

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет «ЛЭТИ»
им. В. И. Ульянова (Ленина)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ЧАСТЬ I

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2019

УДК 621.3.01:51(07)

ББК 3 21с11я7

М 34

Авторы: Ю. А. Бычкова, Д. А. Морозов, М. С. Портной, Е. Б. Соловьева

М 34 Математические основы теоретической электротехники. Часть 1: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2019. 128 с.

ISBN

Рассматривается обобщённая математическая модель нелинейных детерминированных цепей (систем) с сосредоточенными параметрами, анализ пассивных и активных линейных цепей во временной области, нейронные модели дискретных систем.

Предназначено для подготовки бакалавров по направлению 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика», а также для самостоятельной работы студентов всех направлений и специальностей электротехнического университета.

УДК 621.3.01:51(07)

ББК 3 21с11я7

Рецензенты: кафедра РСиОС СПбГУТ им. проф. М. А. Бонч-Бруевича; ведущий инженер лаборатории нано- и микросистемной техники Ю. Д. Акульшин (СПбГПУ).

Утверждено

редакционно-издательским советом университета

в качестве учебного пособия

ISBN

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2019

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТУЛАТЫ, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.1. Математическое моделирование электрических цепей и динамических систем

Метод математического моделирования – один из наиболее мощных современных методов исследования окружающего нас мира. Работа с математической моделью снижает материальные и трудовые затраты, позволяет оперативно и безопасно исследовать критические и аварийные режимы функционирования моделируемой системы, а также её гипотетические состояния, недоступные для реального воспроизведения и наблюдения. Вследствие этого “математическое моделирование – это не частный технократический рецепт, касающийся узкого круга специалистов, а универсальная методология, основной инструмент математизации научно-технического прогресса” [1–4].

Задача построения хорошей модели исследуемого объекта или явления чрезвычайно сложна и многогранна, ибо “создание удачной новой модели – всегда крупное достижение соответствующей науки, а иногда и целый этап в её развитии” [3]. Построение достаточно точной математической модели связано с необходимостью учёта и правильного описания всех существенных свойств и особенностей моделируемой системы. Заметим, однако, что любая, сколь угодно тщательно сформированная модель заведомо неадекватна физически существующей системе в силу ограниченности наших знаний о ней и о способах её описания. Кроме того, учитывая в полном объёме доступную информацию о процессах, протекающих в системе и о её внутренних и внешних взаимосвязях, исследователь может построить хорошую, информационно ёмкую модель, но имеющую сложное математическое описание. Излишняя сложность этого описания, быть может, приведёт к тому, что, несмотря на высокую степень адекватности моделируемой системе, построенная модель окажется ненужной так как её последующее использование невозможно из-за отсутствия необходимого математического аппарата. По этой причине, формируя модель, исследователь всегда сталкивается с разрешением противоречия между бесконечной сложностью моделируемой системы и желаемой относительной простотой её математического описания, диктуемой возможностью

последующего расчёта полученной модели с помощью существующих вычислительных алгоритмов. Вследствие этого модель – всегда компромисс, результатом которого является ограничение многообразия собственных свойств и особенностей моделируемой системы путём упрощения их до уровня, определяемого возможностью существующих методов исследования моделей выделенного класса. Такое ограничение и упрощение не должно быть, конечно, ниже некоторого предельно допустимого уровня, обеспечивающего построение модели, удовлетворяющей решению поставленной задачи.

Теоретическая электротехника основана на правильно выбранных исходных понятиях, описывающих чётко очерченную область исследования.

Вследствие этого в электротехнике за последние два столетия получены результаты, которые составляют фундамент и стержень современной технической цивилизации.

Современная теоретическая электротехника располагает обширным банком математических моделей, которые используют хорошо разработанный математический аппарат. Предлагаемый курс предназначен для ознакомления студентов с методом математического моделирования на примере теории электрических цепей.

1.2. Предмет и аксиоматика теории электрических цепей

Предметом теории электрических цепей является изучение наиболее общих закономерностей, описывающих процессы, протекающие в электротехнических устройствах.

Теория электрических цепей основана на следующих двух постулатах.

Первый. Предположим, что все электромагнитные процессы в любых электротехнических устройствах с достаточной для практики точностью могут быть описаны с помощью только двух понятий – тока и напряжения.

Второй. Допустим, что плотность тока одна и та же в каждой точке сечения любого проводника, а напряжение между любыми двумя точками пространства изменяется по линейному закону.

Введём постулированные основные понятия.

Ток $i(t)$ – предел отношения количества электричества $\Delta q(t)$, переносимого заряженными частицами через некоторую поверхность за

промежуток времени Δt , к этому промежутку времени, когда он стремится к нулю. Таким образом, по определению,

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q(t)}{\Delta t}.$$

Считая заряд и время непрерывными, получим:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}. \quad (1.1)$$

Ток обозначают также буквой I . В системе СИ ток измеряют в амперах (А). Из формулы (1) следует:

$$\text{А} = \text{Кл с}^{-1}.$$

Ток описывает процессы магнитного поля.

Напряжение $u(t)$ — предел отношения количества энергии $\Delta W(t)$, необходимой для переноса некоторого количества электричества $\Delta q(t)$ из одной точки пространства в другую, к этому количеству электричества, когда оно стремится к нулю. Таким образом, по определению,

$$u(t) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta W(t)}{\Delta q(t)}.$$

Считая заряд непрерывным, получим:

$$u(t) = \frac{dW(t)}{dq(t)}. \quad (1.2)$$

Напряжение обозначают также буквой U . В системе СИ напряжение измеряют в вольтах (В). Из формулы (2) следует:

$$\text{В} = \text{Дж Кл}^{-1}.$$

Напряжение описывает процессы электрического поля.

Заметим, что оба постулированных основных понятия описаны линейными неоднородными дифференциальными уравнениями первого порядка. Это предопределяет возможность исследования с их помощью динамических процессов в электрических цепях.

Все последующие построения и выводы будут основаны только на этих двух понятиях и описаны только с их помощью. С одной стороны, это

существенно сужает круг исследуемых явлений. С другой стороны, такое ограничение позволяет построить очень строгую теорию, используя наиболее изящные модели реальных электротехнических устройств.

Введём вытекающие из основных понятий основные определения.

Энергия $W(t)$ – мера способности объекта совершать работу. Как следует из формул (1.1), (1.2), электромагнитная энергия

$$W(t) = \int_{-\infty}^t u(t)i(t)dt. \quad (1.3)$$

Энергия – важнейшее понятие, единственное, которое присутствует во всех естественно-научных дисциплинах и, следовательно, их объединяет. Как видно из формулы (1.3), размерность энергии в основных понятиях теории цепей такова:

$$Дж = ВАс,$$

что также следует из формул (1.1), (1.2).

Мощность $p(t)$ – скорость изменения энергии во времени. В теории цепей

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = u(t)i(t). \quad (1.4)$$

Мощность также обозначают буквой P . Как видно из формулы (1.4), размерность мощности в основных понятиях теории цепей ВА; внесистемная единица измерения мощности – ватт(Вт).

Элементы – математические модели (идеализированные устройства), имеющие по два зажима или более, все электромагнитные процессы в которых с достаточной для практики точностью могут быть описаны только в основных понятиях теории цепей (тока и напряжения). Элементы бывают линейные и нелинейные, пассивные и активные, стационарные и нестационарные, с сосредоточенными и распределёнными параметрами, непрерывные и дискретные.

Источники электромагнитной энергии – математические модели (идеализированные устройства), имеющие по два зажима или более, предназначенные для генерации или преобразования электромагнитной энергии. Источники бывают независимые, зависимые и управляемые.

Электрическая цепь – совокупность элементов и источников, предназначенная для генерации, приёма и преобразования токов и напряжений (электрических сигналов). Те участки цепи, на которых генерируют или куда поступают сигналы, называют входом. Те участки цепи, на которых регистрируют токи и напряжения как результат генерации или преобразования сигналов, называют выходом. Входов и выходов может быть несколько.

1.3. Пассивные элементы электрических цепей

Начнём построение математических моделей элементов с наиболее простых из них – пассивных, непрерывных, стационарных, линейных и нелинейных. Из основных понятий вытекает, что для полного описания электромагнитных процессов в цепях с такими элементами необходимо и достаточно трёх: первого, описывающего только безвозвратное потребление электромагнитной энергии; второго, описывающего запасание и полный возврат энергии только электрического поля; третьего, описывающего запасание и полный возврат энергии только магнитного поля. Введём эти элементы.

Резистор – математическая модель (идеализированное устройство), имеющая два зажима, единственным электромагнитным процессом в которой является безвозвратное потребление электромагнитной энергии и полный перевод её в тепловую. Из этого определения следует, что все свойства резистора полностью определяет его вольт-амперная $i = f(u)$ или ампер-вольтовая $u = \varphi(i)$ характеристика.

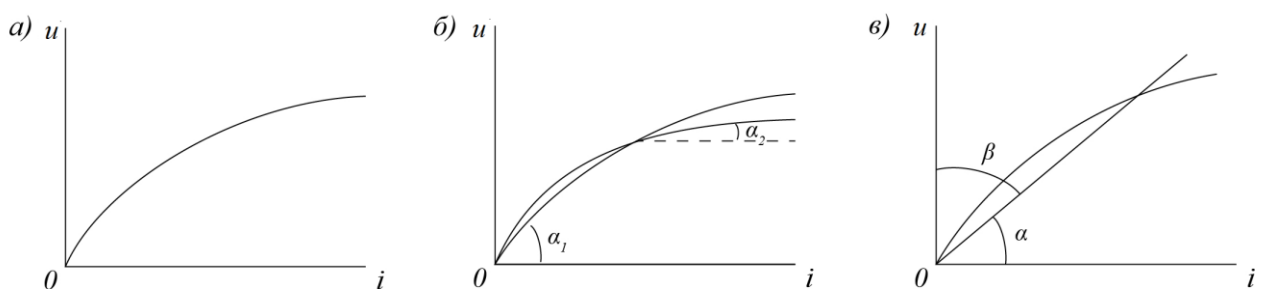


Рис. 1.1

На рис. 1.1, а показана одна из возможных нелинейных ампер-вольтовых характеристик резистора. Она может быть описана различными функциями, например, таким полиномом:

$$u = \varphi(i) = \sum_{n=0}^N a_n i^n. \quad (1.5)$$

При $N=1$ из формулы (1.5) вытекает кусочно-линейная, либо, в частном случае, линейная аппроксимация этой характеристики. Аппроксимирующие ломаные и прямая показаны на рис. 1.1, б, в соответственно. В линейном случае ампер-вольтовой характеристики на рис. 1.1, в из формулы (1.5) получим:

$$u = a_1 i = \operatorname{tg} \alpha \cdot i. \quad (1.6)$$

Назовём коэффициент $\operatorname{tg} \alpha$ сопротивлением линейного резистора и обозначим его буквой R , тогда из формулы (1.6) следует:

$$u = Ri. \quad (1.7)$$

Сопротивление линейного резистора обозначают также буквой r . Как видно из формулы (1.7), размерность сопротивления в основных понятиях теории цепей ВА^{-1} ; внесистемная единица измерения сопротивления – ом (Ом).

Описав ту же линейную характеристику на рис. 1.1, в как вольт амперную, получим:

$$i = \operatorname{tg} \beta \cdot u = Gu, \quad (1.8)$$

где коэффициент $\operatorname{tg} \beta = G$ называют проводимостью линейного резистора. Проводимость линейного резистора обозначают также буквой g .

Из формул (1.7), (1.8) видно, что $G = R^{-1}$. Размерность проводимости в основных понятиях теории цепей $\text{В}^{-1}\text{А}$; внесистемная единица измерения проводимости – симменс (См).

Из формул (1.5) – (1.8) также видно, что резистор – элемент безынерцион-ный, ток и напряжение повторяют друг друга во времени в масштабе $R(G)$.

Из определения резистора следует, что через него может протекать любой ток и к нему может быть приложено любое напряжение, резистор нельзя разрушить потому что резистор не физический объект, а математическая модель.

Энергию, потребляемую резистором, находим по формуле (1.3), а мощность – по формуле (1.4). Для линейного резистора получим:

$$W(t) = \int_{-\infty}^t u(t)i(t)dt = \int_{-\infty}^t Ri^2(t)dt = \int_{-\infty}^t Gu^2(t)dt \geq 0;$$

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = u(t)i(t) = Ri^2(t) = Gu^2(t) > 0.$$

Как видно, резистор действительно только потребляет, и притом безвозвратно.

Для нелинейного резистора, при $N > 1$ в формуле подобной (1.5), соответствующие выражения могут быть сформированы.

Обычно используемые изображения линейного и нелинейного резисторов приведены на рис. 1.2, а, б соответственно.

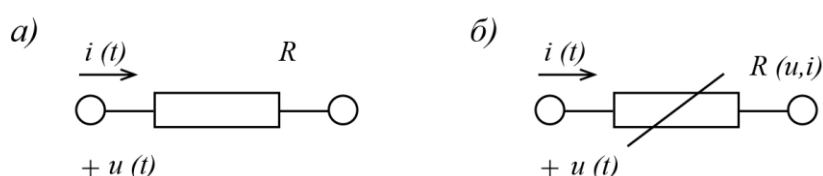


Рис. 1.2

Ёмкость – математическая модель (идеализированное устройство), имеющая два зажима, единственным электромагнитным процессом в которой является запасание и полный возврат энергии электрического поля. Из этого определения следует, что все свойства ёмкости полностью определяет её вольт-кулоновая $q = f(u)$ или кулон-вольтовая $u = \varphi(q)$ характеристика.

На рис. 1.3, а показаны две возможных нелинейных вольт-кулоновых характеристик. Они могут быть описаны различными функциями $q(u)$. В любом описании, однако, существенно то, что заряд q не входит в основные понятия теории цепей и поэтому нуждается в замене.

Опишем ёмкость в терминах тока и напряжения, для чего выполним следующие преобразования:

$$q = f(u);$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} f(u);$$

$$i(t) = \frac{d}{dt} f(u). \quad (1.9)$$

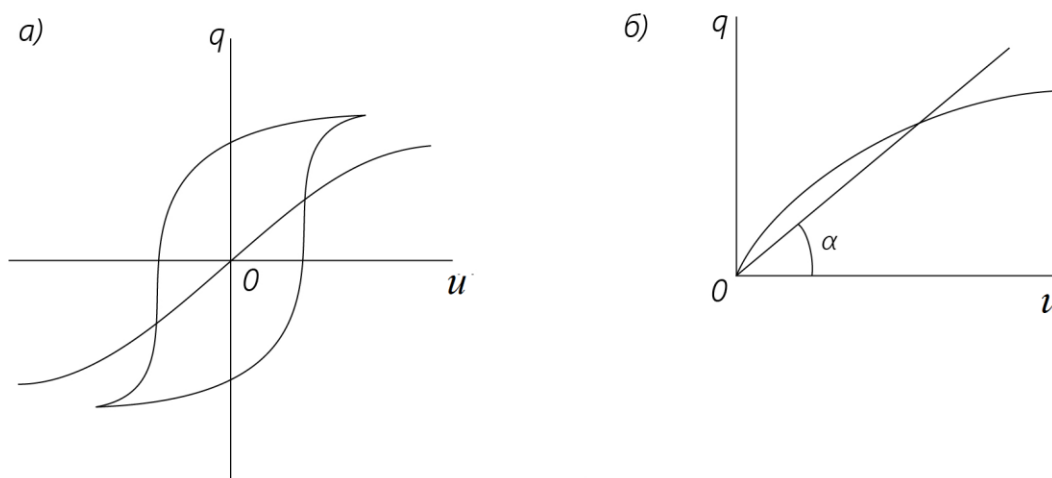


Рис. 1.3

В итоге получили описание ёмкости в основных понятиях теории цепей в виде нелинейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка. Конкретная форма этого уравнения существенно зависит от описания функции $q = f(u)$, например, в виде, подобном (1.5).

Аппроксимируем однозначную нелинейную вольт-кулоновую характеристику на рис. 1.3, а прямой, как показано на рис. 1.3, б. Эту прямую описывает уравнение

$$q = \operatorname{tg} \alpha \cdot u.$$

Тогда из последней формулы (1.9) следует:

$$i(t) = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{du(t)}{dt}.$$

Коэффициент $\operatorname{tg} \alpha$ обозначают буквой C и, к сожалению, называют также - ёмкостью. В итоге получим описание линейной ёмкости в виде следующего линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}. \quad (1.10)$$

Разделив в уравнении (1.10) переменные и проинтегрировав его, найдём интегральную форму связи между током и напряжением в линейной ёмкости:

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u(0). \quad (1.11)$$

Как следует из формулы (1.10), размерность коэффициента C в основных понятиях теории цепей $\text{В}^{-1}\text{Ас}$; внесистемная единица измерения этого коэффициента – фарада (Ф).

Из формул (1.9)–(1.11) видно, что ёмкость – элемент инерционный. Ток и напряжение связаны во времени дифференциальной (интегральной) зависимостью.

Из определения ёмкости следует, что через неё может протекать любой ток и к ней может быть приложено любое напряжение. Ёмкость нельзя разрушить потому что ёмкость не физический объект, а математическая модель.

Энергию, запасаемую ёмкостью, находим по формуле (1.3), а мощность – по формуле (1.4). Для линейной ёмкости получим:

$$W(t) = \int_{-\infty}^t u(t)i(t)dt = \int_{u(-\infty)}^{u(t)} Cu(t)du = \frac{Cu^2(t)}{2} - \frac{Cu^2(-\infty)}{2}.$$

Полагая, что вначале ёмкость была не заряжена и, следовательно, $u(-\infty) = 0$, найдём:

$$W(t) = \frac{Cu^2(t)}{2} \geq 0;$$

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = Cu(t) \frac{du(t)}{dt} \gg 0.$$

Как видно, ёмкость действительно ничего не потребляет, а только запасает и полностью возвращает энергию электрического поля.

Для нелинейной ёмкости, при $N > 1$ в формуле, подобной (1.5), соответствующие выражения могут быть сформированы.

Обычно используемые изображения линейной и нелинейной ёмкостей приведены на рис. 1.4, а, б соответственно.

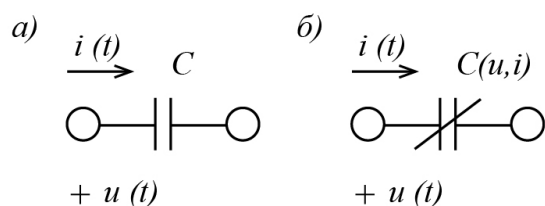


Рис. 1.4

Индуктивность – математическая модель (идеализированное устройство), имеющая два зажима, единственным электромагнитным процессом в которой является запасание и полный возврат энергии магнитного поля. Из этого определения следует, что все свойства индуктивности полностью определяет её ампер-веберная $\psi = f(i)$ или вебер-амперная $i = \varphi(\psi)$ характеристика.

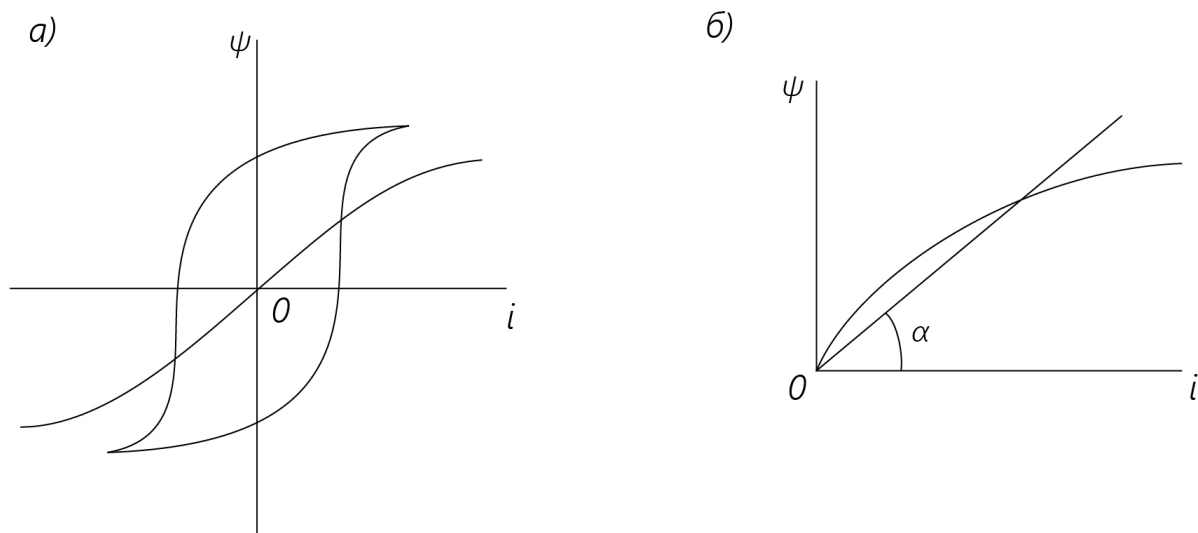


Рис. 1.5

На рис. 1.5, а показаны две возможных нелинейных ампер-веберных характеристик. Они могут быть описаны различными функциями $\psi(i)$. В любом описании, однако, существенно то, что поток ψ не входит в основные понятия теории цепей и поэтому нуждается в замене. Опишем индуктивность в терминах тока и напряжения, для чего выполним следующие преобразования:

$$\psi = f(i);$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} f(i);$$

$$u(t) = \frac{d}{dt} f(i). \quad (1.12)$$

В итоге получили описание индуктивности в основных понятиях теории цепей в виде нелинейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка. Конкретная форма этого уравнения существенно зависит от описания функции $\psi(i)$, например, в виде, подобном (1.5).

Аппроксимируем однозначную нелинейную ампер-веберную характеристику на рис. 1.5, *а* прямой. Как показано на рис. 1.5, *б*, эту прямую описывает уравнение

$$\psi = \operatorname{tg} \alpha \cdot i.$$

Тогда из последней формулы (1.12) следует:

$$u(t) = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{di(t)}{dt}.$$

Коэффициент $\operatorname{tg} \alpha$ обозначают буквой L и, к сожалению, называют так же – индуктивностью. В итоге получим описание линейной индуктивности в виде следующего линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (1.13)$$

Разделив в уравнении (1.13) переменные и проинтегрировав его, найдём интегральную форму связи между током и напряжением в линейной индуктивности:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt + i(0). \quad (1.14)$$

Как следует из формулы (1.13), размерность коэффициента L в основных понятиях теории цепей $\text{А}^{-1}\text{Вс}$; внесистемная единица измерения этого коэффициента – генри (Гн).

Из формул (1.12) и (1.14) видно также, что индуктивность – элемент инерционный, напряжение и ток связаны во времени дифференциальной (интегральной) зависимостью.

Из определения индуктивности следует, что через неё может протекать любой ток и к ней может быть приложено любое напряжение, индуктивность нельзя разрушить потому что индуктивность не физический объект, а математическая модель. Энергию, запасаемую индуктивностью, находим по формуле (1.3), а мощность – по формуле (1.4). Для линейной индуктивности получим:

$$W(t) = \int_{-\infty}^t u(t)i(t)dt = \int_{i(-\infty)}^{i(t)} Li(t)du = \frac{Li^2(t)}{2} - \frac{Li^2(-\infty)}{2}.$$

Полагая, что вначале индуктивность была обесточена и, следовательно, $i(-\infty) = 0$, найдём:

$$W(t) = \frac{Li^2(t)}{2} \geq 0;$$

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = Li(t) \frac{di(t)}{dt} >< 0.$$

Как видно, индуктивность действительно ничего не потребляет, а только запасает и полностью возвращает энергию магнитного поля.

Для нелинейной индуктивности, при $N > 1$ в формуле, подобной (1.5), могут быть сформированы соответствующие выражения.

Обычно используемые изображения линейной и нелинейной индуктивностей приведены на рис. 1.6, а, б соответственно.

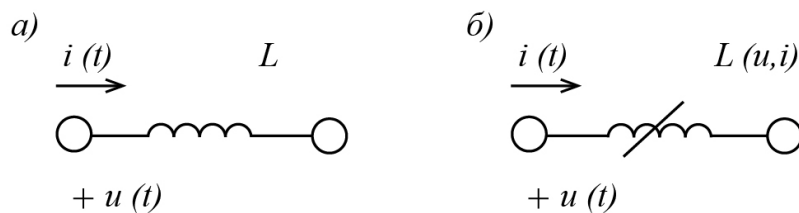


Рис. 1.6

Взаимное влияние магнитных полей. Из физики известно, что магнитные поля взаимодействуют. Опишем это взаимодействие в основных понятиях теории цепей.

Предположим, что есть две индуктивности, в которых протекают токи $i_1(t), i_2(t)$. Эти токи возбуждают магнитные поля, описываемые ампер-вебер-

ными характеристиками $\psi_{11} = f_{11}(i_1)$, $\psi_{22} = f_{22}(i_2)$. При переходе к основным понятиям теории цепей после преобразований получим подобные формуле (1.12) следующие соотношения:

$$u_1(t) = \frac{d}{dt} f_{11}(i_1); u_2(t) = \frac{d}{dt} f_{22}(i_2).$$

Предположим далее, что токи $i_1(t), i_2(t)$ возбуждают также дополнительные магнитные поля, описываемые ампер - веберными характеристиками $\psi_{12} = f_{12}(i_2)$, $\psi_{21} = f_{21}(i_1)$, которые, благодаря имеющемуся взаимодействию, дополняют магнитные поля, описываемые ампер - веберными характеристиками $\psi_{11} = f_{11}(i_1)$, $\psi_{22} = f_{22}(i_2)$ соответственно. Учитывая эти дополнения, получим:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{d}{dt} f_{11}(i_1) + \frac{d}{dt} f_{12}(i_2); \\ u_2(t) &= \frac{d}{dt} f_{22}(i_2) + \frac{d}{dt} f_{21}(i_1). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Знаки перед вторыми слагаемыми выбираем на основании очевидных экспериментов, пропуская через индуктивности поочерёдно токи $i_1(t), i_2(t)$ и оба тока совместно.

В итоге сформировали описание двух индуктивностей со взаимно влияющими магнитными полями в виде связанной системы (1.15) из двух нелинейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка. Конкретная форма этих уравнений существенно зависит от описаний функций $\psi_{11}(i_1)$, $\psi_{22}(i_2)$, $\psi_{12}(i_2)$, $\psi_{21}(i_1)$, например, в виде, подобном (1.5).

Предположим, что все ампер - веберные характеристики в уравнениях (1.15) нелинейные однозначные, подобные показанной на рис. 1.5, а. Аппроксимируем их прямыми, аналогичными прямой на рис. 1.5, б. В этом случае их описывают уравнения, подобные уравнению (1.13), тогда из формул (1.15) получим:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + \operatorname{tg} \alpha_3 \cdot \frac{di_2(t)}{dt}; \\ u_2(t) &= \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} + \operatorname{tg} \alpha_4 \cdot \frac{di_1(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Коэффициенты $\operatorname{tg}\alpha_1, \operatorname{tg}\alpha_2$ уже определены как индуктивности. Обозначим их буквами L_1, L_2 . Как видно из уравнений (1.16), коэффициенты $\operatorname{tg}\alpha_3, \operatorname{tg}\alpha_4$ имеют ту же размерность $\text{А}^{-1}\text{Вс}$, что индуктивности L_1, L_2 , но связывают изменения тока в одной индуктивности с напряжением на зажимах другой, т.е. определяют взаимное влияние двух, в рассматриваемом случае, магнитных полей. Их поэтому называют коэффициентами взаимной индукции, а индуктивности L_1, L_2 , иногда называют также коэффициентами самоиндукции. Обозначим коэффициенты взаимной индукции $\operatorname{tg}\alpha_3, \operatorname{tg}\alpha_4$ буквами M_1, M_2 соответственно; очевидно, что в линейном случае $M_1 = M_2 = M$. В итоге из формул (1.16) получим описание двух линейных индуктивностей линейно индуктивно связанных между собой в виде следующей системы из двух линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt}; \\ u_2(t) &= L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Разделив в уравнениях (1.17) переменные и проинтегрировав их, найдем интегральные формы связи между токами и напряжениями в двух линейных линейно индуктивно связанных индуктивностях:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \int_{-\infty}^t (u_1(t) \pm \frac{M}{L_2} u_2(t)) dt = \\ &= \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t (u_1(t) \pm \frac{M}{L_2} u_2(t)) dt + i_1(0); \\ i_2(t) &= \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \int_{-\infty}^t (u_2(t) \pm \frac{M}{L_1} u_1(t)) dt = \\ &= \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t (u_2(t) \pm \frac{M}{L_1} u_1(t)) dt + i_2(0). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Для оценки степени влияния магнитных полей в рассматриваемом случае двух индуктивностей введём коэффициент связи $k_{\text{св}}$, определив его так:

$$k_{\text{св}} = \sqrt{\frac{\psi_{21}\psi_{12}}{\psi_{11}\psi_{22}}} = \sqrt{\frac{\psi_{21}/i_1 \cdot \psi_{12}/i_2}{\psi_{11}/i_1 \cdot \psi_{22}/i_2}} = \sqrt{\frac{M}{L_1} \frac{M}{L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad k_{\text{св}} \in [0;1]. \quad (1.19)$$

Аналогичным образом можно сформировать описания трёх и более индуктивностей, в том числе и нелинейных, по-разному индуктивно связанных между собой.

1.4. Независимые, зависимые и управляемые источники электромагнитной энергии

Независимые источники электромагнитной энергии.

Так как основных понятий в теории цепей два – напряжение и ток, то и независимых источников энергии, очевидно, должно быть два – напряжения и тока. Введём их.

Независимый источник напряжения – математическая модель (идеализированное устройство), имеющая два зажима и отличающаяся тем, что напряжение на этих зажимах не зависит от величины и формы тока, протекающего от одного зажима к другому. Обычно используемое изображение независимого источника напряжения приведено на рис. 1.7, а.

Из определения источника напряжения вытекают пять следствий.

Во-первых, все свойства независимого источника напряжения описывают его ампер-вольтовые характеристики – прямые, параллельные оси абсцисс и отсекающие на оси ординат напряжения этого источника, как показано на рис. 1.7, б.

Во-вторых, напряжение $u(t)$ на зажимах источника напряжения изменяется по своему собственному закону и не зависит от того, какой формы ток - $i_1(t)$, $i_2(t)$ или любой другой, протекает от одного из этих зажимов к другому, как показано на рис. 1.7, в. Для иллюстрации первых двух следствий на рис. 1.7, в выбран некоторый момент времени $t = \tau$, а значения напряжения $u_1(\tau), u_2(\tau)$ и токов $i_1(\tau)$, $i_2(\tau)$ перенесены на соответствующую ампер-вольтовую характеристику рис. 1.7, б.

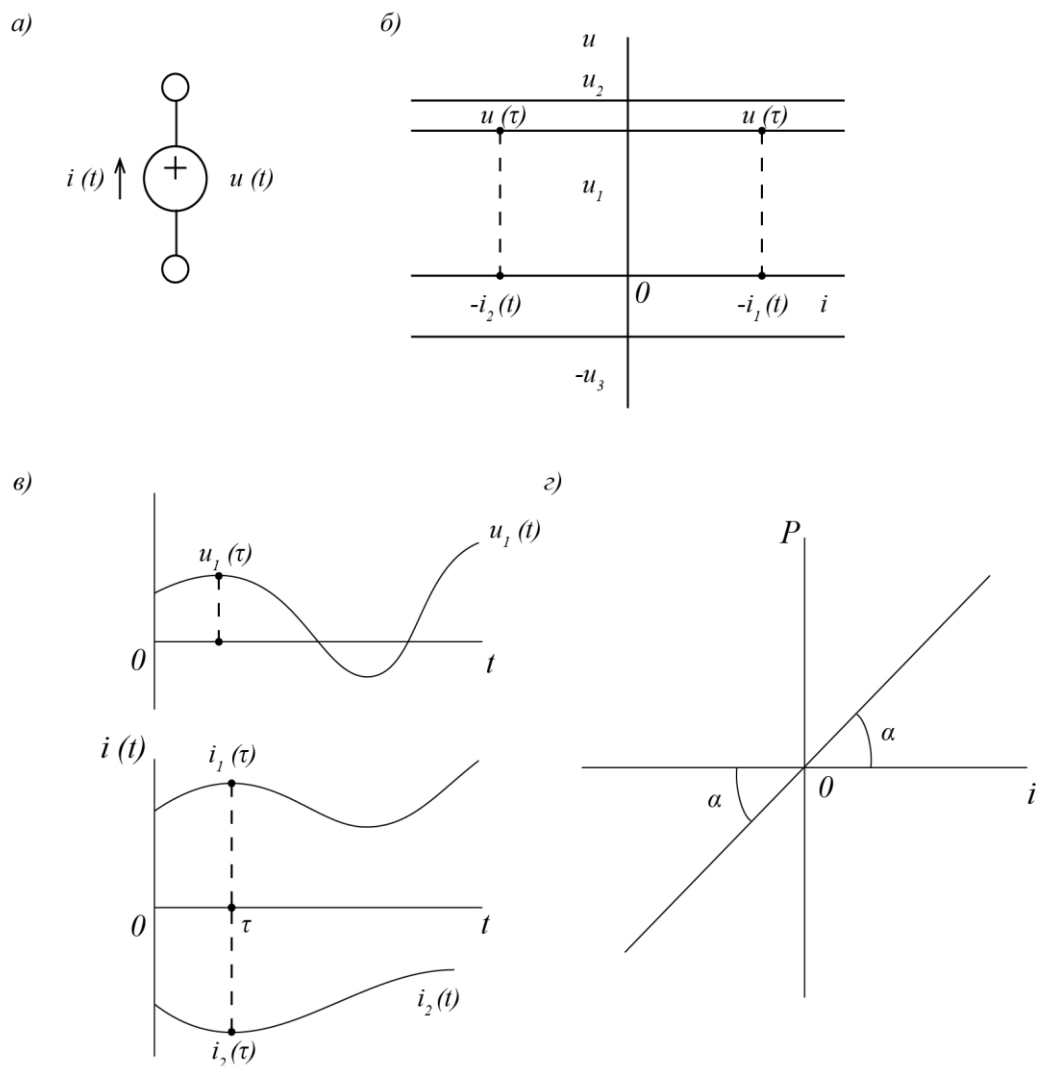


Рис. 1.7

В-третьих, независимый источник напряжения нельзя разрушить, он может отдавать и потреблять любую мощность, в том числе и бесконечно большую, как видно из рис. 1.7, *д*. На этом рисунке наклон прямой к оси абсцисс определяет напряжение источника, так что

$$p = ui = \operatorname{tg} \alpha \cdot i.$$

В первом квадранте, где ток положителен, источник напряжения генерирует электромагнитную энергию, $p > 0$. В третьем квадранте, где ток отрицателен, источник напряжения потребляет энергию, $p < 0$.

В четвёртых, из определения следует, что последовательно можно соединять любое количество разных по напряжению и разнополярных источников напряжения и заменять их, например, одним, напряжение которого равно сумме напряжений соединённых источников, а полярность его напряжения определяет знак этой суммы, как показано на рис. 1.8, а. Параллельно можно соединять также любое количество источников напряжения, но только однополярных и с одинаковым напряжением; в этом случае их можно заменить, например, одним источником с той же полярностью и с тем же напряжением, как показано на рис. 1.8, б. Параллельно нельзя соединять даже два источника напряжения, если они разнополярны, хотя бы и с одинаковым напряжением, или хотя бы и однополярных, но с разными напряжениями, как показано на рис. 1.8, в, г соответственно.

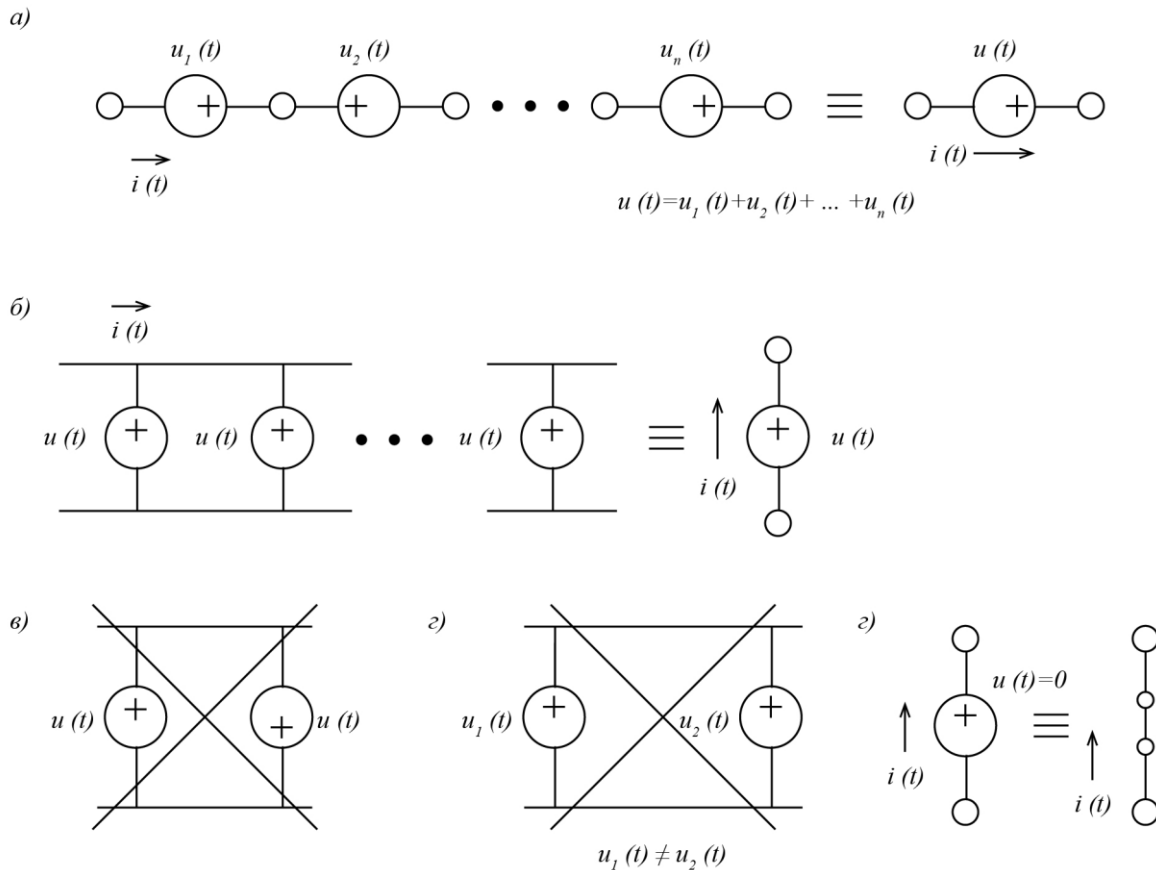


Рис. 1.8

Очевидно, что справедливы и обратные переходы: один источник напряжения можно заменить последовательным соединением любого количества разных по напряжению и разнополярных источников напряжения

с тем, чтобы сумма их напряжений по величине и по полярности была равна напряжению исходного источника; один источник напряжения можно заменить параллельным соединением любого количества таких же по величине и полярности источников напряжения.

