

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ
по практической работе №1
по дисциплине «Теория принятия решений»
Тема: Принятие решений в матричных играх

Студентка гр. 7381

Алясова А.Н.

Преподаватель

Попова Е.В.

Санкт-Петербург

2021

Цель работы.

Изучение различных инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе матричных игр.

Основные теоретические положения.

Рассмотрим простейшую математическую модель конечной конфликтной ситуации, в которой имеется два участника и выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется антагонистической игрой двух лиц с нулевой суммой. Игра состоит из двух ходов: игрок А выбирает одну из возможных a_i , $i = 1..m$ стратегий, а игрок Б выбирает одну из возможных стратегий b_j , $j = 1..n$. Каждый выбор производится при полном незнании выбора соперника. В результате выигрыш игроков составит соответственно a_{ij} и $-a_{ij}$. Цель игрока А – максимизировать величину a_{ij} , а игрока Б – минимизировать эту величину. Критерием принятия решения является функция, выражающая предпочтение лица, принимающего решение, и определяющая правило, по которому выбирается приемлемый или оптимальный вариант решения.

Матрица, составленная из величин a_{ij} , $i = 1..m$, $j = 1..n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Матрица (1) называется платежной матрицей, или матрицей игры. Каждый элемент платежной матрицы a_{ij} , $i = 1..m$, $j = 1..n$, равен выигрышу А (проигрышу Б), если он выбрал стратегию A_i , $i = 1..m$, а игрок Б выбирал стратегию B_j , $j = 1..n$.

Задача каждого из игроков – найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший доход.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Если игрок А выбрал стратегию A_i , $i = 1..m$, то в худшем случае (например, если его ход известен Б) он

получит выигрыш $\alpha_i = \min_j a_{ij}$. Предвидя такую возможность, игрок А должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш.

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \{\min_j a_{ij}\}. \quad (2)$$

Представленная в (2) величина α – гарантированный выигрыш игрока А называется нижней ценой игры. Стратегия A_i , обеспечивающая получение выигрыша α , называется максиминной. Если первый игрок будет придерживаться своей максиминной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае выиграет не меньше α . Аналогично определяется наилучшая стратегия второго игрока. Игрок Б при выборе стратегии B_j , $j = 1..n$, в худшем случае получит проигрыш $\beta_j = \max_i a_{ij}$. Он выбирает стратегию B_j при которой его проигрыш будет минимальным и составит

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \{\max_i a_{ij}\}. \quad (3)$$

Представленная в (3) величина β – гарантированный проигрыш игрока Б называется верхней ценой игры. Стратегия B_j , обеспечивающая получение проигрыша β , называется минимаксной. Если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае проиграет не больше β . Фактический выигрыш игрока А (проигрыш игрока Б) при разумных действиях партнеров ограничен верхней и нижней ценой игры. Для матричной игры справедливо неравенство $\alpha \leq \beta$. Если $\alpha = \beta = v$, т.е.

$$\max_i \left\{ \min_j a_{ij} \right\} = \min_j \max_i a_{ij} = v, \quad (4)$$

то выигрыш игрока А (проигрыш игрока Б) определяется числом v . Оно называется ценой игры.

В соответствии с (4), если $\alpha = \beta = v$, то такая игра называется игрой с седловой точкой. Элемент матрицы a_{ij} , соответствующий паре оптимальных стратегий (A_i, B_j) , называется седловой точкой матрицы. Этот элемент является ценой игры.

Седловой точке соответствуют оптимальные стратегии игроков. Их совокупность – решение игры, которое обладает свойством: если один из игроков придерживается оптимальной стратегии, то второму отклонение от своей оптимальной стратегии не может быть выгодным. Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$ и $\alpha \leq v \leq \beta$ то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами.

Сложная стратегия, состоящая в случайном применении всех стратегий с определенными частотами, называется смешанной.

Постановка задачи.

Используя инструментальные средства компьютерной алгебры решить матричные задачи.

Вариант.

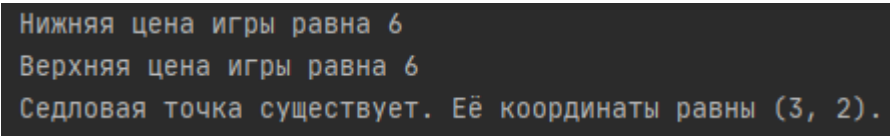
Вариант 30.

