

**Вар. 1 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 3x^2 - 7x + 4$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 8 & 5 & 10 & 2 & 9 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 3-й степени из 1 с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех симметричных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 6 & 4 & 9 & 1 & 10 & 5 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7\ 2\ 4)(3\ 8\ 5\ 6) \cdot (3\ 6)(4\ 8\ 5\ 7)(6)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – множество матриц вида  $\begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $\alpha^2 - 3\beta^2 \neq 0$ . Пусть  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha + \beta\sqrt{3}$ . Докажите, что  $\varphi$  – гомоморфизм групп.
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1. Докажите, что  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U$ .
8. а) Определение группы. Критерий подгруппы. Единственность нейтрального и обратного элементов.  
 б) Приведите пример группы порядка 5

**Вар. 2 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 + 5x + 3$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 5 & 4 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех квадратичных функций (многочленов степени  $\leq 2$ ) с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 7 & 9 & 8 & 10 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 4\ 2)(3\ 5\ 7)(6\ 8) \cdot (1\ 8\ 5)(3\ 6\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mu$  – множество комплексных корней 6 степени из 1, а гомоморфизм  $\phi : \mu \rightarrow \mu$  задан формулой  $\phi(z) = z^4$ . Найдите образ гомоморфизма  $\phi$ .
7. Пусть  $\mu$  – подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из корней 3-й степени из 1. Докажите, что  $\mu \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .
8. а) Циклическая группа. Подгруппы циклической группы.  
 б) Существует ли некоммутативная циклическая группа?

**Вар. 3 (8123034)**

- Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 9x^2 - x + 5$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
- Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 8 & 3 & 4 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
- Является ли группой  $(\mathbb{C}, \cdot)$ ?
  - Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с определителем 0 с операцией сложения?
  - Является ли группой множество всех функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией сложения?
- Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 10 & 1 & 7 & 2 & 8 & 3 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
- Найти произведение перестановок  $(1\ 4\ 3)(2\ 6)(5\ 8\ 7) \cdot (1\ 7\ 5\ 4\ 6)(2\ 8)$  (ответ в циклической форме).
- Гомоморфизм  $\varphi : \text{GL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$  задан формулой  $\varphi(A) = \frac{A}{\sqrt[3]{\det A}}$ . Докажите, что  $\text{Ker } \varphi = \{\lambda E \mid \lambda \neq 0\}$
- Пусть  $\mathbb{R}[x]$  обозначает аддитивную группу многочленов от переменной  $x$  с коэффициентами из  $\mathbb{R}$ , а  $H$  – подмножество многочленов, имеющих корень 8. Докажите, что  $\mathbb{R}[x]/H \cong \mathbb{R}$ .
- Симметрическая группа, четность перестановки, нормальность знакопеременной группы.
  - Является ли перестановка  $(1234)(56)(78)$  четной? Ответ обосновать.

**Вар. 4 (8123034)**

- Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 9x^2 - 9x + 2$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
- Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 6 & 8 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
- Является ли группой  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ?
  - Является ли группой множество всех нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с операцией умножения?
  - Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией композиции?
- Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 7 & 8 & 6 & 9 & 3 & 10 & 5 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
- Найти произведение перестановок  $(1\ 4)(2\ 8\ 7\ 5\ 6) \cdot (1\ 5\ 2)(4\ 6\ 8)$  (ответ в циклической форме).
- Пусть гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$  задан формулой  $\varphi(x) = e^{ix}$ . Найдите его ядро.
- Пусть  $\mu$  – подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из корней 3-ой степени из 1. Докажите, что  $\mu \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .
- Порядок группы, порядок подгруппы, порядок элемента.
  - Существует ли в группе порядка 64 элемент порядка 3?

**Вар. 5 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 4x^2 + 9x + 4$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 3 & 2 & 8 & 1 & 10 & 6 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 3 & 1 & 2 & 6 & 10 & 5 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 4)(2\ 7\ 6)(3\ 8\ 5) \cdot (1\ 2\ 8)(3\ 5\ 7\ 4\ 6)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа всех непостоянных дробно-линейных функций  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , на расширенной вещественной оси  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (операция – композиция функций). Пусть  $\varphi : GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow G$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Докажите, что  $\varphi$  – гомоморфизм групп.
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1, а  $\mu$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из корней 6-ой степени из 1. Докажите, что  $U/\mu \cong U$ .
8. а) Внешнее прямое произведение групп. Внутреннее прямое произведение групп. Их изоморфизм.  
 б) Пусть  $G$  – аддитивная группа столбцов высоты 2 с целыми элементами. Запишите  $G$  в виде прямой суммы групп.

**Вар. 6 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 + x + 4$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 2 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 4-й степени из 1 с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с определителем 2 с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 9 & 2 & 1 & 8 & 7 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 4\ 8\ 2\ 7)(3\ 6\ 5) \cdot (2\ 5\ 6\ 7)(4\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  задан формулой  $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$ . Найдите его ядро и образ.
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1, а  $\mu$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из корней 10-ой степени из 1. Докажите, что  $U/\mu \cong U$ .
8. а) Прямая сумма циклических групп.  
 б) Приведите пример циклической подгруппы в  $S_3$ .

**Вар. 7 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 4x^2 - 7x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 1 & 2 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех линейных функций (многочленов степени  $\leq 1$ ) с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 10 & 9 & 7 & 4 & 6 & 5 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 5\ 7\ 3\ 4)(2\ 8\ 6) \cdot (1\ 5\ 8\ 3\ 2\ 6)(4\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа всех непостоянных дробно-линейных функций  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , на расширенной вещественной оси  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (операция – композиция функций). Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow G$  задан формулой  $\varphi(a+bi)(x) = \frac{ax-b}{bx+a}$ . Найдите его ядро.
7. Пусть  $\mu$  – подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из корней 3-ой степени из 1. Докажите, что  $\mu \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .
8. а) Смежные классы. Пересечение двух смежных классов. Теорема Лагранжа.  
 б) Выпишите левые смежные классы группы  $S_3$  по подгруппе  $\{e, (12)\}$ .

**Вар. 8 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 6x^2 + 5x + 3$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{N}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных симметричных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных дробно-линейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ,  $ad \neq bc$ ) на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 7 & 9 & 4 & 5 & 10 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 8\ 4\ 6\ 2)(5\ 7)(5) \cdot (1\ 8\ 7)(2\ 3\ 5\ 6\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа комплексных корней  $n$ -ной степени из 1, а  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G$  гомоморфизм групп такой, что  $\varphi(1) = e^{6\pi i/n}$ . Напишите формулу, задающую  $\varphi$ .
7. Пусть  $M_2(\mathbb{Z})$  – аддитивная группа всех матриц  $2 \times 2$  с коэффициентами из  $\mathbb{Z}$ , а  $H$  – подгруппа в  $M_2(\mathbb{Z})$ , состоящая из матриц со следом 0. Докажите, что  $M_2(\mathbb{Z})/H \cong \mathbb{Z}$ .
8. а) Действие группы на множестве. Орбита, стабилизатор точки, множество инвариантных элементов. Длина орбиты.  
 б) Циклическая подгруппа в  $S_5$ , порожденная перестановкой  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ , действует на множестве  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Найдите орбиту элемента 1.

**Вар. 9 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 3x^2 - 4x + 8$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с определителем 1 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 3 & 7 & 1 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(2\ 6)(3\ 8)(4\ 5\ 7) \cdot (1\ 7\ 6\ 8)(3\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Зададим операцию  $\star$  формулой  $x \star y = x + y + xy$ . Проверьте, что  $(G, \star)$  – группа.
7. Пусть  $G$  – промежуток  $[0; 1)$  с операцией  $\star$ , заданной формулой  $x \star y = \{x + y\}$  (здесь  $\{t\}$  обозначает дробную часть числа  $t$ ). Пусть  $H$  циклическая подгруппа в  $G$ , порожденная элементом  $\frac{1}{4}$ . Докажите, что  $G/H \cong G$ .
8. а) Лемма Бернсайда.  
 б) Приведите пример действия группы на множестве, у которого ровно 1 орбита.

**Вар. 10 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 + 2x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 1 & 3 & 2 & 9 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех симметричных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных линейных функций (многочленов степени 1) с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 1 & 7 & 4 & 10 & 3 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6\ 8) \cdot (2\ 5)(3\ 6\ 8\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mathbb{R}[x]$  обозначает аддитивную группу многочленов с вещественными коэффициентами, а гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}$  задан формулой  $\varphi(p) = p(i)$  (т.е. многочлену сопоставляется его значение в точке  $i$ ). Найдите ядро гомоморфизма  $\varphi$ .
7. Пусть  $U$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $H$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из тех матриц, которые отличаются от единичной только на месте  $(1, 3)$ . Докажите, что  $U/H \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ .
8. а) Нормальная подгруппа. Факторгруппа.  
 б) Верно ли, что порядок факторгруппы делит порядок группы?

**Вар. 11 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 + 8x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 9-й степени из 1 с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 5 & 8 & 7 & 6 & 4 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7\ 3\ 4\ 8\ 5)(2\ 6) \cdot (1\ 7)(2\ 8\ 6\ 5\ 4\ 3)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \text{GL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$  задан формулой  $\varphi(A) = \frac{A}{\det A^3}$ . Докажите, что  $\varphi$  – эпиморфизм.
7. Пусть  $G$  – промежуток  $[0; 1)$  с операцией  $\star$ , заданной формулой  $x \star y = \{x + y\}$  (здесь  $\{t\}$  обозначает дробную часть числа  $t$ ). Пусть  $H$  циклическая подгруппа в  $G$ , порожденная элементом  $\frac{1}{4}$ . Докажите, что  $G/H \cong G$ .
8. а) Гомоморфизм групп. Эпиморфизм, мономорфизм, изоморфизм. Ядро и образ гомоморфизма. Свойства ядра и образа.  
 б) Чему равен образ гомоморфизма  $\varphi : G \rightarrow H$ , если его ядро равно  $G$ ?

**Вар. 12 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 3x^2 - 8x + 2$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 6 & 8 & 7 & 9 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с определителем 0 с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных дробно-линейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ,  $ad \neq bc$ ) на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 10 & 5 & 7 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 6)(2\ 7\ 5\ 3)(4\ 8) \cdot (2\ 7\ 5)(4\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц. Отображение  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (a, c)$ . Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $U_n$  подгруппу в  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ , состоящую из верхнетреугольных матриц с единицами по главной диагонали. Пусть  $H$  – подгруппа в  $U_5$ , состоящая из тех матриц, у которых все элементы, кроме элементов первой строки и главной диагонали, равны нулю. Докажите, что  $U_5/H \cong U_4$ .
8. а) Теорема о гомоморфизме групп.  
 б) Из скольких элементов состоит факторгруппа  $G/G$ ?

