МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №1
по дисциплине «Теория принятия решений»
Тема: Принятие решений в матричных играх

Студентка гр. 7381	________________	Алясова А.Н.
Преподаватель	________________	Попова Е.В.

Санкт-Петербург
2021

Цель работы.

Изучение различных инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе матричных игр.

Основные теоретические положения.

Рассмотрим простейшую математическую модель конечной конфликтной ситуации, в которой имеется два участника и выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется антагонистической игрой двух лиц с нулевой суммой. Игра состоит из двух ходов: игрок А выбирает одну из возможных $a_i,\ i = 1..m$ стратегий, а игрок Б выбирает одну из возможных стратегий $b_j,\ j = 1..n$. Каждый выбор производится при полном незнании выбора соперника. В результате выигрыш игроков составит соответственно a_{ij} и $-a_{ij}$. Цель игрока А – максимизировать величину a_{ij}, а игрока Б – минимизировать эту величину. Критерием принятия решения является функция, выражающая предпочтение лица, принимающего решение, и определяющая правило, по которому выбирается приемлемый или оптимальный вариант решения.

Матрица, составленная из величин $a_{ij},\ i = 1..m,\ j = 1..n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Матрица (1) называется платежной матрицей, или матрицей игры. Каждый элемент платежной матрицы $a_{ij},\ i = 1..m,\ j = 1..n$, равен выигрышу А (проигрышу Б), если он выбрал стратегию $A_i,\ i = 1..m$, а игрок Б выбирал стратегию $B_j,\ j = 1..n$.

Задача каждого из игроков – найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший доход.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Если игрок А выбрал стратегию $A_i,\ i = 1..m$, то в худшем случае (например, если его ход известен Б) он получит выигрыш $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$. Предвидя такую возможность, игрок А должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш.

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \{\min_j \alpha_{ij}\}. \tag{2}$$

Представленная в (2) величина α – гарантированный выигрыш игрока А называется нижней ценой игры. Стратегия A_i, обеспечивающая получение выигрыша α, называется максиминной. Если первый игрок будет придерживаться своей максиминной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае выиграет не меньше α. Аналогично определяется наилучшая стратегия второго игрока. Игрок Б при выборе стратегии B_j, $j = 1..n$, в худшем случае получит проигрыш $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$. Он выбирает стратегию B_j при которой его проигрыш будет минимальным и составит

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \{\max_i \alpha_{ij}\}. \tag{3}$$

Представленная в (3) величина β – гарантированный проигрыш игрока Б называется верхней ценой игры. Стратегия β_j, обеспечивающая получение проигрыша β, называется минимаксной. Если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае проиграет не больше β. Фактический выигрыш игрока А (проигрыш игрока Б) при разумных действиях партнеров ограничен верхней и нижней ценой игры. Для матричной игры справедливо неравенство $\alpha \leq \beta$. Если $\alpha = \beta = \nu$, т.е.

$$\max_i \left\{\min_j \alpha_{ij}\right\} = \min_j \max_i \alpha_{ij} = \nu, \tag{4}$$

то выигрыш игрока А (проигрыш игрока Б) определяется числом ν. Оно называется ценой игры.

В соответствии с (4), если $\alpha = \beta = \nu$, то такая игра называется игрой с седловой точкой. Элемент матрицы α_{ij}, соответствующий паре оптимальных стратегий $(A_i,\ B_j)$, называется седловой точкой матрицы. Этот элемент является ценой игры.

Седловой точке соответствуют оптимальные стратегии игроков. Их совокупность – решение игры, которое обладает свойством: если один из игроков придерживается оптимальной стратегии, то второму отклонение от своей оптимальной стратегии не может быть выгодным. Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$ и $\alpha \leq \nu \leq \beta$ то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами.

Сложная стратегия, состоящая в случайном применении всех стратегий с определенными частотами, называется смешанной.

Постановка задачи.

Используя инструментальные средства компьютерной алгебры решить матричные задачи.

Вариант.

Вариант 30.

Выполнение работы.

1) С помощью инструментального средства определить границы выигрыша и наличие седловой точки для матрицы C_1. Матрица C_1 представлена в (5).

$$C_1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Результат выполнения программы, представленной в приложении А, показан на рис. 1.

