

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ
по практической работе №2
по дисциплине «Теория принятия решений»
Тема: Бесконечные антагонистические игры
Вариант 8

Студент гр. 8383

Киреев К.А.

Преподаватель

Попова Е.В.

Санкт-Петербург

2022

Цель работы

Использование инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе бесконечных антагонистических игр.

Основные теоретические положения

В данной работе рассматриваются антагонистические игры, которые отличаются от матричных тем, что в них один или оба игрока имеют бесконечное (счётное или континуум) множество стратегий. С теоретико-игровой точки зрения это отличие малосущественно, поскольку игра остаётся антагонистической и проблема состоит в использовании более сложного аналитического аппарата исследования.

Таким образом, исследуются общие антагонистические игры, т.е. системы вида (1)

$$\Gamma = (X, Y, H), \quad (1)$$

где X и Y – произвольные бесконечные множества, элементы которых являются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно, а $H: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^1$ – функция выигрыша игрока 1. Выигрыш игрока 2 в ситуации (x, y) равен $[-H(x, y)]$, $x \in X, y \in Y$ (игра антагонистическая). Далее рассматриваются такие игры, у которых функция H ограничена.

Одновременная игра преследования на плоскости.

Пусть S_1 и S_2 – множества на плоскости. Игра Γ заключается в следующем. Игрок 1 выбирает некоторую точку $x \in S_1$, а игрок 2 выбирает точку $y \in S_2$. При совершении выбора игроки 1 и 2 не имеют информации о действиях противника, поэтому подобный выбор удобно интерпретировать как одновременный. В этом случае точки $x \in S_1, y \in S_2$ являются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно. Таким образом, множества стратегий игроков совпадают с множествами S_1 и S_2 на плоскости.

Целью игрока 2 является минимизация расстояния между ним и игроком 1 (игрок 1 преследует противоположную цель). Поэтому под выигрышем $H(x, y)$

игрока 1 в этой игре понимается евклидово расстояние $\rho(x, y)$ между точками $x \in S_1$ и $y \in S_2$, т.е. $H(x, y) = \rho(x, y)$, $x \in S_1$, $y \in S_2$. Выигрыш игрока 2 полагаем равным выигрышу игрока 1, взятому с обратным знаком, а именно $[-\rho(x, y)]$ (игра антагонистическая).

Модель покера с одним кругом ставок и одним размером ставки.

В начале партии каждый из двух игроков А и В ставит по единице. После того, как каждый из игроков получит карту, ходит игрок А: он может или поставить ещё c единиц или спасовать и потерять свою начальную ставку. Если А ставит, то у В две альтернативы: он может или спасовать (теряя при этом свою начальную ставку), или уравнивать, поставив c единиц. Если В уравнивает, то игроки открывают свои карты и игрок с лучшей картой выигрывает.

Стратегии строятся следующим образом. Пусть

- $\alpha(x)$ – вероятность того, что если А получит x , то он поставит c ,
- $1 - \alpha(x)$ – вероятность того, что если А получит x , то он спасует,
- $\beta(y)$ – вероятность того, что если В получит y , то он уравнивает ставку c ,
- $1 - \beta(y)$ – вероятность того, что если В получит y , то он спасует.

Если игроки применяют эти стратегии, то ожидаемый чистый выигрыш $H(\alpha, \beta)$ представляет собой сумму выигрышей.

Постановка задачи

Используя инструментальные средства компьютерной алгебры решить задачи преследования и покера.

Выполнение работы

Одновременная игра преследования на плоскости.

Для задачи преследования были отображены фигуры на плоскости. Согласованные с вариантом фигуры представлены на рис. 1.

Были рассмотрены два случая задачи: центр масс фигуры S_1 принадлежит фигуре S_2 и центр масс фигуры S_1 не принадлежит фигуре S_2 .

