МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №2
по дисциплине «Методы оптимизации»
Тема: Симплексный метод
Вариант 8

Студент гр. 8383	____________________	Киреев К.А.
Преподаватель	____________________	Мальцева Н.В.

Санкт-Петербург
2021

Цели работы

- Решение задачи линейного программирования симплекс методом с помощью стандартной программы
- Решение задачи линейного программирования графически
- Сравнение результатов решения задачи обоими способами

Постановка задачи

Рассматривается следующая задача линейного программирования.

Найти минимум линейной функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$:

*f = c[1]*x[1] + c[2]*x[2] + ... + c[n]*x[n]*,

где *c[i]* - постоянные коэффициенты на множестве, заданном набором линейных ограничений:

*a[1, 1]*x[1] + ... + a[1, n]*x[n] >= b[1]*

...

*a[m, 1]*x[1] + ... + a[m, n]*x[n] >= b[m]*

x[1] >= 0, ..., x[n] >= 0,

где *a[i, j], b[i]* - постоянные коэффициенты.

В матричной форме ограничения записываются следующим образом:

AX >= B, X >= 0

Целевая функция м. б. представлена в виде скалярного произведения:

f = (C, X).

Краткие общие сведения

Симплексный метод решения задачи линейного программирования состоит из двух этапов:

- поиск крайней точки допустимого множества
- поиск оптимальной точки путем направленного перебора крайних точек

Крайняя точка не существует, если в таблице существует строка, все элементы которой неположительные, а последний элемент - отрицательный.

Крайняя точка найдена, если все элементы вектора-столбца В больше нуля.

Чтобы найти крайнюю точку, надо:

- выбрать строку `i`, в которой `b[i] < 0`
- выбрать столбец `s`, в котором `a[i,s] >= 0`
- в столбце s задать номер строки r разрешающего элемента так, чтобы отрицательное отношение `b[r]/a[r,s]` было максимальным
- поменять местами имена координат в таблице из строки r и столбца s
- рассматривая элемент `a[r,s]` как разрешающий, необходимо преобразовать таблицу по формулам:

```
ARS:= a[r,s];
z1[r,s]:= 1/ARS;
z1[r,j]:= -z[r,j]/ARS , j<>s;
z1[i,s]:= z[i,s]/ARS , i<>r;
z1[i,j]:= (z[i,j]*ARS - z[i,s]*z[r,j])/ARS , i<>r,j<>s;
z:=z1,
```

где под `z` и `z1` понимается соответственно первоначальное и преобразованное значение таблицы (кроме левого столбца и верхней строки)

Оптимальная точка найдена, если все элементы вектора-строки `C >= 0` (при этом все элементы вектор-столбца `B >= 0`)

Оптимальная точка не существует, если в таблице есть столбец `j`, в котором `c[j] < 0`, а все `a[i,j]>0` при любом `i`.

Чтобы найти оптимальную точку, надо:

- выбрать столбец s, в котором `c[s] < 0`
- в столбце s задать номер строки r разрешающего элемента так, чтобы отрицательное отношение `b[r]/a[r,s]` было максимальным
- поменять местами имена координат в таблице из строки r и столбца s
- рассматривая элемент `a[r,s]` как разрешающий, необходимо преобразовать таблицу по формулам

Координаты оптимальной точки определяются следующим образом:

- если `x[j]` находится на `i`-м месте левого столбца, то его значение равно `b[i]` o если $x[i]$ находится на j-м месте верхней строки, то его значение равно 0

Выполнение работы

На РС-ЭВМ была запущена стандартная программа с 8 вариантом.

Начальные условия для симплекс-метода представлены на рис. 1.

	x1	x2	b[i]
y1	2.00	-1.00	1.00
y2	1.00	-2.00	5.00
y3	-1.00	-1.00	7.00
y4	-1.00	1.00	3.00
c[j]	1.00	-2.00	0.00

Рисунок 1 – Начальные условия

По таблице приводим задачу к основному виду задачи линейного программирования:

$$f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 \to \min \qquad X: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 + 7 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 + 3 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Графическое решение

Решим задачу линейного программирования графически. На рис. 2 представлено графическое решение задачи с определением допустимого множества, линии уровня целевой функции и отрезком, на котором достигается минимум целевой функции на допустимом множестве. Область допустимого множества не закрашена.

