МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра АМ

ОТЧЕТ

по домашнему заданию №1

По дисциплине «Элементы функционального анализа»

Тема: Вычисление нормы заданной выпуклым, центрально симметричным многогранником

Студент гр. 8383 ____________________ Киреев К.А.

Преподаватель ____________________ Коточигов А.М.

Санкт-Петербург

2021

Задание

Вариант 8

- Даны шесть точек:

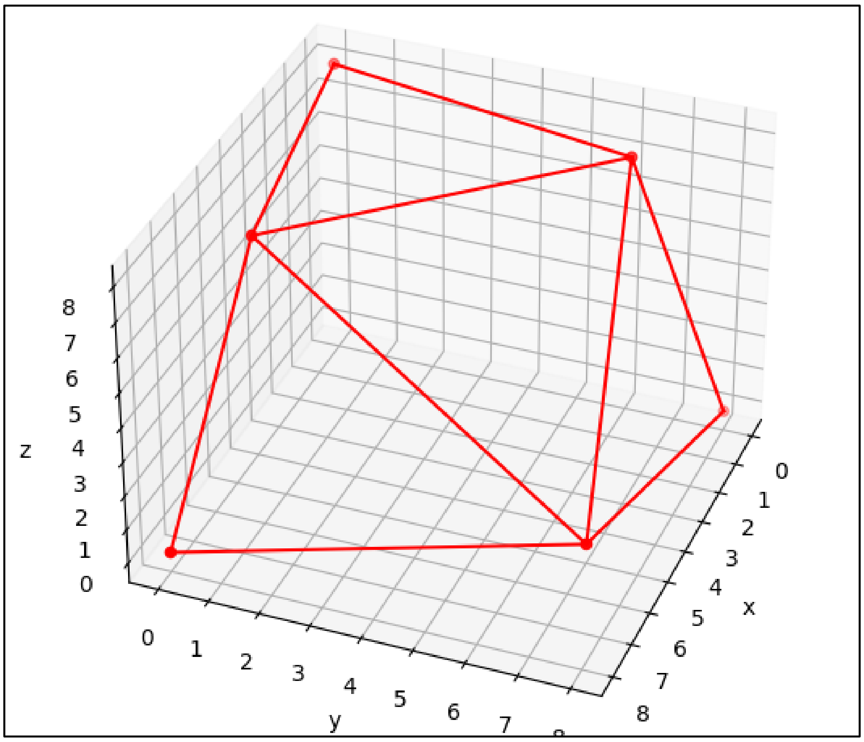
  A (5, 7, 0), B (4, 0, 6), H (0, 6, 7), AA (8, 0, 0), BB (0, 0, 0), HH (0, 0, 8)

- Проверить неравенство треугольника для векторов V_1 (-4, 8, -7), V_2 (7, -8, -5)
- Найти набольшее и наименьшее значение евклидовой нормы на векторах, имеющих норму *1* в норме, порожденной многогранником.

Выполнение работы

Построение многогранника

Нарисуем поверхность, образуемую вершинами в первом октанте.