Выполнение работы.

1) С помощью инструментального средства определить границы выигрыша и наличие седловой точки для матрицы C_1 . Матрица C_1 представлена в (5).

$$C_1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Результат выполнения программы, представленной в приложении А, показан на рис. 1.



```
Нижняя цена игры равна 6
Верхняя цена игры равна 6
Седловая точка существует. Её координаты равны (3, 2).
```

Рисунок 1 – Результат выполнения программы для матрицы C_1

2) Графически и аналитически решить матричную игру 2×2 для матрицы C_2 . Матрица C_2 представлена в (6).

$$C_2 = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Решим данную задачу аналитически.

Требуется проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо написать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю (7) и верхнюю (8) цену игры.

$$\alpha = \max_i \{ \min_j \alpha_{ij} \} = \max \{ (-2, 3) \} = 3 \quad (7)$$

$$\beta = \min_j \{ \max_i \alpha_{ij} \} = \min \{ (9, 6) \} = 6 \quad (8)$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры v . Известно, что $3 \leq v \leq 6$.

В таком случае игрок А должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить максимальный средний выигрыш. Аналогично, игрок Б должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать средний выигрыш игрока А.

Для этого запишем две системы (9) и (10) уравнений и решим их.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 9p_1 + 3p_2 = v \\ -2p_1 + 6p_2 = v \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{30}{7} \\ p_1 = \frac{3}{14} \\ p_2 = \frac{11}{14} \end{cases} \quad (9)$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 9q_1 - 2q_2 = v \\ 3q_1 + 6q_2 = v \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{30}{7} \\ q_1 = \frac{4}{7} \\ q_2 = \frac{3}{7} \end{cases} \quad (10)$$

Оптимальная стратегия игрока А: $P = \left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14} \right)$.

Оптимальная стратегия игрока Б: $Q = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7} \right)$.

Цена игры: $v = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$.

Решим данную задачу графически. Результаты представлены на рис. 2 и 3.

