МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по домашнему заданию №3

по дисциплине «Элементы функционального анализа»

Студент гр. 8383	______________________	Киреев К.А.
Преподаватель	______________________	Коточигов А.М.

Санкт-Петербург

2021

Задание.

Вариант 8.

Вершины:

{A, {5, 7, 0}, B, {4, 0, 6}, H, {0, 6, 7}, AA, {8, 0, 0}, BB, {0, 8, 0}, HH, {0, 0, 8}}

- Опишите все функционалы (с нормой 1), принимающие наибольшее значение на образе грани ABH и найдите это значение
- Проведите такое же описание для вершины A

Выполнение работы.

Выпуклый многогранник в банаховом пространстве X может быть описан:

$$W = \bigcap_{j=1}^{n} x; f_j(x) \leq c_j$$

Где f_j – линейные функционалы на пространстве X, а c_j – вещественные числа.

Для заданного функционала h максимум достигается в тех и только тех точках x^*, где выполняется утверждение

$$\boldsymbol{h = \sum_{j \in J} \lambda_j f_j, \lambda_j > 0, J = \{j: f_j(x^*) = c_j\}}$$

Можно заметить, что данное выражение можно согласовать с нормалью плоскости:

$$ax^* + bx^* + cx^* = f(x^*) = d, x^* \in P$$

Уравнение плоскости с точками A, B, H:

$$43x + 23y + 34z - 367 \; = \; 0$$

Нормированный вектор нормали – это функционал:

$$\boldsymbol{h^* = (0.7233278435, 0.3868962883, 0.5719336437)}$$

Максимальное значение функционала может быть получено в любой точки грани ABH:

$$\boldsymbol{\max f^* = f^*(B) = 6.3249132362}$$

- ***Проведите такое же описание для вершины A***

В первом квадранте к вершине A примыкает 3 грани:

$$(A, AA, B), (A, B, H), (A, BB, H)$$

Пусть грани $(A, AA, B), (A, B, H), (A, BB, H)$ имеют соответственно нормали:

$$n_1 = (n_{11}, n_{12}, n_{13}), n_2 = (n_{21}, n_{22}, n_{23}), n_1 = (n_{21}, n_{22}, n_{23})$$

Тогда нормали отраженные относительно оси X граней:

$$n_4 = (n_{11}, n_{12}, -n_{13}), n_5 = (n_{21}, n_{22}, -n_{23}), n_6 = (n_{21}, n_{22}, -n_{23})$$

Если $h = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i f_{ji}$, то максимум достигается на пересечении соответствующих граней, чем в нашем случае и является точка A.

Если при разложении вектора g по нормалям, то есть:

$$g = \sum_{i=1}^{n} k_i n_i$$

найдется такое решение, где $k_j \geq 0$, то функционал достигает максимума в вершине A.

Для упрощения задачи будем рассматривать базис вектора g по трем нормалям, так что $k_j = 0$ для других нормалей.

Определим нормированные нормали $n_1, \ldots, n_6$ через уравнение плоскости по трем точкам:

$$n_1 = (0.7837130394, 0.3358770169, 0.5224753596)$$
$$n_2 = (0.7233278435, 0.3868962883, 0.5719336437)$$
$$n_3 = (0.1888446448, 0.9442232238, 0.26977806394)$$
$$n_4 = (0.7837130394, 0.3358770169, -0.5224753596)$$
$$n_5 = (0.7233278435, 0.3868962883, -0.5719336437)$$
$$n_6 = (0.1888446448, 0.9442232238, -0.26977806394)$$

Выберем вектор $\boldsymbol{g = (0.3, 0.3, 0.1)}$

Найдем его координаты во всех комбинациях базисов $\{n_i, n_j, n_k\}$, которые покрывают коническую поверхность, образованную нормалями. Это углы из нормалей:

$$(n_1, n_2, n_4), (n_4, n_2, n_5), (n_5, n_2, n_3), (n_3, n_5, n_6)$$

$\boldsymbol{i\ j\ k}$	$\boldsymbol{k1}$, $\boldsymbol{k2}$, $\boldsymbol{k3}$
1 3 5	$\mathbf{0.1598\ \ 0.233\ \ 0.1848}$
2 3 5	$0.674\ \ 0.078\ -0.371$
2 4 5	$-0.488\ \ 0.515\ 0.292$
3 4 5	$-0.621\ \ 0.124\ \ 0.325$
2 4 6	$0.123\ \ 0.353\ -0.234$

Вектор g имеет разложения по одному из базисов нормалей примыкающих граней, в котором все $k_j \geq 0$

$$g = \mathbf{0.1598} * n_1 + 0 * n_2 + \mathbf{0.233} * n_3 + 0 * n_4 + \mathbf{0.1848} * n_5 + 0 * n_6$$

Функционалы, достигающие максимума в вершине A — это вектора, имеющие разложение в базисе трех различных нормалей примыкающих граней с положительными коэффициентами.