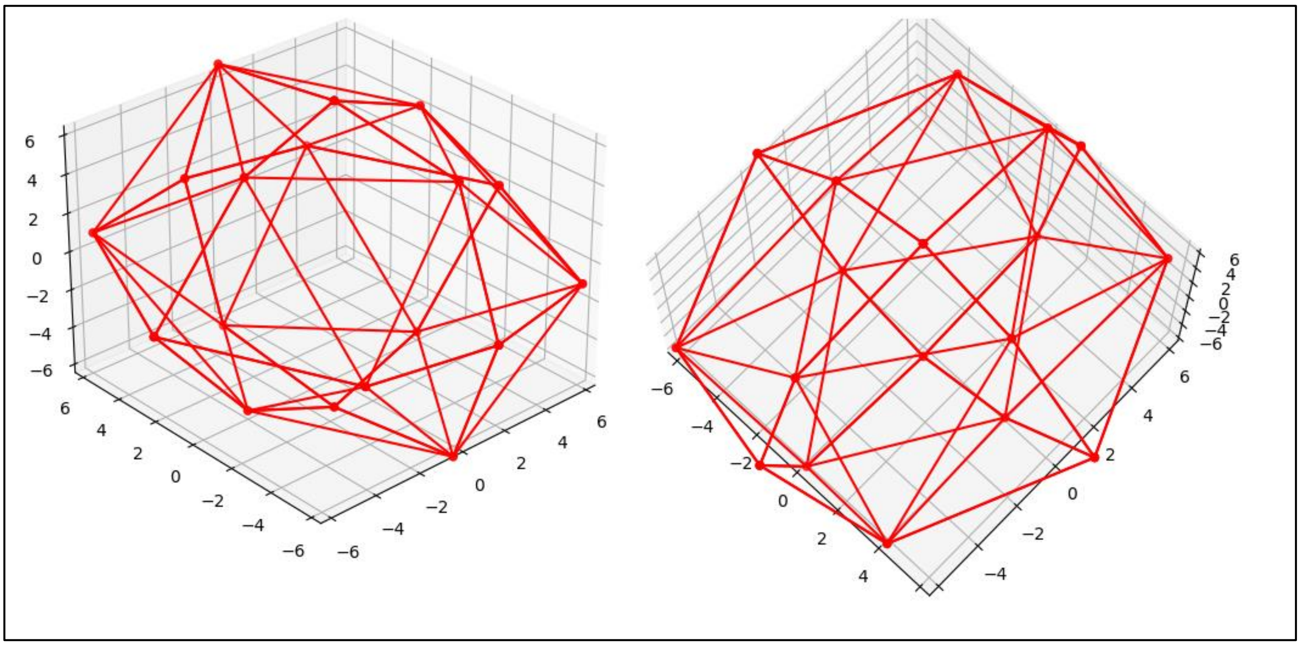


Для построения многоугольника дополним множество вершин W_1 (6 вершин) путем следующих операций:

- Отразим множество W_1 относительно оси Y и получим множество W_2 из 12 вершин. $W_2 = W_1(x, y, z) \cup W_1(x, -y, z)$
- Отразим множество W_2 относительно оси X и получим множество W_3 из 24 вершин, представляющее поверхность в полупространстве ((x, y, z): z > 0). $W_3 = W_2(x, y, z) \cup W_2(-x, y, z)$
- Отразим множество W_3 относительно оси Z и получим множество W из 48 вершин, образующее замкнутую, симметричную относительно координатных плоскостей поверхность. $W = W_3(x, y, z) \cup W_3(x, y, -z)$

Многогранник W должен быть выпуклым, но точка BB, а также точки, полученные при ее отражении, оказываются «вдавленными» в многогранник. Чтобы многогранник был выпуклым, необходимо, чтобы ордината этой точки была не меньше наибольшей из ординат других точек, поэтому заменим точку BB на точку (0, 8, 0).

Был получен набор вершин W из 48 точек. Отобразим полученную поверхность.



Вычисление нормы

Проведем вектор V_1. Для V_1 был выбран трехгранный угол OABH в октанте, в котором находится точка ($x < 0$, $y > 0$, $z < 0$). На графике ниже видно, что точка находится внутри трехгранного угла.

Построим биортогональный базис для OA, OB, OH:

$$OA_1 = OB \times OH = (36, -28, -24)$$
$$OB_1 = OA \times OH = (-49, -35, -30)$$
$$OH_1 = OA \times OB = (-42, -30, 28)$$

$$OA' = \frac{1}{(OA_1, OA)} OA_1 = (-0.09574468\ , 0.07446809, 0.06382979)$$

$$OB' = \frac{1}{(OB_1, OB)} OB_1 = (-0.13031915, -0.09308511, -0.07978723)$$

$$OH' = \frac{1}{(OH_1, OH)} OH_1 = (0.11170213, 0.07978723, -0.07446809)$$

Тогда можем вычислить коэффициенты k_1, k_2, k_3 в формуле:

$$OV_1 = k_1 OA + k_2 OB + k_3 OH$$

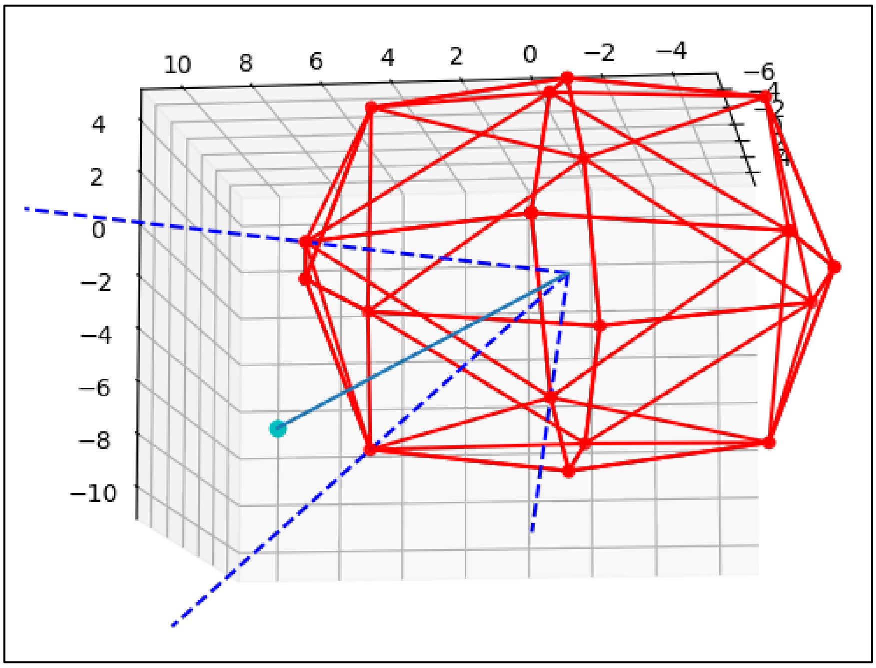
$$k_1 = (OV_1, OA') = 0.531,$$

$$k_2 = (OV_1, OB') = 0.335,$$

$$k_3 = (OV_1, OH') = 0.712$$

Тогда норма для точки V_1:

$$||V_1|| = k_1 + k_2 + k_3 = 1.577$$



Проведем вектор V_2. Для V_2 был выбран трехгранный угол OABH в октанте, в котором находится точка (x > 0, y < 0, z < 0). На графике ниже видно, что точка находится внутри трехгранного угла.

Построим биортогональный базис для OA, OB, OH:

$$OA_1 = OB \times OH = (-36, 28, -24)$$

$$OB_1 = OA \times OH = (49, 35, -30)$$

$$OH_1 = OA \times OB = (42, 30, 28)$$

$$OA' = \frac{1}{(OA_1, OA)} OA_1 = (0.09574468\,, -0.07446809, 0.06382979)$$

$$OB' = \frac{1}{(OB_1, OB)} OB_1 = (0.13031915, 0.09308511, -0.07978723)$$

$$OH' = \frac{1}{(OH_1, OH)} OH_1 = (-0.11170213, -\,0.07978723, -0.07446809)$$

Тогда можем вычислить коэффициенты k_1, k_2, k_3 в формуле:

