МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №1
по дисциплине «Теория принятия решений»
Тема: Принятие решений в матричных играх
Вариант 13

Студент гр. 8383	____________________	Мололкин К.А.
Преподаватель	____________________	Попова Е.В.

Санкт-Петербург
2022

Цель работы

Изучение различных инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе матричных игр.

Основные теоретические положения

Рассмотрим простейшую математическую модель конечной конфликтной ситуации, в которой имеется два участника и выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется антагонистической игрой двух лиц с нулевой суммой. Игра состоит из двух ходов: игрок А выбирает одну из возможных $a_i,\ i = 1..m$ стратегий, а игрок Б выбирает одну из возможных стратегий $b_j,\ j = 1..n$. Каждый выбор производится при полном незнании выбора соперника. В результате выигрыш игроков составит соответственно a_{ij} и $-a_{ij}$. Цель игрока А – максимизировать величину a_{ij}, а игрока Б – минимизировать эту величину. Критерием принятия решения является функция, выражающая предпочтение лица, принимающего решение, и определяющая правило, по которому выбирается приемлемый или оптимальный вариант решения.

Матрица, составленная из величин $a_{ij},\ i = 1..m,\ j = 1..n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица выше называется платежной матрицей, или матрицей игры. Каждый элемент платежной матрицы $a_{ij},\ i = 1..m,\ j = 1..n$, равен выигрышу А (проигрышу Б), если он выбрал стратегию $A_i,\ i = 1..m$, а игрок Б выбирал стратегию $B_j,\ j = 1..n$.

Задача каждого из игроков – найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший доход.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Если игрок А выбрал стратегию $A_i,\ i = 1..m$, то в худшем случае (например, если его ход известен Б) он получит выигрыш $\alpha_i = \min_j a_{ij}$. Предвидя такую возможность, игрок А должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш.

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \{\min_j \alpha_{ij}\}.$$

Представленная выше величина α – гарантированный выигрыш игрока А называется нижней ценой игры. Стратегия A_i, обеспечивающая получение выигрыша α, называется максиминной. Если первый игрок будет придерживаться своей максиминной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае выиграет не меньше α. Аналогично определяется наилучшая стратегия второго игрока. Игрок Б при выборе стратегии B_j, $j = 1..n$, в худшем случае получит проигрыш $\beta_j = \max_i a_{ij}$. Он выбирает стратегию B_j при которой его проигрыш будет минимальным и составит

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \{\max_i \alpha_{ij}\}.$$

Представленная выше величина β – гарантированный проигрыш игрока Б называется верхней ценой игры. Стратегия β_j, обеспечивающая получение проигрыша β, называется минимаксной. Если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае проиграет не больше β. Фактический выигрыш игрока А (проигрыш игрока Б) при разумных действиях партнеров ограничен верхней и нижней ценой игры. Для матричной игры справедливо неравенство $\alpha \leq \beta$. Если $\alpha = \beta = \nu$, т.е.

$$\max_i \left\{\min_j \alpha_{ij}\right\} = \min_j \max_i \alpha_{ij} = \nu,$$

то выигрыш игрока А (проигрыш игрока Б) определяется числом ν. Оно называется ценой игры.

В соответствии с этим, если $\alpha = \beta = \nu$, то такая игра называется игрой с седловой точкой. Элемент матрицы α_{ij}, соответствующий паре оптимальных стратегий $(A_i,\ B_j)$, называется седловой точкой матрицы. Этот элемент является ценой игры.

Седловой точке соответствуют оптимальные стратегии игроков. Их совокупность – решение игры, которое обладает свойством: если один из игроков придерживается оптимальной стратегии, то второму отклонение от своей оптимальной стратегии не может быть выгодным. Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$ и $\alpha \leq \nu \leq \beta$ то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами.

Сложная стратегия, состоящая в случайном применении всех стратегий с определенными частотами, называется смешанной.

Постановка задачи

Используя инструментальные средства компьютерной алгебры решить матричные задачи.

