Теория принятия решений – комплексная научная дисциплина, направленная на разработку методов и средств, помогающих одному или нескольким лицам сделать обоснованный выбор наилучшего из имеющихся вариантов.

Классификация задач ТПР

По количеству критериев оценки эффективности:

- Однокритериальные
- Многокритериальные

По знанию иерархии критериев:

- Структурируемые
- Слабоструктурируемые

По характеру множества альтернатив:

- Континуальные
- Счетные

По характеру влияющих факторов:

- Детерминированные
- Стохастические

По знанию ЧХ факторов:

- С определенными факторами
- С неопределенными факторами

По единственности решения:

- Оптимизационные (точные)
- Рационализационные (неточные)

По порядковому приоритету оценки альтернатив:

- Переборные
- С эвристическим ограничением множества альтернатив

Методы решения задач ТПР

- Аналитические
- Экспертные оценки
- Монте - Карло (стат. моделирование)
- Натурное моделирование (деловые игры)

ТПР:

1. Матричные игры.
2. Бесконечные антагонистические игры.
3. Игры с природой.
4. Оптимизационные задачи ЛП, транспортная задача.
5. ТПР в биржевой торговле.
6. ТПР в задачах с нечеткой логикой и с нечеткими числами.
7. ТПР в астрономии.

Метод получения оценки:

Практические работы	Посещение занятий	Теоретический опрос	Итоговые баллы
75%	8%	17%	100%

Если итоговый балл >=85%, оценка 5.

Если итоговый балл >=75%, оценка 4.

Если итоговый балл >=55%, оценка 3.

Исторические предпосылки ТПР

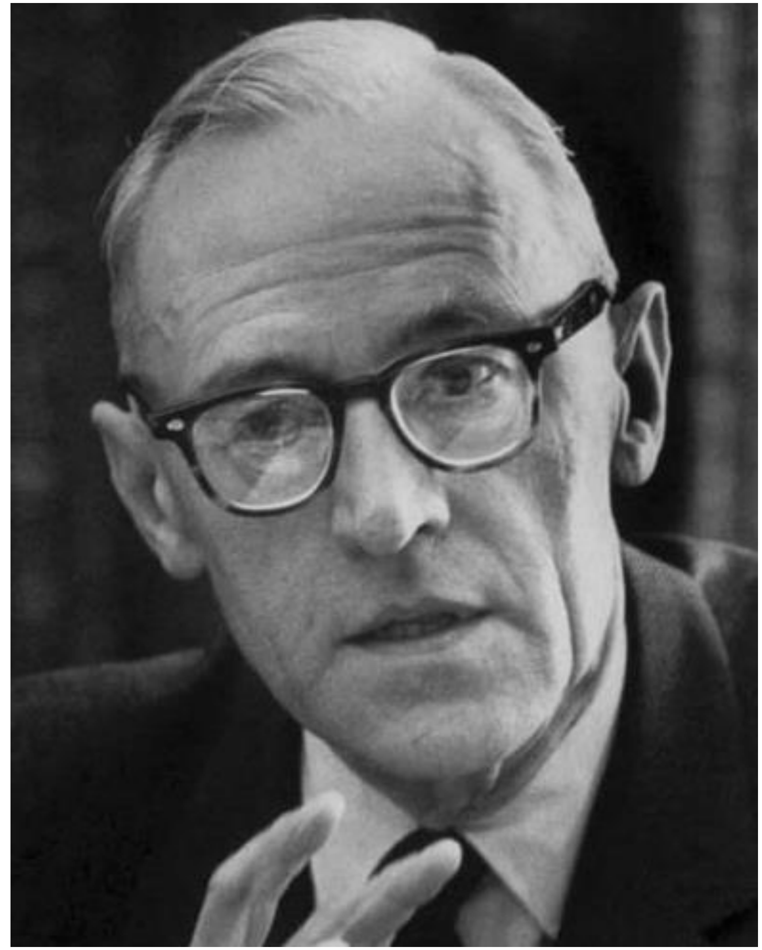
1950 г Э. **Леманн** - американский статистик, редактор журнал "The Annals of Mathematic Statistics".

П. **Ферма** (1601-1665)

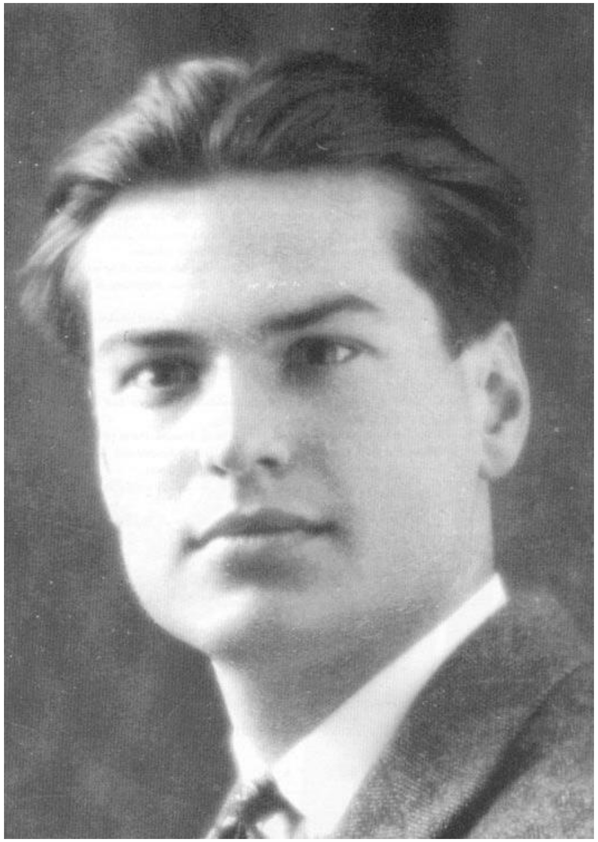
Б. Паскаль (1623-1662) и **П. Ферма** (1601-1665) **-** французские математики, разработавшие теорию вероятности и математической статистики.

Шевалье де Мере (1607-1648) – придворный французского двора.

Д. фон Нейман (1903 – 1957) и **О. Моргенштерн** (1902–1977) - американские учёные разработали математическую теорию игр.

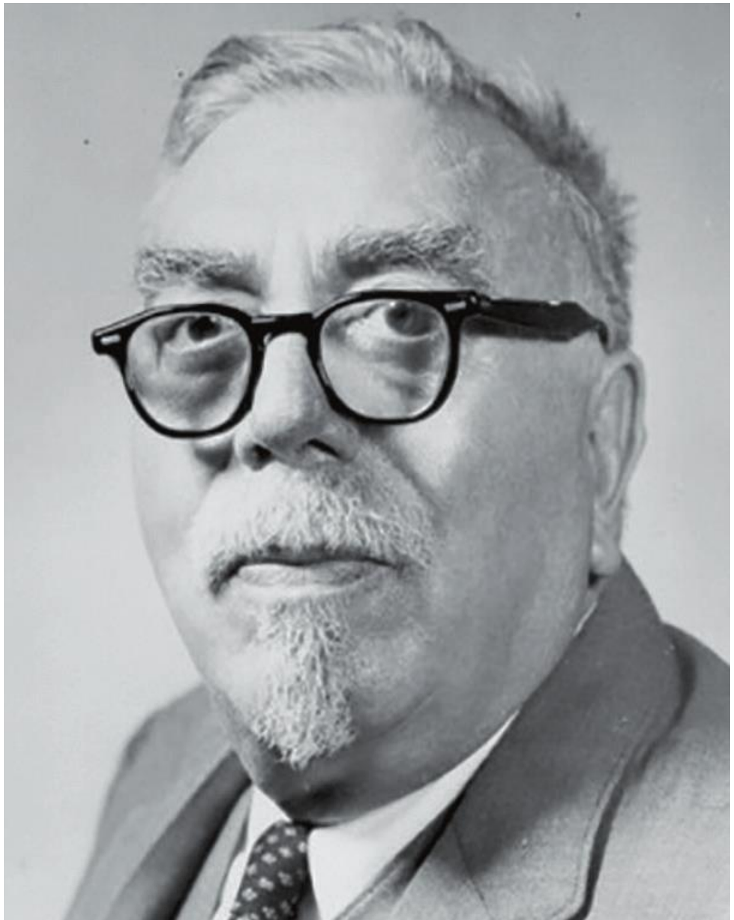


Английский учёный **Ф. Рамсей** (1903-1930) и итальянский математик **Б. де Финетти** (1906-1985) разработали теоретико-вероятностный аспект.



В. Штегмюллер (1921-1991), австро-немецкий философ, в статье «Рациональная логика решений» писал, что теория решений распадается на три области: решения, принимаемые с уверенностью, рискованные решения и безосновательные решения.

Американский математик Н. **Винер** (1894-1964) выпустил книгу «Cybernetics: Or Control and Communication in the Animal and the Machine» в 1948 году.



Настольная игра возрастом 4000 лет

Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций.

Игра – модель конфликтной ситуации.

Градация игр по неопределенности исходов:

- комбинаторные;
- азартные;
- стратегические.

Игра с нулевой суммой, если выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Матричная игра – это игра с нулевой суммой, в которой задается выигрыш игрока 1 в виде матрицы.

Игра называется **конечной**, если у каждого игрока существует конечное число возможных стратегий.

Решить задачу по теории игр – это найти оптимальные стратегии игроков (чистые или смешанные) и выигрыш (результат игры).

Антагонистические игры

Det: Пара $(x^0, y^0) \in X \times Y$ называется **седловой точкой** функции ***F***, если

$\forall\, x \in X, y \in Y \quad F(x, y^o) \le F(x^o, y^o) \le \quad F(x^0, y)$ (1) или эквивалентно

$$\max_{x \in X} F(x, y^o) = F(x^o, y^o) = \min_{y \in Y} F(x^0, y)$$

Антагонистическая игра задается набором $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$

Det: Антагонистическая игра **имеет решение**, если $F(x, y)$ имеет седловую точку.

Если (x^0, y^0) - седловая точка, то $(x^o, y^o, v = F(x^0, y^0))$ - **решение игры,**

v - **значение игры**.

Лемма Если (x^0, y^0) (x^*, y^*) - 2 седловые точки, то $F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$

Док – во: Если $F(x^*, y^*)$ - седловая точка, то $F(x, y^*) \le F(x^*, y^*) \le F(x^*, y)$ (2)

$$F(x^*, y^*) \overset{(2)}{\le} F(x^*, y^0) \overset{(1)}{\le} F(x^0, y^0) \overset{(1)}{\le} F(x^0, y^*) \overset{(2)}{\le} F(x^*, y^*)$$

$Det:$ Антагонистическая игра называется **матричной**, если множества стратегий игроков конечны $X = \{1, \dots, m\}$ $Y = \{1, \dots, n\}$

i – стратегия первого игрока, ***j*** - стратегия второго игрока. $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Примеры

$Det:$ **Наилучший гарантированный результат** для 1 игрока $\underline{v} = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y)$

Стратегия x^0 называется **максиминной**, если $\underline{v} = \inf_{y \in Y} F(x^0, y)$

Наилучший гарантированный результат для 2 игрока $\overline{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y)$

Стратегия y^0 называется **минимаксной**, если $\overline{v} = \sup_{x \in X} F(x, y^0)$

Лемма В любой антагонистической игре Г справедливо $\underline{v} \le \overline{v}$

Док – во: Возьмем произвольные стратегии игроков x, y.

$$\inf_{y \in Y} F(x, y) \le F(x, y) \le \sup_{x \in X} F(x, y) \qquad \inf_{y \in Y} F(x, y) \le \sup_{x \in X} F(x, y)$$

$$\forall y \ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) \le \sup_{x \in X} F(x, y) \quad \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) \le \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) \qquad \underline{v} \le \overline{v}$$

T: 1) Для того, чтобы функция $F(x,y)$ имела седловую точку, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство:

$$\max_{x\in X} \inf_{y\in Y} F(x,y) = \min_{y\in Y} \sup_{x\in X} F(x,y)$$

2) Пусть выполнено неравенство . Пара (x^0, y^0) тогда и только тогда является седловой точкой, когда x^0 - максиминная, а y^0 минимаксная стратегии.

Док – во: **Необходимость:** пусть (x^0, y^0) - седловая точка, докажем

$$\overline{v} \le \sup_{x\in X} F(x,y^0) = F(x^0,y^0) = v = \inf_{y\in Y} F(x^0,y) \le \underline{v} \qquad \overline{v} \le \underline{v} \quad \underline{v} \le \overline{v}$$ по лемме.

Достаточность: Пусть - выполнено. Возьмем x^0, y^0 -максиминную и минимаксную стратегии. Докажем, что они образуют седловую точку.

$$F(x^0,y^0) \ge \inf_{y\in Y} F(x^0,y) = \underline{v} = \overline{v} = \sup_{x\in X} F(x,y^0) \ge F(x^0,y^0)$$

Det: Антагонистическая игра $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$ называется **непрерывной**, если X, Y – выпуклые компакты евклидовых пространств, а функция $F(x,y)$ - непрерывна на $X \times Y$.

Т: $X \subset E^m, Y \subset E^n$ - выпуклые компакты евклидовых пространств, а функция (*)

$F(x,y)$ непрерывна на $X \times Y$. $F(x,y)$ - вогнута по x для любых y и выпукла по y для любых x.

Тогда $F(x,y)$ имеет на $X \times Y$ **седловую точку**.

Док – во: $F(x,y)$ выпукла по y. Тогда $\forall x \in X$ $F(x,y)$ достигает минимума в точке $y(x)$.

$W(x) = \min\limits_{0 \le y \le 1} F(x,y) = F(x, y(x))$ Возьмем x^* - максимизирующую $W(x)$ на X.

Докажем, что $(x^*, y(x^*))$ - седловая точка. $\forall\, t \in (0,1)$ положим $\hat{y} = y((1-t)x^* + tx)$

В силу вогнутости по x $F(x,y)$

$$W(x^*) \ge W\big((1-t)x^* + tx\big) = F\big((1-t)x^* + tx\big) \ge (1-t)F(x^*,\hat{y}) + tF(x,\hat{y}) \ge (1-t)W(x^*) + tF(x,\hat{y})$$

$$W(x^*)t \ge tF(x,\hat{y}) \qquad F(x, y(x^*)) \le W(x^*) = F(x^*, y(x^*)) \le F(x^*, y)$$

Принцип доминирования

t: Если в строке матрицы A элементы строки A_i не меньше соответствующих элементов строки $A_к$, а по крайней мере один строго больше, то строка A_i называется **доминиру…** а строка $A_к$ **доминируемой**.

При решении игры можно уменьшить размеры матрицы путем удаления из неё доминирующих столбцов и доминируемых строк.

Смешанные расширения антагонистических игр

Если игра не имеет седловой точки. То применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. Можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя (выбирая) чистые стратегии, то есть используя **смешанные стратегии**.

При решении игры:

- применяем принцип доминирования;
- ищем седловую точку;
- если седловой точки нет ищем решение в смешанных стратегиях.

Det: **Смешанной стратегией** первого игрока в игре Г называется вероятностное распределение φ X

X - множество чистых стратегий 1 игрока. Y - множество чистых стратегий 2 игрока.

$\{\varphi\}$ - множество смешанных стратегий 1 игрока. $\{\psi\}$ - множество смешанных стратегий 2 иг

При заданных стратегиях φ ψ **математическое ожидание** выигрыша 1 игрока определяется формулой:

$$F(\varphi,\psi) = \iint_{X\,Y} F(x,y)\, d\varphi(x) d\psi(y)$$

Det: $\overline{\Gamma} = \langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi,\psi) \rangle$ называется **смешанным расширением** игры Г.

Det: Решение $(\varphi^o, \psi^o, v = F(\varphi^0, \psi^0))$ игры $\overline{\Gamma}$ называется **решением** исходной игры Г **в смешанных стратегиях**. При этом, φ^0, ψ^0 называют **оптимальными смешанными стра** игроков, а v - значением игры Г.

Множество **смешанных стратегий** 1 игрока:

$$P = \{p = (p_1, \dots p_m) | \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$$

Множество **смешанных стратегий** 2 игрока:

$$Q = \{q = (q_1, \dots q_n) | \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$$

Математическое ожидание выигрыша первого игрока:

$$A(p, q) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$$

$\overline{\Gamma} = \langle P, Q, A(p, q) \rangle$ - **смешанное расширение** матричной игры Г.

Основная теорема матричных игр

Теорема **фон Неймана**: всякая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.

Док — во: Докажем, что функция $A(p,q)$ имеет седловую точку на $P\times Q$.

$A(p,q)$ - билинейна и непрерывна на $P\times Q$, вогнута по p и выпукла по q.

По Т (*) функция $A(p,q)$ имеет седловую точку на $P\times Q$.

Решение в смешанных стратегиях непрерывной игры

Рассмотрим игру на прямоугольнике $X\times Y=[a,b]\times[c,d]$.

При заданных стратегиях $\varphi\ \psi$ - функциях распределения на отрезках $X\ Y$,

ожидаемый выигрыш 1 игрока: $$F(\varphi,\psi)=\iint_{ac}^{bd} F(x,y)\,d\varphi(x)d\psi(y)$$

По теореме Фубини он равен повторному $$F(\varphi,\psi)=\int_a^b F(x,\psi)d\varphi(x)=\int_c^d F(\varphi,y)d\psi(y)$$

где $$F(x,\psi)=\int_c^d F(x,y)d\psi(y) \qquad F(\varphi,y)=\int_a^b F(x,y)d\varphi(x)$$

Дилемма заключенного

Платежная матрица

	Сотрудничать	Предать
Сотрудничать	2 - 2	0 - 3
Предать	3 - 0	1 - 1

Парадокс Бернулли

Д. Бернулли (1695 - 1726).