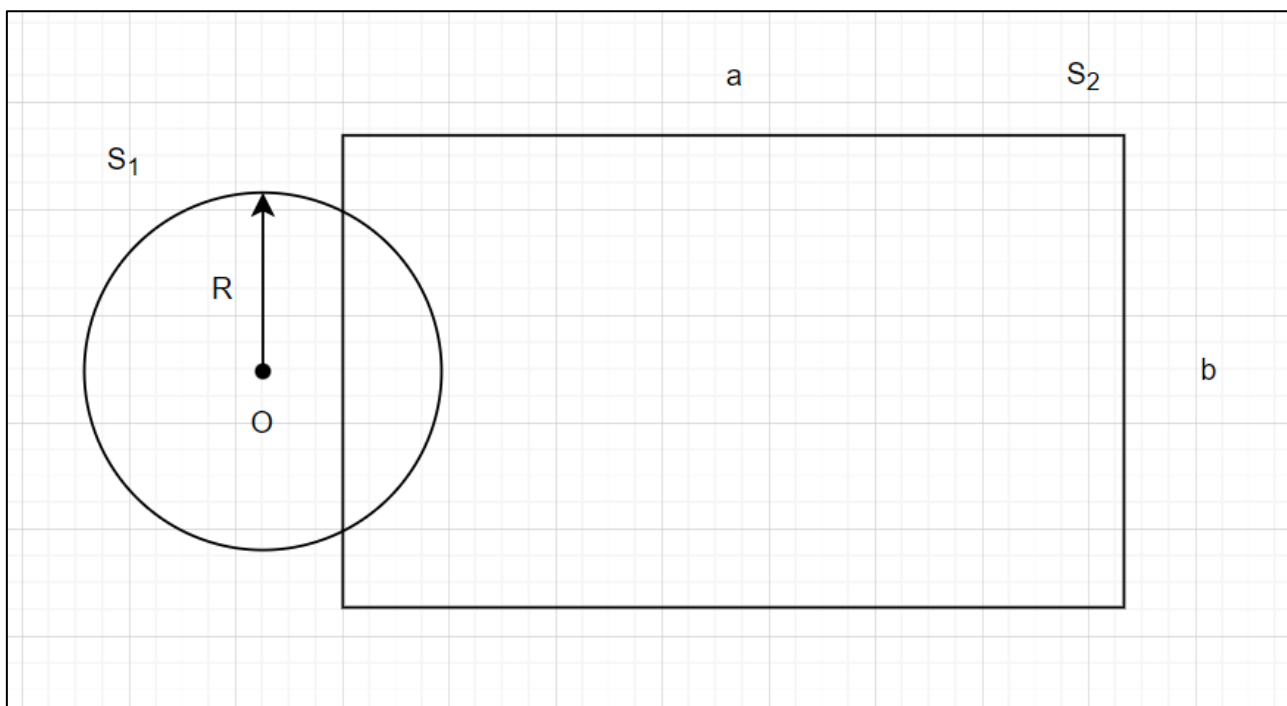


Рисунок 1 – Отображение фигур для случая $O \notin S_2$

- Центр масс фигуры S_1 не принадлежит фигуре S_2

Найдём нижнюю цену игры.

Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 2.