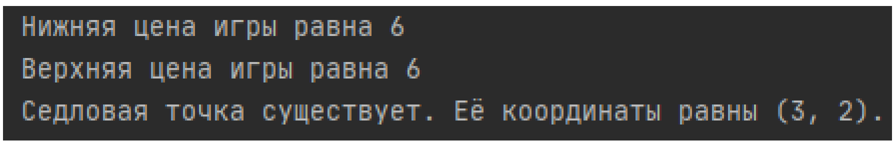

Рисунок 1 – Результат выполнения программы для матрицы C_1

2) Графически и аналитически решить матричную игру 2×2 для матрицы C_2. Матрица C_2 представлена в (6).

$$C_2 = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Решим данную задачу аналитически.

Требуется проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю (7) и верхнюю (8) цену игры.

$$\alpha = \max_i \{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(-2, 3)\} = 3 \tag{7}$$

$$\beta = \min_j \{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(9, 6)\} = 6 \tag{8}$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры ν. Известно, что $3 \leq \nu \leq 6$.

В таком случае игрок А должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить максимальный средний выигрыш. Аналогично, игрок Б должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать средний выигрыш игрока А.

Для этого запишем две системы (9) и (10) уравнений и решим их.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 9p_1 + 3p_2 = \nu \\ -2p_1 + 6p_2 = \nu \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{30}{7} \\ p_1 = \dfrac{3}{14} \\ p_2 = \dfrac{11}{14} \end{cases} \tag{9}$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 9q_1 - 2q_2 = \nu \\ 3q_1 + 6q_2 = \nu \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{30}{7} \\ q_1 = \dfrac{4}{7} \\ q_2 = \dfrac{3}{7} \end{cases} \tag{10}$$

Оптимальная стратегия игрока А: $P = \left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14}\right)$.

Оптимальная стратегия игрока Б: $Q = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$.

Цена игры: $\nu = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$.

Решим данную задачу графически. Результаты представлены на рис. 2 и 3.