$$OV_2 = k_1 OA + k_2 OB + k_3 OH$$

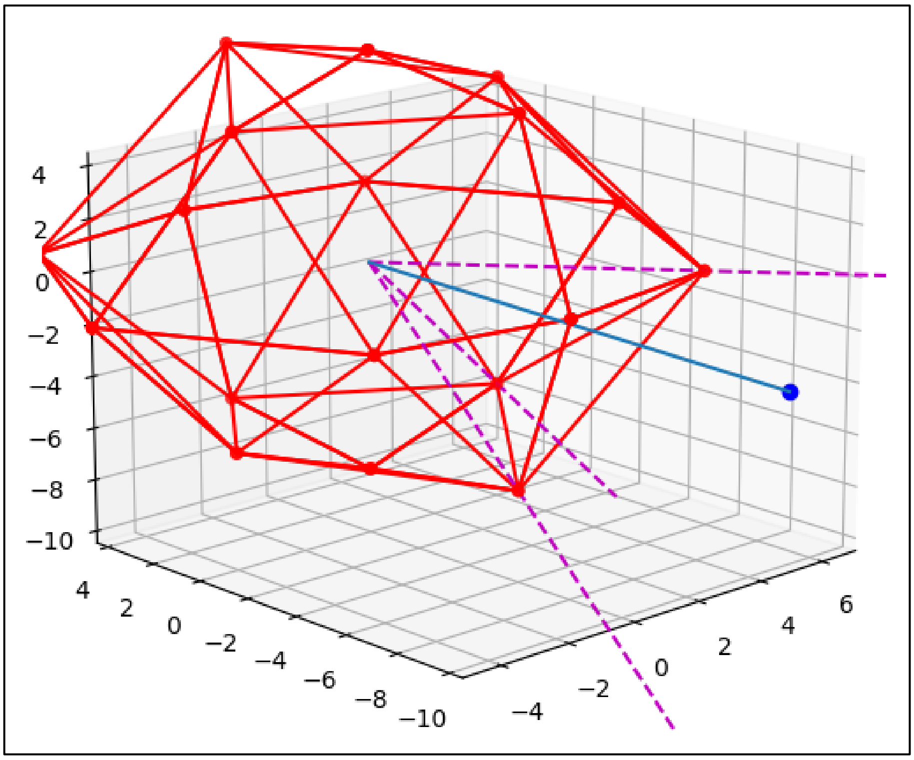
$$k_1 = (OV_2, OA') = 0.946,$$

$$k_2 = (OV_2, OB') = 0.566,$$

$$k_3 = (OV_2, OH') = 0.228$$

Тогда норма для точки V_2:

$$||V_2|| = k_1 + k_2 + k_3 = 1.74$$



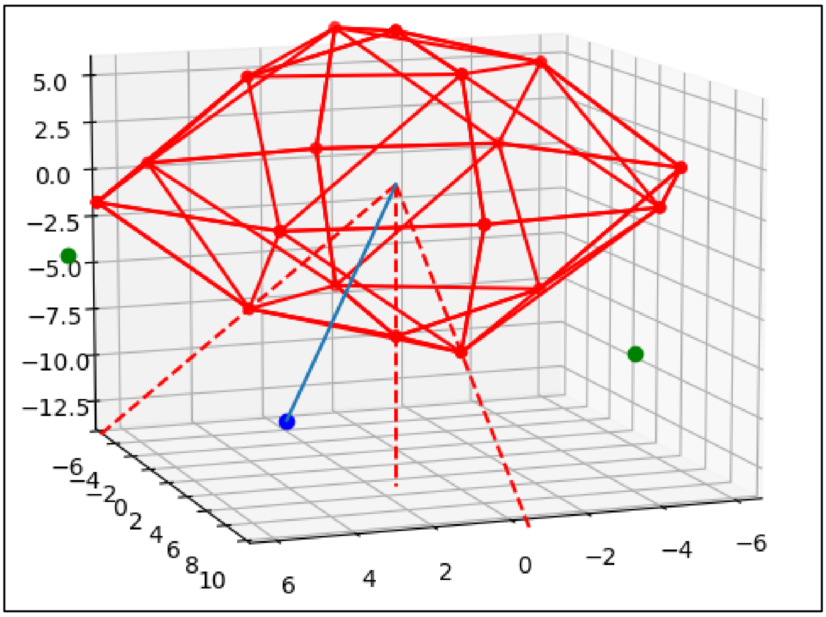
Проверка неравенства треугольника

Неравенство треугольника для векторов:

$$||V_1|| + ||V_2|| \geq ||V_1 + V_2||$$

Посчитаем норму вектора $V_3 = V_1 + V_2$

Проведем вектор V_3. Можем наблюдать, что вектор лежит внутри трехгранного угла OHBHH, расположенного в нужном октанте.



