Цифровая обработка сигналов

Лекция №4

Санкт-Петербург

2020

Дискретные сигналы

Дискретный сигнал:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\dots,\ x_{N-1}\quad , \qquad (4.1)$$

как правило, получается при дискретизации аналогового (определенного во все моменты времени) сигнала $s(t)$.

Будем считать, что отсчеты $x_k,\ k=0,1,\dots,N-1$ дискретного сигнала получены в результате равномерной дискретизации сигнала $s(t)$ с шагом дискретизации, равным единице:

$$x_k = s(t_k),\ k=0,1,\dots,N-1;\ t_k - t_{k-1} = T,\ k=1,2,\dots,N-1;\ T=1$$

Если на самом деле $t_k - t_{k-1} = \Delta t,\ k=1,2,\dots,N-1;$ и $\Delta t \neq 1$,

то вводим в рассмотрение $\tilde{t}_k = \dfrac{(t_k - t_0)}{\Delta t}, k=0,1,\dots,N-1$

В результате получим: $\tilde{t}_k = k;\ s(\tilde{t}_k) = s(k\Delta t),\ k=0,1,\dots,N-1$

Спектр дискретного сигнала

Представим дискретный сигнал в виде функции от времени:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t-k). \qquad (4.2)$$

Тогда, пользуясь свойствами преобразования Фурье, спектр дискретного сигнала можно представить в виде периодической функции с периодом, равным 2π:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-i\omega k}, \qquad (4.3)$$

Спектр дискретного сигнала

С другой стороны, представим дискретный сигнал в виде:

$$s_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-kT) \qquad (4.4)$$

Вынесем $s(t)$ за знак суммы:

$$s_d(t) = s(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \qquad (4.5)$$

Сумма в (4.5) может быть представлена комплексным рядом Фурье:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}$$

где:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad ; \quad c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)e^{-i\omega_k t}dt = \frac{1}{T}$$

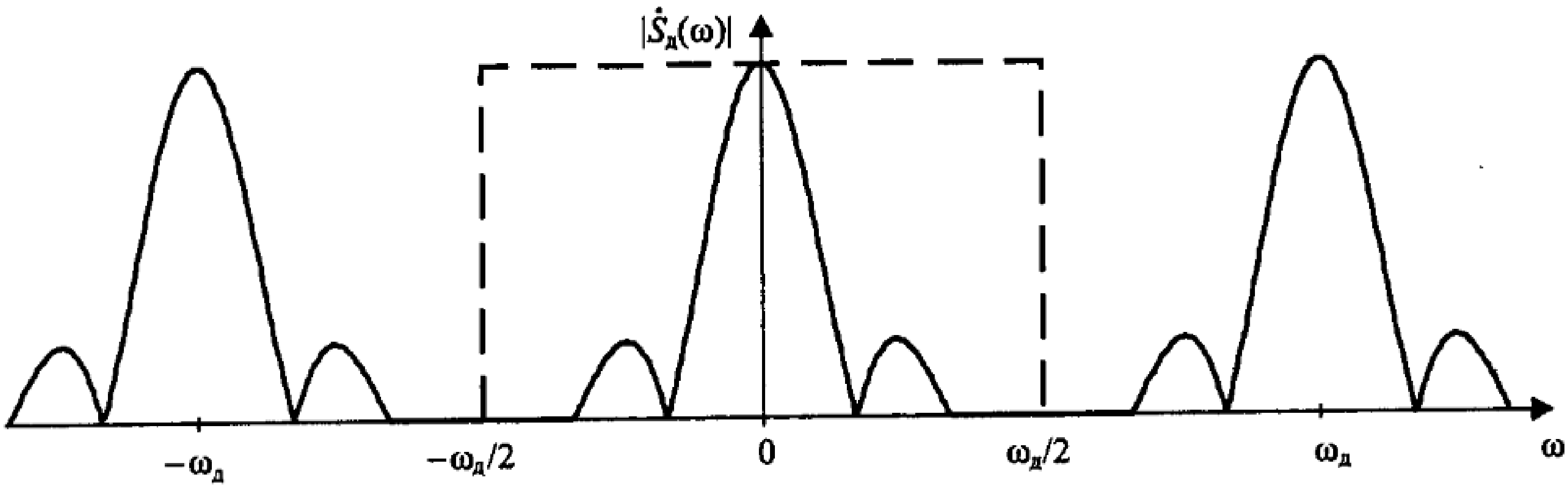
Спектр дискретного сигнала

Таким образом дискретный сигнал может быть записан в виде:

$$s_d(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t)e^{i\omega_k t} \quad , \qquad (4.6)$$

а его спектр:

$$S_d(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \qquad (4.7)$$



Расстояние между копиями равно $2\pi / T$

Теорема Котельникова

Теорема. Сигнал $s(t)$, не содержащий гармоник с частотами, превышающими некоторого значения $\hat{\omega} = 2\pi \hat{f}$, может быть представлен без потери информации своими дискретными отсчетами $s(kT)$, взятыми с интервалом T, удовлетворяющим условию:

$$T \le \frac{1}{2\hat{f}} = \frac{\pi}{\hat{\omega}} \qquad (4.8)$$

Восстановление исходного сигнала осуществляется по формуле:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT) \frac{\sin\left(\pi \dfrac{t-kT}{T}\right)}{\left(\pi \dfrac{t-kT}{T}\right)} \qquad (4.9)$$

Теорема Котельникова

Формула (4.9) представляет собой разложение $s(t)$ в ряд по системе функций

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin\left(\pi \dfrac{t-kT}{T}\right)}{\left(\pi \dfrac{t-kT}{T}\right)}, \qquad (4,10)$$

называемой базисом Котельникова.

