Линейный функционал

Ядро линейного функционала

Норма линейного функционала

Теорема Хана-Банаха

Линейный – аддитивный, однородный

- ***Линейный функционал***

Линейное отображение линейного пространства в множество вещественных (комплексных) чисел

(переводит элементы линейного пространства (вектора или функции) на множество чисел)

Пусть L – линейное нормированное пространство. Отображение f, действующее из L в R, будем называть **функционалом**.

Функционал f называется **линейным**, если он аддитивен, то есть для всех l_1, l_2 из L

$$f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2),$$

и однороден, то есть для всех $l \in L$ и любых вещественных чисел λ

$$f(\lambda l) = \lambda f(l).$$

Множество $ker f = \{x \in L : f(x) = 0\}$ называется **ядром** функционала f.

Функционал f называется **непрерывным** в точке $x_0 \in L$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех x таких, что $\|x - x_0\|_L < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Дадим более удобное в применении определение непрерывного функционала, которое в линейном нормированном пространстве эквивалентно определению, данному ранее.

Функционал f называется **непрерывным** в точке $x_0 \in L$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$.

Линейный функционал f заданный на нормированном пространстве L называется **ограниченным**, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех элементов $x \in L$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq c\|x\|_L.$$

Если указанной постоянной не существует, то f называется **неограниченным** функционалом.

- ***Ядро линейного функционала***

Пусть f – линейный функционал на банаховом пространстве X.

Ядром функционала называется множество

$$\boxed{\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}}$$

То есть на этом множестве функционал обращается в ноль

Ядро – однородная гиперплоскость

Замкнутое линейное пространство Y, содержащееся в банаховом пространстве X, называется *однородной гиперплоскостью*,

если не существует линейного пространства Z, не равного X или Y,

такого, что $Y \subset Z \subset X$.

Замечание
Добавление к термину эпитета «однородный» выделяет линейные пространства, являющиеся настоящими линейными пространствами (содержащие ноль).

В приложениях часто приходится использовать и «просто» гиперплоскости, т. е. сдвиги однородных гиперплоскостей.

Однородная гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$ – это прямая, проходящая через 0, а гиперплоскость – это произвольная прямая.

Непрерывность функционала равносильна ограниченности

Открытое множество – содержащее вместе с каждой точкой некоторую его окрестность

1) Если f – непрерывный функционал, то его ядро замкнуто.

2) Если Y – однородная гиперплоскость, то любой функционал f с ядром $\ker f = Y$ непрерывен.

Однородная гиперплоскость, являющаяся ядром функционала, определяет его с точностью до константы.

- ***Норма функционала***

Пусть f – линейный непрерывный функционал, заданный на нормированном пространстве L. Так как f является ограниченным функционалом (см. задачу 2.4), то существует постоянная M такая, что

$$|f(x)| \leq M\|x\|. \tag{3.1}$$

Наименьшая из постоянных M, удовлетворяющая неравенству (3.1), называется **нормой** и обозначается $\|f\|$.

Таким образом,

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|. \tag{3.2}$$

Множество всех линейных непрерывных функционалов над банаховым пространством X образует банахово пространство с нормой

$||f|| = \sup\{|f(x)| : ||x|| < 1\}$

- ***Сопряженное пространство***

Банахово пространство, состоящее из всех линейных непрерывных функционалов над банаховым пространством X называется сопряженным пространством и обозначается X^*.

- ***Теорема Рисса-Фишера***

Теорема Рисса-Фишера

Если H – гильбертово пространство, то существует взаимно однозначное непрерывное отображение J пространства H в пространство, действующих на нем, линейных непрерывных функционалов (каждый функционал можно записать как скалярное произведение с подходящим элементом). Причем J^2 является тождественным отображением.

(Гильбертово пространство — обобщение евклидова пространства, допускающее бесконечную размерность, и полное по метрике, порождённой скалярным произведением)

Множество Y называется подпространством банахова пространства X, если оно является **замкнутым** подмножеством X и образует линейное пространство в норме пространства X.

- ***Теорема Хана-Банаха***

Пусть Y – подпространство банахова пространства X, f_0 – линейный непрерывный функционал на Y с нормой $||f_0|| = a$. Тогда существует линейный непрерывный функционал f на X с нормой $||f|| = a$ такой, что для всякого элемента $y \in Y$ выполнено равенство $f(y) = f_0(y)$.

То есть он является естественным продолжением f0 и у них одинаковые нормы

- ***Аксиома выбора***

Из любой системы множеств можно выбрать по одному элементу

ДЗ 3

- ***Теорема представлений Риса***

Утверждение функционального анализа, согласно которому каждый линейный ограниченный функционал в гильбертовом пространстве может быть представлен через скалярное произведение с помощью некоторого элемента.

$h = \lambda f_j$

это означает, что h является нормалью (внешней) к оной из граней – максимум достигается в любой точке на грани

Если $h = \lambda_1 f_{j_1} + \lambda_2 f_{j_2}$,то

максимум достигается на пересечении соответствующей пары граней и так далее.

Функционалы – вектор или матрица, которая действует на иксы (x y z -> 2x+3y-5z)

Ищем функционал на грани который принимает максимум

Функционал очень похож на уравнение плоскости (только добавляется = число). Соответственно легко понять, что для любой плоскости функционал будет равен ее нормали (2x+3y-5z – вектор ее нормали)

Составляем уравнение плоскости по трем точкам, потом его нормируем и получаем функционал.

Чтобы его посчитать достаточно взять любую точку на плоскости и умножить на функционал.

К точке A примыкает три грани сверху, и они же отраженные снизу. И нужно построить нормали для всех 6 граней и тогда получим шесть векторов. Их можно брать как базис.

> Чтобы проверить, достигает ли функционал, заданный вектором g, максимума в точке A, необходимо построить его разложение по всем возможным базисам из нормалей $g = k_1 n_{i_1} + k_2 n_{i_2} + k_3 n_{i_3}$, где $n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}$ – нормали, входящие в рассматриваемый базис. Если все коэффициенты разложения k_1, k_2, k_3 по хотя бы одному из базисов будут неотрицательны, функционал достигает максимума в точке A.

Предполагаем, что 3 k равны 0 и 3 k больше нуля. Высчитываем координаты в новом базисе из трех нормалей, которые мы выбрали, так чтобы k были положительные. Получается, что функционал g достигает максимума в точке A за счет формулы (функционал должен удовлетворять равенству сразу нескольких уравнений плоскости (то есть все уравнения плоскости должны выполняться на некотором J и тогда функционал можно описать как сумму функционалов f_j))