Был построен биортогональный базис:

$$OH' = (0.0, 0.166667, 0.0)$$

$$OB' = (-0.25, -0.0, -0.0)$$

$$OHH' = (-0.1875, -0.14583333, -0.125)$$

Были вычислены коэффициенты в формуле:

$$OV_3 = k_1 OH + k_2 OB + k_3 OHH$$

$$k_1 = 0.0, k_2 = 0.749, k_3 = 0.937$$

Тогда норма для точки V_3:

$$||V_3|| = k_1 + k_2 + k_3 = 1.686$$

Итак, имеем неравенство:

$$||V_1|| + ||V_2|| \geq ||V_1 + V_2|| = ||V_3||$$

$$1.577 + 1.74 \geq 1.686$$

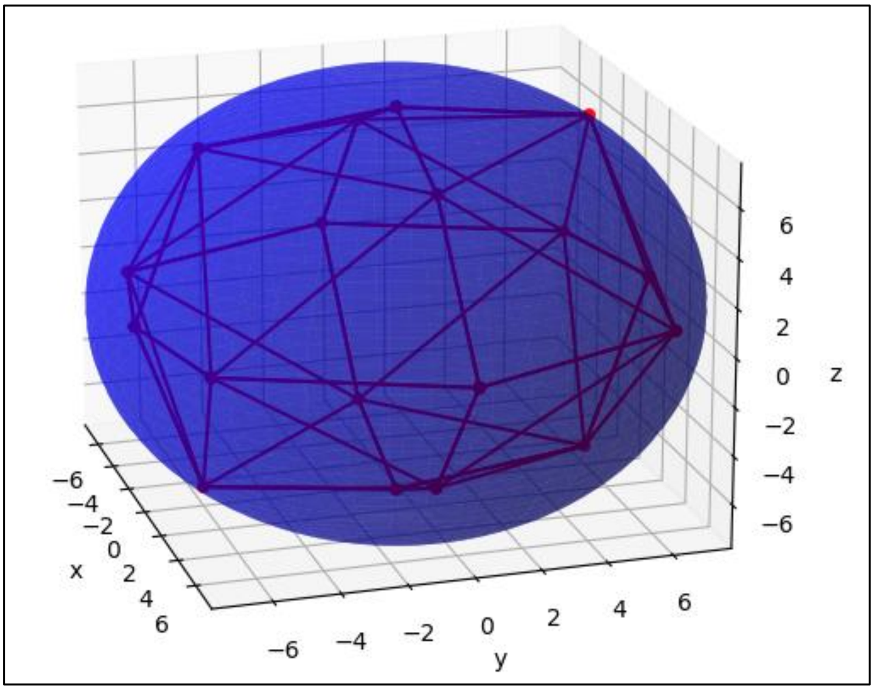
Нахождение наибольшего и наименьшего значения евклидовой нормы на векторах, имеющих норму 1 в норме, порожденной многогранником.

Очевидно, что наибольшее значение достигается в самой отдаленной от начал координат вершин. Таким образом:

M = max $(\sqrt{x_i{}^2 + y_i{}^2 + z_i{}^2})$, i = A, B, H, AA, BB, HH.

M = **9.219544457292887**

Отобразим на графике сферу с радиусом, равным M (и центром в нуле координат):



Поверхность многогранника состоит из треугольников. Минимум следует выбрать из их центров масс. Центры масс:

$$C_1 = \frac{1}{3}(OA + OB + OH), C_2 = \frac{1}{3}(OA + OB + OAA),$$

$$C_3 = \frac{1}{3}(OA + OH + OBB), C_4 = \frac{1}{3}(OH + OB + OHH)$$

$$m = \min\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}\right), i = C_1, C_2, C_3, C_4$$

$$m = \mathbf{6.4031242}$$

Отобразим на графике сферу с радиусом, равным m (и центром в нуле координат):