Теорема Котельникова

$$x:(0,0,4,3,2,1,0,0,0)$$

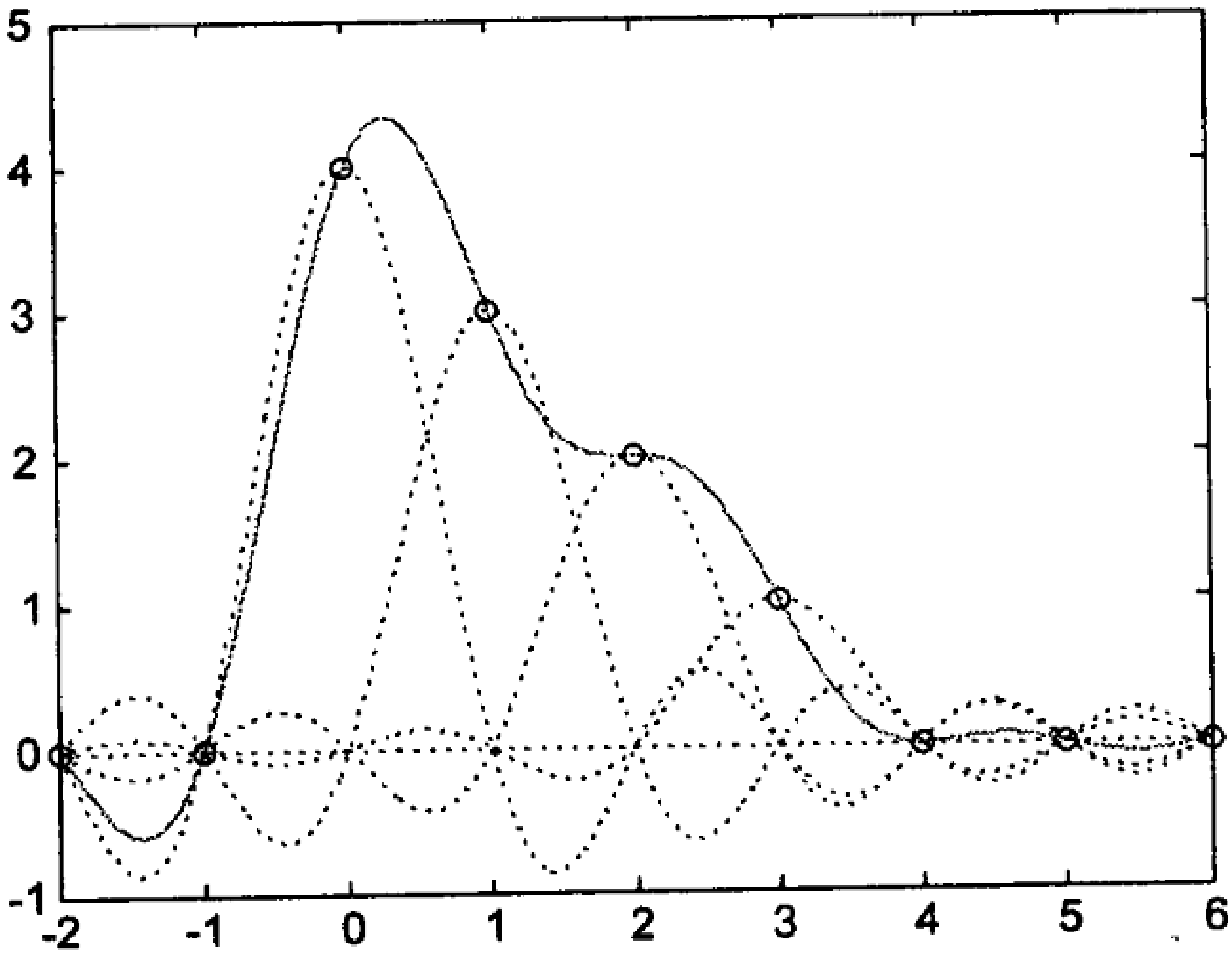


Рис. Восстановление сигнала по его дискретным отсчетам

Теорема Котельникова

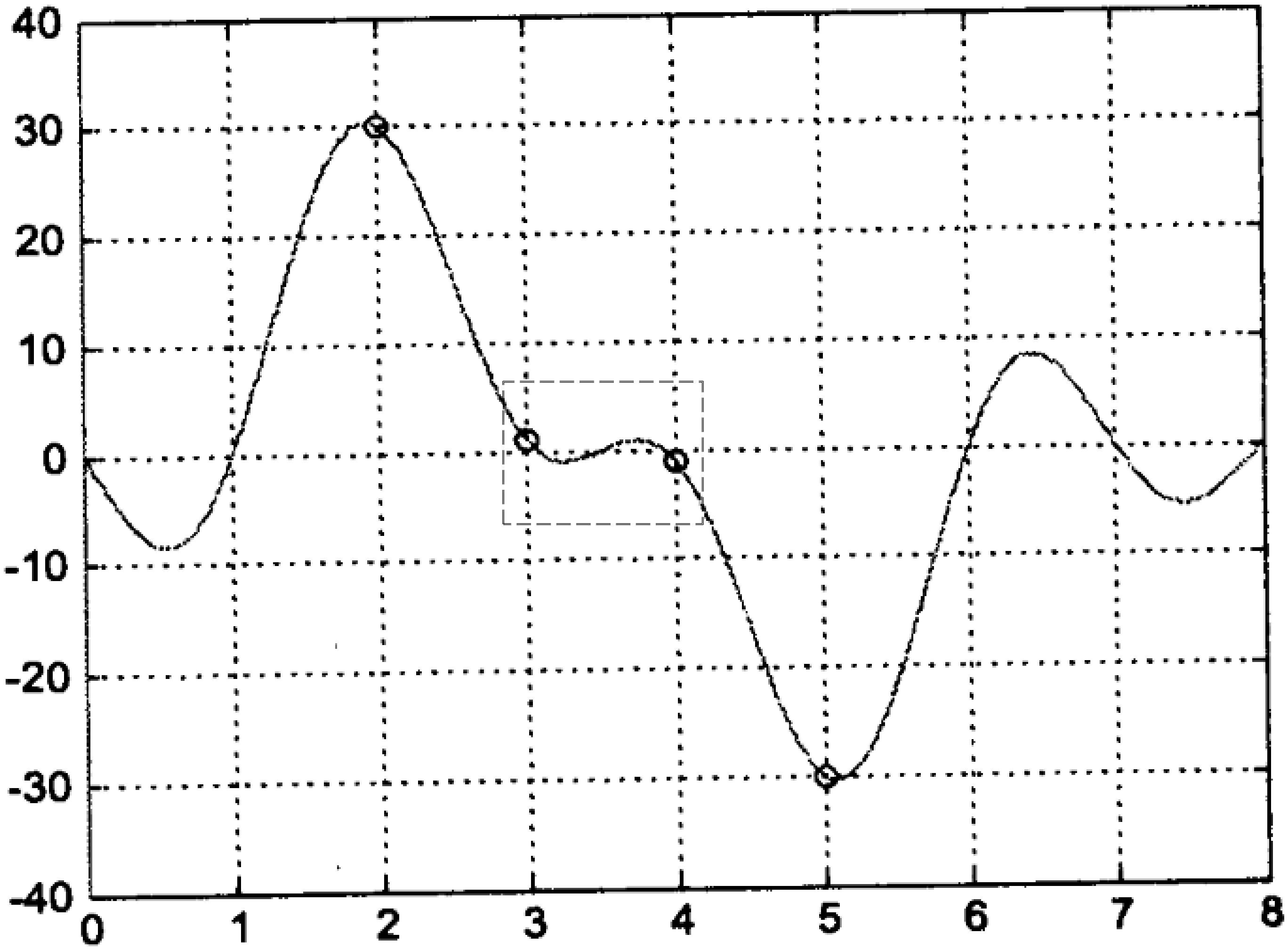


Рис. Сигнал с ограниченным спектром, содержащий фрагмент с колебанием высокой частоты

Дискретное преобразование Фурье

Пусть последовательность отсчетов $\{x_k\}$ является периодической с периодом N :

$$x_{k+N} = x_k \ \forall k \ .$$

Рассмотрим фрагмент последовательности из N отсчетов. Например, $\{x_k : k = 0,1,2,...,N-1\}$. Тогда дискретная функция

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t - kT) \qquad (4.11)$$

тоже будет периодической, с периодом NT . Здесь T - период дискретизации

Спектр $s(t)$ также должен периодическим (с периодом $\frac{2\pi}{T}$) и дискретным с расстоянием между гармониками $\frac{2\pi}{NT}$

Дискретное преобразование Фурье

Поскольку $s(t)$ периодическая функция, ее можно разложить в ряд Фурье, коэффициенты которого вычисляются по формуле:

$$X(n) = \frac{1}{NT} \int_{0}^{NT} s(t) e^{-i\omega_n t} dt \; ,$$

или после преобразований:

$$X(n) = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} \qquad (4.12)$$

Дискретное преобразование Фурье

После удаления в (4.12) множителя перед суммой, получим:

$$X(n)=\sum_{k=0}^{N-1}x_k e^{-i\frac{2\pi n}{N}k}, n=0,1,2,:..,N-1 \quad (4.13)$$

Выражение (4.13) называют дискретным преобразованием Фурье (ДПФ).

Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) запишется в виде:

$$x_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(n)e^{i\frac{2\pi k}{N}n}, k=0,1,2,...,N-1 \quad (4.14)$$

Свойства ДПФ

Пусть $\{x(k)\}$, $\{y(k)\}$ дискретные последовательности с периодом N и

ДПФ $\{x(k)\} = \{X(n)\}$, а ДПФ $\{y(k)\} = \{Y(n)\}$

1. Линейность:

$$\text{ДПФ}\left[\alpha\{x(k)\}+\beta\{y(k)\}\right]=\alpha\{X(n)\}+\beta\{Y(n)\}$$

2. Задержка:

$$\{z(k)\}=\{x(k-1)\}\Rightarrow\{Z(n)\}=\left\{X(n)\exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}\right)\right\}$$

Здесь $z(0)=x(-1)=x(N-1)$

3. Симметрия: $X(N-n)=X(-n)=X^{*}(n)$

Имеет место для вещественного сигнала.

Свойства ДПФ

4. ДПФ произведения:

$$z(k) = x(k) \cdot y(k), k = 0, 1, 2, ..., N-1$$

$$Z(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y(n-k), n = 0, 1, 2, ..., N-1 \quad (4.15)$$

Свертка в выражении (4.15) является круговой сверткой и отличается от линейной свертки тем, что в круговой свертке используется периодичность $\{Y(k)\}$ в случае, когда значение k выходит за пределы диапазона 0…N-1.

Другими словами, в этом случае используется равенство:

$$Y(k) = Y(k \pm N)$$

Свойства ДПФ

5. Матрица ДПФ: $X = A_{ДПФ} x$

$$A_{ДПФ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{N}} & e^{-i\frac{4\pi}{N}} & e^{-i\frac{6\pi}{N}} & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-i\frac{4\pi}{N}} & e^{-i\frac{8\pi}{N}} & e^{-i\frac{12\pi}{N}} & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ 1 & e^{-i\frac{6\pi}{N}} & e^{-i\frac{12\pi}{N}} & e^{-i\frac{18\pi}{N}} & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{N}3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-i\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & e^{-i\frac{2\pi}{N}3(N-1)} & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Свойства ДПФ

6. Спектр дискретного сигнала определяется формулой (4.3).

$$S(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-i\omega k}$$

Из сравнения этой формулы с формулой ДПФ

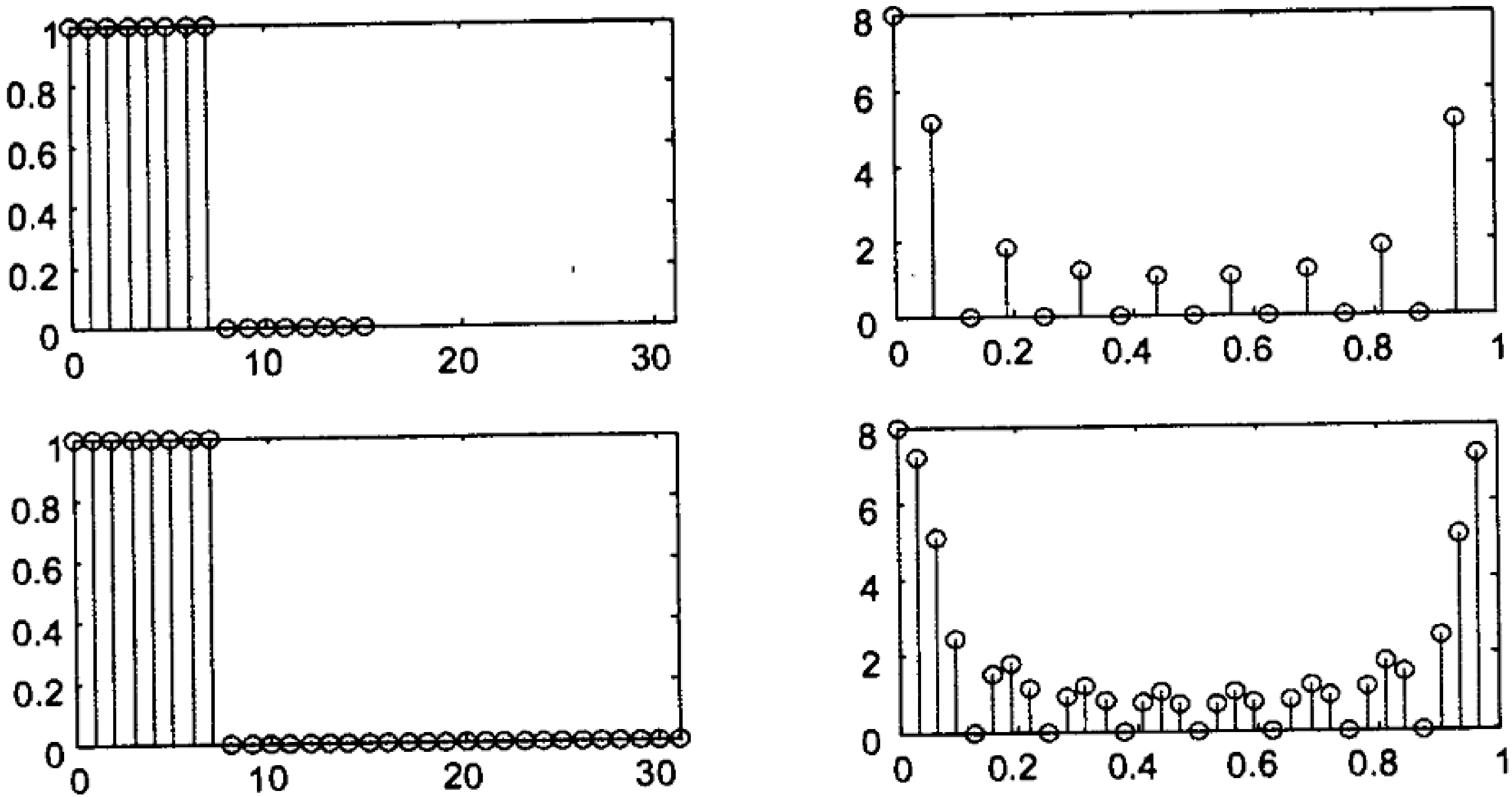
$$X(n)=\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi n}{N}k}, n=0,1,2,\dots,N-1$$