Выполнение работы

1. С помощью инструментального средства определить границы выигрыша и наличие седловой точки для матрицы C_1. Матрица C_1 представлена ниже:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ -4 & 3 & -4 & -2 \\ 8 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Результат выполнения программы показан на рис. 1. Исходный код программы можно увидеть в приложении А.

```
Границы выигрыша:
    Нижняя цена игры = 3
    Верхняя цена игры = 7
Наличие седловой точки:
  Седловая точка не существует
```

Рисунок 1 – Результат выполнения программы для матрицы C_1

2. Графически и аналитически решить матричную игру 2×2 для матрицы C_2. Матрица C_2 представлена ниже:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Решим данную задачу аналитически. Надо проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

$$\alpha = \max_i\{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(1, 3)\} = 3$$

$$\beta = \min_j\{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(5, 4)\} = 4$$

Получается, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры ν. Известно, что $3 \leq \nu \leq 4$. В таком случае игрок А должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить максимальный средний выигрыш. Аналогично, игрок Б должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать средний выигрыш игрока А. Для этого запишем две системы уравнений и решим их.

Для игрока А:

$$\begin{cases} p_1 + 5p_2 = \nu \\ 4p_1 + 3p_2 = \nu \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{17}{5} \\ p_1 = \dfrac{2}{5} \\ p_2 = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} q_1 + 4q_2 = \nu \\ 5q_1 + 3q_2 = \nu \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{17}{5} \\ q_1 = \dfrac{1}{5} \\ q_2 = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Оптимальная стратегия игрока А: $P = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Оптимальная стратегия игрока Б: $Q = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Цена игры: $\nu = \frac{17}{5} = 3.4$

Решим данную задачу графически. Результаты представлены на рис. 2 и 3.