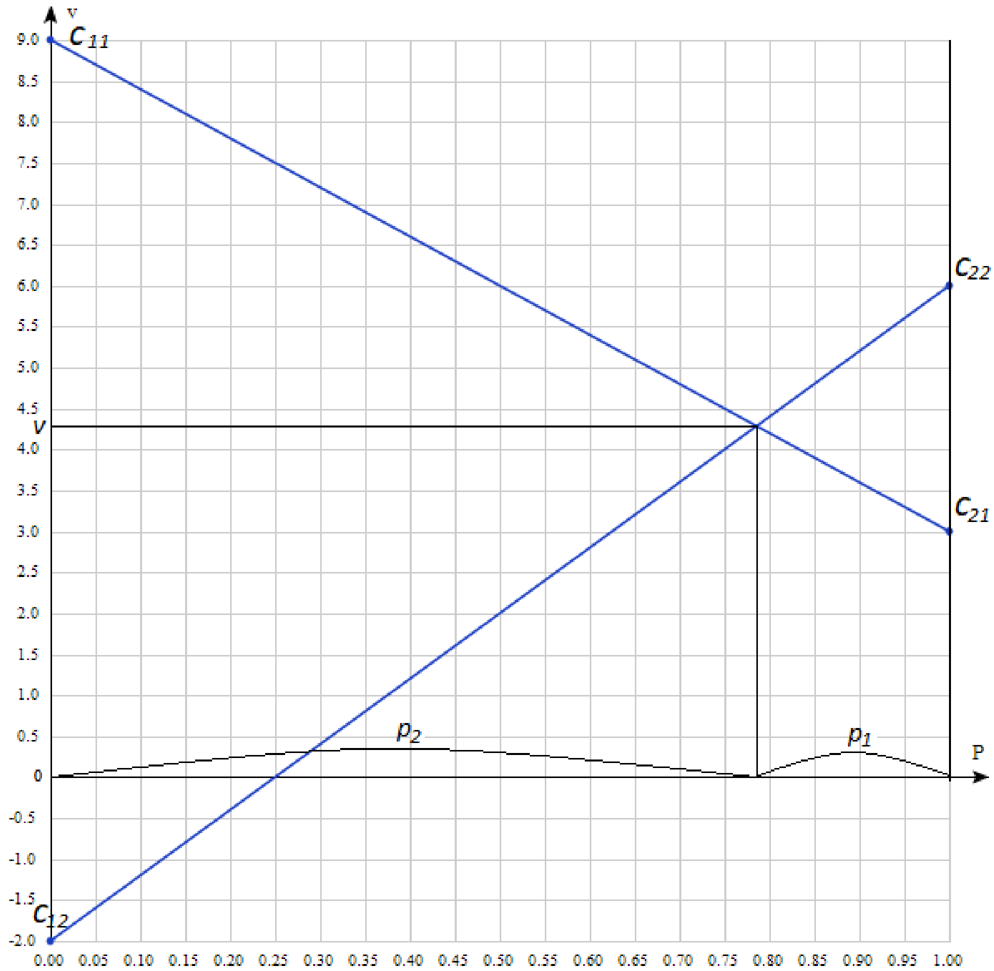

Рисунок 2 – Гарантированный выигрыш первого игрока в матрице платежей C_2

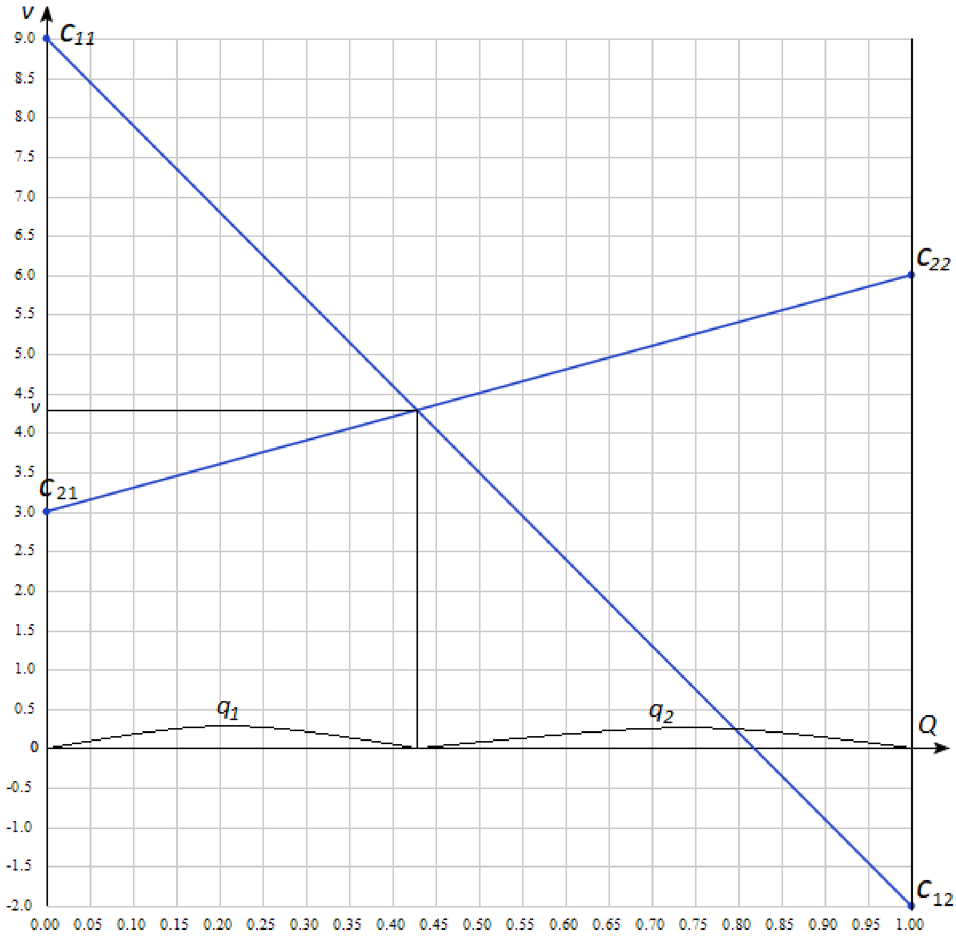

Рисунок 3 – Гарантированный проигрыш второго игрока в матрице платежей C_2

По рис. 2 и 3 можно определить, что стратегии игроков А и Б приблизительно равны $P = \left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14}\right), Q = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$, цена игры – $\nu = 4\frac{2}{7}$, $\alpha = 3, \beta = 6$. Так как $\alpha \neq \beta$, можем сделать вывод о том, что седловой точки не существует.