В-пятых, из определения следует, что удалить источник напряжения, значит, положить его напряжение равным нулю, т. е. заменить источник коротким замыканием его зажимов, как показано на рис. 1.8, *д*.

Независимый источник тока — математическая модель (идеализированное устройство), имеющая два зажима и отличающаяся тем, что ток, протекающий от одного зажима к другому, не зависит от величины и формы напряжения на этих зажимах. Обычно используемое изображение независимого источника тока приведено на рис. 1.9, *а*.

Из данного определения источника тока вытекает пять следствий.

Во-первых, все свойства независимого источника тока описывают его вольт-амперные характеристики — прямые, параллельные оси абсцисс и отсекающие на оси ординат токи этого источника, как показано на рис. 1.9, *б*.

Во-вторых, ток $i(t)$ через зажимы источника тока изменяется по своему собственному закону и не зависит от того, какой формы напряжение — $u_1(t)$, $u_2(t)$ или любое другое есть на этих зажимах, как показано на рис. 1.9, *в*. Для иллюстрации первых двух следствий на рис. 1.9, *в* выбран некоторый момент времени $t = \tau$, а значения тока $i(\tau)$ и напряжений $u_1(\tau)$, $u_2(\tau)$ перенесены на соответствующую вольтамперную характеристику рис. 1.9, *б*.

В-третьих, независимый источник тока нельзя разрушить, он может отдавать и потреблять любую мощность, в том числе и бесконечно большую, как видно из рис. 1.9, *г*. На этом рисунке наклон прямой к оси абсцисс определяет ток источника, так что

$$p = iu = \operatorname{tg} \alpha \cdot u.$$

В первом квадранте, где напряжение положительно, источник тока генерирует электромагнитную энергию, $p > 0$. В третьем квадранте, где напряжение отрицательно, источник тока потребляет энергию, $p < 0$.

В четвёртых, из определения следует, что параллельно можно соединять любое количество разных по току и разнонаправленных источников тока и заменять их, например, одним, ток которого равен сумме токов соединённых источников, а направление его тока определяет знак этой суммы, как показано на рис. 1.10, *а*. Последовательно можно соединять также любое

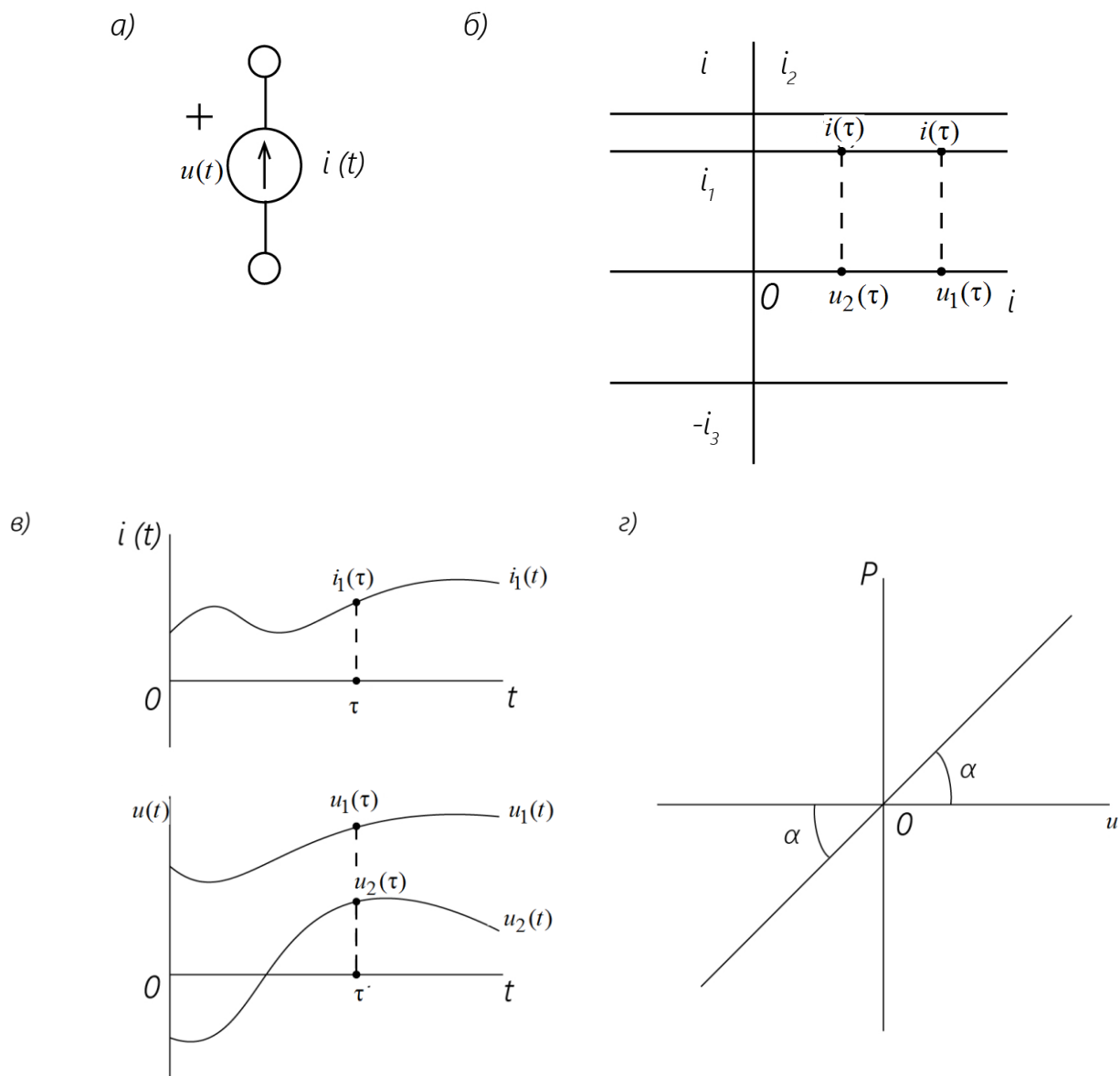


Рис. 1.9

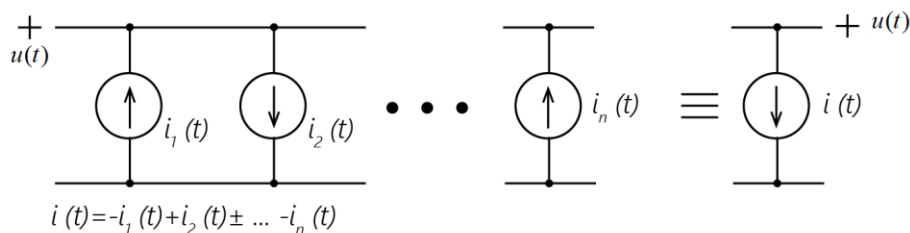
количество источников тока, но только однонаправленных и с одинаковым током; в этом случае их можно заменить, например, одним источником с тем же направлением тока и с тем же током, как показано на рис. 1.10, б. Последовательно нельзя соединять даже два источника тока, если они разнонаправлены, хотя бы и с одинаковыми токами, или хотя бы и однонаправленных, но с разными токами, как показано на рис. 1.10, в, г соответственно.

Очевидно, что справедливы и обратные переходы: один источник тока можно заменить параллельным соединением любого количества разных по току и разнонаправленных источников тока с тем, чтобы сумма их токов по

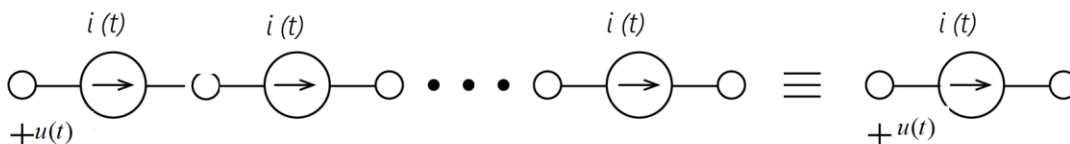
величине и направлению была равна току исходного источника; один источник тока можно заменить последовательным соединением любого количества таких же по величине и направлению источников тока.

В пятых, из определения следует, что удалить источник тока, значит, положить его ток равным нулю, т. е. заменить источник разрывом его зажимов, как показано на рис. 1.10, д.

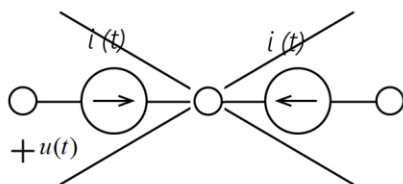
а)



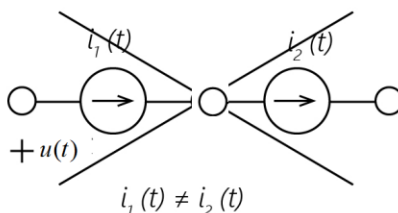
б)



в)



з)



д)

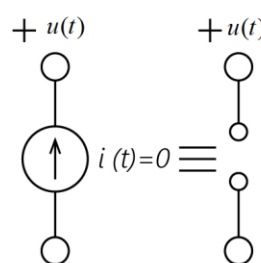


Рис.1.10

В заключении отметим, что между собой независимые источники напряжения и тока можно соединять произвольно, последовательно и параллельно, это не противоречит определению ни того, ни другого. При последовательном соединении, приведённом на рис. 1.11, а, заведомо известен ток через зажимы источника напряжения – при всех условиях он равен $i(t)$, а напряжение $u_{\Sigma}(t)$ может быть любым. При параллельном соединении, показанном на рис. 1.11, б, заведомо известно напряжение на зажимах источника тока – при всех условиях оно равно $u(t)$, а ток $i_{\Sigma}(t)$ может быть любым.

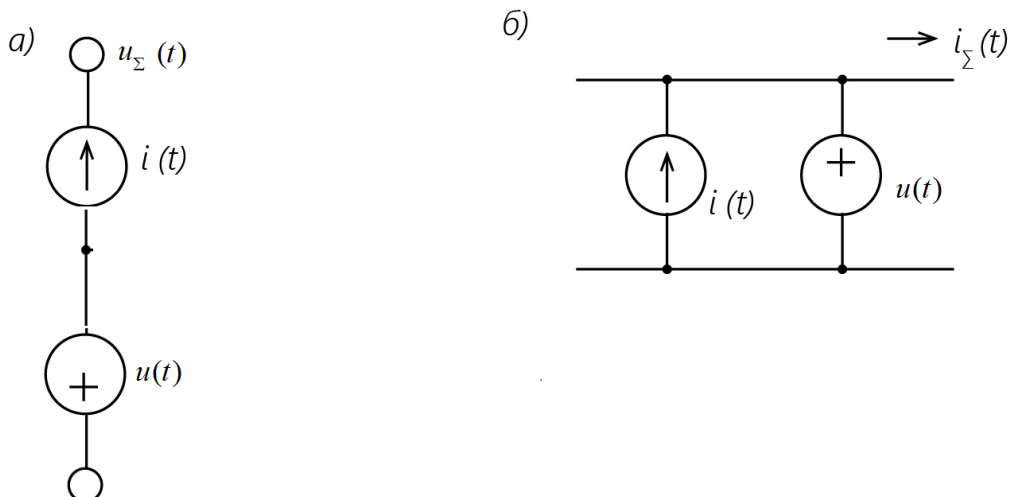


Рис.1.11

Зависимые источники напряжения и тока

При исследовании электрических цепей иногда оказывается полезным заменять пассивные элементы цепи их эквивалентными зависимыми источниками напряжения и тока, которые принципиально отличаются от аналогичных независимых. Введём их.

Зависимый источник напряжения — математическая модель (идеализированное устройство), имеющая два зажима и отличающаяся тем, что напряжение на этих зажимах зависит от величины и формы тока, протекающего от одного зажима к другому. Обычно используемое изображение зависимого источника напряжения приведено на рис. 1.12, а.

Зависимый источник напряжения, например, замещающий резистор, описывает следующее уравнение:

$$u(i(t)) = Ri(t);$$

замещающий ёмкость — уравнение

$$u(i(t)) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u(0);$$

замещающий индуктивность — уравнение

$$u(i(t)) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

Зависимый источник напряжения не генерирует электромагнитную энергию, а только потребляет (замещающий резистор) или только накапливает и возвращает (замещающий ёмкость, индуктивность).

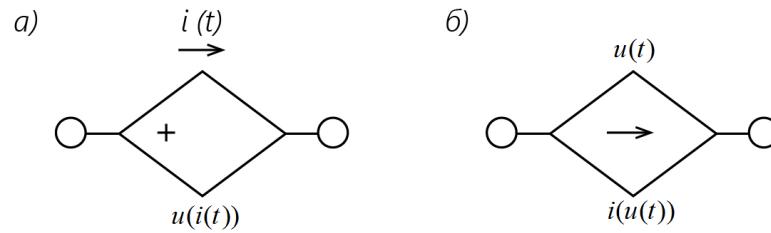


Рис. 1.12

Зависимый источник тока – математическая модель (идеализированное устройство), имеющая два зажима и отличающаяся тем, что ток, протекающий от одного зажима к другому, зависит от величины и формы напряжения на этих зажимах. Обычно используемое изображение зависимого источника тока показано на рис. 1.12, б).

Зависимый источник тока, например, замещающий резистор, описывает следующее уравнение:

$$i(u(t)) = Gu(t);$$

замещающий ёмкость – уравнение

$$i(u(t)) = C \frac{du(t)}{dt};$$

замещающий индуктивность – уравнение

$$i(u(t)) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt + i(0).$$

Зависимый источник тока не генерирует электромагнитную энергию, а только потребляет (замещающий резистор) или только накапливает и возвращает (замещающий ёмкость, индуктивность).

Очевидно, что мощность, потребляемая или накапливаемая любым зависимым источником, не ограничена поскольку они замещают R, L, C элементы.

Управляемые источники

Управляемый источник математическая модель (идеализированное устройство), имеющая пару входных и пару выходных зажимов, содержащая зависимый источник напряжения или тока на выходе, причём напряжение или ток на выходе зависят от напряжения или тока на входе, отличающаяся тем, что мощность на входных зажимах равна нулю, а мощность на выходных зажимах может быть отлична от нуля. В этом заключается принцип усиления – изменяя сигнал нулевой мощности на входе, ток или напряжение, можно управлять изменением сигнала ненулевой мощности на выходе, током или напряжением.

По две величины, ток и напряжение, на входе и выходе, образуют четыре комбинации «вход – выход». Опишем их.

Источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН). Его схема приведена на рис. 1.13, а. Как видно из схемы, мощность на входе

$$p_1(t) = u_1(t)i_1(t) = 0,$$

мощность на выходе

$$p_2(t) = u_2(t)i_2(t) = ku_1(t)i_2(t) \geq 0,$$

где k – безразмерный коэффициент передачи управляемого источника.

Изменяя сигнал $u_1(t)$ на входе схемы рис. 1.13, а, изменяем сигнал $u_2(t)$ зависимого источника напряжения $ku_1(t)$ и мощность $p_2(t)$ на выходе управляемого источника.

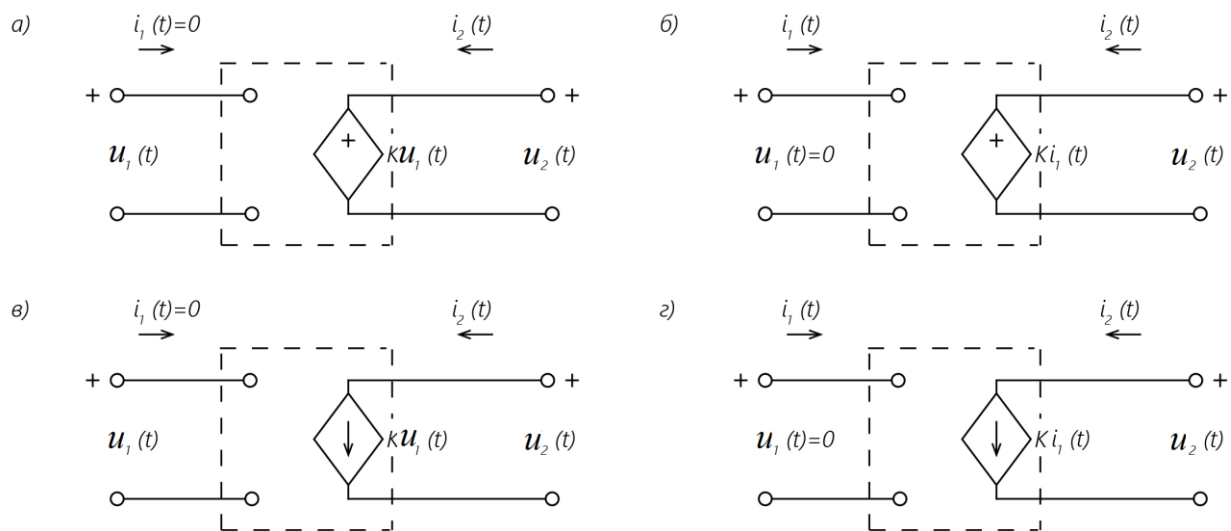


Рис. 1.13

Источник напряжения, управляемый током (ИНУТ). Его схема приведена на рис. 1.13, б. Как видно из схемы, мощность на входе

$$p_1(t) = u_1(t)i_1(t) = 0,$$

мощность на выходе

$$p_2(t) = u_2(t)i_2(t) = ki_1(t)i_2(t) \geq 0,$$

где k – коэффициент передачи управляемого источника, имеющий размерность Ом.

Изменяя сигнал $i_1(t)$ на входе схемы рис.1.13, б, изменяем сигнал $u_2(t)$ зависимого источника напряжения $ki_1(t)$ и мощность $p_2(t)$ на выходе управляемого источника.

Источник тока, управляемый напряжением (ИТУН). Его схема приведена на рис. 1.13, в. Как видно из схемы, мощность на входе

$$p_1(t) = u_1(t)i_1(t) = 0,$$

мощность на выходе

$$p_2(t) = u_2(t)i_2(t) = u_2(t)ku_1(t) \geq 0,$$

где k – коэффициент передачи управляемого источника, имеющий размерность См.

Изменяя сигнал $u_1(t)$ на входе схемы рис. 1.13, в, изменяем сигнал $i_2(t)$ зависимого источника тока $ku_1(t)$ и мощность $p_2(t)$ на выходе управляемого источника.

Источник тока, управляемый током (ИТУТ). Его схема приведена на рис. 1.13, г. Как видно из схемы, мощность на входе

$$p_1(t) = u_1(t)i_1(t) = 0,$$

мощность на выходе

$$p_2(t) = u_2(t)i_2(t) = u_2(t)ki_1(t) \geq 0,$$

где k – безразмерный коэффициент передачи управляемого источника.

Изменяя сигнал $i_1(t)$ на входе схемы рис. 1.13, г, изменяем сигнал $i_2(t)$ зависимого источника тока $ki_1(t)$ и мощность $p_2(t)$ на выходе управляемого источника.

В заключение отметим, что мощность $p_2(t)$ на выходе любого управляемого источника не ограничена.

1.5. Математическое моделирование физически существующих электротехнических устройств с помощью идеальных элементов и источников. Линеаризация нелинейных статических характеристик электротехнических устройств. Активные элементы цепей

1.5.1. Моделирование электротехнических устройств и линеаризация их нелинейных характеристик

До сих пор, вводя и описывая элементы и источники, мы всё время подчеркивали их идеальный характер, например, способность неограниченно накапливать, отдавать или потреблять электромагнитную энергию. Физически существующие электротехнические устройства, конечно, не обладают такими свойствами. Естественно возникает вопрос: можно ли с помощью идеальных элементов и источников описать существующие электротехнические устройства и, если можно, то как это сделать и в каких пределах такое описание будет справедливо? В общей форме ответ на поставленный вопрос таков: с помощью совокупности идеальных элементов и источников всегда можно описать существующие электротехнические устройства; это описание справедливо до тех пор, пока справедливы, во-первых, предположение о достаточности двух понятий (тока и напряжения) и, во вторых, допущение о постоянстве плотности тока и линейности изменения напряжения, а результаты расчёта и эксперимента с приемлемой для практики точностью совпадают. Слова «приемлемая для практики точность» допускают широкое толкование. Приведём достаточно очевидные примеры.

Первый. Независимый источник напряжения может генерировать неограниченную мощность. Физически существующий источник напряжения (аккумулятор, генератор и т. п.) прежде всего источник ограниченной мощности. Однако, соединив последовательно идеальные независимый источник напряжения $u(t)$ и резистор R , получим математическую модель, учитывающую, по крайней мере, это обстоятельство. Максимальная мощность такой модели конечна, $p_{\max}(t) = u^2(t) / R$.

Второй. Ёмкость ничего не потребляет. Конденсатор, также накопительный элемент, обладает сопротивлением утечки. Однако, соединив параллельно идеальные ёмкость C и резистор R , получим математическую

модель, учитывающую, по крайней мере, это обстоятельство. Такие примеры можно продолжать, при необходимости наращивая сложность моделей.

Более существенным и трудным является вопрос о допустимой линеаризации нелинейных характеристик электротехнических устройств. Прежде всего необходимо отметить, что существующие сейчас методы решения нелинейных интегрально-дифференциальных уравнений не требуют обязательной линеаризации, теперь практически всегда можно использовать нелинейную математическую модель электрической цепи. Тем не менее может возникнуть надобность в исследовании в первом приближении линейной модели, т.е. модели, нелинейные характеристики которой аппроксимированы (интерполированы) сплайнами первого порядка. Линеаризуя нелинейные характеристики, следует соблюдать большую осторожность. По словам А. А. Самарского, внутренним свойством нелинейных систем оказывается не плавное, а скачкообразное изменение их поведения, причём внешние условия при этом могут изменяться непрерывно.

Более подробно этот вопрос обсуждается в главе пятой, посвящённой исследованию нелинейных цепей. Здесь мы ограничимся утверждением, что если нелинейные характеристики электротехнических устройств меняются плавно, то в достаточно малой окрестности рабочей точки их можно линеаризовать, не слишком опасаясь непредсказуемого поведения изучаемого объекта.

1.5.2. Активные элементы электрических цепей

Активный элемент — математическая модель (идеализированное устройство), имеющая два или более пар зажимов, часть из которых входные, а другие выходные, отличающаяся тем, что, изменяя сигнал малой или нулевой мощности на входе, можно управлять изменением сигнала большой мощности на выходе. Из определения следует, что активный элемент обязательно содержит управляемый источник. Иллюстрируем это определение двумя примерами.

Пример 1.1. Линейная модель триода. На рис. 1.14, *а* показан триод, а на рис. 1.14, *б* — семейство его анодных характеристик. Входными зажимами триода являются сетка С и катод К, выходными — анод А и катод К, который, следовательно, служит общим зажимом для входа и выхода. Входными сигналами являются напряжение $u_1(t)$ между сеткой и катодом и ток сетки

$i_1(t)$, выходными – напряжение $u_2(t)$ между анодом и катодом и ток анода $i_2(t)$. Анодные характеристики триода, как видно на рис. 1.14, б, достаточно гладкие, поэтому их можно линеаризовать.

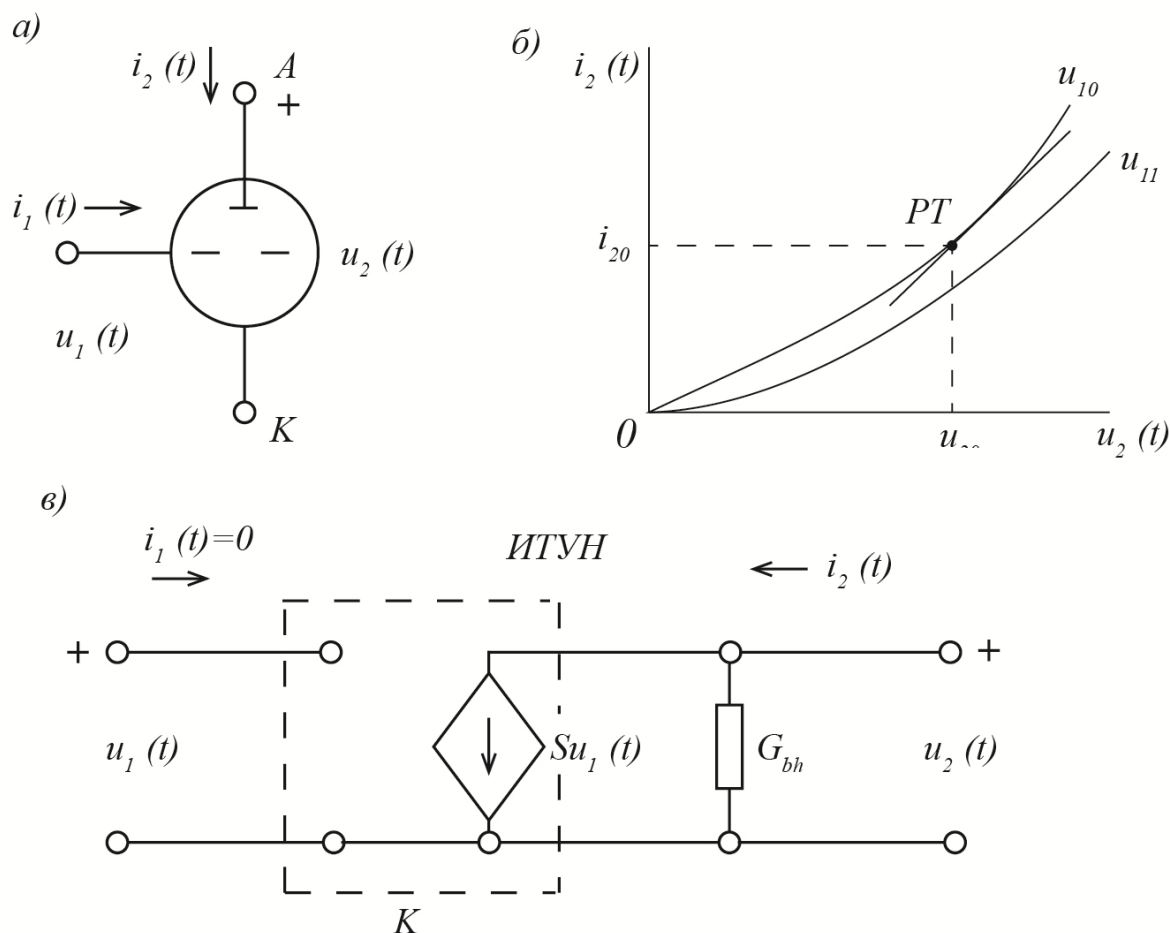


Рис. 1.14

Линеаризуем, в окрестности рабочей точки PT с координатами u_{20}, i_{20} , ту из них, которая соответствует сеточному напряжению u_{10} . В нормальном режиме работы ток сетки отсутствует, $i_1(t) = 0$, а ток анода $i_2(t)$ зависит от напряжений $u_1(t), u_2(t)$. В рассматриваемом случае получим следующее линейное описание триода в дельта-окрестности выбранной рабочей точки:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 0; \\ i_2(t) &= Su_1(t) + G_{bh}u_2(t), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где крутизна анодной характеристики в рабочей точке

$$S = \frac{\Delta i_2}{\Delta u_1}, \quad \Delta u_2 = 0;$$

внутренняя проводимость триода в рабочей точке

$$G_{\text{вн}} = \frac{\Delta i_2}{\Delta u_2}, \quad \Delta u_1 = 0.$$

Линейная математическая модель триода как активного элемента электрической цепи, содержащего ИТУН и описываемого уравнениями (1.20), показана на рис. 1.14, в. Из схемы рис. 1.14, в, видно, что мощность на входе

$$p_1(t) = u_1(t)i_1(t) = 0,$$

мощность на выходе

$$p_2(t) = u_2(t)i_2(t) = u_2(t)[S u_1(t) + G_{\text{вн}} u_2(t)] \geq 0.$$

Напряжение $u_2(t)$ обычно фиксируют, тогда, изменяя сигнал $u_1(t)$ нулевой мощности на входе активного элемента, получим изменение сигнала $i_2(t)$ ненулевой мощности на его выходе.

Пример 1.2. Линейная модель транзистора. На рис.1.15, а показан транзистор, а на рис. 1.15, б семейство его коллекторно-базовых характеристик. Входными зажимами транзистора являются база Б и эмиттер Э, выходными – коллектор К и эмиттер Э, который, следовательно, служит общим зажимом для входа и выхода.

Входными сигналами являются напряжение $u_1(t)$ между базой и эмиттером и ток базы $i_1(t)$, выходными – напряжение $u_2(t)$ между коллектором и эмиттером и ток коллектора $i_2(t)$. Коллекторно-базовые характеристики транзистора, как видно из рис.1.15, б, достаточно гладкие, поэтому их можно линеаризовать. Линеаризуем, в окрестности рабочей точки РТ с координатами u_{20} i_{20} , ту из них, которая соответствует базовому току i_{10} . В нормальном режиме работы напряжение базы отсутствует, $u_1(t) = 0$, а напряжение коллектора зависит от токов $i_1(t), i_2(t)$. В рассматриваемом случае получим следующее линейное описание транзистора в дельта-окрестности выбранной рабочей точки:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 0; \\ u_2(t) &= \alpha R_K i_1(t) + R_K i_2(t), \end{aligned} \tag{1.21}$$

где коллекторное сопротивление в рабочей точке;

$$R_K = \frac{\Delta u_2}{\Delta i_2}, \quad \Delta i_1 = 0$$

коэффициент пропорциональности $\alpha < 1$.

$$\alpha = \frac{\Delta u_2}{R_K \Delta i_1}, \quad \Delta i_2 = 0, \quad \alpha < 1.$$

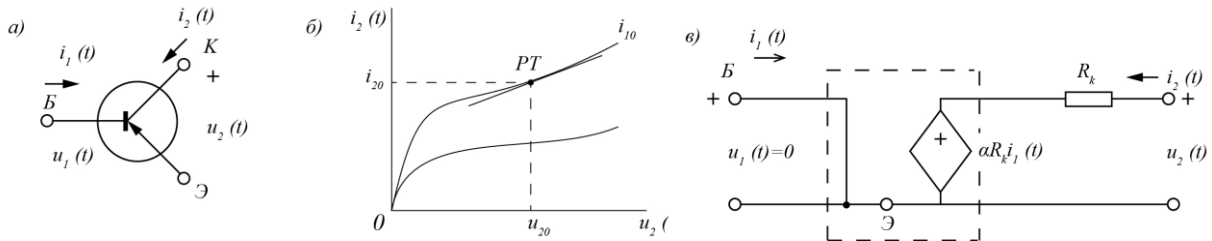


Рис. 1.15

Линейная модель транзистора как активного элемента электрической цепи, содержащего ИНУТ и описываемого уравнениями (1.21), показана на рис. 1.15, в. Из схемы рис. 1.15, в, видно, что мощность на входе

$$p_1(t) = u_1(t)i_1(t) = 0,$$

мощность на выходе

$$p_2(t) = u_2(t)i_2(t) = [\alpha R_K i_1(t) + R_K i_2(t)]i_2(t) \geq 0.$$

Напряжение $u_2(t)$ обычно фиксируют, тогда, изменяя сигнал $i_1(t)$ нулевой мощности на входе активного элемента, получим изменение сигнала $i_2(t)$ ненулевой мощности на его выходе.

В заключение заметим, что помимо описанных простейших моделей триода и транзистора, существует много других, гораздо более сложных и более точно учитывавших особенности их работы.

Напомним, что, с одной стороны, резистор, ёмкость, индуктивность, различные источники введены совершенно формально. Это элементы, учитывающие тепловую, электрическую, магнитную, генерируемую и преобразуемую энергию тока и напряжения — основных понятий теории цепей. Они не введены как элементы, описывающие, пусть идеализированно, какие-либо физические объекты, например, сопротивления, конденсаторы и т. п. С другой стороны, формально введённые элементы в их совокупности описывают существующие физические объекты.

1.6. Элементы структуры цепи. Постулаты Кирхгофа. Некоторые сведения из топологии. Формирование системы линейно независимых уравнений Кирхгофа

1.6.1. Элементы структуры цепи и постулаты Кирхгофа

Очевидно, что из одного и того же набора одних и тех же элементов и источников можно составить разные электрические цепи, которые, следовательно, будут обладать разными свойствами. Например, из одного и того же набора $R, L, C, u(t)$ можно составить целый ряд различных цепей, две из которых приведены на рис. 1.16, а, б. Видно, что токи, протекающие в элементах L, C в той и другой цепи различны, поэтому их изменение при одном и том же сигнале $u(t)$ будет различным. Таким образом приходим к выводу, что необходимы дополнительные понятия, описывающие способы соединения элементов и источников. Введём их.

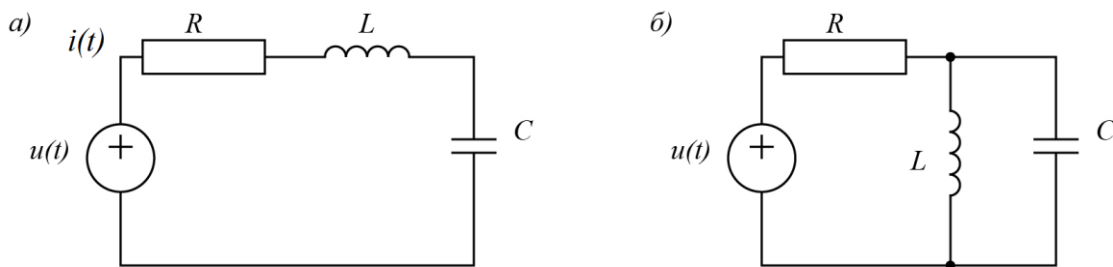


Рис. 1.16

Узел – зажим, к которому присоединены два и более элементов или источников. Узел, к которому присоединены только два элемента или источника, называется устранимым.

Ветвь – совокупность последовательно соединенных элементов и источников между двумя узлами.

Контур – замкнутая последовательность ветвей и узлов, обходя которую в произвольном, но определённом направлении, каждую ветвь и каждый узел проходим только один раз. Отсюда вытекает, что ветвь – частный случай контура, замкнутого через разрыв цепи.

Следовательно, для описания способов соединения элементов и источников существуют два понятия элементов структуры цепи – узел и контур. Необходимы их формальные описания. Эти описания дают два постулата Кирхгофа.

Постулат Кирхгофа для узлов гласит – алгебраическая сумма токов ветвей, подключенных к любому узлу, равна нулю:

$$\sum_{\kappa} i_{\kappa}(t) = 0. \quad (1.22)$$

Постулат Кирхгофа для контуров гласит – алгебраическая сумма напряжений ветвей и разрывов при обходе любого контура равна нулю:

$$\sum_{\kappa} u_{\kappa}(t) = 0. \quad (1.23)$$

Постулаты Кирхгофа дают необходимые условия для описания электрической цепи. Проанализируем их.

Рассмотрим достаточно общий пример пассивной нелинейной цепи, состоящий из нелинейного резистора, линейных индуктивности и ёмкости, независимых источников напряжения и тока, схема которой приведена на рис. 1.17, а. Как видно, эта цепь содержит два узла I, II и три ветви 1, 2, 3.

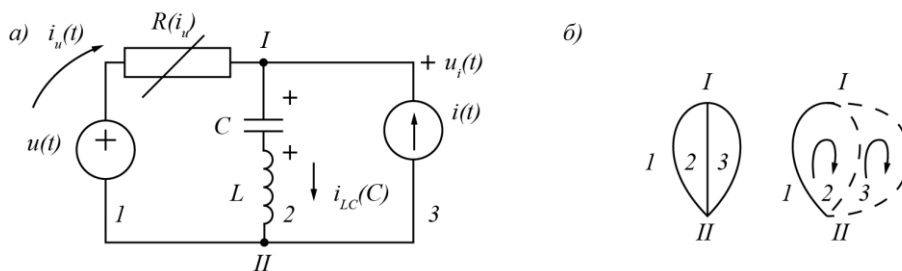


Рис. 1.17

Неизвестными, подлежащими определению, являются токи или напряжения в ветвях. Из определений независимых источников известно, что в содержащих их ветвях всегда неизвестны ток через источник напряжения и напряжение на источнике тока так как они могут быть любыми. В ветвях, не содержащих независимых источников, неизвестными могут быть как токи, так и напряжения. Итак, заведомо нужно найти ток $i_u(t)$ в ветви 1, напряжение $u_i(t)$ в ветви 3; в ветви 2 будем искать, например, ток $i_{LC}(t)$. Направления искомых токов и полярность искомого напряжения произвольны так как они неизвестны. Всего, следовательно, есть три подлежащих определению переменных – как всегда столько, сколько ветвей. Для их отыскания нужно составить систему из трех линейно независимых уравнений, однако даже для такой простой по структуре цепи на основе

постулатов Кирхгофа можно записать два уравнения для узлов и три для контуров. Выпишем их:

$$\begin{aligned} i_u(t) - i_{LC}(t) + i(t) &= 0; \\ -i_u(t) + i_{LC}(t) - i(t) &= 0; \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} -u(t) + u_R(i_u(t)) + \frac{1}{C} \int_0^t i_{LC}(t) dt + u_C(0) + L \frac{di_{LC}(t)}{dt} &= 0; \\ -L \frac{di_{LC}(t)}{dt} - \frac{1}{C} \int_0^t i_{LC}(t) dt - u_C(0) + u_i(t) &= 0; \\ -u(t) + u_R(i_u(t)) + u_i(t) &= 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Знаки в уравнениях (1.22), (1.23) выбирали произвольным, но определённым образом. Именно, при формировании уравнений (1.24), (1.25) произвольным, но определённым образом полагали, что токи, втекающие в узел, положительны, а вытекающие – отрицательны; протекающий через пассивный элемент ток создает на нём падение напряжения со знаком «+» на зажиме, в который он втекает; контуры обходили произвольно, но определённо по часовой стрелке; напряжения в уравнения (1.25) включали со знаком «+», если при обходе контура первым встречали зажим со знаком «+», и со знаком «-», если первым встречали зажим без знака «+».

