норма:

OW_2 = 0.63194 * OA + 0.54861* OB + 0.701389 * OH

$||W_2|| = 1.88194$

На графике показана заданная точка с базисными векторами



- Для точки $W_1+W_2 = (3, 0, -12)$ (аналогично предыдущим пунктам, только для угла $OHBHH$)

[5 6 0] [7 0 4] [0 6 4]	2.0	-1.0	-2.0	-1.0
[5 6 0] [0 7 0] [0 6 4]	0.6	2.057	-3.0	-0.343
[5 6 0] [7 0 4] [10 0 0]	0.0	-3.0	2.4	-0.6
[0 0 5] [7 0 4] [0 6 4]	-2.743	0.429	0.0	-2.314
[5 -6 0] [7 0 4] [0 -6 4]	2.0	-1.0	-2.0	-1.0

[5 -6 0] [0 -7 0] [0 -6 4]	0.6	2.057	-3.0	-0.343
[5 -6 0] [7 0 4] [10 0 0]	0.0	-3.0	2.4	-0.6
[0 0 5] [7 0 4] [0 -6 4]	-2.743	0.429	0.0	-2.314
[-5 6 0] [-7 0 4] [0 6 4]	1.5	-1.5	-1.5	-1.5
[-5 6 0] [0 7 0] [0 6 4]	-0.6	3.086	-3.0	-0.514
[-5 6 0] [-7 0 4] [-10 0 0]	0.0	-3.0	1.8	-1.2
[0 0 5] [-7 0 4] [0 6 4]	-2.057	-0.429	0.0	-2.486
[-5 -6 0] [-7 0 4] [0 -6 4]	1.5	-1.5	-1.5	-1.5
[-5 -6 0] [0 -7 0] [0 -6 4]	-0.6	3.086	-3.0	-0.514
[-5 -6 0] [-7 0 4] [-10 0 0]	0.0	-3.0	1.8	-1.2
[0 0 5] [-7 0 4] [0 -6 4]	-2.057	-0.429	0.0	-2.486
[5 6 0] [7 0 -4] [0 6 -4]	-1.5	1.5	1.5	1.5
[5 6 0] [0 7 0] [0 6 -4]	0.6	-3.086	3.0	0.514
[5 6 0] [7 0 -4] [10 0 0]	0.0	3.0	-1.8	1.2
[0 0 -5] [7 0 -4] [0 6 -4]	**2.057**	**0.429**	**0.0**	**2.486**
[5 -6 0] [7 0 -4] [0 -6 -4]	-1.5	1.5	1.5	1.5
[5 -6 0] [0 -7 0] [0 -6 -4]	0.6	-3.086	3.0	0.514
[5 -6 0] [7 0 -4] [10 0 0]	0.0	3.0	-1.8	1.2
[0 0 -5] [7 0 -4] [0 -6 -4]	2.057	0.429	0.0	2.486
[-5 6 0] [-7 0 -4] [0 6 -4]	-2.0	1.0	2.0	1.0
[-5 6 0] [0 7 0] [0 6 -4]	-0.6	-2.057	3.0	0.343
[-5 6 0] [-7 0 -4] [-10 0 0]	0.0	3.0	-2.4	0.6
[0 0 -5] [-7 0 -4] [0 6 -4]	2.743	-0.429	0.0	2.314

Координаты базисных векторов:

$OB_3 = (7, 0, -4)$

$OH_3 = (0, -6, -4)$

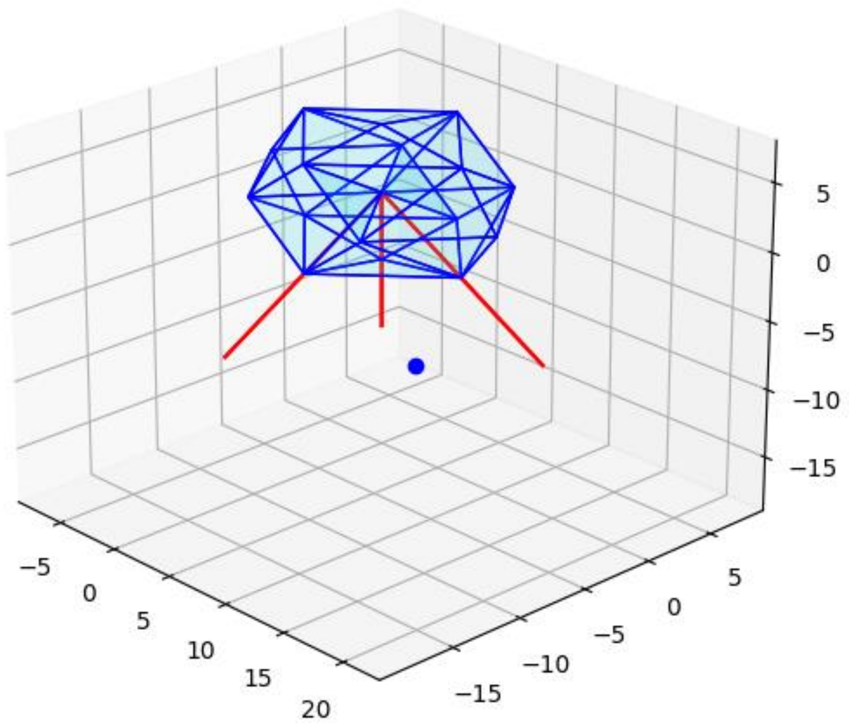
$OHH_3 = (0, 0, -5)$

Коэффициенты разложения и норма:

$OW_3 = 0.42857142857142855 * OB + 0.0 * OH + 2.0571428571428574 * OHH$

$||W_3|| = 2.4857142857142858$

На графике показана заданная точка с базисными векторами



Проверка неравенства треугольника.

Для проверки неравенства треугольника для векторов, используется вектор W_3, вычисленный ранее

Неравенство векторов:

$$||W_1|| + ||W_2|| \geq ||W_1 + W_2|| = ||W_3||$$

1.8819444444444444 + 1.8402777777777778 ≥ 2.4857142857142858

Неравенство выполняется.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения евклидовой нормы на векторах, имеющих норму 1 в норме, порожденной многогранником.

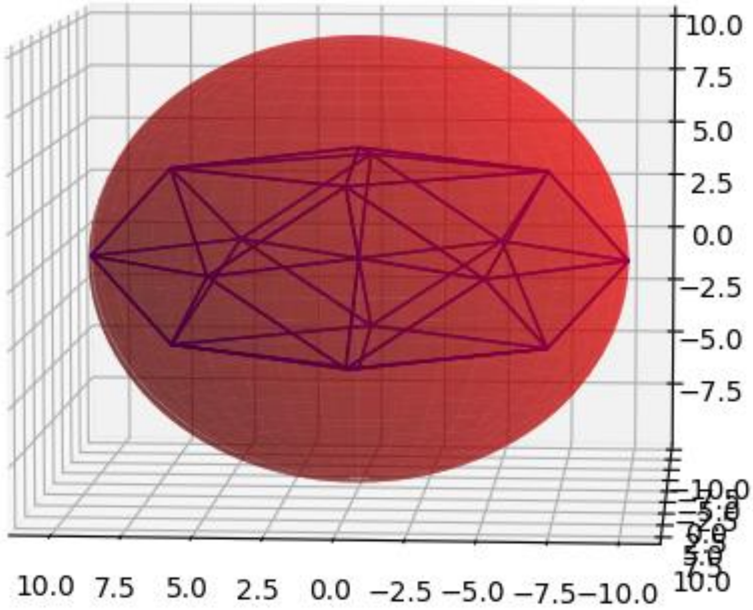
Вектор с наибольшим значением евклидовой нормы - это вектор от начала координат к вершине многогранника, следовательно нам нужно найти максимум среи векторов, соединяющих вершины и начало координат.

Евклидова норма:

$$\|OW\| = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

$$\|OW\|(\max) = 10$$

Изобразим данную сферу на графике



Минимум евклидовой нормы можно взять из центров масс, в связи с тем, что многогранник можно разбить на треугольники.