X	1	2	4	…
p	1/2	1/4	1/8	…

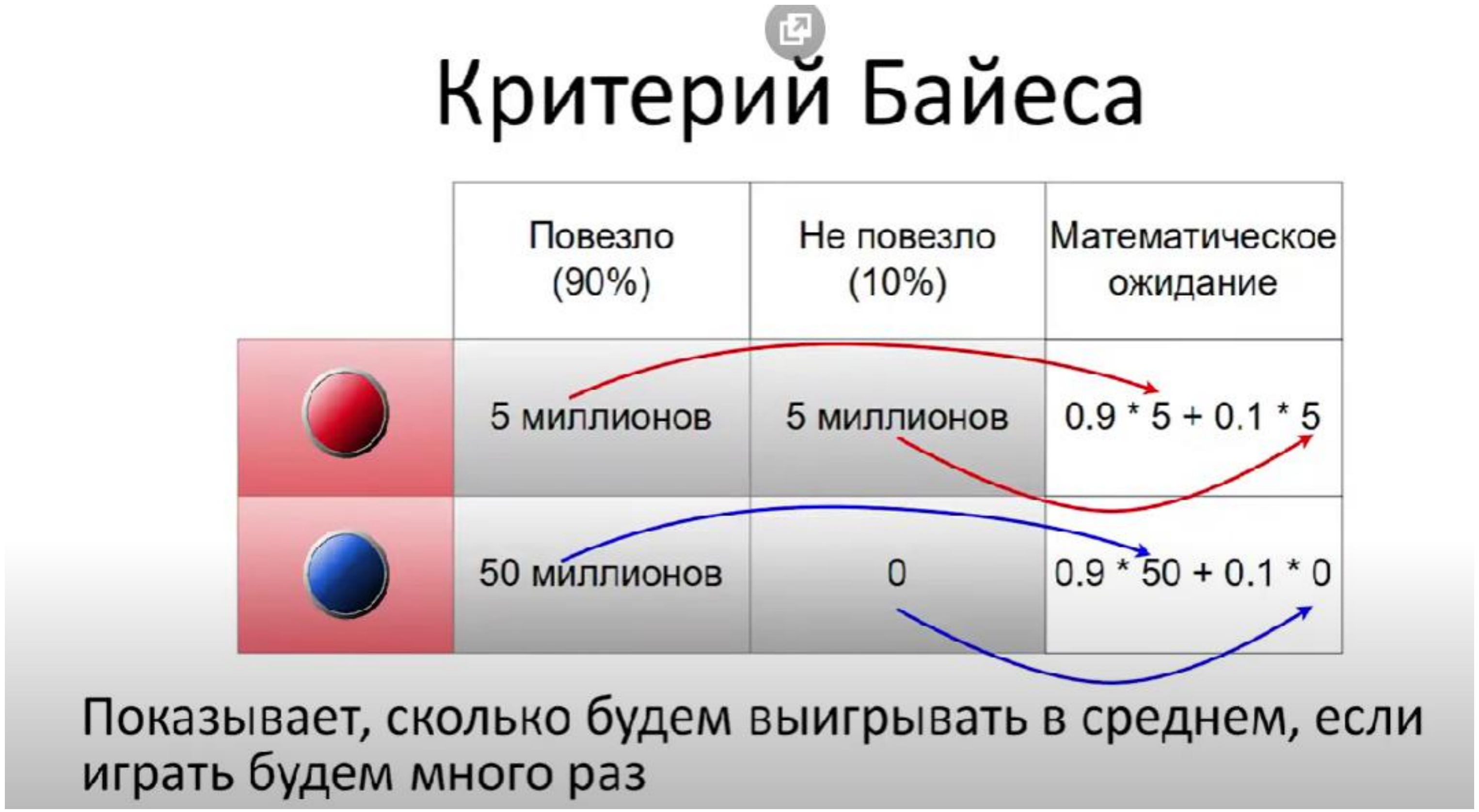
МО=$\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$=1/2+1/2+1/2+…=∞

Один игрок. Игры с природой.

	Повезло (90%)	Не повезло (10%)
красная кнопка	5 миллионов	5 миллионов
синяя кнопка	50 миллионов	0

Критерий Байеса

Rev. T Bayes
(1702--1761)



Критерий Байеса

	Повезло (90%)	Не повезло (10%)	Математическое ожидание
(красная кнопка)	5 миллионов	5 миллионов	0.9 * 5 + 0.1 * 5
(синяя кнопка)	50 миллионов	0	0.9 * 50 + 0.1 * 0

Показывает, сколько будем выигрывать в среднем, если играть будем много раз

Лучше нажать на синюю кнопку.

Критерий Лапласа

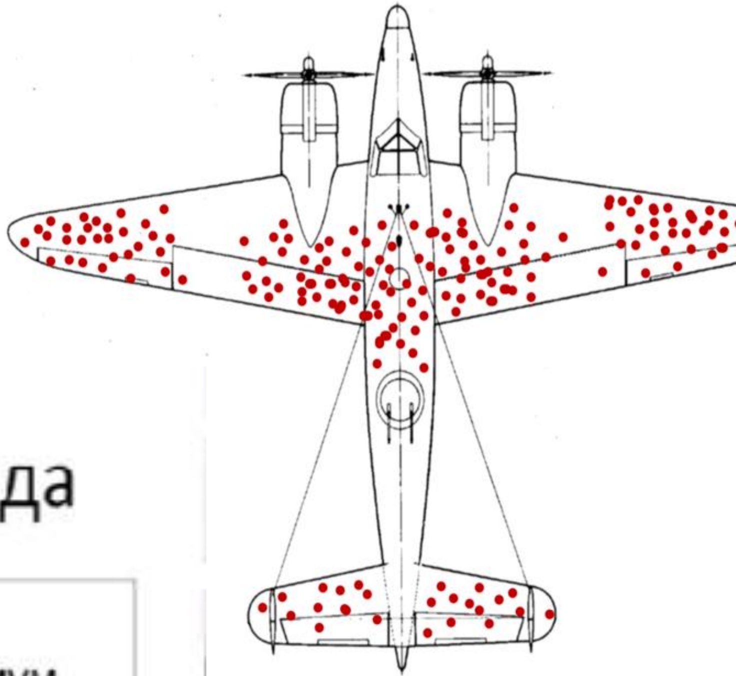
Пьер-Симон де Лаплас (1749-1827)

	Повезло (50%)	Не повезло (50%)	Математическое ожидание
	5 миллионов	5 миллионов	0.5 * 5 + 0.5 * 5
	50 миллионов	0	0.5 * 50 + 0.5 * 0

Лучше нажать на синюю кнопку.

Критерий Вальда

А. Вальд (1902-1950)



Оптимизация по критерию Вальда

	Повезло	Не повезло	Минимум
	5 миллионов	5 миллионов	5 миллионов
	50 миллионов	0	0

Лучше нажать на красную кнопку.

Критерий крайнего оптимизма

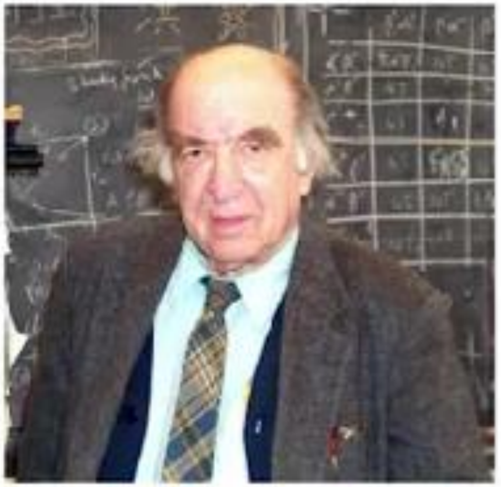
Оптимизация по максимаксу

	Повезло	Не повезло	Максимум
	5 миллионов	5 миллионов	5 миллионов
	50 миллионов	0	50 миллионов

Лучше нажать на синюю кнопку.

Критерий Гурвица

Критерий Гурвица (Гурвича)



- $\gamma \cdot max + (1 - \gamma) \cdot min$
- Учитываем лучший и худший из исходов
- Более взвешенны критерий, с учето субъективного фа

Оптимизация по критерию Гурвица

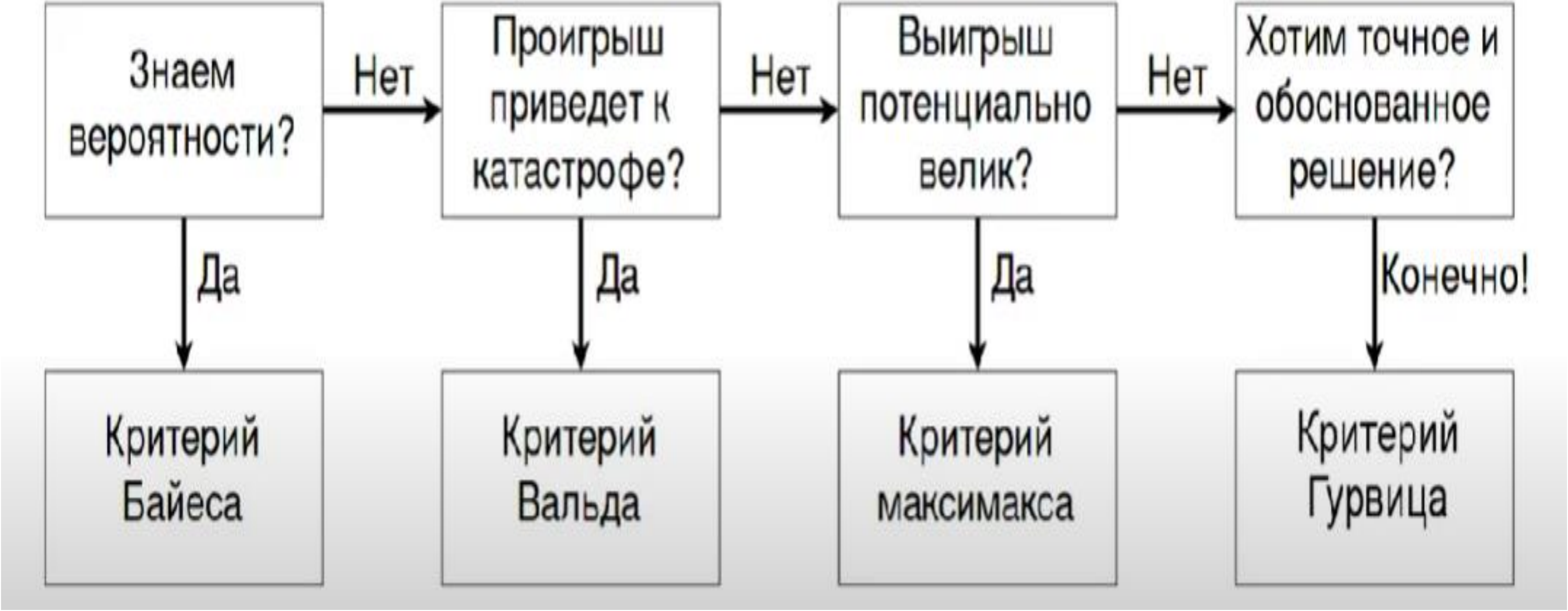
	Повезло	Не повезло	Коэффициент Гурвица
красная кнопка	5 миллионов	5 миллионов	0.2 * 5 + 0.8 * 5
синяя кнопка	50 миллионов	0	0.2 * 50 + 0.8 * 0

$\gamma = 0.2$

$$Z = \max_j \left(\max_i a_{ji}\gamma + (1-\gamma)\min_i a_{ji} \right)$$

Лучше нажать на синюю кнопку.

Схема выбора критериев



Закон распределения дискретной случайной величины.

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

Формула **Бернулли**:$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Биномиальным называют распределение, определяемое формулой Бернулли.

Распределение **Пуассона** $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \lambda = np.$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности.

Дисперсией (отклонением) случайной величины называют разность между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом её математического ожидания.

$D(x) = M(X^2) - [M(X)]^2$

Средним квадратическим отклонением называется квадратный корень из дисперсии. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

События называют **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других в одном и том же испытании.

Формула полной вероятности

Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$ равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А.

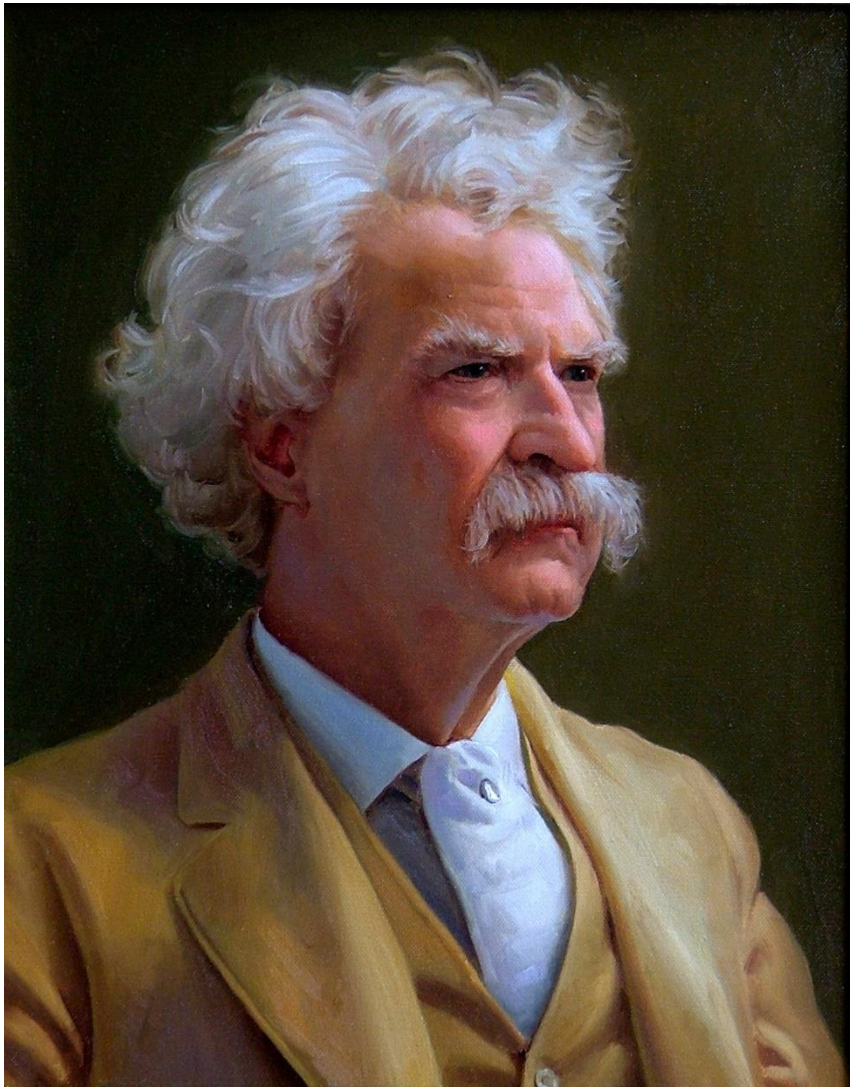
$$P(A) = P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + \cdots + P(B_n)P_{Bn}(A)$$

Формула **Байеса**

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{Bi}(A)}{P(A)}$$

Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

$$\mathrm{P}(|\frac{m}{n} - p| \leq \varepsilon) \cong 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})$$



1835-1910 г.

От спекуляций на бирже следует воздерживаться в двух случаях:

1. если у вас нет средств,
2. и если они у вас есть.

Марк Твен

Впервые Мосбиржа не работает с 25 февраля 2022 г .

О приостановке торгов ценными бумагами

В соответствии с Правилами листинга ПАО Московская Биржа Председателем Правления "05" марта 2022 года приняты следующие решения:

1. Приостановить с "09" марта 2022 года торги ценными бумагами, включенными в раздел "Первый уровень" Списка ценных бумаг, допущенных к торгам в ПАО Московская Биржа, в связи с наступлением иных существенных событий, которые могут повлиять на проведение торгов ценными бумагами на Бирже (а именно, принятием Советом директоров решения о приостановке определения стоимости чистых активов фонда, выпуска, выкупа, обмена акций и выплат денежных поступлений от выкупа начиная с 04.03.2022), в отношении следующих ценных бумаг:….