Система уравнений (1.24), (1.25) избыточна и эти уравнения не являются линейно независимыми. Например, второе уравнение (1.24) получается из первого умножением на «-1»; сложение первого и второго уравнений (1.25) даёт третье и т. д. Становится очевидно, что из необходимых условий, даваемых постулатами Кирхгофа, нужно выделить достаточные. Это и позволит из общей массы уравнений, записанных на основании постулатов Кирхгофа, выделить ту или другую комбинацию линейно независимых.

Сформулируем эту задачу в общей постановке. Дана произвольная цепь, насчитывающая n узлов и m ветвей. Следовательно, в ней, как всегда, есть m подлежащих определению токов и напряжений и для них нужно составить систему из m линейно независимых уравнений. На основании постулата Кирхгофа для узлов можно записать n уравнений, из которых по известному из физики закону полного тока (сохранения заряда) любые $n-1$ уравнений

линейно независимы. Для того, чтобы сформировать полную систему из m уравнений, их нужно дополнить $m - (n - 1)$ линейно независимыми уравнениями Кирхгофа для контуров. Задача, следовательно, заключается в формировании правила, по которому из всего множества уравнений Кирхгофа для контуров данной цепи можно отобрать любые $m - (n - 1)$ линейно независимых. Решить эту задачу удаётся, применив методы топологии.

1.6.2. Некоторые сведения из топологии. Формирование системы линейно независимых уравнений Кирхгофа

Топологией называется раздел математики, изучающий неметрические свойства геометрических фигур. Введём необходимые определения.

Узел (вершина) – точка в пространстве. Ветвь (ребро) – линия, соединяющая два узла. Граф – произвольная совокупность узлов и ветвей. Плоский (планарный) граф – граф, который можно изобразить на плоскости так, что его ветви пересекаются только в узлах. Изоморфный граф – граф, полученный из другого простым изменением положения узлов и ветвей. Топологический (ненаправленный) граф – граф, в котором направление движения вдоль ветвей от узла к узлу не указано. Сигнальный (направленный) граф – граф, в котором от узла к узлу вдоль ветвей можно двигаться только в направлении, указанном стрелкой. Путь – непрерывная последовательность ветвей, связывающая пару узлов. Контур – замкнутый путь. Связный топологический граф – граф, в котором, двигаясь из любого узла вдоль ветвей, можно попасть в любой другой. Несвязный топологический граф – граф, в котором, двигаясь вдоль ветвей, в некоторые узлы попасть нельзя. Подграф – граф, содержащий не все узлы (ветви) исходного графа. Сечение – ветви, которые надо удалить, чтобы граф распался на два несвязных. Дерево – минимальный связный подграф данного графа. Ветви связи – ветви, которые надо удалить, чтобы из данного графа выделить дерево. Очевидно, что граф может содержать несколько деревьев и соответствующих им совокупностей ветвей связи.

Для образования минимального связного графа необходимы два узла и одна ветвь. В таком графе возможно только одно сечение, в том числе и тогда, когда узлов два, а ветвей больше, чем одна ($n = 2, m \geq 1$), т. е. когда граф не минимально связный. Если граф насчитывает три узла, то,

независимо от числа ветвей, возможны два сечения и т.д. Следовательно, максимальное число сечений на единицу меньше числа узлов графа, т. е. в общем случае равно $n - 1$.

Пусть дан топологический граф, насчитывающий n узлов и m ветвей. Любое дерево этого графа содержит $n - 1$ ветвь и, следовательно, для образования любого дерева нужно удалить $m - (n - 1)$ ветвей связи. Присоединение к дереву любой из ветвей связи непременно образует контур, причём линейно независимый так как он содержит вновь присоединяемую ветвь. Это и служит основой для формирования следующего правила составления системы линейно независимых уравнений Кирхгофа для контуров.

Всякой цепи, содержащей n узлов и m ветвей, можно поставить в однозначное соответствие топологический граф, если каждому узлу цепи соответствует узел (вершина) графа, а каждой ветви цепи – ветвь (ребро) графа.

Процедура формирования линейно независимых уравнений Кирхгофа такова.

1. Назначаем m искомым переменных, в состав которых обязательно входят токи через независимые источники напряжения, напряжения на независимых источниках тока и токи либо напряжения в остальных ветвях; назначаем знаки напряжений на всех элементах и разрывах, а также направления токов во всех ветвях.

2. Анализируемой цепи ставим в однозначное соответствие ее топологический граф, имеющий n узлов (вершин) и m ветвей (рёбер).

3. Отсекая поочередно $n - 1$ узел, выполняем $n - 1$ независимое сечение.

4. Образует одно из возможных деревьев, содержащее $n - 1$ ветвь и соответствующую ему систему из $m - (n - 1)$ ветвей связи.

5. Присоединяя к дереву поочередно по одной ветви связи, отмечаем независимые контуры, каждый из которых, помимо любых других, обязательно содержит вновь присоединяемую ветвь связи.

6. Назначаем направление обхода независимых контуров и знаки членов в уравнениях Кирхгофа для узлов (сечений) и контуров.

7. Записываем систему линейно независимых уравнений Кирхгофа для узлов (сечений) и контуров.

Вернемся к схеме на рис. 1.17, *а* и продемонстрируем на её примере записанную процедуру.

1. Переменные $i_u(t), u_i(t), i_{LC}(t)$ назначены; назначены напряжения на элементах R, L, C .
2. В однозначное соответствие анализируемой цепи ставим топологический граф, имеющий узлы I, II и ветви 1, 2, 3, соответствующий анализируемой цепи, изображённой на рис. 1.17, *а*.
3. Выполнив одно сечение 1,2,3, отсекаем узел I.
4. Из ветви 1 образуем одно из трех возможных в данном случае деревьев и соответствующую систему ветвей связи 2, 3.
5. Присоединяя к дереву 1 поочерёдно ветви связи, сначала 2, затем 3, отмечаем линейные независимые контуры 1, 2; 2, 3, каждый из которых содержит вновь присоединённую ветвь связи. Заметим, что контур 1, 3 также мог бы быть выбран как линейно независимый, поскольку у него есть ветвь 3.
6. Знаки токов в уравнении (1.22), направления обхода независимых контуров и знаки напряжений в уравнении (1.23) назначены, см. рис. 1.17, *а*.
7. Записываем соответствующую этой процедуре выбранную из общей массы уравнений (1.24), (1.25) следующую систему линейно независимых уравнений Кирхгофа:

$$\begin{aligned}
 i_u(t) - i_{LC}(t) + i(t) &= 0; \\
 -u(t) + u_R(i_u(t)) + \frac{1}{C} \int_0^t i_{LC}(t) dt + u_C(0) + L \frac{di_{LC}(t)}{dt} &= 0; \quad (1.26) \\
 -L \frac{di_{LC}(t)}{dt} - \frac{1}{C} \int_0^t i_{LC}(t) dt - u_C(0) + u_i(t) &= 0.
 \end{aligned}$$

Как видно из рис. 1.17, *б* и уравнений (1.24), (1.25), выбор других независимых контуров приведёт к формированию другой системы уравнений Кирхгофа, которые, однако, будут также линейно независимыми. То же будет при выборе других возможных в данном случае деревьев 2 или 3. Отсюда следует, что результат инвариантен по отношению к совокупности тех или иных топологических операций.

1.7. Формирование обобщённой математической модели нелинейной детерминированной цепи(системы) с сосредоточенными параметрами. Формулировка общей задачи анализа динамики электрической цепи (системы)

Сделаем два предварительных замечания к названию параграфа.

Детерминированными называются определённые, а не случайные сигналы и параметры. Сосредоточенными называются параметры, не распределённые в пространстве.

Для упрощения последующих записей введём следующие обозначения операторов дифференцирования и интегрирования:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Dx(t), \quad \frac{d^n x(t)}{dt^n} = D^n x(t);$$

$$\int_0^t x(t)dt = D^{-1}x(t), \quad \int_0^t \dots \int_0^t x(t)dt^n = D^{-n}x(t).$$

Уже известные дифференциальные и интегральные соотношения между токами и напряжениями в ёмкостях и индуктивностях (1.9), (1.12) перепишем в этих обозначениях. Получим для ёмкости

$$i_C(t) = Df(u_C), \quad \text{например, } i_C(t) = D \sum_{n=0}^N a_n u_C^n(t),$$

откуда по формулам (1.10), (1.11) в линейном случае, когда $N=1$, получим

$$i_C(t) = CDu_C(t), \quad u_C(t) = C^{-1}D^{-1}i_C(t) + u_C(0). \quad (1.27)$$

Для индуктивности

$$u_L(t) = Df(i_L), \quad \text{например, } u_L(t) = D \sum_{n=0}^N b_n i_L^n(t),$$

откуда по формулам (1.13), (1.14) в линейном случае, когда $N=1$, получим

$$u_L(t) = LDi_L(t), \quad i_L(t) = L^{-1}D^{-1}u_L(t) + i_L(0). \quad (1.28)$$

Используя введённые обозначения, сформируем требуемую обобщённую математическую модель цепи (системы).

Из уравнений (1.27), (1.28) вытекают более общие формы постулатов Кирхгофа. Для узлов

$$\sum_k i_k(t) = 0, \quad \sum_k \varphi_k(D, D^{-1}, f(t), x(t)) = 0. \quad (1.29)$$

Для контуров

$$\sum_k u_k(t) = 0, \quad \sum_k \psi_k(D, D^{-1}, f(t), x(t)) = 0. \quad (1.30)$$

В уравнениях (1.29), (1.30) $f(t)$ – общее обозначение токов и напряжений независимых источников; $x(t)$ – общее обозначение токов и напряжений в ветвях анализируемой цепи.

Уравнения (1.29), (1.30) можно объединить общей записью в виде следующего матричного уравнения:

$$L[F(D, D^{-1}, x(t), f(t))] = 0, \quad (1.31)$$

где $x(t)$ – вектор токов и напряжений в ветвях; $f(t)$ – вектор токов и напряжений независимых источников; L – вектор линейных операторов в виде сумм постулатов Кирхгофа; F – некоторая вектор-функция.

Уравнение (1.31) описывает динамику математической модели любой нелинейной детерминированной цепи с сосредоточенными параметрами. Отметим, что это уравнение носит общий характер и в общем случае описывает математическую модель любой нелинейной детерминированной динамической системы с сосредоточенными параметрами. В таком случае L есть вектор линейных операторов, определённый законами данной предметной области (астрономии, гидродинамики, экономики и т. д.); $x(t)$ и $f(t)$ – соответственно, векторы фазовых координат данной предметной области и приложенных к модели воздействий.

Общей задачей анализа динамики электрической цепи(системы) называется задача составления и решения уравнения (1.31), т. е. процедура отыскания вектора $x(t)$, обращающего уравнение (1.31) в тождество.

Примером уравнения (1.31) могут служить уравнения (1.26) при заменах в них операторов в соответствии с уравнениями (1.27), (1.28).

2. АНАЛИЗ ПАССИВНЫХ И АКТИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ В ОБЛАСТИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ t (КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД)

2.1. Понятие анализа цепи в t -области. Понятие коммутации и переходного процесса в цепи. Формирование обобщённого уравнения динамики линейной цепи в развёрнутом виде

В этой главе будем изучать только линейные цепи – такие, ампер-вольтовые, вольт-кулоновые и ампер-веберные нелинейные характеристики пассивных элементов которых аппроксимированы прямыми или отрезками прямых, как показано на рис. 2.1, *а*, *б* соответственно. Введём необходимые понятия.

Анализом электрической цепи в t -области называется процедура непосредственного отыскания вектора $x(t)$, обращающего уравнение (1.31) в тождество. Уравнение (1.31) при этом не подвергается никаким преобразованиям, в том числе и преобразованию независимой переменной t .

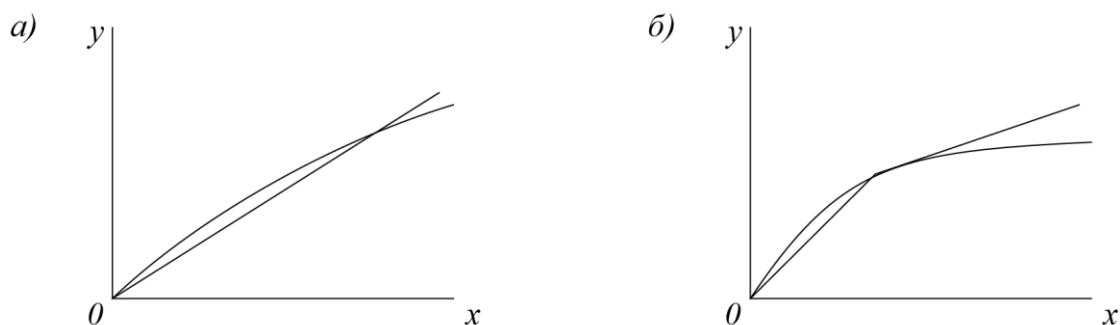


Рис. 2.1

Коммутацией называется мгновенное изменение воздействий, параметров или структуры цепи. В результате коммутации происходят изменения напряжений и токов в ветвях цепи. Изменяющиеся во времени напряжения и токи называют переходными процессами. Следовательно, решение уравнения (1.31) есть процедура отыскания в цепи переходного процесса $x(t)$. Примеры коммутации приведены на рис. 2.2. На рис. 2.2, *а* изменяется воздействие $i(t)$ от I_1 до I_2 , на рис. 2.2, *б* вследствие размыкания ключа K изменяется параметр от R_1 до $R_1 + R_2$, на рис. 2.2, *в* при замыкании ключа K изменяется структура цепи за счёт добавления ветви с ёмкостью C и

образования новых контуров, например, LC . Одновременно может происходить два или три вида коммутации.

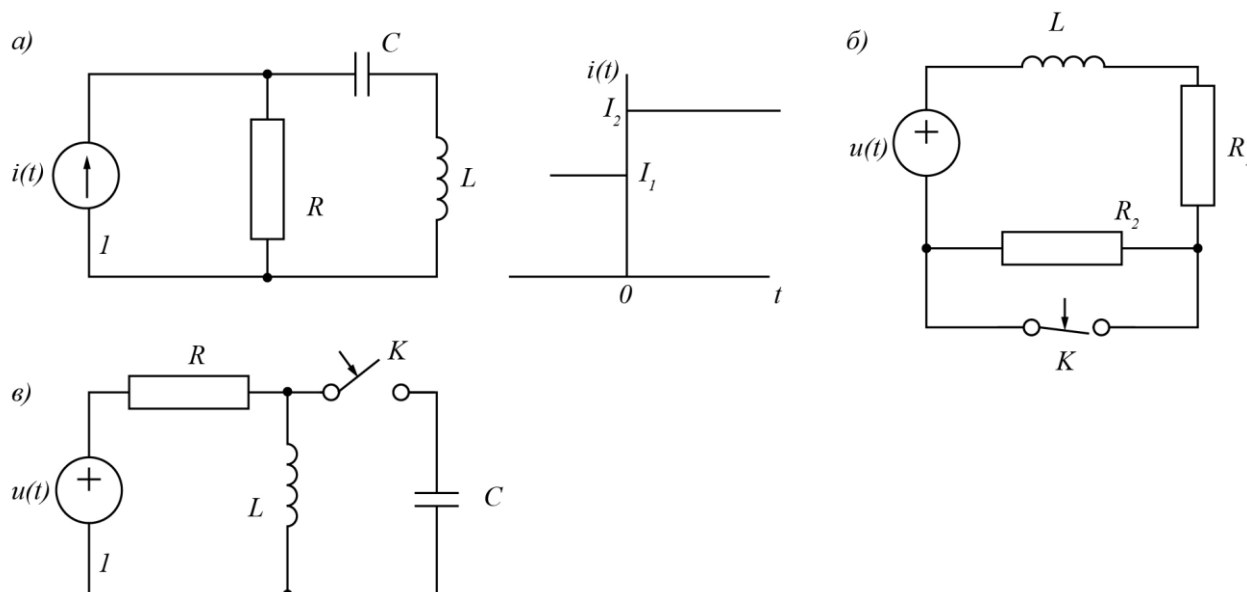


Рис. 2.2

Для решения уравнения (1.31) его необходимо записать в развернутом виде. Используем для этого метод дедукции. Рассмотрим достаточно общий пример коммутации в линейной цепи, сформируем для неё уравнение (1.31), представим его в некотором развернутом виде, а затем проанализируем и обобщим полученный результат.

Пример 2.1. Описание динамики линейной активной цепи после коммутации.

Схема цепи приведена на рис. 2.3, а. Она содержит все три пассивных элемента, оба независимых источника и управляемый источник, т.е. полный набор всех элементов и источников. Даны $u(t)$, $i(t)$, R , L , C , k .

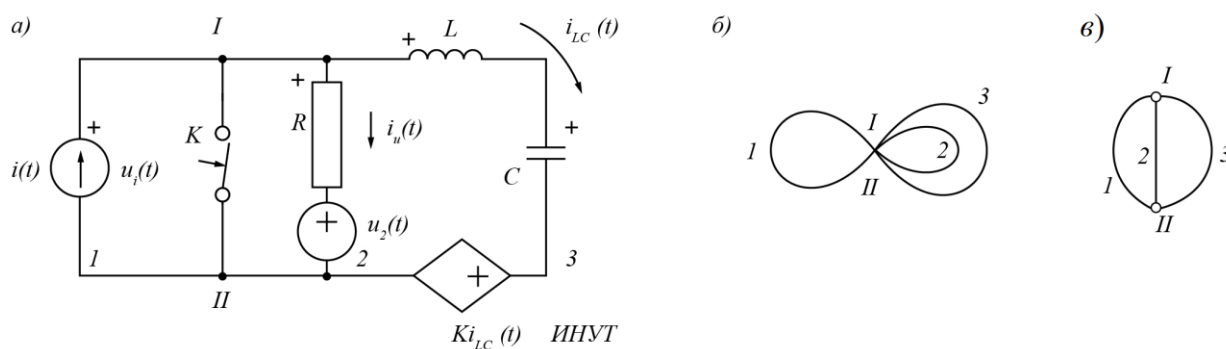


Рис. 2.3

При $t = 0$ ключ K размыкается, происходит коммутация первого и третьего вида, в результате которой мгновенно изменяются: воздействие ранее замкнутого источника тока $i(t)$ и структура цепи, как видно из рис. 2.3, б, в. После коммутации цепь насчитывает два узла – I, II и три ветви – 1, 2, 3.

Используем процедуру формирования системы линейно независимых уравнений Кирхгофа, сформулированную в п. 1.6.2.

1. Назначим по числу ветвей три искоемых переменных: обязательное напряжение $u_i(t)$ на независимом источнике тока $i(t)$; обязательный ток $i_u(t)$ через независимый источник напряжения $u(t)$; ток $i_{LC}(t)$ в третьей ветви, через элементы L , C и управляемый источник напряжения $ki_{LC}(t)$. Назначим знаки напряжений на элементах L , C , R .

2. Анализируемой цепи поставим в соответствие её топологический граф, показанный на рис. 2.3, в, имеющий два узла (вершины) – I, II и три ветви (ребра) – 1, 2, 3.

3. Отсекая узел I, выполним сечение.

4. Из ветви 1 образуем дерево и соответствующую ему систему ветвей связи 2, 3.

5. Присоединяя к дереву 1 поочередно ветви связи, сначала 2, потом 3, отметим независимые контуры 1, 2; 2, 3, каждый из которых содержит вновь присоединённую ветвь связи.

6. Назначим в уравнении (1.22) для токов, втекающих в узел I, знак «+», для вытекающих – знак «–». Назначим направления обхода независимых контуров по часовой стрелке. Назначим в уравнении (1.23) знак «+» для напряжений, встречаемых при обходах контуров со стороны зажима, отмеченного знаком «+» и знак «–» – для напряжений, встречаемых со стороны зажима, не отмеченного знаком «+».

7. Запишем в виде уравнения (1.31) следующую систему линейных линейно независимых уравнений Кирхгофа:

$$\begin{aligned} i(t) - i_u(t) - i_{LC}(t) &= 0; \\ -u_i(t) + Ri_u(t) + u(t) &= 0; \\ -u(t) - Ri_u(t) + LDi_{LC}(t) + C^{-1}D^{-1}i_{LC}(t) + u_C(0) + ki_{LC}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В уравнениях (2.1) векторы искоемых переменных и воздействий таковы:

$$x(t) = [u_i(t) \ i_u(t) \ i_{LC}(t)]^T; \quad f(t) = [i(t) \ u(t)]^T.$$

Упорядочим запись уравнения (2.1). Выделим из него векторы $x(t)$, $f(t)$; матрицы коэффициентов при этих векторах, зависящих от операторов D, D^{-1} , параметров R, L, C и коэффициента k ; образовавшийся в результате остаток.

Вектор $x(t)$ с матрицей коэффициентов при нём оставим в левой части уравнения, всё остальное перенесём в правую часть. Получим:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & R & 0 \\ 0 & -R & k + LD + C^{-1}D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(t) \\ i_u(t) \\ i_{LC}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_C(0) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & R & 0 \\ 0 & -R & k + LD + C^{-1}D^{-1} \end{bmatrix} = A(D); \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = G(D); \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_C(0) \end{bmatrix} = H_0.$$

С учётом ранее введённых векторов $x(t)$, $f(t)$ перепишем уравнение (2.2) в следующей матричной форме:

$$A(D)x(t) = G(D)f(t) + H_0. \quad (2.3)$$

Это и есть развёрнутая форма уравнения (2.1), составленного в виде уравнения (1.31).

Проанализируем полученный результат. Матрица – столбец $f(t)$ задана условиями задачи. Матрица – столбец $x(t)$ образована в соответствии с топологическим графом исследуемой цепи, содержанием её ветвей и нашим выбором искоемых переменных в ветвях. Содержание матриц коэффициентов $A(D), G(D)$ диктуют: известные алгебраические, интегральные и дифференциальные соотношения между токами и напряжениями R, L, C элементов и коэффициента k управляемого источника; постулаты Кирхгофа и выборка, с помощью назначенных нами топологических операций, из общей массы необходимых уравнений Кирхгофа достаточной системы линейно независимых. В матрицу H_0 входит остаток, не связанный с матрицами $x(t), f(t)$, в виде начального значения $u_C(0)$.

Любая другая активная или пассивная линейная цепь отличается только тем, что может содержать большее число элементов, источников и быть более разветвленной. Эти количественные изменения приведут только к изменению содержания матриц $x(t), f(t), A(D), G(D), H_0$; размерности уравнения (2.3), но не изменят его по существу. Следовательно, уравнение (2.3) представляет в общем виде развёрнутую форму уравнения (1.31) для описания динамики любой линейной цепи.

Этот вывод, очевидно, можно обобщить на случай линейной математической модели любой динамической системы, независимо от её природы. Это главный результат, полученный в теоретической электротехнике как иллюстративной области знания.

Заметим, что вместо линейного интегрального или интегрально-дифференциального уравнения (2.3) за счёт соответствующего выбора искомых переменных всегда можно сформировать дифференциальное уравнение, т.е. такое, в котором $H_0 \equiv 0$. Для этого в рассматриваемом примере необходимо и достаточно в дополнение к искомым переменным $u_i(t), i_u(t)$ выбрать искомым напряжением $u_C(t)$ в третьей ветви. Прделав вновь процедуру формирования системы линейно независимых уравнений Кирхгофа, получим в форме (1.31) следующее:

$$\begin{aligned} i(t) - i_u(t) - CDu_C(t) &= 0; \\ -u_i(t) + Ri_u(t) + u(t) &= 0; \\ -u(t) - Ri_u(t) + LCD^2u_C(t) + u_C(t) + kCDu_C(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Упорядочив запись уравнения (2.4) подобно упорядочению записи уравнения (2.1), получим:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -CD \\ -1 & R & 0 \\ 0 & -R & LCD^2 + kCD + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(t) \\ i_u(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

где

$$A(D) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -CD \\ -1 & R & 0 \\ 0 & -R & LCD^2 + kCD + 1 \end{bmatrix}; \quad x(t) = \begin{bmatrix} u_i(t) \\ i_u(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix}; \quad G(D) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ u(t) \end{bmatrix}.$$

Перепишем уравнение (2.5) в матричной форме. Получим:

$$A(D)x(t) = G(D)f(t). \quad (2.6)$$

Сравнивая уравнения (2.3) и (2.5), (2.6), видим, что в (2.6) матрица $H_0 = 0$, а матрица $A(D)$ в (2.5) не содержит оператора интегрирования D^{-1} .

Поставленная в примере 1 задача решена – уравнения (2.1) – (2.6) описывают динамику цепи на рис.2.3 после коммутации. Уравнения (2.3), (2.6) представляют обобщённые уравнения динамики линейной цепи в развёрнутом виде.

Из достигнутого результата вытекает, что анализ линейных цепей в области вещественной переменной t сводится к разработке процедуры решения составленного интегрально-дифференциального уравнения (2.3), либо дифференциального уравнения (2.6).

Процедура решения линейных дифференциальных уравнений хорошо разработана, поэтому в дальнейшем будем составлять и решать уравнение (2.6).

2.2. Решение уравнений Кирхгофа, описывающих динамику линейной цепи, с точностью до постоянных интегрирования

Итак, для произвольной цепи после коммутации уравнение (2.6) составлено. Как известно, решение линейной системы уравнений единственно. Оно существует, если выполняется следующее условие:

$$\det A(D) \neq 0. \quad (2.7)$$

В этом случае записываем и решаем характеристическое уравнение

$$\det A(\lambda) = 0. \quad (2.8)$$

Составляющую $x_l(t)$ вектора $x(t)$ запишем обычным образом, как сумму общего решения $x_{l\text{общ}}(t)$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $x_{l\text{част}}(t)$ данного неоднородного. Получим:

$$x_l(t) = x_{l\text{общ}}(t) + x_{l\text{част}}(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{v=0}^{V_n} B_{l,n} t^v e^{\lambda_n t} + x_{l\text{част}}(t), \quad (2.9)$$

где $l \in [1; L]$, L – размерность вектора $x(t)$; N – порядок характеристического уравнения (2.8); λ_n – корни характеристического уравнения (2.8); v_n – кратность n -го корня; $B_{l,n}$ – постоянные интегрирования.

Таким образом, задача состоит в отыскании трёх компонент решения (2.9): частного решения $x_{l\text{част}}(t)$ данного неоднородного уравнения (2.6); корней характеристического уравнения (2.8); постоянных интегрирования $B_{l,n}$, $n \in [1; N]$. В этом параграфе сформируем процедуру решения с точностью до постоянных интегрирования, т. е. отыскания частного решения и корней характеристического уравнения.

Как известно, общего правила поиска частного решения нет. Есть некоторые рекомендации – например, если воздействие $f(t)$ постоянно, то и частное решение $x_{l\text{част}}(t)$ нужно искать в виде константы; если оно экспоненциально, то и частное решение экспоненциально и т. д. Корни λ_n отыскиваем обычным образом, решая алгебраическое уравнение (2.8), при этом мы сталкиваемся с известными трудностями, когда $N \geq 5$.

В итоге сформируем следующую **процедуру** решения уравнения (2.6) с точностью до постоянных интегрирования.

1. По ранее сформированной процедуре составляем уравнение (2.6).
2. Проверяем условие (2.7) существования решения.
3. В зависимости от вида вектора $f(t)$ подбираем вектор частных решений $x_{\text{част}}(t)$.
4. Формируем и решаем характеристическое уравнение (2.8).
5. В зависимости от вида корней λ_n , $n \in [1; N]$ для составляющих $x_l(t)$, $l \in [1; L]$ вектора $x(t)$ записываем решения (2.9) с точностью до постоянных интегрирования $B_{l,n}$.

Иллюстрируем составленную процедуру примером.

Пример 2.2. Анализ пассивной линейной цепи с точностью до постоянных интегрирования.

Схема цепи приведена на рис. 2.4, а. Даны параметры R, L, C . При $t = 0$ на вход цепи подано воздействие $u(t) = U = \text{const}$, показанное на рис. 2.4, б. Происходит коммутация, в результате которой в цепи изменяются все токи и напряжения. Необходимо найти их с точностью до постоянных интегрирования.

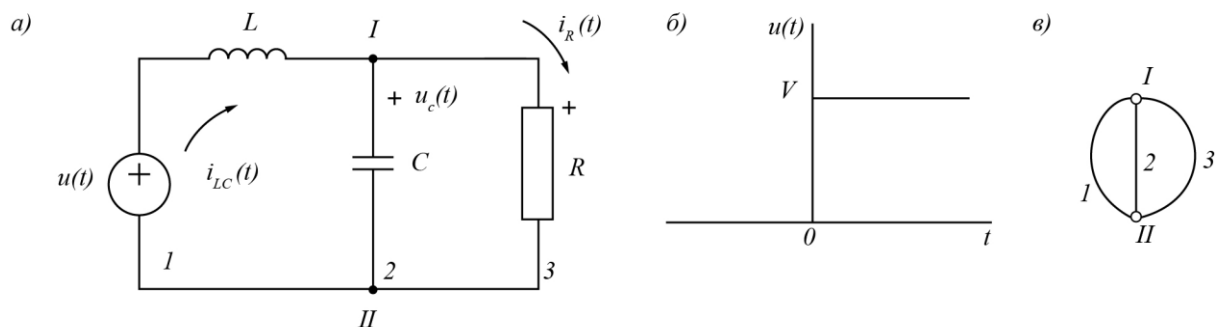


Рис. 2.4

Для решения задачи используем составленную процедуру.

1. Сформируем уравнение (2.6). Назначим вектор $x(t)$ искомым переменных в составе обязательного тока $i_u(t)$ в первой ветви, выбранной в соответствии с ранее высказанными рекомендациями, $u_C(t)$ во второй и $i_R(t)$ третьей. Используя граф цепи на рис. 2.4, в и ранее изложенную процедуру формирования системы линейно независимых уравнений Кирхгофа, запишем в виде (1.31) следующую:

$$\begin{aligned} -i_u(t) + CDu_C(t) + i_R(t) &= 0; \\ -u(t) + LDi_u(t) + u_C(t) &= 0; \\ -u_C(t) + Ri_R(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Переформируем уравнение (2.10) к виду (2.6). Получим:

$$\begin{bmatrix} -1 & CD & 1 \\ LD & 1 & 0 \\ 0 & -1 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u(t) \\ u_C(t) \\ i_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [u(t)], \quad (2.11)$$

где

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_u(t) \\ u_C(t) \\ i_R(t) \end{bmatrix}; \quad f(t) = u(t); \quad A(D) = \begin{bmatrix} -1 & CD & 1 \\ LD & 1 & 0 \\ 0 & -1 & R \end{bmatrix}; \quad G(D) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Проверим условие существования решения:

$$\det \begin{bmatrix} -1 & CD & 1 \\ LD & 1 & 0 \\ 0 & -1 & R \end{bmatrix} = -R - LD(CDR + 1) \neq 0.$$

3. Вектор $f(t) = u(t)$ представляет константа U , поэтому найдём вектор $x_{\text{част}}(t)$ частных решений I_u, U_C, I_R уравнения (2.11) также в виде следующих констант:

$$x_{\text{част}}(t) = [I_u \ U_C \ I_R]^T.$$

Подставив $x_{\text{част}}(t)$ в уравнение (2.10) или (2.11), получим:

$$-I_u + CDU_C + I_R = 0;$$

$$-U + LDI_u + U_C = 0;$$

$$-U_C + RI_R = 0,$$

откуда

$$x_{\text{част}}(t) = [U/R \ U \ U/R]^T.$$

4. Сформируем характеристическое уравнение:

$$RCL\lambda^2 + L\lambda + R = 0.$$

Его корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4LCR^2}}{2LCR}.$$

Если корни различные, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $V_1 = V_2 = 0$ и тогда получим:

$$i_u(t) = B_{u1}e^{\lambda_1 t} + B_{u2}e^{\lambda_2 t} + U/R;$$

$$u_C(t) = B_{C1}e^{\lambda_1 t} + B_{C2}e^{\lambda_2 t} + U;$$

$$i_R(t) = B_{R1}e^{\lambda_1 t} + B_{R2}e^{\lambda_2 t} + U/R.$$

Если корни кратные, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то $V=1$ и тогда получим:

$$i_u(t) = B'_{u1}e^{\lambda t} + B'_{u2}te^{\lambda t} + U/R;$$

$$u_C(t) = B'_{C1}e^{\lambda t} + B'_{C2}te^{\lambda t} + U;$$

$$i_R(t) = B'_{R1}e^{\lambda t} + B'_{R2}te^{\lambda t} + U/R.$$

Поставленная задача решена. В итоге получили решение $x(t)$ с точностью до постоянных интегрирования $B_{u1}, B_{u2}, \dots, B'_{R2}$.

В заключение сделаем одно замечание. Общее решение $x_{\text{общ}}(t)$ однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.6), с физической точки зрения равнозначно процессу, протекающему в цепи в отсутствии источников так как равенство нулю правой части уравнения (2.6) означает, что $f(t)=0$. Частное решение $x_{\text{част}}(t)$ неоднородного уравнения (2.6), напротив, существенно зависит от правой части, т. е. от источников $f(t)$. Все решение $x(t)$ описывает вызванный коммутацией процесс перехода от одного состояния цепи к другому. По этим причинам решение $x(t)$ называют переходным процессом, общее решение $x_{\text{общ}}(t)$ – свободной составляющей переходного процесса и обозначают символом $x_{\text{св}}(t)$, частное решение $x_{\text{част}}(t)$ – вынужденной составляющей переходного процесса и обозначают символом $x_{\text{вын}}(t)$. В этой символике составляющую (2.9) переходного процесса перепишем так:

$$x_l(t) = x_{l\text{св}}(t) + x_{l\text{вын}}(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{v=0}^{V_n} B_{l,n} t^v e^{\lambda_n t} + x_{l\text{вын}}(t), \quad (2.12)$$

где справедлива экспликация к формуле (2.9).

2.3. Понятия начальных и предначальных условий. Правило коммутации в общей форме. Точное решение уравнений Кирхгофа, полностью описывающих динамику линейной цепи

В решении (2.12) теперь известно всё, кроме постоянных интегрирования $B_{l,n}$, $n \in [1; N]$. Для того, чтобы их найти, нужно знать решение $x_l(t)$ и $N-1$ его производную в какой-либо момент времени. До того, как произошла коммутация, состояние цепи полностью известно, поэтому, по-видимому, наиболее просто узнать решение $x_l(t)$ и $N-1$ его производную сразу после того, как произошла коммутация. Для формулировки очередной задачи необходимо ввести новые определения. Введём их.

На рис. 2.5 показано решение $x(t)$ до и после коммутации, которая произошла в момент времени $t=0$. Предположим, для общности, что решение $x(t)$ при $t=0$ разрывно. Назовём момент времени, непосредственно предшествующий моменту коммутации и отличающийся от него на бесконечно малую величину, предначальным и обозначим его символом 0^- .

Назовём момент времени, непосредственно шествующий за моментом коммутации и отличающийся от него на бесконечно малую, начальным и обозначим его символом 0^+ . Моменты времени 0^- , 0^+ показаны на рис. 2.5. Им соответствуют предначальное $x(0^-)$ и начальное $x(0^+)$ значения решения $x(t)$. Предначальные значения $x(0^-)$ всегда известны или могут быть найдены, они входят в условия задачи. Таким образом, очередная, подлежащая решению задача, заключается в выработке правила, по которому, зная предначальные условия $x(0^-)$, можно найти начальные $x(0^+)$.

