Оценивание вещественного параметра

Малов Сергей Васильевич

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

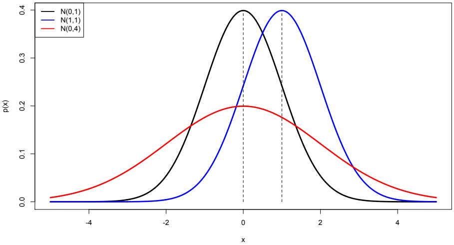
26 сентября / 3 октября 2020 г.

План

Некоторые параметрические семейства

Семейство нормальных распределений $\xi \in \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

- Тип: абсолютно непрерывное распределение
- Параметр распределения: $\theta = (a, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
- Плотность распределения: $p_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$

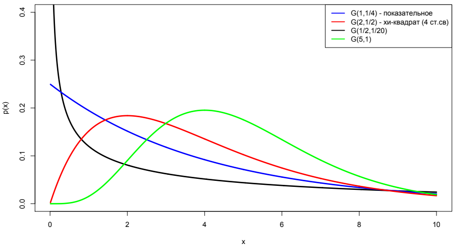


- Носитель распределения: $\mathbb{R}$
- a – парметр сдвига; σ – параметр масштаба
- Математическое ожидание: $\mathbb{E}_\theta \xi = a$
- Дисперсия: $\mathbb{D}_\theta \xi = \sigma^2$

Некоторые параметрические семейства

Семейство гамма распределений (Эрланга) $\xi \in \Gamma(a, b)$

- Тип: абсолютно непрерывное распределение
- Параметр распределения: $\theta = (a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$
- Плотность распределения: $p_\theta(x) = \frac{1}{\Gamma(a) b^a} x^{a-1} \exp(-x/b) 1_{\{x \geq 0\}}$
    - $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ – гамма функция Эйлера, $a > 0$.

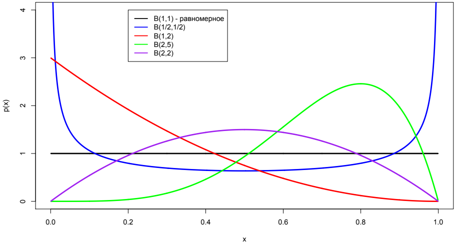


- Носитель распределения: $[0, \infty)$
- a – параметр формы; b – параметр масштаба
- Математическое ожидание: $\mathbb{E}_\theta \xi = ab$
- Дисперсия: $\mathbb{D}_\theta \xi = ab^2$

Некоторые параметрические семейства

Семейство бета распределений $\xi \in \mathrm{B}(a,b)$

- Тип: абсолютно непрерывное распределение
- Параметр распределения: $\theta = (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$
- Плотность распределения: $p_\theta(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{1}_{\{x\in(0,1)\}}}{\beta(a,b)}$
  - $\mathcal{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ – бета-функция, $a,b > 0$.

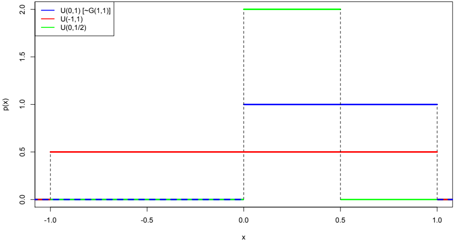


- Носитель распределения: $[0,1]$
- a,b – параметры формы
- Математическое ожидание: $\mathbb{E}_\theta\xi = a/(a+b)$
- Дисперсия: $\mathbb{D}_\theta\xi = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

Некоторые параметрические семейства

Семейство равномерных распределений $\xi \in \mathrm{U}(a, b)$

- Тип: абсолютно непрерывное распределение
- Параметр распределения: $\theta = (a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R} : x < y\}$
- Плотность распределения: $p_\theta(x) = \frac{1}{b-a} 1_{\{x \in [a,b]\}}$