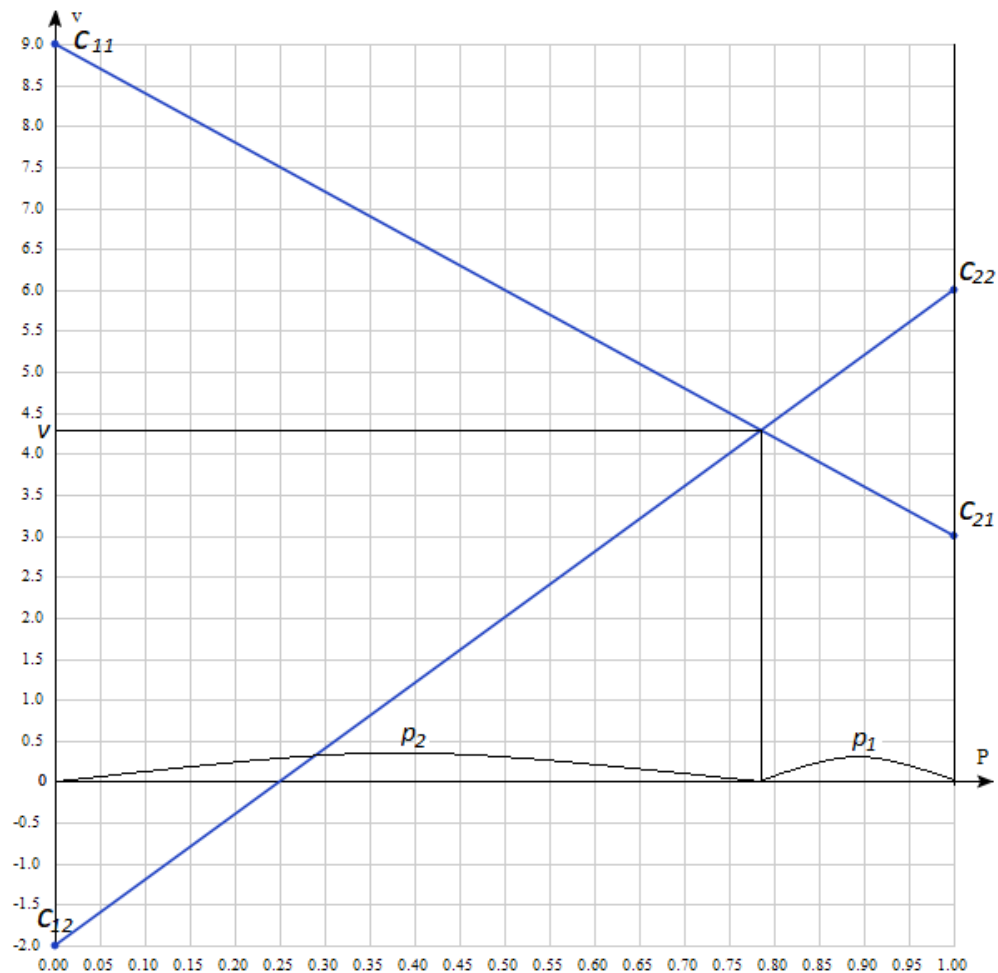


Рисунок 2 – Гарантированный выигрыш первого игрока в матрице платежей C_2

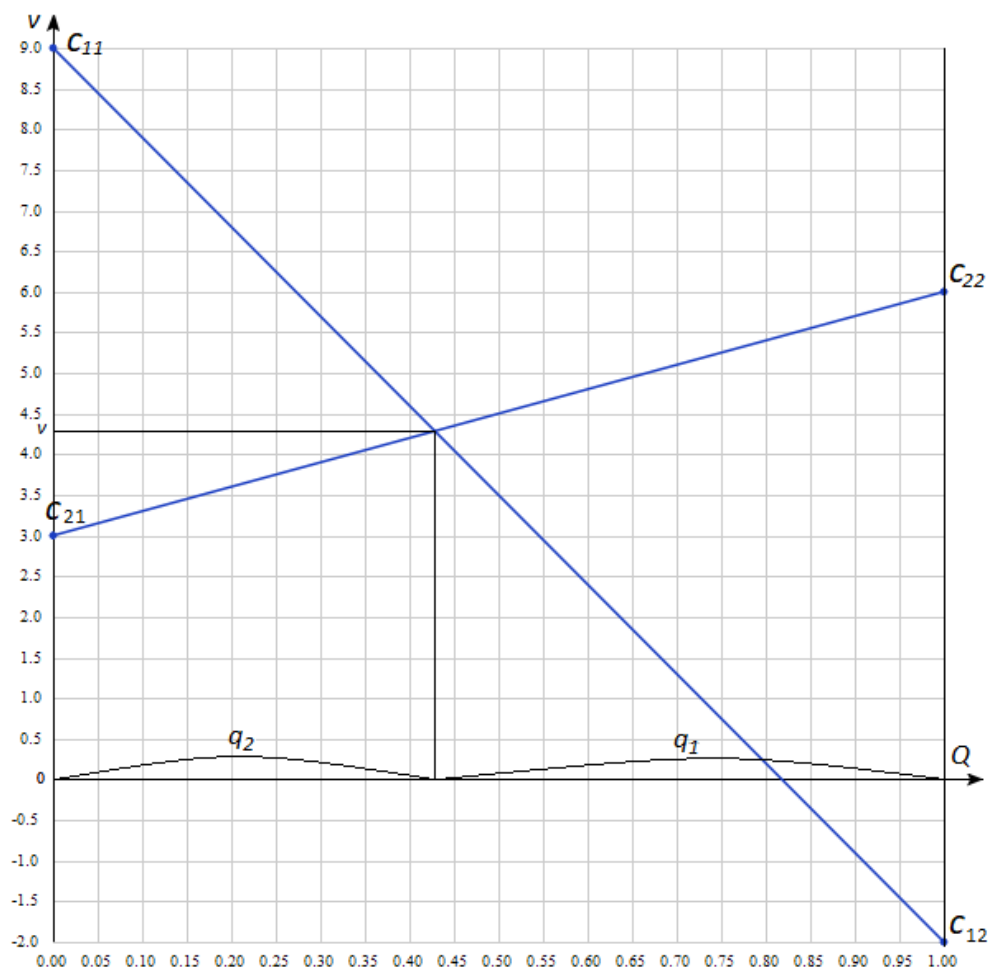


Рисунок 3 – Гарантированный проигрыш второго игрока в матрице платежей C_2

По рис. 2 и 3 можно определить, что стратегии игроков А и Б приблизительно равны $P = \left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14}\right)$, $Q = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$, цена игры – $v = 4\frac{2}{7}$, $\alpha = 3, \beta = 6$. Так как $\alpha \neq \beta$, можем сделать вывод о том, что седловой точки не существует.