**Вар. 13 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 6x^2 + 5x + 6$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 8 & 6 & 11 & 4 & 10 & 7 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех симметричных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех квадратных функций (многочленов степени  $\leq 2$ ) с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 7 & 1 & 6 & 2 & 9 & 5 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 2\ 3\ 6\ 4)(5\ 7) \cdot (1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 8)(4\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  задан формулой  $\varphi(x, y) = 6x - 15y$ . Найдите образ  $\varphi$ .
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1, а  $\mu$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из корней 4-ой степени из 1. Докажите, что  $U/\mu \cong U$ .
8. а) Автоморфизм, группа автоморфизмов.  
 б) Является ли автоморфизмом отображение  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , заданное равенством  $f(x) = 2x$ ?

**Вар. 14 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 7x^2 + x + 8$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 4 & 10 & 6 & 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных линейных функций (многочленов степени 1) с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 10 & 2 & 1 & 3 & 8 & 5 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 4\ 2\ 7\ 5)(3\ 6\ 8) \cdot (1\ 4)(2\ 6\ 5)(3\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц, а отображение  $\varphi : B \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$  каждой матрице из  $B$  сопоставляет ее подматрицу, которая получается вычеркиванием первой строки и первого столбца. Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $\mu$  – подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из корней 3-ой степени из 1. Докажите, что  $\mu \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .
8. а) Свободная абелева группа. Лемма о подгруппах конечнопорожденной свободной абелевой группы.  
 б) Приведите пример нетривиальной подгруппы в аддитивной группе целых чисел.

**Вар. 15 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 3x^2 - x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 2 & 8 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с определителем 1 с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 8 & 10 & 6 & 2 & 9 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 3\ 2)(4\ 5\ 6\ 7) \cdot (1\ 3)(2\ 6\ 8)(4\ 7\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mu$  – множество комплексных корней 6 степени из 1, а гомоморфизм  $\varphi : \mu \rightarrow \mu$  задан формулой  $\varphi(z) = z^4$ . Найдите ядро гомоморфизма  $\varphi$ .
7. Пусть  $\mu$  – подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из корней 5-ой степени из 1. Докажите, что  $\mu \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ .
8. а) Теорема о структуре конечно порожденной абелевой группы.  
 б) Является ли аддитивная группа целых чисел конечнопорожденной?

**Вар. 16 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 7x^2 + x + 9$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 7-й степени из 1 с операцией сложения?  
 б) Является ли группой множество всех диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных дробно-линейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ,  $ad \neq bc$ ) на расширенной вещественной оси с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 1 & 10 & 7 & 6 & 3 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7\ 5\ 8\ 2\ 6)(3\ 4) \cdot (1\ 8\ 6)(2\ 4\ 3\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $U$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a, c)$ . Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1. Докажите, что  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U$ .
8. а) Определение группы. Критерий подгруппы. Единственность нейтрального и обратного элементов.  
 б) Приведите пример группы порядка 5



**Вар. 17 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = x^2 + 8x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$  заданная таблицей
 

$f =$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 2 & 5 & 3 & 8 & 10 & 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
-------	--

 инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных верхнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку
 

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 1 & 9 & 5 & 3 & 7 & 10 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$	в
--	---

 виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 5)(3\ 6\ 8\ 7) \cdot (2\ 4\ 8\ 7\ 6)(3\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – множество матриц вида  $\begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $\alpha^2 - 3\beta^2 \neq 0$ . Пусть  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  задано формулой  $\varphi\begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha + \beta\sqrt{3}$ . Докажите, что  $\varphi$  – гомоморфизм групп.
7. Пусть  $\mathbb{C}[x]$  обозначает аддитивную группу многочленов от переменной  $x$  с коэффициентами из  $\mathbb{C}$ , а  $H$  – подмножество многочленов, имеющих корень 3. Докажите, что  $\mathbb{C}[x]/H \cong \mathbb{C}$ .
8. а) Циклическая группа. Подгруппы циклической группы.  
 б) Существует ли некоммутативная циклическая группа?

**Вар. 18 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 4x^2 + 9x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей
 

$f =$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 2 & 7 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$
-------	---

 инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{R}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с определителем 1 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией композиции?
4. Записать перестановку
 

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 6 & 9 & 5 & 10 & 3 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$	в
--	---

 виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(2\ 5\ 8)(3\ 6)(4\ 7) \cdot (1\ 7)(2\ 3\ 6\ 5)(4\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mu$  – множество комплексных корней 6 степени из 1, а гомоморфизм  $\phi : \mu \rightarrow \mu$  задан формулой  $\phi(z) = z^4$ . Найдите образ гомоморфизма  $\phi$ .
7. Пусть  $\mathbb{R}[x]$  обозначает аддитивную группу многочленов от переменной  $x$  с коэффициентами из  $\mathbb{R}$ , а  $H$  – подмножество многочленов, имеющих корень 2. Докажите, что  $\mathbb{R}[x]/H \cong \mathbb{R}$ .
8. а) Симметрическая группа, четность перестановки, нормальность знакопеременной группы.  
 б) Является ли перестановка  $(1234)(56)(78)$  четной? Ответ обосновать.

**Вар. 19** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 9x^2 + 2x + 3$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 6 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных линейных функций (многочленов степени 1) с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 1 & 10 & 6 & 2 & 3 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 4\ 8)(5\ 6\ 7) \cdot (1\ 7)(3\ 5\ 8)(4\ 6)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \text{GL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$  задан формулой  $\varphi(A) = \frac{A}{\sqrt[3]{\det A}}$ . Докажите, что  $\text{Ker } \varphi = \{\lambda E \mid \lambda \neq 0\}$
7. Пусть  $M_2(\mathbb{C})$  – аддитивная группа всех матриц  $2 \times 2$  с коэффициентами из  $\mathbb{C}$ , а  $H$  – подгруппа в  $M_2(\mathbb{C})$ , состоящая из матриц со следом 0. Докажите, что  $M_2(\mathbb{C})/H \cong \mathbb{C}$ .
8. а) Порядок группы, порядок подгруппы, порядок элемента.  
 б) Существует ли в группе порядка 64 элемент порядка 3?

**Вар. 20** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 8x^2 - 8x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных дробно-линейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ,  $ad \neq bc$ ) на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 2 & 4 & 8 & 10 & 7 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 8\ 5\ 2)(3\ 7\ 4\ 6) \cdot (2\ 7)(3\ 4)(5\ 6\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$  задан формулой  $\varphi(x) = e^{ix}$ . Найдите его ядро.
7. Пусть  $\mu$  – подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из корней 5-ой степени из 1. Докажите, что  $\mu \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ .
8. а) Внешнее прямое произведение групп. Внутреннее прямое произведение групп. Их изоморфизм.  
 б) Пусть  $G$  – аддитивная группа столбцов высоты 2 с целыми элементами. Запишите  $G$  в виде прямой суммы групп.

**Вар. 21** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 9x^2 - 2x + 9$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 7 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 9-й степени из 1 с операцией сложения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с определителем 2 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных дробно-линейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ,  $ad \neq bc$ ) на расширенной вещественной оси с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 6 & 3 & 9 & 8 & 4 & 2 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 4\ 7\ 2)(3\ 6\ 8\ 5) \cdot (1\ 8\ 5\ 2)(3\ 7)(4\ 6)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  — группа всех непостоянных дробно-линейных функций  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , на расширенной вещественной оси  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (операция — композиция функций). Пусть  $\varphi : \text{GL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow G$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Докажите, что  $\varphi$  — гомоморфизм групп.
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1. Докажите, что  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U$ .
8. а) Прямая сумма циклических групп.  
 б) Приведите пример циклической подгруппы в  $S_3$ .

**Вар. 22** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 7x^2 - 2x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех квадратичных функций (многочленов степени  $\leq 2$ ) с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 10 & 6 & 8 & 7 & 1 & 9 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 6)(2\ 8\ 5\ 3\ 7\ 4) \cdot (2\ 5)(4\ 7\ 6\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  задан формулой  $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$ . Найдите его ядро и образ.
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1. Докажите, что  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U$ .
8. а) Смежные классы. Пересечение двух смежных классов. Теорема Лагранжа.  
 б) Выпишите левые смежные классы группы  $S_3$  по подгруппе  $\{e, (12)\}$ .

**Вар. 23 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 4x^2 - x + 6$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{C}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 5 & 8 & 3 & 2 & 10 & 7 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 5)(2\ 8\ 7\ 4) \cdot (1\ 7\ 8\ 4)(2\ 5\ 3\ 6)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа всех непостоянных дробно-линейных функций  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , на расширенной вещественной оси  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (операция – композиция функций). Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow G$  задан формулой  $\varphi(a + bi)(x) = \frac{ax-b}{bx+a}$ . Найдите его ядро.
7. Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $U_n$  подгруппу в  $GL_n(\mathbb{Q})$ , состоящую из верхнетреугольных матриц с единицами по главной диагонали. Пусть  $H$  – подгруппа в  $U_3$ , состоящая из тех матриц, у которых все элементы, кроме элементов первой строки и главной диагонали, равны нулю. Докажите, что  $U_3/H \cong U_2$ .
8. а) Действие группы на множестве. Орбита, стабилизатор точки, множество инвариантных элементов. Длина орбиты.  
 б) Циклическая подгруппа в  $S_5$ , порожденная перестановкой  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ , действует на множестве  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Найдите орбиту элемента 1.

**Вар. 24 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с определителем 2 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 8\ 7\ 3\ 4)(2\ 6) \cdot (1\ 4\ 5\ 2)(3\ 8\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа комплексных корней  $n$ -ой степени из 1, а  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G$  гомоморфизм групп такой, что  $\varphi(1) = e^{6\pi i/n}$ . Напишите формулу, задающую  $\varphi$ .
7. Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $U_n$  подгруппу в  $GL_n(\mathbb{R})$ , состоящую из верхнетреугольных матриц с единицами по главной диагонали. Пусть  $H$  – подгруппа в  $U_4$ , состоящая из тех матриц, у которых все элементы, кроме элементов первой строки и главной диагонали, равны нулю. Докажите, что  $U_4/H \cong U_3$ .
8. а) Лемма Бернсайда.  
 б) Приведите пример действия группы на множестве, у которого ровно 1 орбита.

**Вар. 25 (8123034)**

- Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 4x^2 + 4x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
- Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 6 & 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 11 & 2 & 9 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
- Является ли группой множество  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения?
  - Является ли группой множество всех верхнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией умножения?
  - Является ли группой множество непостоянных линейных функций (многочленов степени 1) с операцией умножения?
- Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 9 & 5 & 1 & 4 & 2 & 10 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
- Найти произведение перестановок  $(1\ 7)(2\ 6\ 4\ 5\ 8) \cdot (1\ 7)(2\ 8)(3\ 4\ 5\ 6)$  (ответ в циклической форме).
- Пусть  $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Зададим операцию  $\star$  формулой  $x \star y = x + y + xy$ . Проверьте, что  $(G, \star)$  – группа.
- Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1, а  $\mu$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из корней 6-ой степени из 1. Докажите, что  $U/\mu \cong U$ .
- Нормальная подгруппа. Факторгруппа.
  - Верно ли, что порядок факторгруппы делит порядок группы?