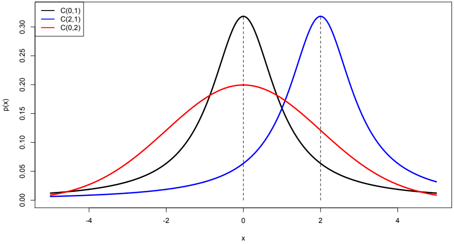


- Носитель распределения: $[a, b]$
- a – левая граница носитемя; b – правая граница носителя
- Математическое ожидание: $\mathbb{E}_\theta \xi = (a + b)/2$
- Дисперсия: $\mathbb{D}_\theta \xi = (b - a)^2/12$

Некоторые параметрические семейства

Семейство распределений Коши $\xi \in C(a, b)$

- Тип: абсолютно непрерывное распределение
- Параметр распределения: $\theta = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
- Плотность распределения: $p_\theta(x) = \dfrac{b}{\pi\left((x-a)^2+b^2\right)}$



- Носитель распределения: $\mathbb{R}$
- a – параметр сдвига; b – параметр масштаба
- Математическое ожидание: $\mathbb{E}_\theta\xi$ не существует

План

1. Параметрические семейства распределений
2. Выборка из нормального распределения
3. Постановка задачи оценивания вещественного парметра
4. Построение статистических оценок

Полезные распределения

Определение

Пусть $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ – выборка из стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0, 1)$.

- Распределение случайной величины $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ называется хи-квадрат с n степенями свободы.
- Распределение случайной величины $S_n = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}}$ называется распределением Стьюдента (W. Gosset) с n степенями свободы

Определение

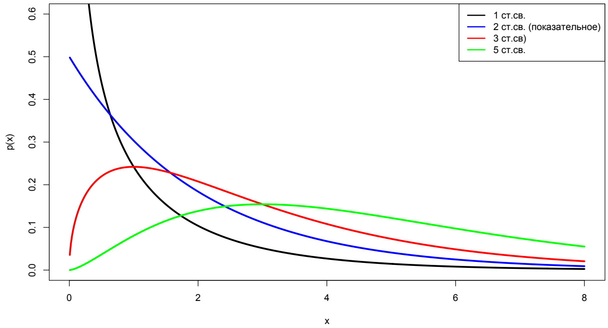
Пусть χ_n^2 и χ_m^2 – независимые случайные величины, имеющие распределения χ^2 с n и m степенями свободы соответственно.

- Распределение случайной величины $\psi_{n,m} = \frac{\chi_n^2/n}{\chi_m^2/m}$ называется распределением Фишера–Снедекора с n и m степенями свободы.

Распределения χ^2

Плотность хи-квадрат распределения ξ_n^2

$$p_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} x^{n/2-1} \exp(-x/2) 1_{\{x \geq 0\}}$$



- Хи-квадрат - частный случай гамма распределения: $\chi_n^2 \sim \Gamma(n/2, 2)$
- Носитель распределения: $\mathbb{R}_+$
- Математическое ожидание: $\mathbb{E}_\theta \chi_n^2 = n$
- Дисперсия: $\mathbb{D}_\theta \chi_n^2 = 2n$

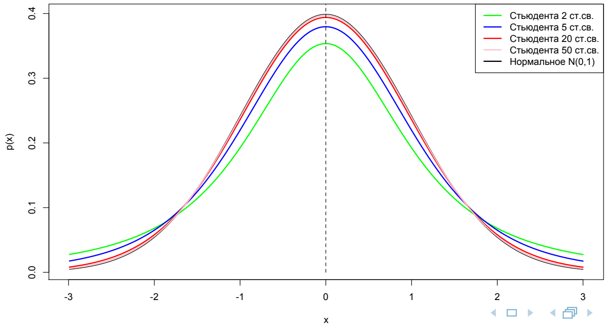
Распределения Стьюдента

Плотность распределения Стьюдента

$$t_n(x) = \frac{\Gamma\Big((n+1)/2\Big)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+x^2/n\right)^{(n+1)/2}},\ x \in \mathbb{R}.$$

- Распределения Стьюдента также называются t-распределениями
- Распределения Стьюдента симметричны отосительно нуля
- С ростом числа степеней распределение Стьюдента приближается (сходится) к стандартному нормальному распределению

Плотности распределений Стьюдента с различными ч.с.с.