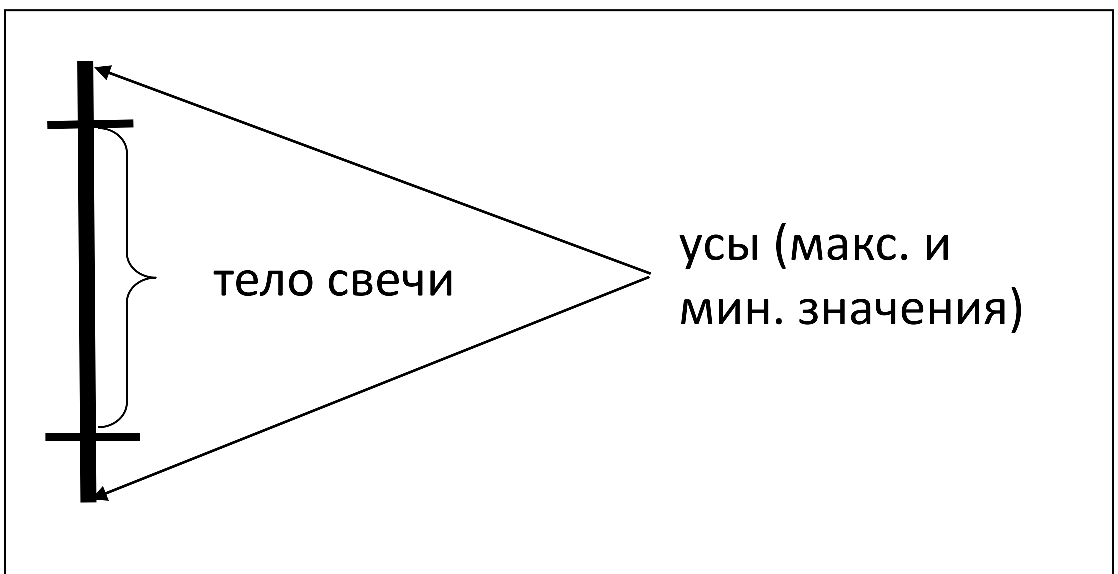
Нью-Йоркская фондовая биржа создана в 1792 г.

Цена спроса (ask price), **цена предложения** (bid price).

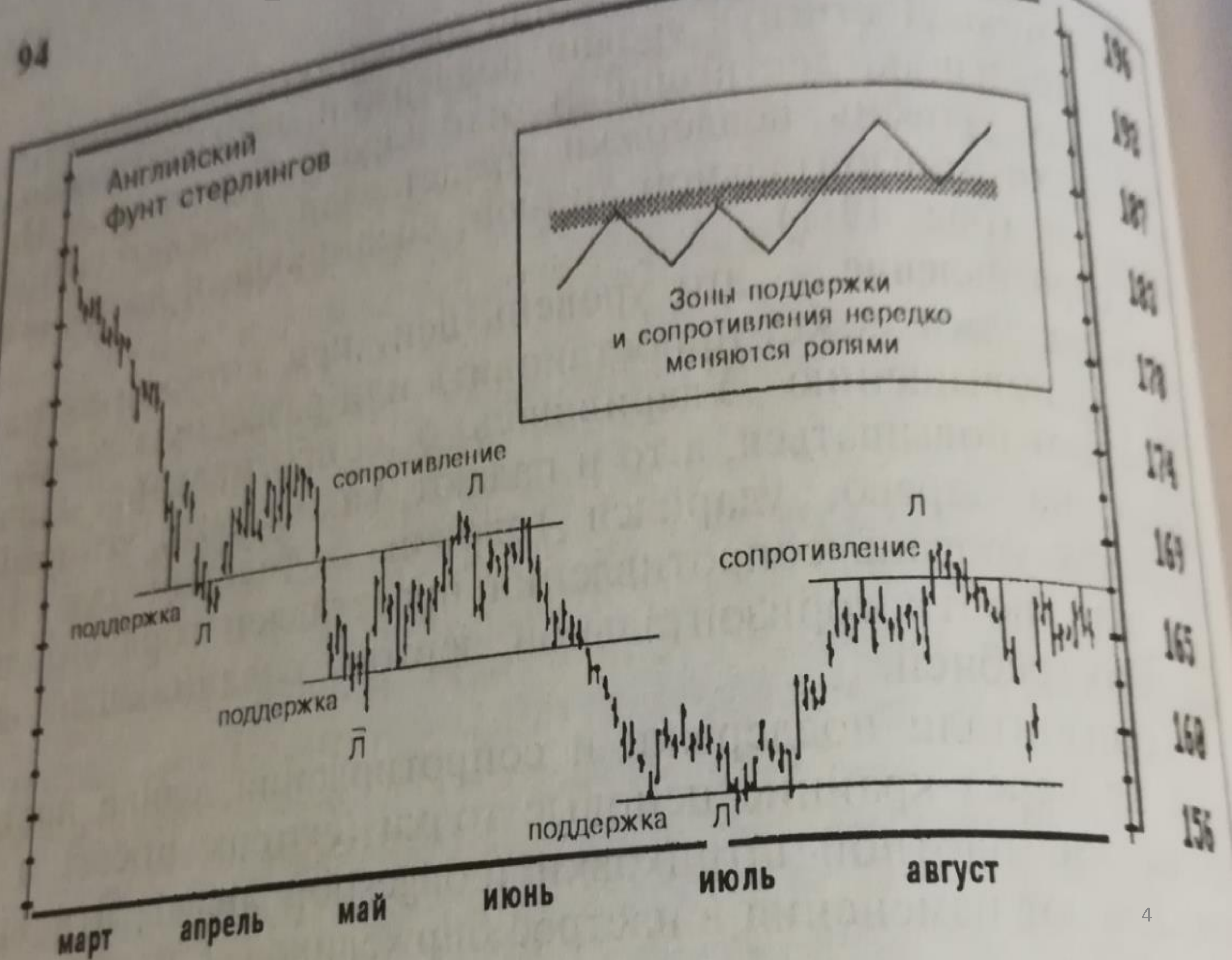
Цена – сиюминутная точка равновесия между игроками на повышение и понижение.

Тенденция – это период постоянного роста или снижения цен.

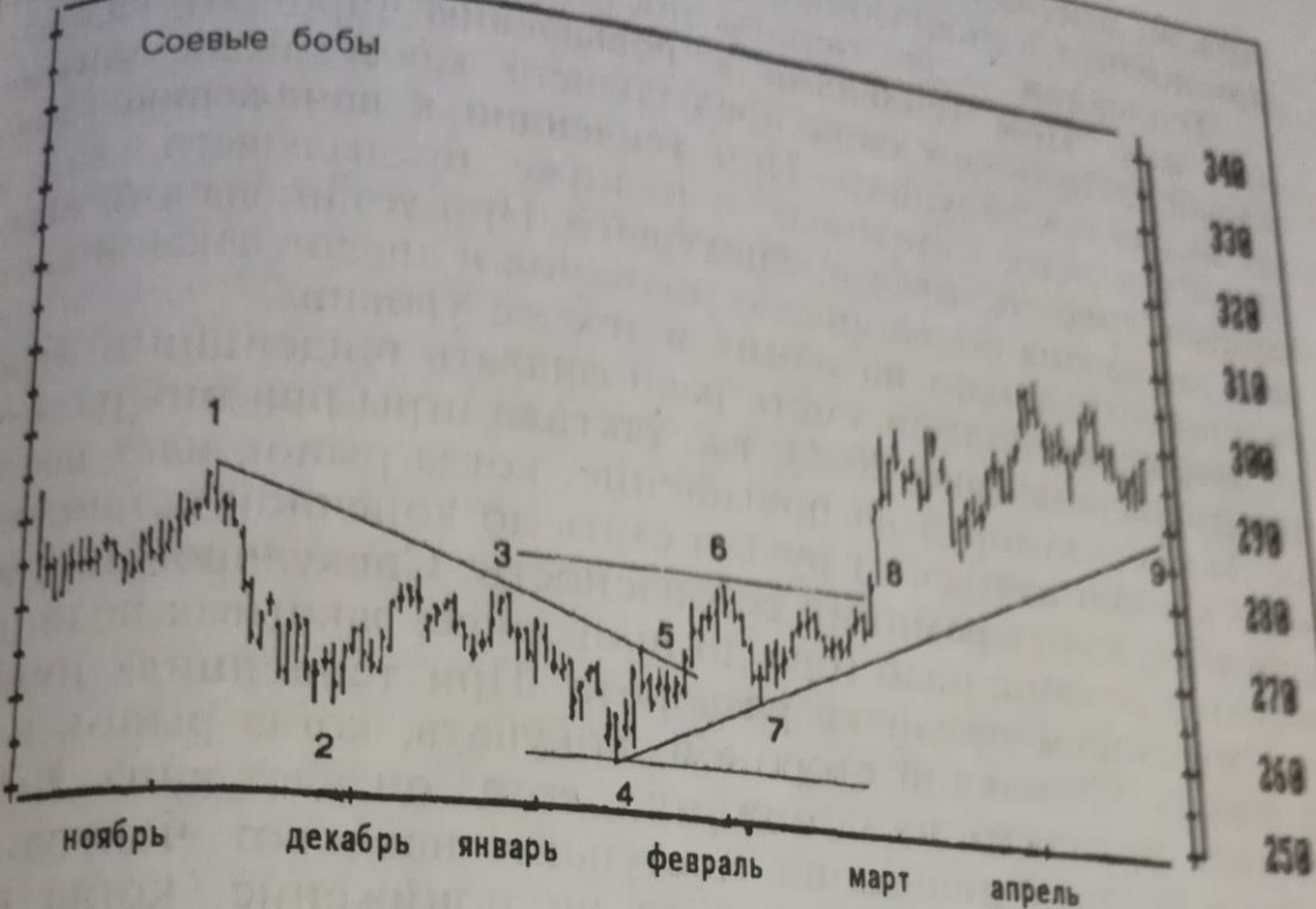
При установлении **игрового диапазона** большинство подъёмов и спадов заканчивается на одном уровне.