**Вар. 26 (8123034)**

- Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 6x^2 + 5x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
- Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
- Является ли группой множество корней 6-й степени из 1 с операцией сложения?
  - Является ли группой множество невырожденных симметричных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией сложения?
  - Является ли группой множество всех линейных функций (многочленов степени  $\leq 1$ ) с операцией умножения?
- Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 6 & 7 & 4 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
- Найти произведение перестановок  $(1\ 7\ 8\ 6)(2\ 5) \cdot (2\ 3\ 8)(4\ 7)$  (ответ в циклической форме).
- Пусть  $\mathbb{R}[x]$  обозначает аддитивную группу многочленов с вещественными коэффициентами, а гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}$  задан формулой  $\varphi(p) = p(i)$  (т.е. многочлену сопоставляется его значение в точке  $i$ ). Найдите ядро гомоморфизма  $\varphi$ .
- Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 6 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
- Гомоморфизм групп. Эпиморфизм, мономорфизм, изоморфизм. Ядро и образ гомоморфизма. Свойства ядра и образа.
  - Чему равен образ гомоморфизма  $\varphi : G \rightarrow H$ , если его ядро равно  $G$ ?

**Вар. 27** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 - 6x + 3$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли заданная функция  
 $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  таблицей  
 $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с определителем 0 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 6 & 10 & 8 & 3 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 8\ 4)(2\ 6\ 5\ 7) \cdot (1\ 2\ 3)(4\ 7\ 6\ 5\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \text{GL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$  задан формулой  $\varphi(A) = \frac{A}{\det A^3}$ . Докажите, что  $\varphi$  – эпиморфизм.
7. Пусть  $M_2(\mathbb{C})$  – аддитивная группа всех матриц  $2 \times 2$  с коэффициентами из  $\mathbb{C}$ , а  $H$  – подгруппа в  $M_2(\mathbb{C})$ , состоящая из матриц со следом 0. Докажите, что  $M_2(\mathbb{C})/H \cong \mathbb{C}$ .
8. а) Теорема о гомоморфизме групп.  
 б) Из скольких элементов состоит факторгруппа  $G/G$ ?

**Вар. 28** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 8x^2 + 9x + 5$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли заданная функция  
 $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  таблицей  
 $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 4 & 3 & 6 & 10 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{N}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех линейных функций (многочленов степени  $\leq 1$ ) с операцией сложения?
4. Записать перестановку  
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 8)(2\ 4)(3\ 7\ 5) \cdot (1\ 4\ 3\ 7\ 6)(2\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц. Отображение  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (a, c)$ . Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 5 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
8. а) Автоморфизм, группа автоморфизмов.  
 б) Является ли автоморфизмом отображение  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , заданное равенством  $f(x) = 2x$ ?

**Вар. 29** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = x^2 + x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных линейных функций (многочленов степени 1) с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 9 & 6 & 10 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 6\ 5\ 4\ 3)(2\ 8) \cdot (1\ 6\ 7\ 5\ 2\ 3)(4\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  задан формулой  $\varphi(x, y) = 6x - 15y$ . Найдите образ  $\varphi$ .
7. Пусть  $U$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $H$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из тех матриц, которые отличаются от единичной только на месте  $(1, 3)$ . Докажите, что  $U/H \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .
8. а) Свободная абелева группа. Лемма о подгруппах конечнопорожденной свободной абелевой группы.  
 б) Приведите пример нетривиальной подгруппы в аддитивной группе целых чисел.

**Вар. 30** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 + 6x + 2$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 7 & 4 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с определителем 0 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 10 & 2 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 6\ 3)(2\ 5\ 4\ 7\ 8) \cdot (1\ 4)(3\ 7)(5\ 6)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц, а отображение  $\varphi : B \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$  каждой матрице из  $B$  сопоставляет ее подматрицу, которая получается вычеркиванием первой строки и первого столбца. Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1, а  $\mu$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из корней 5-ой степени из 1. Докажите, что  $U/\mu \cong U$ .
8. а) Теорема о структуре конечно порожденной абелевой группы.  
 б) Является ли аддитивная группа целых чисел конечнопорожденной?

**Вар. 31** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 6x^2 + 6x + 5$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 4 & 5 & 4 & 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 4-й степени из 1 с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 7 & 6 & 8 & 10 & 3 & 4 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 4\ 7\ 5\ 3\ 6)(2\ 8) \cdot (1\ 3\ 4\ 2\ 7\ 5\ 8\ 6)(8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mu$  – множество комплексных корней 6 степени из 1, а гомоморфизм  $\varphi : \mu \rightarrow \mu$  задан формулой  $\varphi(z) = z^4$ . Найдите ядро гомоморфизма  $\varphi$ .
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1, а  $\mu$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из корней 3-ой степени из 1. Докажите, что  $U/\mu \cong U$ .
8. а) Определение группы. Критерий подгруппы. Единственность нейтрального и обратного элементов.  
 б) Приведите пример группы порядка 5

**Вар. 32** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = x^2 + 9x + 4$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 10 & 8 & 3 & 4 & 6 & 5 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 6\ 2)(3\ 4\ 5\ 8) \cdot (1\ 8\ 3\ 6\ 5\ 4)(2\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $U$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a, c)$ . Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $\mu$  – подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из корней 4-ой степени из 1. Докажите, что  $\mu \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .
8. а) Циклическая группа. Подгруппы циклической группы.  
 б) Существует ли некоммутативная циклическая группа?



**Вар. 33 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 8x^2 - 4x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 1 & 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{R}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с определителем 1 с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 2 & 8 & 9 & 6 & 3 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 6)(2\ 5\ 8)(4\ 7) \cdot (1\ 8\ 4)(6\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – множество матриц вида  $\begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $\alpha^2 - 3\beta^2 \neq 0$ . Пусть  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha + \beta\sqrt{3}$ . Докажите, что  $\varphi$  – гомоморфизм групп.
7. Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 5 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
8. а) Симметрическая группа, четность перестановки, нормальность знакопеременной группы.  
 б) Является ли перестановка  $(1234)(56)(78)$  четной? Ответ обосновать.

**Вар. 34 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 - 2x + 2$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 7 & 4 & 4 & 8 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех дробно-линейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ) на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 1 & 3 & 5 & 4 & 8 & 7 & 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 2\ 6\ 5\ 7)(3\ 4\ 8) \cdot (1\ 5\ 7\ 2\ 6\ 8)(3\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mu$  – множество комплексных корней 6 степени из 1, а гомоморфизм  $\phi : \mu \rightarrow \mu$  задан формулой  $\phi(z) = z^4$ . Найдите образ гомоморфизма  $\phi$ .
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1, а  $\mu$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из корней 4-ой степени из 1. Докажите, что  $U/\mu \cong U$ .
8. а) Порядок группы, порядок подгруппы, порядок элемента.  
 б) Существует ли в группе порядка 64 элемент порядка 3?

**Вар. 35** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 8 & 2 & 5 & 11 & 9 & 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех дробно-линейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ) на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 8\ 4)(3\ 5\ 7) \cdot (1\ 3\ 5\ 2\ 6)(4\ 8\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \text{GL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$  задан формулой  $\varphi(A) = \frac{A}{\sqrt[3]{\det A}}$ . Докажите, что  $\text{Ker } \varphi = \{\lambda E \mid \lambda \neq 0\}$
7. Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 3 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
8. а) Внешнее прямое произведение групп. Внутреннее прямое произведение групп. Их изоморфизм.  
 б) Пусть  $G$  – аддитивная группа столбцов высоты 2 с целыми элементами. Запишите  $G$  в виде прямой суммы групп.

**Вар. 36** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 + 6x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 7 & 2 & 10 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 7-й степени из 1 с операцией сложения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с определителем 0 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех линейных функций (многочленов степени  $\leq 1$ ) с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 1 & 10 & 6 & 3 & 5 & 9 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7\ 3\ 8\ 5)(2\ 6\ 4) \cdot (1\ 8\ 7)(2\ 3\ 6)(4\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$  задан формулой  $\varphi(x) = e^{ix}$ . Найдите его ядро.
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1, а  $\mu$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из корней 6-ой степени из 1. Докажите, что  $U/\mu \cong U$ .
8. а) Прямая сумма циклических групп.  
 б) Приведите пример циклической подгруппы в  $S_3$ .

**Вар. 37 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных линейных функций (многочленов степени 1) с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 & 7 & 4 & 6 & 10 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7\ 6\ 2\ 4)(3\ 5\ 8) \cdot (2\ 5\ 8)(3\ 7\ 6)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа всех непостоянных дробно-линейных функций  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , на расширенной вещественной оси  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (операция – композиция функций). Пусть  $\varphi : \text{GL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow G$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Докажите, что  $\varphi$  – гомоморфизм групп.
7. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_2(\mathbb{Q})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц, а  $U$  – подгруппа в  $B$ , состоящая из матриц с единицами на главной диагонали. Докажите, что  $B/U \cong \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ .
8. а) Смежные классы. Пересечение двух смежных классов. Теорема Лагранжа.  
 б) Выпишите левые смежные классы группы  $S_3$  по подгруппе  $\{e, (12)\}$ .

**Вар. 38 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 8x^2 - 6x + 9$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 9 & 2 & 5 & 4 & 8 & 3 & 10 & 1 & 8 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Z}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 8 & 1 & 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7)(2\ 5\ 6\ 3\ 8) \cdot (1\ 4)(2\ 7\ 3\ 5\ 8\ 6)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  задан формулой  $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$ . Найдите его ядро и образ.
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1. Докажите, что  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U$ .
8. а) Действие группы на множестве. Орбита, стабилизатор точки, множество инвариантных элементов. Длина орбиты.  
 б) Циклическая подгруппа в  $S_5$ , порожденная перестановкой  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ , действует на множестве  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Найдите орбиту элемента 1.

**Вар. 39** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 + 7x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 5 & 8 & 2 & 4 & 9 & 7 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с определителем 2 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех дробно-линейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ) на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 2 & 5 & 1 & 9 & 10 & 7 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7)(2\ 3\ 8\ 6\ 4\ 5) \cdot (1\ 5\ 7)(2\ 6\ 3\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа всех непостоянных дробно-линейных функций  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , на расширенной вещественной оси  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (операция – композиция функций). Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow G$  задан формулой  $\varphi(a+bi)(x) = \frac{ax-b}{bx+a}$ . Найдите его ядро.
7. Пусть  $M_2(\mathbb{R})$  – аддитивная группа всех матриц  $2 \times 2$  с коэффициентами из  $\mathbb{R}$ , а  $H$  – подгруппа в  $M_2(\mathbb{R})$ , состоящая из матриц со следом 0. Докажите, что  $M_2(\mathbb{R})/H \cong \mathbb{R}$ .
8. а) Лемма Бернсайда.  
 б) Приведите пример действия группы на множестве, у которого ровно 1 орбита.

