МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №6

по дисциплине «Теория принятия решений»

Тема: Нечёткие модели

Студентка гр. 7381	____________________	Алясова А.Н.
Преподаватель	____________________	Попова Е.В.

Санкт-Петербург

2021

Цель работы.

Использование инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе решения задач с нечёткой информацией.

Основные теоретические положения.

В практической работе используется в качестве начального этапа нечёткая модель, основанная на нечёткой информации, предоставляемой экспертами. Эксперты формируют опорные значения функции принадлежности коэффициента, отражающего характеристики объекта, который подлежит ранжированию $- u^{(ijl)}$ опорных точках $k = 1, \dots, 4$, и для объектов $j = 1,2,3$ по критериям $i = 1,2,3$. Всего экспертов $l = 1,2$. Формируется трапецеидальная функция принадлежности $\mu_{A^l}(u^l)$ нечёткого числа (1):

$$\mu_{A^l}(u^l) = \begin{cases} 0, & u^l \le u_1^l \\ \dfrac{u^l - u_1^l}{u_1^l - u_2^l}, & u_1^l < u^l < u_2^l \\ 1, & u_2^l \le u^l \le u_3^l \\ \dfrac{u^l - u_4^l}{u_3^l - u_4^l}, & u_3^l < u^l < u_4^l \\ 0, & u^l \ge u_4^l \end{cases} \qquad (1)$$

где $u_1^l < u_2^l \le u_3^l < u_4^l$.

Для вывода выходной функции принадлежности используется принцип обобщения. Нечёткий вывод основывается на базе знаний, которую составляют обобщённые логические правила: ЕСЛИ ((u^1 есть A^1) И (u^2 есть A^2)) ТО (u есть A). Принцип обобщения для функции нескольких переменных представляет собой задание функции принадлежности выходного значения системы (2).

$$\mu_B(y) = \bigvee_{u=f(u^1,u^2)} (\mu_{A^1}(u^1) \wedge \mu_{A^2}(u^2)),\ \forall u^1, u^2, u \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

где символ $\vee$ означает объединение множеств на основе операции $\max$, а $\wedge$ означает объединение множеств на основе операции $\min$.

Дефаззификацию трапецеидального числа будем проводить с помощью интегрального представления градуированного среднего значения нечёткого числа A и рассчитывать по формулам (3), (4):

$$centr(A) = \int_0^1 \frac{\left(L^{-1}(\alpha) + R^{-1}(\alpha)\right)\alpha}{2} d\alpha \Big/ \int_0^1 \alpha d\alpha, \tag{3}$$

где $0 \le \alpha \le 1$.

$$centr(A) = \frac{u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_4}{6}, \tag{4}$$

где $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}$.

Во второй части работы используется метод рандомизированных сводных показателей (МРСП), в котором на входе используются дефаззифицированные значения нечёткой модели. Определяются значимость каждого критерия по отношению к другим с помощью вектора весовых коэффициентов $\overline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m), \omega_i \ge 0$. Вводится нормирование суммы $\sum_{i=1}^{m} \omega_i = 1$ и строится синтезирующая функция $Q(q_1, \dots, q_m; \overline{\omega}) \in [0, 1]$ в виде аддитивной средневзвешенной величины (5):

$$Q^{(j)} = \sum_{i=1}^{m} q_i^j \omega_i. \tag{5}$$

Для задания дискретности модели вводится величина шага $h = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \omega_i \in \left\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$, которая задаёт размер множества допустимых векторов весовых коэффициентов $N(m,n) = \binom{n+m-1}{n}$.

В качестве детерминированной оценки рандомизированного сводного показателя используется математическое ожидание случайной величины, а мерой точности оценки $\tilde{Q}^{(j)}$ служит стандартное отклонение случайной величины. Достоверность доминирования рандомизированного сводного показателя $\tilde{Q}^{(m)}$ над $\tilde{Q}^{(l)}$ определяется по формуле (6).

$$\mathbb{P}\{\tilde{Q}^{(m)} > \tilde{Q}^{(L)}\} > \alpha, \tag{6}$$

где $\alpha \in [0,1], m, l = 1, \dots, k$. Таким образом, достигают ранжирование объектов, оценку точности полученных величин, определение достоверности полученного ранжирования.