3) Графически и аналитически решить матричную игру 2×N для матрицы C_3. Матрица C_3 представлена в (11).

$$C_3 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 7 \\ 3 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Решим данную задачу аналитически.

Требуется проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Результат выполнения программы на матрице C_3, представленной в приложении А, показан на рис. 4.

```
Нижняя цена игры равна 5
Верхняя цена игры равна 5
Седловая точка существует. Её координаты равны (1, 1).
```

Рисунок 4 – Результат выполнения программы для матрицы C_3

Решим данную задачу графически. Результат представлен на рис. 5.

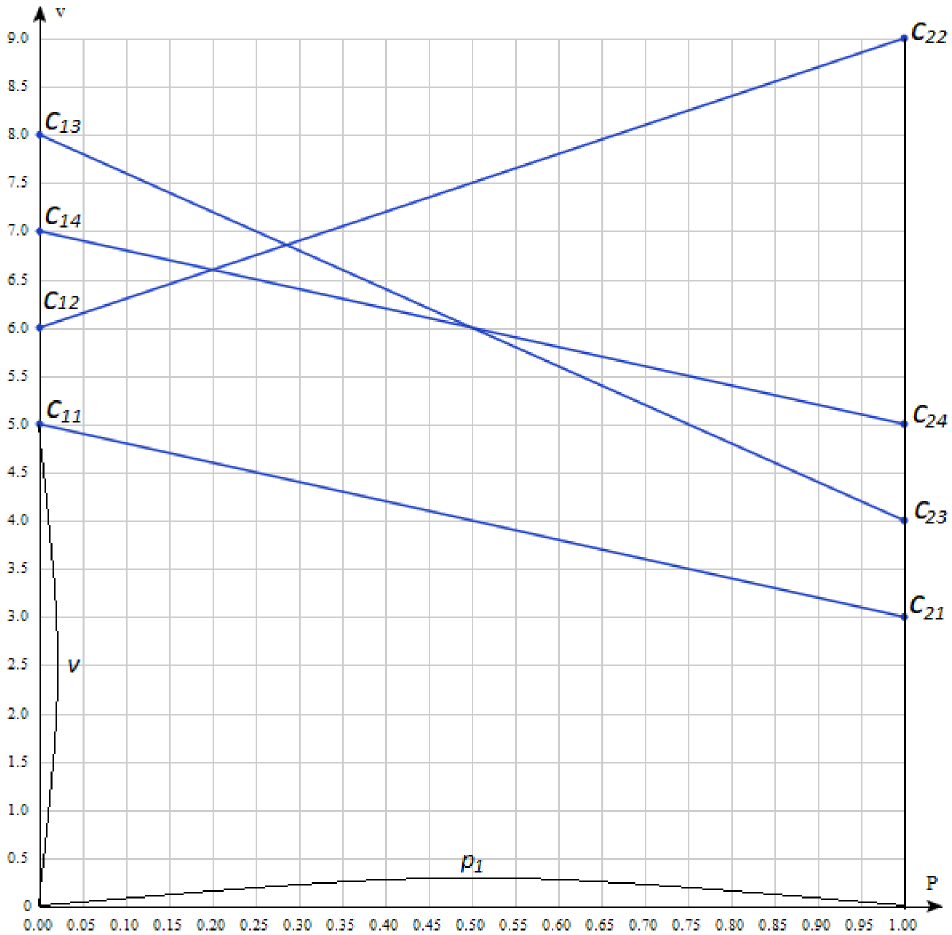

Рисунок 5 – Гарантированный выигрыш первого игрока при различном выборе смешанной стратегии

По рис. 5 можно определить цена игры $\nu = 5, \alpha = 5,\ \beta = 5$. Так как $\alpha = \beta$, можем сделать вывод о том, что седловая точка существует.

4) Графически и аналитически решить матричную игру $M{\times}2$ для матрицы C_4. Матрица C_4 представлена в (12).

$$C_4 = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 4 \\ 3 & 8 \\ 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Решим данную задачу аналитически.

Требуется проверить, есть ли седловая точка для исходной платежной матрицы. В случае если платежная матрица имеет седловую точку, необходимо выписать решение игры в чистых стратегиях.