**Вар. 40** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 9x^2 - x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения?  
 б) Является ли группой множество всех симметричных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех квадратных функций (многочленов степени  $\leq 2$ ) с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 10 & 8 & 7 & 3 & 4 & 6 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 2)(3\ 4\ 6\ 5\ 8) \cdot (1\ 6\ 5\ 7)(2\ 8\ 4\ 3)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа комплексных корней  $n$ -ной степени из 1, а  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G$  гомоморфизм групп такой, что  $\varphi(1) = e^{6\pi i/n}$ . Напишите формулу, задающую  $\varphi$ .
7. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц, а  $U$  – подгруппа в  $B$ , состоящая из матриц с единицами на главной диагонали. Докажите, что  $B/U \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ .
8. а) Нормальная подгруппа. Факторгруппа.  
 б) Верно ли, что порядок факторгруппы делит порядок группы?

**Вар. 41** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 6-й степени из 1 с операцией сложения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных верхнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 8 & 10 & 1 & 2 & 6 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 3\ 7\ 8\ 4)(5\ 6) \cdot (1\ 5\ 6\ 7\ 3\ 8)(2\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Зададим операцию  $\star$  формулой  $x \star y = x + y + xy$ . Проверьте, что  $(G, \star)$  – группа.
7. Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 3 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
8. а) Гомоморфизм групп. Эпиморфизм, мономорфизм, изоморфизм. Ядро и образ гомоморфизма. Свойства ядра и образа.  
 б) Чему равен образ гомоморфизма  $\varphi : G \rightarrow H$ , если его ядро равно  $G$ ?

**Вар. 42** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 4x^2 - 7x + 3$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 9 & 4 & 7 & 11 & 2 & 3 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с определителем 2 с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 7 & 9 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 4)(2\ 7\ 8\ 6\ 5) \cdot (1\ 5\ 6\ 2\ 8)(3\ 7\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mathbb{R}[x]$  обозначает аддитивную группу многочленов с вещественными коэффициентами, а гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}$  задан формулой  $\varphi(p) = p(i)$  (т.е. многочлену сопоставляется его значение в точке  $i$ ). Найдите ядро гомоморфизма  $\varphi$ .
7. Пусть  $\mathbb{R}[x]$  обозначает аддитивную группу многочленов от переменной  $x$  с коэффициентами из  $\mathbb{R}$ , а  $H$  – подмножество многочленов, имеющих корень 2. Докажите, что  $\mathbb{R}[x]/H \cong \mathbb{R}$ .
8. а) Теорема о гомоморфизме групп.  
 б) Из скольких элементов состоит факторгруппа  $G/G$ ?

**Вар. 43** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 8x^2 - 2x + 9$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{R}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 7 & 3 & 9 & 4 & 1 & 2 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 2)(3\ 8\ 5\ 4)(6\ 7) \cdot (1\ 3\ 6\ 8\ 2)(4\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \text{GL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$  задан формулой  $\varphi(A) = \frac{A}{\det A^3}$ . Докажите, что  $\varphi$  – эпиморфизм.
7. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_2(\mathbb{Q})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц, а  $U$  – подгруппа в  $B$ , состоящая из матриц с единицами на главной диагонали. Докажите, что  $B/U \cong \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ .
8. а) Автоморфизм, группа автоморфизмов.  
 б) Является ли автоморфизмом отображение  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , заданное равенством  $f(x) = 2x$ ?

**Вар. 44** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 8x^2 - 2x + 9$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 10 & 4 & 5 & 8 & 7 & 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 1 & 7 & 3 & 2 & 9 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(2\ 8\ 7)(3\ 6)(4\ 5) \cdot (2\ 5\ 3\ 6\ 7)(4\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц. Отображение  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (a, c)$ . Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 4 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
8. а) Свободная абелева группа. Лемма о подгруппах конечнопорожденной свободной абелевой группы.  
 б) Приведите пример нетривиальной подгруппы в аддитивной группе целых чисел.

**Вар. 45 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 4x^2 - x + 4$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 5 & 7 & 8 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с определителем 2 с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных линейных функций (многочленов степени 1) с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 8 & 7 & 3 & 2 & 9 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 2\ 8\ 4)(3\ 7)(5\ 6) \cdot (1\ 3\ 5\ 4)(2\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  задан формулой  $\varphi(x, y) = 6x - 15y$ . Найдите образ  $\varphi$ .
7. Пусть  $\mu$  – подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из корней 6-ой степени из 1. Докажите, что  $\mu \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .
8. а) Теорема о структуре конечно порожденной абелевой группы.  
 б) Является ли аддитивная группа целых чисел конечнопорожденной?

**Вар. 46 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 3x^2 + 3x + 5$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & 3 & 4 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 4-й степени из 1 с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных линейных функций (многочленов степени 1) с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 4 & 10 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(2\ 5\ 8\ 7)(3\ 4\ 6) \cdot (1\ 7\ 3)(2\ 4\ 5\ 6)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц, а отображение  $\varphi : B \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$  каждой матрице из  $B$  сопоставляет ее подматрицу, которая получается вычеркиванием первой строки и первого столбца. Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 6 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
8. а) Определение группы. Критерий подгруппы. Единственность нейтрального и обратного элементов.  
 б) Приведите пример группы порядка 5

**Вар. 47 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = x^2 + 3x + 3$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 3 & 2 & 8 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех линейных функций (многочленов степени  $\leq 1$ ) с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 6 & 7 & 4 & 10 & 1 & 8 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 6\ 2\ 7)(4\ 5) \cdot (1\ 6\ 3\ 4)(2\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mu$  – множество комплексных корней 6 степени из 1, а гомоморфизм  $\varphi : \mu \rightarrow \mu$  задан формулой  $\varphi(z) = z^4$ . Найдите ядро гомоморфизма  $\varphi$ .
7. Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $U_n$  подгруппу в  $GL_n(\mathbb{R})$ , состоящую из верхнетреугольных матриц с единицами по главной диагонали. Пусть  $H$  – подгруппа в  $U_3$ , состоящая из тех матриц, у которых все элементы, кроме элементов первой строки и главной диагонали, равны нулю. Докажите, что  $U_3/H \cong U_2$ .
8. а) Циклическая группа. Подгруппы циклической группы.  
 б) Существует ли некоммутативная циклическая группа?

**Вар. 48 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 7x^2 + 2x + 4$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 8 & 1 & 7 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с определителем 0 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & 9 & 5 & 6 & 7 & 10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 8\ 5)(2\ 6)(4\ 7) \cdot (1\ 7\ 3\ 5)(2\ 8\ 6\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $U$  – подгруппа в  $GL_3(\mathbb{C})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a, c)$ . Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $\mathbb{C}[x]$  обозначает аддитивную группу многочленов от переменной  $x$  с коэффициентами из  $\mathbb{C}$ , а  $H$  – подмножество многочленов, имеющих корень 2. Докажите, что  $\mathbb{C}[x]/H \cong \mathbb{C}$ .
8. а) Симметрическая группа, четность перестановки, нормальность знакопеременной группы.  
 б) Является ли перестановка  $(1234)(56)(78)$  четной? Ответ обосновать.



**Вар. 49** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 6 & 10 & 3 & 7 & 11 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 9 & 3 & 7 & 2 & 1 & 6 & 8 & 5 & 10 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 8\ 3\ 5)(2\ 4\ 7) \cdot (1\ 2\ 7\ 6)(3\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – множество матриц вида  $\begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $\alpha^2 - 3\beta^2 \neq 0$ . Пусть  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha + \beta\sqrt{3}$ . Докажите, что  $\varphi$  – гомоморфизм групп.
7. Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 4 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
8. а) Порядок группы, порядок подгруппы, порядок элемента.  
 б) Существует ли в группе порядка 64 элемент порядка 3?

**Вар. 50** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 4x^2 + 6x + 9$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 7 & 3 & 1 & 9 & 4 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 3\ 6\ 5)(2\ 8\ 4) \cdot (2\ 8\ 6\ 5)(4\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mu$  – множество комплексных корней 6 степени из 1, а гомоморфизм  $\phi : \mu \rightarrow \mu$  задан формулой  $\phi(z) = z^4$ . Найдите образ гомоморфизма  $\phi$ .
7. Пусть  $U$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $H$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из тех матриц, которые отличаются от единичной только на месте  $(1, 3)$ . Докажите, что  $U/H \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ .
8. а) Внешнее прямое произведение групп. Внутреннее прямое произведение групп. Их изоморфизм.  
 б) Пусть  $G$  – аддитивная группа столбцов высоты 2 с целыми элементами. Запишите  $G$  в виде прямой суммы групп.

**Вар. 51** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 6x^2 - 2x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 5-й степени из 1 с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с определителем 2 с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 2 & 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 6\ 5\ 8)(2\ 7\ 3\ 4) \cdot (1\ 7\ 6\ 3)(2\ 5\ 8\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \text{GL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$  задан формулой  $\varphi(A) = \frac{A}{\sqrt[3]{\det A}}$ . Докажите, что  $\text{Ker } \varphi = \{\lambda E \mid \lambda \neq 0\}$
7. Пусть  $M_2(\mathbb{Q})$  – аддитивная группа всех матриц  $2 \times 2$  с коэффициентами из  $\mathbb{Q}$ , а  $H$  – подгруппа в  $M_2(\mathbb{Q})$ , состоящая из матриц со следом 0. Докажите, что  $M_2(\mathbb{Q})/H \cong \mathbb{Q}$ .
8. а) Прямая сумма циклических групп.  
 б) Приведите пример циклической подгруппы в  $S_3$ .

**Вар. 52** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 7x^2 - x + 8$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех верхнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 & 10 & 1 & 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7\ 5)(2\ 3\ 4\ 8\ 6) \cdot (1\ 2)(3\ 4\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$  задан формулой  $\varphi(x) = e^{ix}$ . Найдите его ядро.
7. Пусть  $\mathbb{R}[x]$  обозначает аддитивную группу многочленов от переменной  $x$  с коэффициентами из  $\mathbb{R}$ , а  $H$  – подмножество многочленов, имеющих корень 7. Докажите, что  $\mathbb{R}[x]/H \cong \mathbb{R}$ .
8. а) Смежные классы. Пересечение двух смежных классов. Теорема Лагранжа.  
 б) Выпишите левые смежные классы группы  $S_3$  по подгруппе  $\{e, (12)\}$ .