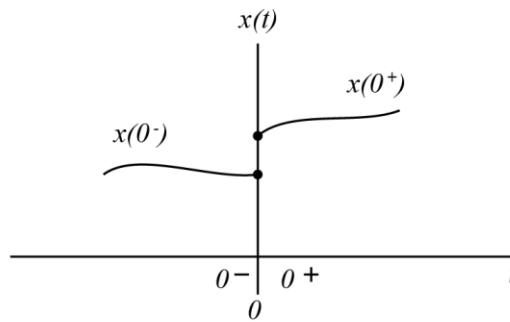


Рис. 2.5

Это правило названо правилом коммутации. Оно гласит: за исключением одного особого случая потокоцепления в индуктивностях и заряды в ёмкостях в момент коммутации непрерывны. Поскольку в этом правиле есть пока не рассматриваемое исключение, его называют правилом коммутации в общей форме. Его формальное описание таково:

$$\psi(0^+) = \psi(0^-), \quad q(0^+) = q(0^-), \quad (2.13)$$

откуда в линейной цепи получим

$$L(0^+)i_L(0^+) = L(0^-)i_L(0^-), \quad C(0^+)u_C(0^+) = C(0^-)u_C(0^-);$$

$$i_L(0^+) = \frac{L(0^-)}{L(0^+)}i_L(0^-), \quad u_C(0^+) = \frac{C(0^-)}{C(0^+)}u_C(0^-).$$

Если при коммутации индуктивности и ёмкости не меняются, т.е.

$$L(0^+) = L(0^-), \quad C(0^+) = C(0^-),$$

то

$$i_L(0^+) = i_L(0^-), u_C(0^+) = u_C(0^-). \quad (2.14)$$

Для всех остальных напряжений и токов в общем случае справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_L(0^+) &\neq u_L(0^-), i_C(0^+) \neq i_C(0^-), \\ u_R(0^+) &\neq u_R(0^-), i_R(0^+) \neq i_R(0^-). \end{aligned}$$

Правило (2.14) позволяет уточнить ранее сформированные интегральные соотношения (1.11), (1.14), (1.27), (1.28) между токами и напряжениями в неизменяющихся ёмкостях и индуктивностях. Именно, в качестве нижнего предела этих интегралов следует взять предначальный момент времени $t = 0^-$, когда всё известно, и тогда получим:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i_C(t) dt + u_C(0^-) = C^{-1} D^{-1} i_C(t) + u_C(0^-); \\ i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_{0^-}^t u_L(t) dt + i_L(0^-) = L^{-1} D^{-1} u_L(t) + i_L(0^-), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где теперь и далее

$$D^{-1}x(t) = \int_{0^-}^t x(t) dt.$$

Из соотношений (2.15), в частности, вытекает только что сформулированное правило коммутации в неизменяющихся ёмкостях и индуктивностях.

При $t = 0^+$ получим:

$$\begin{aligned} u_C(0^+) &= \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_C(t) dt + u_C(0^-) = u_C(0^-); \\ i_L(0^+) &= \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} u_L(t) dt + i_L(0^-) = i_L(0^-). \end{aligned} \quad (2.16)$$

На рис. 2.6 приведены примеры изменения индуктивностей и ёмкостей при коммутации. На рис. 2.6, а при $t = 0$ ключ К размыкается и при $t = 0^+$ получим:

$$i_L(0^+) = \frac{L(0^-)}{L(0^+)} i_L(0^-) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_L(0^-).$$

На рис. 6, б при $t = 0$ ключ К замыкается и при $t = 0^+$ получим:

$$i_L(0^+) = \frac{L(0^-)}{L(0^+)} i_L(0^-) = \frac{L_1 + L_2}{L_1} i_L(0^-).$$

На рис. 6, в при $t = 0$ ключ К замыкается и при $t = 0^+$ получим:

$$u_C(0^+) = \frac{C(0^-)}{C(0^+)} u_C(0^-) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u_C(0^-).$$

На рис. 6, г при $t = 0$ ключ К размыкается и при $t = 0^+$ получим:

$$u_C(0^+) = \frac{C(0^-)}{C(0^+)} u_C(0^-) = \frac{C_1 + C_2}{C_2} u_C(0^-).$$

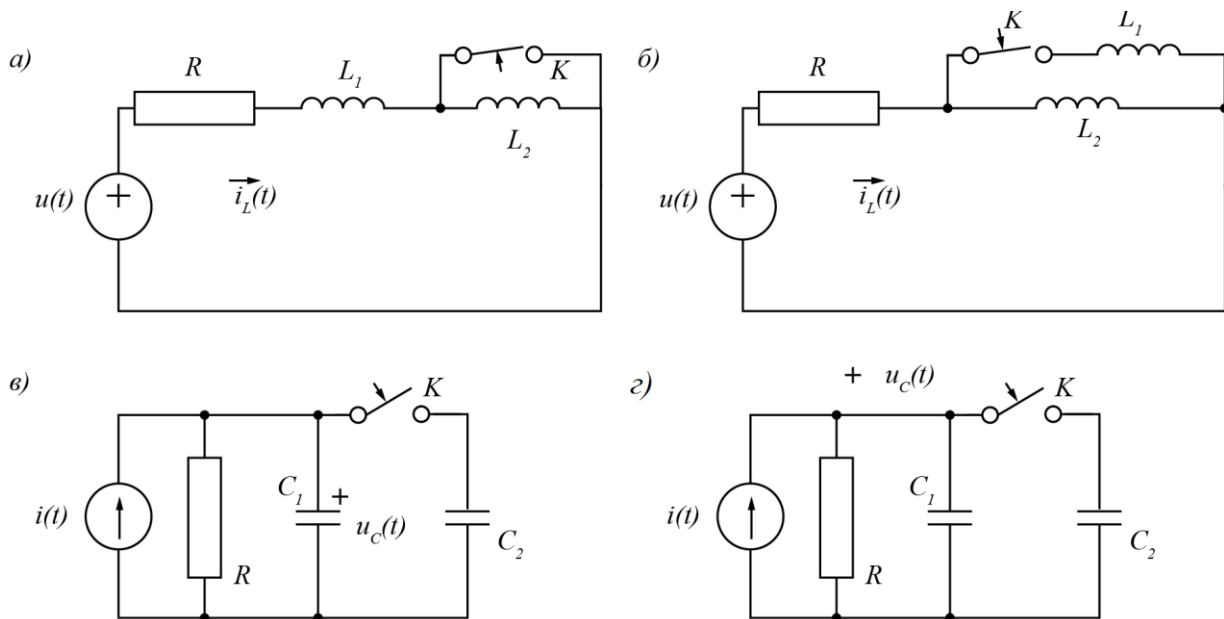


Рис. 2.6

В дальнейшем мы всегда будем различать преднаачальный и начальный моменты времени. Отметим, что переход от преднаачального к начальному моменту времени важен во всех научных дисциплинах. Правило коммутации

выгодно отличает теоретическую электротехнику от многих других отраслей знания.

Полученные результаты позволяют сформировать следующую **процедуру** точного решения уравнений Кирхгофа, полностью описывающих динамику линейной цепи.

1. По сформированной в п. 1.5 процедуре составляем уравнение (2.6).
2. По сформированной в п. 2.2 процедуре решаем составленное уравнение (2.6) с точностью до постоянных интегрирования.

3. Анализируем цепь до коммутации и находим предначальные $u_{Ck}(0^-), i_{Lm}(0^-)$.

4. По правилу коммутации находим начальные значения $u_{Ck}(0^+), i_{Lm}(0^+)$.

5. В начальный момент времени $t = 0^+$ строим схему замещения цепи, в которой все ёмкости замещаем зависимыми источниками напряжения с напряжениями $u_{Ck}(0^+)$, а индуктивности – зависимыми источниками тока с токами $i_{Lm}(0^+)$.

6. Построенную схему замещения описываем алгебраической системой линейно независимых уравнений Кирхгофа, решаем её и находим все необходимые начальные условия: $i_{Ck}(0^+), u_{Lm}(0^+), i_{Rn}(0^+), u_{Rn}(0^+), i_u(0^+), u_i(0^+)$.

7. Найденные начальные условия и соответствующий им момент времени $t = 0^+$ подставляем в решения, записанные с точностью до постоянных интегрирования, составляем алгебраическую систему уравнений относительно постоянных интегрирования, решаем её, находим все постоянные интегрирования и записываем окончательный ответ.

8. Проверка – найденные решения подставляем в уравнение (2.6) и обращаем его в тождество. Если проверка не прошла, то приступаем к поиску ошибок.

Иллюстрируем составленную процедуру примером.

Пример 2.3. Полный анализ линейной пассивной цепи (точное решение уравнений Кирхгофа).

Схема цепи приведена на рис. 2.7, а. Даны параметры R, L . При $t = 0$ на вход цепи поступает воздействие $i(t) = Ie^{-\alpha t}$, показанное на рис. 2.7, б. Происходит коммутация, в результате которой в цепи изменяются все токи и напряжения. Необходимо найти их. Для решения задачи используем составленную процедуру.

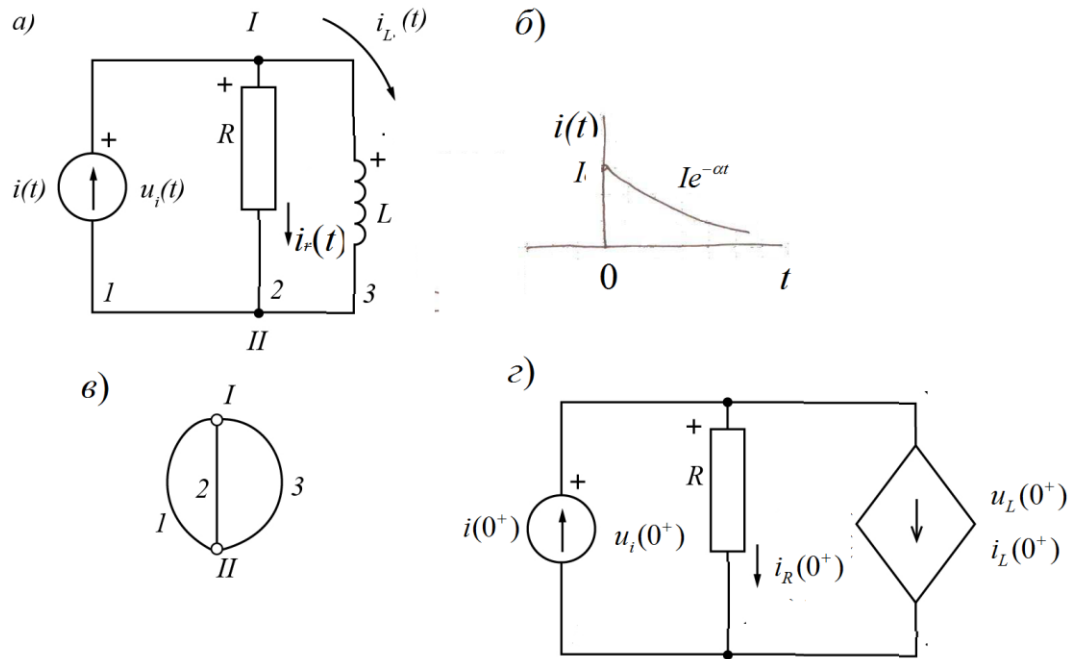


Рис. 2.7

- По процедуре, сформированной в 1.5, составим уравнение (2.6). Выбранные искомые переменные показаны на схеме рис. 2.7, а, граф цепи, сечение, независимые контуры – на рис. 2.7, в. Запишем в виде (1.31) следующую систему линейно независимых уравнений Кирхгофа:

$$\begin{aligned} i(t) - i_R(t) - i_L(t) &= 0; \\ -u_i(t) + Ri_R(t) &= 0; \\ -Ri_R(t) + LDi_L(t) &= 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$x(t) = [i_R(t) \ u_i(t) \ i_L(t)]^T.$$

Прежде чем выполнять дальнейшие действия, проанализируем полученный результат. Как видно, переменная $u_i(t)$ входит только во второе уравнение (2.17). Следовательно, если из системы (2.17) вычеркнуть второе

уравнение вместе с переменной $u_i(t)$, то полученная система уравнений будет почти равносильна системе (2.17), но размерность её станет на единицу меньше. Решение же $u_i(t)$ легко найти. Когда станет известно решение $i_R(t)$, то, как видно из второго уравнения (2.17), $u_i(t) = Ri_R(t)$.

Итак, вычеркнув из системы (2.17) второе уравнение и переформировав остаток к форме (6), получим:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -R & LD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_R(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} i(t), \quad (2.18)$$

где

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_R(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}.$$

2. По процедуре, сформированной в 2.2, решаем составленное уравнение (2.18) с точностью до постоянных интегрирования.

2.1. Проверим условие существования решения:

$$\det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -R & LD \end{bmatrix} = -LD - R \neq 0.$$

2.2. Вектор $f(t) = i(t) = Ie^{-\alpha t}$ представляет экспоненту, поэтому назовём вектор $x_{\text{вын}}(t)$ частных решений уравнения (2.18) также в виде экспонент с тем же показателем степени:

$$x_{\text{вын}}(t) = \begin{bmatrix} I_R e^{-\alpha t} \\ I_L e^{-\alpha t} \end{bmatrix}.$$

Подставив $x_{\text{вын}}(t)$ в уравнение (2.18) и раскрыв его, получим:

$$-I_R e^{-\alpha t} - I_L e^{-\alpha t} = -I e^{-\alpha t};$$

$$-RI_R e^{-\alpha t} - \alpha LI_L e^{-\alpha t} = 0,$$

откуда после сокращения на $e^{-\alpha t} \neq 0$ следует

$$-I_R - I_L = -I;$$

$$-RI_R - \alpha LI_L = 0,$$

$$I_R = I \frac{-\alpha LG}{1 - \alpha LG}; I_L = I \frac{1}{1 - \alpha LG},$$

где $G = R^{-1}$.

Итак,

$$x_{\text{вын}}(t) = \begin{bmatrix} I \frac{-\alpha LG}{1 - \alpha LG} e^{-\alpha t} \\ I \frac{1}{1 - \alpha LG} e^{-\alpha t} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Отметим, что частные решения в форме (2.19) существуют при

$$\alpha \neq 1 / LG.$$

2.3. Сформируем характеристическое уравнение:

$$\det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -R & L\lambda \end{bmatrix} = -L\lambda - R = 0.$$

Его корень

$$\lambda_1 = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{LG}.$$

Если $|\lambda_1| \neq \alpha$, то получим

$$\begin{aligned} i_R(t) &= B_R e^{-\frac{R}{L}t} + I \frac{-\alpha LG}{1 - \alpha LG} e^{-\alpha t}; \\ i_L(t) &= B_L e^{-\frac{R}{L}t} + I \frac{1}{1 - \alpha LG} e^{-\alpha t}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Таким образом, поставленная задача решена с точностью до постоянных интегрирования.

3. До коммутации к цепи не было приложено воздействие, $i(t) = 0$, $t \leq 0$, следовательно,

$$i_L(0^-) = 0.$$

4. В цепи при коммутации индуктивность не меняется, поэтому по правилу коммутации

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0.$$

5. В начальный момент времени $t = 0^+$ построим схему замещения, показанную на рис. 2.7, з, в которой индуктивность замещена зависимым источником тока с током $i_L(0^+) = 0$.

6. Построенную схему замещения опишем алгебраической системой уравнений Кирхгофа:

$$i(0^+) - i_R(0^+) - i_L(0^+) = 0;$$

$$-u_i(0^+) + Ri_R(0^+) = 0;$$

$$-Ri_R(0^+) + u_L(0^+) = 0,$$

где $i(0^+) = I, i_L(0^+) = 0$ и откуда $i_R(0^+) = I$.

7. Найденные начальные условия $i_R(0^+)$, $i_L(0^+)$ и момент времени $t = 0^+$ подставляем в решение (2.20). Получим:

$$I = B_R + I \frac{-\alpha LG}{1 - \alpha LG};$$

$$0 = B_L + I \frac{1}{1 - \alpha LG},$$

откуда

$$B_R = I \frac{1}{1 - \alpha LG};$$

$$B_L = -I \frac{1}{1 - \alpha LG}.$$

Для системы уравнений (2.17) записываем окончательный ответ:

$$i_R(t) = I \frac{1}{1 - \alpha LG} e^{-\frac{R}{L}t} + I \frac{-\alpha LG}{1 - \alpha LG} e^{-\alpha t};$$

$$u_i(t) = RI \frac{1}{1 - \alpha LG} e^{-\frac{R}{L}t} + RI \frac{-\alpha LG}{1 - \alpha LG} e^{-\alpha t};$$

$$i_L(t) = -I \frac{1}{1 - \alpha LG} e^{-\frac{R}{L}t} + I \frac{1}{1 - \alpha LG} e^{-\alpha t}.$$

8. Подставив найденные решения в уравнения (2.17), обращаем их в тождества:

$$\begin{aligned}
Ie^{-\alpha t} - I \frac{1}{1-\alpha LG} e^{-\frac{R}{L}t} - I \frac{-\alpha LG}{1-\alpha LG} e^{-\alpha t} + I \frac{1}{1-\alpha LG} e^{-\frac{R}{L}t} - I \frac{1}{1-\alpha LG} e^{-\alpha t} &= 0; \\
-RI \frac{1}{1-\alpha LG} e^{-\frac{R}{L}t} - RI \frac{-\alpha LG}{1-\alpha LG} e^{-\alpha t} + RI \frac{1}{1-\alpha LG} e^{-\frac{R}{L}t} + RI \frac{-\alpha LG}{1-\alpha LG} e^{-\alpha t} &= 0; \\
-RI \frac{1}{1-\alpha LG} e^{-\frac{R}{L}t} - RI \frac{-\alpha LG}{1-\alpha LG} e^{-\alpha t} + RI \frac{1}{1-\alpha LG} e^{-\frac{R}{L}t} + \alpha LI \frac{1}{1-\alpha LG} e^{-\alpha t} &= 0.
\end{aligned}$$

Проверка выполнена, поставленная задача решена. В итоге получили точное (полное) решение $x(t)$.

В заключение заметим, что ограничение $\alpha \neq |\lambda_1|$ не входит в условие существования и единственности решения, записанное в п. 2.1. Следовательно, и в случае, когда $\alpha = |\lambda_1|$ решение существует, но в какой-то иной форме. Именно, если $\alpha = |\lambda_1|$, то частные решения нужно искать в виде $I_R t e^{-\alpha t}, I_L t e^{-\alpha t}$. Это вытекает из первозначимости собственных свойств цепи, которые описывает вектор $x_{св}(t)$. В этом случае показатель степени экспоненты α играет роль второго, кратного корня $\lambda_2 = \lambda_1$. Задание: решить задачу при $|\lambda_1| = \alpha$.

2.4. Понятия состояния цепи, переменных и уравнений состояния.

Точное решение уравнений состояния

В п. 1.6 мы показали, что постулаты Кирхгофа дают необходимые условия описания цепи, а достаточные условия образуют независимые сечения и контуры и их значительно меньше. Естественно возникает вопрос: можно ли ещё уменьшить размерность задачи анализа, т.е. свести к минимуму число уравнений, описывающих динамику цепи? Для ответа на этот вопрос нужны новые понятия. Введём их.

Состоянием цепи или системы называется та минимальная информация, которая необходима для того, чтобы, начиная с некоторого фиксированного момента времени, однозначно описать дальнейшее поведение этой цепи (системы). Переменными состояния называются те токи и напряжения (координаты системы), которые определяют состояние цепи (системы). Уравнениями состояния называются уравнения, составленные относительно переменных состояния.

Минимальная информация, необходимая для описания любой динамики – это первые производные от координат. Минимальная информация о состоянии цепи – это знание изменений токов в индуктивностях и напряжений на ёмкостях. Если эти токи и напряжения станут известны, то индуктивности и ёмкости можно заменить зависимыми источниками тока и напряжения соответственно, описать всю остальную R –цепь алгебраическими уравнениями Кирхгофа и рассчитать её. Такой переход схематически показан на рис. 2.8, а, б, где $x(t)$ – ток или напряжение управляемого источника.

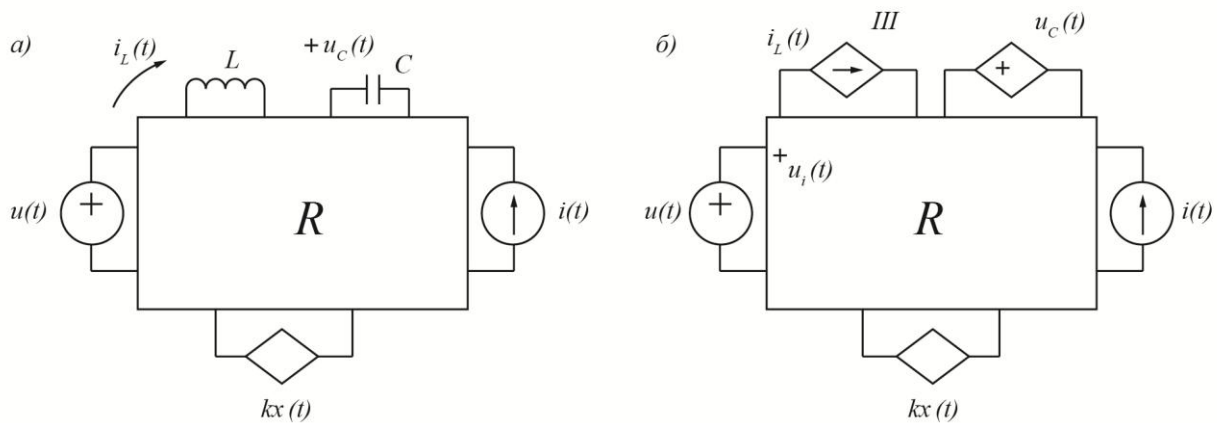


Рис. 2.8

Таким образом, приходим к выводу, что в электрических цепях переменными состояниями являются токи в индуктивностях и напряжения на ёмкостях, а уравнения состояния должны быть сформированы относительно них.

Из сказанного вытекает следующая общая матричная форма уравнений состояния:

$$Dx(t) = Ax(t) + Bf(t), \quad (2.21)$$

где $x(t)$ – вектор переменных состояния, т.е. независимых токов в индуктивностях и напряжений на ёмкостях; A и B , соответственно, квадратная и прямоугольная матрицы коэффициентов, зависящих от R, L, C, k параметров цепи; D – оператор дифференцирования.

Условие существования и единственности решения уравнения (2.21) очевидно:

$$\det[DE - A] \neq 0. \quad (2.22)$$

Характеристическое уравнение

$$\det[\lambda E - A] = 0. \quad (2.23)$$

Уравнение (2.21) минимизирует размерность задачи анализа так как оно содержит минимальное число уравнений, описывающих динамику реактивных L , C элементов цепи. Декомпозиция задачи анализа цепи – разделение её на поиск переменных состояния и поиск остальных координат – значительно облегчает её решение. Уравнение (2.21) составлено относительно координат $u_{Ck}(t), i_{Lm}(t)$, начальные значения которых легко найти по правилу коммутации. Уравнение (2.21) разрешено относительно первых производных, что упрощает формирование старших. Например, для второй производной получим:

$$\begin{aligned} D^2x(t) &= D(Dx(t)) = D(Ax(t) + Bf(t)) = ADx(t) + BDf(t) = \\ &= A(Ax(t) + Bf(t)) + BDf(t) = A^2x(t) + ABf(t) + BDf(t). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Формула (2.24) и вытекающие из неё для $D^n x(t)$, $n \geq 2$, $n \in N$ дают возможность легко найти $N-1$ начальных условий для отыскания постоянных интегрирования; N – порядок характеристического уравнения (2.23).

Введённые понятия и полученные результаты позволяют сформулировать следующую **процедуру** формирования и точного решения уравнений состояния, описывающих динамику линейной цепи.

1. В качестве искоемых переменных, помимо обязательных токов $i_u(t)$ в источниках напряжения и напряжений $u_i(t)$ на источниках тока, назначаем токи $i_{Lm}(t)$ в индуктивностях и напряжения $u_{Ck}(t)$ на ёмкостях. В ветвях, не содержащих индуктивностей или ёмкостей – безразлично, токи или напряжения.

2. По процедуре, сформированной в п. 1.5, составляем уравнение (2.6).

3. Формируем вектор $x(t)$ искоемых переменных с компонентами $u_{Ck}(t)$, $i_{Lm}(t)$ и преобразуем уравнение (2.6) к виду 2.(21).

4. По процедуре, сформированной в п. 2.2 проверяем условие существования и единственности решения и решаем составленное уравнение (2.21) с точностью до постоянных интегрирования.

5. Анализируем цепь до коммутации и находим предначальные условия $u_{Ck}(0^-)$, $i_{Lm}(0^-)$.

6. По правилу коммутации находим начальные значения $u_{Ck}(0^+)$, $i_{Lm}(0^+)$.

7. По уравнениям состояния, формуле (2.24) и вытекающим из них уравнениям находим $N-1$ начальных значений производных $u_{Ck}^{(n)}(0^+)$, $i_{Lm}^{(n)}(0^+)$ от решений $u_{Ck}(t)$, $i_{Lm}(t)$, где N – порядок цепи.

8. Формируем систему алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования, решаем её и записываем окончательный ответ.

9. Проверка - найденные решения подставляем в уравнения (2.21) и обращаем их в тождества. Если проверка не прошла, приступаем к поиску ошибок.

10. Если проверка прошла, строим схему замещения, показанную на рис. 2.6, описываем её уравнениями Кирхгофа и находим токи и напряжения в R цепи.

Иллюстрируем составленную процедуру примером.

Пример 2.4. Анализ линейных цепей с помощью уравнений состояния.

Пассивная цепь

Схема цепи приведена на рис. 2.9, *а*. Даны её параметры в относительных единицах: $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $L = 1$, $C = 0.5$. При $t \leq 0$ на вход цепи подано воздействие $U_1 = 2$, при $t > 0$ – воздействие $U_2 = 4$, показанные на рис. 2.9, *б*. Следовательно, при $t = 0$ происходит коммутация входного сигнала, в результате которой в цепи изменяются токи и напряжения. Необходимо найти их. Для решения задачи используем составленную процедуру.

1. Искомые переменные показаны на схеме рис. 2.9, *а*, граф цепи, сечения, независимые контуры – на рис. 2.9, *в*. В качестве искомых переменных выбраны: обязательный ток $i_u(t)$ в первой ветви, во второй и четвёртой ветвях – токи $i_1(t)$, $i_2(t)$ в резисторах R_1 , R_2 соответственно, переменные состояния $i_L(t)$ в третьей ветви и $u_C(t)$ в пятой.

2. По процедуре, сформированной п. 1.5, составим уравнение (2.6). Запишем в виде (1.31) систему линейно независимых уравнений Кирхгофа:

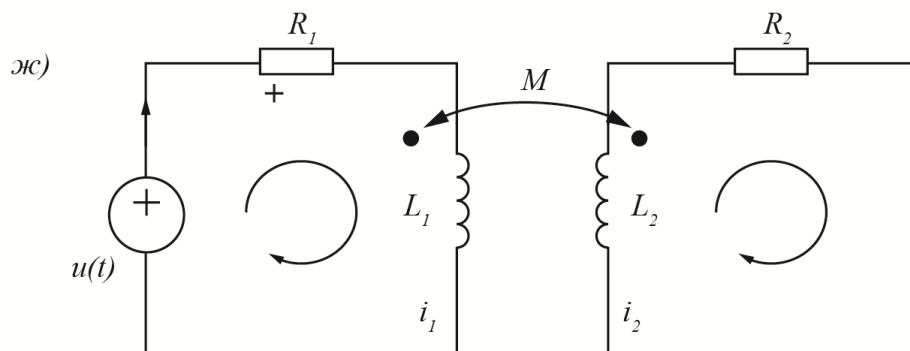
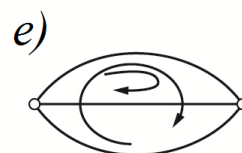
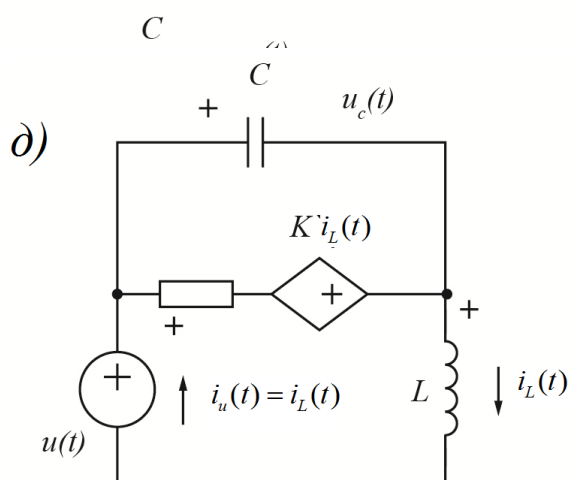
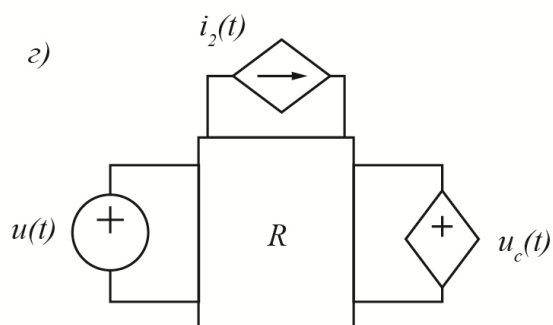
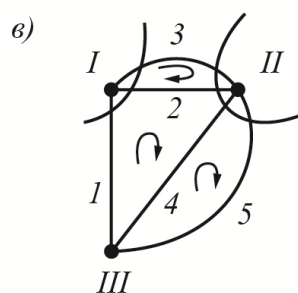
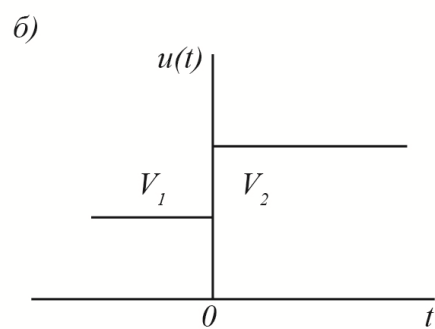
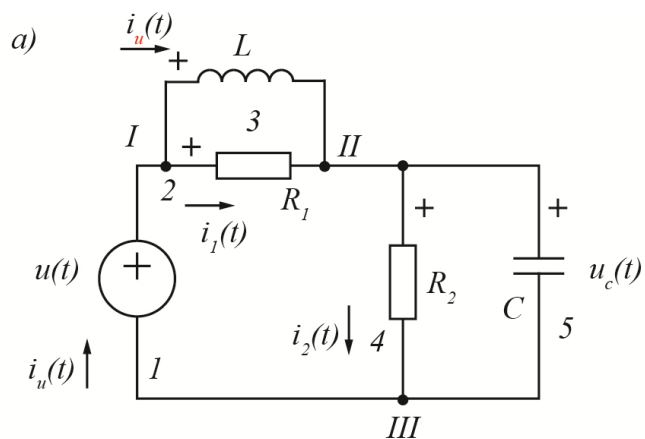


Рис. 2.9

$$\begin{aligned}
i_u(t) - i_1(t) - i_L(t) &= 0; \\
i_1(t) + i_L(t) - i_2(t) - CDu_C(t) &= 0; \\
-u(t) + R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) &= 0; \\
-R_1 \dot{i}_1(t) + LD \dot{i}_L(t) &= 0; \\
-R_2 \dot{i}_2(t) + u_C(t) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Проанализируем полученный результат, как это было сделано в примере.

3. Как видно, переменная $i_u(t)$ входит только в первое уравнение (2.25). Следовательно, если из системы (2.25) вычеркнуть первое уравнение вместе с переменной $i_u(t)$, то полученная система уравнений будет почти равносильна системе (2.25), но размерность её станет на единицу меньше. Отсутствие же переменной $i_u(t)$ несущественно так как сформированное далее уравнение (2.6) будет ещё раз переформировано к уравнению состояния (2.21) относительно переменных состояния $i_L(t)$, $u_C(t)$, поэтому переменные $i_u(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$ всё равно будут исключены. Итак, вычеркнув из системы (2.25) первое уравнение и переформировав остаток к виду (2.6), получим:

$$\begin{bmatrix} 1 & -CD & 1 & -1 \\ 0 & 0 & R_1 & R_2 \\ LD & 0 & -R_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \\ i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u(t)]. \tag{2.26}$$

4. Формируем вектор искомых переменных $x(t) = [i_L(t) \ u_C(t)]^T$ и преобразуем уравнение (2.26) к виду (2.21).

В результате в форме (2.21) получим следующее уравнение состояния:

$$D \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{CR_1} \end{bmatrix} [u(t)]. \tag{2.27}$$

В итоге вместо достаточных условий в виде системы (2.25) из пяти уравнений Кирхгофа получили систему (2.27) из двух уравнений состояния.

5. По процедуре, сформированной в п. 2.2 проверяем условие существования и единственности решения и решаем составленное уравнение (2.27) с точностью до постоянных интегрирования.

Проверяем условие (2.22) существования решения уравнения (2.27). Получим

$$\det \left[D \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \end{bmatrix} \right] = \det \begin{bmatrix} D & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & D + \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \end{bmatrix} = \\ = D^2 + \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} D + \frac{1}{CL} \neq 0.$$

Вектор $f(t) = u(t)$ представляет константу U_2 , поэтому подберём вектор $x_{\text{вын}}(t)$ частных решений уравнения (2.27) также в виде констант I_L, U_C . Подставив вектор $x_{\text{вын}}(t)$ в уравнение (2.27), получим:

$$D \begin{bmatrix} I_L \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ U_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{CR_1} \end{bmatrix} U_2; \\ 0 = -\frac{1}{L} U_C + \frac{1}{L} U_2; \\ 0 = \frac{1}{C} I_L - \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} U_C + \frac{1}{CR_1} U_2; \\ U_C = U_2 = 4; \quad I_L = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} U_C - \frac{1}{R_1} U_2 = 2.$$

Итак,

$$x_{\text{вын}}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Сформируем характеристическое уравнение:

$$\det \left[\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \end{bmatrix} \right] = \lambda^2 + \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \lambda + \frac{1}{CL} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Решив это уравнение, найдём: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. Корни различные, поэтому $V_1 = V_2 = 0$. Получим следующее решение с точностью до постоянных интегрирования:

$$x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{вын}}(t) = \begin{bmatrix} i_{L\text{св}}(t) + i_{L\text{вын}}(t) \\ u_{C\text{св}}(t) + u_{C\text{вын}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{L1}e^{-t} + B_{L2}e^{-2t} + 2 \\ B_{C1}e^{-t} + B_{C2}e^{-2t} + 4 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

6. Проанализируем цепь до коммутации и найдём предначальные условия $i_L(0^-), u_C(0^-)$. До коммутации воздействие $u(t) = U_1$ было подано бесконечно давно, как это видно из рис. 2.9, б. Следовательно, свободные составляющие переменных состояния, описываемые в пассивной цепи затухающими экспонентами, к моменту коммутации обнулены и решения тождественно равны их вынужденным составляющим, $x(t) = x_{\text{вын}}(t), t \leq 0$. При коммутации параметры цепи и её структура не изменились, поэтому для анализа докоммутационного периода можно использовать те же уравнения динамики (2.27). До коммутации вектор $f(t) = u(t)$ представлял константу U_1 , поэтому вектор $x_{\text{вын}}(t)$ частных решений следует подбирать также в виде констант I_{L0}, U_{C0} . Подставив вектор $x_{\text{вын}}(t) = [I_{L0} U_{C0}]^T$ в уравнение (2.27), получим:

$$D \begin{bmatrix} I_{L0} \\ U_{C0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{L0} \\ U_{C0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{CR_1} \end{bmatrix} U_1, t \leq 0;$$

$$0 = -\frac{1}{L} U_{C0} + \frac{1}{L} U_1;$$

$$0 = \frac{1}{C} I_{L0} - \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} U_{C0} + \frac{1}{CR_1} U_1,$$

$$U_{C0} = U_1 = 2; \quad I_{L0} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} U_{C0} - \frac{1}{R_1} U_1 = 1.$$

Ток в индуктивности и напряжение на ёмкости при $t < 0$ постоянны, следовательно, и при $t = 0^-$ они такие же:

$$i_L(0^-) = I_{L0} = 1, u_C(0^-) = U_{C0} = 2.$$

7. Так как при коммутации индуктивность и ёмкость не изменились, то по правилу коммутации найдём:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1; u_C(0^+) = u_C(0^-) = 2.$$

8. Теперь известны два начальных условия; для поиска четырёх постоянных интегрирования необходимо ещё два, например, $i'_L(0^+), u'_C(0^+)$. Подставив в уравнение (2.27) начальные значения $i_L(0^+), u_C(0^+), t = 0^+$ и $u(0^+) = U_2$, получим:

$$\begin{bmatrix} i'_L(0^+) \\ u'_C(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(0^+) \\ u_C(0^+) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{CR_1} \end{bmatrix} u(0^+);$$

$$i'_L(0^+) = -\frac{1}{L}u_C(0^+) + \frac{1}{L}U_2,$$

$$u'_C(0^+) = \frac{1}{C}i_L(0^+) - \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}u_C(0^+) + \frac{1}{CR_1}U_2;$$

$$i'_L(0^+) = 2, u'_C(0^+) = 4.$$

9. Левые части алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования теперь известны. Правые части известны только для двух уравнений, решений (2.28). Продифференцировав эти решения, найдём:

$$i'_L(t) = -B_{L1}e^{-t} - 2B_{L2}e^{-2t};$$

$$u'_C(t) = -B_{C1}e^{-t} - 2B_{C2}e^{-2t}.$$

В итоге при $t = 0^+$ сформируем четыре линейно независимых алгебраических уравнения относительно постоянных интегрирования. Получим:

$$\begin{aligned}
1 &= B_{L1} + B_{L2} + 2; \\
2 &= B_{C1} + B_{C2} + 4; \\
2 &= -B_{L1} - 2B_{L2}; \\
4 &= -B_{C1} - 2B_{C2}.
\end{aligned}$$

Решив составленную систему уравнений, найдём:

$$B_{L1} = 0, B_{L2} = -1, B_{C1} = 0, B_{C2} = -2.$$

Записываем окончательный ответ:

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= -e^{-2t} + 2; \\
u_C(t) &= -2e^{-2t} + 4.
\end{aligned}$$

11. Проверка – найденные решения подставляем в уравнение (2.27) и обращаем его в тождество.

$$\begin{aligned}
D \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2 \\ -2e^{-2t} + 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2 \\ -2e^{-2t} + 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} 4; \\
2e^{-2t} &= 2e^{-2t} - 4 + 4; \\
4e^{-2t} &= -2e^{-2t} + 4 + 6e^{-2t} - 12 + 8.
\end{aligned}$$

Проверка выполнена, в итоге получили точное решение $x(t)$ для переменных состояния.