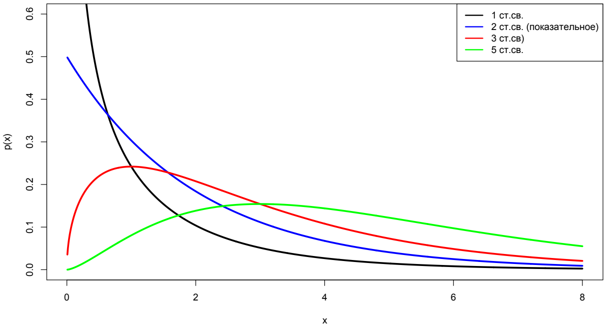


Распределения Фишера–Снедекора

Плотность распределения Фишера-Снедекора $F_{n,m}$

$$p_{n,m}(x) = \frac{(m/n)^{m/2}}{\mathcal{B}(n/2, m/2)} \frac{x^{n/2-1}}{(x+m/n)^{(n+m)/2}} 1_{\{x \geq 0\}}$$

- $\mathcal{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ – бета-функция, $a, b > 0$.



- Распределение $F_{n,m}$ сходится к χ^2_n при $m \to \infty$
- Если $\nu \sim S_m$ (распределение Стьюдента), то $\nu^2 \sim F_{1,m}$
- Математическое ожидание: $\mathbb{E}_\theta f_{n,m} = m/(m-2)$, $m > 2$
- Дисперсия: $\mathbb{D}_\theta f_{n,m} = 2m^2(m+n-2)/(n(m-2)^2(m-4))$, $m > 4$

Выборка из нормального распределения

Теорема (Лемма Фишера)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – выборка из нормального распределения $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Тогда

(i) $\sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - a}{\sigma} \in \mathcal{N}(0, 1)$;

(ii) $\overline{X}$ и s^2 – независимые статистики;

(iii) $\dfrac{ns^2}{\sigma^2}$ имеет χ^2-распределение с $(n-1)$ степенью свободы;

(iv) $\sqrt{n-1}\,\dfrac{\overline{X} - a}{s}$ имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Доказательство леммы Фишера

Доказательство. Введем случайные величины $Y_k = X_k - \mathbb{E}X_k$, $1 \le k \le n$. Они независимы и имеют нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$.
Рассмотрим произвольную ортонормированную $n \times n$-матрицу A, первая строка которой состоит из чисел, равных $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (построение ортонормированного базиса). Пусть ξ_k, $1 \le k \le n$ – новые случайные величины, такие что $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)' = \frac{1}{\sigma} AY$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)'$. В этом случае

$$\xi_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \overline{Y}, \qquad \mathbb{E}\xi_k = 0, \qquad \mathbb{D}\xi_k = 1, \ 1 \le k \le n,$$

$$\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_l) = 0 \quad (k \ne l).$$

Кроме того, можно выразить s^2 через случайные величины ξ_k, $1 \le k \le n$, которые независимы, как некоррелированные нормальные $N(0,1)$. Поскольку A – ортогональна, суммы квадратов Y_k/σ^2 и ξ_k равны, так что

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - \left(\frac{\overline{Y}}{\sigma}\right)^2 = \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2.$$

Отсюда уже следует независимость ns^2/σ^2 и $\overline{X} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \xi_1 + a$.

Утверждение о распределениях ns^2/σ^2 и $\overline{X}$ теперь очевидно. ∎

Следствие

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ – независимые выборки из нормальных распределений $\mathcal{N}(a, \sigma_1^2)$ и $\mathcal{N}(b, \sigma_2^2)$ соответственно. Тогда

$$F = \frac{ns_1^2}{ms_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \text{ имеет распределение Фишера–Снедекора } F_{n-1,m-1}$$

- $s_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ – выборочная дисперсии, построенная по $X_1, X_2, \ldots, X_n$
- $s_2^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m (Y_j - \overline{Y})^2$ – выборочная дисперсии, построенная по $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$.