**Вар. 53** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 - 9x + 2$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{R}, \cdot)$ ?  
б) Является ли группой множество невырожденных нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с операцией умножения?  
в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 10 & 7 & 6 & 9 & 8 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7)(2\ 5\ 8\ 6\ 3\ 4) \cdot (1\ 4)(2\ 3)(6\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа всех непостоянных дробно-линейных функций  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , на расширенной вещественной оси  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (операция – композиция функций). Пусть  $\varphi : \text{GL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow G$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Докажите, что  $\varphi$  – гомоморфизм групп.
7. Пусть  $H$  циклическая подгруппа в  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , порожденная элементом  $(5, 4)$ . Докажите, что  $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/H \cong \mathbb{Z}$ .  
*Подсказка.* Любой гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  имеет вид  $\varphi(x, y) = \alpha x + \beta y$  для некоторых  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ .
8. а) Действие группы на множестве. Орбита, стабилизатор точки, множество инвариантных элементов. Длина орбиты.  
б) Циклическая подгруппа в  $S_5$ , порожденная перестановкой  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ , действует на множестве  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Найдите орбиту элемента 1.

**Вар. 54** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ?  
б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с определителем 1 с операцией сложения?  
в) Является ли группой множество непостоянных линейных функций (многочленов степени 1) с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & 8 & 3 & 9 & 6 & 10 & 7 & 5 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(2\ 8\ 3\ 6\ 5)(4\ 7) \cdot (1\ 3\ 2)(4\ 7\ 8\ 6)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  задан формулой  $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$ . Найдите его ядро и образ.
7. Пусть  $U$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $H$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из тех матриц, которые отличаются от единичной только на месте  $(1, 3)$ . Докажите, что  $U/H \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .
8. а) Лемма Бернсайда.  
б) Приведите пример действия группы на множестве, у которого ровно 1 орбита.

**Вар. 55 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 6x^2 - x + 4$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 & 2 & 8 & 1 & 8 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 10 & 6 & 1 & 7 & 8 & 4 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 8\ 7\ 3)(2\ 5) \cdot (1\ 8\ 5\ 6\ 2\ 3)(4\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа всех непостоянных дробно-линейных функций  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , на расширенной вещественной оси  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (операция – композиция функций). Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow G$  задан формулой  $\varphi(a+bi)(x) = \frac{ax-b}{bx+a}$ . Найдите его ядро.
7. Пусть  $M_2(\mathbb{Z})$  – аддитивная группа всех матриц  $2 \times 2$  с коэффициентами из  $\mathbb{Z}$ , а  $H$  – подгруппа в  $M_2(\mathbb{Z})$ , состоящая из матриц со следом 0. Докажите, что  $M_2(\mathbb{Z})/H \cong \mathbb{Z}$ .
8. а) Нормальная подгруппа. Факторгруппа.  
 б) Верно ли, что порядок факторгруппы делит порядок группы?

**Вар. 56 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 3x^2 - 2x + 9$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 5 & 4 & 3 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 4-й степени из 1 с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных симметричных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 9 & 10 & 5 & 4 & 8 & 1 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 8)(2\ 6\ 3\ 7\ 4) \cdot (1\ 6\ 3)(2\ 4\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа комплексных корней  $n$ -ой степени из 1, а  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G$  гомоморфизм групп такой, что  $\varphi(1) = e^{6\pi i/n}$ . Напишите формулу, задающую  $\varphi$ .
7. Пусть  $U$  – подгруппа в  $GL_3(\mathbb{C})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $H$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из тех матриц, которые отличаются от единичной только на месте  $(1, 3)$ . Докажите, что  $U/H \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ .
8. а) Гомоморфизм групп. Эпиморфизм, мономорфизм, изоморфизм. Ядро и образ гомоморфизма. Свойства ядра и образа.  
 б) Чему равен образ гомоморфизма  $\varphi : G \rightarrow H$ , если его ядро равно  $G$ ?

**Вар. 57** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 2x^2 - 6x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 2 & 7 & 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с определителем 1 с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 7 & 8 & 6 & 4 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 2\ 8\ 3\ 4\ 6)(5\ 7) \cdot (1\ 5)(2\ 8\ 6\ 7\ 3\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Зададим операцию  $\star$  формулой  $x \star y = x + y + xy$ . Проверьте, что  $(G, \star)$  – группа.
7. Пусть  $M_2(\mathbb{Z})$  – аддитивная группа всех матриц  $2 \times 2$  с коэффициентами из  $\mathbb{Z}$ , а  $H$  – подгруппа в  $M_2(\mathbb{Z})$ , состоящая из матриц со следом 0. Докажите, что  $M_2(\mathbb{Z})/H \cong \mathbb{Z}$ .
8. а) Теорема о гомоморфизме групп.  
 б) Из скольких элементов состоит факторгруппа  $G/G'$ ?

**Вар. 58** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 8x^2 + 9x + 2$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 10 & 7 & 3 & 11 & 2 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Q}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 9 & 8 & 6 & 2 & 5 & 1 & 7 & 10 & 4 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 3\ 2)(4\ 8\ 6)(5\ 7) \cdot (1\ 6\ 7\ 8\ 5\ 4)(2\ 3)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mathbb{R}[x]$  обозначает аддитивную группу многочленов с вещественными коэффициентами, а гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}$  задан формулой  $\varphi(p) = p(i)$  (т.е. многочлену сопоставляется его значение в точке  $i$ ). Найдите ядро гомоморфизма  $\varphi$ .
7. Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $U_n$  подгруппу в  $GL_n(\mathbb{R})$ , состоящую из верхнетреугольных матриц с единицами по главной диагонали. Пусть  $H$  – подгруппа в  $U_4$ , состоящая из тех матриц, у которых все элементы, кроме элементов первой строки и главной диагонали, равны нулю. Докажите, что  $U_4/H \cong U_3$ .
8. а) Автоморфизм, группа автоморфизмов.  
 б) Является ли автоморфизмом отображение  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , заданное равенством  $f(x) = 2x$ ?

**Вар. 59 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 + 5x + 4$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 5 & 7 & 8 & 1 & 8 & 2 & 9 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех дробно-линейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ) на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & 10 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7\ 8)(4\ 6\ 5) \cdot (1\ 5\ 8)(2\ 4\ 7\ 6\ 3)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \text{GL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$  задан формулой  $\varphi(A) = \frac{A}{\det A^3}$ . Докажите, что  $\varphi$  – эпиморфизм.
7. Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $U_n$  подгруппу в  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ , состоящую из верхнетреугольных матриц с единицами по главной диагонали. Пусть  $H$  – подгруппа в  $U_3$ , состоящая из тех матриц, у которых все элементы, кроме элементов первой строки и главной диагонали, равны нулю. Докажите, что  $U_3/H \cong U_2$ .
8. а) Свободная абелева группа. Лемма о подгруппах конечнопорожденной свободной абелевой группы.  
 б) Приведите пример нетривиальной подгруппы в аддитивной группе целых чисел.

**Вар. 60 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 6 & 8 & 2 & 7 & 10 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с определителем 2 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех дробно-линейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ) на расширенной вещественной оси с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 10 & 8 & 7 & 5 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 4\ 6)(2\ 5)(3\ 8\ 7) \cdot (2\ 6\ 3\ 5)(4\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц. Отображение  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (a, c)$ . Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 3 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
8. а) Теорема о структуре конечно порожденной абелевой группы.  
 б) Является ли аддитивная группа целых чисел конечнопорожденной?

**Вар. 61** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 2x^2 - 9x + 8$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 9-й степени из 1 с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 6 & 9 & 4 & 10 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 8\ 2)(4\ 6)(5\ 7) \cdot (1\ 5\ 7\ 6\ 2)(3\ 4\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  задан формулой  $\varphi(x, y) = 6x - 15y$ . Найдите образ  $\varphi$ .
7. Пусть  $U$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $H$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из тех матриц, которые отличаются от единичной только на месте  $(1, 3)$ . Докажите, что  $U/H \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .
8. а) Определение группы. Критерий подгруппы. Единственность нейтрального и обратного элементов.  
 б) Приведите пример группы порядка 5

**Вар. 62** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 4x^2 - 2x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех дробнолинейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ) на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 5 & 9 & 8 & 1 & 7 & 6 & 10 & 4 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 3\ 4\ 6\ 5)(2\ 8\ 7) \cdot (2\ 7)(3\ 5\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц, а отображение  $\varphi : B \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$  каждой матрице из  $B$  сопоставляет ее подматрицу, которая получается вычеркиванием первой строки и первого столбца. Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $G$  – промежуток  $[0; 1)$  с операцией  $\star$ , заданной формулой  $x \star y = \{x + y\}$  (здесь  $\{t\}$  обозначает дробную часть числа  $t$ ). Пусть  $H$  циклическая подгруппа в  $G$ , порожденная элементом  $\frac{1}{9}$ . Докажите, что  $G/H \cong G$ .
8. а) Циклическая группа. Подгруппы циклической группы.  
 б) Существует ли некоммутативная циклическая группа?

**Вар. 63 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 - 2x + 4$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 5 & 9 & 11 & 2 & 4 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{N}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с определителем 2 с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 8 & 7 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 2\ 5\ 4\ 3\ 7)(6\ 8) \cdot (2\ 3\ 4\ 6)(5\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mu$  – множество комплексных корней 6 степени из 1, а гомоморфизм  $\varphi : \mu \rightarrow \mu$  задан формулой  $\varphi(z) = z^4$ . Найдите ядро гомоморфизма  $\varphi$ .
7. Пусть  $G$  – промежуток  $[0; 1)$  с операцией  $\star$ , заданной формулой  $x \star y = \{x + y\}$  (здесь  $\{t\}$  обозначает дробную часть числа  $t$ ). Пусть  $H$  циклическая подгруппа в  $G$ , порожденная элементом  $\frac{1}{7}$ . Докажите, что  $G/H \cong G$ .
8. а) Симметрическая группа, четность перестановки, нормальность знакопеременной группы.  
 б) Является ли перестановка  $(1234)(56)(78)$  четной? Ответ обосновать.

**Вар. 64 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 8 & 5 & 1 & 4 & 6 & 9 & 2 & 10 & 3 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 5)(2\ 7\ 8) \cdot (1\ 7)(2\ 5\ 4\ 8)(3\ 6)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $U$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a, c)$ . Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1, а  $\mu$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из корней 10-ой степени из 1. Докажите, что  $U/\mu \cong U$ .
8. а) Порядок группы, порядок подгруппы, порядок элемента.  
 б) Существует ли в группе порядка 64 элемент порядка 3?