3) Графически и аналитически решить матричную игру $2 \times N$ для матрицы C_3 . Матрица C_3 представлена в (11).

$$C_3 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 7 \\ 3 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Решим данную задачу аналитически.

Требуется проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Результат выполнения программы на матрице C_3 , представленной в приложении А, показан на рис. 4.

```

Нижняя цена игры равна 5
Верхняя цена игры равна 5
Седловая точка существует. Её координаты равны (1, 1).
    
```

Рисунок 4 – Результат выполнения программы для матрицы C_3

Решим данную задачу графически. Результат представлен на рис. 5.

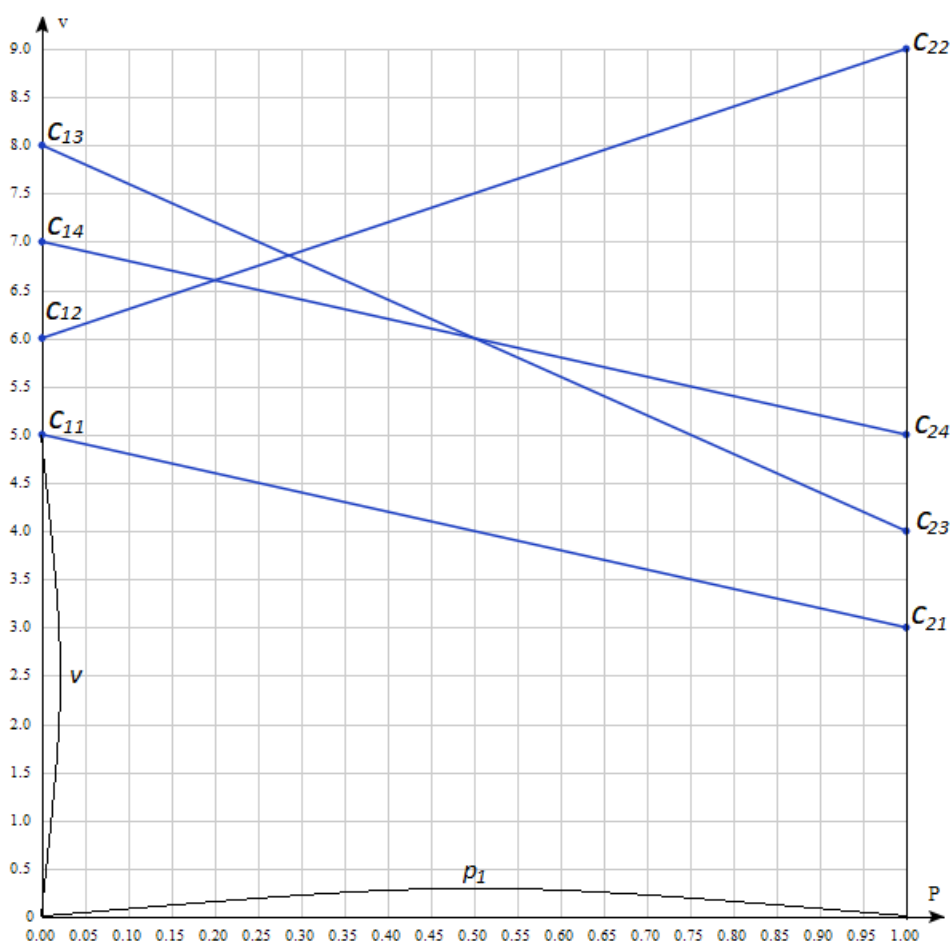


Рисунок 5 – Гарантированный выигрыш первого игрока при различном выборе смешанной стратегии

По рис. 5 можно определить цену игры $v = 5$, $\alpha = 5$, $\beta = 5$. Так как $\alpha = \beta$, можем сделать вывод о том, что седловая точка существует.

4) Графически и аналитически решить матричную игру $M \times 2$ для матрицы C_4 . Матрица C_4 представлена в (12).

$$C_4 = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 4 \\ 3 & 8 \\ 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Решим данную задачу графически. Результат представлен на рис. 9.