следует, что ДПФ вычисляет дискретные отсчеты спектра дискретного сигнала:

$$X(n)=S\left(\frac{2\pi n}{N}\right)=S\left(\omega_d\frac{n}{N}\right),\ T=1 \qquad (4.16)$$

Свойства ДПФ

7. Из формулы (4.16) следует, что, дополняя $\{x_k\}$ нулями (что не меняет спектра) можно увеличить «спектральную разрешающую» способность ДПФ



Быстрое преобразование Фурье

Прореживание по времени. Пусть N – четное число.

$$X(n)=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k} e^{-i\frac{2\pi n}{N}2k}+\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} e^{-i\frac{2\pi n}{N}(2k+1)}$$

Обозначим $\{y(k)\}=\{x(2k)\}$ и $\{z(k)\}=\{x(2k+1)\}$

$$X(n)=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} y_k e^{-i\frac{2\pi n}{(N/2)}k}+e^{-i\frac{2\pi n}{N}}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} z_k e^{-i\frac{2\pi n}{(N/2)}k}$$

В результате:

$$X(n)=Y(n)+e^{-i\frac{2\pi n}{N}}Z(n) \qquad (4.17)$$

Быстрое преобразование Фурье

Последовательности $\{y(k)\}$ и $\{z(k)\}$ размерности $N/2$, поэтому формулу (4.17) можно использовать только при $0 \le n < N/2$. При $(N/2) \le n < N$ следует воспользоваться периодичностью ДПФ:

$$Y\left(n+\frac{N}{2}\right)=Y(n);\ Z\left(n+\frac{N}{2}\right)=Z(n)$$

В результате при $(N/2) \le n < N$ формула (4.17) примет вид:

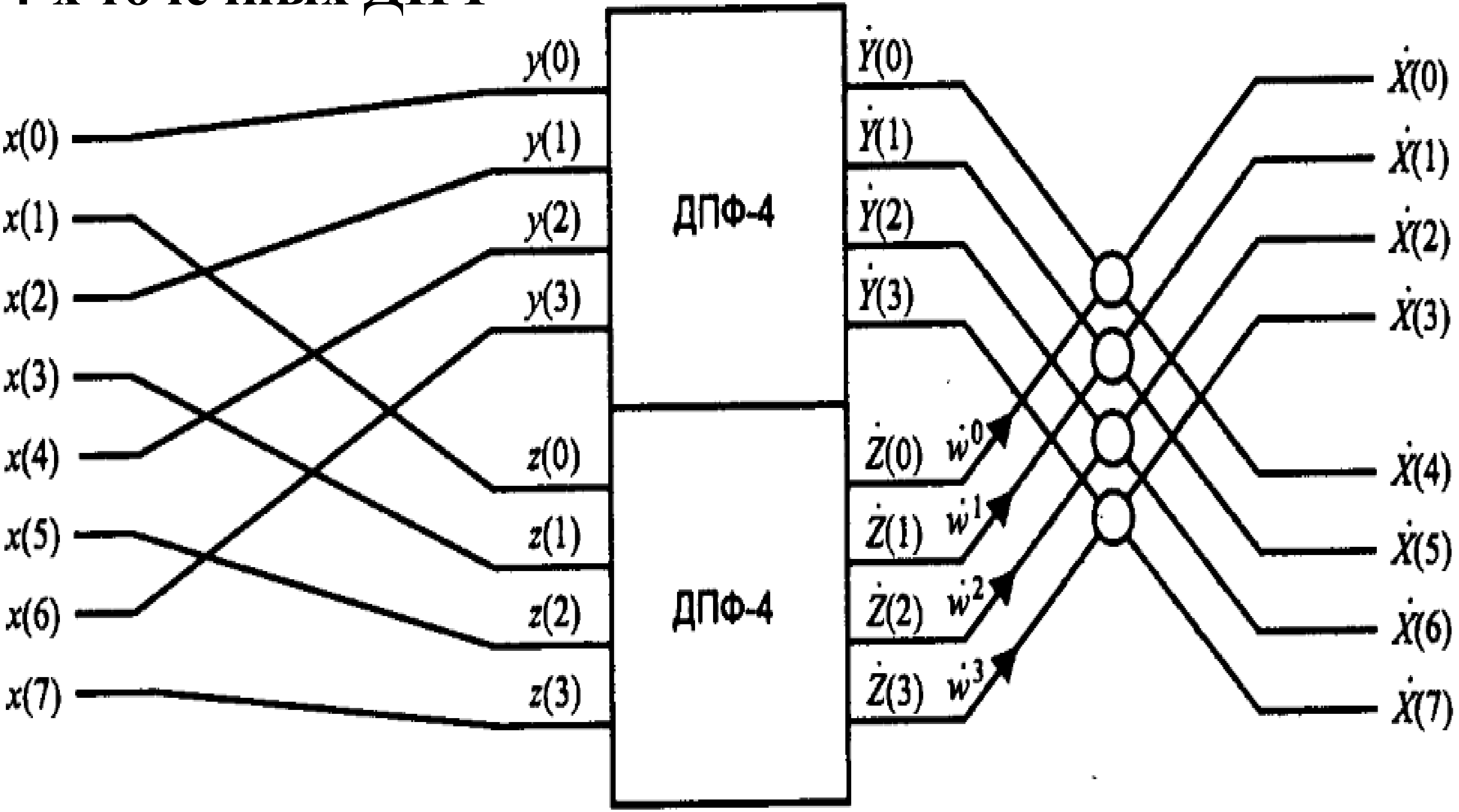
$$X(n)=Y\left(n-\frac{N}{2}\right)-e^{-i\frac{2\pi}{N}\left(n-\frac{N}{2}\right)}Z\left(n-\frac{N}{2}\right) \qquad (4.18)$$