**Вар. 65 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 8x^2 + x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 6 & 1 & 3 & 4 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7)(2\ 6\ 8)(4\ 5) \cdot (1\ 7\ 4)(2\ 5\ 6)(3\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – множество матриц вида  $\begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $\alpha^2 - 3\beta^2 \neq 0$ . Пусть  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha + \beta\sqrt{3}$ . Докажите, что  $\varphi$  – гомоморфизм групп.
7. Пусть  $G$  – промежуток  $[0; 1)$  с операцией  $\star$ , заданной формулой  $x \star y = \{x + y\}$  (здесь  $\{t\}$  обозначает дробную часть числа  $t$ ). Пусть  $H$  циклическая подгруппа в  $G$ , порожденная элементом  $\frac{1}{7}$ . Докажите, что  $G/H \cong G$ .
8. а) Внешнее прямое произведение групп. Внутреннее прямое произведение групп. Их изоморфизм.  
 б) Пусть  $G$  – аддитивная группа столбцов высоты 2 с целыми элементами. Запишите  $G$  в виде прямой суммы групп.

**Вар. 66 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 2x^2 + 9x + 2$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 7 & 3 & 1 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 9-й степени из 1 с операцией сложения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с определителем 2 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных дробно-линейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ,  $ad \neq bc$ ) на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 7 & 10 & 8 & 2 & 6 & 3 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 6\ 4\ 7\ 3)(2\ 5) \cdot (1\ 7\ 3)(6\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mu$  – множество комплексных корней 6 степени из 1, а гомоморфизм  $\phi : \mu \rightarrow \mu$  задан формулой  $\phi(z) = z^4$ . Найдите образ гомоморфизма  $\phi$ .
7. Пусть  $G$  – промежуток  $[0; 1)$  с операцией  $\star$ , заданной формулой  $x \star y = \{x + y\}$  (здесь  $\{t\}$  обозначает дробную часть числа  $t$ ). Пусть  $H$  циклическая подгруппа в  $G$ , порожденная элементом  $\frac{1}{6}$ . Докажите, что  $G/H \cong G$ .
8. а) Прямая сумма циклических групп.  
 б) Приведите пример циклической подгруппы в  $S_3$ .

**Вар. 67 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 6x^2 + 3x + 8$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 2 & 5 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех симметричных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 2 & 6 & 9 & 10 & 5 & 4 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 6)(2\ 5\ 8\ 3\ 4) \cdot (1\ 3\ 8\ 7)(2\ 6\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \text{GL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$  задан формулой  $\varphi(A) = \frac{A}{\sqrt[3]{\det A}}$ . Докажите, что  $\text{Ker } \varphi = \{\lambda E \mid \lambda \neq 0\}$
7. Пусть  $\mathbb{Q}[x]$  обозначает аддитивную группу многочленов от переменной  $x$  с коэффициентами из  $\mathbb{Q}$ , а  $H$  – подмножество многочленов, имеющих корень 1. Докажите, что  $\mathbb{Q}[x]/H \cong \mathbb{Q}$ .
8. а) Смежные классы. Пересечение двух смежных классов. Теорема Лагранжа.  
 б) Выпишите левые смежные классы группы  $S_3$  по подгруппе  $\{e, (12)\}$ .

**Вар. 68 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = x^2 + 4x + 9$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 10 & 3 & 8 & 9 & 5 & 11 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{R}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных верхнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех квадратичных функций (многочленов степени  $\leq 2$ ) с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 9 & 2 & 10 & 3 & 5 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 6\ 4)(5\ 8) \cdot (2\ 3\ 7)(4\ 8\ 6\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$  задан формулой  $\varphi(x) = e^{ix}$ . Найдите его ядро.
7. Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $U_n$  подгруппу в  $\text{GL}_n(\mathbb{Q})$ , состоящую из верхнетреугольных матриц с единицами по главной диагонали. Пусть  $H$  – подгруппа в  $U_3$ , состоящая из тех матриц, у которых все элементы, кроме элементов первой строки и главной диагонали, равны нулю. Докажите, что  $U_3/H \cong U_2$ .
8. а) Действие группы на множестве. Орбита, стабилизатор точки, множество инвариантных элементов. Длина орбиты.  
 б) Циклическая подгруппа в  $S_5$ , порожденная перестановкой  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ , действует на множестве  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Найдите орбиту элемента 1.

**Вар. 69** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 3x^2 + 7x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с определителем 2 с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех квадратичных функций (многочленов степени  $\leq 2$ ) с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 5 & 7 & 4 & 6 & 8 & 3 & 10 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 4\ 8\ 6\ 7\ 2)(3\ 5) \cdot (1\ 7\ 6\ 5\ 2\ 8)(3\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа всех непостоянных дробно-линейных функций  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , на расширенной вещественной оси  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (операция – композиция функций). Пусть  $\varphi : \text{GL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow G$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Докажите, что  $\varphi$  – гомоморфизм групп.
7. Пусть  $G$  – промежуток  $[0; 1)$  с операцией  $\star$ , заданной формулой  $x \star y = \{x + y\}$  (здесь  $\{t\}$  обозначает дробную часть числа  $t$ ). Пусть  $H$  циклическая подгруппа в  $G$ , порожденная элементом  $\frac{1}{8}$ . Докажите, что  $G/H \cong G$ .
8. а) Лемма Бернсайда.  
 б) Приведите пример действия группы на множестве, у которого ровно 1 орбита.

**Вар. 70** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = x^2 - 2x + 6$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения?  
 б) Является ли группой множество всех симметричных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 7 & 10 & 5 & 4 & 1 & 8 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 2\ 7\ 3\ 5)(4\ 6) \cdot (1\ 7\ 5\ 6)(2\ 4\ 3)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  задан формулой  $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$ . Найдите его ядро и образ.
7. Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 4 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
8. а) Нормальная подгруппа. Факторгруппа.  
 б) Верно ли, что порядок факторгруппы делит порядок группы?

**Вар. 71 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 8x^2 + 3x + 2$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 6-й степени из 1 с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных симметричных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных линейных функций (многочленов степени 1) с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 10 & 5 & 3 & 2 & 4 & 8 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 6\ 7\ 4\ 3)(5\ 8) \cdot (1\ 2\ 3\ 6\ 8)(4\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа всех непостоянных дробно-линейных функций  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , на расширенной вещественной оси  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (операция – композиция функций). Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow G$  задан формулой  $\varphi(a+bi)(x) = \frac{ax-b}{bx+a}$ . Найдите его ядро.
7. Пусть  $M_2(\mathbb{C})$  – аддитивная группа всех матриц  $2 \times 2$  с коэффициентами из  $\mathbb{C}$ , а  $H$  – подгруппа в  $M_2(\mathbb{C})$ , состоящая из матриц со следом 0. Докажите, что  $M_2(\mathbb{C})/H \cong \mathbb{C}$ .
8. а) Гомоморфизм групп. Эпиморфизм, мономорфизм, изоморфизм. Ядро и образ гомоморфизма. Свойства ядра и образа.  
 б) Чему равен образ гомоморфизма  $\varphi : G \rightarrow H$ , если его ядро равно  $G$ ?

**Вар. 72 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 + 8x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с определителем 1 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 10 & 9 & 4 & 2 & 6 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 4\ 8\ 3\ 6\ 5)(2\ 7) \cdot (1\ 2)(3\ 6\ 5\ 4\ 7\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа комплексных корней  $n$ -й степени из 1, а  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G$  гомоморфизм групп такой, что  $\varphi(1) = e^{6\pi i/n}$ . Напишите формулу, задающую  $\varphi$ .
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1. Докажите, что  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U$ .
8. а) Теорема о гомоморфизме групп.  
 б) Из скольких элементов состоит факторгруппа  $G/G$ ?

**Вар. 73** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 6x^2 + 5x + 5$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 9 & 8 & 4 & 5 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 2\ 8\ 6\ 7)(3\ 5\ 4) \cdot (1\ 7\ 8\ 4)(3\ 6\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Зададим операцию  $\star$  формулой  $x \star y = x + y + xy$ . Проверьте, что  $(G, \star)$  – группа.
7. Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 5 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
8. а) Автоморфизм, группа автоморфизмов.  
 б) Является ли автоморфизмом отображение  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , заданное равенством  $f(x) = 2x$ ?

**Вар. 74** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных верхнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех линейных функций (многочленов степени  $\leq 1$ ) с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 1 & 9 & 5 & 6 & 4 & 10 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 4\ 5)(2\ 8\ 7\ 6) \cdot (1\ 7)(2\ 8)(3\ 5\ 6\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mathbb{R}[x]$  обозначает аддитивную группу многочленов с вещественными коэффициентами, а гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}$  задан формулой  $\varphi(p) = p(i)$  (т.е. многочлену сопоставляется его значение в точке  $i$ ). Найдите ядро гомоморфизма  $\varphi$ .
7. Пусть  $M_2(\mathbb{Q})$  – аддитивная группа всех матриц  $2 \times 2$  с коэффициентами из  $\mathbb{Q}$ , а  $H$  – подгруппа в  $M_2(\mathbb{Q})$ , состоящая из матриц со следом 0. Докажите, что  $M_2(\mathbb{Q})/H \cong \mathbb{Q}$ .
8. а) Свободная абелева группа. Лемма о подгруппах конечнопорожденной свободной абелевой группы.  
 б) Приведите пример нетривиальной подгруппы в аддитивной группе целых чисел.

**Вар. 75 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 6x^2 + 5x + 9$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с определителем 2 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 1 & 5 & 2 & 7 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 6\ 3)(2\ 7\ 4)(5\ 8) \cdot (1\ 5)(2\ 4\ 7\ 8\ 3)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \text{GL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$  задан формулой  $\varphi(A) = \frac{A}{\det A^3}$ . Докажите, что  $\varphi$  – эпиморфизм.
7. Пусть  $G$  – промежуток  $[0; 1)$  с операцией  $\star$ , заданной формулой  $x \star y = \{x + y\}$  (здесь  $\{t\}$  обозначает дробную часть числа  $t$ ). Пусть  $H$  циклическая подгруппа в  $G$ , порожденная элементом  $\frac{1}{7}$ . Докажите, что  $G/H \cong G$ .
8. а) Теорема о структуре конечно порожденной абелевой группы.  
 б) Является ли аддитивная группа целых чисел конечнопорожденной?