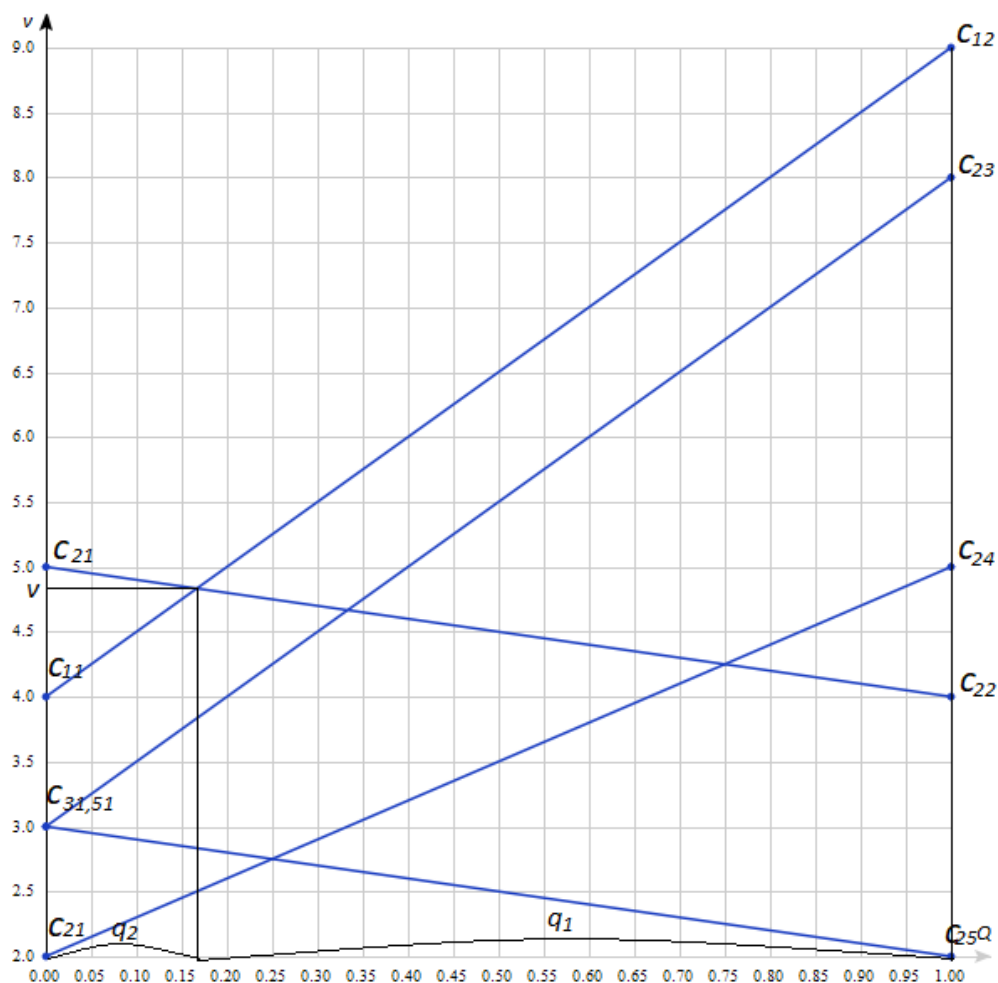


Рисунок 6 – Гарантированный проигрыш второго игрока при различном выборе смешанной стратегии

Исходя из рис. 6 можно определить, что смешанная стратегия игрока Б приблизительно равна $Q = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$, цена игры – $v = 4,8 \approx \frac{29}{6}$, $\alpha = 4, \beta = 5$. Так как $\alpha \neq \beta$, можем сделать вывод о том, что седловой точки не существует. Второму игроку заведомо невыгодны стратегии 3, 4 и 5.

Решим данную задачу аналитически.

Для аналитического решения выберем прямые, на пересечении которых находится точка оптимума и построим из них матрицу 2×2 :

$$C_4 = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Требуется проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо записать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю (13) и верхнюю (14) цену игры.

$$\alpha = \max_i \{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(4, 4)\} = 4 \quad (13)$$

$$\beta = \min_j \{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(5, 9)\} = 5 \quad (14)$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры v . Известно, что $4 \leq v \leq 5$.

