Студент: Киреев Константин
Группа: 8383
Вариант: 8
Дата: 8 февраля 2021 г.

Статистический анализ

Индивидуальное домашнее задание №1

Плотность двумерного нормального распределения имеет вид:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = C \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(4x^2 - 4xy + 7y^2 - 16x - 16y + 40)\right\}$$

Задача 1. *Вычислить вектор мат. ожиданий и ковариационные характеристики данного случайного вектора.*

Решение. Обозначим степень экспоненты через $q(x,y)$. Тогда:

$$q(x,y) = (4x^2 - 4xy - 16x) + 7y^2 - 16y + 40 = ((2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot (y+4) + (y^2 + 8y + 16)) +$$
$$+ 7y^2 - y^2 - 16y + 40 - 8y - 16 = (2x-y-4)^2 + 6y^2 - 24y + 24 = (2x-y-4)^2 + 6(y^2 - 4y + 4) =$$
$$= \underline{(2x - y - 4)^2 + 6(y-2)^2} = ([2x-6] - [y-2])^2 + 6(y-2)^2 = 4(x-3)^2 - 4(x-3)(y-2) +$$
$$+ (y-2)^2 + 6(y-2)^2 = 4(x-3)^2 + 2 \cdot (-2) \cdot (x-3)(y-2) + 7(y-2)^2.$$

Получаем: $\mathbb{E}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 \\ 2\end{pmatrix}$,

$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix}4 & -2 \\ -2 & 7\end{pmatrix}$, $\Sigma = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}7 & 2 \\ 2 & 4\end{pmatrix}$,

$\text{cov}(\xi,\xi) = \mathbb{D}\xi = \sigma_\xi^2 = \dfrac{7}{24}$,

$\text{cov}(\eta,\eta) = \mathbb{D}\eta = \sigma_\eta^2 = \dfrac{1}{6}$,

$\text{cov}(\xi,\eta) = \dfrac{1}{12}$, $\rho_{\xi,\eta} = \dfrac{\text{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D_\xi D_\eta}} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{\sqrt{7}}{12}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$,

$C = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sqrt{\det \Sigma}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\pi}$.

□

Задача 2. *Найти аффинное преобразование, переводящее исходный случайный вектор в стандартный нормальный.*

Решение.

$$\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & \sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1 - 3\\ \xi_2 - 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\xi_1 - \xi_2 - 4\\ \sqrt{6}\xi_2 - 2\sqrt{6}\end{pmatrix};$$

$$B\Sigma B^T = I \Rightarrow \frac{1}{24}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & \sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & \sqrt{6}\end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix}12 & 0\\ 2\sqrt{6} & 4\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & \sqrt{6}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix}24 & 0\\ 0 & 24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix} \sim \mathscr{N}(0, I).$$

□

Задача 3. *Найти ортогональное преобразование, переводящее соответствующий центрированный случайный вектор в вектор с независимыми компонентами.*

Решение.

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 7\end{pmatrix}$$

$$\det\left(\Sigma^{-1} - \lambda I\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix}4-\lambda & -2\\ -2 & 7-\lambda\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)(7-\lambda) - 4 = 0; 28 - 4\lambda - 7\lambda + \lambda^2 - 4 = 0;$$

$$\lambda^2 - 11\lambda + 24 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 3}; \underline{\lambda_2 = 8}$$

$$\lambda_1 = 3: \begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\lambda_2 = 8: \begin{pmatrix}-4 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} \text{ – матрица ортогональных преобразований}$$

$$\mathbb{E}\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix} = Q\cdot\mathbb{E}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}8\\ -1\end{pmatrix}$$

$$Q\Sigma Q^T; \Sigma = \frac{1}{24}\begin{pmatrix}7 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix};$$

$$Q\Sigma Q^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{24}\begin{pmatrix}7 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{24}\begin{pmatrix}16 & 8\\ 3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathscr{N} \left(\begin{pmatrix} 8/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

$\square$

Задача 4. *Вычислить характеристики совместного распределения случайного вектора (-5ξ - 4η, 4ξ - 4η) и записать его плотность.*

Решение.

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\xi - 4\eta \\ 4\xi - 4\eta \end{pmatrix}$$

$x \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma); Y = BX; Y \sim \mathcal{N}(B\mu, B\Sigma B^T);$

$$\mathbb{E} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \Sigma = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{E} \begin{bmatrix} -5\xi - 4\eta \\ 4\xi - 4\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_Y = B\Sigma B^T = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} -43 & -26 \\ 20 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 319 & -68 \\ -68 & 112 \end{bmatrix}$$

$\det(\Sigma_Y) = 54$

$$\Sigma_Y^{-1} = \frac{1}{1296} \begin{pmatrix} 112 & 68 \\ 68 & 319 \end{pmatrix}$$

$$p_{\zeta_1,\zeta_2}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{54}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + 23 \\ y - 4 \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{1296} \begin{pmatrix} 112 & 68 \\ 68 & 319 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + 23 \\ y - 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Обозначим степень экспоненты как $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot q(x, y)$. Тогда:

$$q(x, y) = \frac{1}{1296} \cdot \begin{pmatrix} x + 23 & y - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 112 & 68 \\ 68 & 319 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 23 \\ y - 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{1296}\right) \cdot \begin{pmatrix} 112(x + 23) + 68(y - 4) & 68(x + 23) + 319(y - 4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 23 \\ y - 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{1296}\right) \cdot \left(112(x + 23)^2 + 136(x + 23)(y - 4) + 319(y - 4)^2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1296}\right) \cdot (112x^2 + 136xy + 319y^2 + 4608x + 576y + 51480) =$$

$$= \frac{7}{81}x^2 + \frac{17}{162}xy + \frac{319}{1296}y^2 + \frac{32}{9}x + \frac{4}{9}y + 40 \Rightarrow$$

$$p_{\zeta_1,\zeta_2}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{54}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{81}x^2 + \frac{17}{162}xy + \frac{319}{1296}y^2 + \frac{32}{9}x + \frac{4}{9}y + 40 \right) \right\}$$

$\square$

Задача 5. *Найти условное распределение ξ при условии η.*

Решение.

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = C \cdot \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(4x^2 - 4xy + 7y^2 - 16x - 16y + 40)\right\}$$

$$p_{\xi|\eta=y} = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} = \frac{C \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(4x^2 - 4xy + 7y^2 - 16x - 16y + 40)\right\}}{C_1(y)} =$$

$$= C_2(y) \cdot \exp\{-\tfrac{1}{2}(4x^2 - 16x - 4xy) \underbrace{-\frac{1}{2}(7y^2 - 16y + 40)}_{C_3(y)}\} =$$

$$= C_2(y) \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1/4}\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \left(\frac{2}{4}y + \frac{8}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}y + 2\right)^2 \right) + \right.$$

$$\left. \underbrace{+\frac{1}{2 \cdot 1/4} \cdot \left(\frac{1}{2}y + 2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(7y^2 - 16y + 40\right)}_{C_3(y)} \right\} =$$

$$= C_4(y) \cdot \exp\left\{ \frac{-\left(x - \left(\frac{1}{2}y + 2\right)\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right\}; \mu = \tfrac{1}{2}y + 2; \sigma = \tfrac{1}{2};$$

$$\mathbb{E}(\xi|\eta = y) = \frac{1}{2}\eta + 2; \mathbb{D}(\xi|\eta = y) = \frac{1}{4}; \sigma = \frac{1}{2};$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}};$$

$$p_{\xi|\eta=y}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \exp\left\{ \frac{-\left(x - \left(\frac{1}{2}y + 2\right)\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right\};$$

$\square$