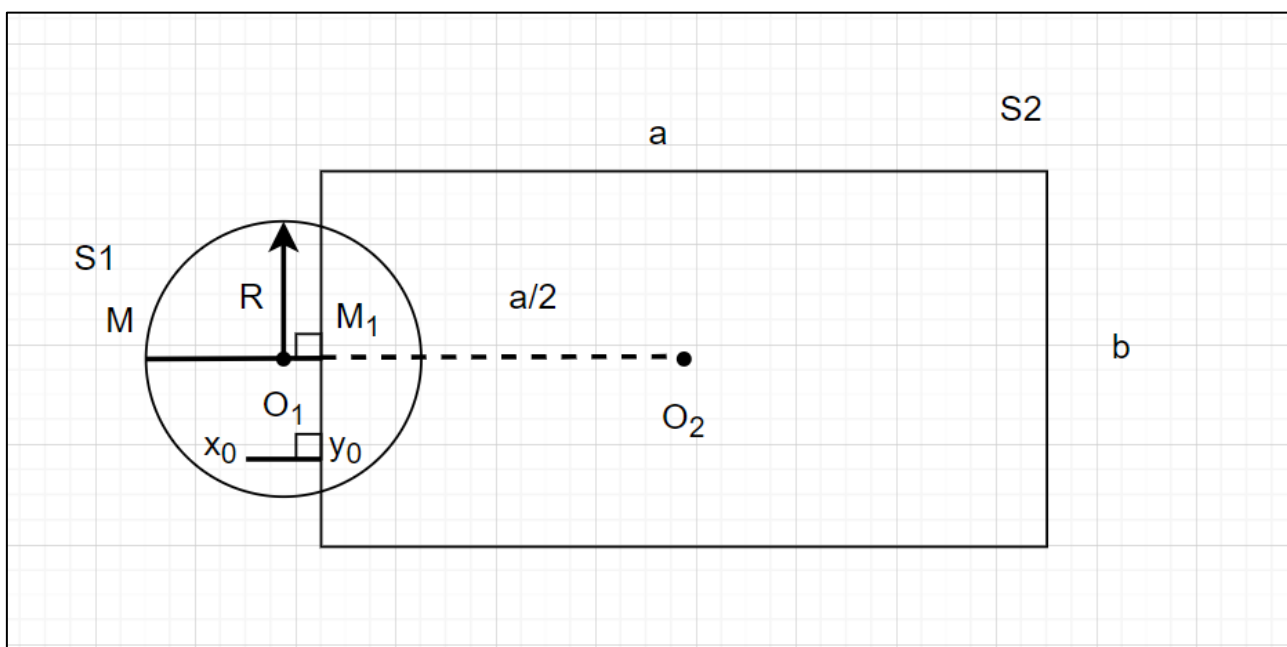


Рисунок 2 – Нахождение нижней цены игры для случая $O \notin S_2$

Поиск нижней цены игры для случая $O \notin S_2$:

1. Для любой точки x_0 принадлежащей S_1 и не принадлежащей S_2 минимальное расстояние до S_2 равно перпендикуляру, опущенному на сторону S_2 . На рис. 2 изображен пример поиска минимального расстояния.
2. Для того, чтобы данное расстояние было максимально возможным, точка x_0 должна находиться на окружности S_1 и пересекать центр окружности.
3. Таким образом, согласно рис. 2 определим нижнюю цену игры:

$$\underline{v} = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} p(x, y) = R + (OO_1 - a/2)$$

Найдём верхнюю цену игры для случая $O \notin S_2$:

Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 3.