**Вар. 76 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 9x^2 + 8x + 2$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 6 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 5-й степени из 1 с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех квадратичных функций (многочленов степени  $\leq 2$ ) с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & 4 & 10 & 8 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 2\ 3\ 6)(4\ 5\ 8\ 7) \cdot (1\ 8\ 2)(3\ 6\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц. Отображение  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (a, c)$ . Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $\mathbb{R}[x]$  обозначает аддитивную группу многочленов от переменной  $x$  с коэффициентами из  $\mathbb{R}$ , а  $H$  – подмножество многочленов, имеющих корень 9. Докажите, что  $\mathbb{R}[x]/H \cong \mathbb{R}$ .
8. а) Определение группы. Критерий подгруппы. Единственность нейтрального и обратного элементов.  
 б) Приведите пример группы порядка 5

**Вар. 77 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 4 & 9 & 2 & 1 & 5 & 7 & 8 & 3 & 10 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 4\ 2\ 3\ 7\ 5)(6\ 8) \cdot (1\ 2\ 8\ 7\ 4)(3\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  задан формулой  $\varphi(x, y) = 6x - 15y$ . Найдите образ  $\varphi$ .
7. Пусть  $M_2(\mathbb{Z})$  – аддитивная группа всех матриц  $2 \times 2$  с коэффициентами из  $\mathbb{Z}$ , а  $H$  – подгруппа в  $M_2(\mathbb{Z})$ , состоящая из матриц со следом 0. Докажите, что  $M_2(\mathbb{Z})/H \cong \mathbb{Z}$ .
8. а) Циклическая группа. Подгруппы циклической группы.  
 б) Существует ли некоммутативная циклическая группа?

**Вар. 78 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = x^2 + 5x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 9 & 5 & 10 & 6 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Q}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с определителем 1 с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех линейных функций (многочленов степени  $\leq 1$ ) с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 5 & 1 & 10 & 2 & 7 & 3 & 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7\ 6\ 4\ 3\ 8)(2\ 5) \cdot (2\ 4\ 7\ 5\ 8)(3\ 6)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $B$  – подгруппа в  $GL_3(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц, а отображение  $\varphi : B \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$  каждой матрице из  $B$  сопоставляет ее подматрицу, которая получается вычеркиванием первой строки и первого столбца. Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 5 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
8. а) Симметрическая группа, четность перестановки, нормальность знакопеременной группы.  
 б) Является ли перестановка  $(1234)(56)(78)$  четной? Ответ обосновать.

**Вар. 79 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 2x^2 + 3x + 2$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли заданная функция таблицей  
 $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$   
 $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 3 & 2 & 5 & 6 & 9 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех симметричных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией композиции?
4. Записать перестановку  
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 6 & 10 & 9 & 8 & 7 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 5)(3\ 4\ 8)(6\ 7) \cdot (1\ 2\ 6\ 5)(3\ 7\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mu$  – множество комплексных корней 6 степени из 1, а гомоморфизм  $\varphi : \mu \rightarrow \mu$  задан формулой  $\varphi(z) = z^4$ . Найдите ядро гомоморфизма  $\varphi$ .
7. Пусть  $M_2(\mathbb{C})$  – аддитивная группа всех матриц  $2 \times 2$  с коэффициентами из  $\mathbb{C}$ , а  $H$  – подгруппа в  $M_2(\mathbb{C})$ , состоящая из матриц со следом 0. Докажите, что  $M_2(\mathbb{C})/H \cong \mathbb{C}$ .
8. а) Порядок группы, порядок подгруппы, порядок элемента.  
 б) Существует ли в группе порядка 64 элемент порядка 3?

**Вар. 80 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = x^2 - 8x + 8$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 3 & 5 & 1 & 5 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией умножения?
4. Записать перестановку  
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 & 5 & 9 & 1 & 10 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 5\ 8\ 4\ 3)(6\ 7) \cdot (1\ 8)(2\ 7\ 6)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $U$  – подгруппа в  $GL_3(\mathbb{C})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a, c)$ . Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1, а  $\mu$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из корней 8-ой степени из 1. Докажите, что  $U/\mu \cong U$ .
8. а) Внешнее прямое произведение групп. Внутреннее прямое произведение групп. Их изоморфизм.  
 б) Пусть  $G$  – аддитивная группа столбцов высоты 2 с целыми элементами. Запишите  $G$  в виде прямой суммы групп.



**Вар. 81 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 8x^2 + 9x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 9-й степени из 1 с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с определителем 2 с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех квадратных функций (многочленов степени  $\leq 2$ ) с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 4 & 3 & 5 & 7 & 1 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7)(2\ 6)(5\ 8) \cdot (1\ 4)(2\ 8\ 5\ 6\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – множество матриц вида  $\begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $\alpha^2 - 3\beta^2 \neq 0$ . Пусть  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha + \beta\sqrt{3}$ . Докажите, что  $\varphi$  – гомоморфизм групп.
7. Пусть  $H$  циклическая подгруппа в  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , порожденная элементом  $(8, 5)$ . Докажите, что  $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/H \cong \mathbb{Z}$ .  
*Подсказка.* Любой гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  имеет вид  $\varphi(x, y) = \alpha x + \beta y$  для некоторых  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ .
8. а) Прямая сумма циклических групп.  
 б) Приведите пример циклической подгруппы в  $S_3$ .

**Вар. 82 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 4x^2 - 3x + 3$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 9 & 2 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 8 & 1 & 2 & 7 & 9 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7\ 4\ 5\ 6\ 3)(2\ 8) \cdot (1\ 2)(3\ 7\ 6\ 4\ 8\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mu$  – множество комплексных корней 6 степени из 1, а гомоморфизм  $\phi : \mu \rightarrow \mu$  задан формулой  $\phi(z) = z^4$ . Найдите образ гомоморфизма  $\phi$ .
7. Пусть  $G$  – промежуток  $[0; 1)$  с операцией  $\star$ , заданной формулой  $x \star y = \{x + y\}$  (здесь  $\{t\}$  обозначает дробную часть числа  $t$ ). Пусть  $H$  циклическая подгруппа в  $G$ , порожденная элементом  $\frac{1}{8}$ . Докажите, что  $G/H \cong G$ .
8. а) Смежные классы. Пересечение двух смежных классов. Теорема Лагранжа.  
 б) Выпишите левые смежные классы группы  $S_3$  по подгруппе  $\{e, (12)\}$ .

**Вар. 83 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 9x^2 + 5x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 10 & 3 & 11 & 5 & 1 & 8 & 2 & 9 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 9 & 6 & 10 & 1 & 4 & 7 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 2\ 8)(3\ 5\ 7\ 6) \cdot (1\ 2)(3\ 8)(4\ 6\ 7\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \text{GL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$  задан формулой  $\varphi(A) = \frac{A}{\sqrt[3]{\det A}}$ . Докажите, что  $\text{Ker } \varphi = \{\lambda E \mid \lambda \neq 0\}$
7. Пусть  $H$  циклическая подгруппа в  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , порожденная элементом  $(2, 3)$ . Докажите, что  $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/H \cong \mathbb{Z}$ .  
*Подсказка.* Любой гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  имеет вид  $\varphi(x, y) = \alpha x + \beta y$  для некоторых  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ .
8. а) Действие группы на множестве. Орбита, стабилизатор точки, множество инвариантных элементов. Длина орбиты.  
 б) Циклическая подгруппа в  $S_5$ , порожденная перестановкой  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ , действует на множестве  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Найдите орбиту элемента 1.

**Вар. 84 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 6x^2 - 3x + 2$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 9 & 2 & 8 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с определителем 1 с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 7 & 10 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7\ 4)(2\ 8\ 6)(3\ 5) \cdot (2\ 7\ 4\ 5\ 3)(6\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$  задан формулой  $\varphi(x) = e^{ix}$ . Найдите его ядро.
7. Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 4 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
8. а) Лемма Бернсайда.  
 б) Приведите пример действия группы на множестве, у которого ровно 1 орбита.

**Вар. 85 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 5 & 7 & 1 & 3 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения?  
 б) Является ли группой множество всех диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 9 & 7 & 1 & 2 & 8 & 10 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(2\ 6\ 5)(3\ 4\ 7) \cdot (1\ 4\ 5\ 8)(2\ 6\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа всех непостоянных дробно-линейных функций  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , на расширенной вещественной оси  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (операция – композиция функций). Пусть  $\varphi : \text{GL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow G$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ . Докажите, что  $\varphi$  – гомоморфизм групп.
7. Пусть  $\mu$  – подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из корней 3-ой степени из 1. Докажите, что  $\mu \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .
8. а) Нормальная подгруппа. Факторгруппа.  
 б) Верно ли, что порядок факторгруппы делит порядок группы?

**Вар. 86 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 4x^2 - 9x + 4$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 8 & 9 & 7 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 5-й степени из 1 с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 2 & 7 & 9 & 5 & 4 & 6 & 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(2\ 8\ 3\ 4)(5\ 6) \cdot (1\ 6\ 5\ 7\ 2)(3\ 8\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  задан формулой  $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$ . Найдите его ядро и образ.
7. Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 5 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
8. а) Гомоморфизм групп. Эпиморфизм, мономорфизм, изоморфизм. Ядро и образ гомоморфизма. Свойства ядра и образа.  
 б) Чему равен образ гомоморфизма  $\varphi : G \rightarrow H$ , если его ядро равно  $G$ ?

**Вар. 87 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 9x^2 + 2x + 2$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с определителем 0 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 4 & 8 & 10 & 9 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 5)(3\ 6\ 8) \cdot (1\ 8\ 5\ 3\ 2)(4\ 6\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа всех непостоянных дробно-линейных функций  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , на расширенной вещественной оси  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (операция – композиция функций). Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow G$  задан формулой  $\varphi(a + bi)(x) = \frac{ax-b}{bx+a}$ . Найдите его ядро.
7. Пусть  $G$  – промежуток  $[0; 1)$  с операцией  $\star$ , заданной формулой  $x \star y = \{x + y\}$  (здесь  $\{t\}$  обозначает дробную часть числа  $t$ ). Пусть  $H$  циклическая подгруппа в  $G$ , порожденная элементом  $\frac{1}{6}$ . Докажите, что  $G/H \cong G$ .
8. а) Теорема о гомоморфизме групп.  
 б) Из скольки элементов состоит факторгруппа  $G/G'$ ?

**Вар. 88 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 2x^2 - 9x + 3$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 1 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Q}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 9 & 6 & 2 & 7 & 8 & 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7\ 6\ 4\ 8\ 3)(2\ 5) \cdot (2\ 6)(3\ 8\ 4)(5\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – группа комплексных корней  $n$ -ой степени из 1, а  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G$  гомоморфизм групп такой, что  $\varphi(1) = e^{6\pi i/n}$ . Напишите формулу, задающую  $\varphi$ .
7. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц, а  $U$  – подгруппа в  $B$ , состоящая из матриц с единицами на главной диагонали. Докажите, что  $B/U \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ .
8. а) Автоморфизм, группа автоморфизмов.  
 б) Является ли автоморфизмом отображение  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , заданное равенством  $f(x) = 2x$ ?