Постановка задачи.

Выбрать объект системы защиты информации (СЗИ), оцениваемый по 3 критериям (конфиденциальность, целостность, доступность информации), с использованием упрощённого модифицированного метода рандомизированных сводных показателей.

Индивидуализация.

Вариант 1.

Шаг дискретизации $n = 2$.

Таблица с оценками.

3 объекта, которые оцениваются по 3 критериям двумя экспертами.

Таблица 1

Эксперт 1												
	K1				K2				K3			
O1	0.3	0.4	0.6	0.8	0.0	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.4	0.5
O2	0.0	0.1	0.3	0.5	0.3	0.5	0.7	0.9	0.0	0.1	0.2	0.3
O3	0.0	0.1	0.3	0.4	0.2	0.3	0.4	0.5	0.2	0.3	0.5	0.6
Эксперт 2												
	K1				K2				K3			
O1	0.3	0.4	0.5	0.7	0.0	0.1	0.3	0.4	0.1	0.2	0.5	0.6
O2	0.1	0.2	0.4	0.5	0.3	0.4	0.8	0.9	0.0	0.2	0.3	0.4
O3	0.0	0.2	0.3	0.4	0.1	0.2	0.3	0.4	0.2	0.4	0.5	0.6

Порядок выполнения работы.

1. Сведение таблиц с экспертными опорными значениями трапецеидальных функций принадлежности в единую таблицу с тремя

объектами, оцениваемые по 3 критериям с помощью принципа обобщения, в котором $f = \frac{x_1+x_2}{2}$ – среднее значение.

2. Фаза дефаззификации трапецеидального числа с помощью интегрального представления градуированного среднего значения нечёткого числа A. Построить таблицу 3×3 с чёткими значениями.

3. Построить множество векторов весовых коэффициентов, количество которых равно N.

4. Построить множество сводных показателей, количество которых равно также N.

5. Вычислить математическое ожидание и дисперсию.

6. Вычислить вероятность полного доминирования.

7. Сделать вывод о предпочтении объекта сразу по всем критериям и с какой погрешностью.

Выполнение работы.

Согласно варианту были выбраны таблица с оценками экспертов (см. табл. 1) и шагов дискретизации $n = 2$.

Таблица 1 – Оценки экспертов

Эксперт 1												
	K1				K2				K3			
O1	0.3	0.4	0.6	0.8	0.0	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.4	0.5
O2	0.0	0.1	0.3	0.5	0.3	0.5	0.7	0.9	0.0	0.1	0.2	0.3
O3	0.0	0.1	0.3	0.4	0.2	0.3	0.4	0.5	0.2	0.3	0.5	0.6
Эксперт 2												
	K1				K2				K3			
O1	0.3	0.4	0.5	0.7	0.0	0.1	0.3	0.4	0.1	0.2	0.5	0.6
O2	0.1	0.2	0.4	0.5	0.3	0.4	0.8	0.9	0.0	0.2	0.3	0.4
O3	0.0	0.2	0.3	0.4	0.1	0.2	0.3	0.4	0.2	0.4	0.5	0.6

1) Сведение таблиц с экспертными опорными значениями трапецеидальных функций принадлежности в единую таблицу с тремя объектами, оцениваемые по 3 критериям с помощью принципа обобщения, в котором $f = \frac{x_1+x_2}{2}$ – среднее значение.