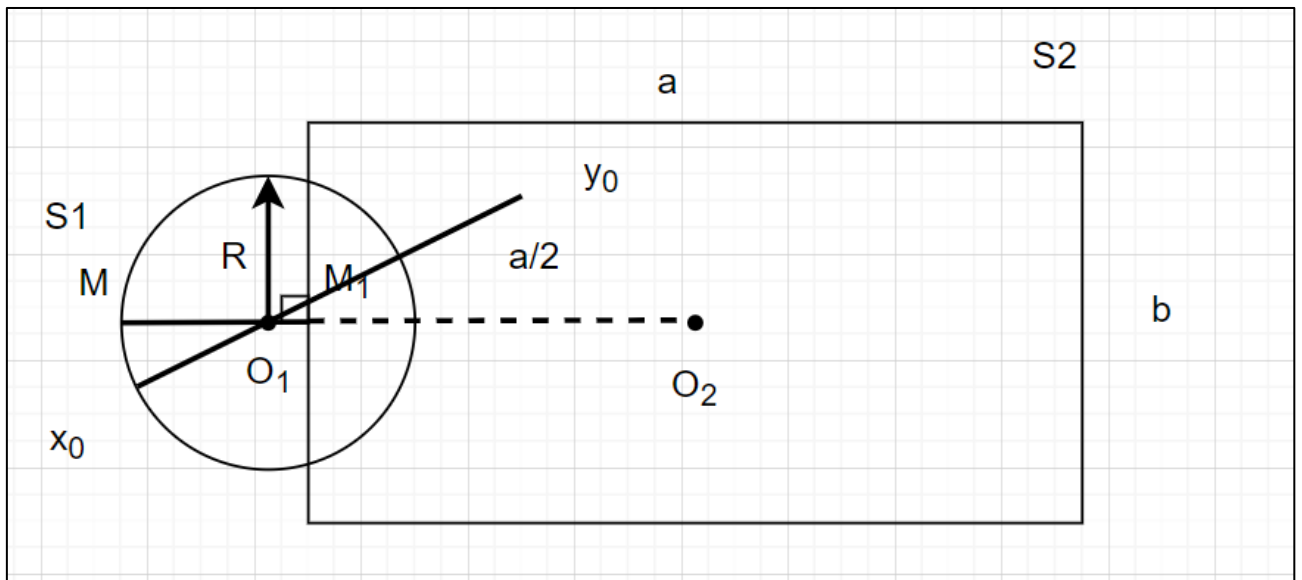


Рисунок 3 – Нахождение верхней цены игры для случая $O \notin S_2$

1. Для любой точки y_0 принадлежащей S_2 расстояние до любой точки x_0 , принадлежащей S_1 будет максимальным, только в том случае если x_0 лежит на окружности S_1 и проходит через центр окружности.
2. Для того, чтобы данное расстояние было минимально возможным, точка y_0 должна находиться на границе прямоугольника и образовывать перпендикуляр с точкой x_0 .
3. Согласно рис. 3 определим верхнюю цену игры:

$$\bar{v} = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} p(x, y) = R + (OO_1 - a/2)$$

Проверим, существуют ли такие значения, при которых $\bar{v} = \underline{v}$.

Формулы для \bar{v} и \underline{v} совпадают, поэтому нижняя цена игры равна верхней цене игры, поэтому данный случай является игрой в чистых стратегиях.

$$\underline{v} = R + (OO_1 - a/2) = R + (OO_1 - a/2) = \bar{v}$$

- Центр масс фигуры S_1 принадлежит фигуре S_2 .

Найдём нижнюю цену игры.