12. Строим схему замещения исследуемой цепи, показанную на рис. 2.9, г. Как видно из графа цепи, для того чтобы найти переменные, исключённые при формировании уравнения состояния (2.27), достаточно записать уравнения Кирхгофа для сечения I и контуров, состоящих из ветвей 2, 3 и 4, 5.

Получим:

$$\begin{aligned}
i_u(t) - i_L(t) - i_1(t) &= 0; \\
LDi_L(t) - R_1 i_1(t) &= 0; \\
u_C(t) - R_2 i_2(t) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Подставив в уравнения (2.29) известные теперь $i_L(t)$, $u_C(t)$ и решив эти уравнения, найдём:

$$i_1(t) = 2e^{-2t}; \quad i_2(t) = -e^{-2t} + 2; \quad i_u(t) = e^{-2t} + 2.$$

Активная цепь

Схема цепи приведена на рис. 2.9, *д*. Даны её параметры в относительных единицах: $R = 1/3$, $L = 0.25$, $C = 1$, $k = 1/6$. При $t \leq 0$ на вход цепи подано воздействие $U_1 = 2$, при $t > 0$ – воздействие $U_2 = 4$, показанные на рис. 2.9, *б*. Следовательно, при $t = 0$ происходит коммутация входного сигнала, в результате которой в цепи изменяются токи и напряжения. Необходимо найти их. Для решения задачи используем метод переменных состояния.

1. Искомые переменные показаны на схеме рис. 2.9, *д*, граф цепи, сечения, независимые контуры – на рис. 2.9, *з*. В качестве искомых переменных выбраны: обязательный ток $i_u(t)$ в первой ветви, он же переменная состояния $i_L(t)$, переменная состояния $u_C(t)$ во второй ветви, ток $i_R(t)$ в третьей ветви.
2. По процедуре, сформированной в п. 1.5, составим уравнение (2.6). Запишем в виде (1.31) систему линейно независимых уравнений Кирхгофа:

$$\begin{aligned} i_R(t) + CDu_C(t) - i_L(t) &= 0; \\ -u(t) + u_C(t) + LDi_L(t) &= 0; \\ -ki_L(t) + Ri_R(t) - u_C(t) &= 0. \end{aligned}$$

Переформировав записанную систему уравнений к виду (2.6), получим:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & CD \\ 0 & LD & 1 \\ R & k & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_R(t) \\ i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

3. Формируем вектор искомых переменных $x(t) = [i_L(t) \ u_C(t)]^T$ и преобразуем записанное уравнение к виду (2.21). Получим:

$$D \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{R-k}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

4. По процедуре, сформированной в п. 2.2 проверяем условие существования и единственности решения и решаем составленное уравнение с точностью до постоянных интегрирования.

4.1. Проверяем условие (2.22) существования и единственности решения.

Получим:

$$\det \left[D \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{R-k}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \right] = \det \begin{bmatrix} D & \frac{1}{L} \\ -\frac{R-k}{RC} & D + \frac{1}{RC} \end{bmatrix} = \\ = D^2 + \frac{1}{RC} D + \frac{1}{L} \frac{R-k}{RC} \neq 0.$$

Решение существует и, по определению, оно единственно.

4.2. Вектор $f(t) = u(t) = \text{const}$, поэтому подберём вектор частных решений в виде констант I_L, U_C .

Подставив вектор $x_{\text{вын}}(t)$ уравнение вида (2.21), получим:

$$D \begin{bmatrix} I_L \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{R-k}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ U_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} U_2. \\ 0 = -\frac{1}{L} U_C + \frac{1}{L} U_2; \\ 0 = \frac{R-k}{RC} I_L - \frac{1}{RC} U_C.$$

Отсюда

$$U_C = U_2 = 4; \\ 0.5 I_L - 3 U_C = 0; I_L = 24.$$

Итак,

$$x_{\text{вын}}(t) = \begin{bmatrix} 24 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

4.3. Сформируем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \frac{1}{RC} \lambda + \frac{1}{L} \frac{R-k}{RC} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0. \\ \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2.$$

Корни различные, поэтому $V_1 = V_2 = 0$. Получим следующее решение с точностью до постоянных интегрирования:

$$x(t) = x_{\text{св}}(t) + x_{\text{вын}}(t) = \begin{bmatrix} i_{L\text{св}}(t) + i_{L\text{вын}}(t) \\ u_{C\text{св}}(t) + u_{C\text{вын}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{L1}e^{-t} + B_{L2}e^{-2t} + 24 \\ B_{C1}e^{-t} + B_{C2}e^{-2t} + 4 \end{bmatrix}.$$

5. Проанализируем цепь до коммутации и найдём предначальные условия $i_L(0^-), u_C(0^-)$. До коммутации $u(t) = U_1 = \text{const}$ начиная от $t = -\infty$, поэтому перед коммутацией $x(t) = x_{\text{вын}}(t)$. При коммутации параметры цепи и её структура не изменились, следовательно, для анализа докоммутационного режима можно использовать те же уравнения состояния. Подставив в них вектор $x_{\text{вын}}(t) = [I_{L0} U_{C0}]^T$ и решив полученные алгебраические уравнения, найдём $I_{L0} = i_L(0^-) = 12$; $U_{C0} = u_C(0^-) = 2$.

6. Так как при коммутации индуктивность и ёмкость не изменились, то по правилу коммутации найдём: $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 12$; $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 2$.

7. Есть два начальных условия, а постоянных интегрирования четыре.

Уравнения состояния позволяют найти $i'_L(0^+), u'_C(0^+)$. Подставив в них известные теперь $i_L(0^+), u_C(0^+)$, получим:

$$\begin{bmatrix} i'_L(0^+) \\ u'_C(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ \frac{R-k}{RC} & -1/RC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(0^+) \\ u_C(0^+) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} U_2;$$

$$i'_L(0^+) = -\frac{1}{L}u_C(0^+) + \frac{1}{L}U_2;$$

$$u'_C(0^+) = \frac{R-k}{RC}i_L(0^+) - \frac{1}{RC}u_C(0^+).$$

Отсюда

$$i'_L(0^+) = -4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 8;$$

$$u'_C(0^+) = 0.5 \cdot 12 - 3 \cdot 2 = 0.$$

8. Левые части формируемых алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования теперь известны. Правые части решений

известны для двух из них. Продифференцировав найденные решения, получим две другие правые части:

$$\begin{aligned}i'_L(t) &= -B_{L1}e^{-t} - 2B_{L2}e^{-2t}; \\u'_C(t) &= -B_{C1}e^{-t} - 2B_{C2}e^{-2t}.\end{aligned}$$

В итоге при $t=0^+$ сформируем четыре линейно независимых алгебраических уравнения относительно четырёх постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned}12 &= B_{L1} + B_{L2} + 24; \\2 &= B_{C1} + B_{C2} + 4; \\8 &= -B_{L1} - 2B_{L2}; \\0 &= -B_{C1} - 2B_{C2}.\end{aligned}$$

Решив их, получим:

$$B_{L1} = -16, B_{L2} = 4, B_{C1} = -4, B_{C2} = 2.$$

В итоге записываем окончательный ответ:

$$\begin{aligned}i_L(t) &= -16e^{-t} + 4e^{-2t} + 24; \\u_C(t) &= -4e^{-t} + 2e^{-2t} + 4.\end{aligned}$$

9. Проверка. Подставив найденные решения в исходные уравнения состояния, обращаем их в тождества.

Задание. Как видно, при $k=1/3$ получим один из корней нулевой. При $k>1/3$ процессы в цепи становятся расходящимися. Построить в интервале $t \in [0;10]$ процессы $i_L(t), u_C(t)$ при $k = 1/6; 1/3; 2/3$.

Цепь со взаимной индукцией

Схема цепи приведена на рис. 2.9, жс. Даны её параметры в относительных единицах: $R_1 = R_2 = R = 2, L_1 = L_2 = L = 1.5, |M| = 0.5$. На вход

цепи подано воздействие $u(t) = U = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ 4, & t > 0. \end{cases}$

Следовательно, при $t=0$ происходит коммутация – изменение входного сигнала, в результате которой в цепи изменяются токи и напряжения. Необходимо найти их. Для решения задачи используем метод переменных состояний.

1. Искомые переменные показаны на схеме рис. 2.9, *ж*, независимые контуры и направления их обхода – там же. В качестве искомых переменных выбраны: обязательный ток $i_u(t)$ в первом контуре, он же переменная состояния $i_1(t)$; ток во втором контуре, он же переменная состояния $i_2(t)$.
2. По процедуре, сформированной в п. 1.5, составим уравнение (2.6). Не учитывая вначале для удобства знак взаимной индуктивности M , запишем систему линейно независимых уравнений Кирхгофа. Получим:

$$\begin{aligned} -u(t) + R_1 i_1(t) + L_1 D i_1(t) + M D i_2(t) &= 0; \\ L_2 D i_2(t) + M D i_1(t) + R_2 i_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Переформировав при $R_1 = R_2 = R$ и $L_1 = L_2 = L$ записанную систему уравнений к виду (2.6), получим:

$$\begin{bmatrix} LD + R & MD \\ MD & LD + R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

3. Преобразуем записанное уравнение к виду (2.21). Получим:

$$D \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{LR}{L^2 - M^2} & \frac{MR}{L^2 - M^2} \\ \frac{MR}{L^2 - M^2} & -\frac{LR}{L^2 - M^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L}{L^2 - M^2} \\ -\frac{M}{L^2 - M^2} \end{bmatrix} u(t).$$

Процедура решения сформированной системы уравнений аналогична описанной выше в примерах анализа пассивной и активной цепей. Выполнив действия по пп. 4–8, получим:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{U}{R} - \frac{U}{2R} e^{-\frac{R}{L+M}t} - \frac{U}{2R} e^{-\frac{R}{L-M}t}; \\ i_2(t) &= -\frac{U}{2R} e^{-\frac{R}{L+M}t} + \frac{U}{2R} e^{-\frac{R}{L-M}t}. \end{aligned}$$

Обратимся к схеме цепи на рис. 2.9, *ж* и установим тип включения индуктивно связанных элементов и, соответственно, знак M . Так как направления токов по отношению к маркировкам на выводах ориентированы неодинаково, то включение встречное, поэтому $M = -|M| = -0.5$. Подставив в найденные решения численные данные, получим:

$$i_1(t) = 2 - e^{-2t} - e^{-t};$$

$$i_2(t) = -e^{-2t} + e^{-t}.$$

9. Проверка. Подставив решения в уравнения состояния, обращаем их в тождества.

2.5. Пробные сигналы. Единичная ступенчатая функция Хевисайда. Единичная импульсная функция Дирака. Обобщённая производная и обобщённая функция. Переходная и импульсная характеристики цепи

Пробные сигналы. Пусть найдена реакция линейной цепи на какой-либо один сигнал. Если на вход цепи задать другой сигнал, связанный с первым определёнными математическими операциями, то в силу линейности цепи реакция на этот другой сигнал будет связана с реакцией на первый теми же математическими операциями. Следовательно, второй раз решать задачу анализа цепи не нужно. Например, если известна реакция цепи на скачкообразно изменяющийся сигнал, то, задав на вход этой цепи интеграл от него линейно изменяющийся сигнал, найдём реакцию, взяв интеграл от предыдущей реакции. Приходим к выводу, что достаточно, во-первых, хорошо подобрать пробный сигнал и, во-вторых, разработать аппарат, который позволит использовать реакцию на пробный сигнал для нахождения реакции на любой другой. В этом параграфе опишем решение первой задачи и следствия, вытекающие из её решения.

Единичная ступенчатая функция Хевисайда. Очень удобным пробным сигналом является введённая Хевисайдом единичная ступенчатая функция. Её обычно обозначают символом $1(t)$ или $\delta_1(t)$. Она определена так:

$$\delta_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Обратная функция Хевисайда определена так:

$$\delta_1(-t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq 0; \\ 0 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Различные виды функций $\delta_1(t)$, $\delta_1(-t)$ и некоторые операции, осуществлённые с их помощью, показаны на рис. 2.10, а–е.

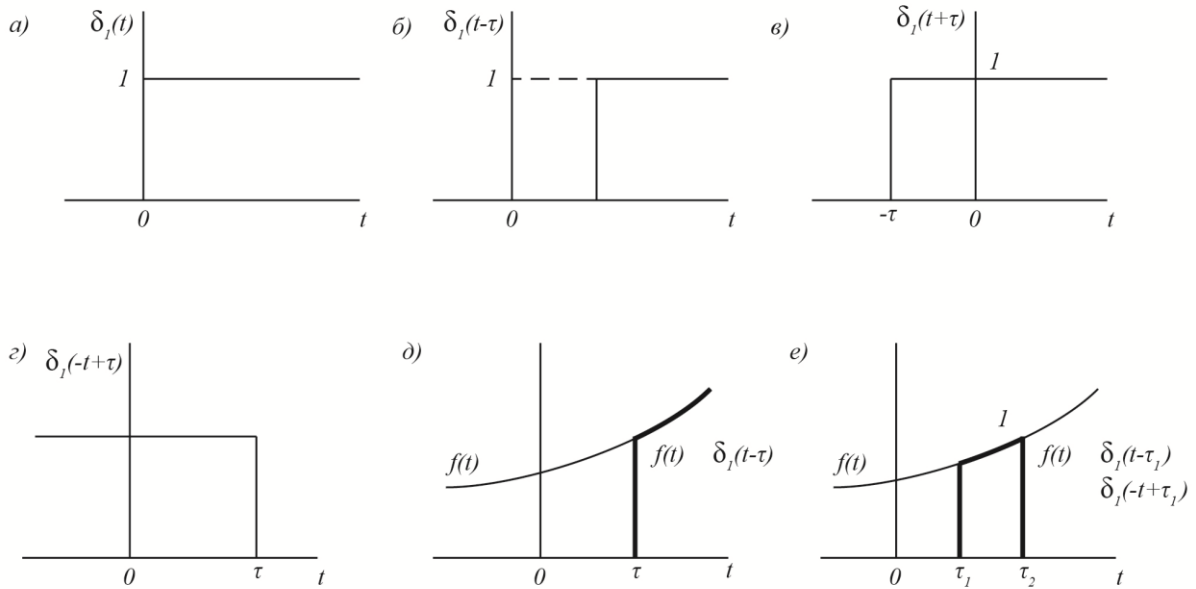


Рис. 2.10

Положительные свойства функции (30) заключаются в том, что она равна нулю при $t < 0$ и константе при $t \geq 0$. Следовательно, при задании на вход цепи функции $\delta_1(t)$ предначальные условия всегда нулевые, а вынужденная составляющая всегда константа. Наконец, многие функции могут быть аппроксимированы набором функций Хевисайда.

Единичная импульсная функция Дирака. Единичная импульсная функция и импульсные функции вообще качественно отличаются от классических функций. Введём единичную импульсную функцию, исходя из классической функции путём предельного перехода. Рассмотрим функцию $\varphi(t)$, такую, что

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{2}{\tau}t + \frac{2}{\tau^2}t^2 + 0.5, & t \in [-\frac{\tau}{2}; 0]; \\ \frac{2}{\tau}t - \frac{2}{\tau^2}t^2 + 0.5, & t \in [0; \frac{\tau}{2}]; \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t > \frac{\tau}{2}; \\ 0, & t < -\frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Возьмём от функции (31) первую $D\varphi(t)$ и вторую $D^2\varphi(t)$ производные. Получим:

$$D\varphi(t) = \begin{cases} \frac{2}{\tau} + \frac{4}{\tau^2}t, & t \in [-\frac{\tau}{2}; 0]; \\ \frac{2}{\tau} - \frac{4}{\tau^2}t, & t \in]0; \frac{\tau}{2}]; \end{cases}$$

$$D\varphi(t) = 0, \quad t > \left| \frac{\tau}{2} \right|,$$

$$D^2\varphi(t) = \begin{cases} \frac{4}{\tau^2}, & t \in [-\frac{\tau}{2}; 0]; \\ -\frac{4}{\tau^2}, & t \in]0; \frac{\tau}{2}]; \end{cases}$$

$$D^2\varphi(t) = 0, \quad t > \left| \frac{\tau}{2} \right|.$$

Функции $\varphi(t)$, $D\varphi(t)$, $D^2\varphi(t)$ показаны на рис. 2.11, а, б, в соответственно.

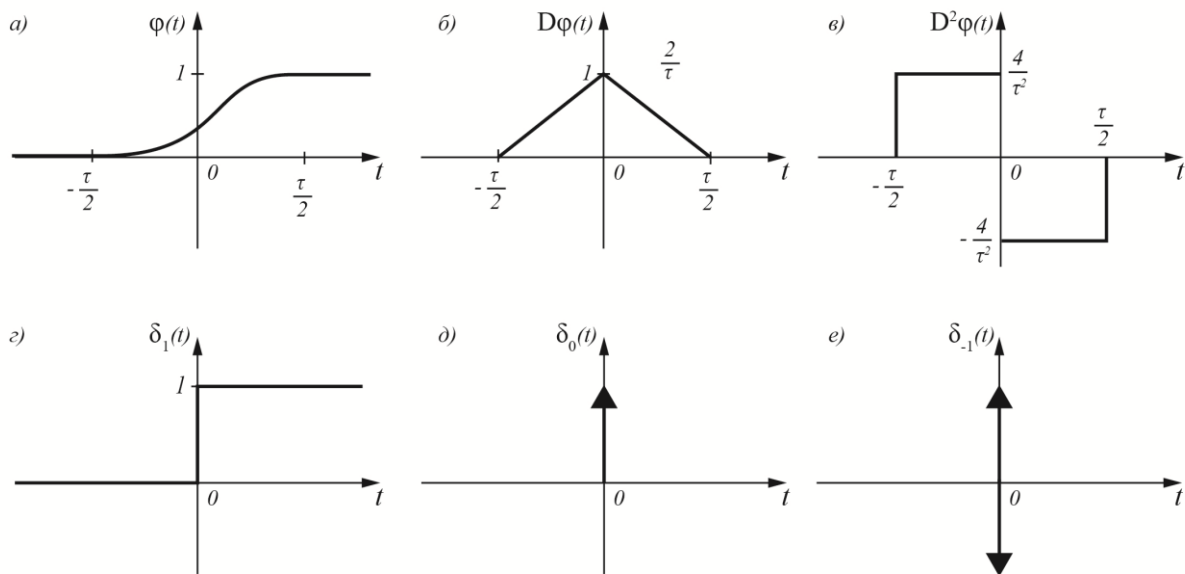


Рис. 2.11

Заметим, что площадь, ограниченная функцией $D\varphi(t)$, постоянна, равна единице и не зависит от величины τ . Устремим τ к нулю, тогда функция $\varphi(t)$ устремится к единичной ступенчатой функции $\delta_1(t)$, а функция $D\varphi(t)$ — к новой функции $\delta_0(t)$, которая введена Дираком и называется единичной импульсной функцией. Функция $\delta_0(t)$ обладает следующими свойствами:

$$1) \quad \delta_0(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при } t \neq 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

$$2) \quad \int_{0^-}^{0^+} \delta_0(t) dt = 1.$$

Функции $\delta_1(t)$, $\delta_0(t)$, полученные в результате предельного перехода из функций $\varphi(t)$, $D\varphi(t)$, показаны на рис. 2.11, *г*, *д*, *е* соответственно. Из выполненных преобразований следует, что единичная импульсная функция есть производная от единичной ступенчатой функции, $\delta_0(t) = D\delta_1(t)$. Вспомним, что классическая производная существует всюду, кроме точек разрыва первого рода, где она не определена. Единичная импульсная функция $\delta_0(t)$, как видно из рис. 2.11, *г*, *д* существует именно в точке разрыва первого рода функции $\delta_1(t)$ при $t = 0$. Во всём остальном временном интервале, при $t \gg 0$, классическая производная от функции $\delta_1(t)$ равна нулю. Следовательно, единичная импульсная функция $\delta_0(t)$, также всюду при $t \gg 0$ равная нулю, расширяет понятие производной, определяя её в точке разрыва первого рода дифференцируемой функции.

На рис. 2.11, *е* показана импульсная функция $\delta_{-1}(t)$ первого порядка, полученная путем предельного перехода из функции $D^2\varphi(t)$, поэтому $\delta_{-1}(t) = D\delta_0(t) = D^2\delta_1(t)$.

Функция $\varphi(t)$ составлена из кусков квадратичных парабол с тем, чтобы получить функцию $\delta_{-1}(t)$, необходимую в дальнейшем. Для того, чтобы сформировать импульсные функции высших порядков, очевидно, нужно составить многократно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$.

Обобщённая производная и обобщённая функция. Итак, $\delta_0(t) = D\delta_1(t)$. Опишем этот результат иначе:

$$\delta_0(t) = D\delta_1(t) = [\delta_1(0^+) - \delta_1(0^-)]\delta_0(t) = [1 - 0]\delta_0(t) = \delta_0(t).$$

Иными словами, производная в точке разрыва первого рода есть единичная импульсная функция, умноженная на весовой коэффициент, равный разности значений дифференцируемой функции справа и слева от

точки разрыва. Очевидно, что это определение можно отнести к любой разрывной функции, а не только к единичной ступенчатой. Такая производная названа обобщённой. Она совпадает с классической производной всюду, где дифференцируемая функция непрерывна и дополняет её в точках разрыва первого рода. В дальнейшем будем обозначать классическую производную символом $df(t)/dt$, а обобщённую – символом $Df(t)$.

Из определения $\delta_0(t) = D\delta_1(t)$ следует, что

$$Df(t) = \left[f(\tau^+) - f(\tau^-) \right] \delta_0(t - \tau) + \frac{df(t)}{dt},$$

где τ – абсцисса точки разрыва первого рода дифференцируемой функции; $f(\tau^+)$ – значение дифференцируемой функции справа от точки разрыва; $f(\tau^-)$ – значение этой функции слева от точки разрыва; $\delta_0(t - \tau)$ – единичная импульсная функция, сдвинутая на τ вправо.

На рис. 2.12, а, б, в приведён пример, соответственно, разрывной функции $f(t)$, классической $df(t)/dt$ и обобщённой $Df(t)$ производной от неё.

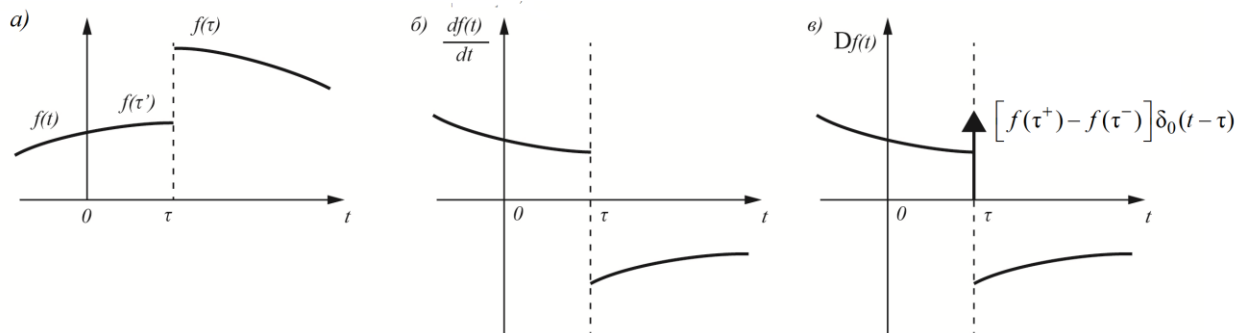


Рис. 2.12

Функции $f(t)$, в состав которых входят импульсные функции различных порядков, названы обобщёнными. Они состоят из суммы регулярных (классических) функций $f^+(t)$ и сингулярных $f^-(t)$, представляющих совокупность импульсных функций различных порядков. Описание обобщённой функции таково:

$$f(t) = f^-(t) + f^+(t) = \sum_{j=0}^{-J} S_j \delta_j(t) + f^+(t), \quad (2.34)$$

где j – порядок импульсной функции, S_j – её весовой коэффициент.

Для примера на рис. 2.13, *а* показана непрерывная функция $Ae^{-\alpha t}$, на рис. 2.13, *б* – разрывная функция $Ae^{-\alpha t} \delta_1(t)$, на рис. 2.13, *в* – обобщённая производная $DAe^{-\alpha t} \delta_1(t)$ от разрывной функции, которая представляет следующую обобщённую функцию:

$$\begin{aligned} f(t) &= D[Ae^{-\alpha t} \delta_1(t)] = [A - 0] \delta_0(t) + \frac{d}{dt} [Ae^{-\alpha t} \delta_1(t)] = \\ &= A \delta_0(t) + [-\alpha Ae^{-\alpha t} \delta_1(t)] = f^-(t) + f^+(t), \end{aligned}$$

где $J=0$, $S=A$.

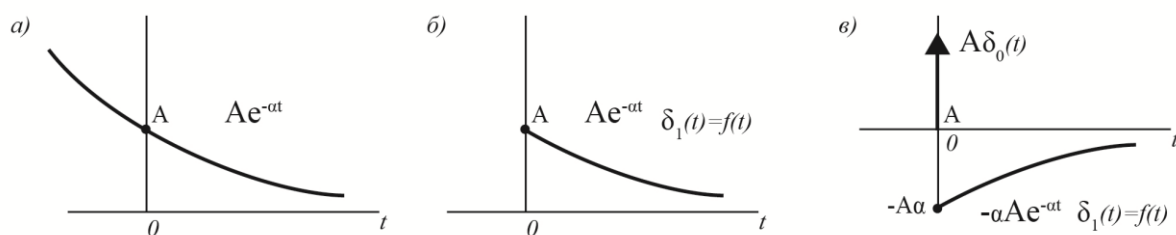


Рис. 2.13

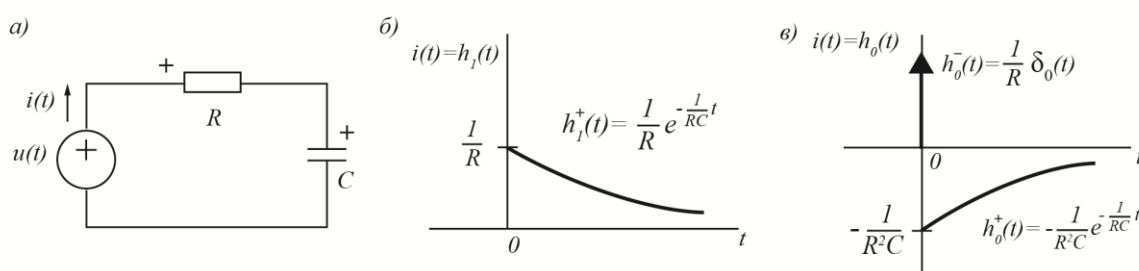


Рис. 2.14

Переходная и импульсная характеристики цепи. Переходной характеристикой называется реакция цепи на единичное ступенчатое воздействие $\delta_1(t)$ при нулевых предначальных условиях. Её обозначают символом $h_1(t)$.

Импульсной характеристикой называется реакция цепи на единичное импульсное воздействие $\delta_0(t)$ при нулевых предначальных условиях. Её обозначают символом $h_0(t)$.

Если входные сигналы связаны некоторой математической операцией, то в силу линейности цепи её реакции связаны той же операцией. Так как $\delta_0(t) = D\delta_1(t)$, то отсюда следует, что $h_0(t) = Dh_1(t)$. По определению, $h_1(0^-) = 0$, но, возможно, $h_1(0^+) \neq 0$, т. е. в общем случае переходная характеристика разрывна в точке с абсциссой $t=0$. Следовательно, по формуле (2.33) получим:

$$h_0(t) = Dh_1(t) = h_1(0^+)\delta_0(t) + \frac{dh_1(t)}{dt} = h_0^-(t) + h_0^+(t). \quad (2.35)$$

Пример 2.5. Вычисление переходной и импульсной характеристик пассивной линейной цепи.

Схема цепи приведена на рис. 2.14, а. Даны её параметры R, C . На входе цепи действуют сигналы а) $u(t) = \delta_1(t)$; б) $u(t) = \delta_0(t)$. Необходимо найти реакции цепи а) $i(t) = h_1(t)$; б) $i(t) = h_0(t)$. Граф цепи очевиден, переменная состояния $u_C(t)$. Динамику цепи описывает следующее уравнение Кирхгофа для контура:

$$-u(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0.$$

Преобразовав его в уравнение состояния, получим:

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}u_C(t) + \frac{1}{RC}u(t).$$

Далее

а) $u(t) = \delta_1(t)$. Используя сформированную в п. 2.3 процедуру решения уравнений состояния, получим:

$$h_1(t) = u_C(t) = -e^{-\frac{1}{RC}t} + 1 = h_1^+(t); \quad h_1^+(0^+) = 0.$$

Искомая реакция цепи

$$h_1(t) = i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} = h_1^+(t); \quad h_1^+(0^+) = \frac{1}{R}.$$

б) $u(t) = \delta_0(t)$. По формуле (2.35) найдём:

$$h_0(t) = i(t) = Dh_1(t) = h_1(0^+) \delta_0(t) + \frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{1}{R} \delta_0(t) + \left[-\frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{1}{RC}t} \right] =$$

$$= h_0^-(t) + h_0^+(t).$$

Переходная и импульсная характеристики построены на рис. 2.14, б, в соответственно.

Особый случай правила коммутации. Особый случай правила коммутации возникает тогда, когда в цепи действуют импульсные функции токов и напряжений. В этом случае законы непрерывности заряда и потокосцепления, на которые опирается общий случай, перестают быть справедливыми в силу второго из свойств (2.32). В дополнение формул (2.14) получим следующие соотношения.

Если в ёмкости протекает импульсный ток $i_C(t) = S_0 \delta_0(t)$, то по первой формуле (2.15) с учётом второй формулы (2.32) получим:

$$u_C(0^+) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} S_0 \delta_0(t) dt + u_C(0^-) = \frac{S_0}{C} + u_C(0^-). \quad (2.36)$$

Если к индуктивности приложено напряжение $u_L(t) = S_0 \delta_0(t)$, то по второй формуле (2.15) с учётом второй формулы (2.32) получим:

$$i_L(0^+) = \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} S_0 \delta_0(t) dt + i_L(0^-) = \frac{S_0}{L} + i_L(0^-). \quad (2.37)$$

Общий вывод заключается в том, что начальные значения напряжения на ёмкости $u_C(0^+)$ и тока в индуктивности $i_L(0^+)$ всегда могут быть найдены по известным предначальным $u_C(0^-), i_L(0^-)$.

Пример 2.6. Вычисление начальных значений напряжений на ёмкостях в линейной пассивной цепи.

Схема цепи приведена на рис. 2.15. Даны её параметры C_1, C_2, R , на входе цепи действует сигнал $u(t) = \delta_1(t)$. Необходимо найти начальные значения напряжений на ёмкостях $u_{C1}(0^+), u_{C2}(0^+)$.

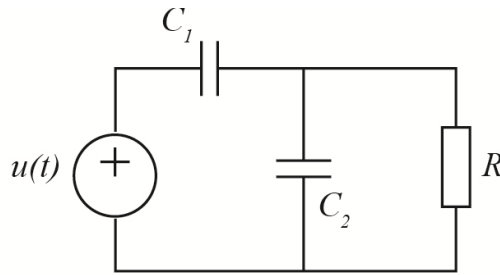


Рис. 2.15

По определению, предначальные условия нулевые: $u_{C1}(0^-) = u_{C2}(0^-) = 0$. Начальное значение сигнала на входе $u(0^+) = 1$. Если мы будем руководствоваться правилом коммутации в общей форме, т. е. будем считать, что $u_{C1}(0^+) = u_{C1}(0^-) = 0$, $u_{C2}(0^+) = u_{C2}(0^-) = 0$, то, записав уравнение Кирхгофа для контура, состоящего из источника напряжения и обеих ёмкостей, обнаружим, что оно не выполняется так как получим:

$$\begin{aligned} -u(0^+) + u_{C1}(0^+) + u_{C2}(0^+) &= 0; \\ -1 + 0 + 0 &\neq 0. \end{aligned}$$

Поскольку нарушение постулата Кирхгофа невозможно, то следует предположить, что здесь особый случай правила коммутации и через ёмкости C_1, C_2 при включении источника $u(t) = \delta_1(t)$ протекает импульс тока $i(0) = S_0 \delta_0(t)$. В этом предположении найдём:

$$\begin{aligned} u_{C1}(0^+) &= \frac{1}{C_1} \int_{0^-}^{0^+} S_0 \delta_0(t) dt + u_{C1}(0^-) = \frac{S_0}{C_1}; \\ u_{C2}(0^+) &= \frac{1}{C_2} \int_{0^-}^{0^+} S_0 \delta_0(t) dt + u_{C2}(0^-) = \frac{S_0}{C_2}. \end{aligned}$$

Вновь запишем уравнение Кирхгофа для входного контура. Получим:

$$\begin{aligned} -u(0^+) + u_{C1}(0^+) + u_{C2}(0^+) &= 0; \\ -1 + \frac{S_0}{C_1} + \frac{S_0}{C_2} &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$S_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} u(0+).$$

В итоге найдём следующие начальные значения напряжений на ёмкостях:

$$u_{C1}(0^+) = u(0+) \frac{C_2}{C_1 + C_2}; \quad u_{C2}(0^+) = u(0+) \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Поставленная задача решена.

2.6. Интеграл наложения (интеграл Дюамеля) через переходную и импульсную характеристику

Интеграл наложения – это аппарат, который при нулевых предначальных условиях позволяет найти реакцию цепи на произвольный входной сигнал, если известна её переходная или импульсная характеристика.

Интеграл наложения через переходную характеристику

Для произвольной цепи известна её реакция на единичную ступенчатую функцию $\delta_1(t)$ – переходная характеристика $h_1(t)$. На входе цепи действует произвольный сигнал $f(t)$. Необходимо найти её реакцию $x(t)$.

Аппроксимируем входной сигнал кусочно-постоянными функциями, например, так, как показано на рис. 2.16, а. В этом случае входной сигнал $f(t)$ описывает следующее приближённое выражение:

$$f(t) \approx f(0^+) \delta_1(t) + \sum_{n=1}^N \Delta f(n\Delta\tau) \delta_1(t - n\Delta\tau). \quad (2.38)$$

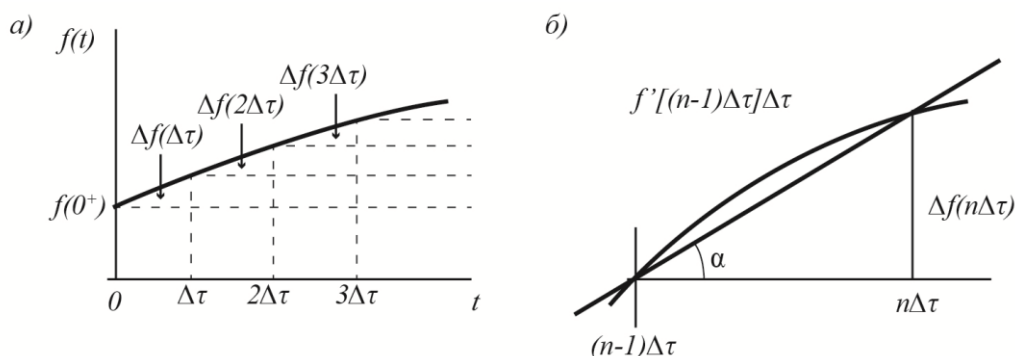


Рис. 2.16

Реакция цепи имеет соответствующее приближённое выражение:

$$x(t) \approx f(0^+)h_1(t) + \sum_{n=1}^N \Delta f(n\Delta\tau)h_1(t - n\Delta\tau). \quad (2.39)$$

Назначив величину $\Delta\tau$ достаточно малой, заменим $\Delta f(n\Delta\tau)$ на $f'[(n-1)\Delta\tau]\Delta\tau$, как показано на рис. 2.16, б и перепишем формулы (2.38), (2.39) иначе:

$$\begin{aligned} f(t) &\approx f(0^+)\delta_1(t) + \sum_{n=1}^N f'[(n-1)\Delta\tau]\delta_1(t - n\Delta\tau)\Delta\tau; \\ x(t) &\approx f(0^+)h_1(t) + \sum_{n=1}^N f'[(n-1)\Delta\tau]h_1(t - n\Delta\tau)\Delta\tau. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Устремим $\Delta\tau$ к бесконечно малой $d\tau$, тогда $(n-1)\Delta\tau$, $n\Delta\tau$ устремятся к непрерывной переменной τ . Из формул (2.40) вследствие этого вытекают следующие строгие выражения:

$$f(t) \approx f(0^+)\delta_1(t) + \int_0^t f'(\tau)\delta_1(t - \tau)d\tau; \quad (2.41)$$

$$x(t) \approx f(0^+)h_1(t) + \int_0^t f'(\tau)h_1(t - \tau)d\tau. \quad (2.42)$$

Интегрируя по частям и заменяя переменные, из формулы (2.42) получим ещё три:

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t)h_1(0^+) + \int_0^t f(\tau)h_1'(t - \tau)d\tau; \\ x(t) &= f(0^+)h_1(t) + \int_0^t f'(t - \tau)h_1(\tau)d\tau; \\ x(t) &= f(t)h_1(0^+) + \int_0^t f(t - \tau)h_1'(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Выражения (2.42), (2.43) представляют интеграл наложения через переходную характеристику. Заметим, что в эти выражения входят классические производные,

$$f'(\tau) = df(\tau)/d\tau, \quad h_1'(\tau) = dh_1(\tau)/d\tau.$$

Интеграл наложения через импульсную характеристику

Проще всего воспользоваться уже полученным результатом. Из формулы (2.35) при $t = \tau$ следует:

$$h_1'(\tau) = h_0(\tau) - h_1(0^+) \delta_0(\tau).$$

Подставив это выражение в последнюю формулу (2.43) и принимая во внимание второе свойство (2.32), получим:

$$x(t) = \int_0^t f(t - \tau) h_0(\tau) d\tau. \quad (2.44)$$

Заменив в формуле (2.44) переменные, найдём:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) h_0(t - \tau) d\tau. \quad (2.45)$$

Формулы (2.44), (2.45) представляют интеграл наложения через импульсную характеристику.