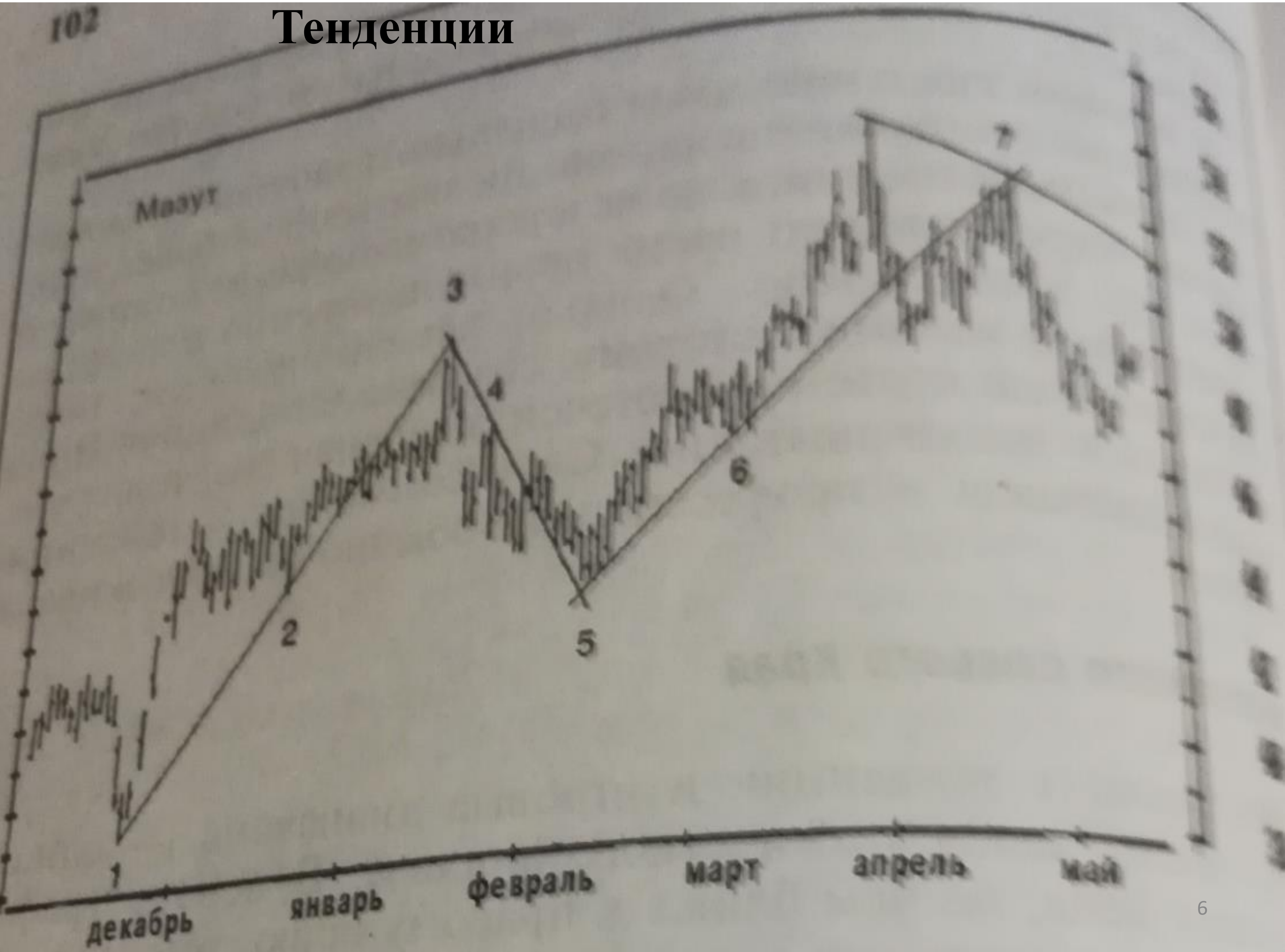
Поддержка и сопротивление



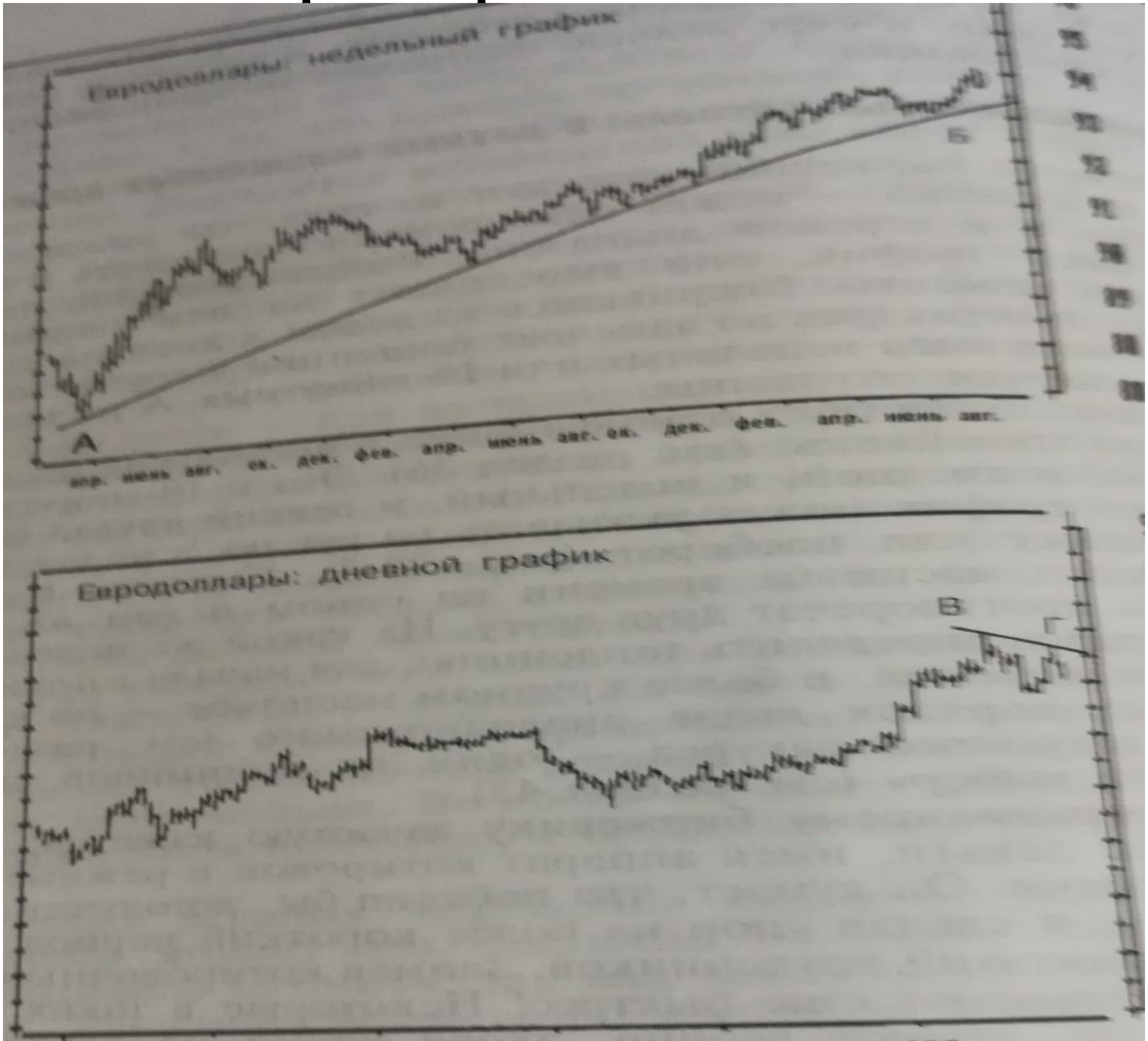
Тенденция и игровой диапазон



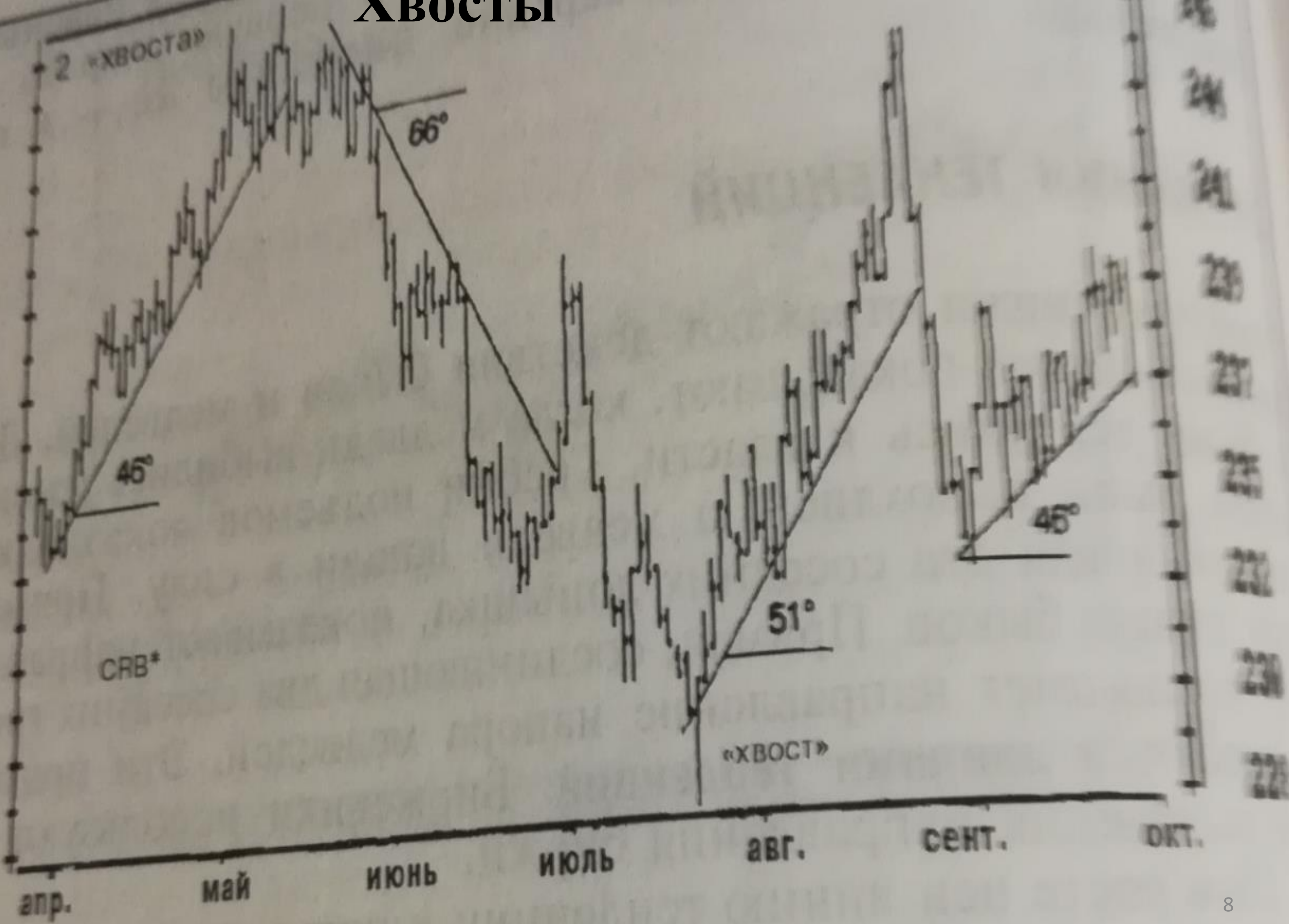
Тенденции



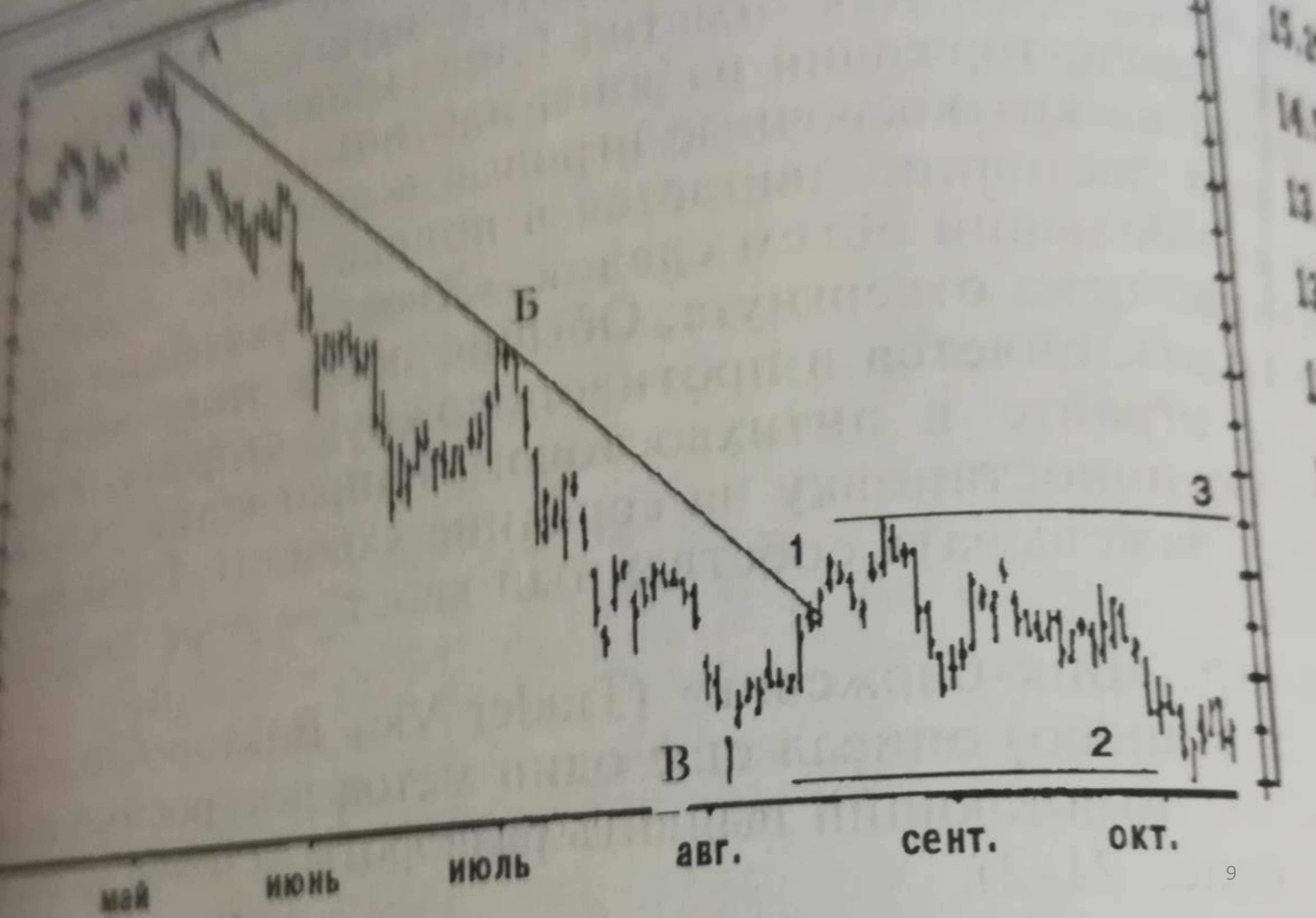
Противоречивые сигналы



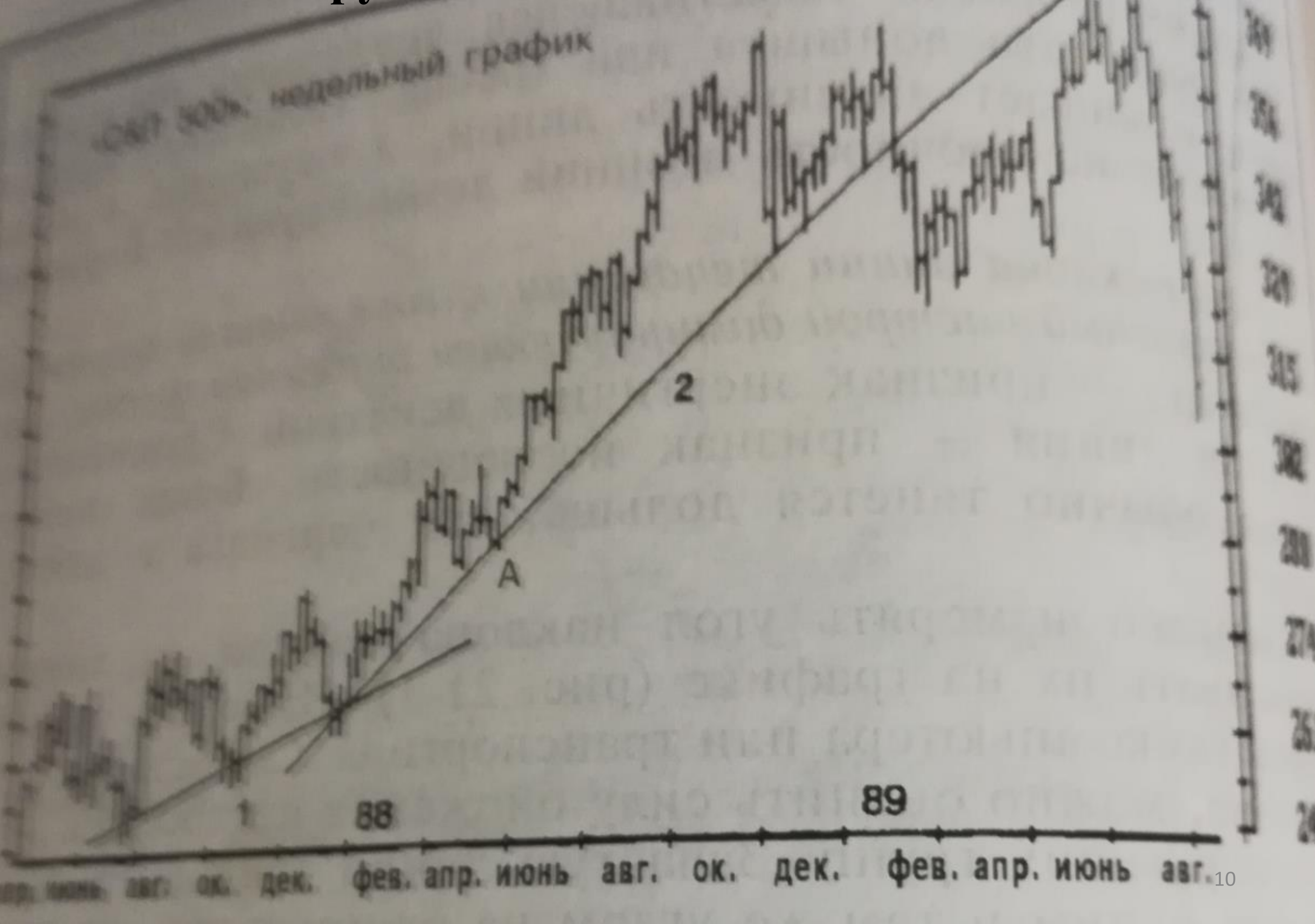
Хвосты



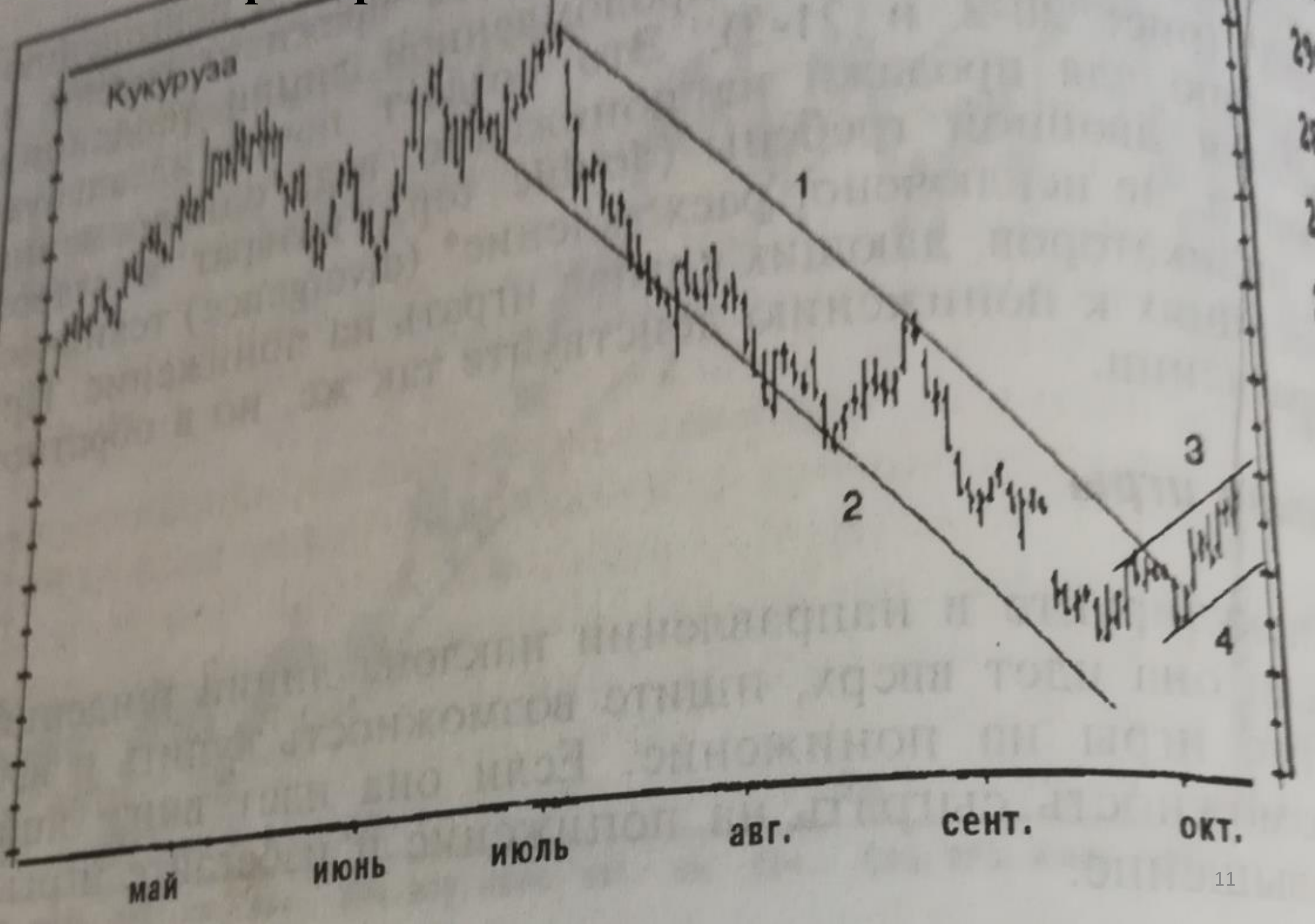
Выявление разворота тенденций



Увеличение крутизны тенденции



Коридоры тенденций



Метод обработки БД для составления программы, посылающего сигналы на покупку или продажу

- загрузку графика цены, полученного с источника;
- вычисление индикаторов ТА;
- выгрузку и визуализацию графиков цены и индикаторов ТА;
- расчет, выгрузку и визуализацию дополнительных данных, таких, как линий тренда, скользящих средних и др.;
- оценку эффективности индикаторов ТА.

Трейдеры (Traders) – биржевые спекулянты (игроки), рассчитывающие наварить на постоянной купле-продаже ФИ.

Технический анализ – совокупность методов прогнозирования динамики цены актива на основе прошлых цен. При прогнозировании широко употребляются индикаторы ТА.

Волатильность ФИ (Volatility) – это разница, вычисляемая на заданном временном промежутке, между максимальной и минимальной ценами ФИ.

Длинная позиция (Long position) – покупка акций с целью их последующей реализации после роста цены (бычья тактика). *Короткая позиция* (Short position) – продажа акций, взятых взаймы **у брокера**, в ожидании снижения их цены. После снижения цены трейдер покупает акции и возвращает их брокеру (медвежья тактика).