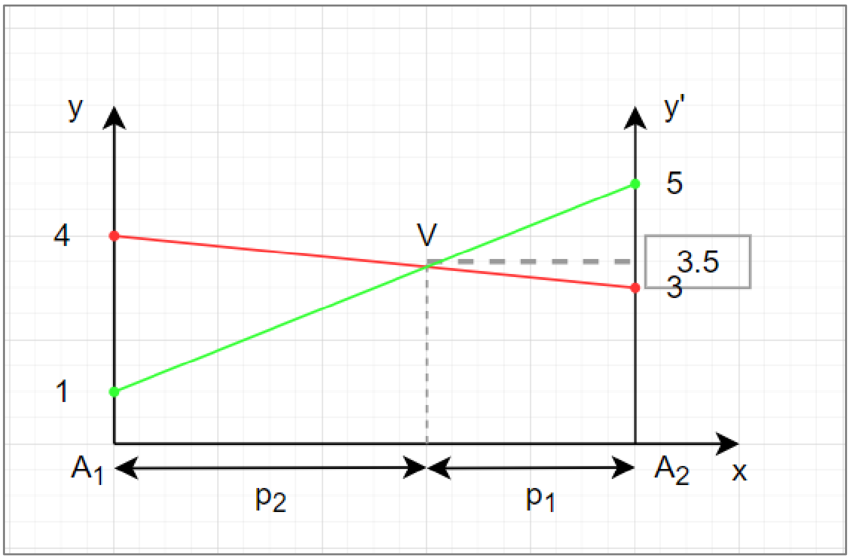

Рисунок 2 – Гарантированный выигрыш первого игрока в матрице платежей C_2

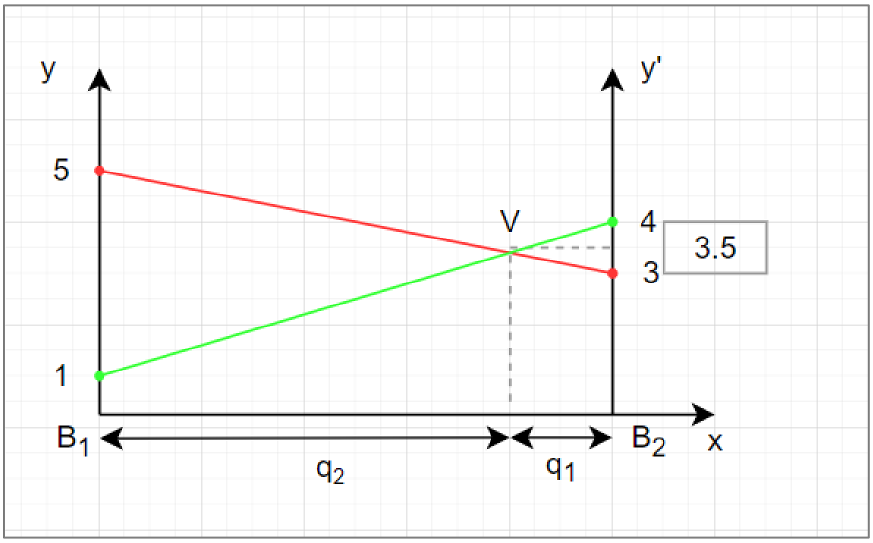

Рисунок 3 – Гарантированный проигрыш второго игрока в матрице платежей C_2

По рис. 2 и 3 можно определить, что стратегии игроков А и Б равны $P = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right), Q = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, цена игры – $\nu = 3.5$, $\alpha = 3, \beta = 4$. Так как $\alpha \neq \beta$, можем сделать вывод о том, что седловой точки не существует.

Относительная погрешность равна $\delta(\nu) = \frac{|3.4-3.5|}{3.4} * 100\% = 2.94\%$

3. Графически и аналитически решить матричную игру 2×N для матрицы C_3. Матрица C_3 представлена ниже:

$$C_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Решим данную задачу графически. Результат представлен на рис. 5.

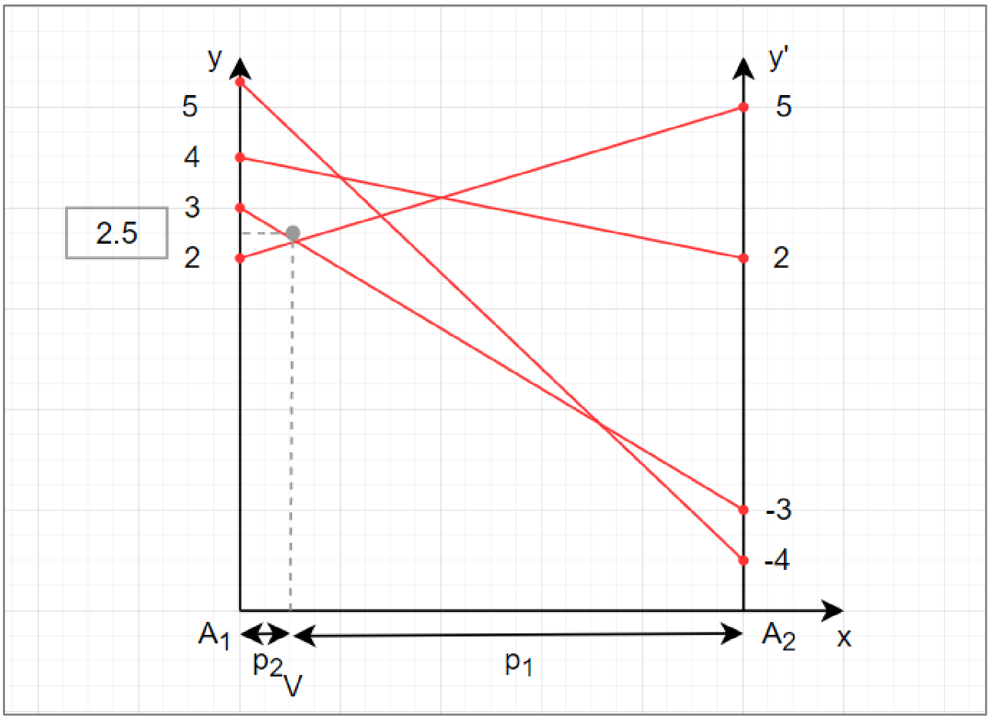

Рисунок 5 – Гарантированный выигрыш первого игрока при различном выборе смешанной стратегии

На рис. 5 можно определить цену игры $\nu = 2.5$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Так как $\alpha \neq \beta$, можем сделать вывод о том, что седловая точка отсутствует.