В заключение отметим, что если предначальные условия ненулевые, то их учитывают с помощью зависимых источников, после чего используют принцип суперпозиции.

2.7. Анализ в t -области кусочно-линейных цепей

Переход с одного участка линейности ампер-вольтовых, ампер-веберных или вольт-кулоновых характеристик на другой равносильен коммутации, при которой изменяются R, L, C параметры цепи. Решение продолжают при тех предначальных условиях, которые будут в момент этого перехода и тех R, L, C параметрах, которые описывают цепь после этого перехода. Других особенностей анализ кусочно-линейных цепей не имеет.

Пример 2.7. Анализ кусочно-линейной пассивной цепи.

Схема цепи приведена на рис. 2.17, *а*. Ампер-вольтовая характеристика резистора построена на рис. 2.17, *б*, индуктивность $L=1$. На входе цепи действует сигнал $u(t) = 10\delta_1(t)$. Необходимо найти ток $i(t), t \geq 0$.

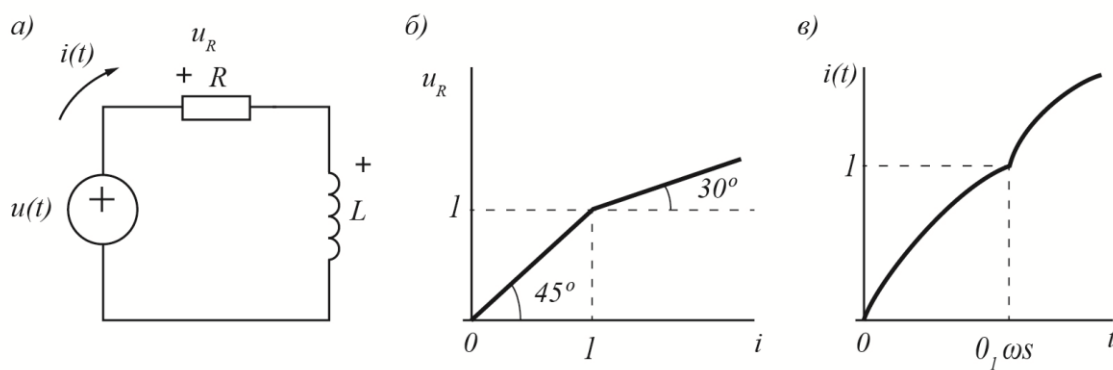


Рис. 2.17

Вначале $u_R(i) = 1 \cdot i$, т. е. $R = 1$. Обычным образом решая задачу при $i(0^+) = i(0^-) = 0$, найдём:

$$i(t) = 10 - 10e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

В некоторый момент времени $t = \tau$ ток достигает значения $i(\tau) = 1$ и наклон ампер-вольтовой характеристики на рис. 2.17, б) меняется. Теперь $u_R(i) = 0.577i + 0.423$, т. е. $R = 0.577$; второе слагаемое учитываем с помощью дополнительного источника напряжения. Значение τ находим из очевидного равенства $i(\tau) = 10 - 10e^{-\tau} = 1$, откуда $\tau = -\ln 0.9 = 0.105$.

Вновь обычным образом решая задачу при $i(0.105^+) = i(0.105^-) = 1$, найдём $i(t) = 16.6 - 15.6e^{-0.577(t-0.105)}$, $t \geq 0.105$.

Окончательный ответ:

$$i(t) = \begin{cases} 10 - 10e^{-t}, & 0 \leq t < 0.105; \\ 16.6 - 15.6e^{-0.577(t-0.105)}, & t \geq 0.105. \end{cases}$$

Поставленная задача решена. Кривая $i(t)$ построена на рис. 2.17. в.

3. НЕЙРОННЫЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

В последние десятилетия нейронные сети находят применение во многих областях техники, где они используются для решения многочисленных задач, включая моделирование и синтез нелинейных систем на основе входных и выходных сигналов [5–8].

Нейронные сети обладают широкими возможностями и огромным потенциалом. Они выполняют разнообразные функции, одна из которых – аппроксимация нелинейных операторов в многомерном пространстве. Множество задач идентификации, моделирования, синтеза нелинейных динамических систем (НДС) удастся сформулировать в аппроксимационной постановке [5–8].

Нейронные сети привлекательны в ситуации, когда полиномиальная модель с ростом степени дает медленно уменьшающуюся погрешность аппроксимации нелинейного оператора.

Разные способы объединения нейронов между собой и организации их взаимодействия привели к созданию сетей разных типов.

В данной главе рассматриваются различные типы нейронных сетей, нашедшие широкое применение на практике в качестве моделей, описывающих соотношения вход/выход нелинейных систем [5–8].

3.1. Многослойная персептронная сеть

Многослойная персептронная сеть (multilayer perceptron network, MLPN) характеризуется следующими отличительными признаками:

- Каждый нейрон имеет гладкую (дифференцируемую на всей области определения) нелинейную функцию активации. Популярны сигмоидальные функции активации:

- гиперболический тангенс (биполярная функция)

$$G(s(n)) = \frac{1 - e^{-2s(n)}}{1 + e^{-2s(n)}},$$

где $s(n)$ – аргумент функции G , n – нормированное дискретное время;

- логистическая (униполярная) функция

$$G(s(n)) = \frac{1}{1 + e^{-s(n)}}.$$

На рис. 3.1, *а*, *б* изображены биполярная и униполярная функции активации соответственно.

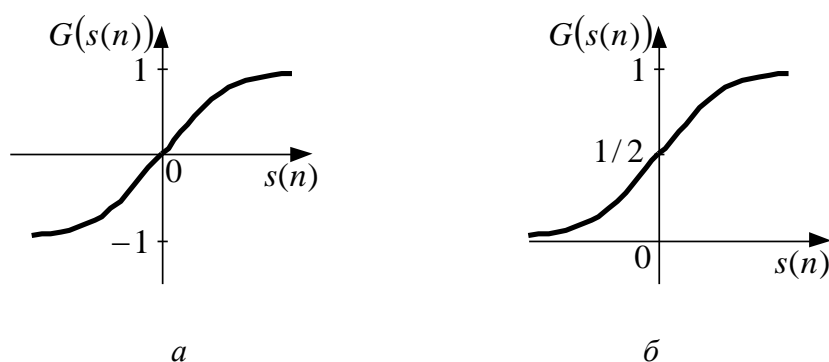


Рис. 3.1

- Сеть содержит один или несколько скрытых слоев с нейронами, не являющихся частью входа или выхода сети. Эти нейроны позволяют сети обучаться решению сложных задач, последовательно извлекая наиболее важные признаки из соотношения вход/выход моделируемой системы.

- Сеть обладает высокой степенью связности, реализуемой посредством синаптических соединений. Изменение уровня связности сети требует изменения множества синаптических соединений или их весовых коэффициентов.

Структура двухслойного персептрона (с одним внутренним и выходным слоем) при векторе воздействий $\mathbf{X}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^t$, где t – знак транспонирования, показана на рис. 3.2.

Слои персептрона сформированы следующим образом:

- скрытый слой содержит матрицу синаптических весов $W = [w_{ij}]_{\substack{i=1,2,\dots,N \\ j=1,2,\dots,m}}$, вектор смещений $\mathbf{B} = [b_1, b_2, \dots, b_N]^t$ и функцию активации G ;

- выходной слой включает в себя вектор весов $\mathbf{C} = [c_1, c_2, \dots, c_N]$ и выходной сигнал $y(n)$ нейронной сети.

Переменная N определяет число нейронов в скрытом слое.

Показанной на рис. 3.2 структуре двухслойного персептрона соответствует математическую модель вида

$$y(n) = \sum_{i=1}^N c_i G \left(\sum_{j=1}^m w_{ij} x_j(n) + b_i \right) = \sum_{i=1}^N c_i G(s_i(n)), \quad (3.1)$$

где $s_i(n) = \sum_{j=1}^m w_{ij} x_j(n) + b_i$.

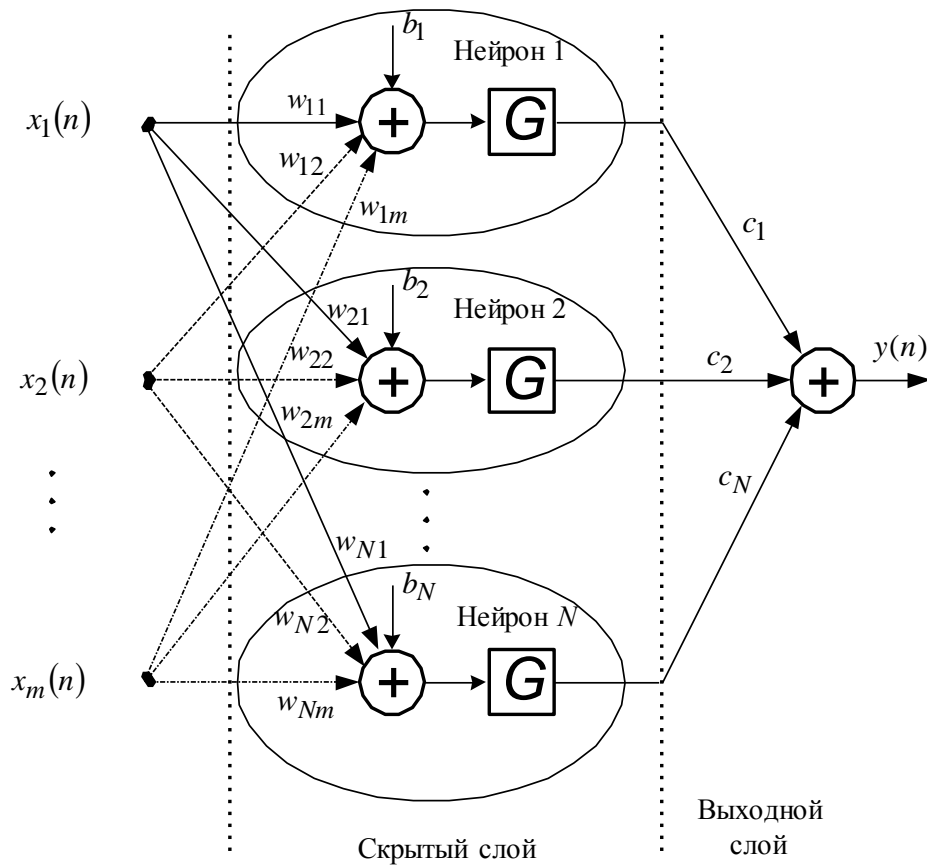


Рис. 3.2

Согласно теореме об универсальной аппроксимации непрерывная функция может быть аппроксимирована двухслойным персептроном (3.1), показанным на рис. 3.2, с одним скрытым слоем неограниченного размера. Теорема об универсальной аппроксимации является теоремой существования, т. е. математическим доказательством возможности аппроксимации любой непрерывной функции. Из теоремы не следует, что один скрытый слой является оптимальным в смысле времени обучения, простоты реализации и, что более важно, качества обучения. Проблема двухслойной сети состоит в том, что нейроны могут взаимодействовать друг с другом на глобальном уровне. В сложных задачах аппроксимации такое

взаимодействие ведет к ситуации, когда повышение точности аппроксимации в одной точке сети наблюдается при ее ухудшении в другой точке. Решить указанную проблему возможно, перейдя к трехслойной сети, так как при наличии двух скрытых слоев процесс аппроксимации становится более управляемым. В частности, можно утверждать следующее [6]:

- локальные признаки извлекаются в первом скрытом слое, т. е. можно некоторые скрытые нейроны первого слоя использовать для разделения входного пространства на отдельные области, а остальные нейроны слоя обучать локальным признакам, характеризующим эти области;

- глобальные признаки извлекаются во втором скрытом слое. В частности, нейрон второго скрытого слоя «обобщает» выходные сигналы нейронов первого скрытого слоя, относящихся к конкретной области входного пространства. Таким образом, он обучает глобальным признакам этой области, а в остальных областях его выходной сигнал равен нулю.

Такой двухэтапный процесс аппроксимации, когда нейроны работают в изолированных областях, по сути, аналогичен сплайновому подходу (кусочной полиномиальной аппроксимации).

MLPN часто синтезируется с помощью такого популярного алгоритма, как алгоритм обратного распространения ошибки. Этот алгоритм основан на коррекции ошибки и предусматривает 2 прохода по всем слоям сети: прямой и обратный. При прямом проходе входной вектор подается на сенсорные узлы сети, после чего распространяется по сети от слоя к слою. В результате генерируется набор выходных сигналов – реакций сети на векторное воздействие. Во время прямого прохода все синаптические веса сети фиксированы. Во время обратного прохода все веса настраиваются в соответствии с правилом коррекции ошибок, а именно: выход сети вычитается из желаемого (целевого) отклика, в результате чего формируется сигнал ошибки. Этот сигнал впоследствии распространяется по сети в направлении, обратном направлению синаптических связей. Отсюда и название – алгоритм обратного распространения ошибки. Синаптические веса настраиваются с целью максимального приближения сигнала сети к желаемому сигналу в статистическом смысле.

Способность к обучению на собственном опыте обеспечивает вычислительную мощь MLPN.

Однако данные сети обладают следующими недостатками:

- распределенная форма нелинейности и высокая связность сети существенно усложняют теоретический анализ MLPN;
- наличие скрытых нейронов делает обучение сети трудным для визуализации.

3.2. Рекуррентная нейронная сеть

Рекуррентная нейронная сеть (recurrent neural network, RNN) представляет собой развитие однонаправленной сети за счет добавления в нее обратных связей. Обратная связь может исходить либо из выходного, либо из скрытого слоя нейронов. В каждом контуре такой связи присутствует элемент единичной задержки, благодаря которому поток сигналов может считаться однонаправленным (выходной сигнал предыдущего временного цикла рассматривается как априори заданный, который просто увеличивает размерность входного вектора).

Благодаря наличию обратных связей рекуррентная нейронная сеть может содержать меньшее количество весовых коэффициентов по сравнению с MLPN, выполняющей ту же задачу. Однако алгоритм обучения RNN, адаптирующий значения синаптических весов, более сложен вследствие зависимости сигналов в текущий момент времени от их значений в предыдущие моменты и соответственно ввиду более громоздкой формулы для расчета вектора градиента. Кроме того, из-за наличия обратных связей необходимо рассматривать вопрос устойчивости рекуррентных сетей.

Рассмотрим некоторые структуры RNN и соответствующие им математические модели.

- Сеть Элмана (Elman neural network, Elman NN) характеризуется частичной рекуррентностью в виде обратной связи между скрытым и входным слоями. Выходной слой состоит из нейронов, однонаправленно связанных с нейронами скрытого слоя.

Структурная схема сети Элмана (рис. 3.3, T – элемент задержки) описывается математической моделью в виде системы уравнений:

$$y(n) = G(g(n)),$$

$$g(n) = \sum_{k=0}^I c_k v_k(n),$$

$$v_0(n) = 1, \quad v_k(n) = G(s_k(n)), \quad k = 1, 2, \dots, I,$$

$$s_k(n) = \sum_{l=1}^I w_{kl} v_l(n-1) + \sum_{l=I+1}^{I+m} w_{kl} x_{l-I}(n),$$

где $y(n)$ – выходной сигнал сети; $x_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, m$ – входные сигналы модели; G – функция активации; c_k , w_{kl} , $k = 1, 2, \dots, I$, $l = 1, 2, \dots, I+m$ – синаптические веса.

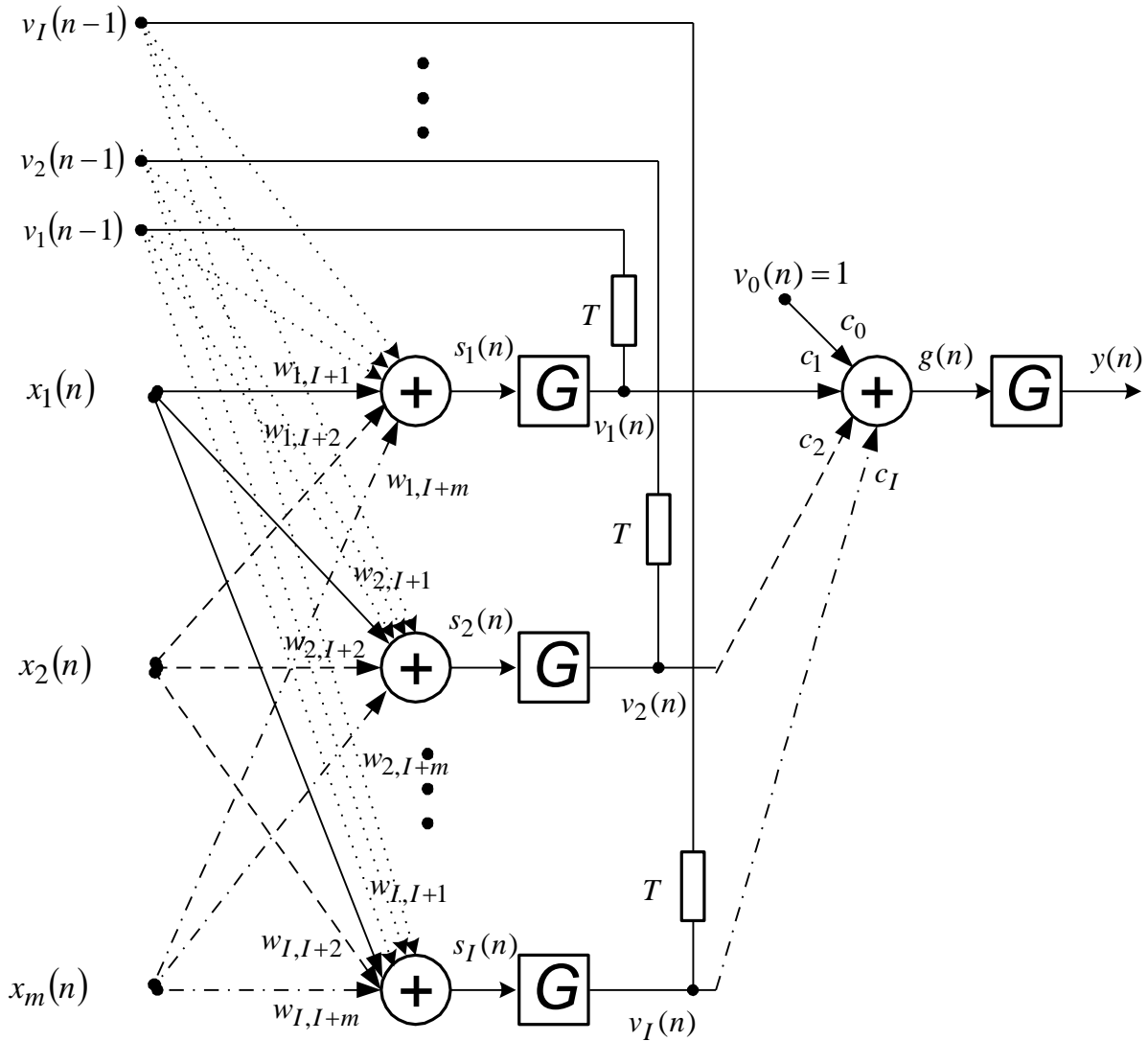


Рис. 3.3

- Рекуррентная многослойная перцептронная сеть (recurrent multilayer perceptron network, RMLPN) является обобщением сети Элмана. Каждый слой RMLPN замкнут на себя собственной обратной связью.

В качестве примера на рис. 3.4 показана RMLPN с двумя скрытыми слоями [8]. Модель данной сети имеет вид системы уравнений:

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \mathbf{G}_3(\mathbf{net}^{(2)}(n+1), y(n)), \\ \mathbf{net}^{(2)}(n+1) &= \mathbf{G}_2(\mathbf{net}^{(1)}(n+1), \mathbf{net}^{(2)}(n)), \\ \mathbf{net}^{(1)}(n+1) &= \mathbf{G}_1(\mathbf{X}(n), \mathbf{net}^{(1)}(n)), \end{aligned}$$

где $y(n+1)$ – выходной сигнал сети; $\mathbf{X}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^t$ – вектор входных сигналов; t – знак транспонирования; $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ – векторы функций активации скрытых и выходного слоев сети; $\mathbf{net}^{(i)}(n)$ – вектор выходных сигналов i -го скрытого слоя сети в момент времени n .

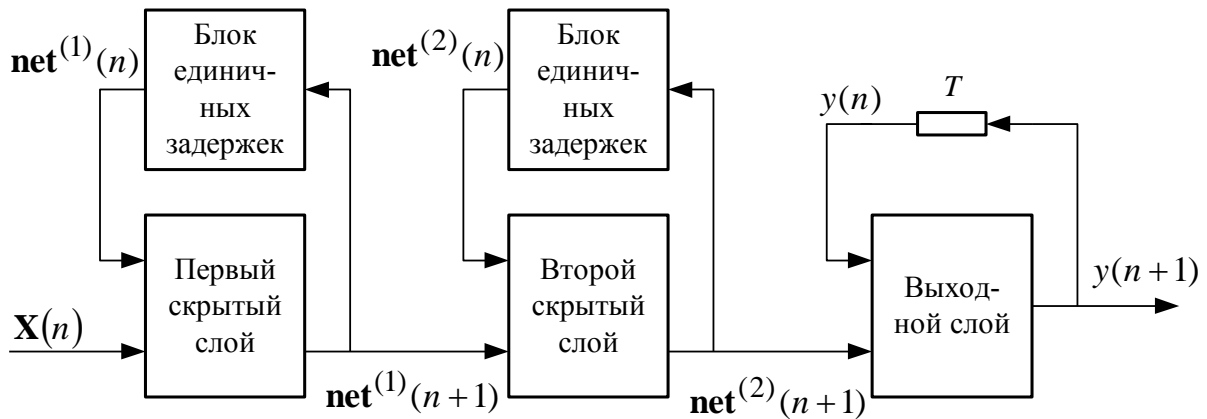


Рис. 3.4

- Сеть Винера (Wiener neural network, Wiener NN) состоит из двух каскадно-соединенных блоков. Первый блок – линейная динамическая система, второй блок – безынерционная нелинейность, представляемая нейронной сетью.

Сеть Винера с линейной рекурсивной системой и двухслойной нейронной структурой при единственном воздействии $x(n)$ показана на рис. 3.5.

Математическая модель изображенной Wiener NN представляется в виде системы уравнений:

$$y(n) = \sum_{i=0}^I c_i \text{net}_i(n);$$

$$net_0(n) = 1, \quad net_i(n) = G(u_i(n)), \quad u_i(n) = w_{i0} + w_{i1}s(n), \quad i = 1, 2, \dots, I,$$

$$s(n) = \sum_{r_b=0}^{R_b} b_{r_b} x(n-r_b) - \sum_{r_a=1}^{R_a} a_{r_a} s(n-r_a),$$

где $y(n)$ – выходной сигнал модели; G – функция активации; c_i , w_{i0} , w_{i1} ($i = 1, 2, \dots, I$) – синаптические веса; b_{r_b} , a_{r_a} – коэффициенты рекурсивной системы; R_b , R_a – длины памяти в прямой и обратной связях рекурсивной системы соответственно.

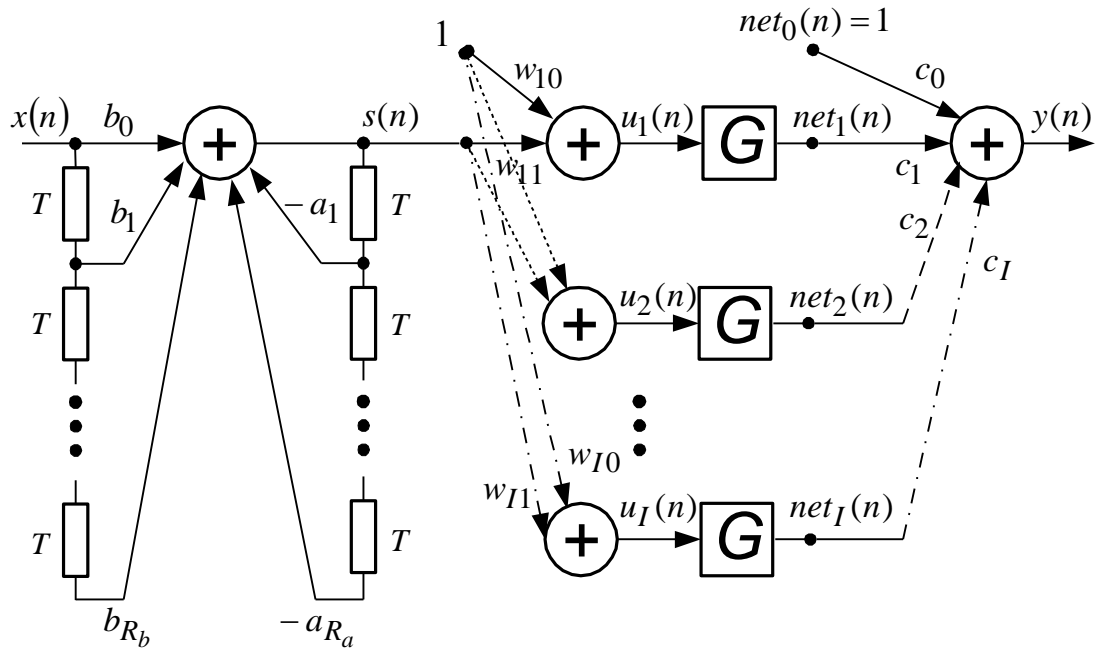


Рис. 3.5

- Сеть Гаммерштейна (Hammerstein neural network, Hammerstein NN), как и сеть Винера, содержит 2 каскадно-соединенных блока. Первый блок – безынерционная нелинейность, представляемая нейронной сетью, второй блок – линейная динамическая система.

На рис. 3.6 показан пример сети Гаммерштейна с двухслойной нейронной структурой и линейной рекурсивной системой при воздействии $\mathbf{X}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^t$, где t – знак транспонирования.

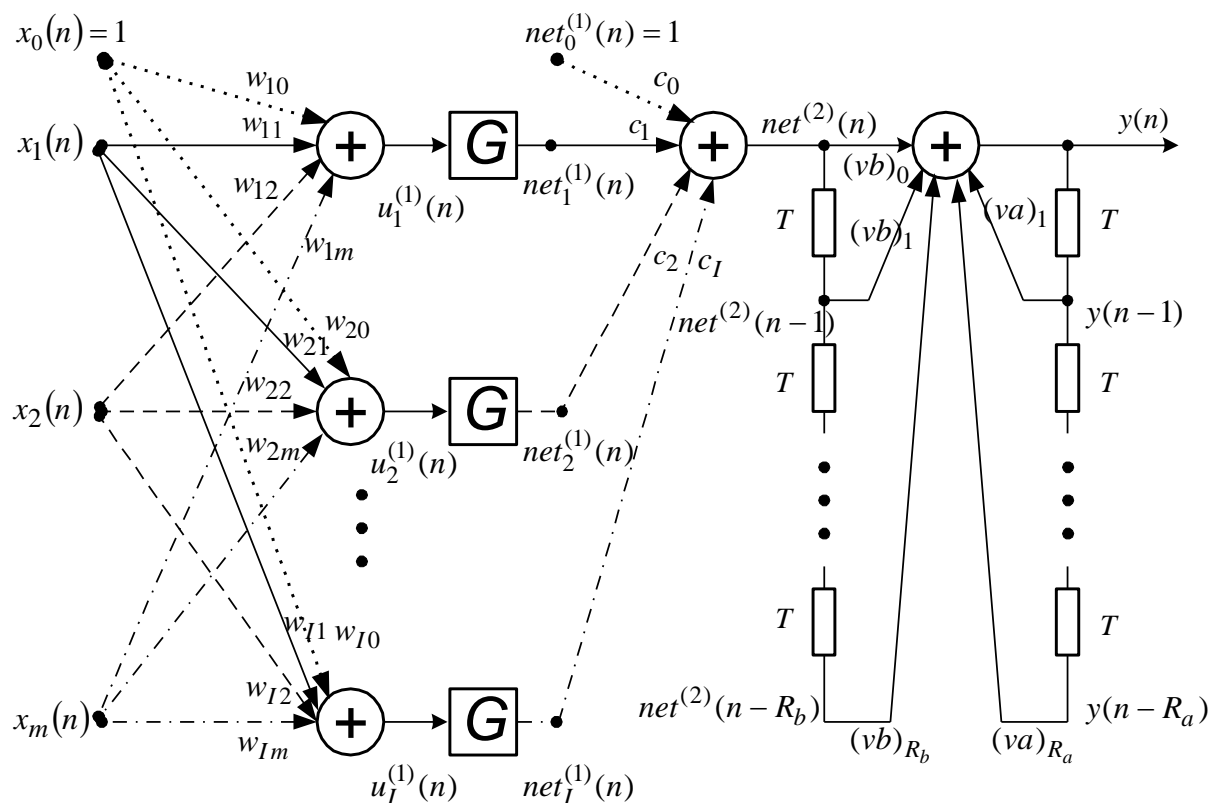


Рис. 3.6

Математическая модель изображенной Hammerstein NN – система уравнений:

$$y(n) = \sum_{r_b=0}^{R_b} (vb)_{r_b} net^{(2)}(n - r_b) + \sum_{r_a=1}^{R_a} (va)_{r_a} y(n - r_a),$$

$$net^{(2)}(n) = \sum_{k=0}^I c_k net_k^{(1)}(n),$$

$$net_0^{(1)}(n) = 1, \quad net_k^{(1)}(n) = G(u_k^{(1)}(n)), \quad k = 1, 2, \dots, I,$$

$$u_k^{(1)}(n) = \sum_{l=0}^m w_{kl} x_l(n), \quad k = 1, 2, \dots, I,$$

где $y(n)$ – выходной сигнал модели; $(vb)_{r_b}$, $(va)_{r_a}$ – коэффициенты рекурсивной системы; R_b , R_a – длины памяти в прямой и обратной связях рекурсивной системы соответственно; G – функция активации; c_k , w_{kl} ($k = 1, 2, \dots, I$, $l = 1, 2, \dots, m$) – синаптические веса нейронной сети.

3.3. Радиально-базисная сеть

В отличие от многослойной сети, в которой преобразование сигнала в произвольной точке пространства выполняется объединенными усилиями многих нейронов, радиально-базисная сеть (radial-basis function network, RBFN) отображает вход/выход НДС адаптацией нескольких одиночных аппроксимирующих функций к ожидаемым значениям в ограниченной области многомерного пространства. При таком подходе отображение всего множества данных представляет собой сумму локальных преобразований.

RBFN – двухслойная сеть с одним скрытым слоем, в которой скрытые нейроны реализуют функции, радиально изменяющиеся вокруг выбранного центра и принимающие ненулевые значения только в окрестности центра. Такие функции называются радиальными базисными и записываются как

$$\varphi(\mathbf{X}) = \varphi(\|\mathbf{X} - \mathbf{C}\|),$$

где \mathbf{X} – вектор аргументов функции φ ; \mathbf{C} – вектор координат центра разложения функции.

В RBFN роль скрытого нейрона состоит в отображении радиального пространства вокруг одиночной заданной точки либо вокруг группы таких точек, образующих кластер. Суперпозиция сигналов, поступающих от всех скрытых нейронов, выполняется выходным нейроном. Суперпозиция позволяет получить отображение всего многомерного пространства.

Структурная схема радиально-базисной сети показана на рис. 3.7.

Ее математическая модель описывается выражением

$$y(n) = w_0 + \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i(\|\mathbf{X}(n) - \mathbf{C}_i\|), \quad (3.2)$$

где $\mathbf{X}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^t$ – вектор входных сигналов сети; t – знак транспонирования; w_i ($i = 1, 2, \dots, N$) – весовые коэффициенты синаптических связей выходного нейрона; w_0 – постоянное смещение; \mathbf{C}_i – вектор координат центра i -й радиальной базисной функции φ_i .

Радиальная функция φ_i в модели (3.2) часто задается как функция Гаусса

$$\varphi_i(\|\mathbf{X}(n) - \mathbf{C}_i\|) = \exp\left(-\sum_{k=1}^m \frac{(x_k(n) - c_{ki})^2}{2\sigma_{ki}^2}\right),$$

где σ_{ki} – дисперсия (отклонение) относительно оси сигнала $x_k(n)$;
 $\mathbf{C}_i = [c_{1i}, c_{2i}, \dots, c_{mi}]^t$ – вектор координат центра i -й радиальной функции.

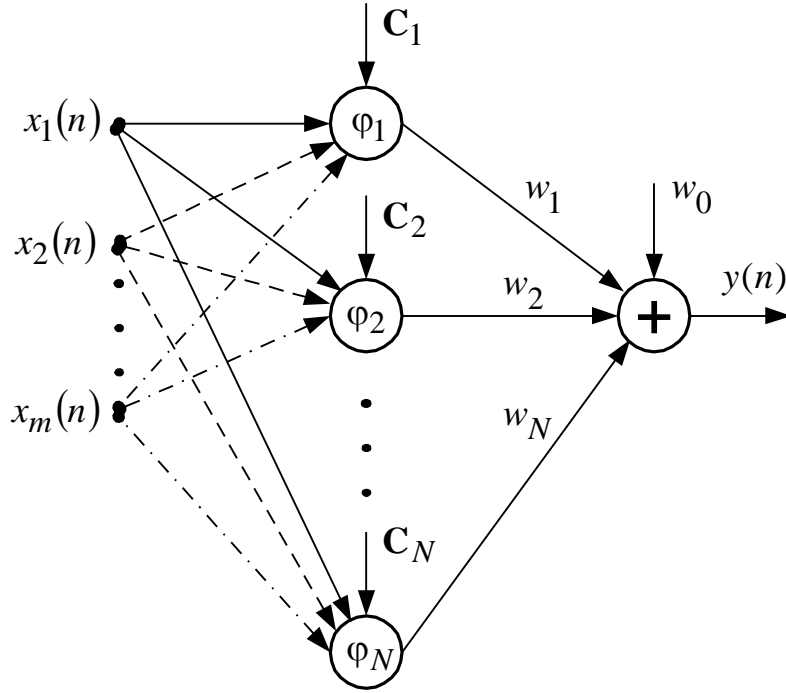


Рис. 3.7

При размещении центра в точке \mathbf{C}_i функция Гаусса может быть определена в упрощенной форме при $\sigma_{1i} = \sigma_{2i} = \dots = \sigma_{mi} = \sigma_i$:

$$\begin{aligned} \varphi_i(\|\mathbf{X}(n) - \mathbf{C}_i\|) &= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_i^2} \sum_{k=1}^m (x_k(n) - c_{ki})^2\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_i^2} \|\mathbf{X}(n) - \mathbf{C}_i\|^2\right), \end{aligned}$$

где σ_i – скалярный коэффициент – параметр, от которого зависит ширина функции; $\|\cdot\|$ – норма в евклидовой метрике:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}(n) - \mathbf{C}_i\|^2 &= (\mathbf{X}(n) - \mathbf{C}_i)^t \cdot (\mathbf{X}(n) - \mathbf{C}_i) = \\ &= (x_1(n) - c_{1i})^2 + (x_2(n) - c_{2i})^2 + \dots + (x_m(n) - c_{mi})^2. \end{aligned}$$

Недостаток RBFN связан с несовершенством интерполяции в тех случаях, когда ветви соседних функций Гаусса перекрывают друг друга.

В подобной ситуации на участках поверхности нейросетевой модели между отдельными гауссовскими «колоколами» могут наблюдаться «спады». Если расстояние между центрами «колоколов» большое, а охватываемые ветвями диапазоны малы, на поверхности модели могут возникнуть «ямы», вызванные локальной нечувствительностью модели к входным изменениям. Указанные негативные эффекты существенно снижаются при использовании нормированных сетей.

Нормированная радиально-базисная сеть (normalized radial-basis function network, NRBFN) описывается математической моделью вида

$$y(n) = w_0 + \frac{1}{\sum_{q=1}^N \varphi_q(\|\mathbf{X}(n) - \mathbf{C}_q\|)} \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i(\|\mathbf{X}(n) - \mathbf{C}_i\|) =$$

$$= w_0 + \sum_{i=1}^N w_i \psi_i(\mathbf{X}(n), \mathbf{C}_i), \quad (3.3)$$

где $\psi_i(\mathbf{X}(n), \mathbf{C}_i)$ – нормированная радиальная базисная функция:

$$\psi_i(\mathbf{X}(n), \mathbf{C}_i) = \frac{\varphi_i(\|\mathbf{X}(n) - \mathbf{C}_i\|)}{\sum_{q=1}^N \varphi_q(\|\mathbf{X}(n) - \mathbf{C}_q\|)}.$$

Структура NRBFN с моделью (3.3) изображена на рис. 3.8.