В результате получаем $N(N+1)/2$ вместо N^2 вычислительных операций.

При $N=2^k$ можно ограничиться $N\log_2 N$ операциями.

Быстрое преобразование Фурье

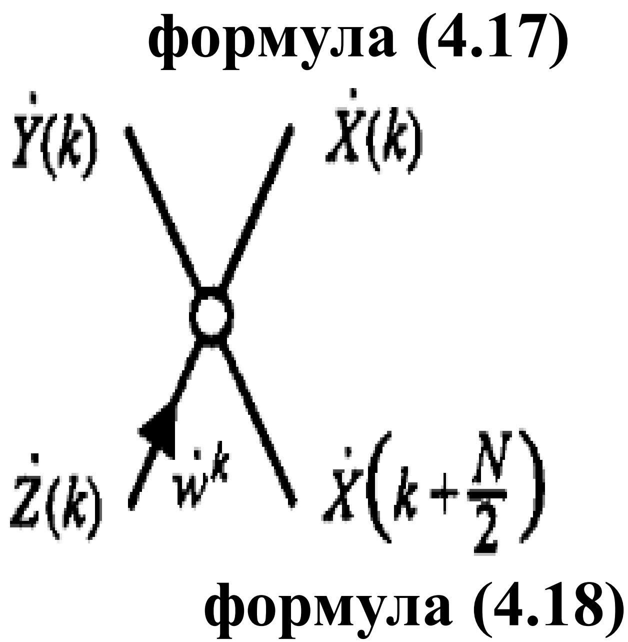
Вычисление 8-точечного ДПФ с помощью 2-х 4-х точечных ДПФ

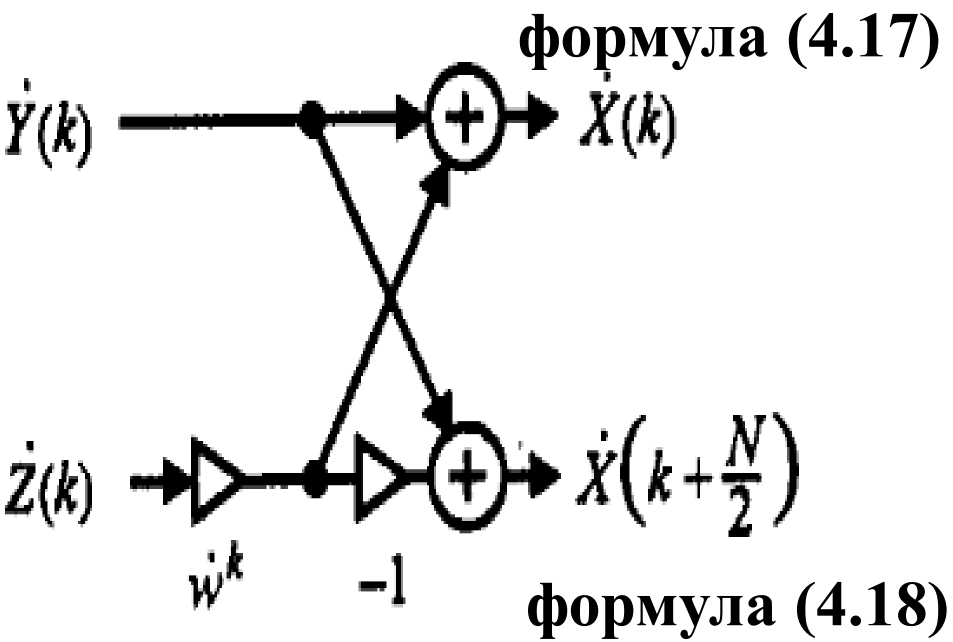


Быстрое преобразование Фурье

«Бабочка»
условное изображение

«Бабочка»
структурная схема





Разработаны также схемы БДПФ с прореживанием по частоте .