Таблица 2 - Объект 1 (O1), критерий 1 (K1)

Эксперт 2 \ Эксперт 1		0 0.3	1 0.4	1 0.6	0 0.8
0	0.7	0 0.5	0 0.55	0 0.65	0 0.75
1	0.5	0 0.4	1 0.45	1 0.55	0 0.65
1	0.4	0 0.35	1 0.4	1 0.5	0 0.6
0	0.3	0 0.3	0 0.35	0 0.45	0 0.55

Сформируем выходную трапецеидальную функцию принадлежности:

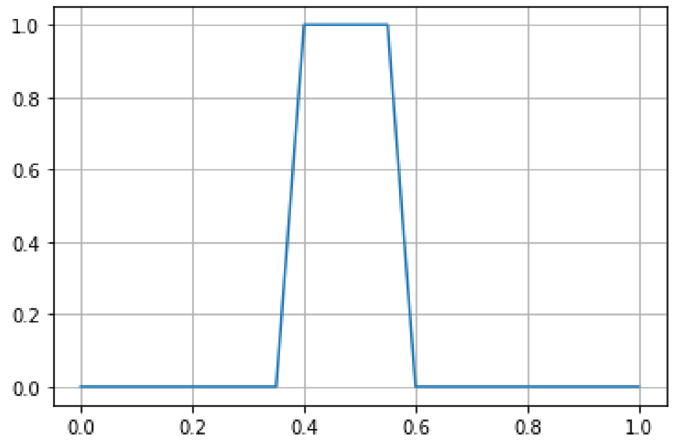

Рисунок 1 – Трапецеидальная функция принадлежности О1 К1

Произведём дефаззификацию трапецеидального числа:

$$C_{11} = centr(A) = \frac{0.35 + 2 * 0.4 + 2 * 0.55 + 0.6}{6} = 0.475$$

Таблица 3 - Объект 1 (О1), критерий 2 (К2)

Эксперт 1 / Эксперт 2		0	1	1	0
		0	0.1	0.2	0,3
0	0,4	0 0.2	0 0.25	0 0.3	0 0.35
1	0,3	0 0.15	1 0.2	1 0.25	0 0.3
1	0,1	0 0.05	1 0.1	1 0.15	0 0.2
0	0	0 0	0 0.05	0 0.1	0 0.15

Сформируем выходную трапецеидальную функцию принадлежности:

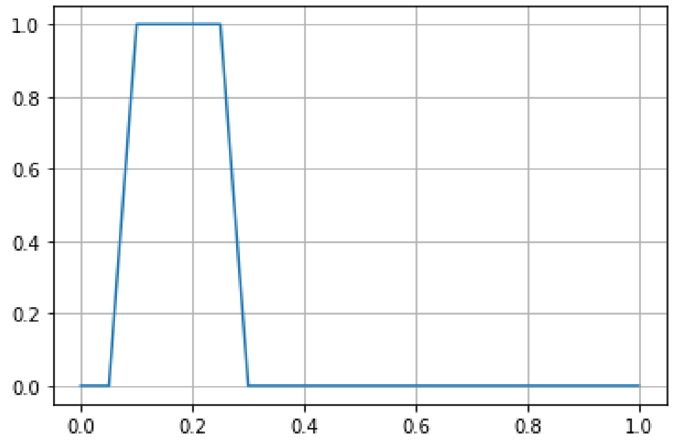

Рисунок 2 – Трапецеидальная функция принадлежности О1 К2

Произведём дефаззификацию трапецеидального числа:

$$C_{12} = centr(A) = \frac{0.05 + 2 * 0.1 + 2 * 0.25 + 0.3}{6} = 0.175$$

Таблица 4 - Объект 1 (О1), критерий 3 (К3)

Эксперт 1 / Эксперт 2		0	1	1	0
		0,1	0,2	0,4	0,5
0	0,6	0 0,35	0 0,4	0 0,5	0 0,55
1	0,5	0 0,3	1 1,35	1 0,45	0 0,5
1	0,2	0 0,15	1 0,2	1 0,3	0 0,35
0	0,1	0 0,1	0 0,15	0 0,25	0 0,3

Сформируем выходную трапецеидальную функцию принадлежности:

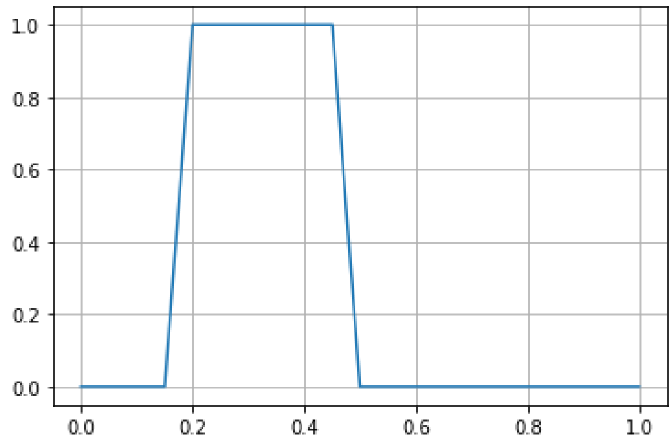

Рисунок 3 – Трапецеидальная функция принадлежности О1 К3

Произведём дефаззификацию трапецеидального числа:

$$C_{13} = centr(A) = \frac{0.15 + 2 * 0.2 + 2 * 0.45 + 0.5}{6} = 0.392$$

Таблица 5 - Объект 2 (О2), критерий 1 (К1)

Эксперт 1 / Эксперт 2		0	1	1	0
		0	0,1	0,3	0,5
0	0,5	0 0,25	0 0,3	0 0,4	0 0,5
1	0,4	0 0,2	1 0,25	1 0,35	0 0,45
1	0,2	0 0,1	1 0,15	1 0,25	0 0,35
0	0,1	0 0,05	0 0,1	0 0,2	0 0,3

Сформируем выходную трапецеидальную функцию принадлежности:

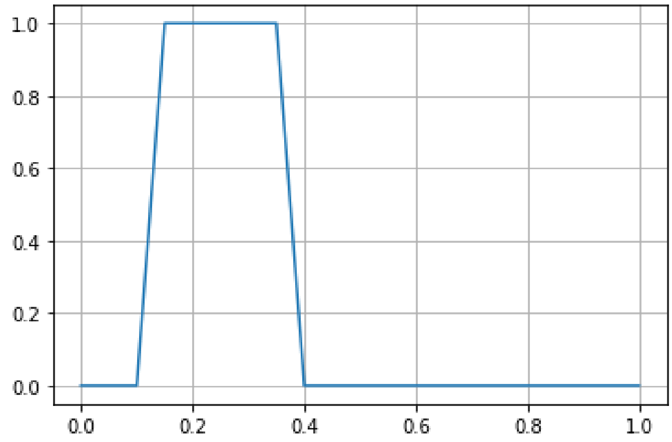

Рисунок 4 – Трапецеидальная функция принадлежности О2 К1

Произведём дефаззификацию трапецеидального числа:

$$C_{21} = centr(A) = \frac{0.1 + 2 * 0.15 + 2 * 0.35 + 0.4}{6} = 0.25$$

Таблица 6 - Объект 2 (О2), критерий 2 (К2)

Эксперт 1 / Эксперт 2		0 0,3	1 0,5	1 0,7	0 0,9
0	0,9	0 0,6	0 0,75	0 0,8	0 0,9
1	0,8	0 0,55	1 0,65	1 0,75	0 0,85
1	0,4	0 0,35	1 0,45	1 0,55	0 0,65
0	0,3	0 0,3	0 0,4	0 0,5	0 0,6

Сформируем выходную трапецеидальную функцию принадлежности:

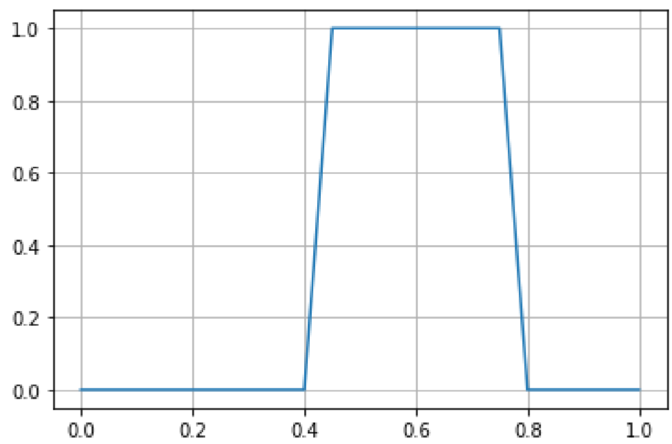

Рисунок 5 – Трапецеидальная функция принадлежности О2 К2

Произведём дефаззификацию трапецеидального числа:

$$C_{22} = centr(A) = \frac{0.4 + 2 * 0.45 + 2 * 0.75 + 0.8}{6} = 0.6$$

Таблица 7 - Объект 2 (О2), критерий 3 (К3)