Решим данную задачу аналитически. Для аналитического решения выберем прямые, на пересечении которых находится седловая точка и построим из них матрицу 2 × 2:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

$$\alpha = \max_i\{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(2, -3)\} = 2$$

$$\beta = \min_j\{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(5, 3)\} = 3$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры ν. Известно, что $2 \leq \nu \leq 3$. Запишем две системы и уравнений и решим их.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 2p_1 + 5p_2 = \nu \\ 3p_1 - 3p_2 = \nu \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{21}{9} \\ p_1 = \dfrac{8}{9} \\ p_2 = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 2q_1 + 3q_2 = \nu \\ 5q_1 - 3q_2 = \nu \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{21}{9} \\ q_1 = \dfrac{2}{3} \\ q_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Оптимальная стратегия игрока А: $P = \left(\frac{8}{9}, \frac{1}{9}\right)$. Оптимальная стратегия игрока Б: $Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Цена игры: $\nu = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

Относительная погрешность равна:

$$\delta(p1) = \frac{\left|\frac{8}{9} - \frac{9}{10}\right|}{\frac{8}{9}} * 100\% = 1.25\%;\ \delta(p2) = \frac{\left|\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right|}{\frac{1}{9}} * 100\% = 9.99\%$$

$$\delta(\nu) = \frac{|7/3\ - 2.5|}{7/3} * 100\% = 7.14\%$$

4. Графически и аналитически решить матричную игру M×2 для матрицы C_4. Матрица C_4 представлена ниже:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Решим данную задачу графически. Результат представлен на рис. 6.

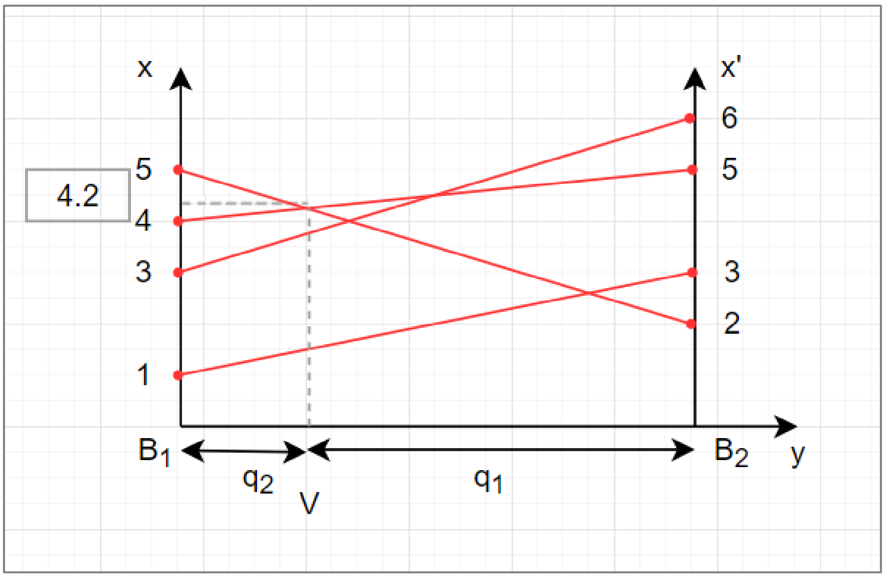

Рисунок 6 – Гарантированный проигрыш второго игрока при различном выборе смешанной стратегии

Исходя из рис. 6 можно определить, что цена игры – $\nu = 4.2, \alpha = 4, \beta = 5$. Так как $\alpha \neq \beta$, можем сделать вывод о том, что седловой точки не существует.

Решим данную задачу аналитически.

Для аналитического решения выберем прямые, на пересечении которых находится седловая точка и построим из них матрицу 2 × 2:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

$$\alpha = \max_i\{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(2,4)\} = 4$$

$$\beta = \min_j\{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(5,5)\} = 5$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит седловой точки нет и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры ν. Известно, что $4 \leq \nu \leq 5$.