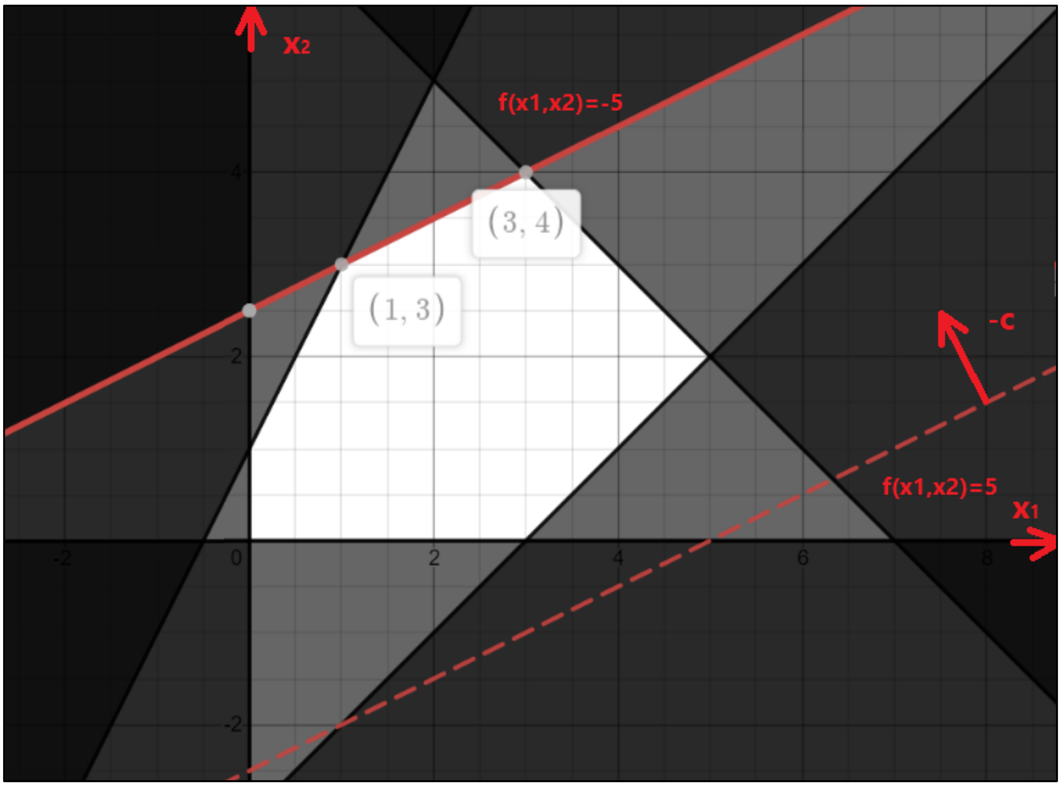


Рисунок 2 – Графическое решение

Минимум целевой функции на допустимом множестве достигается на отрезке, заключенном между точками $(x_1 = 1, x_2 = 3)$ и $(x_1 = 3, x_2 = 4)$

Программное решение

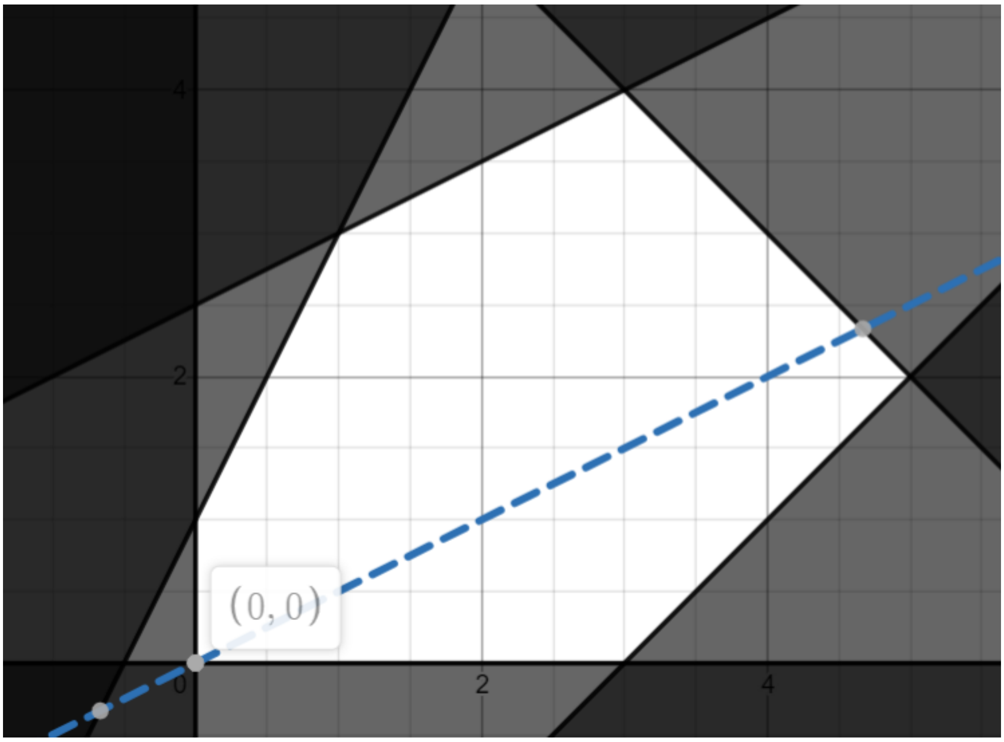
Запустим программу на ПК и, отвечая на вопросы, выдаваемые программой, решим задачу линейного программирования симплекс-методом.