Эксперт 1 / Эксперт 2		0 0	1 0,1	1 0,2	0 0,3
0	0,4	0 0,2	0 0,25	0 0,3	0 0,35
1	0,3	0 0,15	1 0,2	1 0,25	0 0,3
1	0,2	0 0,1	1 0,15	1 0,2	0 0,25
0	0	0 0	0 0,05	0 0,1	0 0,15

Сформируем выходную трапецеидальную функцию принадлежности:

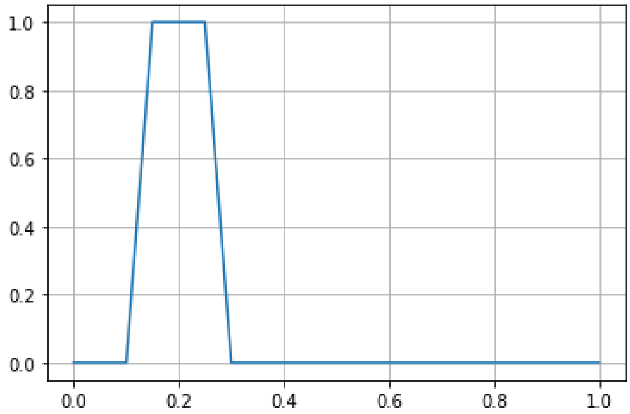

Рисунок 6 – Трапецеидальная функция принадлежности О2 К3

Произведём дефаззификацию трапецеидального числа:

$$C_{23} = centr(A) = \frac{0.1 + 2 * 0.15 + 2 * 0.25 + 0.3}{6} = 0.2$$

Таблица 8 - Объект 3 (О3), критерий 1 (К1)

Эксперт 1 / Эксперт 2		0 0	1 0,1	1 0,3	0 0,4
0	0,4	0 0,2	0 0,25	0 0,35	0 0,4
1	0,3	0 0,15	1 0,2	1 0,3	0 0,35
1	0,2	0 0,1	1 0,15	1 0,25	0 0,3
0	0	0 0	0 0,05	0 0,15	0 0,2

Сформируем выходную трапецеидальную функцию принадлежности:

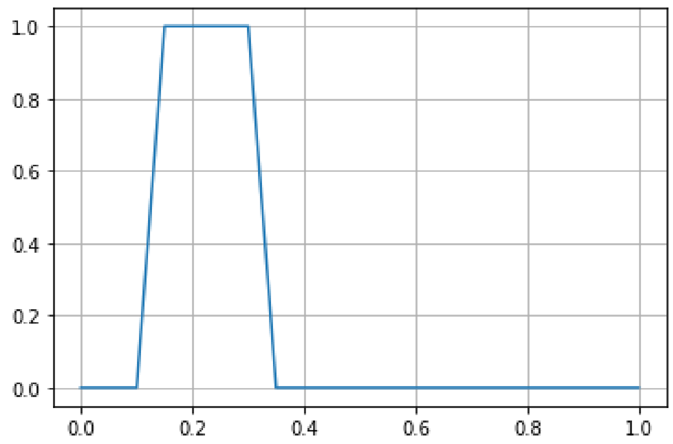

Рисунок 7 – Трапецеидальная функция принадлежности О3 К1

Произведём дефаззификацию трапецеидального числа:

$$C_{31} = centr(A) = \frac{0.1 + 2 * 0.15 + 2 * 0.3 + 0.35}{6} = 0.225$$

Таблица 9 - Объект 3 (О3), критерий 2 (К2)