В таком случае игрок А должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить максимальный средний выигрыш. Аналогично, игрок Б должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать средний выигрыш игрока А.

Для этого запишем две системы (15) и (17) уравнений.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 4p_1 + 5p_2 = v \\ 9p_1 + 4p_2 = v \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} v = \frac{29}{6} \\ p_1 = \frac{1}{29} \\ p_2 = \frac{5}{29} \end{cases} \quad (16)$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 4q_1 + 9q_2 = v \\ 5q_1 + 4q_2 = v \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} v = \frac{29}{6} \\ q_1 = \frac{5}{6} \\ q_2 = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (18)$$

Оптимальная стратегия игрока А: $P = X \cdot v = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$.

Оптимальная стратегия игрока Б: $Q = Y \cdot v = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Цена игры: $v = \frac{29}{6}$.

5) С помощью симплекс-метода решить матричную игру $M \times N$ для матрицы C_5 . Матрица C_5 представлена в (19).

$$C_5 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 12 \\ 3 & 7 & 8 \\ 12 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Требуется проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю (13) и верхнюю (14) цену игры.

$$\alpha = \max_i \{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(3, 1, 4, 3, 4)\} = 4 \quad (20)$$

$$\beta = \min_j \{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(12, 9, 12)\} = 9 \quad (21)$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры v . Известно, что $4 \leq v \leq 9$.

В таком случае игрок А должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить максимальный средний выигрыш. Аналогично, игрок Б должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать средний выигрыш игрока А.

Для этого запишем две системы (22) и (23) уравнений.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 6p_1 + 8p_2 + 4p_3 + 3p_4 + 12p_5 = v \\ 3p_1 + 5p_2 + 9p_3 + 7p_4 + 4p_5 = v \\ 7p_1 + p_2 + 12p_3 + 8p_4 + 6p_5 = v \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases} \quad (22)$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 6q_1 + 3q_2 + 7q_3 = v \\ 8q_1 + 5q_2 + q_3 = v \\ 9q_1 + 4q_2 + 12q_3 = v \\ 3q_1 + 7q_2 + 8q_3 = v \\ 12q_1 + 4q_2 + 6q_3 = v \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{cases} \quad (23)$$

Чтобы найти решение данной задачи относительно первого игрока А, можно решить двойственную задачу: найти минимум функции $F(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 6p_1 + 8p_2 + 4p_3 + 3p_4 + 12p_5 \geq 1 \\ 3p_1 + 5p_2 + 9p_3 + 7p_4 + 4p_5 \geq 1 \\ 7p_1 + p_2 + 12p_3 + 8p_4 + 6p_5 \geq 1 \end{cases} \quad (24)$$

С помощью системы компьютерной алгебры «Maxima» симплекс-методом вычислен вектор X (рис. 7).

```
(%i38) load(simplex);
W:1*x_1+1*x_2+1*x_3+1*x_4+1*x_5;
e1:6*x_1+8*x_2+4*x_3+3*x_4+12*x_5>=1;
e2:3*x_1+5*x_2+9*x_3+7*x_4+4*x_5>=1;
e3:7*x_1+1*x_2+12*x_3+8*x_4+6*x_5>=1;
minimize_lp(W,[e1,e2,e3]),nonnegative_lp=true;

(%o34) x_5+x_4+x_3+x_2+x_1
(%o35) 12 x_5+3 x_4+4 x_3+8 x_2+6 x_1>=1
(%o36) 4 x_5+7 x_4+9 x_3+5 x_2+3 x_1>=1
(%o37) 6 x_5+8 x_4+12 x_3+x_2+7 x_1>=1
(%o38) [13/92, [x_5=5/92, x_4=0, x_3=2/23, x_2=0, x_1=0]]
```

Рисунок 7 – Решение вектора X симплекс-методом матрицы C_5

Получаем $F(x) = \frac{13}{92}$ при $x_1 = \frac{5}{92}, x_2 = 0, x_3 = \frac{2}{23}, x_4 = 0, x_5 = 0$. Цена игры при этом $v = \frac{1}{(\frac{13}{92})} = \frac{92}{13} \approx 7.08$, что соотносится с первоначальной оценкой $4 \leq v \leq 9$.