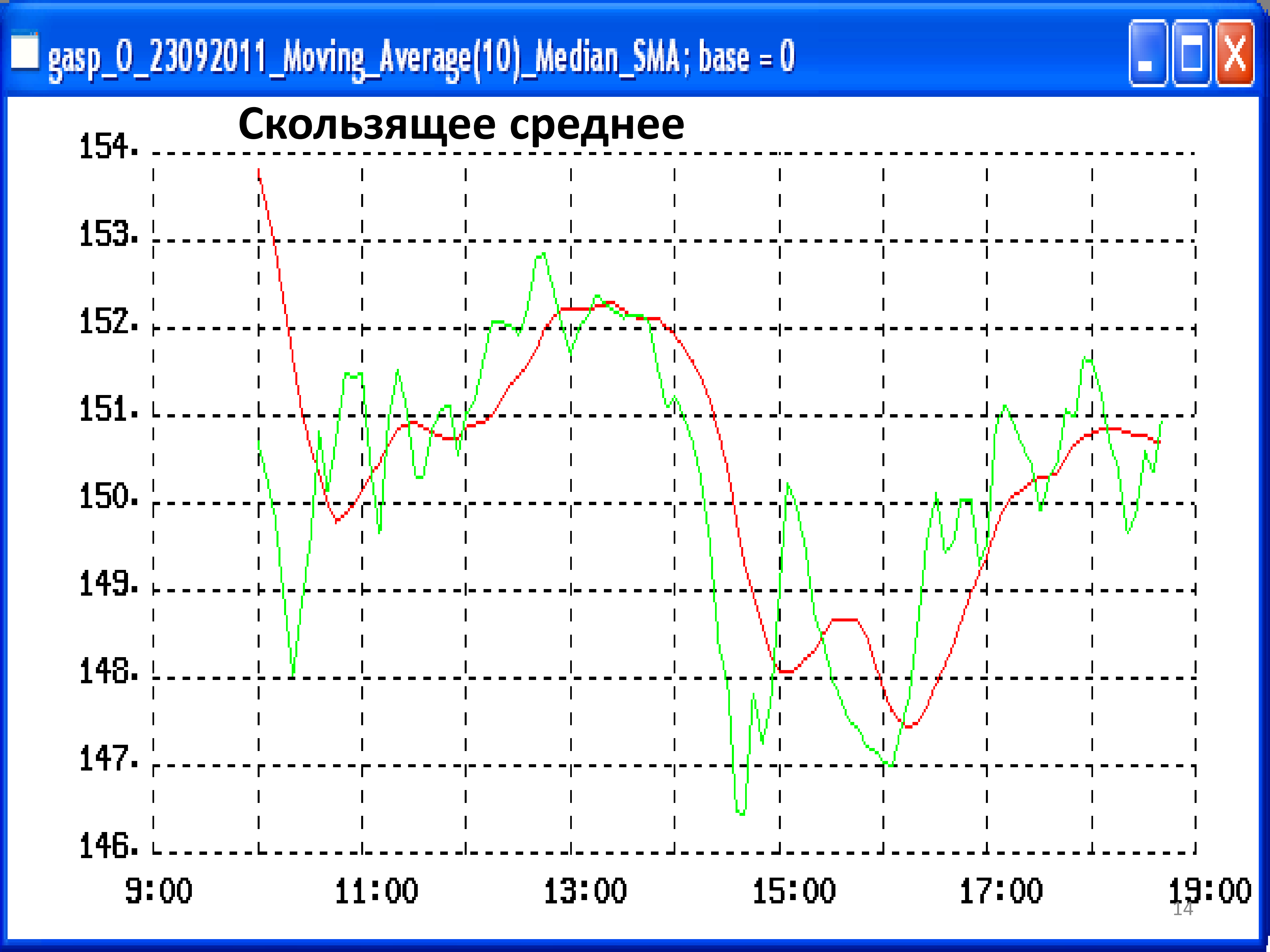
Коррекция (*откат* рынка – это движение цены в противоположную сторону по отношению к действующему в данный момент тренду.

Кредитное плечо – это доля средств трейдера в общей сумме сделки.

Пипс (Pips) – минимальная единица изменения цены актива. Например, если акция котируется с точностью до третьего десятичного знака, то 1 пипс = 0.001 руб.

Спрэд (Spread) – разница между ценами покупки и продажи актива.

Индикатор ТА – это показатель, вычисляемый в каждой точке заданного временного диапазона, количественно характеризующий динамику биржевого актива.


gasp_0_23092011_Moving_Average(10)_Median_SMA; base = 0
Скользящее среднее
154.
153.
152.
151.
150.
149.
148.
147.
146.
9:00
11:00
13:00
15:00
17:00
19:00

Фьючерсные контракты относятся к так называемым производным финансовым инструментам (derivatives).

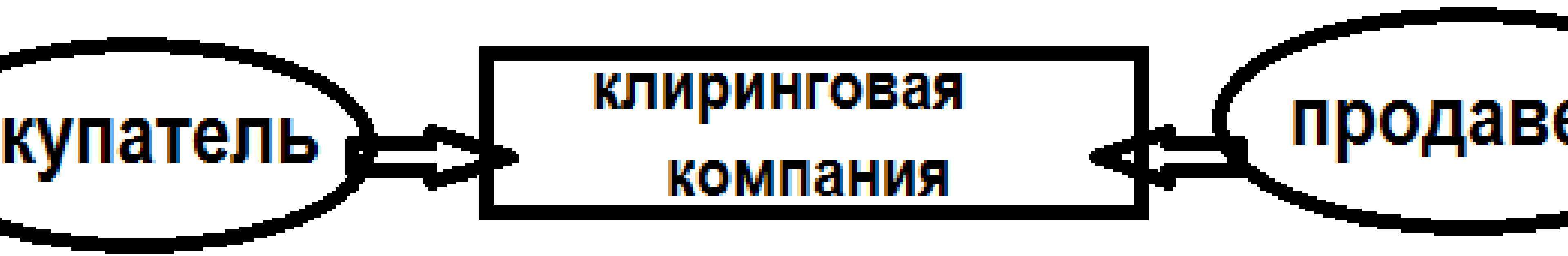
Финансовый инструмент называется **производным**, если его стоимость зависит от цены некоторого базисного актива (товара, валюты, акции, облигации), процентной ставки, фондового индекса в общем случае называемого основой (underlying, underlying variable).

По договоренности сторон вместо поставки базисного актива исполнение срочного контракта может быть сведено к простому перечислению между сторонами некоторой суммы (**расчетные контракты**).

Фьючерсный контракт торгуется на бирже по установленным биржей **правилам**.

- условия контрактов стандартизованы по количеству и качеству подлежащего поставке базисного актива, срокам исполнения и месту поставки, а цена исполнения определяется в процессе публичных биржевых торгов.

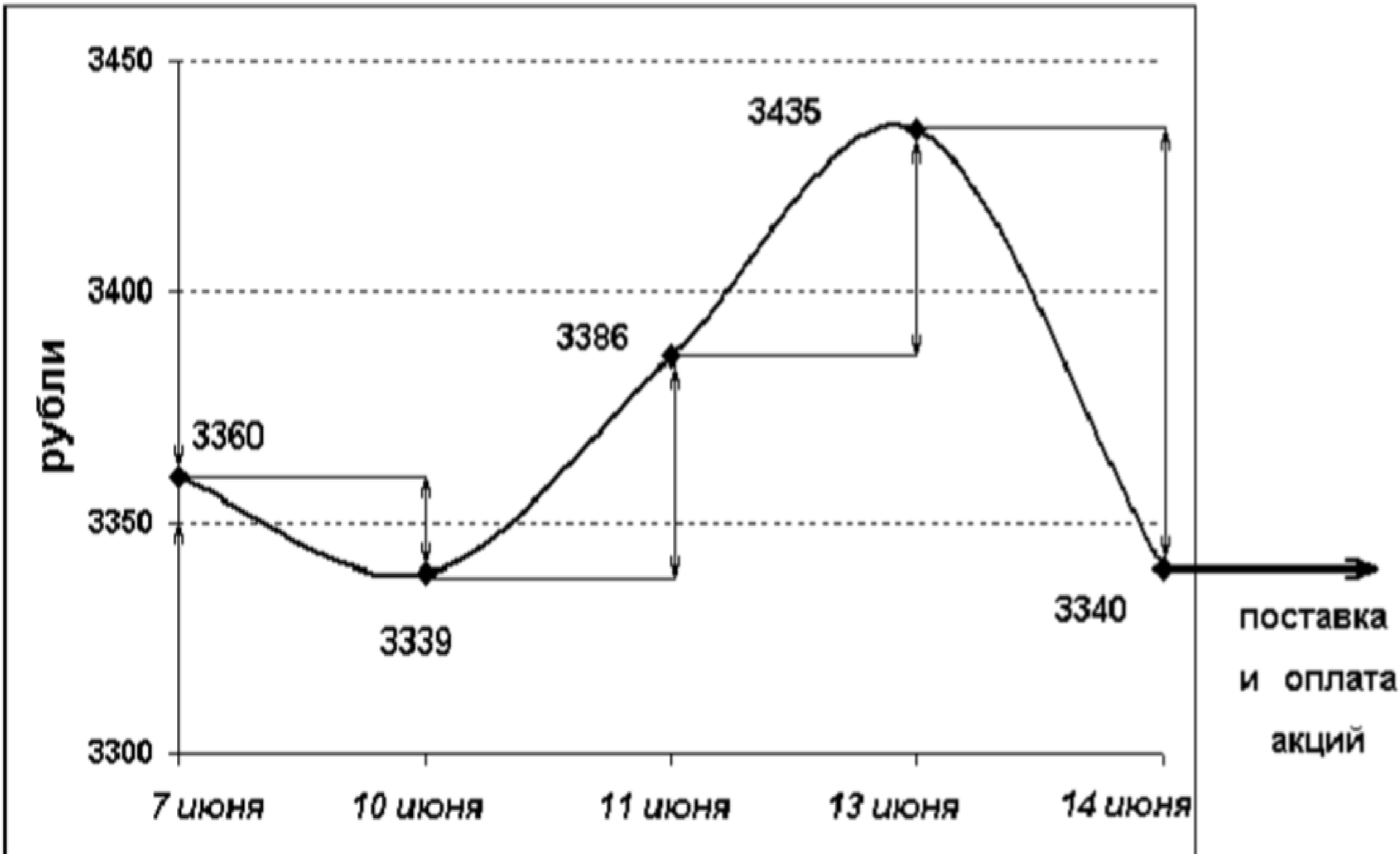
- торговля носит «обезличенный», анонимный характер, в частности, отсутствует необходимость оценки риска невыполнения контрагентом по сделке своих обязательств. Эти функции берет на себя Клиринговая палата - подразделение биржи или самостоятельная организация, в обязанности которой входят учет заключенных сделок, денежные расчеты, о которых речь пойдет ниже, и обеспечение гарантий по исполнению контрактов.

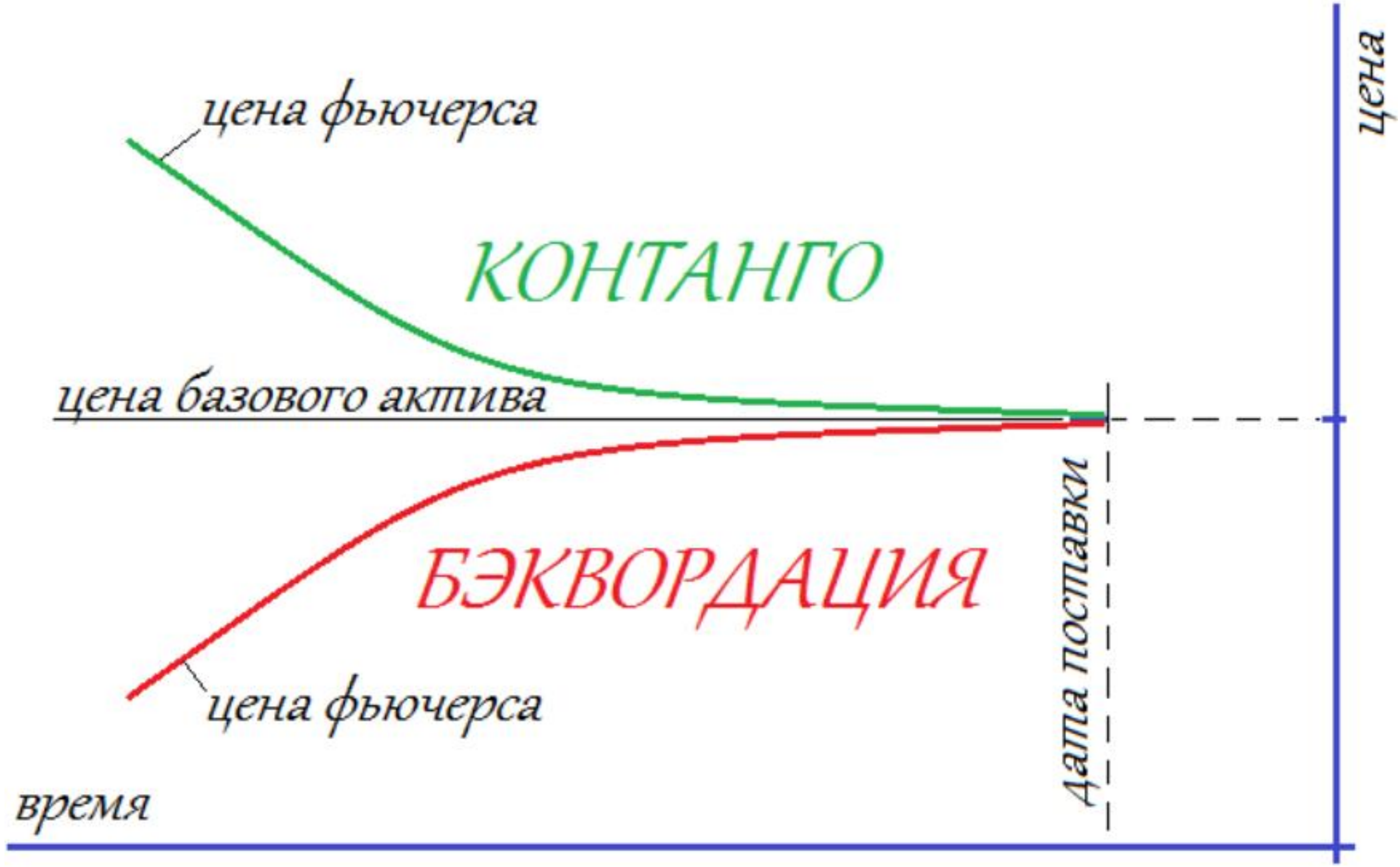


Составляющие расчётов по фьючерсу (пример)

<table>
<tr><td colspan="3">Дата</td><td>7</td><td>10</td><td>11</td><td>13</td><td>14</td><td>17</td></tr>
<tr><td colspan="3">Цена закрытия акций</td><td>3301</td><td>3392</td><td>3401</td><td>3444</td><td>3330</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Цена закрытия фьючерса</td><td>3360</td><td>3339</td><td>3386</td><td>3435</td><td>3340</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Прибыли - убытки</td><td rowspan="2">Фьючерс 3350</td><td>за день</td><td>10</td><td>-21</td><td>47</td><td>49</td><td>-95</td><td>-10</td></tr>
<tr><td>итого</td><td>10</td><td>-11</td><td>36</td><td>85</td><td>-10</td><td>-20</td></tr>
</table>

Расчеты по фьючерсу с поставкой базисного актива

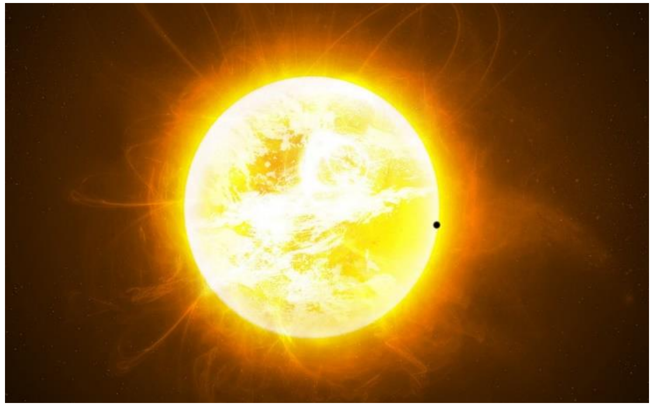



цена фьючерса
КОНТАНГО
цена базового актива
БЭКВОРДАЦИЯ
цена фьючерса
время
Дата поставки
цена

Теория принятия решений в астрономии

Системы координат

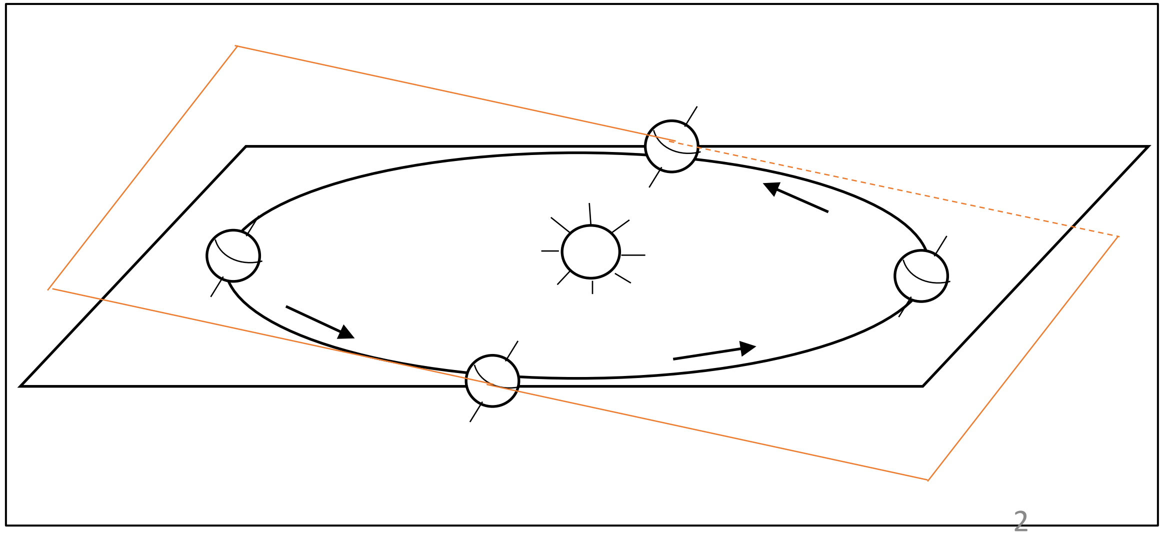
Гелиоцентрические



Геоцентрические

Эклиптические

Экваториальные



Модуль с константами APC_Const

```
const double pi       = 3.14159265358979324;
const double pi2      = 2.0*pi;
const double Rad      = pi / 180.0;
const double Deg      = 180.0 / pi;
const double Arcs     = 3600.0*180.0/pi;

const double AU       = 149597870.0;    // Astronomical unit [km]

const double c_light  = 173.14;         // speed of light [AU/d]
```