Найдем нижнюю (13) и верхнюю (14) цену игры.

$$\alpha = \max_i\{\min_j \alpha_{ij}\} = \max\{(4,4,3,2,2)\} = 4 \tag{13}$$

$$\beta = \min_j\{\max_i \alpha_{ij}\} = \min\{(5,9)\} = 5 \tag{14}$$

Получаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит нет седловой точки и решение в чистых стратегиях не существует.

Найдем цену игры ν. Известно, что $4 \leq \nu \leq 5$.

В таком случае игрок А должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить максимальный средний выигрыш. Аналогично, игрок Б должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать средний выигрыш игрока А.

Для этого запишем две системы (15) и (17) уравнений.

Для игрока А:

$$\begin{cases} 4p_1 + 5p_2 + 3p_2 + 2p_2 + 3p_2 = \nu \\ 9p_1 + 4p_2 + 8p_2 + 5p_2 + 2p_2 = \nu \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases} \tag{15}$$

Используя инструментальное средство Maxima, найдём симплекс-методом оптимальные стратегии для игроков А и Б. Ввод системы неравенств для игрока А в программу Maxima представлен на рис. 6.

```
(%i5) load(simplex);
      W:1·x_1+1·x_2+1·x_3+1·x_4+1·x_5;
      e1:4·x_1+5·x_2+3·x_3+2·x_4+3·x_5>=1;
      e2:9·x_1+4·x_2+8·x_3+5·x_4+2·x_5>=1;
      minimize_lp(W,[e1,e2]),nonegative_lp=true;
```

Рисунок 6 – Ввод системы неравенств для игрока А

Полученное с помощью Maxima решение представлено на рис. 7.

(%o2) $x_5+x_4+x_3+x_2+x_1$

(%o3) $3\,x_5+2\,x_4+3\,x_3+5\,x_2+4\,x_1\geq 1$

(%o4) $2\,x_5+5\,x_4+8\,x_3+4\,x_2+9\,x_1\geq 1$

(%o5) $[\frac{6}{29},[x_5=0,x_4=0,x_3=0,x_2=\frac{5}{29},x_1=\frac{1}{29}]]$

Рисунок 7 – Решение вектора X симплекс-методом матрицы C_4

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{29}{6} \\ p_1 = \dfrac{1}{29} \\ p_2 = \dfrac{5}{29} \\ p_3 = 0 \\ p_4 = 0 \\ p_5 = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Для игрока Б:

$$\begin{cases} 4q_1 + 9q_2 = \nu \\ 5q_1 + 4q_2 = \nu \\ 3q_1 + 8q_2 = \nu \\ 2q_1 + 5q_2 = \nu \\ 3q_1 + 2q_2 = \nu \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \tag{17}$$

Ввод системы неравенств и расчет вектора Y для игрока Б с помощью программы Maxima представлен на рис. 8.

```
(%i18) load(simplex);
       W:1·y_1+1·y_2;
       e1:4·y_1+9·y_2<=1;
       e2:5·y_1+4·y_2<=1;
       e3:3·y_1+8·y_2<=1;
       e4:2·y_1+5·y_2<=1;
       e5:3·y_1+2·y_2<=1;
       maximize_lp(W,[e1,e2,e3,e4,e5]),nonegative_lp=true;
```

(%o12) y_2+y_1

(%o13) $9\,y_2+4\,y_1\le 1$

(%o14) $4\,y_2+5\,y_1\le 1$

(%o15) $8\,y_2+3\,y_1\le 1$

(%o16) $5\,y_2+2\,y_1\le 1$

(%o17) $2\,y_2+3\,y_1\le 1$

(%o18) $[\frac{6}{29},[y_2=\frac{1}{29},y_1=\frac{5}{29}]]$

Рисунок 8 – Решение вектора Y симплекс-методом матрицы C_4

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{29}{6} \\ q_1 = \dfrac{1}{29} \\ q_2 = \dfrac{5}{29} \end{cases} \tag{18}$$

Оптимальная стратегия игрока А: $P = X \cdot \nu = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0, 0, 0\right)$.

Оптимальная стратегия игрока Б: $Q = Y \cdot \nu = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Цена игры: $\nu = \frac{29}{6}$.