План

Точечное оценивание

Пусть $(\mathfrak{X},\mathfrak{F},\mathcal{P})$, $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ – статистический эксперимент

- Задача точечного оценивания: по результатам наблюдений найти приближенное значение параметра $\tilde{\theta}(X) \in \Theta$
- Точечная оценка – статистика $\tilde{\theta} : \mathfrak{X} \to \Theta$ (измеримая)
- Для определения близости оценки $\tilde{\theta}$ к истинному значению параметра θ вводится функция потерь $W(\tilde{\theta},\theta)$, удовлетворяющая следующим условиям:
  - неотрицательность: $W(\tilde{\theta},\theta) \geq 0$
  - если $\tilde{\theta} = \theta$, то потери нулевые: $W(\theta,\theta) = 0$
- Наиболее употребительные функции потерь:
  - $W(\tilde{\theta},\theta) = (\tilde{\theta} - \theta)^2$ – функция потерь Гаусса
  - $W(\tilde{\theta},\theta) = |\tilde{\theta} - \theta|$ – функция потерь Лапласа
- Риск оценки $R_{\tilde{\theta}} : \Theta \to [0,\infty)$
  - $R_{\tilde{\theta}}(\theta) = \mathbb{E}_\theta W(\tilde{\theta}(X),\theta)$ – среднее значение потерь при каждом фиксированном θ, $\theta \in \Theta$

Оптимальное оценивание

- Наиболее часто для измерения точности оценки $\tilde{\theta}$ используют гауссовский риск
$$R_{\tilde{\theta}}(\theta) = E_\theta(\tilde{\theta}(X) - \theta)^2$$
- Оценку, имеющую наименьший риск по сравнению с другими оценками при каждом значении θ, разумно считать оптимальной
    - в классе всевозможных оценок не существует оценки, минимизирующей риск при каждом значении θ
- Различают два подхода в задаче оптимального оценивания:
    - поиск оценки, минимизирующей риск при всех значениях $\theta \in \Theta$ в ограниченном классе разумных оценок
        - например, среди несмещенных оценок
    - использование функционалов от риска (байесовский, минимаксный подходы)

План

Метод максимального правдоподобия

Функция правдоподобия

- Пусть $\mathcal{P} \ll \mu$, т.е. любая мера семейства распределений доминирована мерой μ: $\mathbb{P}_\theta \ll \mu$
  - $\mathbb{P}_\theta \ll \mu$, если $\forall A \in \mathfrak{F}$: $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_\theta(A) = 0$
  - по теоореме Радона–Никодима существует плотность $p_\theta \equiv \frac{dP_\theta}{d\mu}$
  - $P_\theta(A) = \int_A p_\theta(x) d\mu(x)$, $A \in \mathfrak{F}$.
- В качестве доминирующей меры обычно используют
  - меру Лебега: p_θ – плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины
  - считающая мера на $\mathbb{Z}$: $p_\theta(x) = \mathbb{P}(X = x)$, $x \in \mathbb{Z}$
- Функция правдоподобия $L : \mathfrak{X} \times \Theta \to \mathbb{R}_+$:

$$L(x; \theta) = p_\theta(x), \quad x \in \mathfrak{X}, \theta \in \Theta.$$

Оценки максимального правдоподобия

Определение

Оценка $\hat{\theta}(X)$, максимизирующая функцию правдоподобия $L(X;\theta)$ по θ при каждом фиксированном X $\big($т.е. $L(X;\hat{\theta}(X)) \geq L(X;\tilde{\theta}(X))$ при каждом $X \in \mathfrak{X}$ для любой оценки $\tilde{\theta}(X)\big)$, называется оценкой максимального правдоподобия (ОМП).

- Если $\hat{\theta}$ – оценка максимального правдоподобия параметра θ, g – параметрическая функция, то $g(\hat{\theta})$ является оценкой максимального правдоподобия для $g(\theta)$.
- Если $X_1, \ldots, X_n$ – выборка из распределения с плотностью распределения p_θ, $\theta \in \Theta$, то
  - функция правдоподобия распадается в произведение
    $$L(X;\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i)$$
  - логарифм функции правдоподобия представляется в виде суммы
    $$LL(X;\theta) = \log L(X;\theta) = \sum_{i=1}^n \log p_\theta(X_i)$$