Dd	DMS
15.5000	15 30 00.0
-8.15278	-8 9 10.0

Преобразование углов из градусов, минут и секунд дуги в десятичное представление

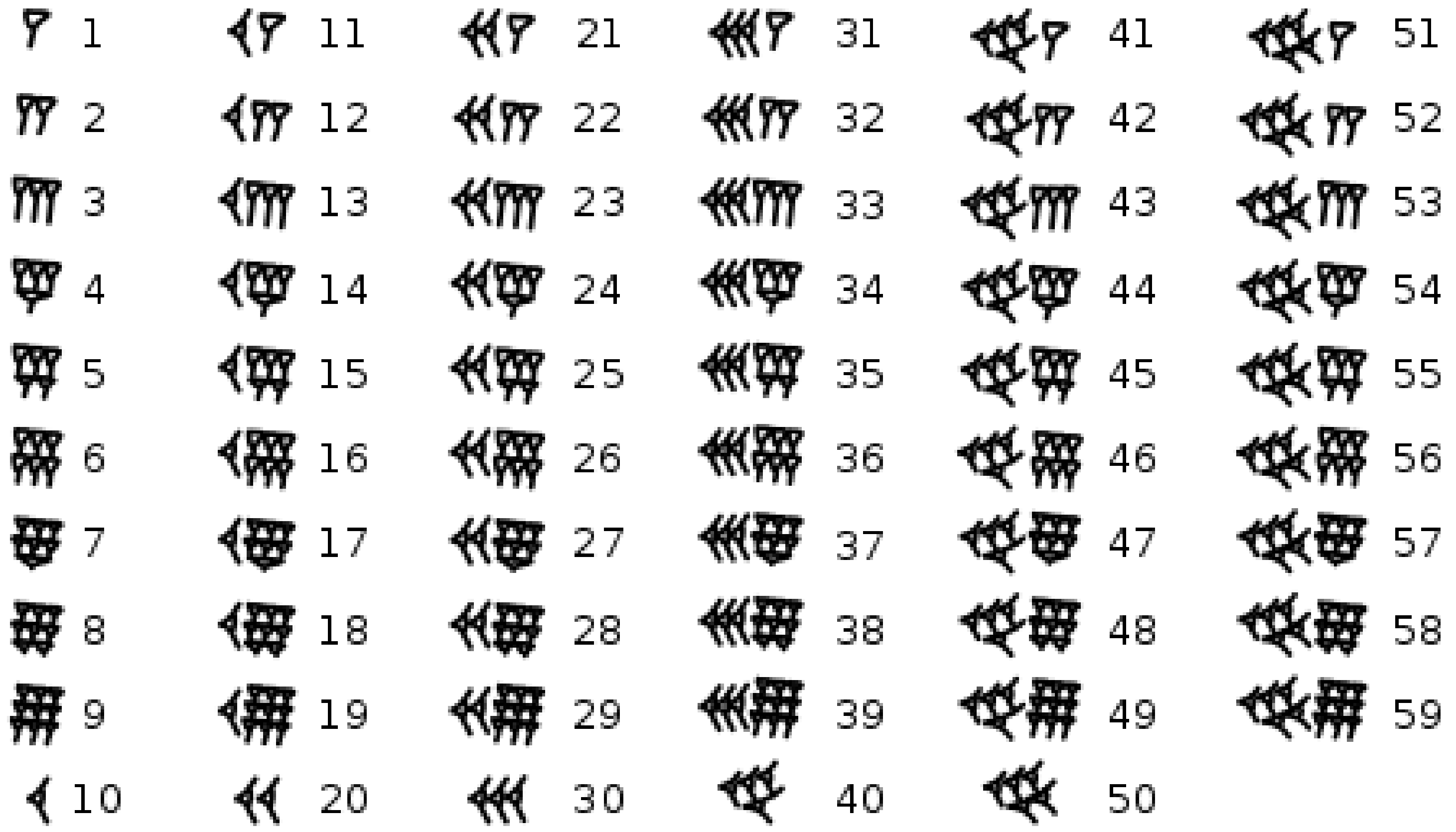
```
double Ddd (int D, int M, double S)
{
double sign;
  if ( (D<0) || (M<0) || (S<0) ) sign = -1.0; else sign = 1.0;

  return  sign * ( fabs(D)+fabs(M)/60.0+fabs(S)/3600.0 );
```

Вычисление градусов, минут и секунд дуги по заданному значению

```
void DMS (double Dd, int& D, int& M, double& S)
{
double x;
  x = fabs(Dd);   D = int(x);
  x = (x-D)*60.0; M = int(x);  S = (x-M)*60.0;
  if (Dd<=0.0) { if (D!=0) D*=-1; else if (M!=0) M*=-1; else
S*=-1.0; }
}
```

Шестидесятеричная система счисления

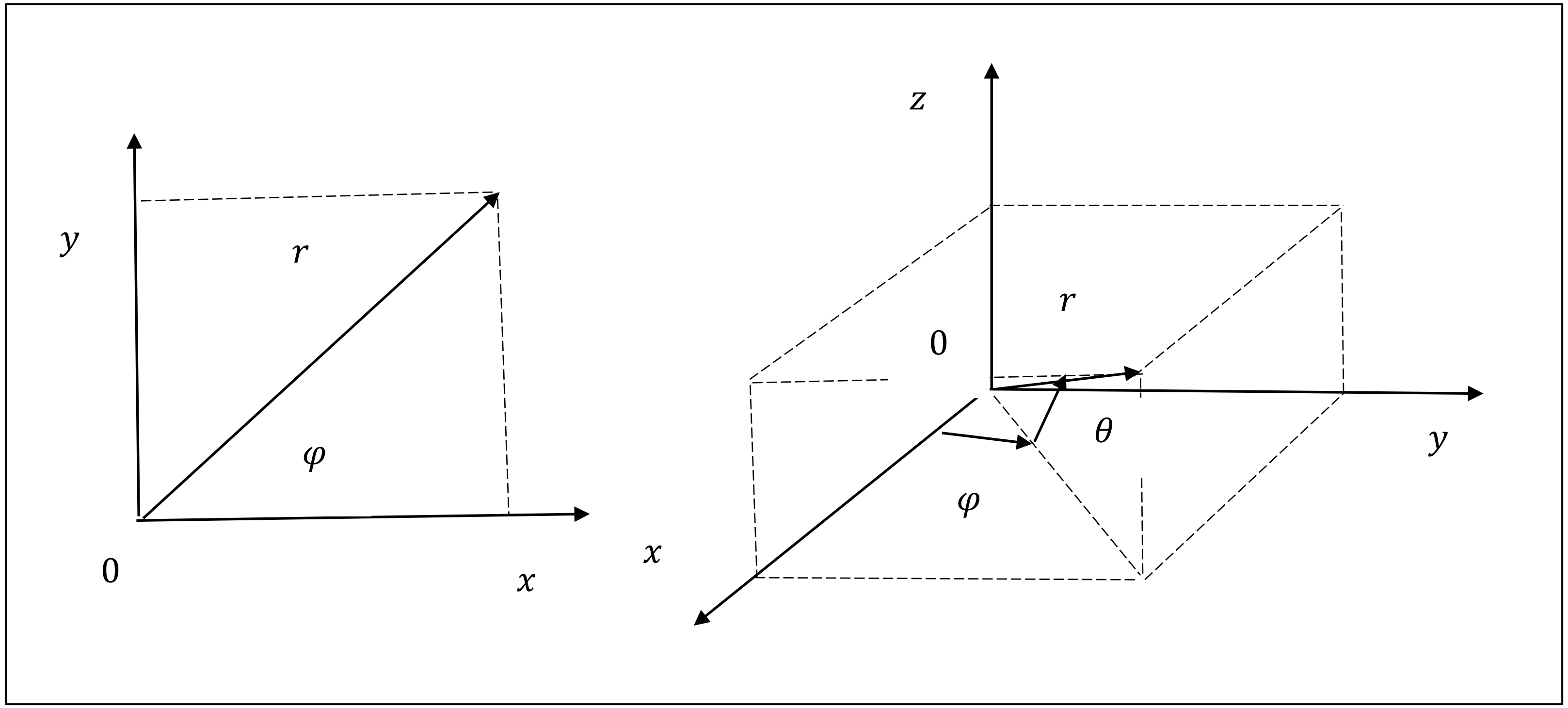
Древние Шумеры



Письмо царю, 2400 г. до н. э.

```
enum AngleFormat {
  Dd,    // decimal representation
  DMM,   // degrees and whole minutes of arc
  DMMm,  // degrees and minutes of arc in decimal representation
  DMMSS, // degrees, minutes of arc and whole seconds of arc
  DMMSSs // degrees, minutes, and seconds of arc in decimal representation
};

class Angle
{
  public:
      // Constructor
    Angle (double alpha, AngleFormat Format=Dd);
        // Modifiers
    void Set (AngleFormat Format=Dd);
    // Angle output
    friend std::ostream& operator << (std::ostream& os, const Angle& alpha);
  private:
    double       m_angle;
    AngleFormat  m_Format;
};
```

Связь декартовых координат на плоскости и в пространстве



$$x = r\cos\theta\cos\varphi$$

$$y = r\cos\theta\sin\varphi$$

$$z = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x}$$

$$tg\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

```
struct Polar {
  // Constructors
  Polar();
  Polar(double Az, double Elev, double R = 1.0);
  // Members
  double phi;    // azimuth of vector
  double theta;  // altitude of vector
  double r;      // norm of vector
};
```

```
class Mat3D
{
 public:
  Mat3D (); // default constructor for null matrix
  // constructor for matrix from column vectors
  Mat3D ( const Vec3D& e_1, const Vec3D& e_2, const
Vec3D& e_3 );
  // component access
  friend Vec3D Col(const Mat3D& Mat, index Index);
  friend Vec3D Row(const Mat3D& Mat, index Index);
  // identity matrix
  friend Mat3D Id3D();
```

```
void Vec3D::CalcPolarAngles ()
{  // Length of projection in x-y-plane:
  const double rhoSqr = m_Vec[0] * m_Vec[0] + m_Vec[1] *
m_Vec[1];
   // Norm of vector
  m_r = sqrt ( rhoSqr + m_Vec[2] * m_Vec[2] );
   // Azimuth of vector
  if ( (m_Vec[0]==0.0) && (m_Vec[1]==0.0) )
    m_phi = 0.0;
  else
    m_phi = atan2 (m_Vec[1], m_Vec[0]);
  if ( m_phi < 0.0 )  m_phi += 2.0*pi;
    // Altitude of vector
  const double rho = sqrt ( rhoSqr );
  if ( (m_Vec[2]==0.0) && (rho==0.0) )
    m_theta = 0.0;
  else
    m_theta = atan2(m_Vec[2], rho);}
```

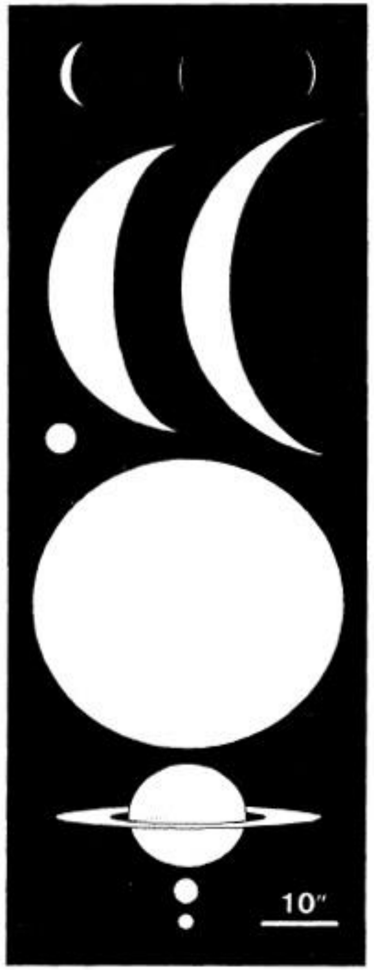
Матрицы поворотов

$$R_x(\varphi) = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & sin\varphi \\ 0 & -sin\varphi & cos\varphi \end{matrix}$$

$$R_y(\varphi) = \begin{matrix} cos\varphi & 0 & -sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\varphi & 0 & cos\varphi \end{matrix}$$

$$R_z(\varphi) = \begin{matrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Эфемериды



		$\alpha_{2000.0}$ h m	$\delta_{2000.0}$ ° ′	m	D ′ ″	f	Видимость φ=45° h	φ=55° h	φ=65° h	Созвездие
Солнце	1.05	02 35	+15 06	−26.8	31 44					Овен
	16.05	03 32	+19 07	−26.8	31 38					Телец
	31.05	04 33	+21 56	−26.8	31 33					Телец
Меркурий	1.05	03 42	+22 14	+1.7	9.8	0.16	0.5	–	–	Телец
	11.05	03 37	+19 57	+4.8	11.8	0.01	–	–	–	Телец
	21.05	03 18	+15 54	+3.7	11.9	0.04	–	–	–	Овен
	31.05	03 14	+14 06	+1.6	10.2	0.19	–	–	–	Овен
Венера	1.05	05 24	+27 41	−4.5	35.1	0.30	4.2	5.0	7.1	Телец
	16.05	05 51	+27 23	−4.5	44.5	0.17	3.4	3.9	4.9	Телец
	31.05	05 42	+25 17	−4.1	54.8	0.04	1.5	1.6	–	Телец
Марс	1.05	01 47	+10 31	+1.3	3.9	0.99	–	–	–	Овен
	16.05	02 03	+14 25	+1.3	3.9	0.99	–	–	–	Овен
	31.05	03 14	+17 46	+1.4	4.0	0.99	–	–	–	Овен
Юпитер	1.05	19 16	−22 12	−2.4	41.5	0.99	4.7	3.4	–	Стрелец
	16.05	19 16	−22 15	−2.5	43.4	0.99	5.4	3.9	–	Стрелец
	31.05	19 13	−22 23	−2.6	45.1	1.00	6.2	4.6	–	Стрелец
Сатурн	1.05	00 13	−00 49	+1.3	16.1	1.00	–	–	–	Рыбы
	16.05	00 19	−00 17	+1.3	16.3	1.00	1.0	–	–	Рыбы
	31.05	00 23	+00 11	+1.2	16.7	1.00	1.9	–	–	Рыбы
Уран	16.05	20 28	−19 04	+5.7	3.6	1.00	4.2	2.8	–	Козерог
Нептун	16.05	19 59	−20 08	+7.9	2.3	1.00	4.2	2.6	–	Стрелец
Плутон	16.05	16 01	−07 02	+13.7	0.14	1.00				Змееносец

В таблице приведены эфемериды Солнца и планет: прямое восхождение и склонение (на эпоху 2000.0 года), видимая звездная величина, диаметр, фаза. Продолжительность видимости планет рассчитана программой, составленной О. С. Угольниковым, с учетом зависимостей неравномерной яркости сумеречного неба и предельной видимой звездной величины от глубины погружения Солнца под горизонт. Для Урана и Нептуна рассчитана продолжительность видимости в телескоп с диаметром объектива 10 см при увеличении 30^x.

Юлианский период от 01 января 4713 г. до н. э.

Модифицированная юлианская дата

$$MJD = JD - 2400000{,}5$$

отсчитывается от полуночи 17 ноября 1858 г.

APC_Time

```
double Mjd ( int Year, int Month, int Day,
          int Hour, int Min, double Sec )
{  // Variables
    long    MjdMidnight;
  double  FracOfDay;
  int     b;
  if (Month<=2) { Month+=12; --Year;}
    if ( (10000L*Year+100L*Month+Day) <= 15821004L )
    b = -2 + ((Year+4716)/4) - 1179;     // Julian calendar
  else
    b = (Year/400)-(Year/100)+(Year/4);  // Gregorian calendar
     MjdMidnight = 365L*Year - 679004L + b +
int(30.6001*(Month+1)) + Day;
  FracOfDay   = Ddd(Hour,Min,Sec) / 24.0;
  return MjdMidnight + FracOfDay;}
```

```
// Mjd: Modified Julian Date from calendar date and time
// Input:
//   Year      Calendar date components
//   Month
//   Day
//   Hour      Time components (optional)
//   Min
//   Sec
// <return>:   Modified Julian Date
```

Григорианская реформа – после 4 октября 1582 г. (JD 2299159,5) следовала дата 15 октября 1582 года (JD 2299160,5).