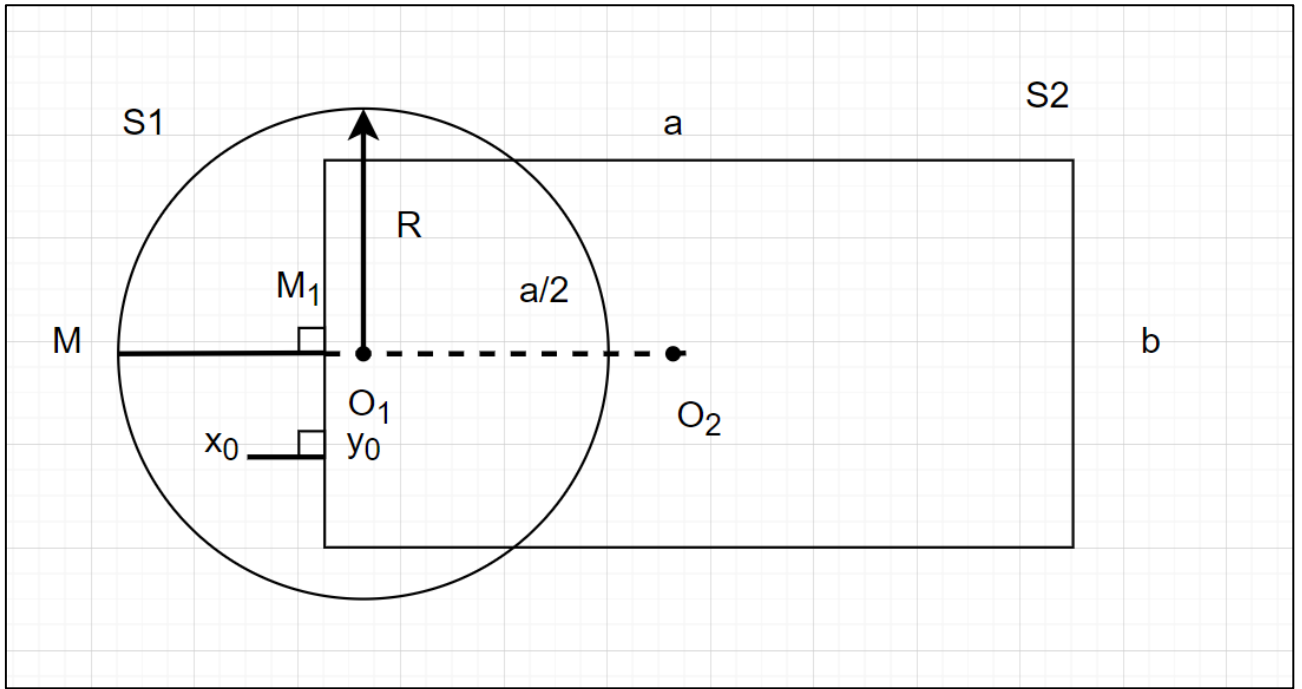


Рисунок 4 – Нахождение нижней цены игры для случая $O \in S_2$

Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 4.

Поиск нижней цены игры для случая $O \in S_2$:

1. Для любой точки x_0 принадлежащей S_1 и не принадлежащей S_2 минимальное расстояние до S_2 равно перпендикуляру, опущенному на сторону S_2 . На рис. 4 изображен пример поиска минимального расстояния.
2. Для того, чтобы данное расстояние было максимально возможным, точка x_0 должна находиться на окружности S_1 и пересекать продолжение центра окружности.
3. Таким образом, согласно рис. 4 определим нижнюю цену игры:

$$\underline{v} = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} p(x, y) = R - \left(\frac{a}{2} - OO_1\right)$$

Найдём верхнюю цену игры.

Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 5.

Поиск верхней цены игры для случая $O \in S_2$:

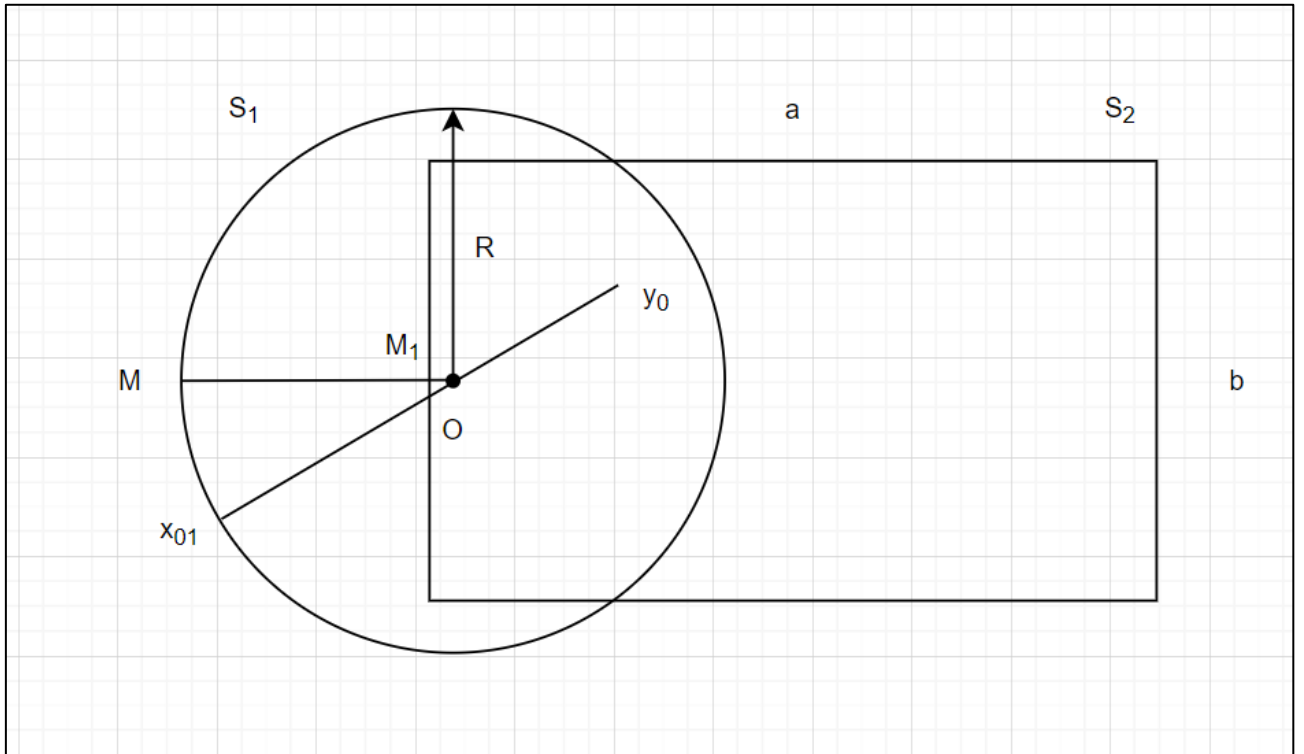


Рисунок 5 – Нахождение верхней цены игры для случая $O_1 \in S_2$

1. Для любой точки y_0 принадлежащей S_2 расстояние до любой точки x_0 , принадлежащей S_1 будет максимальным, только в том случае если x_0 лежит на окружности S_1 и отрезок пересекает центр. Но в зависимости от расположения точки y_0 точка x_0 будет меняться, на рис. 5 показан один из примеров расположения x_0 . Можно увидеть, что при любом расположении x_0 расстояние до y_0 будет всегда больше или равно радиусу окружности R .
2. Для нахождения минимального расстояния можно заметить, что так как расстояние всегда $\geq R$, то минимум этого расстояния это и есть R .
3. Согласно рис. 5 определим верхнюю цену игры:

$$\bar{v} = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} p(x, y) = R$$

Проверим, существуют ли такие значения, при которых $\bar{v} = \underline{v}$.

$$R - \left(\frac{a}{2} - OO_1\right) = R$$

$$\left(\frac{a}{2} - OO_1\right) = 0$$

$$a/2 = OO_1$$

Таким образом, чтобы $\bar{v} = \underline{v}$ расстояние между центрами масс окружности S_1 и прямоугольника S_2 должно быть равно половине стороны, то есть большей стороне прямоугольника. Значит при данном условии, нижняя цена игры будет равна верхней цене игры, поэтому данный случай является игрой в чистых стратегиях.