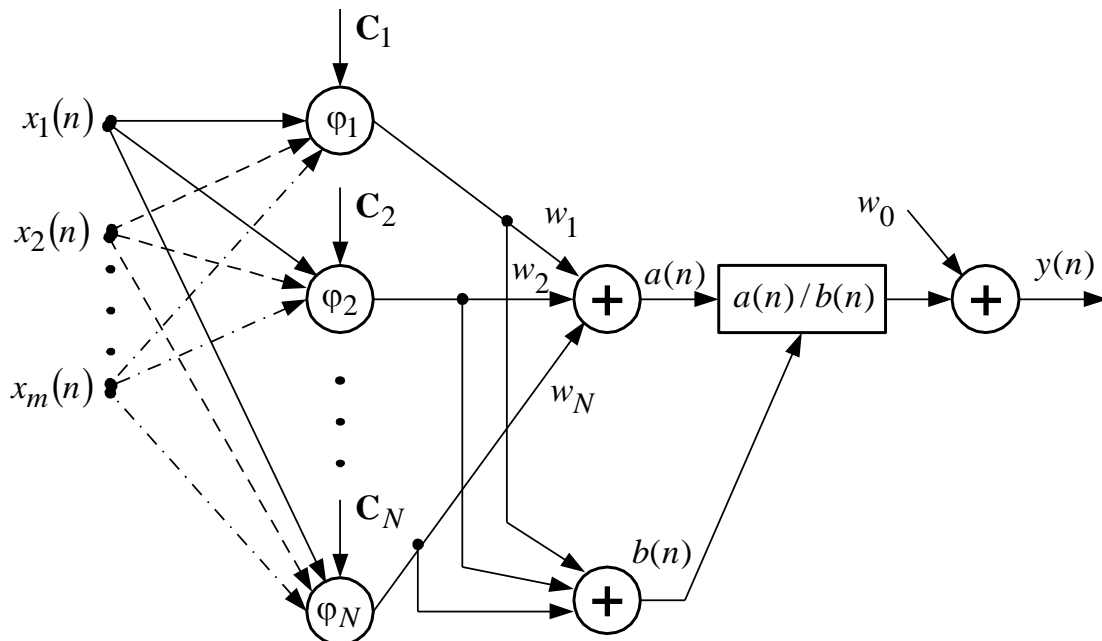


Рис. 3.8

Обучить RBFN и NRBFN можно на основе метода обратного распространения ошибки, гибридного алгоритма, процесса самоорганизации и т. д.

В силу локального характера радиальных функций RBFN и NRBFN легко устанавливается зависимость между параметрами базисных функций и физическим размещением обучающих данных в многомерном пространстве. В результате удастся относительно просто найти удовлетворительные начальные условия процесса обучения сети.

Важное достоинство радиально-базисной сети – упрощенный алгоритм обучения. При наличии только одного скрытого слоя и тесной связи активности нейрона с соответствующей областью пространства обучающих данных точка начала обучения оказывается гораздо ближе к оптимальному решению, чем в многослойных сетях. Кроме того, можно отделить этап подбора параметров базисных функций от подбора значений весов сети (гибридный алгоритм), что существенно упрощает и ускоряет процесс обучения.

Сложность работы с радиально-базисной сетью состоит в выборе количества базисных функций, каждой из которых соответствует один скрытый нейрон. Малое количество нейронов не позволяет в достаточной степени уменьшить погрешность обобщения множества обучающих данных, тогда как большое их число увеличивает вычислительную сложность.

3.4. Вейвлет-нейронная сеть

Моделирование НДС эффективно выполняется на основе вейвлет-нейронных сетей (wavelet neural network, wavelet NN), содержащих материнский вейвлет, описываемый выражением

$$\Psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

где a , b – параметры масштабирования и смещения соответственно; $\Psi(x)$ – вейвлет-функция, удовлетворяющая условию

$$C_{\Psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty,$$

$\tilde{\Psi}(\omega)$ – Фурье-преобразование $\Psi(x)$.

Вейвлет-нейронная сеть выступает как универсальный аппроксиматор операторов НДС. Wavelet NN представима в виде структуры, показанной на рис. 3.9, и в соответствующей математической форме

$$y(n) = \sum_{i=1}^N v_i \Psi_i \left(\frac{c_i - b_i}{a_i} \right) = \sum_{i=1}^N v_i \Psi \left(\frac{c_i - b_i}{a_i} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^N v_i \Psi \left(\frac{\left[\sum_{j=1}^m w_{ij} x_j(n) \right] - b_i}{a_i} \right),$$

где $y(n)$ – выходной сигнал модели; N – число нейронов; $c_i = \sum_{j=1}^m w_{ij} x_j(n)$;

$x_j(n)$ – j -й входной сигнал модели, содержащийся в векторе воздействий $\mathbf{X}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_j(n), \dots, x_m(n)]^t$; Ψ – вейвлет-функция ($\Psi = \Psi_1 = \dots = \Psi_N$).

Переменные w_{ij}, a_i, b_i, v_i ($i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, m$) являются параметрами модели.

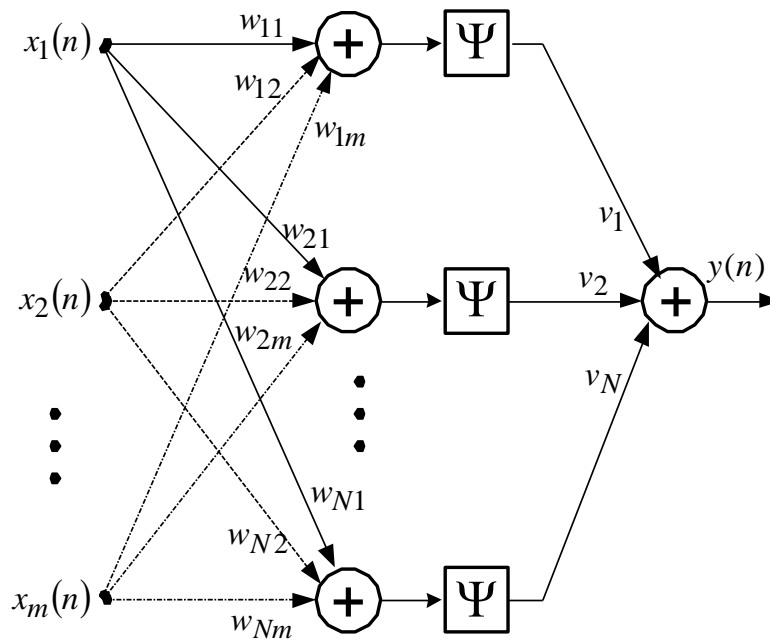


Рис. 3.9

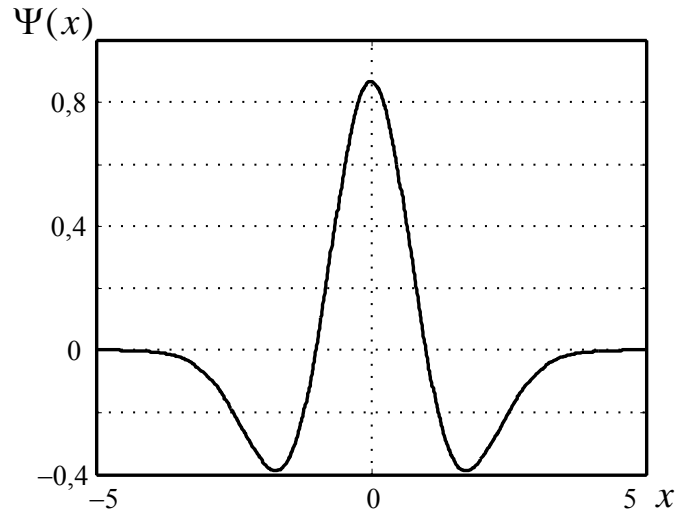


Рис. 3.10

Набор вейвлет-функций Ψ весьма широк. В качестве примера приведем материнский вейвлет «Мексиканская шляпа»:

$$\Psi(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-0,25} \right) (1 - x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

график которого показан на рис. 3.10.

3.5. Функционально связанная искусственная нейронная сеть

Функционально связанная искусственная нейронная сеть (functional link artificial neural network, FLANN) является однослойной сетью (в ней отсутствует внутренний слой), поэтому алгоритм ее обучения содержит меньшее число преобразований и обеспечивает более быструю сходимость к решению задачи аппроксимации по сравнению с традиционными нейронными сетями.

Модель FLANN имеет вид

$$y(n) = f\left(\sum_{i=1}^G w_i \varphi_i(\mathbf{X}(n))\right) = f(\mathbf{W}^t \cdot \Phi(\mathbf{X}(n))), \quad (3.4)$$

где $y(n)$ – выходной сигнал модели; f – нелинейная функция активации; $\mathbf{X}(n)$ – вектор воздействий ($\mathbf{X}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_Q(n)]^t$); t – знак транспонирования; \mathbf{W} – вектор весов сети ($\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_G]^t$); $\Phi(\mathbf{X}(n))$ – вектор функций φ_i ($i = 1, 2, \dots, G$):

$$\Phi(\mathbf{X}(n)) = [\varphi_1(\mathbf{X}(n)), \varphi_2(\mathbf{X}(n)), \dots, \varphi_G(\mathbf{X}(n))]^t.$$

Структурная схема FLANN показана на рис. 3.11.

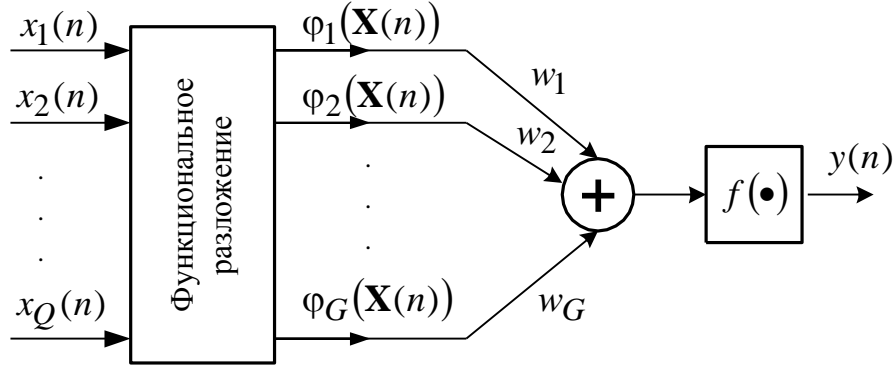


Рис. 3.11

Функции φ_i ($i = 1, 2, \dots, G$) преобразуют входные сигналы в базисные функции с помощью, например, тригонометрического полинома, полинома Чебышева, Лежандра, а также выполняют многомерное преобразование базисных функций. Базисные функции в модели (3.4) служат для понижения числа обусловленности при решении задачи аппроксимации с высокой степенью нелинейности.

Рассмотрим примеры формирования базисных функций. Функциональное разложение двумерного воздействия $\mathbf{X}(n) = [x_1(n), x_2(n)]^t$ на тригонометрические полиномы дает вектор

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{X}(n)) = & [x_1(n), \cos(\pi x_1(n)), \sin(\pi x_1(n)), \dots, \cos(2\pi x_1(n)), \sin(2\pi x_1(n)), \dots, \\ & x_2(n), \cos(\pi x_2(n)), \sin(\pi x_2(n)), \dots, \cos(2\pi x_2(n)), \sin(2\pi x_2(n)), \dots, \\ & x_1(n)x_2(n)]^t. \end{aligned}$$

Одномерные полиномы ортогонального базиса Чебышева формируются из выражения

$$T_p(x(n)) = \frac{p}{2} \sum_{k=0}^{p/2} (-1)^k \frac{(p-k-1)!}{k!(p-2k)!} (2x(n))^{p-2k}, \quad (3.5)$$

где $p \in [0, P]$ – степень полинома. Из (3.5) многочлены Чебышева низких степеней записываются в виде:

$$\begin{aligned} T_0(x(n)) &= 1, \\ T_1(x(n)) &= x(n), \\ T_2(x(n)) &= 2x^2(n) - 1, \\ T_3(x(n)) &= 4x^3(n) - 3x(n). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Функциональное разложение векторного воздействия $\mathbf{X}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_Q(n)]^t$ с помощью многочленов Чебышева (3.6) в многомерном пространстве создает вектор

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{X}(n)) = & [1, T_1(x_1(n)), T_1(x_2(n)), \dots, T_1(x_Q(n)), \\ & T_1(x_1(n))T_1(x_2(n)), \dots, T_1(x_{Q-1}(n))T_1(x_Q(n)), \\ & T_2(x_1(n)), T_2(x_2(n)), \dots, T_2(x_Q(n)), \dots, \\ & T_P(x_1(n)), T_P(x_2(n)), \dots, T_P(x_Q(n))]^t. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Например, из выражения (3.7) при степени $P = 3$ с учетом (3.6) запишем

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{X}(n)) = & [1, x_1(n), x_2(n), \dots, x_Q(n), x_1(n)x_2(n), \dots, x_{Q-1}(n)x_Q(n), \\ & 2x_1^2(n) - 1, \dots, 2x_Q^2(n) - 1, 4x_1^3(n) - 3x_1(n), \dots, 4x_Q^3(n) - 3x_Q(n)]^t. \end{aligned}$$

FLANN с чебышевскими базисными функциями называется чебышевской функционально связанной искусственной нейронной сетью (Chebyshev functional link artificial neural network, CFLANN). Отметим, что CFLANN соответствует двухслойной персептронной нейронной сети.

Блок «Функциональное разложение» на схеме FLANN (см. рис. 3.11) имеет структуру, представленную на рис. 3.12.

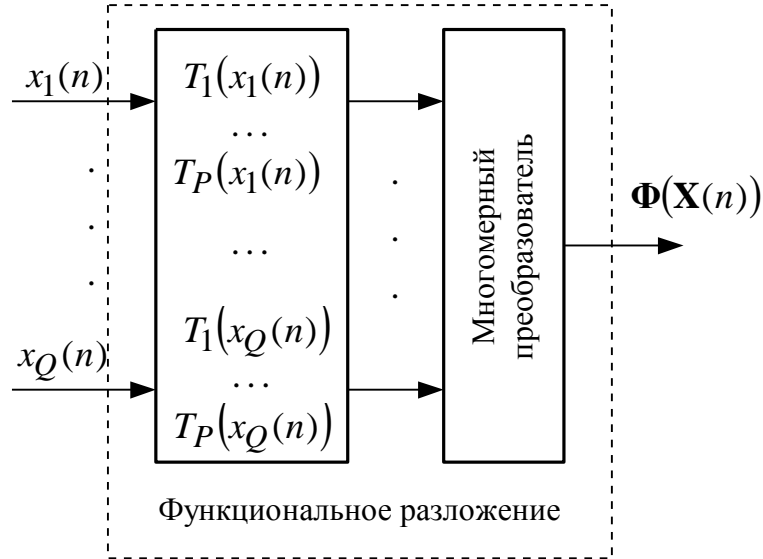


Рис. 3.12

Данный блок формирует полиномы Чебышева и осуществляет их многомерное преобразование.

3.6. Полиномиальная персептронная сеть

Полиномиальная персептронная сеть (polynomial perceptron network, PPN) – однослойная сеть (без внутреннего слоя), что обеспечивает простоту алгоритма ее обучения и высокую скорость сходимости к решению задачи аппроксимации.

Структурная схема PPN изображена на рис. 3.13.

Модель PPN имеет вид

$$y(n) = f(\mathbf{W}^t \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}(n))),$$

где $y(n)$ – выходной сигнал модели; f – нелинейная функция активации; $\mathbf{X}(n)$ – вектор воздействий ($\mathbf{X}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_Q(n)]^t$); t – знак транспонирования; $\mathbf{W}(n)$ – вектор весов нейронной сети ($\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_G]^t$); $\mathbf{F}(\mathbf{X}(n))$ – вектор функций, содержащий элементы с многомерным преобразованием:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}(n)) = \left[1, x_1(n), \dots, x_Q(n), \dots, x_1^2(n), \dots, x_Q^2(n), \dots, \right. \\ \left. x_1(n)x_2(n), \dots, x_{Q-1}(n)x_Q(n), \dots, x_1^P(n), \dots, x_Q^P(n) \right]^t$$

(P – степень элемента вектор-функции).

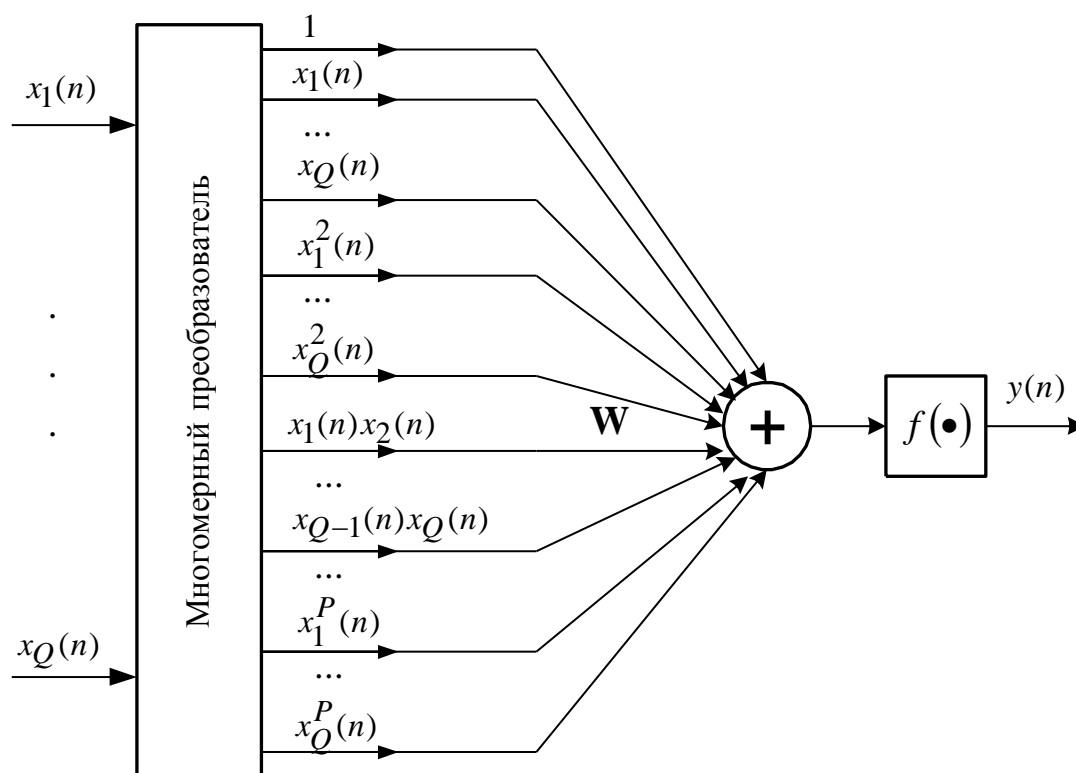


Рис. 3.13

В качестве примера структура PPN с вектором входных сигналов $\mathbf{X}(n) = [x_1(n), x_2(n), x_3(n)]^t$ и многомерным преобразователем второй степени показана на рис. 3.14.

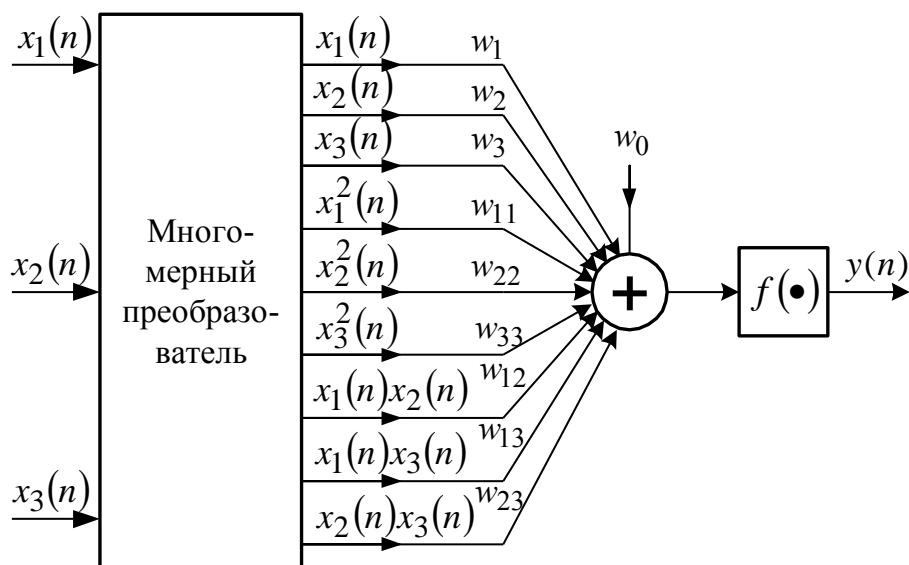


Рис. 3.14

Сравнительный анализ PPN и FLANN показывает, что PPN (рис. 3.13) может быть преобразована во FLANN (см. рис. 3.11) с помощью дополнительного преобразования входных сигналов в базисные функции на основе полиномов Лежандра, Чебышева и т. д.

3.7. Сплайновая нейронная сеть

3.7.1. Сплайновая интерполяционная структура

Математический сплайн – это кусочный полином порядка $(P+1)$ (степени P) с непрерывными производными порядка $1, 2, \dots, (P-1)$ вдоль всей описываемой кривой.

Кусочные сплайны, составленные из многочленов невысокой степени, удобны для интерполяции и аппроксимации кривых, так как они не требуют больших вычислительных затрат и не вызывают численных отклонений, свойственных многочленам высокой степени.

Кусочно-полиномиальные кривые строятся с использованием последовательности узлов, заданных внутри выпуклой плоскости. Для рассмотрения сплайновой кривой введем $(Q+1)$ узлов. Узел – это точка на плоскости, имеющая x - и y -координаты, т. е. $\mathbf{Q}_i = [q_{x,i}, q_{y,i}]^t$, $i = 0, 1, \dots, Q$, где t – знак транспонирования. Точки располагаются в порядке возрастания абсцисс $q_{x,0} < q_{x,1} < \dots < q_{x,Q}$, для того чтобы избежать появления нескольких узлов при одной абсциссе.

Кривая $\mathbf{F}(u)$ плоского сплайна – это двумерный вектор $\mathbf{F}(u) = [F_x(u), F_y(u)]^t$, элементами которого являются кусочно-полиномиальные одномерные функции с одинаковыми степенями и непрерывными производными в точках соединения фрагментов. Кривая $\mathbf{F}(u)$ находится как комбинация нескольких узлов с базисными функциями (функциональными коэффициентами) $N_i^{(P)}(u)$ степени P :

$$\mathbf{F}(u) = \sum_{i=0}^{Q-P-1} \mathbf{Q}_i N_i^{(P)}(u), \quad u \in [q_{x,0}, q_{x,Q-P-1}], \quad (3.8)$$

где \mathbf{Q}_i – i -й узел; $N_i^{(P)}(u)$ – i -я одномерная базисная функция степени P .

В качестве $N_i^{(P)}(u)$ в выражении (3.8) могут выступать базисы разных сплайнов.

Без потери общности на примере одномерной функции $\varphi(u)$ рассмотрим ее описание В-сплайнами (базисными сплайнами). В-сплайны получены Шёнбергом из кривых Безье. Для одномерной функции $\varphi(u)$ выражение (3.8) представим в виде

$$\varphi(u) = \sum_{i=0}^{Q-P-1} A_i N_i^{(P)}(u), \quad u \in [q_{x,0}, q_{x,Q-P-1}], \quad (3.9)$$

где A_i – i -й узел; $N_i^{(P)}(u)$ – i -я одномерная функция степени P базиса В-сплайна.

В-сплайновые базисные функции $N_i^{(P)}(u)$ степени P из (3.9), называемые функциональными коэффициентами, могут быть получены на основе рекурсивных формул Кокса–де Бура:

$$N_i^{(0)}(u) = \begin{cases} 1, & q_{x,i} \leq u < q_{x,i+1}, \\ 0 & \text{– в других случаях} \end{cases}$$

и

$$N_i^{(P)}(u) = \frac{u - q_{x,i}}{q_{x,i+P} - q_{x,i}} N_i^{(P-1)}(u) + \frac{q_{x,i+P+1} - u}{q_{x,i+P+1} - q_{x,i+1}} N_{i+1}^{(P-1)}(u), \quad (3.10)$$

где $i = 0, 1, \dots, Q - P - 1$.

Базисные функции $N_i^{(P)}(u)$ В-сплайна – многочлены степени P с непрерывными производными порядка $1, 2, \dots, (P-1)$ – удовлетворяют следующим условиям:

- каждая базисная функция положительна или равна нулю для всех значений параметра u , т. е. $N_i^{(P)}(u) \geq 0$;
- сумма базисных функций для любого значения параметра u равна

$$\sum_{j=0}^{Q-P-1} N_j^{(P)}(u) = 1;$$

– базисная функция степени P отлична от нуля только на отрезке, определяемом $(P + 2)$ узлами.

Функция $\varphi(u)$ – полином степени P на каждом интервале $q_{x,i} \leq u < q_{x,i+1}$. Из выражения (3.10) запишем базисную функцию, например, первой степени ($P = 1$)

$$N_i^{(1)}(u) = \begin{cases} \frac{u - q_{x,i}}{q_{x,i+1} - q_{x,i}}, & q_{x,i} \leq u < q_{x,i+1}, \\ \frac{q_{x,i+2} - u}{q_{x,i+2} - q_{x,i+1}}, & q_{x,i+1} \leq u < q_{x,i+2}, \\ 0 & \text{– в других случаях.} \end{cases}$$

Функция $N_i^{(1)}(u)$ отлична от нуля на интервале, заданном тремя точками $q_{x,i}, q_{x,i+1}, q_{x,i+2}$.

Формы базисных функций первой и второй степеней, а также количества точек, их определяющих, показаны на рис. 3.15, *а*, *б*. На рис. 3.15, *а* представлена $N_i^{(1)}(u)$ – линейная базисная функция, на рис. 3.15, *б* – $N_i^{(2)}(u)$ – квадратичная функция.

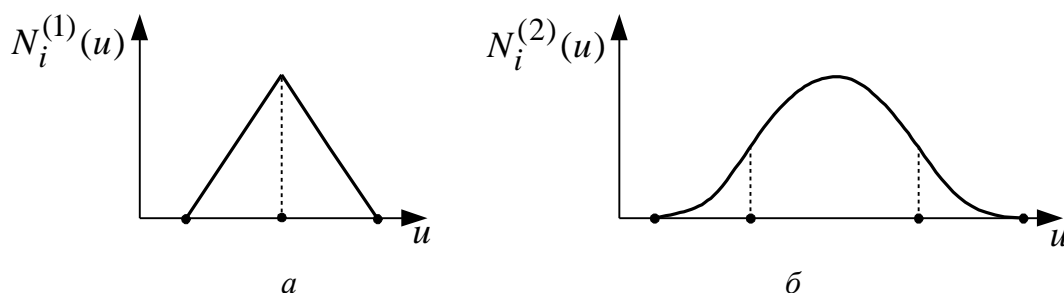


Рис. 3.15

С учетом конечной длительности В-сплайновых базисных функций $N_i^{(P)}(u)$ выражение (3.9) может быть преобразовано к виду

$$\varphi(u) = \sum_{i=0}^{Q-P-1} \mathbf{C} [\varphi_i(u)], \quad u \in [0, 1],$$

где \mathbf{C} – оператор соединения (объединения) элементарных фрагментов; $\varphi_i(u)$ – локальный полином степени P с локальной нормированной переменной u , описывающий i -й элементарный фрагмент.

Применение локальных сплайнов для описания кривой $\mathbf{F}(u)$ вызывает переход от уравнения (5.8) к выражению

$$\mathbf{F}(u) = \mathbf{C}_{i=0}^{Q-P-1} [\mathbf{F}_i(u)], \quad u \in [0, 1],$$

где \mathbf{C} – оператор соединения двумерных фрагментов; u – локальная нормированная переменная ($0 \leq u \leq 1$); $\mathbf{F}_i(u) = [F_{x,i}(u), F_{y,i}(u)]^t$ – двумерный элементарный фрагмент на плоскости, описываемый выражением

$$\mathbf{F}_i(u) = \sum_{j=0}^P \mathbf{Q}_{i+j} B_j^{(P)}(u). \quad (3.11)$$

Здесь $B_j^{(P)}(u)$ – j -я сплайновая базисная функция степени P ;

$\mathbf{Q}_{i+j} = [q_{x,i+j}, q_{y,i+j}]^t$ – $(i+j)$ -й узел.

Отметим, что запись выражения (3.11) устанавливает интерполяционную схему описания элементарного фрагмента, поскольку фрагмент степени P полностью определяется по $(P+1)$ узлам, называемым иногда контрольными точками.

Базис В-сплайна неглобальный, так как с каждым узлом связана своя базисная функция. Влияние каждого узла на кривую проявляется только при тех значениях параметра, где соответствующая базисная функция не равна нулю. Базис В-сплайна позволяет менять степень базисных функций и, следовательно, всей кривой без изменения количества узлов.

В качестве примера опишем элементарный фрагмент $\mathbf{F}_i(u)$ с помощью базиса третьей степени В-сплайна, используя выражение (3.11). Для $P=3$ и переменной u , нормированной в пределах $0 \leq u \leq 1$, многочлены В-сплайна имеют вид:

$$\begin{aligned} B_0^{(3)}(u) &= \frac{1}{6}(1-u)^3, \quad B_1^{(3)}(u) = \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4), \\ B_2^{(3)}(u) &= \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1), \quad B_3^{(3)}(u) = \frac{1}{6}u^3. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Особый интерес представляет описание сплайновых кривых в матричной форме. Например, при функциональных коэффициентах третьей степени (выражения (3.12)) матричная форма уравнения (3.11) следующая:

$$\mathbf{F}_i(u) = \mathbf{U}^t D \mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} u^3, u^2, u, 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i \\ \mathbf{Q}_{i+1} \\ \mathbf{Q}_{i+2} \\ \mathbf{Q}_{i+3} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u^3, u^2, u, 1 \end{bmatrix}^t$ – вектор степеней переменной u ;

$\mathbf{G}_i = [\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_{i+1}, \mathbf{Q}_{i+2}, \mathbf{Q}_{i+3}]^t$ – вектор узлов; $D = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ –

базисная матрица кубического В-сплайна.

Таким образом, обобщенное матричное описание элементарного фрагмента $\mathbf{F}_i(u)$ представляется в виде

$$\mathbf{F}_i(u) = \mathbf{U}^t D \mathbf{G}_i, \quad (3.13)$$

где $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u^P, u^{P-1}, \dots, u, 1 \end{bmatrix}^t$ – вектор степеней переменной u ; D – базисная матрица В-сплайна, $\mathbf{G}_i = [\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_{i+1}, \dots, \mathbf{Q}_{i+P}]^t$ – вектор узлов (контрольных точек).

Элементарный фрагмент $\mathbf{F}_i(u)$ в выражении (3.11) можно описать базисом Катмул–Ром-сплайна (CR-сплайна, Catmul–Rom spline), который наравне с В-сплайном широко используется в компьютерной графике.

Кубический CR-сплайновый базис с нормированной переменной $u \in [0, 1]$ включает в себя следующие полиномы:

$$\begin{aligned} B_0^{(3)}(u) &= \frac{1}{2}(-u^3 + 2u^2 - u), \quad B_1^{(3)}(u) = \frac{1}{2}(3u^3 - 5u^2 + 2), \\ B_2^{(3)}(u) &= \frac{1}{2}(-3u^3 + 4u^2 + u), \quad B_3^{(3)}(u) = \frac{1}{2}(u^3 - u^2). \end{aligned} \quad (3.14)$$

На основе базисных функций (3.14) и равенства (3.11) представим элементарный фрагмент $\mathbf{F}_i(u)$ в матричной форме:

$$\mathbf{F}_i(u) = \begin{bmatrix} u^3, u^2, u, 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i \\ \mathbf{Q}_{i+1} \\ \mathbf{Q}_{i+2} \\ \mathbf{Q}_{i+3} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

которая соответствует уравнению (3.13). Таким образом, базисная матрица кубического CR-сплайна

$$D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.7.2. Синтез нейронной сети на базе Катмул–Ром-сплайна

Рассмотрим построение сплайновой нейронной сети (spline neural network, spline NN), например на базе CR-сплайновых функций третьей степени (3.14).

Равенство (3.15) может быть записано в виде двух уравнений, содержащих полиномы третьей степени:

$$F_{x,i}(u) = a_{x,i}u^3 + b_{x,i}u^2 + c_{x,i}u + d_{x,i}, \quad (3.16)$$

$$F_{y,i}(u) = a_{y,i}u^3 + b_{y,i}u^2 + c_{y,i}u + d_{y,i}. \quad (3.17)$$

Из выражения (3.16) находятся переменные u и i , которые далее подставляются в выражение (3.17). Функция $F_{y,i}(u)$ дает отсчеты выходного сигнала на i -м фрагменте нейронной сети.

Для предотвращения нежелательных осцилляций, возникающих при интерполяции функций полиномами высоких степеней (феномен называется явлением Рунге), упрощения и ускорения инверсии функции $F_{x,i}(u)$, а также монотонного упорядочения точек по оси x ограничимся линейными членами в полиноме (3.16). Линейные члены формируются при фиксированном шаге изменения абсциссы $\Delta x = q_{x,i+1} - q_{x,i}$ из уравнения

$$F_{x,i}(u) = \begin{bmatrix} u^3, u^2, u, 1 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} q_{x,i} \\ q_{x,i} + \Delta x \\ q_{x,i} + 2\Delta x \\ q_{x,i} + 3\Delta x \end{bmatrix},$$

полученного из (3.15). В итоге запишем

$$F_{x,i}(u) = u\Delta x + q_{x,i} + \Delta x = u\Delta x + q_{x,i+1} = s. \quad (3.18)$$

На рис. 3.16 показаны узлы (контрольные точки), определенные описанным выше способом.

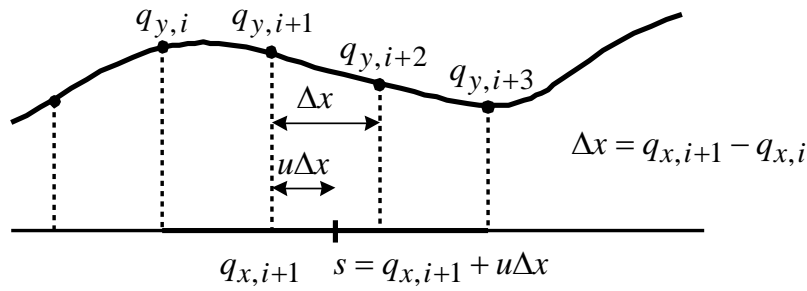


Рис. 3.16

Переменные u и i находятся из выражения (3.18) по следующим формулам:

$$u = F_{x,i}^{(-1)}(s) = \frac{s}{\Delta x} - q_{x,i+1} = \frac{s}{\Delta x} - \left[\frac{s}{\Delta x} \right],$$

$$i = \left[\frac{s}{\Delta x} \right] + \frac{(Q+1)-2}{2},$$

где $F_{x,i}^{(-1)}(s)$ – функция, инверсная к $F_{x,i}(u)$; $[\cdot]$ – наибольшее целое для внутреннего аргумента; $(Q+1)$ – число узлов.

Далее переменные u и i подставляются в полученное из (3.15) выражение

$$y(n) = F_{y,i}(u) = \begin{bmatrix} u^3, u^2, u, 1 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} q_{y,i} \\ q_{y,i+1} \\ q_{y,i+2} \\ q_{y,i+3} \end{bmatrix}.$$

Структура сплайновой нейронной сети с одним нейроном показана на рис. 3.17, а, с несколькими нейронами – на рис. 3.17, б.

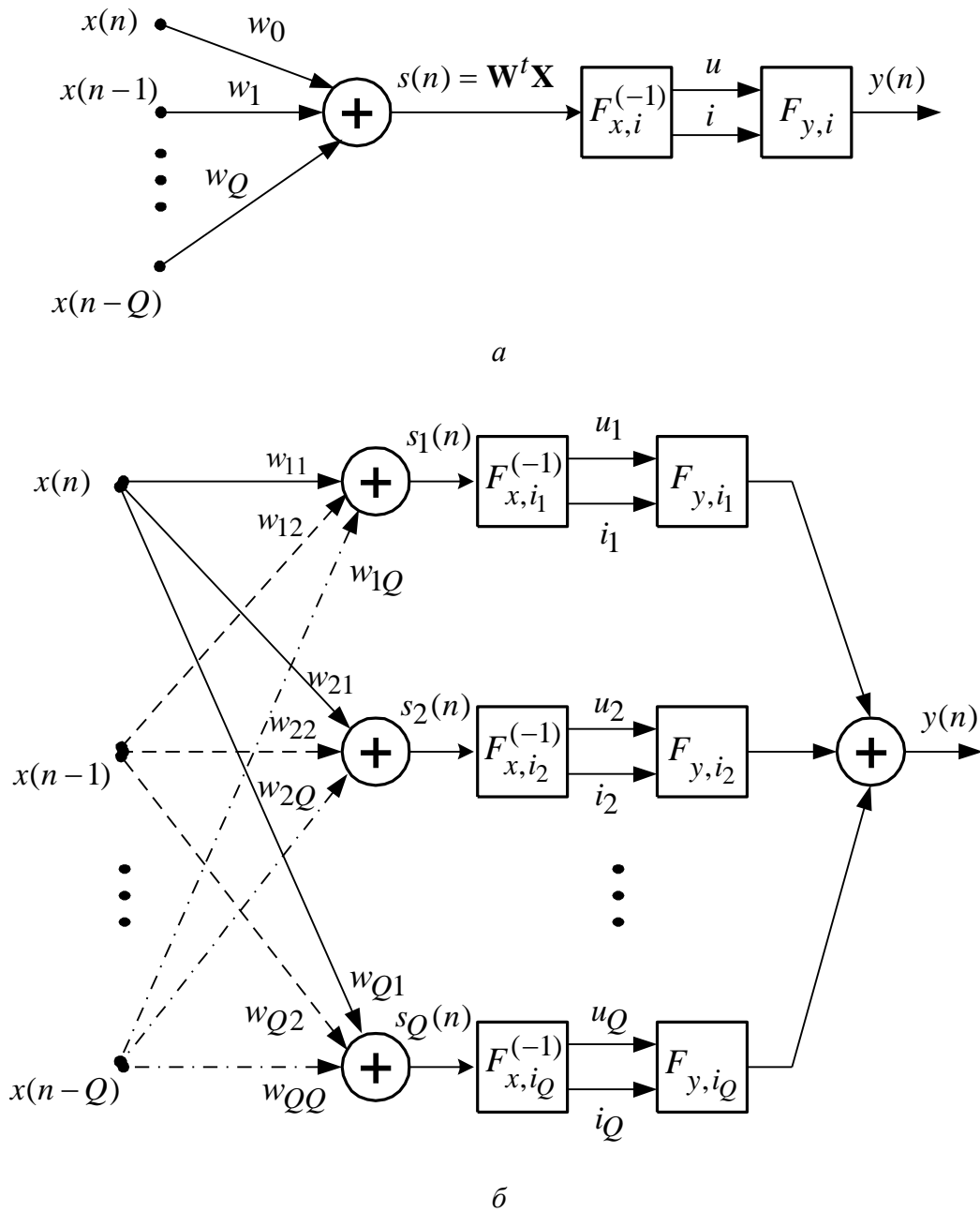


Рис. 3.17

Параметрами изображенной на рис. 3.17, а сети с одним нейроном являются: вектор весов $\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_Q]^t$ и вектор узлов $[q_{y,i}, q_{y,i+1}, q_{y,i+2}, q_{y,i+3}]^t$ в функции активации, содержащей $F_{x,i}^{(-1)}(s)$ и

$F_{y,i}(u)$. Параметрами нейронной сети, представленной на рис. 3.17, б, являются векторы весов и узлов всех Q нейронов.