**Вар. 89 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 4x^2 - x + 2$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 3 & 6 & 1 & 7 & 5 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных верхнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех квадратичных функций (многочленов степени  $\leq 2$ ) с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 4 & 10 & 3 & 8 & 1 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 4\ 3)(5\ 8)(6\ 7) \cdot (1\ 3)(4\ 7)(5\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Зададим операцию  $\star$  формулой  $x \star y = x + y + xy$ . Проверьте, что  $(G, \star)$  – группа.
7. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_2(\mathbb{Q})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц, а  $U$  – подгруппа в  $B$ , состоящая из матриц с единицами на главной диагонали. Докажите, что  $B/U \cong \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ .
8. а) Свободная абелева группа. Лемма о подгруппах конечнопорожденной свободной абелевой группы.  
 б) Приведите пример нетривиальной подгруппы в аддитивной группе целых чисел.

**Вар. 90 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 9x^2 + x + 6$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 5 & 8 & 7 & 1 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с определителем 0 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество ненулевых дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 10 & 5 & 7 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7\ 3\ 8\ 4)(2\ 6) \cdot (1\ 2)(3\ 4)(6\ 8\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mathbb{R}[x]$  обозначает аддитивную группу многочленов с вещественными коэффициентами, а гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}$  задан формулой  $\varphi(p) = p(i)$  (т.е. многочлену сопоставляется его значение в точке  $i$ ). Найдите ядро гомоморфизма  $\varphi$ .
7. Пусть  $U$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{Q})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $H$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из тех матриц, которые отличаются от единичной только на месте  $(1, 3)$ . Докажите, что  $U/H \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ .
8. а) Теорема о структуре конечно порожденной абелевой группы.  
 б) Является ли аддитивная группа целых чисел конечнопорожденной?

**Вар. 91** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 7x^2 + 9x + 6$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 3-й степени из 1 с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{N}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество всех функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией сложения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 10 & 8 & 5 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 7)(2\ 3\ 4\ 6\ 8\ 5) \cdot (1\ 8\ 5\ 7\ 4)(2\ 3\ 6)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \text{GL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$  задан формулой  $\varphi(A) = \frac{A}{\det A^3}$ . Докажите, что  $\varphi$  – эпиморфизм.
7. Пусть  $U$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{Q})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $H$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из тех матриц, которые отличаются от единичной только на месте  $(1, 3)$ . Докажите, что  $U/H \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ .
8. а) Определение группы. Критерий подгруппы. Единственность нейтрального и обратного элементов.  
 б) Приведите пример группы порядка 5

**Вар. 92** (8123034)

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 - 7x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 10 & 7 & 9 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных симметричных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных линейных функций (многочленов степени 1) с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 1 & 3 & 6 & 8 & 10 & 9 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 8)(2\ 6\ 7\ 3) \cdot (1\ 3\ 5)(4\ 8\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц. Отображение  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (a, c)$ . Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $\mu$  – подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из корней 3-й степени из 1. Докажите, что  $\mu \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .
8. а) Циклическая группа. Подгруппы циклической группы.  
 б) Существует ли некоммутативная циклическая группа?

**Вар. 93 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = x^2 + x + 3$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 6 & 7 & 9 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{R}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с определителем 2 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 7 & 10 & 5 & 1 & 6 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 8\ 2\ 3\ 5)(4\ 6) \cdot (1\ 7)(3\ 8\ 6\ 4\ 5)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  задан формулой  $\varphi(x, y) = 6x - 15y$ . Найдите образ  $\varphi$ .
7. Пусть  $U$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{Q})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $H$  – подгруппа в  $U$ , состоящая из тех матриц, которые отличаются от единичной только на месте  $(1, 3)$ . Докажите, что  $U/H \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ .
8. а) Симметрическая группа, четность перестановки, нормальность знакопеременной группы.  
 б) Является ли перестановка  $(1234)(56)(78)$  четной? Ответ обосновать.

**Вар. 94 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = x^2 + 4x + 9$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 10 & 2 & 6 & 1 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех верхнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 10 & 6 & 3 & 8 & 1 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 5\ 6\ 7)(2\ 3\ 4) \cdot (1\ 2\ 5\ 6)(3\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц, а отображение  $\varphi : B \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$  каждой матрице из  $B$  сопоставляет ее подматрицу, которая получается вычеркиванием первой строки и первого столбца. Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $G$  – промежуток  $[0; 1)$  с операцией  $\star$ , заданной формулой  $x \star y = \{x + y\}$  (здесь  $\{t\}$  обозначает дробную часть числа  $t$ ). Пусть  $H$  циклическая подгруппа в  $G$ , порожденная элементом  $\frac{1}{9}$ . Докажите, что  $G/H \cong G$ .
8. а) Порядок группы, порядок подгруппы, порядок элемента.  
 б) Существует ли в группе порядка 64 элемент порядка 3?

**Вар. 95 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 7x^2 - x + 9$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 9\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\mathbb{R}^3$  с операцией векторного произведения?  
 б) Является ли группой множество невырожденных диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Q}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех дробно-линейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ) на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 5\ 3\ 4\ 7)(2\ 6) \cdot (1\ 6)(2\ 8\ 7\ 3\ 5\ 4)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mu$  – множество комплексных корней 6 степени из 1, а гомоморфизм  $\varphi : \mu \rightarrow \mu$  задан формулой  $\varphi(z) = z^4$ . Найдите ядро гомоморфизма  $\varphi$ .
7. Пусть  $B$  – подгруппа в  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц, а  $U$  – подгруппа в  $B$ , состоящая из матриц с единицами на главной диагонали. Докажите, что  $B/U \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ .
8. а) Внешнее прямое произведение групп. Внутреннее прямое произведение групп. Их изоморфизм.  
 б) Пусть  $G$  – аддитивная группа столбцов высоты 2 с целыми элементами. Запишите  $G$  в виде прямой суммы групп.

**Вар. 96 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = x^2 - 3x + 8$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 8 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество корней 8-й степени из 1 с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с определителем 2 с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество биективных функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 4 & 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 5\ 6)(2\ 7\ 3\ 8) \cdot (1\ 3\ 2)(4\ 8\ 5\ 6)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $U$  – подгруппа в  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a, c)$ . Докажите, что  $\varphi$  является гомоморфизмом.
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1. Докажите, что  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U$ .
8. а) Прямая сумма циклических групп.  
 б) Приведите пример циклической подгруппы в  $S_3$ .



**Вар. 97 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 9x^2 - 6x + 4$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 6\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  с операцией умножения?  
 б) Является ли группой множество всех нижнетреугольных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией сложения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных дробно-линейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ,  $ad \neq bc$ ) на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 6 & 9 & 1 & 8 & 5 & 3 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 3\ 5\ 6)(2\ 7\ 4) \cdot (1\ 6\ 4\ 2\ 3)(5\ 8)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $G$  – множество матриц вида  $\begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $\alpha^2 - 3\beta^2 \neq 0$ . Пусть  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  задано формулой  $\varphi \begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha + \beta\sqrt{3}$ . Докажите, что  $\varphi$  – гомоморфизм групп.
7. Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $U_n$  подгруппу в  $GL_n(\mathbb{Q})$ , состоящую из верхнетреугольных матриц с единицами по главной диагонали. Пусть  $H$  – подгруппа в  $U_3$ , состоящая из тех матриц, у которых все элементы, кроме элементов первой строки и главной диагонали, равны нулю. Докажите, что  $U_3/H \cong U_2$ .
8. а) Смежные классы. Пересечение двух смежных классов. Теорема Лагранжа.  
 б) Выпишите левые смежные классы группы  $S_3$  по подгруппе  $\{e, (12)\}$ .

**Вар. 98 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 5x^2 + 9x + 1$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{Q}, +)$ ?  
 б) Является ли группой множество невырожденных диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{C}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество дробно-рациональных функций на расширенной вещественной оси с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 9 & 7 & 6 & 4 & 8 & 10 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 2\ 6\ 5\ 4)(3\ 8\ 7) \cdot (1\ 2\ 5)(3\ 8\ 4)(6\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть  $\mu$  – множество комплексных корней 6 степени из 1, а гомоморфизм  $\phi : \mu \rightarrow \mu$  задан формулой  $\phi(z) = z^4$ . Найдите образ гомоморфизма  $\phi$ .
7. Пусть  $B$  – подгруппа в  $GL_2(\mathbb{R})$ , состоящая из верхнетреугольных матриц, а  $U$  – подгруппа в  $B$ , состоящая из матриц с единицами на главной диагонали. Докажите, что  $B/U \cong \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ .
8. а) Действие группы на множестве. Орбита, стабилизатор точки, множество инвариантных элементов. Длина орбиты.  
 б) Циклическая подгруппа в  $S_5$ , порожденная перестановкой  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ , действует на множестве  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Найдите орбиту элемента 1.

**Вар. 99 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 2x^2 + 9x + 4$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{Z}$  с определителем 0 с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество непостоянных дробно-линейных функций (вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ,  $ad \neq bc$ ) на расширенной вещественной оси с операцией умножения?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 2 & 6 & 3 & 1 & 10 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 5)(2\ 4\ 8)(3\ 6\ 7) \cdot (1\ 8\ 4\ 5\ 2)(3\ 6\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм  $\varphi : \text{GL}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R})$  задан формулой  $\varphi(A) = \frac{A}{\sqrt[3]{\det A}}$ . Докажите, что  $\text{Ker } \varphi = \{\lambda E \mid \lambda \neq 0\}$
7. Пусть  $U$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех чисел по модулю равных 1, а  $\mu$  — подгруппа в  $U$ , состоящая из корней 10-ой степени из 1. Докажите, что  $U/\mu \cong U$ .
8. а) Лемма Бернсайда.  
 б) Приведите пример действия группы на множестве, у которого ровно 1 орбита.

**Вар. 100 (8123034)**

1. Функция  $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$  задана формулой  $f(x) = 7x^2 + 3x + 8$ . Найдите наименьшие  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых функция  $f$  биективна?
2. Является ли функция  $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$  заданная таблицей  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 8 & 10 & 5 & 3 & 4 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$  инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой  $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ?  
 б) Является ли группой множество всех диагональных матриц размера  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$  с операцией умножения?  
 в) Является ли группой множество всех линейных функций (многочленов степени  $\leq 1$ ) с операцией композиции?
4. Записать перестановку  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 10 & 5 & 6 & 4 & 8 & 1 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$  в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок  $(1\ 8\ 3\ 7\ 6)(2\ 4) \cdot (1\ 3\ 5)(2\ 8\ 6\ 7)$  (ответ в циклической форме).
6. Пусть гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$  задан формулой  $\varphi(x) = e^{ix}$ . Найдите его ядро.
7. Пусть  $\mu$  подгруппа в  $\mathbb{C}^*$ , состоящая из всех корней степени 5 из 1. Докажите, что  $\mathbb{C}^*/\mu \cong \mathbb{C}^*$ .
8. а) Нормальная подгруппа. Факторгруппа.  
 б) Верно ли, что порядок факторгруппы делит порядок группы?