Эксперт 2 \ Эксперт 1		0	1	1	0
		0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,4	0 0,3	0 0,35	0 0,4	0 0,45
1	0,3	0 0,25	1 0,3	1 0,35	0 0,4
1	0,2	0 0,2	1 0,25	1 0,3	0 0,35
0	0,1	0 0,15	0 0,2	0 0,25	0 0,3

Сформируем выходную трапецеидальную функцию принадлежности:

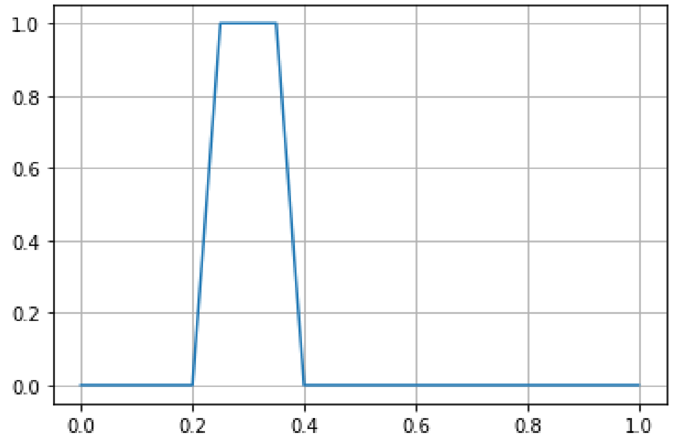

Рисунок 8 – Трапецеидальная функция принадлежности О3 К2

Произведём дефаззификацию трапецеидального числа:

$$C_{32} = centr(A) = \frac{0.2 + 2 * 0.25 + 2 * 0.35 + 0.4}{6} = 0.3$$

Таблица 10 - Объект 3 (О3), критерий 3 (К3)

Эксперт 1 / Эксперт 2		0	1	1	0
		0,2	0,3	0,5	0,6
0	0,6	0 0,4	0 0,45	0 0,55	0 0,6
1	0,5	0 0,35	1 0,4	1 0,5	0,55
1	0,4	0 0,3	1 0,35	1 0,45	0 0,5
0	0,2	0 0,2	0 0,25	0 0,35	0 0,4

Сформируем выходную трапецеидальную функцию принадлежности:

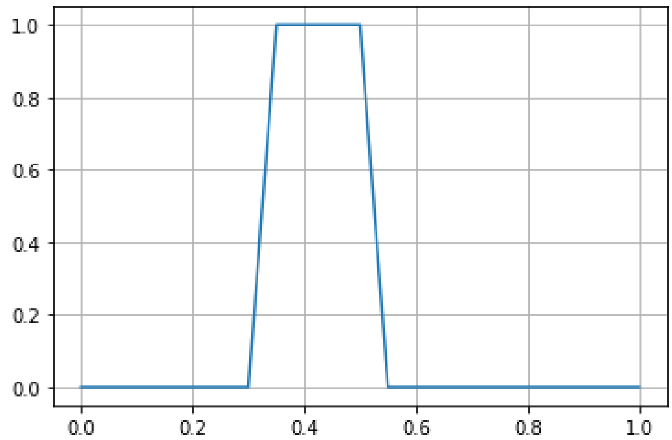

Рисунок 9 – Трапецеидальная функция принадлежности О3 К3

Произведём дефаззификацию трапецеидального числа:

$$C_{33} = centr(A) = \frac{0.3 + 2 * 0.35 + 2 * 0.5 + 0.55}{6} = 0.425$$

2) Фаза дефаззификации трапецеидального числа с помощью интегрального представления градуированного среднего значения нечёткого числа A. Построить таблицу 3×3 с чёткими значениями.

Таблица 3×3 с чёткими значениями представлена в табл. 11.

Таблица 11 - Таблица 3×3 с чёткими значениями

	K1	**K2**	**K3**
O1	0.475	0.175	0.392
O2	0.25	0.6	0.2
O3	0.225	0.3	0.425

Нормализуем критерии по формуле:

$$q_i^{(j)} = \begin{cases} 0, & p_i \geq \max p_i\,, \\ \dfrac{\max p_i - p_i}{\max p_i - \min p_i}, & \min p_i < p_i < \max p_i \\ 1, & p_i \leq \min p_i \end{cases}$$

Получим табл. 12.