Нахождение ОМП

- В силу монотонности логарифма задача максимизации функции правдоподобия сводится к задаче максимизации её логарифма по всем $\theta \in \Theta$

$$\log L(X;\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log p_\theta(X_i).$$

  - удобнее максимизировать сумму, а не произведение
- Если $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ – d-мерный параметр и p_θ дифференцируема по θ, то для нахождения максимума надо найти решения системы уравнений

$$U(X;\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log L(X;\theta) = 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

- Если функция правдоподобия не дифференцируема по параметру, то переход от функции правдоподобия к её логарифму обычно не имеет смысла

Метод моментов

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка из распределения P_θ, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$, и существуют $\mu_i(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1$, $i = 1, \dots, n$.

Определение

Если существует единственное решение $\tilde{\theta}(X)$ системы уравнений

$$\hat{\mu}_i(\tilde{\theta}) = \mu_i(\tilde{\theta}), \quad i = 1, \dots, d,$$

где $\hat{\mu}_i(\tilde{\theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – выборочный момент i-го порядка, то $\tilde{\theta}(X)$ называется оценкой по методу моментов (ОММ).

- Выборочное распределение иногда называют непараметрической оценкой максимального правдоподобия распределения выборки
- Для построения ОММ используются моменты выборочного распределения
- Довольно часто ОММ и ОМП совпадают

Упражнение

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка из двухпараметрического нормального распределения $N(a, \sigma^2)$. Найти ОМП и ОММ для параметра распределения $\theta = (a, \sigma^2)$.

Решение. (ОМП) Логарифм функции правдоподобия имеет вид

$$\log L(X;\, \theta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - a)^2}{2\sigma^2}.$$

Точка максимума функции правдоподобия находится из системы уравнений

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^n (X_i - a) = 0, \\ n/\sigma - \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - a)^2}{\sigma^3} = 0. \end{cases}$$

Получаем ОМП $(\hat{a}, \hat{\sigma^2}) = (\overline{X}, s^2)$.

(ОММ) Известно, что $\mathbb{E}_\theta X_1 = a$ и $\mathbb{D}_\theta X_1 = \sigma^2$. Следовательно, система метода моментов

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = a, \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 = a^2 + \sigma^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \\ \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 \end{cases}$$

Получаем ОМП $(\hat{a}, \hat{\sigma^2}) = (\overline{X}, s^2)$. ∎

Упражнение

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка из двухпараметрического равномерного распределения на интервале (a, b) $(\theta = (a, b))$.

Решение. (ОМП) Функция правдоподобия имеет вид

$$L(x;\,\theta) = \frac{1}{(b-a)} \prod_{i=1}^{n} 1_{[a,b]}(x_i) = \frac{1}{(b-a)^n}\, 1_{[a,b]}(\min_i(x_i))\, 1_{[a,b]}(\max_i(x_i)),$$

где

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Функция правдоподобия не дифференцируема, но максимизация функции правдоподобия сводится к максимизации $(b-a) \to \max_{a,b}$ при условии $a \le \min\limits_{1\le i\le n}(X_i) \le \max\limits_{1\le i\le n}(X_i) \le b$.

Решение данной задачи оптимизации – ОМП: $(\hat{a}, \hat{b}) = (\min\limits_{1\le i\le n}(X_i), \max\limits_{1\le i\le n}(X_i))$.

(ОММ) Известно, что $\mathbb{E}_\theta X_1 = \frac{a+b}{2}$ и $\mathbb{E}_\theta X_1^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$. Система ММ:

$$\begin{cases} \overline{X} = a, \\ \overline{X^2} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + a = 2\overline{X}, \\ b - a = 4\sqrt{3}\sqrt{\overline{X} - \overline{X}^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \overline{X} - 2\sqrt{3}\sqrt{\overline{X} - \overline{X}^2}, \\ b = \overline{X} + 2\sqrt{3}\sqrt{\overline{X} - \overline{X}^2} \end{cases}$$

Таким образом, ОММ: $(\tilde{a}, \tilde{b}) = (\overline{X} - 2\sqrt{3}s, \overline{X} + 2\sqrt{3}s)$. ∎