$$\underline{v} = R - \left(\frac{a}{2} - OO_1\right) = R = \bar{v}$$

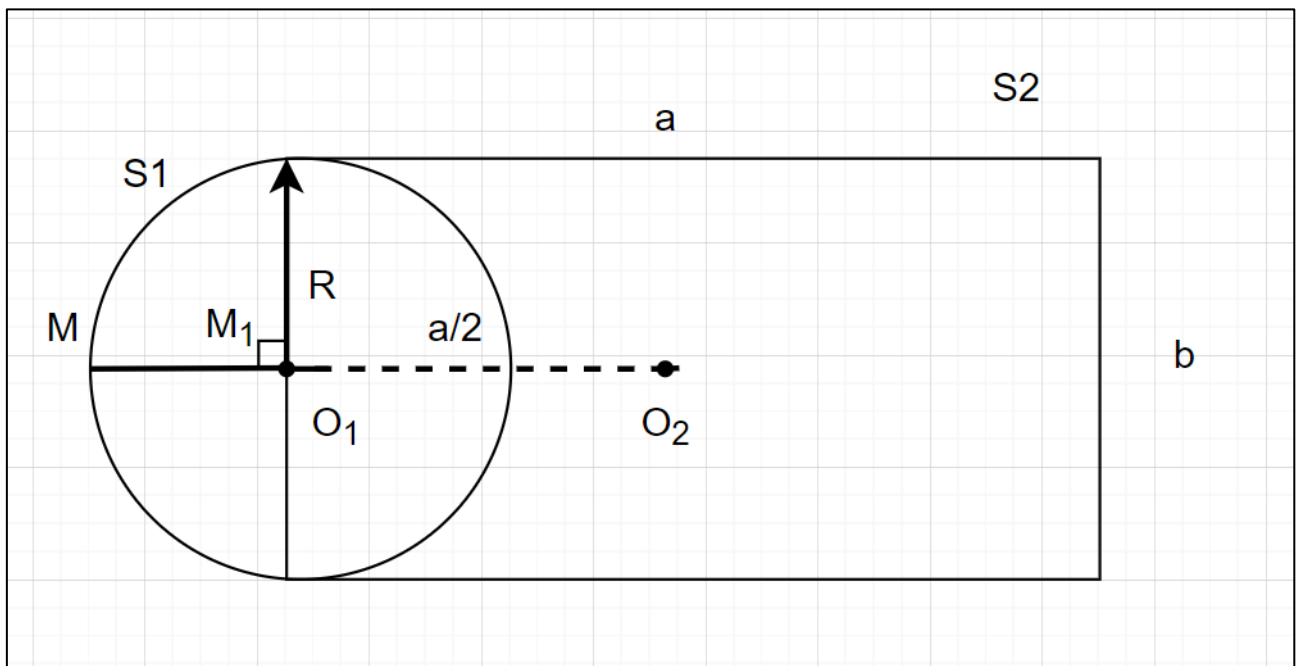


Рисунок 6 – Чистая стратегия

Модель покера с одним кругом ставок и одним размером ставки

Найдено значение игры покера с одним кругом ставок при значении ставки c , равной 9.

○ Первая стратегия

Известно, что А использует стратегию $\alpha(x)$ с порогом a . Далее при преобразовании $H(\alpha, \beta)$ можно получить порог $b = \frac{1}{2(c+1)} [a(c+2) + c]$. И подставив b в $H(\alpha, \beta)$ можно найти минимальный проигрыш В, который рассчитывается по формуле:

$$H(a) = \frac{(c+2)^2}{4(c+1)} \left[-a^2 + 2a \frac{c^2}{(c+2)^2} - \frac{c^2}{(c+2)^2} \right] \text{ где } a \text{ стратегия } A$$

Нужно максимизировать минимальный проигрыш В, поэтому находим максимум параболы, который равен:

$$a = \left(\frac{c}{c+2} \right)^2 = \left(\frac{9}{11} \right)^2 = \frac{81}{121}$$

$$b = \frac{c}{c+2} = \frac{9}{11}$$

Подсчитаем значение выигрыша первого игрока, подставим а и b в формулу $H(\alpha, \beta)$:

$$H(\alpha, \beta) = \frac{(c+2)^2}{4(c+1)} \left[\frac{c^4}{(c+2)^4} - \frac{c^2}{(c+2)^2} \right] = -\frac{c^2}{(c+2)^2}$$

Следовательно выигрыш А равен:

$$H(\alpha, \beta) = -\frac{9^2}{(9+2)^2} = -\frac{81}{121}$$

Проверим ответ, решив задачу с помощью программы, код программы представлен в приложении А.

```
[22]: 'Порог игрока А = 0.6694214876033059'
[22]: 'Порог игрока В = 0.8181818181818182'
[22]: 'Выигрыш игрока А = -0.6694214876033057'
```

Рисунок 7 – Результат выполнения программы

Игрок В находится в выигрышном положении, так как порог игрока А = $\frac{81}{121} = 0.67$ меньше порога игрока В = $\frac{9}{11} = 0.82$, игрок А должен быть более осторожен.

Действия игрока А:

- $x < a$ – пасует
- $x > a$ – то он ставит

Действия игрока В:

- $y < b$ – ставит

○ $y > b$ – пасует

○ Другая стратегия с блефом

При использовании оптимальной стратегии $\alpha(x)$ игроком А, наилучший ответ В – использование $\beta(y)$ с порогом b .