Таблица 12

	K1	**K2**	**K3**
O1	0.294118	1	0.489412
O2	0.823529	0	0.941176
O3	0.882353	0.705882	0.411765

3) Построить множество векторов весовых коэффициентов, количество которых равно N.

Построим вектор весовых коэффициентов, для $n = 2$:

$$w_i = \{0, 0.5, 1\}$$

Размер множества допустимых векторов весовых коэффициентов:

$$N(m,n) = \frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!} = \frac{(2+3-1)!}{2!\,(3-1)!} = \frac{1*2*3*4}{1*2*1*2} = 6$$

Построим множество векторов весовых коэффициентов:

Таблица 13

W1	**W2**	**W3**
0	0	1
0	1	0

1	0	0
0	0.5	0.5
0.5	0	0.5
0.5	0.5	0

4) Построить множество сводных показателей, количество которых равно также N.

Построим множество сводных показателей:

Таблица 14

Q1	**Q2**	**Q3**
0.489412	0.941176	0.411765
1	0	0.705882
0.294118	0.823529	0.882353
0.744706	0.470588	0.558824
0.391765	0.882353	0.6470588
0.647059	0.411765	0.794118

5) Вычислить математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание и дисперсия представлены в табл. 15.

Таблица 15

	Q1	**Q2**	**Q3**
$\bar{\boldsymbol{Q}}^{(j)}$	0.594510	0.588235	0.666667
$\boldsymbol{S}^{(j)}$	0.235276	0.331018	0.153456

Отобразим на графике полученные отрезки:

$$Q1 = (0.359234; 0.829786)$$

$$Q2 = (0.257217; 0.919253)$$

$$Q3 = (0.513211; 0.820123)$$

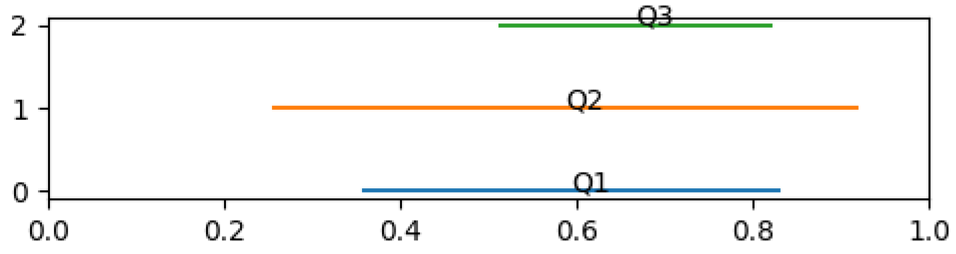

Рисунок 10 – Графическое представление сводных показателей

6) Вычислить вероятность полного доминирования.

Вероятность полного доминирования j над i представлена в табл.16.

Таблица 16

j \ i	**1**	**2**	**3**
1	–	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	–	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	–

7) Сделать вывод о предпочтении объекта сразу по всем критериям и с какой погрешностью.

Наиболее предпочтительным является объект 3, т.к. он имеет наибольшее мат. ожидание $\bar{Q}^{(3)} = 0.667$ и наименьшую дисперсию $S^{(3)} = 0.153456$, а также он доминирует над другими объектами.

Модифицируем алгоритм, добавив доп. условия на множество векторов весовых коэффициентов: $w_1 < w_2$.

Тогда множество векторов весовых коэффициентов:

Таблица 17

W1	**W2**	**W3**
0	0.5	0.5
0	1	0

Множество сводных показателей:

Таблица 18

Q1	Q2	Q3
0.744706	0.470588	0.5588235
1	0	0.705882

Математическое ожидание и дисперсия представлены в табл. 19.