Запишем две системы уравнений.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 5p_1 + 4p_2 = \nu \\ 2p_1 + 5p_2 = \nu \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{17}{4} \\ p_1 = \dfrac{1}{4} \\ p_2 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 5q_1 + 2q_2 = \nu \\ 4q_1 + 5q_2 = \nu \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{17}{4} \\ q_1 = \dfrac{3}{4} \\ q_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Оптимальная стратегия игрока А: $P = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Оптимальная стратегия игрока Б: $Q = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Цена игры: $\nu = \frac{17}{4} = 4.25$.

Относительная погрешность равна

$$\delta(v) = \frac{|4.25 - 4.2|}{4.25} * 100\% = \left(\frac{0.0015}{0.67}\right) * 100\% = 1.18\%$$

5. С помощью симплекс-метода решить матричную игру *M*×*N* для матрицы C_5. Матрица C_5 представлена ниже:

$$C_5 = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры.

$$\alpha = \max_i\{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(3, 6, 5)\} = 6$$

$$\beta = \min_j\{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(8, 14, 9)\} = 8$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры ν. Известно, что $6 \leq \nu \leq 8$. Запишем две системы уравнений.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 3p_1 + 8p_2 + 5p_3 \geq v \\ 14p_1 + 9p_2 + 8p_3 \geq v \\ 7p_1 + 6p_2 + 9p_3 \geq v \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_i = \frac{p_i}{v}$$

Чтобы найти решение данной задачи относительно первого игрока A надо найти минимум функции $F(x) = x_1 + x_2 + x_3$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq 1 \\ 14x_1 + 9x_2 + 8x_3 \geq 1 \\ 7x_1 + 6x_2 + 9x_3 \geq 1 \end{cases}$$

С помощью библиотеки SciPy симплекс-методом вычислен вектор X. Результаты представлены на рис. 7.

```
[38]
func_coefs = [1,1,1]
lhs_coefs = [[-3,-8,-5],[-14,-9,-8],[-7,-6,-9]]
rhs_coefs = [-1,-1,-1]
edges = [(0, float("inf")),(0, float("inf")),(0, float("inf"))]
opt = linprog(c=func_coefs, A_ub=lhs_coefs,
              b_ub=rhs_coefs, bounds=edges,
              method="simplex")
opt.fun.round(3)
```

```
0.143
```

```
[39]
opt.x.round(3)
```

```
array([0.   , 0.095, 0.048])
```

```
[40]
(1/opt.fun) * opt.x
```

```
array([0.        , 0.66666667, 0.33333333])
```

```
[41]
(1/opt.fun).round(3)
```

```
7.0
```

Рисунок 7 – Решение вектора X симплекс-методом матрицы C_5

Получаем $F(x) = 0.143$ при $x_1 = 0, x_2 = 0.095, x_3 = 0.048$.

Цена игры при этом $\nu = \frac{1}{0.143} = 7.0$, что соотносится с первоначальной оценкой $6 \leq \nu \leq 8$.

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 3q_1 + 14q_2 + 7q_3 \leq \nu \\ 8q_1 + 9q_2 + 6q_3 \leq \nu \\ 5q_1 + 8q_2 + 9q_3 \leq \nu \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{cases}$$

Чтобы найти решение данной задачи относительно второго игрока Б надо найти максимум функции $F(y) = y_1 + y_2 + y_3$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 3y_1 + 14y_2 + 7y_3 \leq 1 \\ 8y_1 + 9y_2 + 6y_3 \leq 1 \\ 5y_1 + 8y_2 + 9y_3 \leq 1 \end{cases}$$

Симплекс-методом вычислен вектор *Y*. Результаты вычислений представлены на рис. 8.

```
0.143
[0.071 0.    0.071]
[0.5 0.  0.5]
7.0
```

Рисунок 8 – Решение вектора Y симплекс-методом матрицы C_5

Получаем $F(y) = 0.143$ при $y_1 = 0.071, y_2 = 0, y_3 = 0.071$.

Цена игры $\nu = \frac{1}{0.143} = 7$, что соотносится с первоначальной оценкой $6 \leq \nu \leq 8$.