- ***Шаг 1***

	x1	x2	b[i]
y1	2.00	-1.00	1.00
y2	1.00	-2.00	5.00
y3	-1.00	-1.00	7.00
y4	-1.00	1.00	3.00
c[j]	1.00	-2.00	0.00

Начинаем решение с точки $(x_1 = 0, x_2 = 0)$, в которой значение функции равно 0.

На графике можно отобразить линию целевой функции и точку.



В представленной таблице нет строк, где свободный член отрицательный, следовательно крайняя точка существует и найдена.

В таблице нет столбцов, в которых `c[j] < 0` и все `a[i,j]>0` при любом `i,` следовательно оптимальная точка существует.

Оптимальная точка не найдена, так как в векторе-строке `C` присутствует отрицательный элемент.

Номер столбца для разрешающего элемента может быть только 2.

Номер строки для разрешающего элемента – строка, где отрицательное отношение `b[r]/a[r,s]` максимальное $(\boldsymbol{r} = \mathbf{1}{:}\ {}^{1}/_{-1} = -1,\ \boldsymbol{r} = \mathbf{2}{:}\ {}^{5}/_{-2} = -2.5, \boldsymbol{r} = \mathbf{3}{:}\ {}^{7}/_{-1} = -7)$. Это строка 1.

Разрешающий элемент - a_{12}

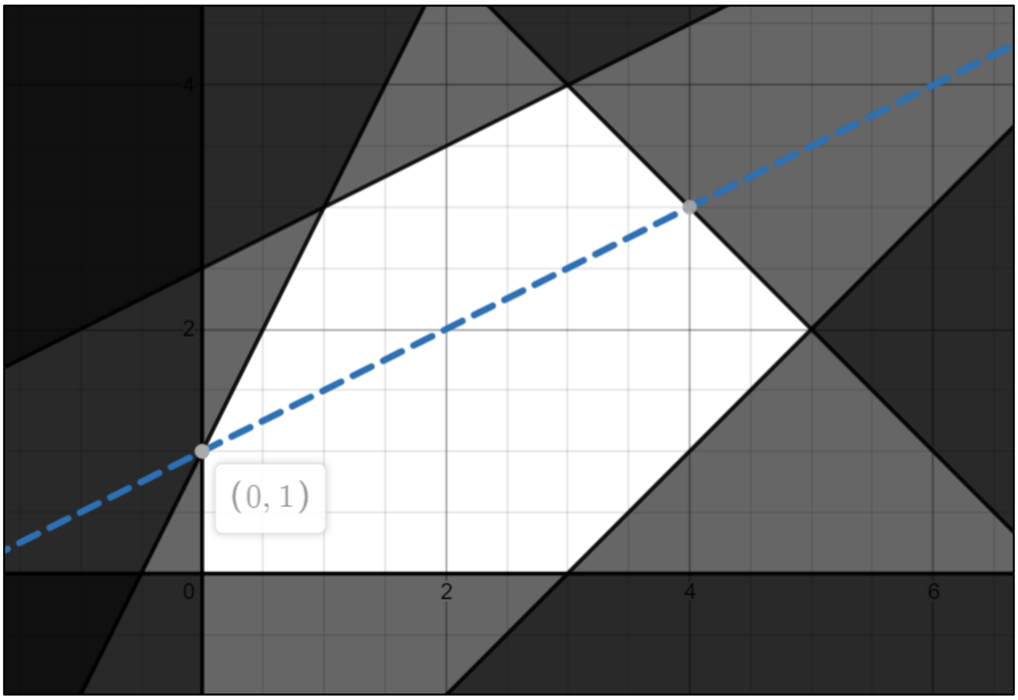
Для перехода к следующему шагу производятся преобразования таблицы по формулам, представленным выше.

