СпРА   Киреев К.

ИДЗ   8381

Вариант 47

① Функция $f: (a, +\infty) \to (b; +\infty)$ задана формулой $f(x)=x^2+3x+3$
Найдите наименьшие a и b, при которых функция f биективна?

Чтобы функция была биективной, она должна быть инъективной и сюръективной одновременно

- $f: A \to B$ - сюръекция, если $\forall b \in B\ \exists a \in A: f(a)=b$
- $f: A \to B$ - инъекция, если $\forall a_1, a_2 \in A: a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

Функция - биективна, если $\forall$ горизонтальная прямая ч/з точку из B на оси Oy пересекает график этой функции в единственной точке

Найдем координаты вершины параболы:

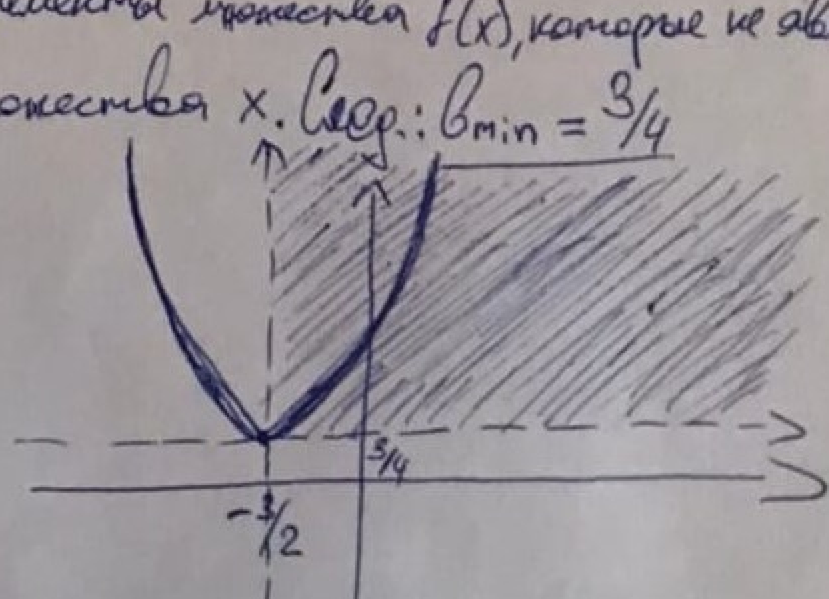
$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$; $y_0 = (-\frac{3}{2})^2 + 3 \cdot (-\frac{3}{2}) + 3 = \frac{3}{4}$

- При $\forall a < -\frac{3}{2}$ существуют такие x_1 и x_2: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Это противоречит определению инъекции. След.: $a_{min} = -\frac{3}{2}$

- При $\forall b < \frac{3}{4}$ существуют такие элементы множества $f(x)$, которые не являются образом какого-либо элемента множества x. След.: $b_{min} = \frac{3}{4}$

Ответ: $a = -\frac{3}{2}$; $b = \frac{3}{4}$;



② Является ли функция $f: \{1, \dots, 8\} \to \{1, \dots, 8\}$ заданная таблицей

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 3 & 2 & 8 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$ инъективной? сюръективной? биективной?

- $f: A \to B$ – инъективна, если $\forall a_1, a_2 \in A: a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, но для $a_1 = 3$ и $a_2 = 6$: $3 \neq 6 \Rightarrow f(3) = f(6) = 3$, что противоречит определению инъекции. $\Rightarrow$ ф. не яв. инъективной
- $f: A \to B$ – сюръективна, если $\forall b \in B \; \exists a \in A: f(a) = b$, но не существует такого $a \in A: f(a) = 4$, что противоречит определению сюръекции $\Rightarrow$ ф. не яв. сюръективной
- Функция не является инъективной и не является сюръективной, следовательно функция не является биективной.