1) Даны две независимые выборки $X_1, \ldots, X_n$ из $\mathcal{N}(a, 2)$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ из $\mathcal{N}(b, 4)$. Построить ДИ для $a - 2b$.

Решение

Из п. 1 леммы Фишера

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - a}{\sqrt{2}} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \sqrt{m}\,\frac{\bar{Y} - b}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{\bar{X} - a}{\sqrt{2}} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right) \qquad \frac{2\bar{Y} + 2b}{2} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{4}{m}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2\bar{Y} + 2b}{\sqrt{2}} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{8}{m}\right)$$

Тогда

$$\frac{\bar{X} - 2\bar{Y} - (a - 2b)}{\sqrt{2}} \sim \mathcal{N}\Big(0, \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{8}{m}}_{\frac{m - 8n}{nm}}\Big) \quad \geqslant 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{\frac{nm}{m - 8n}}\,\frac{\bar{X} - 2\bar{Y} - (a - 2b)}{\sqrt{2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Выберем $x_\alpha : \Phi(x_\alpha) = 1 - \alpha/2$

$$P\left(-x_\alpha \leqslant \sqrt{\frac{nm}{m - 8n}}\,\frac{\bar{X} - 2\bar{Y} - (a - 2b)}{\sqrt{2}} \leqslant x_\alpha\right) = \Phi(x_\alpha) - \Phi(-x_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$\parallel$$

$$P\left(-x_\alpha\sqrt{\frac{2m - 16n}{nm}} - (\bar{X} - 2\bar{Y}) \leqslant -(a - 2b) \leqslant x_\alpha\sqrt{\frac{2m - 16n}{nm}} - (\bar{X} - 2\bar{Y})\right) =$$

$$= P\left(\bar{X} - 2\bar{Y} - x_\alpha\sqrt{\frac{2m - 16n}{nm}} \leqslant a - 2b \leqslant \bar{X} - 2\bar{Y} + x_\alpha\sqrt{\frac{2m - 16n}{nm}}\right)$$

Тогда

$$\left[\bar{X} - 2\bar{Y} - x_\alpha\sqrt{\frac{2m - 16n}{nm}},\ \bar{X} - 2\bar{Y} + x_\alpha\sqrt{\frac{2m - 16n}{nm}}\right]$$ – ДИ для $a - 2b$ ур. доверия $1 - \alpha$.

② Построить ОМП параметра $\theta = a > 0$ по выборке $X_1, \ldots, X_n$ из распр. с плотн. $p_\theta(x) = a e^{ax} \mathbb{1}\{x \le 0\}$

Решение

Функция правдоподобия:

$$L(\vec{X}; a) = \prod_{i=1}^{n} a e^{aX_i} \mathbb{1}\{X_i \le 0\} = a^n e^{a\sum_{i=1}^{n} X_i} \mathbb{1}\{X_{(n)} \le 0\}$$

Считаем, что $X_{(n)} \le 0$.

Логарифмируем:

$$LL(\vec{X}; a) = n \log a + a\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Дифференцируем:

$$\frac{\partial LL(\vec{X}; a)}{\partial a} = \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow \hat{a} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = -\frac{1}{\overline{X}} \text{ - ОМП}$$

③ Построить НРМД-оценку параметра θ при выборке $X_1, \ldots, X_n$ из распр. с плотн.

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \mathbb{1}\{x \in [0, \sqrt{\theta}]\}$$

Решение

Функция правдоподобия:

$$L(\vec{X}; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\theta}} \mathbb{1}\{X_i \in [0, \sqrt{\theta}]\} = \underbrace{\frac{1}{\theta^{n/2}} \mathbb{1}\{X_{(n)} \le \sqrt{\theta}\}}_{g_\theta(T(\vec{X}))} \underbrace{\mathbb{1}\{X_{(1)} \ge 0\}}_{h(\vec{X})}$$

МДС: $X_{(n)}$

Мы на практике проверяли полноту $X_{(n)}$ равномерного распр., так что я это писать не буду и просто скажу, что МДС полная.

Ищем ОМП:

$$\begin{cases} \theta \to \min \\ X_{(n)} \le \sqrt{\theta} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\theta} = X_{(n)} \Rightarrow \hat{\theta} = X_{(n)}^2$$

Находим $\mathbb{E} X_{(n)}^2$:

$$\mathbb{E} X_{(n)}^2 = \int_0^{\sqrt{\theta}} x^2 \frac{n}{\theta^{n/2}} x^{n-1} dx = \frac{n}{\theta^{n/2}} \int_0^{\sqrt{\theta}} x^{n+1} dx = \frac{n}{\theta^{n/2}} \frac{\theta^{n/2+1}}{n+2} = \frac{n}{n+2}\theta$$

$\hat{\theta}$ – смещенная оценка. Корректируем смещение:

$\tilde{\theta} = \frac{n+2}{n}\hat{\theta}$; $\mathbb{E}\tilde{\theta} = \theta \Rightarrow \tilde{\theta}$ – несмещ. оценка, функ. от ПДС

$\Rightarrow \tilde{\theta}$ – НРМД-оценка.