Вычислим $Q(x)$ для данного b .

$$\begin{aligned} \text{○ } x \leq b \quad Q(x) &= 1 + \int_0^b 1 \, dy - \int_b^1 (c+1) \, dy = \\ &= 1 + b - (c+1)(1-b) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{○ } x > b \quad Q(x) &= 1 + b + \int_b^x (c+1) \, dy - \int_x^1 (c+1) \, dy = \\ &= 2(c+1)x - c(b+1) > 0 \end{aligned}$$

Из этого выражения получаем:

$$a = \frac{c(b+1)}{2(c+1)}$$

Далее считаем средний выигрыш игрока А:

$$H(\alpha, \beta) = \int_a^1 [2(c+1)x - c(b+1)] \, dx - 1$$

$$H(\alpha, \beta) = -(a-1)(1+a+ac-bc) - 1$$

Подставляем a :

$$H(b) = \frac{c^2}{4(c+1)} \left(b^2 - 2b \cdot \left(\frac{c^2 - 2c}{c^2} \right) + 1 \right)$$

Находим максимум параболы:

$$b = \frac{-2 \left(\frac{c^2 - 2c}{c^2} \right)}{2} = \frac{c-2}{c} = \frac{7}{9}$$

$$a = \frac{c \left(\frac{c-2+c}{c} \right)}{2(c+1)} = \frac{c-1}{c+1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Следовательно выигрыш А равен:

$$H(\alpha, \beta) = \frac{4}{5}$$

'Порог игрока А = 0.8'

'Порог игрока В = 0.78'

'Выигрыш игрока А = 0.8'

Рисунок 8 – Результат выполнения программы

Действия игрока А:

- $x \geq b$ – делает ставку,
- $x < b$ – с вероятностью $p = \frac{c}{c+2} = \frac{9}{11}$ пасует, и начинает блефовать с вероятностью $1 - p = \frac{2}{11}$

Игрок А находится в выигрышном положении, так как порог игрока В = $\frac{7}{9} = 0.78$ меньше порога игрока А = $\frac{4}{5} = 0.8$, игрок В должен быть более осторожен.

Выводы

В ходе выполнения практической работы по изучению бесконечных игр были использованы инструментальные средства для решения задач поддержки принятия решения, а также освоены навыки принятия решения на основе бесконечных антагонистических игр.

При поиске оптимальных стратегий для одновременной игры преследования на плоскостях, которыми являются две фигуры: круг и прямоугольник, было выяснено, что данная игра решается в чистых стратегиях при случае, когда центр масс первой фигуры не принадлежит второй фигуре, а в случае, когда центр масс принадлежит второй фигуре игра решается в чистых стратегия только при условии, что радиус круга равен стороне прямоугольника.

При поиске оптимальных стратегий для покера с одним кругом ставок при значении ставки $c = 9$ было выявлено, что при реализации оптимальных стратегий α и β ожидаемый чистый выигрыш $H = -\frac{81}{121}$, что свидетельствует о том, что после первого круга ставок игрок А окажется в проигрышном положении.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ИСХОДНЫЙ КОД ДЛЯ ПОКЕРА С ОДНИМ КРУГОМ СТАВОК

```
# %%
from IPython.core.interactiveshell import InteractiveShell
InteractiveShell.ast_node_interactivity = "all"

# %%
c = 9

# %% [markdown]
# ### Первая стратегия

# %%
a = pow(c/(c+2), 2)
b = c/(c+2)

# %%

$$H = (\text{pow}((c+2), 2) / (4 * (c+1))) * (-\text{pow}(a, 2) + 2 * a * (\text{pow}(c, 2) / \text{pow}(c+2, 2)) - (\text{pow}(c, 2) / \text{pow}(c+2, 2)))$$


# %%
f'Порог игрока A = {a}'
f'Порог игрока B = {b}'
f'Выигрыш игрока A = {H}'

# %% [markdown]
# ### Вторая стратегия

# %%
a = (c-1)/(c+1)
b = (c-2)/c

# %%

$$H = -(a-1) * (1+a+(a*c)-(b*c))-1$$


# %%

$$H2 = ((c**2)/(4*(c+1))) * ((b**2)-2*b*((c**2)-2*c)/(c**2))+1$$


# %%
f'Порог игрока A = {a}'
f'Порог игрока B = {round(b, 2)}'
# f'Выигрыш игрока A = {H}'
f'Выигрыш игрока A = {round(H2, 2)}'

# %%
```