Опираясь на полученные данные, можно найти цену игры и оптимальные смешанные стратегии игроков А и Б:

$$\nu = \frac{1}{0.143} = 7$$

$$P = X \cdot \nu = (\ 0, 0.67, 0.33\ )$$

$$Q = Y \cdot \nu = (\ 0.5, 0, 0.5\ )$$

Выводы

В ходе выполнения практической работы было реализовано инструментальное средство для нахождения нижней и верхней цен игры и для нахождения координат седловой точки на языке программирования Python, а также были получены навыки работы с библиотекой SciPy для линейного программирования.

При решении матричных игр были применены графический и аналитический методы нахождения оптимальных смешанных стратегий, а также был применён симплекс-метод. Решения матричных игр обоими способами дали одинаковый результат.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ПРОГРАММА ПОИСКА СТАЦИОНАРНОЙ ТОЧКИ

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""Untitled0.ipynb

Automatically generated by Colaboratory.

Original file is located at
    https://colab.research.google.com/drive/1xinIRuRO3vw0D-
bgm2ldxfZLRxLaBFCM
"""

import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from IPython.core.interactiveshell import InteractiveShell
InteractiveShell.ast_node_interactivity = "all"
from scipy.optimize import linprog

def default(c):
    amin = c.min(axis=1)
    bmax = c.max(axis=0)
    alpha = max(amin)
    beta = min(bmax)
    print('Границы выигрыша:')
    print(f'    Нижняя цена игры = {alpha}')
    print(f'    Верхняя цена игры = {beta}')
    print('Наличие седловой точки:')
    print(f'    Седловая точка существует') if alpha == beta else print(f'
Седловая точка не существует')
    if alpha == beta:
        print(f'Координаты седловой точки равны ({np.argmax(amin)+1},
{np.argmin(bmax)+1})')
```

```
    p1 = (c[1,1]-c[1,0])/(c[0,0]+c[1,1]-(c[0,1]+c[1,0]))
    p2 = 1-p1
    q1 = (c[1,1]-c[0,1])/(c[0,0]+c[1,1]-(c[0,1]+c[1,0]))
    q2 = 1-q1
    v = c[0,0]*p1+c[1,0]*p2
    print(np.array([p1,p2,q1,q2,v]).round(3))

c1 = np.array([[2,9,10,5], [3,4,8,7], [-4,3,-4,-2], [8,5,-3,-4]])
c2 = np.array([[1,4],[5,3]])
c3 = np.array([[2,4,3,5], [5,2,-3,-4]])
c31 = np.array([[2,3],[5,-3]])
c4 = np.array([[3,6],[5,2],[1,3],[4,5]])
c41 = np.array([[5,2],[4,5]])
c5 = np.array([[3,14,7], [8,9,6], [5,8,9]])
# c1,c2,c3,c4,c5

default(c41)

IST = 21/9
SCHIT = 2.5
(np.abs(IST-SCHIT)/IST)*100
''
(np.abs((1-IST)-(1-SCHIT))/(1-IST))*100

func_coefs = [1,1,1]
lhs_coefs = [[-3,-8,-5],[-14,-9,-8],[-7,-6,-9]]
rhs_coefs = [-1,-1,-1]
edges = [(0, float("inf")),(0, float("inf")),(0, float("inf"))]
opt = linprog(c=func_coefs, A_ub=lhs_coefs,
              b_ub=rhs_coefs, bounds=edges,
              method="simplex")
opt.fun.round(3)

opt.x.round(3)
```

```
(1/opt.fun) * opt.x

(1/opt.fun).round(3)

obj = [-1,-1,-1]
lhs_ineq = [[3,14,7],[8,9,6],[5,8,9]]
rhs_ineq = [1,1,1]
bnd = [(0, float("inf")),(0, float("inf")),(0, float("inf"))]
opt = linprog(c=obj, A_ub=lhs_ineq, b_ub=rhs_ineq, bounds=bnd,method="sim-
plex")
print(-opt.fun.round(3))
print(opt.x.round(3))
print((-1/opt.fun) * opt.x)
print((-1/opt.fun).round(3))
```