- ***Шаг 2***

	x1	y1	b[i]
x2	2.00	-1.00	1.00
y2	-3.00	2.00	3.00
y3	-3.00	1.00	6.00
y4	1.00	-1.00	4.00
c[j]	-3.00	2.00	-2.00

Рассматриваем точку ($x_1 = 0, x_2 = 1$), в которой значение функции -2.

На графике можно отобразить линию целевой функции и точку.



В таблице нет столбцов, в которых `c[j] < 0` и все `a[i,j]>0` при любом `i,` следовательно оптимальная точка существует.

Оптимальная точка не найдена, так как в векторе-строке `C` присутствует отрицательный элемент.

Номер столбца для разрешающего элемента – столбец с элементом `c < 0`. Это столбец 1.

Номер строки для разрешающего элемента – строка, где отрицательное отношение $b[r]/a[r,s]$ максимальное ($\boldsymbol{r}=\mathbf{2}$: ${}^{3}/_{-3}=-1$, $\boldsymbol{r}=\mathbf{3}$: ${}^{6}/_{-3}=-2$). Это строка 2.

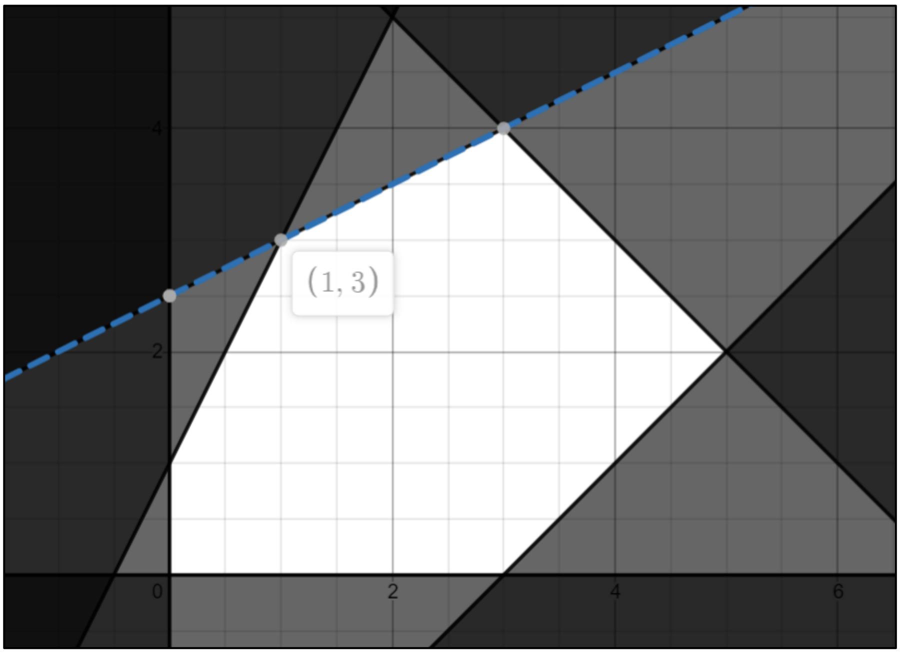
Разрешающий элемент - a_{21}.

- ***Шаг 3***

```
     ¦   y2      y1   ¦  b[i]
-----------------------------
 x2 ¦  -0.67   0.33¦    3.00
 x1 ¦  -0.33   0.67¦    1.00
 y3 ¦   1.00  -1.00¦    3.00
 y4 ¦  -0.33  -0.33¦    5.00
-----------------------------
c[j]¦   1.00   0.00¦   -5.00
```

Рассматриваем точку ($x_1=1, x_2=3$), в которой значение функции равно -5.

На графике можно отобразить линию целевой функции и точку.



Оптимальная точка существует и найдена, так как все элементы вектора-строки `C >= 0` (при этом все элементы вектор-столбца `B >= 0`)

Итак, в результате применения симплекс-метода было получено решение: минимум функции на допустимом множестве достигается в точке $x_1 = 1, x_2 = 3$. Крайняя точка ($x_1 = 1,\ x_2 = 3$), найденная программной, принадлежит отрезку, который был получен с помощью графического решения.

Однако с помощью программы дойти до точки ($x_1 = 3,\ x_2 = 4$) не получается, значит данную задачу можно решить только графически.

Выводы.

В процессе выполнения лабораторной работы, был изучен симплекс-метод, с помощью которого была решена задача линейного программирования. Шаги симплекс-метода были дополнены графически, и была проведена проверка корректности результата с помощью графического решения задачи. Данную задачу следует решать графическим путем, так как программа не может выдать нам решение в виде отрезка, и выдает нам лишь одно из возможных решений.