Дискретное преобразование Фурье растекание спектра

Пусть анализируется дискретная последовательность $\{x(k)\}$, для которой $x(0) \neq x(N-1)$. Из-за **периодичности** последовательности имеет место «расширение» спектра.

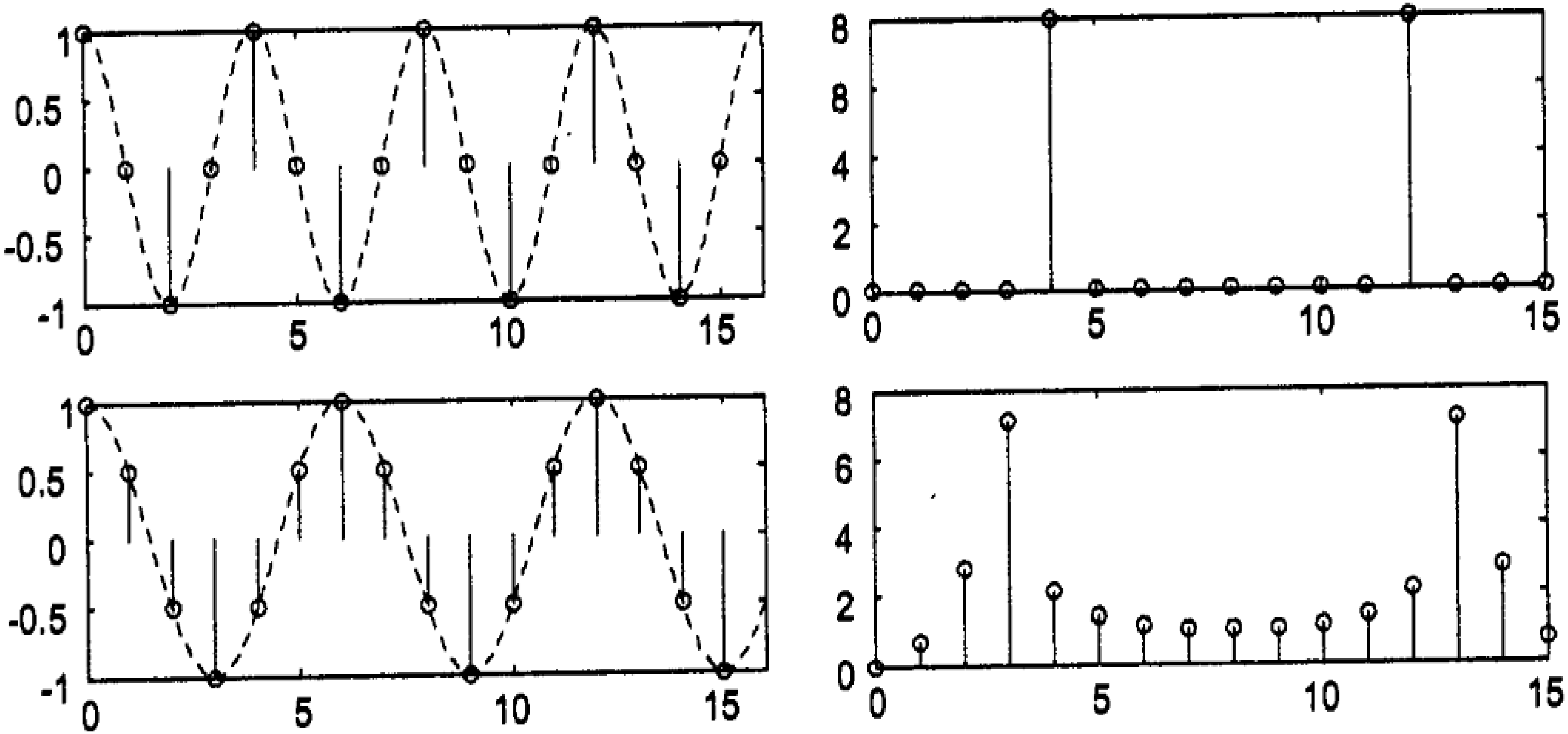
Например, $x(k) = \cos\left(\omega kt + \varphi\right), k = 0, 1, 2, ..., N.-1$

Если $N\omega T / 2\pi$ - целое число, то ДПФ дискретного сигнала $x(k)$ содержит только два отличных от нуля отсчета:

$$X(n) = \begin{cases} \dfrac{N}{2} e^{i\varphi}, & n = \dfrac{\omega T}{2\pi} N \\ \dfrac{N}{2} e^{-i\varphi}, & n = \left(1 - \dfrac{\omega T}{2\pi}\right) N \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Дискретное преобразование Фурье растекание спектра