3.8. Каноническая кусочно-линейная нейронная сеть

Каноническая кусочно-линейная сеть (canonical piecewise-linear network, CPWLN) с вектором входных сигналов

$$\mathbf{X}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^t = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-m)]^t \quad (3.19)$$

и выходным сигналом $y(n)$ имеет 2 слоя – внутренний и выходной. CPWLN содержит кусочно-линейные функции активации [43–47].

Математическая модель CPWLN записывается в канонической форме:

$$y(n) = a + \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{X}(n) + \sum_{i=1}^N C_i |q_i(n)| = a + \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{X}(n) + \sum_{i=1}^N C_i |\mathbf{L}_i^t \cdot \mathbf{X}(n) + b_i|, \quad (3.20)$$

где $|q_i(n)|$ – i -я функция активации, $q_i(n) = \mathbf{L}_i^t \cdot \mathbf{X}(n) + b_i$; $\mathbf{D} = [d_1, d_2, \dots, d_m]^t$; $\mathbf{L}_i = [l_{i,1}, l_{i,2}, \dots, l_{i,m}]^t$; b_i ($i = 1, 2, \dots, N$) – параметры внутреннего слоя сети; a , C_i ($i = 1, 2, \dots, N$) – параметры выходного слоя.

Выражение (3.20) можно представить в виде

$$y(n) = a + \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{X}(n) + \sum_{i=1}^N C_i \operatorname{sgn}(q_i(n)),$$

где $\operatorname{sgn}(q_i(n)) = +1$, если $q_i(n) \geq 0$; $\operatorname{sgn}(q_i(n)) = -1$, если $q_i(n) < 0$.

Структура CPWLN показана на рис. 3.18.

Достоинства CPWLN заключаются в следующем:

- использование общей (в канонической форме) кусочно-линейной модели ведет к сокращению определяемых параметров по сравнению с раздельным линейным моделированием областей пространства;
- для моделирования существенной нелинейности требуется меньшее количество параметров CPWLN по сравнению с полиномом Вольтерры;
- представление функций активации удобно для реализации в цифровом элементном базисе (непрерывные сигмоидальные функции заменяются комбинациями линейных функций).

CPWLN можно конструировать в виде каскадного соединения блоков, имеющих структуру, изображенную на рис. 3.18.

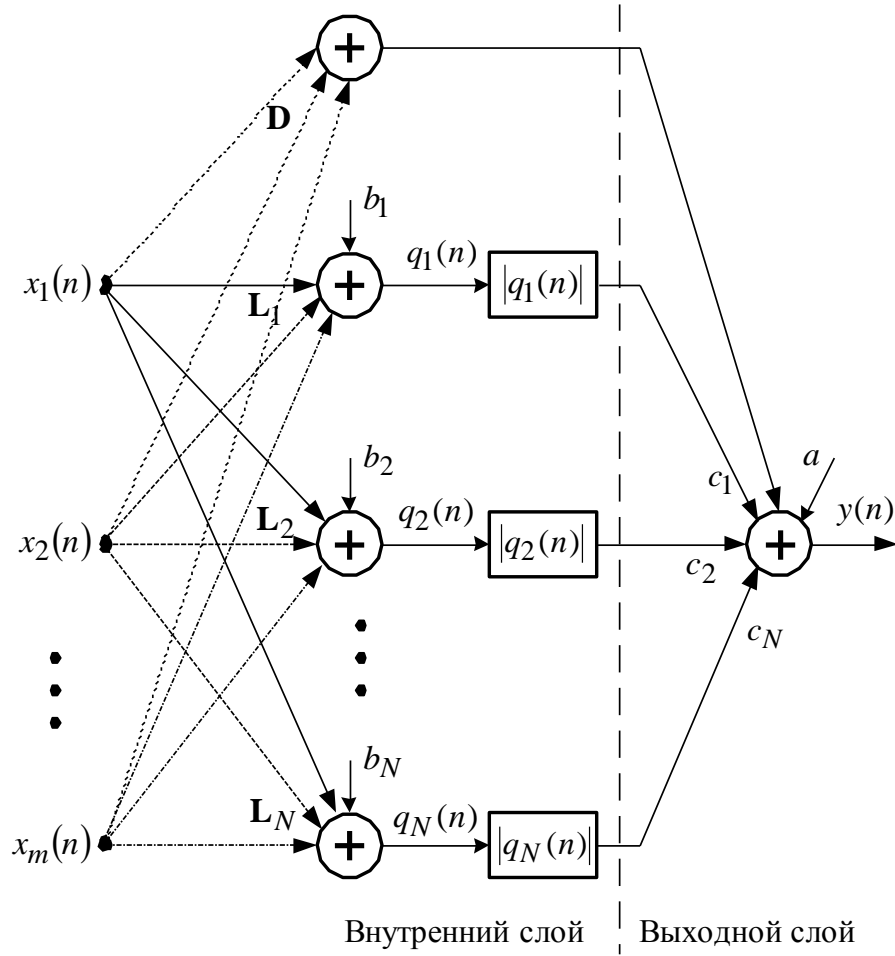


Рис. 3.18

Структура каскадной CPWLN показана на рис. 3.19.

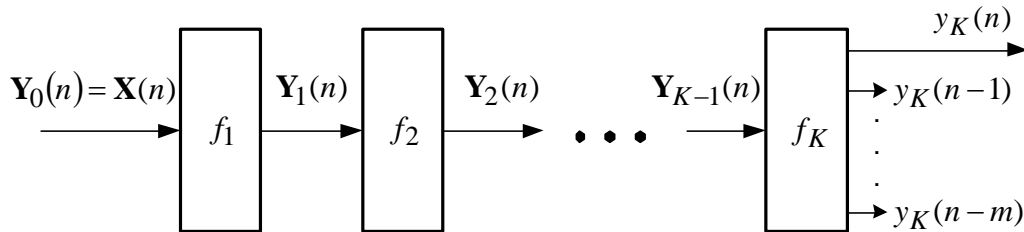


Рис. 3.19

Выходным сигналом каскадной CPWLN является сигнал $y_K(n)$, полученный на одном выводе последнего K -го блока. Вектор выходного сигнала j -го блока формируется согласно следующему рекуррентному уравнению:

$$\mathbf{Y}_j(n) = a_j + \mathbf{D}_j^t \cdot \mathbf{Y}_{j-1}(n) + \sum_{i=1}^N C_{j,i} \left| \mathbf{L}_{j,i}^t \cdot \mathbf{Y}_{j-1}(n) + b_{j,i} \right|, \quad j = 1, 2, \dots, K, \quad (3.21)$$

где $\mathbf{Y}_0(n) = \mathbf{X}(n)$ из выражения (3.19),

$$\mathbf{Y}_j(n) = [y_j(n), y_j(n-1), \dots, y_j(n-m)]^t; \quad \mathbf{D}_j = [d_{j,1}, d_{j,2}, \dots, d_{j,m}]^t;$$

$\mathbf{L}_{j,i} = [l_{j,i,1}, l_{j,i,2}, \dots, l_{j,i,m}]^t$. Уравнение (3.21) записывается в обобщенной форме

$$\mathbf{Y}_j(n) = f_j(f_{j-1}(\dots f_1(\mathbf{Y}_0(n)) \dots)),$$

где f_j – кусочно-линейная функция в канонической форме, описывающая j -й блок.

Рекуррентная каноническая кусочно-линейная сеть (recurrent canonical piecewise-linear network, RCPWLN), как и нелинейные регрессионные модели, применяется для предсказания случайного процесса, например в слепых эквалайзерах.

Модель RCPWLN имеет вид

$$f(\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)) = \mathbf{A} + \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{Y}(n) + \mathbf{D}_1 f(\mathbf{Y}(n-1), \mathbf{X}(n-1)) + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{X}(n), \quad (3.22)$$

где $\mathbf{X}(n)$, $\mathbf{Y}(n)$ – векторные входной (выражение (3.19)) и выходной сигналы RCPWLN соответственно; f – нелинейная функция.

Элемент $y_k(n)$ вектора $\mathbf{Y}(n)$ в (3.22) описывается выражением

$$y_k(n) = a_k + \mathbf{G}_{1,k}^t \cdot \mathbf{Y}(n-1) + \mathbf{G}_{2,k}^t f(\mathbf{Y}(n-1), \mathbf{X}(n-1)) + \mathbf{G}_{3,k}^t \cdot \mathbf{X}(n) + \sum_{i=1}^r C_{k,i} \times \\ \times |\mathbf{L}_{1,k,i} \cdot \mathbf{Y}(n-1) + \mathbf{L}_{2,k,i} f(\mathbf{Y}(n-1), \mathbf{X}(n-1)) + \mathbf{L}_{3,k,i} \cdot \mathbf{X}(n) + b_{k,i}|. \quad (3.23)$$

Таблица 3.1

Размерности переменных в модели RCPWLN

Размерность	Переменная
$N \times 1$	$\mathbf{Y}(n), \mathbf{Y}(n-1), \mathbf{G}_{1,k}, \mathbf{L}_{1,k,i}$
$m \times 1$	$\mathbf{X}(n), \mathbf{G}_{3,k}, \mathbf{L}_{3,k,i}$
$P \times 1$	$f(\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)), f(\mathbf{Y}(n-1), \mathbf{X}(n-1)), \mathbf{A}, \mathbf{D}_1, \mathbf{G}_{2,k}, \mathbf{L}_{2,k,i}$
$P \times N$	\mathbf{D}_1
$P \times m$	\mathbf{D}_2
Скаляр	$a_k, C_{k,i}, b_{k,i}$

Размерности переменных в выражениях (3.22) и (3.23) представлены в табл. 3.1.

3.9. Адаптивная сеть с системой нечеткого вывода

3.9.1. Иерархические системы нечеткого логического вывода

Для описания соотношений вход/выход НДС применяются иерархические системы нечеткого логического вывода. В таких системах выход одной нечеткой базы знаний подается на вход другой, более высокого уровня иерархии. В иерархических системах отсутствуют обратные связи.

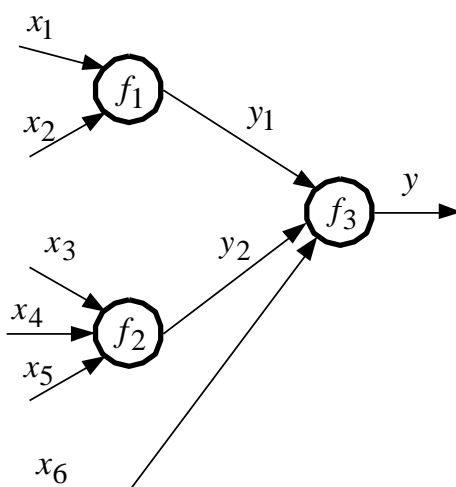


Рис. 3.20

На рис. 3.20 приведен пример иерархической нечеткой системы, моделирующей зависимость $y = f(x_1, x_2, \dots, x_6)$ с помощью трех баз знаний, описываемых уравнениями: $y_1 = f_1(x_1, x_2)$, $y_2 = f_2(x_3, x_4, x_5)$, $y = f_3(y_1, y_2, x_6)$.

Преодолеть проблему высокой размерности задачи аппроксимации оператора нелинейной динамической системы возможно сокращением числа входов нечетких баз знаний, а также за счет компактности иерархической системы нечеткого логического вывода, когда небольшим числом нечетких правил в иерархических базах знаний можно адекватно описать многомерную зависимость вход/выход.

Нечеткой базой знаний называется совокупность нечетких правил <Если – то>, задающих взаимосвязь между входами и выходами исследуемого объекта. Формат нечетких правил такой:

ЕСЛИ <посылка правила>, ТО <заключение правила>.

Система нечеткого логического вывода описывает соотношение вход/выход с помощью лингвистических высказываний <Если – то> и логических операций над нечеткими множествами.

Нечеткое множество рассматривается как обобщение обычного множества. Элемент x может частично принадлежать к разным нечетким множествам. Степень принадлежности к множеству A называется функцией принадлежности $\mu_A(x) \in [0, 1]$. Значения функции принадлежности являются рациональными числами из интервала $[0, 1]$, где 0 означает отсутствие принадлежности элемента x к множеству A , а 1 – полную принадлежность элемента x данному множеству.

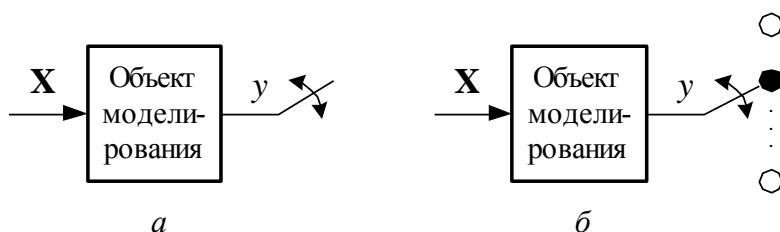


Рис. 3.21

Системы нечеткого вывода применяются для моделирования объектов с непрерывным и дискретным выходом. Объекты с непрерывным выходом (рис. 3.21, а) соответствуют задачам аппроксимации функций, возникающим в прогнозировании, многокритериальном анализе, управлении техническими объектами и т. п. Объекты с дискретным выходом (рис. 3.21, б) соответствуют задачам классификации в медицинской и технической диагностике, при распознавании образов, в ситуационном управлении и при принятии решений в других областях.

Типовая структура системы нечеткого логического вывода показана на рис. 3.22. Она содержит следующие модули:

- фаззификатор, преобразующий вектор \mathbf{X} входных сигналов четкого множества в вектор $\tilde{\mathbf{X}}$ нечетких множеств с помощью функций принадлежности;
- функции принадлежности, задающие степени принадлежности элементов к нечетким множествам;
- машина нечеткого логического вывода, которая на основе правил базы знаний определяет вектор $\tilde{\mathbf{Y}}$ нечетких множеств для выходного сигнала системы;

– нечеткая база знаний, содержащая информацию о зависимости вход/выход системы в виде лингвистических правил <Если – то>;

– дефаззификатор – преобразователь вектора \tilde{Y} нечетких множеств в детерминированное значение выходного сигнала y .

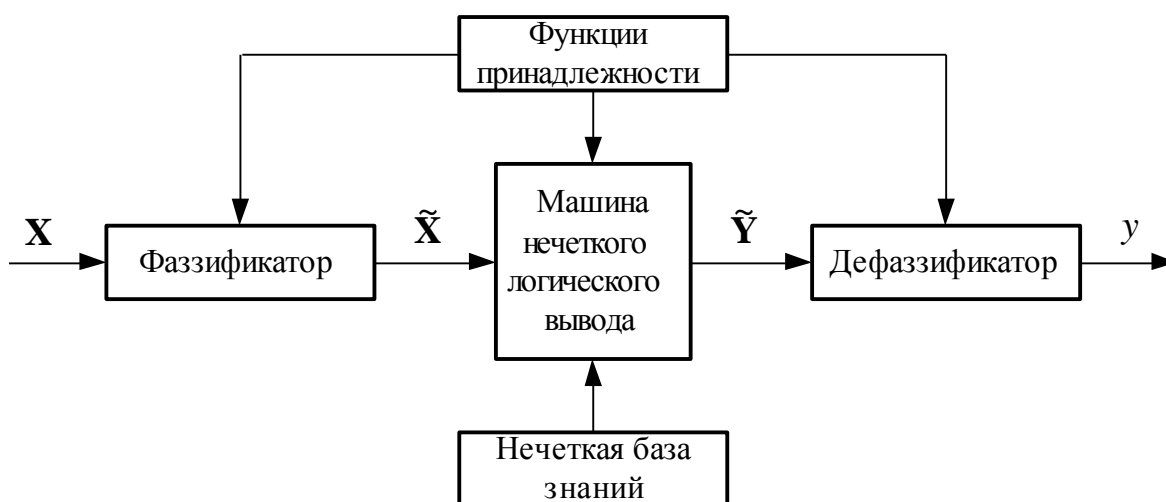


Рис. 3.22

Отметим, что существуют системы нечеткого вывода, в которых блок «дефаззификатор» отсутствует (например, система Такаги–Сугено). В этом случае на выходе системы генерируется непосредственно четкое значение выходного сигнала.

3.9.2. ANFIS-сеть с моделью Такаги–Сугено

Систему нечеткого логического вывода можно представить в виде нечеткой нейронной сети (fuzzy neural network) – нейронной сети прямого распространения сигнала особого типа, в которой с помощью алгоритма обучения адаптируются линейные веса и параметры нечетких функций фаззификатора и дефаззификатора.

История нейронечетких сетей начинается с 1991 г., когда Янг (Jang) предложил ANFIS-модель (Adaptive-Neural-based Fuzzy Inference System). ANFIS-модель реализует систему нечеткого вывода Такаги–Сугено, в которой отсутствует блок «Дефаззификатор», показанный на рис. 3.22.

Структура ANFIS-сети изображена на рис. 3.23. Она содержит 5 слоев, назначения которых рассмотрим далее.

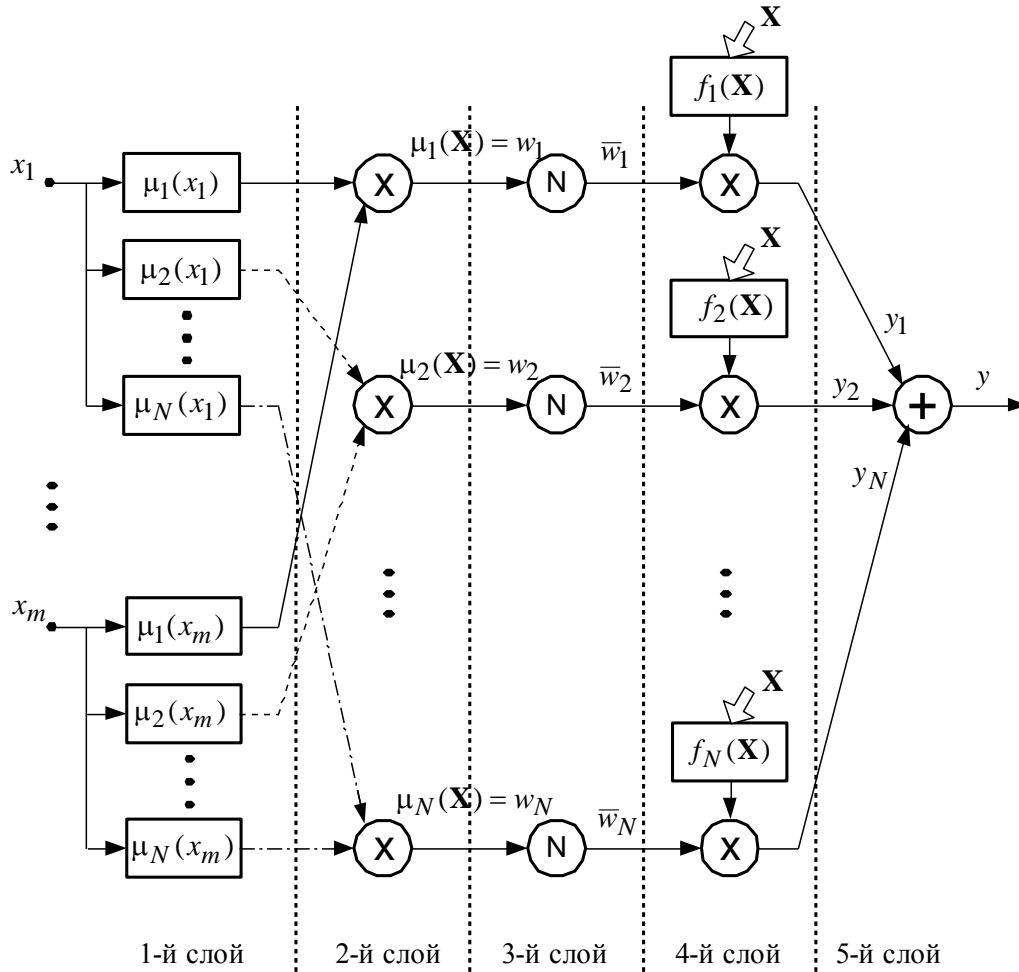


Рис. 3.23

Первый слой выполняет фаззификацию каждого элемента вектора входного сигнала сети $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^t$, где t – знак транспонирования. Для N нечетких правил вводятся условия:

$$\text{ЕСЛИ } \langle x_1 = A_{11} \rangle, \text{ ЕСЛИ } \langle x_2 = A_{21} \rangle, \dots, \text{ ЕСЛИ } \langle x_m = A_{m1} \rangle,$$

...

$$\text{ЕСЛИ } \langle x_1 = A_{1N} \rangle, \text{ ЕСЛИ } \langle x_2 = A_{2N} \rangle, \dots, \text{ ЕСЛИ } \langle x_m = A_{mN} \rangle$$

с помощью функций принадлежности $\mu_r(x_i)$, $r = 1, 2, \dots, N$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Функция принадлежности для каждой переменной x_i и каждого правила r может быть описана, например, обобщенной функцией Гаусса

$$\mu_r(x_i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_i - c_i^{(r)}}{\sigma_i^{(r)}} \right)^{2b_i^{(r)}}} = \exp \left[- \left(\frac{x_i - c_i^{(r)}}{\sigma_i^{(r)}} \right)^{2b_i^{(r)}} \right], \quad (3.24)$$

где $c_i^{(r)}, \sigma_i^{(r)}, b_i^{(r)}$ – параметры функции, подлежащие адаптации в процессе обучения сети. Изменение параметра $c_i^{(r)}$ соответствует смещению функции принадлежности по горизонтальной оси. Параметр $\sigma_i^{(r)}$ отвечает за широту функции, параметр $b_i^{(r)}$ – за форму кривой, которая при соответствующем подборе данного параметра может быть задана как функция Гаусса, треугольная или трапецеидальная функция.

Первый слой является параметрическим, поскольку на нем определяются параметры функций принадлежности при обучении сети.

Второй слой осуществляет агрегирование отдельных переменных x_i , формируя посылки N нечетких правил:

$$\text{ЕСЛИ } \langle x_1 = A_{11} \text{ И } x_2 = A_{21} \text{ И } \dots \text{ И } x_m = A_{m1} \rangle$$

...

$$\text{ЕСЛИ } \langle x_1 = A_{1N} \text{ И } x_2 = A_{2N} \text{ И } \dots \text{ И } x_m = A_{mN} \rangle.$$

Агрегирование задается алгебраическим произведением, из которого следует, что для r -го нечеткого правила

$$w_r = \mu_r(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^m \mu_r(x_i) = \prod_{i=1}^m \exp \left[- \left(\frac{x_i - c_i^{(r)}}{\sigma_i^{(r)}} \right)^{2b_i^{(r)}} \right],$$

где w_r – коэффициент принадлежности для вектора \mathbf{X} ; $\mu_r(x_i)$ находится из выражения (3.24).

Третий слой – нормализующий слой, в котором веса w_r ($r = 1, 2, \dots, N$) подвергаются нормированию (в блоках N на рис. 3.23) по формуле

$$\bar{w}_r = \frac{w_r}{\sum_{i=1}^N w_i},$$

где \bar{w}_r – относительная степень выполнения нечеткого правила r .

Четвертый слой формирует заключения нечетких правил согласно модели Такаги–Сугено. В данной модели заключения определяются детерминированным (четким) образом. Типовое представление N нечетких правил при m переменных x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) в модели Такаги–Сугено имеет вид

$$\text{ЕСЛИ } \langle x_1 = A_{11} \text{ И } x_2 = A_{21} \text{ И } \dots \text{ И } x_m = A_{m1} \rangle,$$

$$\text{ТО } \langle f_1(\mathbf{X}) = p_{10} + \sum_{i=1}^m p_{1i} x_i \rangle$$

...

(3.25)

$$\text{ЕСЛИ } \langle x_1 = A_{1N} \text{ И } x_2 = A_{2N} \text{ И } \dots \text{ И } x_m = A_{mN} \rangle,$$

$$\text{ТО } \langle f_N(\mathbf{X}) = p_{N0} + \sum_{i=1}^m p_{Ni} x_i \rangle.$$

Заключения правил модели Такаги–Сугено в большинстве случаев содержат линейные функции, хотя можно использовать также и произвольные нелинейные функции. В четвертом слое также производится умножение функций $f_r(\mathbf{X})$ на значения \bar{w}_r , сформированные в предыдущем слое. Таким образом, рассчитывается вклад каждого нечеткого правила в выход сети по формуле

$$y_r = \bar{w}_r f_r(\mathbf{X}). \quad (3.26)$$

Четвертый слой – параметрический, в котором коэффициенты функций $f_r(\mathbf{X})$, $r = 1, 2, \dots, N$ находятся в процессе адаптации (обучения) сети.

Пятый слой выполняет агрегирование результата, полученного по разным нечетким правилам. Агрегирование состоит в суммировании вкладов всех правил:

$$y = \sum_{r=1}^N y_r = \sum_{r=1}^N \left(p_{r0} + \sum_{i=1}^m p_{ri} x_i \right) \frac{\prod_{i=1}^m \exp \left[- \left(\frac{x_i - c_i^{(r)}}{\sigma_i^{(r)}} \right)^{2b_i^{(r)}} \right]}{\sum_{l=1}^N \prod_{i=1}^m \exp \left[- \left(\frac{x_i - c_i^{(l)}}{\sigma_i^{(l)}} \right)^{2b_i^{(l)}} \right]},$$

где y_r определяется из выражения (3.26).

Из представленного описания ANFIS-сети следует:

- сложные нелинейные поверхности можно аппроксимировать с помощью множества плоских линейных сегментов. Каждый такой сегмент можно задать одним нечетким правилом модели Такаги–Сугено;

- ANFIS-сеть содержит только 2 параметрических слоя (первый и четвертый), параметры которых уточняются при обучении нечеткой нейронной сети. Параметры первого слоя называются нелинейными, поскольку они – аргументы нелинейных функций принадлежности (3.24), параметры четвертого слоя – линейными весами, так как они линейно входят в заключения нечетких правил модели Такаги–Сугено.

Типовые способы обучения нейронных сетей можно применить для настройки ANFIS-сети, так как в ней используются только дифференцируемые функции. Обычно применяется комбинация двух методов: метода градиентного спуска в виде алгоритма обратного распространения ошибки и метода наименьших квадратов. Алгоритм обратного распространения ошибки настраивает нелинейно-входящие параметры посылок нечетких правил, т. е. функций принадлежности. Методом наименьших квадратов оцениваются коэффициенты заключений нечетких правил, так как они линейно связаны с выходом сети. Каждая итерация процедуры обучения сети выполняется в 2 этапа. На первом этапе на входы подается обучающая выборка и по невязке между желаемым и действительным поведением сети методом наименьших квадратов находятся оптимальные параметры узлов четвертого слоя. На втором этапе остаточная

невязка передается с выхода сети на входы и методом обратного распространения ошибки модифицируются параметры узлов первого слоя. При этом найденные на предыдущем этапе коэффициенты заключений правил не изменяются. Итерационная процедура настройки продолжается, пока невязка превышает заранее установленное значение. Для настройки функций принадлежности помимо метода обратного распространения ошибки могут использоваться и другие алгоритмы оптимизации, например метод Левенберга–Марквардта.

С повышением уровня сложности нечеткой нейронной сети (увеличением числа нечетких правил или нечетких множеств) улучшается ее способность описывать нелинейную динамическую систему. В этом отношении сложность модели можно считать ее достоинством. Однако с увеличением сложности значительно возрастает объем информации о моделируемой системе, необходимый для определения параметров модели (таких, например, как параметры функций принадлежности всех нечетких множеств). В то же время объема имеющейся информации о моделируемой системе часто оказывается недостаточно для построения более сложной модели. Кроме того, число правил и параметров функций принадлежности при увеличении числа входов модели растет столь стремительно, что иногда говорят о «проклятии размерности». С этой точки зрения сложность модели является ее недостатком. При рассмотрении задач нечеткого моделирования необходимо задавать некоторые разумные границы уровня сложности модели.

3.9.3. Модель Мамдани как простейшая форма модели Такаги–Сугено

Модель Мамдани является простейшей формой модели Такаги–Сугено, а модель Такаги–Сугено – обобщением модели Мамдани. Данное положение следует из сравнения применяемых в указанных моделях нечетких правил в форме (3.25) для модели Такаги–Сугено и в соответствующей форме:

$$\begin{aligned}
 &\text{ЕСЛИ } \langle x_1 = A_{11} \text{ И } x_2 = A_{21} \text{ И } \dots \text{ И } x_m = A_{m1} \rangle, \\
 &\quad \text{ТО } \langle f_1(\mathbf{X}) = p_{10} \rangle \\
 &\quad \dots \\
 &\text{ЕСЛИ } \langle x_1 = A_{1N} \text{ И } x_2 = A_{2N} \text{ И } \dots \text{ И } x_m = A_{mN} \rangle,
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

$$TO < f_N(\mathbf{X}) = p_{N0} >$$

для модели Мамдани.

Из сравнения (3.25) и (3.27) следует, что модель Мамдани можно сформировать при заключениях N правил модели Такаги–Сугено с функциями $f_1(\mathbf{X}), \dots, f_N(\mathbf{X})$, содержащими нулевую степень векторного аргумента $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^t$, описывающего m входов нечеткой нейронной сети.

Нейронечеткая сеть, построенная на основе модели Мамдани, полученной из модели Такаги–Сугено с применением N нечетких правил согласно (3.27), устанавливает соответствие вход/выход в форме

$$y = \sum_{r=1}^N p_{r0} \frac{\prod_{i=1}^m \exp \left[- \left(\frac{x_i - c_i^{(r)}}{\sigma_i^{(r)}} \right)^{2b_i^{(r)}} \right]}{\sum_{l=1}^N \prod_{i=1}^m \exp \left[- \left(\frac{x_i - c_i^{(l)}}{\sigma_i^{(l)}} \right)^{2b_i^{(l)}} \right]},$$

где $c_i^{(r)}, \sigma_i^{(r)}, b_i^{(r)}$ – параметры центра, ширины и формы обобщенной функции Гаусса i -го элемента вектора \mathbf{X} для r -го нечеткого правила вывода.

3.10. Выбор структуры нейронной модели

Развитие устройств со сверхбольшой степенью интеграции и широкое применение вычислительной техники вызвало в последние годы огромный интерес к нейронным сетям и существенный прогресс в их исследовании.

При синтезе нейронных сетей решается сложный вопрос представления знаний в сети. В сеть должны быть встроены априорная информация и инварианты, которые упрощают архитектуру и процесс обучения сети. Данная задача играет особую роль, поскольку правильная конфигурация сети обеспечивает ее специализацию, что важно по следующим причинам:

– нейронная сеть со специализированной структурой обычно содержит значительно меньшее количество свободных параметров, которые нужно настраивать, чем полносвязная сеть. Следовательно, для обучения

специализированной сети требуется меньше данных. При этом на обучение затрачивается меньше времени, и такая сеть обладает лучшей обобщающей способностью;

- специализированные сети характеризуются большей пропускной способностью;

- стоимость создания специализированных нейронных сетей сокращается, поскольку их размер существенно меньше размера полносвязных сетей.

Четкого решения задачи, как построить специализированную нейронную сеть, в которую встроена априорная информация, в настоящее время не существует. Однако разработано много форм нейронных сетей, в результате оценки достоинств и недостатков которых выбирается структура (или структуры), приемлемая для решения задач в областях исследований, тесно связанных с математикой, физикой, инженерией, нейробиологией, психологией. С развитием теории нейронных сетей будут наращивать свой теоретический и прикладной потенциал и указанные науки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бычков Ю.А., Щербаков С.В. Аналитически-численный метод расчета динамических систем. Математическое моделирование динамических систем. Кусочно-степенные модели. Аналитически-численное решение прямой и обратной задачи динамики кусочно-степенных моделей. Проблемно-ориентированные алгоритмы анализа и синтеза моделей динамических систем. – Издание второе, дополненное. СПб., Энергоатомиздат, Санкт-Петербургское отделение, 2002. – 368 с.
2. Бычков Ю.А., Щербаков С.В. Хаос в динамических системах. Классификационные модели. Аналитически-численный метод. Эквивалентные преобразования и вычислительные алгоритмы. – Издание второе, переработанное. СПб.: Изд-во «Технолит», 2009. 313 с.
3. Бычков Ю. А., Щербаков С. В. Расчёт математических моделей динамических систем аналитически-численным методом. – Издание второе, переработанное, дополненное и расширенное. СПб.: Изд-во «Технолит», 2010. 380 с.
4. Бычков Ю.А., Щербаков С.В. Аналитический и численный расчет детерминированных нелинейных моделей динамических систем с сосредоточенными и распределенными нестационарными параметрами. Переходные, установившиеся и хаотические режимы. Издание второе, переработанное и дополненное СПб, Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014.
5. Бычков Ю. А., Иншаков Ю. М., Соловьева Е. Б., Щербаков С. В., Бюнтиг В. Г. (Büntig W. G.), Тёпфер Х. (Töpfer H.) Математическое моделирование и анализ нелинейных систем. Mathematischemodellierung und analysenichtlinearer systems. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2015. 302 с.
6. Analysis of mathematical models of continuous and discrete non-linear systems / U. A. Bichkov, U. M. Inshakov, E. B. Solovyeva, S. A. Scherbakov. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2017. 174 с.
7. Модели нелинейных систем. Полевые методы электродинамики / С. А. Дегтярев, Ю. М. Иншаков, Е. Б. Соловьева, В. В. Федоров. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2016. 164 с.
8. Соловьева Е. Б. Полиномиальные и нейронные модели нелинейных дискретных систем. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014, 154 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТУЛАТЫ, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.....	3
1.1. Математическое моделирование электрических цепей и динамических систем.....	3
1.2. Предмет и аксиоматика теории электрических цепей.....	4
1.3. Пассивные элементы электрических цепей.....	7
1.4. Независимые, зависимые и управляемые источники электромагнитной энергии.....	17
1.5. Математическое моделирование физически существующих электротехнических устройств с помощью идеальных элементов и источников. Линеаризация нелинейных статических характеристик электротехнических устройств. Активные элементы цепей.....	27
1.6. Элементы структуры цепи. Постулаты Кирхгофа. Некоторые сведения из топологии. Формирование системы линейно независимых уравнений Кирхгофа.....	32
1.7. Формирование обобщённой математической модели нелинейной детерминированной цепи (системы) с сосредоточенными параметрами. Формулировка общей задачи анализа динамики электрической цепи (системы).....	38
 2. АНАЛИЗ ПАССИВНЫХ И АКТИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ В ОБЛАСТИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ t (КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД).....	 40
2.1. Понятие анализа цепи в t -области. Понятие коммутации и переходного процесса в цепи. Формирование обобщённого уравнения динамики линейной цепи в развёрнутом виде.....	40
2.2. Решение уравнений Кирхгофа, описывающих динамику линейной цепи, с точностью до постоянных интегрирования.....	45
2.3. Понятия начальных и предначальных условий. Правило коммутации в общей форме. Точное решение уравнений Кирхгофа, полностью описывающих динамику линейной цепи....	49

2.4. Понятия состояния цепи, переменных и уравнений состояния. Точное решение уравнений состояния.....	58
2.5. Пробные сигналы. Единичная ступенчатая функция Хевисайда. Единичная импульсная функция Дирака. Обобщённая производная и обобщённая функция. Переходная и импульсная характеристики цепи.....	73
2.6. Интеграл наложения (интеграл Дюамеля) через переходную и импульсную характеристику.....	82
2.7. Анализ в t -области кусочно-линейных цепей.....	84
3. НЕЙРОННЫЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ.....	86
3.1. Многослойная персептронная сеть.....	86
3.2. Рекуррентная нейронная сеть.....	90
3.3. Радиально-базисная сеть.....	95
3.4. Вейвлет-нейронная сеть.....	99
3.5. Функционально связанная искусственная нейронная сеть.....	101
3.6. Полиномиальная персептронная сеть.....	104
3.7. Сплайновая нейронная сеть.....	105
3.8. Каноническая кусочно-линейная нейронная сеть.....	114
3.9. Адаптивная сеть с системой нечеткого вывода.....	117
3.10. Выбор структуры нейронной модели.....	126

Бычков Юрий Александрович
Морозов Дмитрий Александрович
Портной Марк Саулович
Соловьева Елена Борисовна

Математические основы теоретической электротехники.
Часть 1

Учебное пособие

Подписано в печать .18. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Гарнитура «Times New Roman». Печ. л. 8.
Тираж 75 экз. Заказ .

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5