$$C_1 = \frac{1}{3}(OA + OB + OH)$$

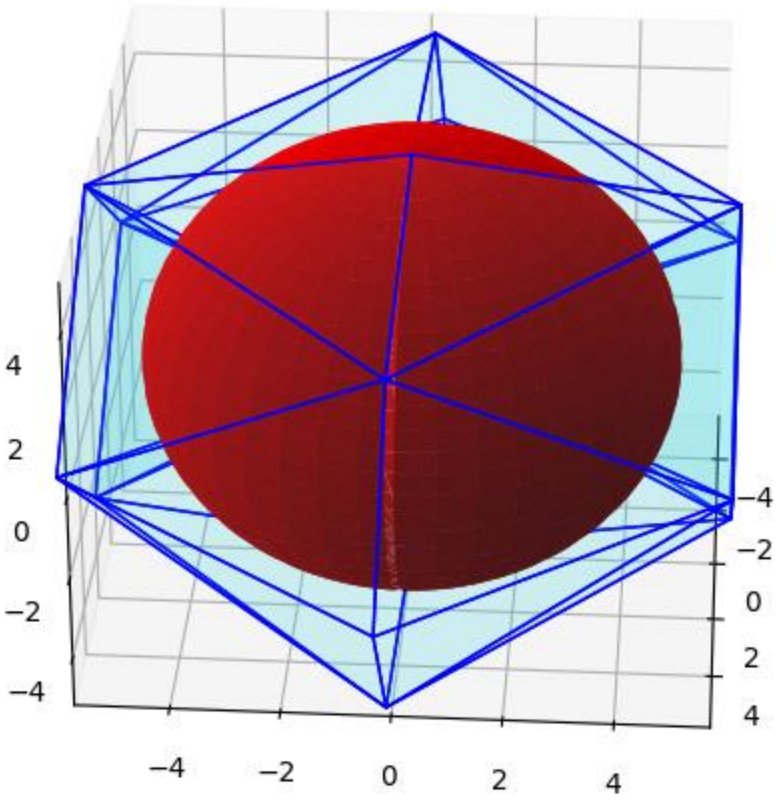
$$C_2 = \frac{1}{3}(OA + OB + OAA)$$

$$C_3 = \frac{1}{3}(OA + OH + OBB),$$

$$C_4 = \frac{1}{3}(OH + OB + OHH)$$

$$\|OW\|(\min) = 5$$

Изобразим данную сферу на графике



Эквивалентность норм

Эквивалентность норм определяется соотношением:

$$c_1||x||_2 \leq ||x||_W \leq c_2||x||_2$$

Так как m – минимальное, а M – максимальное значение евклидовой нормы на векторах, имеющих норму 1 в норме, порожденной многогранником, то имеем соотношение:

$$\frac{1}{M}||x||_2 \leq ||x||_W \leq \frac{1}{m}||x||_2$$

Норма линейного оператора $A: X \to Y$

$$||A|| = \sup\left(||Ax||_Y : ||x||_X = 1\right)$$

Выберем оператор $A = I - B, ||B||_2 < \frac{1}{2}, ||B||_2 = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|), \lambda_k \neq 0$

Матрицу B можно построить по формуле:

$$B = DSD^T$$

Здесь D – матрица поворота, S – диагональная матрица λ_i.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & \frac{1}{25} & 0 \\ \frac{1}{25} & \frac{91}{300} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Собственные числа B: $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ – удовлетворяют условию $\left||B|\right|_2 < \frac{1}{2}$

Матрица A:

$$A = I - B = \begin{pmatrix} \frac{18}{25} & -\frac{1}{25} & 0 \\ -\frac{1}{25} & \frac{209}{300} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, A = A^*$$

Норма l_3^1: $\left||A|\right| = \max\left(\sum_{m=1}^{3} \left|a_{m,k}\right| : k = 1,2,3\right) = \frac{4}{5}$

Норма l_3^∞: $\left||A|\right| = \max(\sum_{k=1}^{3} \left|a_{m.k}\right| : m = 1,2,3) = \frac{4}{5}$

Норма l_3^2: $A = A^*, \left||A|\right| = \max(|\lambda| : Ax = \lambda x) = \max\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}$

Итерационное уравнение

$$Ax = b, b = (1,1,1)$$

$$x = b + Bx, x_{n+1} = b + Bx_n$$

$$x_0 = (0,0,0)$$

Вывод программы:

```
x 0 = [0 0 0]
x 1 = [1. 1. 1.]
x 2 = [1.32       1.34333333 1.2        ]
x 3 = [1.42333333 1.46027778 1.24       ]
x 4 = [1.45694444 1.49988426 1.248      ]
x 5 = [1.46793981 1.51324267 1.2496     ]
x 6 = [1.47155285 1.51773454 1.24992    ]
```

```
x 7 = [1.47274418 1.51924159 1.249984  ]
x 8 = [1.47313803 1.51974638 1.2499968 ]
x 9 = [1.4732685  1.51991526 1.24999936]
x 10 = [1.47331179 1.5199717  1.24999987]
x 11 = [1.47332617 1.51999055 1.24999997]
x 12 = [1.47333095 1.51999685 1.24999999]
x 13 = [1.47333254 1.51999895 1.25      ]
x 14 = [1.47333307 1.51999965 1.25      ]
x 15 = [1.47333325 1.51999988 1.25      ]
x 16 = [1.4733333  1.51999996 1.25      ]
x 17 = [1.47333332 1.51999999 1.25      ]
x 18 = [1.47333333 1.52       1.25      ]
x 19 = [1.47333333 1.52       1.25      ]
```

Как видно, на последних итерациях координаты вектора x меняются на очень малые значения, которые неразличимы компьютером. Последовательность сходится к вектору $x = (1.4733..3, 1.52, 1.25)$