Решим данную задачу графически. Результат представлен на рис. 9.

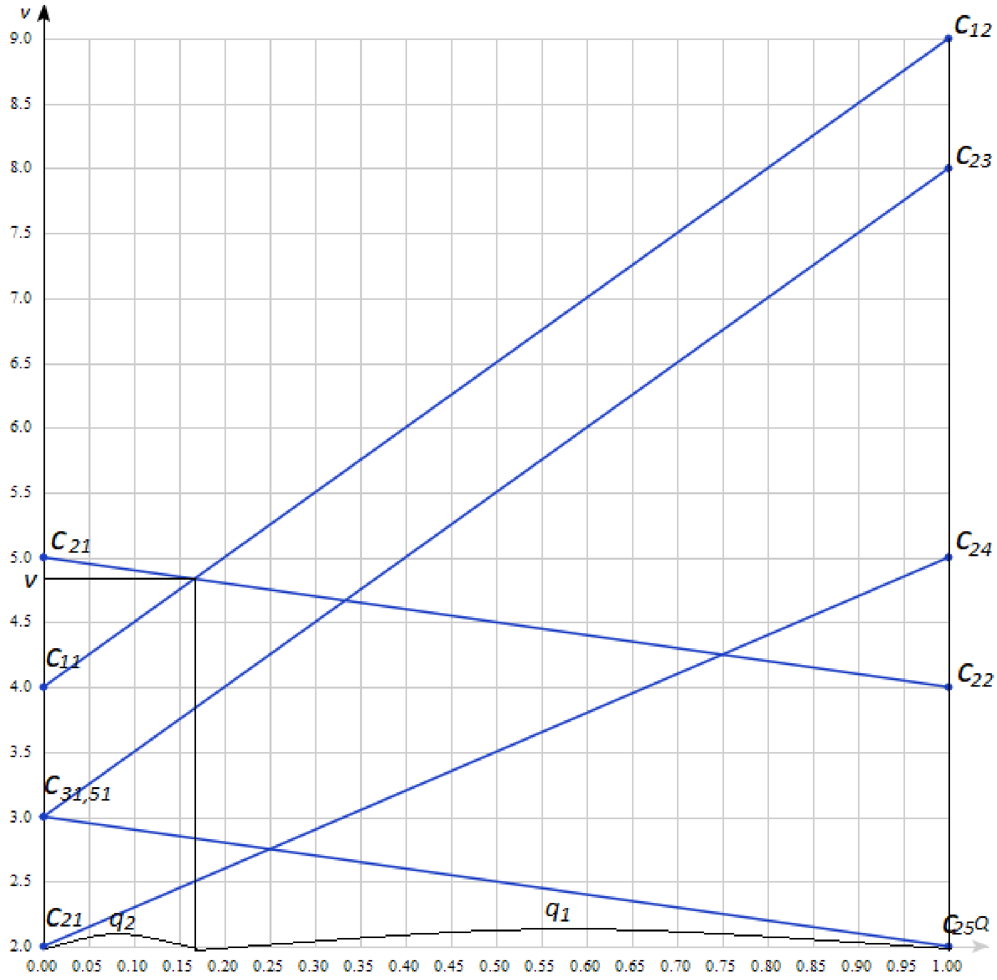

Рисунок 9 – Гарантированный проигрыш второго игрока при различном выборе смешанной стратегии

Исходя из рис. 9 можно определить, что смешанная стратегия игрока Б приблизительно равна $Q = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$, цена игры – $\nu = 4{,}8 \approx \frac{29}{6}, \alpha = 4, \beta = 5$. Так как $\alpha \neq \beta$, можем сделать вывод о том, что седловой точки не существует. Второму игроку заведомо невыгодны стратегии 3, 4 и 5.