Чтобы найти решение данной задачи относительно второго игрока Б, можно решить двойственную задачу: найти минимум функции $F(x) = y_1 + y_2 + y_3$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 6y_1 + 3y_2 + 7y_3 \leq 1 \\ 8y_1 + 5y_2 + y_3 \leq 1 \\ 9y_1 + 4y_2 + 12y_3 \leq 1 \\ 3y_1 + 7y_2 + 8y_3 \leq 1 \\ 12y_1 + 4y_2 + 6y_3 \leq 1 \end{cases}$$

С помощью системы компьютерной алгебры «Махима» симплекс-методом вычислены векторы Y (рис. 8).

```
(%i63) load(simplex);
W:1*y_1+1*y_2+1*y_3;
e1:6*y_1+3*y_2+7*y_3<=1;
e2:8*y_1+5*y_2+1*y_3<=1;
e3:4*y_1+9*y_2+12*y_3<=1;
e4:3*y_1+7*y_2+8*y_3<=1;
e5:12*y_1+4*y_2+6*y_3<=1;
maximize_lp(W,[e1,e2,e3,e4,e5]),nonnegative_lp=true;
```

$$(\%o20) \quad y_3 + y_2 + y_1$$

$$(\%o21) \quad 7 y_3 + 3 y_2 + 6 y_1 \leq 1$$

$$(\%o22) \quad y_3 + 5 y_2 + 8 y_1 \leq 1$$

$$(\%o23) \quad 12 y_3 + 9 y_2 + 4 y_1 \leq 1$$

$$(\%o24) \quad 8 y_3 + 7 y_2 + 3 y_1 \leq 1$$

$$(\%o25) \quad 6 y_3 + 4 y_2 + 12 y_1 \leq 1$$

$$(\%o26) \quad \left[\frac{13}{92}, \left[y_3 = 0, y_2 = \frac{2}{23}, y_1 = \frac{5}{92} \right] \right]$$

Рисунок 8 – Решение вектора Y симплекс-методом матрицы C_5

Получаем $F(x) = \frac{13}{92}$ при $y_1 = \frac{5}{92}, y_2 = \frac{2}{23}, y_3 = 0$. Цена игры при этом $v = \frac{1}{(13/92)} = \frac{92}{13} \approx 7.08$, что соотносится с первоначальной оценкой $4 \leq v \leq 9$.

Опираясь на полученные данные, можно найти цену игры (2) и оптимальные смешанные стратегии игроков А (26) и Б (27):

$$v = \frac{1}{\frac{13}{92}} = \frac{92}{13} \quad (25)$$

$$P = X \cdot v = \left(0, 0, \frac{8}{13}, 0, \frac{5}{13} \right) \quad (26)$$

$$Q = Y \cdot v = \left(\frac{5}{13}, \frac{8}{13}, 0 \right) \quad (27)$$

Выводы.

В ходе выполнения практической работы было реализовано инструментальное средство для нахождения нижней и верхней цен игры и для нахождения координат седловой точки на языке программирования Python, а также были получены навыки работы с системой компьютерной алгебры «Maxima».

Для нахождения оптимальных стратегий в матричных играх были изучены метод нахождения границ выигрыша и седловой точки. При её существовании матричная игра решается в чистых стратегиях. В случае, когда седловой точки не существует, матричная игра решается в смешанных стратегиях.

При решении матричных игр были применены графический и аналитический методы нахождения оптимальных смешанных стратегий, а также был применён симплекс-метод. Решения матричных игр обоими способами дали одинаковый результат, что может свидетельствовать о правильности нахождения оптимальных смешанных стратегий.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРОГРАММА ПОИСКА СТАЦИОНАРНОЙ ТОЧКИ

```
import numpy as np

a = np.array([[5, 6, 8, 7], [3, 9, 4, 5]])

amin = a.min(axis=1)
bmax = a.max(axis=0)

alpha = max(amin)
beta = min(bmax)

print("Нижняя цена игры равна " + str(alpha))
print("Верхняя цена игры равна " + str(beta))

if alpha == beta:
    print("Седловая точка существует.", end = " ")

for i in range(np.size(amin)):
    for j in range(np.size(bmax)):
        if amin[i]==bmax[j]:
            print("Её координаты равны (" + str(i+1) +", " + str(j+1) +
").")
```