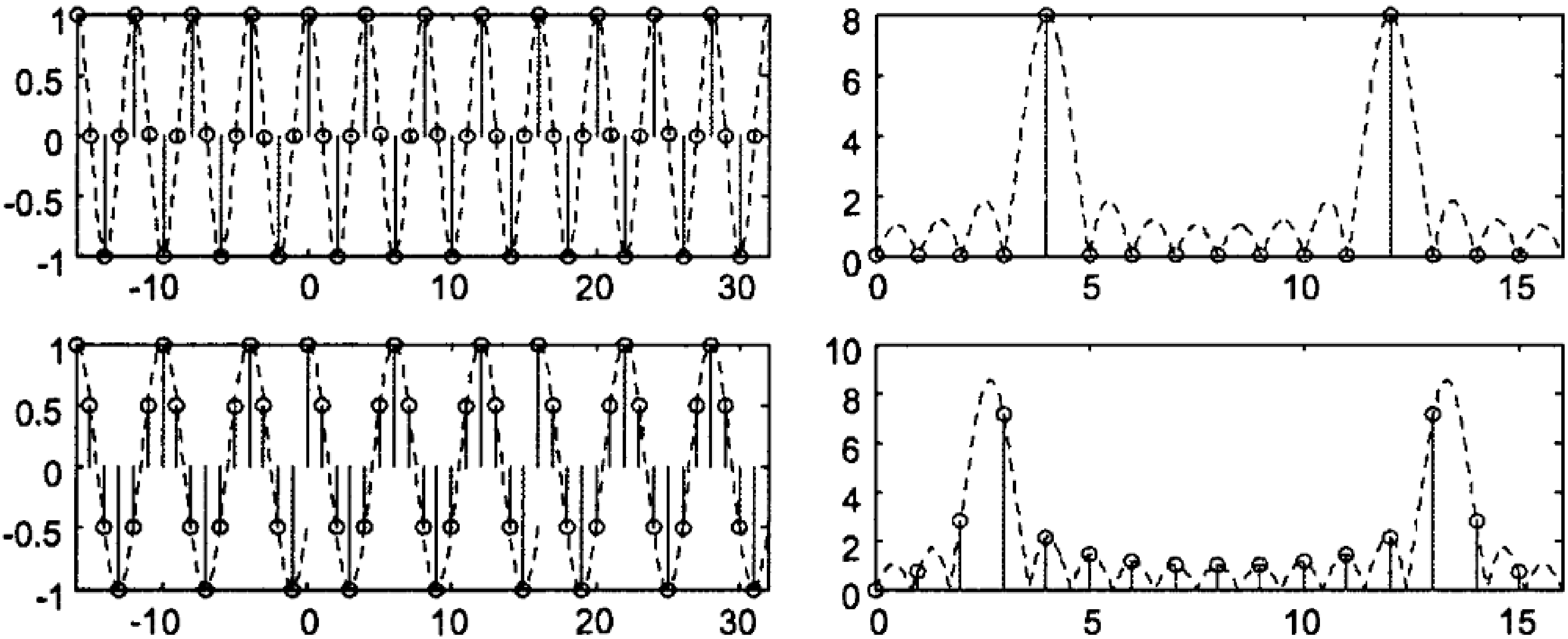
Графическая иллюстрация «растекания» спектра дискретизированного гармонического сигнала в случае, когда $N\omega T / 2\pi \neq$ целому числу. Здесь N=16.



Дискретное преобразование Фурье растекание спектра

Графическая иллюстрация «растекания» спектра когда

$N\omega T/2\pi \neq$ целому числу. Здесь N=16.



Существуют и другие трактовки «растекания» спектра, вычисляемого ДПФ.

Линейная и круговая свертки

Имеем две последовательности $\{x_1(k)\}$ и $\{x_2(k)\}$

Линейная свертка:

$$y(k)=\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(k-m)$$

Круговая свертка:

$$y(k)=\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2\big((k-m) \bmod N\big)$$

Линейная и круговая свертки

$$x_1 : (1,2,4,8); \quad x_2 : (2,3,4,5)$$

Линейная свертка:

$y_0 = 1 \cdot 2 = 2;$

$y_1 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7;$

$y_2 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 18;$

$y_3 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 41;$

$y_4 = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 50;$

$y_5 = 4 \cdot 5 + 8 \cdot 4 = 52;$

$y_6 = 8 \cdot 5 = 40.$

Результат:

(2,7,18,41,50,52,40)

Круговая свертка:

$y_0 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 52;$

$y_1 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 8 \cdot 4 = 59;$

$y_2 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 5 = 58;$

$y_3 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 41.$

Результат:

(52,59,58,41)

Линейная и круговая свертки

$$x_1 : (1,2,4,8); \quad x_2 : (2,3,4,5)$$

В матричной форме

Линейная свертка   Круговая свертка

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 18 \\ 41 \\ 50 \\ 52 \\ 40 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 59 \\ 58 \\ 41 \end{pmatrix}$$

Круговая свертка

$x_1 : (1,2,4,8,0,0,0);\quad x_2 : (2,3,4,5,0,0,0)$

Круговая свертка:

$y_0 = 1 \cdot 2 = 2;$

$y_1 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7;$

$y_2 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 18;$

$y_3 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 41;$

$y_4 = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 50;$

$y_5 = 4 \cdot 5 + 8 \cdot 4 = 52;$

$y_6 = 8 \cdot 5 = 40.$

Результат:

$(2,7,18,41,50,52,40)$

Круговая свертка

$x_1 : (1,2,4,8,0,0,0); \quad x_2 : (2,3,4,5,0,0,0)$

Круговая свертка в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 18 \\ 41 \\ 50 \\ 52 \\ 40 \end{pmatrix}$$