5) С помощью симплекс-метода решить матричную игру $M \times N$ для матрицы C_5. Матрица C_5 представлена в (19).

$$C_5 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 12 \\ 3 & 7 & 8 \\ 12 & 4 & 6 \end{pmatrix} \tag{19}$$

С помощью системы компьютерной алгебры «Maxima» симплекс-методом вычислены векторы X и Y (см. рис. 10, 11).

```
(%i38) load(simplex);
       W:1·x_1+1·x_2+1·x_3+1·x_4+1·x_5;
       e1:6·x_1+8·x_2+4·x_3+3·x_4+12·x_5>=1;
       e2:3·x_1+5·x_2+9·x_3+7·x_4+4·x_5>=1;
       e3:7·x_1+1·x_2+12·x_3+8·x_4+6·x_5>=1;
       minimize_lp(W,[e1,e2,e3]),nonegative_lp=true;
```

(%o34) $x_5+x_4+x_3+x_2+x_1$

(%o35) $12\,x_5+3\,x_4+4\,x_3+8\,x_2+6\,x_1\geq 1$

(%o36) $4\,x_5+7\,x_4+9\,x_3+5\,x_2+3\,x_1\geq 1$

(%o37) $6\,x_5+8\,x_4+12\,x_3+x_2+7\,x_1\geq 1$

(%o38) $\left[\frac{13}{92},\left[x_5=\frac{5}{92},x_4=0,x_3=\frac{2}{23},x_2=0,x_1=0\right]\right]$

Рисунок 10 – Решение вектора X симплекс-методом матрицы C_5

```
(%i63) load(simplex);
       W:1·y_1+1·y_2+1·y_3;
       e1:6·y_1+3·y_2+7·y_3<=1;
       e2:8·y_1+5·y_2+1·y_3<=1;
       e3:4·y_1+9·y_2+12·y_3<=1;
       e4:3·y_1+7·y_2+8·y_3<=1;
       e5:12·y_1+4·y_2+6·y_3<=1;
       maximize_lp(W,[e1,e2,e3,e4,e5]),nonegative_lp=true;
```

(%o20) $y_3+y_2+y_1$

(%o21) $7\,y_3+3\,y_2+6\,y_1\leq 1$

(%o22) $y_3+5\,y_2+8\,y_1\leq 1$

(%o23) $12\,y_3+9\,y_2+4\,y_1\leq 1$

(%o24) $8\,y_3+7\,y_2+3\,y_1\leq 1$

(%o25) $6\,y_3+4\,y_2+12\,y_1\leq 1$

(%o26) $\left[\frac{13}{92},\left[y_3=0,y_2=\frac{2}{23},y_1=\frac{5}{92}\right]\right]$

Рисунок 11 – Решение вектора Y симплекс-методом матрицы C_5

Опираясь на полученные данные, можно найти цену игры (20) и оптимальные смешанные стратегии игроков А (21) и Б (22):

$$\nu = \frac{1}{(13/92)} = \frac{92}{13} \tag{20}$$

$$P = X \cdot \nu = \left(0, 0, \frac{8}{13}, 0, \frac{5}{13} \right) \tag{21}$$

$$Q = Y \cdot \nu = (\frac{5}{13}, \frac{8}{13}, 0) \tag{22}$$

Выводы.

В ходе выполнения практической работы было реализовано инструментальное средство для нахождения нижней и верхней цен игры и для нахождения координат седловой точки на языке программирования Python, а также были получены навыки работы с системой компьютерной алгебры «Maxima».

Для нахождения оптимальных стратегий в матричных играх были изучены метод нахождения границ выигрыша и седловой точки. При её существовании матричная игра решается в чистых стратегиях. В случае, когда седловой точки не существует, матричная игра решается в смешанных стратегиях.

При решении матричных игр были применены графический и аналитический методы нахождения оптимальных смешанных стратегий, а также был применён симплекс-метод. Решения матричных игр обоими способами дали одинаковый результат, что может свидетельствовать о правильности нахождения оптимальных смешанных стратегий.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРОГРАММА ПОИСКА СТАЦИОНАРНОЙ ТОЧКИ

```
import numpy as np


a = np.array([[5, 6, 8, 7], [3, 9, 4, 5]])

amin = a.min(axis=1)
bmax = a.max(axis=0)

alpha = max(amin)
beta = min(bmax)

print("Нижняя цена игры равна " + str(alpha))
print("Верхняя цена игры равна " + str(beta))

if alpha == beta:
    print("Седловая точка существует.", end =" ")

for i in range(np.size(amin)):
    for j in range(np.size(bmax)):
        if amin[i]==bmax[j]:
            print("Её координаты равны (" + str(i+1) +", " + str(j+1) +
").")
```