Таблица 19

	Q1	Q2	Q3
$\bar{\boldsymbol{Q}}^{(j)}$	0.872353	0.235294	0.632353
$\boldsymbol{S}^{(j)}$	0.127647	0.235294	0.073529

$$Q1 = (0.744706; 0.1)$$

$$Q2 = (0; 0.470588)$$

$$Q3 = (0.558824; 0.705882)$$

Полученные отрезки представлены на рис. 11.

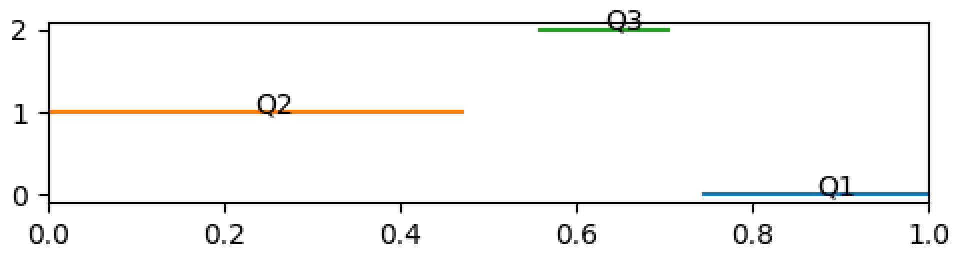

Рисунок 11 – Графическое представление сводных показателей

Как видно из графика, теперь отрезки не пересекаются.

Теперь наиболее предпочтительным стал объект 1, т.к. он доминирует над другими объектами, а также имеет наибольшее мат. ожидание $\bar{Q}^{(j)} = 0.872353$ при небольшой дисперсии $S^{(j)} = 0.127647$.

Вероятность полного доминирования j над i представлена в табл. 20.

Таблица 20

j \ i	**1**	**2**	**3**
1	–	1	1
2	0	–	0
3	1	1	–

Выводы.

В ходе выполнения лабораторной работы был применен модифицированный метод рандомизированных сводных показателей и выбран наилучший объект по трем критериям.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРОГРАММА ДЛЯ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДЛЯ ВЫБОРА ОБЪЕКТА СЗИ

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd

x = [0, 0.3, 0.35, 0.5, 0.55, 1]
y = [0, 0, 1, 1, 0, 0]
plt.plot(x, y)
plt.grid(True)
plt.show()

KO = np.array([
    [0.475, 0.175, 0.392],
    [0.25, 0.6, 0.2],
    [0.225, 0.3, 0.425]
])

W = np.array([
    [0, 0, 1],
    [0, 1, 0],
    [1, 0, 0],
    [0, 0.5, 0.5],
    [0.5, 0, 0.5],
    [0.5, 0.5, 0],
])

KO2 = (np.max(KO) - KO) / (np.max(KO) - np.min(KO))
KO2[0, 1] = 1
KO2[1, 1] = 0
print("Нормализованная таблица 3x3:\n", KO2)

Q = np.zeros((6, 3))
for i in range(6):
    for j in range(3):
        Q[i, j] = sum(KO2[j] * W[i])

def plot_otr(QQ):
    std = QQ.std(ddof=0)
    print("\nОтклонение std\n", std)
    mean = QQ.mean()
    print("\nМат ожидание mean\n", mean)
```

```
    gr = pd.DataFrame({'ot': mean - std, 'do': mean + std})
    plt.figure(figsize=(5, 1.5))
    plt.xlim(0, 1)
    plt.plot(gr.loc[0], [0, 0])
    plt.text(mean[0], 0, 'Q1')
    plt.plot(gr.loc[1], [1, 1])
    plt.text(mean[1], 1, 'Q2')
    plt.plot(gr.loc[2], [2, 2])
    plt.text(mean[2], 2, 'Q3')
    plt.show()

plot_otr(pd.DataFrame(Q))

WW = W[np.where(W[:, 0] < W[:, 1])]
print("\nWW\n", WW)

Q = np.zeros((len(WW), 3))
print("\nh\n", Q)
for i in range(len(WW)):
    for j in range(3):
        Q[i, j] = sum(KO2[j] * WW[i])
print("\nh\n", Q)
plot_otr(pd.DataFrame(Q))
```