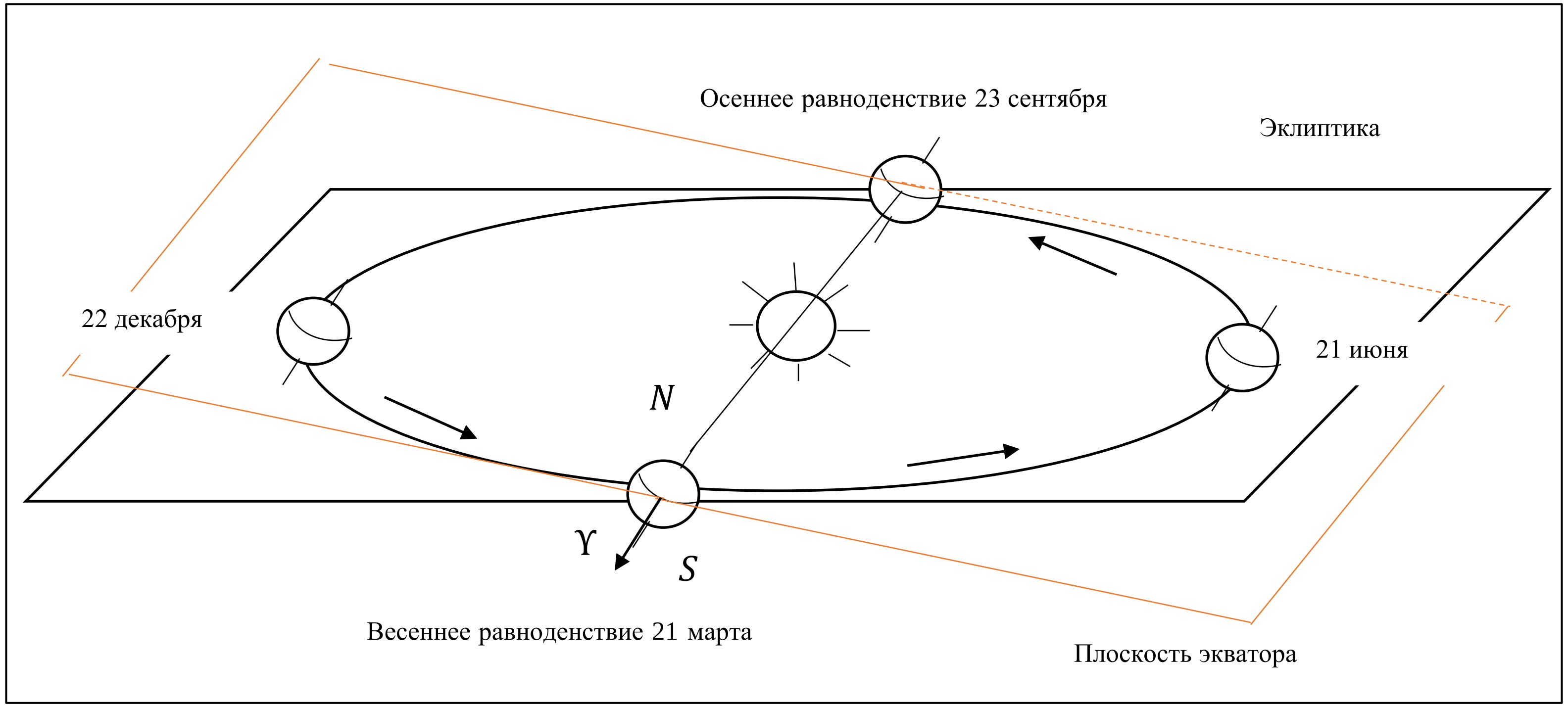
Последние годы столетий, номера которых не делятся на 400 не считаются високосными

Средняя длина года по **григорианскому** календарю $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365{,}2425$

```
void CalDat ( double Mjd,
          int& Year, int& Month, int& Day, double & Hour )
{  // Variables
   long    a,b,c,d,e,f;
  double  FracOfDay;
  // Convert Julian day number to calendar date
  a = long(Mjd+2400001.0);
  if ( a < 2299161 ) {  // Julian calendar
    b = 0;
    c = a + 1524;  }
  else {               // Gregorian calendar
    b = long((a-1867216.25)/36524.25);
    c = a +  b - (b/4) + 1525;  }
  d     = long ( (c-122.1)/365.25 );
  e     = 365*d + d/4;
  f     = long ( (c-e)/30.6001 );
  Day   = c - e - int(30.6001*f);
  Month = f - 1 - 12*(f/14);
  Year  = d - 4715 - ((7+Month)/10);
  FracOfDay = Mjd - floor(Mjd);
  Hour = 24.0*FracOfDay;}
```

```
void CalDat ( double Mjd,
          int& Year, int& Month, int& Day,
          int& Hour, int& Min, double& Sec )
{
  //
  // Variables
  //
  double Hours;
  CalDat (Mjd, Year, Month, Day, Hours);
    DMS (Hours, Hour, Min, Sec);
}
```

Эклиптические и экваториальные координаты



Произвольная **эклиптическая** точка (x, y, z) в **экваториальной** системе будет иметь координаты:

$$x' = x$$

$$y' = y\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon$$
$$z' = y\sin\varepsilon + z\cos\varepsilon$$

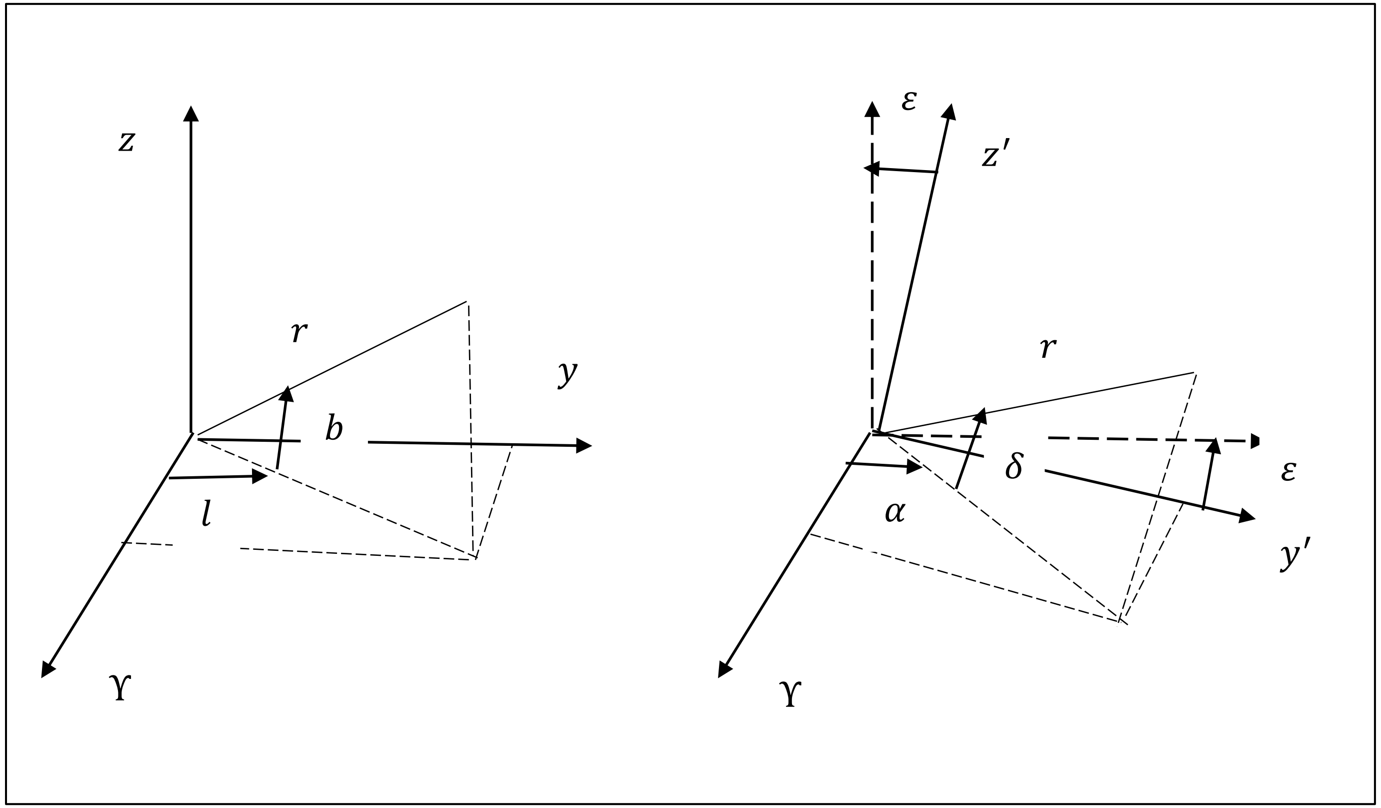
Обратные соотношения:

$$x = x'$$

$$y = y'\cos\varepsilon + z'\sin\varepsilon$$

$$z = -y'\sin\varepsilon + z'\cos\varepsilon$$

Связь эклиптических, экваториальных и полярных координат



$$x = rcosbcosl$$

$$y = rcosbsinl$$

$$z = rsinb$$

$$x' = rcos\delta cos\alpha$$

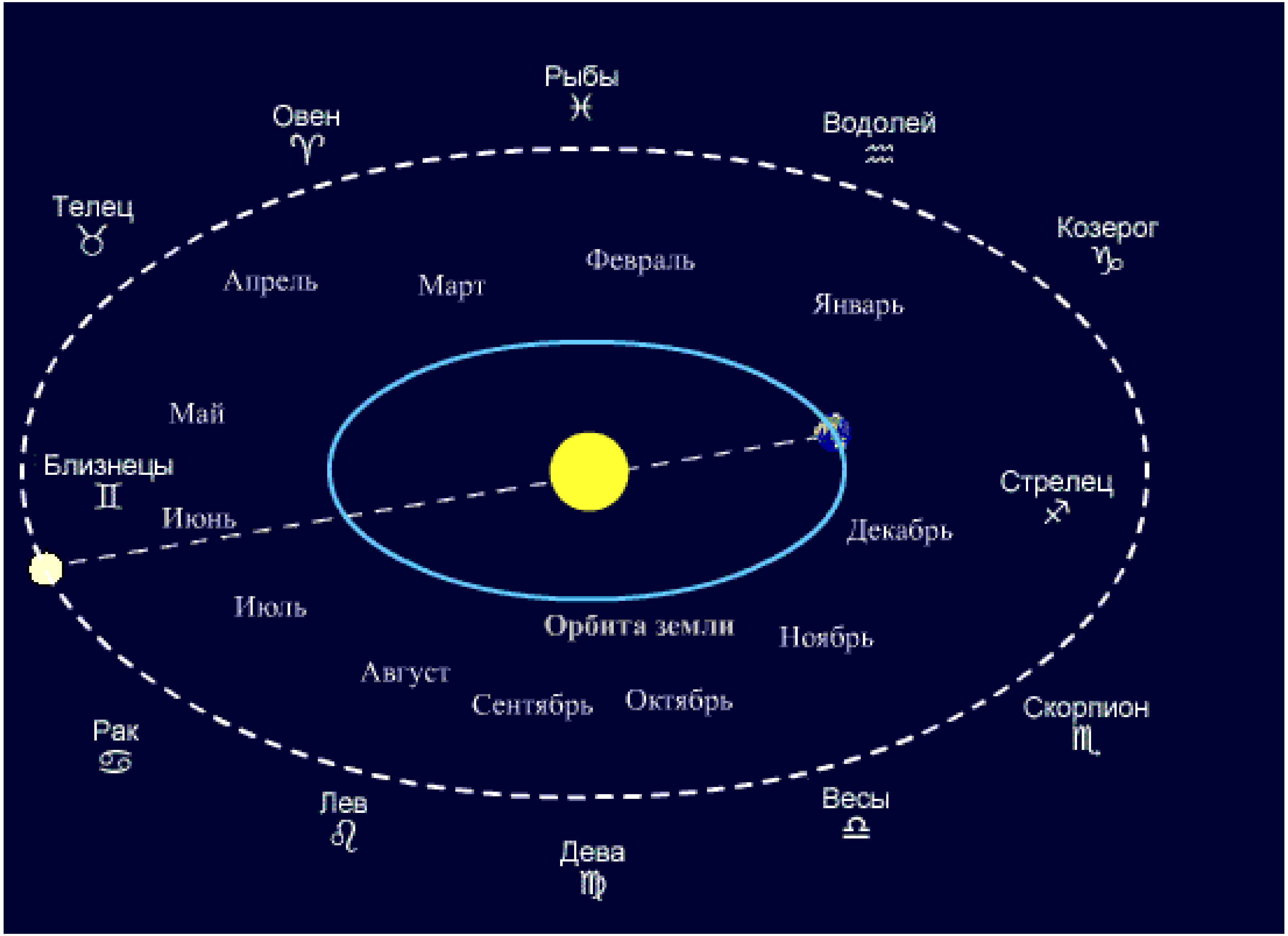
$$y' = rcos\delta sin\alpha$$

$$z' = rsin\delta$$

l – эклиптическая **долгота**, α – **прямое восхождение**,

b – эклиптическая **широта**. δ – **склонение**.

Зодиакальный пояс



Эклиптическая система координат (x, y, z)

Эклиптическая долгота знаков Зодиака

Овен	00° - 30 °	(21 март - 20 апреля)
Телец	30° - 60 °	(21 апреля - 20 мая)
Близнецы	60° - 90 °	(21 мая - 21 июня)
Рак	90° - 120 °	(22 июня - 22 июля)
Лев	120° -150 °	(23 июля - 23 августа)
Дева	150° -180 °	(24 августа - 23 сентября)
Весы	180° -210 °	(24 сентября - 23 октября)
Скорпион	210° -240 °	(24 октября - 22 ноября)
Стрелец	240° -270 °	(23 ноября - 21 декабря)
Козерог	270° -300 °	(22 декабря - 21 января)
Водолей	300° -330 °	(21 января - 19 февраля)
Рыбы	330° -360 °	(20 февраля - 20 марта)

Первая координата - l (долгота). Вторая координата - b (широта).

Эклиптическая геоцентрическая. Эклиптическая гелиоцентрическая.

Экваториальная система координат (x', y', z')

Первая координата - α (**прямое восхождение**)

Прямое восхождение равно длине дуги небесного экватора от точки весеннего равноденствия до круга склонения светила.

- Точка весеннего равноденствия имеет прямое восхождение 0^h;
- Точка летнего солнцестояния имеет прямое восхождение 6^h;
- Точка осеннего равноденствия имеет прямое восхождение 12^h;
- Точка зимнего солнцестояния имеет прямое восхождение 18^h.

Вторая координата - δ (**склонение**)

Склонение равно угловому расстоянию на небесной сфере от плоскости небесного экватора до светила, причём оно положительно для северной полусферы и отрицательно для южной.

- Любая точка небесного экватора имеет склонение 0°
- Склонение северного полюса мира равно +90°;
- Склонение южного полюса мира равно −90°.

Преобразование между эклиптическими и экваториальными координатами

$$r = R_x\,(\varepsilon) r'$$

$$r' = R_x^{\mathrm{T}}\,(\varepsilon) r = R_x(-\varepsilon) r$$

Изменение наклона эклиптики

$$\varepsilon = 23°,43929111 - 46'',8150T - 0'',00059T^2 + 0'',001813T^3$$

T – число юлианских столетий, отделяющих эпоху от полудня 1 января 2000 г.

Юлианские эпохи – J1900 (0,5 января 1900, JD 2415020), J2000(полдень января 2000, JD 2451545).

Величину Т для данной эпохи можно вычислить по юлианской дате:

$$T = (JD\ 2451545\,)/36525$$

Модуль APC_Spheric

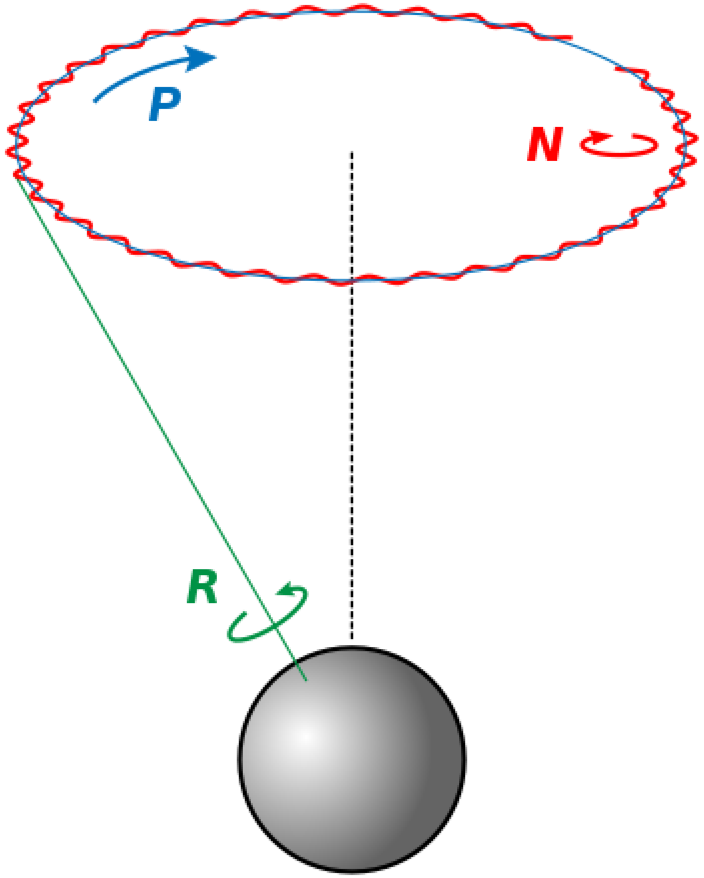
Transformation of equatorial to ecliptical coordinates

```
Mat3D Equ2EclMatrix (double T)
{  // Constants
   const double
   eps = ( 23.43929111-(46.8150+(0.00059-
0.001813*T)*T)*T/3600.0 ) * Rad;
  return R_x(eps);}
```

Transformation of ecliptical to equatorial coordinates

```
Mat3D Ecl2EquMatrix (double T)
{
  return Transp(Equ2EclMatrix(T));
}
```

Прецессия

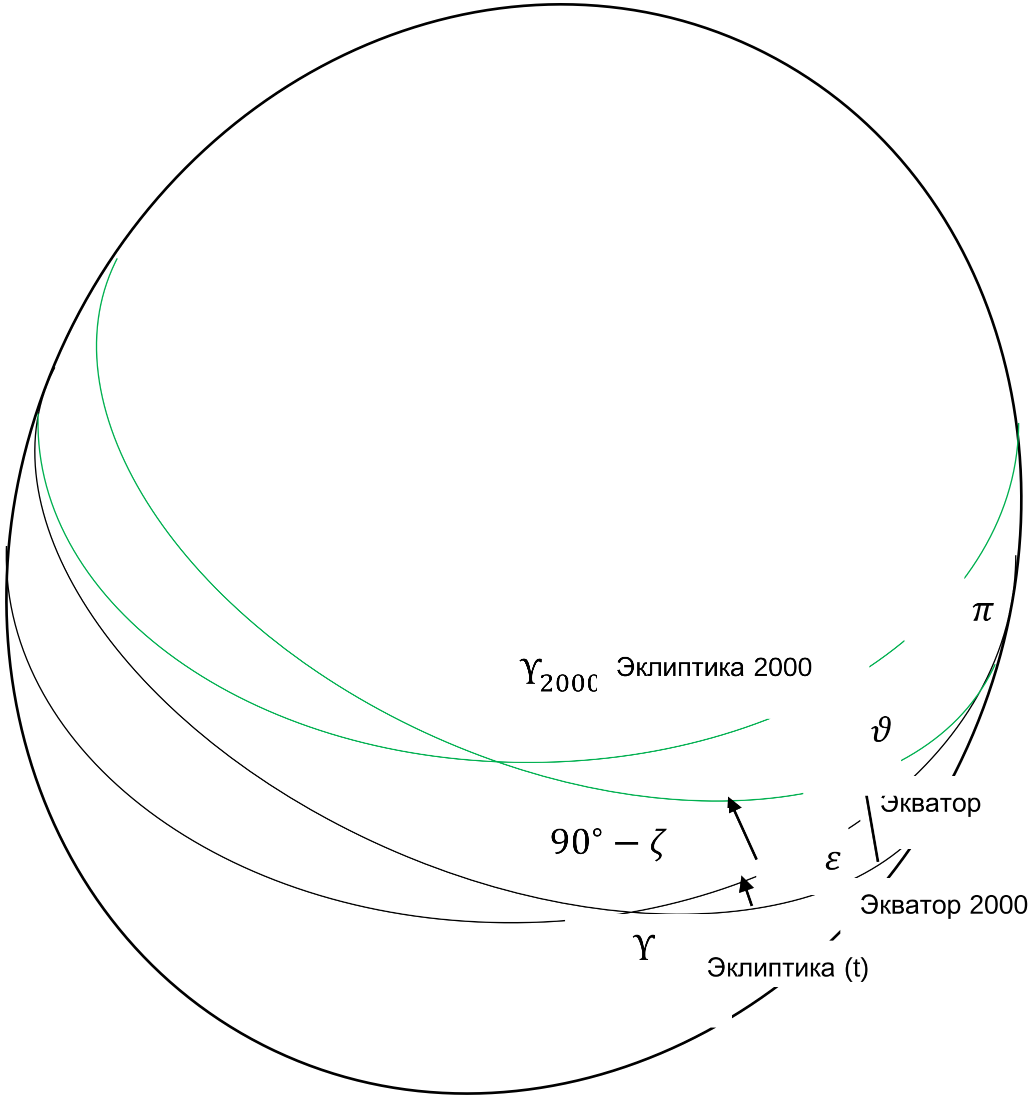


R – **вращение**, P - **прецессия**, N – **нутация**.

Гиппарх Никейский (190 – 125 г. до н. э.)

Наиболее распространенные эпохи:

- эпоха текущей даты;
- эпоха $J2000$; $J2000 - 1{,}5$ января $2000 = JD2451545{,}0$
- эпоха $B1950$. $B1950$– префикс В означает начало бесселева года (январь 1950 = $JD2433282{,}423$).



Влияние прецессии на взаиморасположение эклиптики, экватора и точки весеннего равноденствия

ε – угол между экватором и эклиптикой.

π – угол между эклиптикой и эклиптикой 2000.

ϑ – угол между экватором 2000 и экватором.

$(90°-\zeta)$ – угол между экватором 2000 и эклиптикой.

Модуль APC_PrecNut.

Рассмотрим положение эклиптики в моменты времени T и $T + T_0$. Угол между этими плоскостями $\pi = pi$.

Π – угол между осью x' и направлением на точку весеннего равноденствия Y_0 эпохи T_0 (ось x_0). Π=Pi

Λ – угол между осью x'' и направлением на точку весеннего равноденствия эпохи $T_0 + T$ (ось x).

p – прецессия по долготе, $p = \Pi + \Lambda$. p=p_a

```
Mat3D PrecMatrix_Ecl (double T1, double T2)
{  // Constants
   const double dT = T2-T1;
    // Variables
  double Pi, pi, p_a;
  Pi  = 174.876383889*Rad +
       ( ((3289.4789+0.60622*T1)*T1) +
           ((-869.8089-0.50491*T1) + 0.03536*dT)*dT )/Arcs;
  pi  = ( (47.0029-(0.06603-0.000598*T1)*T1)+
           ((-0.03302+0.000598*T1)+0.000060*dT)*dT )*dT/Arcs;
  p_a = ( (5029.0966+(2.22226-0.000042*T1)*T1)+
           ((1.11113-0.000042*T1)-0.000006*dT)*dT )*dT/Arcs;
   return R_z(-(Pi+p_a)) * R_x(pi) * R_z(Pi);}
```

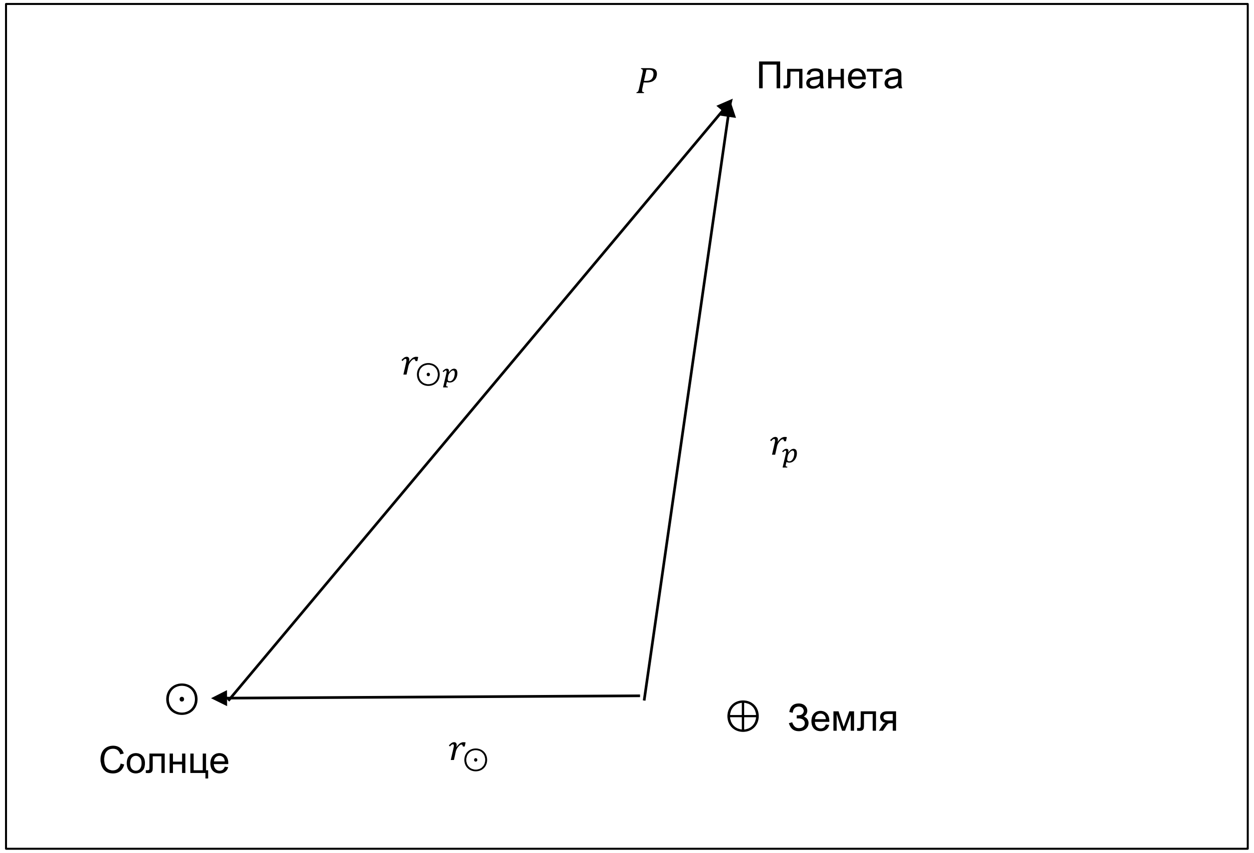
В экваториальных координатах углам π, Π и Λ соответствуют $90^o - \zeta, \vartheta$ и $90^o + z$.

$$zeta = \zeta$$
$$theta = \vartheta$$

```
Mat3D PrecMatrix_Equ (double T1, double T2)
{  // Constants
  const double dT = T2-T1;
// Variables
   double zeta,z,theta;
  zeta  =  ( (2306.2181+(1.39656-0.000139*T1)*T1)+
              ((0.30188-0.000344*T1)+0.017998*dT)*dT )*dT/Arcs;
  z     =  zeta + (
(0.79280+0.000411*T1)+0.000205*dT)*dT*dT/Arcs;
  theta =  ( (2004.3109-(0.85330+0.000217*T1)*T1)-
              ((0.42665+0.000217*T1)+0.041833*dT)*dT )*dT/Arcs;
  return R_z(-z) * R_y(theta) * R_z(-zeta);}
```

Геоцентрические координаты и солнечная орбита

Переход от гелиоцентрических координат (отнесенных к центру Солнца) к геоцентрическим (отнесенным к центру Земли).



$$r_p = r_{\odot p} + r_{\odot}$$

$$r_{\odot p} = r_p - r_{\odot}$$

$r_{\odot p}$ – гелиоцентрический и r_p – геоцентрический радиус-векторы точки P. $r_{\odot}$ - геоцентрический радиус вектор солнца.

$$x_p = x_{\odot p} + x_{\odot} \qquad x_{\odot p} = x_p - x_{\odot}$$

$$y_p = y_{\odot p} + y_{\odot} \qquad y_{\odot p} = y_p - y_{\odot}$$

$$z_p = z_{\odot p} + z_{\odot} \qquad z_{\odot p} = z_p - z_{\odot}$$

$$r_{\odot} = \begin{pmatrix} x_{\odot} \\ y_{\odot} \\ z_{\odot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RcosBcosL \\ RcosBsinL \\ RsinB \end{pmatrix}$$

Vec3D **SunPos** (double T)

Основная программа Coco

```
class Position
{  public:
   void Input(); // Запрос параметров
   void SetOrigin(enOrigin Origin);
   void SetRefSys(enRefSys RefSys);
   void SetEquinox(double T_Equinox);
   void Print();
  private:
   Vec3D      m_R;          // Радиус-вектор
   enOrigin   m_Origin;     // Начало координат
   enRefSys   m_RefSys;     // Система координат
   double     m_TEquinox;   // Равноденствие (в столетиях отJ2000)
   double     m_MjdEpoch;   // Эпоха (Модифицированная юлианская дата)};
```

Пример: выбирается экваториальные координаты точки весеннего равноденствия, заданные в полярной форме на эпоху 1950.0. Расстояние равно 1 а. е.

Проведем циклическое изменение команд

Сначала выберем **экваториальные** координаты точки весеннего равноденствия, заданные в **полярной** форме в эпоху 1950.0, расстояние 1 а. е.

```
                COCO: coordinate conversions
        (c) 1999 Oliver Montenbruck, Thomas Pfleger


New input:

  Reference system (e=ecliptic,a=equator) ... a
  Format (c=cartesian,p=polar)            ... p
  Coordinates (RA [h m s] Dec [o ' "] R)  ... 0 0 0.0 0 0 0.0 1.0
  Equinox (yyyy.y)                        ... 1950.0
  Origin (h=heliocentric,g=geocentric)    ... g
  Epoch (yyyy mm dd hh.h)                 ... 1989 1 1 0.0


Geocentric equatorial coordinates
(Equinox J1950.0,  Epoch 1989/01/01 00.0)

  (x,y,z) =  (  1.00000000,  0.00000000,  0.00000000)

        h  m  s               o  '  "
  RA =  0 00 00.00    Dec = + 0 00 00.0    R =   1.00000000


Enter command (?=Help) ... _
```

Программа ожидает команды преобразования координат.

a – преобразование в экваториальные координаты;

e – преобразование в эклиптические координаты;

p – прецессия (выбор эпохи);

g – преобразование в геоцентрические координаты;

h – преобразование в гелиоцентрические координаты;

x – выход.

Рассчитаем координаты точки весеннего равноденствия 1950, отнесенные к новой эпохе 2000.0.

```
Enter command (?=Help) ... p
New equinox (yyyy.y)   ... 2000.0

Geocentric equatorial coordinates
(Equinox J2000.0,  Epoch 1989/01/01 00.0)

  (x,y,z) =  (  0.99992571,  0.01117889,  0.00485898)

         h  m  s                o  '  "
  RA =  0 02 33.73    Dec = + 0 16 42.2    R =   1.00000000


Enter command (?=Help) ...
```

Преобразуем экваториальные координаты в эклиптические.

```
Enter command (?=Help) ... p
New equinox (yyyy.y)   ... 2000.0

Geocentric equatorial coordinates
(Equinox J2000.0,  Epoch 1989/01/01 00.0)

  (x,y,z) =  (  0.99992571,  0.01117889,  0.00485898)

         h  m  s                o  '  "
  RA =  0 02 33.73    Dec = + 0 16 42.2    R =   1.00000000


Enter command (?=Help) ... e

Geocentric ecliptic coordinates
(Equinox J2000.0,  Epoch 1989/01/01 00.0)

  (x,y,z) =  (  0.99992571,  0.01218922,  0.00001132)

         o  '  "              o  '  "
  L =   0 41 54.27    B = + 0 00 02.3    R =   1.00000000


Enter command (?=Help) ...
```

Преобразуем координаты из геоцентрических в гелиоцентрические на заданную эпоху, используя команду h.

```
Enter command (?=Help) ... h

Heliocentric ecliptic coordinates
(Equinox J2000.0,  Epoch 1989/01/01 00.0)

  (x,y,z) =  (  0.81725247,  0.97838164,  0.00003597)

         o  '  "               o  '  "
  L =  50 07 39.50    B = + 0 00 05.8    R =   1.27480674


Enter command (?=Help) ...
```

Получили гелиоцентрические эклиптические координаты.

Отменим преобразование в эклиптические координаты, выбрав a.

```
Enter command (?=Help) ... a

Heliocentric equatorial coordinates
(Equinox J2000.0,  Epoch 1989/01/01 00.0)

  (x,y,z) =  (  0.81725247,  0.89763329,  0.38921086)

        h  m  s                o  '  "
  RA =  3 10 44.07    Dec = +17 46 36.5    R =   1.27480674
```

Пересчитаем координаты к исходной эпохе 1950.0

```
Enter command (?=Help) ... p
New equinox (yyyy.y)   ... 1950.0

Heliocentric equatorial coordinates
(Equinox J1950.0,  Epoch 1989/01/01 00.0)

  (x,y,z) =  (  0.82911747,  0.88843066,  0.38521087)

        h  m  s                 o  '  "
  RA =  3 07 54.68    Dec = +17 35 17.2    R =   1.27480674


Enter command (?=Help) ...
```

Преобразуем в **геоцентрические**.

```
Enter command (?=Help) ... g

Geocentric equatorial coordinates
(Equinox J1950.0,  Epoch 1989/01/01 00.0)

  (x,y,z) =  (  1.00000000, -0.00000000,  0.00000000)

        h  m  s                 o  '  "
  RA = 24 00 00.00    Dec = + 0 00 00.0    R =   1.00000000
```

Сравнение: не удалось войти дважды в одну реку

```
               COCO: coordinate conversions
       (c) 1999 Oliver Montenbruck, Thomas Pfleger


New input:

  Reference system (e=ecliptic,a=equator) ... a
  Format (c=cartesian,p=polar)            ... p
  Coordinates (RA [h m s] Dec [o ' "] R)  ... 0 0 0.0 0 0 0.0 1.0
  Equinox (yyyy.y)                        ... 1950.0
  Origin (h=heliocentric,g=geocentric)    ... g
  Epoch (yyyy mm dd hh.h)                 ... 1989 1 1 0.0


Geocentric equatorial coordinates
(Equinox J1950.0,  Epoch 1989/01/01 00.0)

  (x,y,z) =  (  1.00000000,  0.00000000,  0.00000000)

        h  m  s                o  '  "
  RA =  0 00 00.00    Dec = + 0 00 00.0    R =   1.00000000


Enter command (?=Help) ...
```

```
Enter command (?=Help) ... g

Geocentric equatorial coordinates
(Equinox J1950.0,  Epoch 1989/01/01 00.0)

  (x,y,z) =  (  1.00000000, -0.00000000,  0.00000000

        h  m  s                o  '  "
  RA = 24 00 00.00    Dec = + 0 00 00.0    R =   1.0


Enter command (?=Help) ...
```

Андреас Целлариус. Атлас «Гармония Макрокосмоса», 1708