МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №2

по дисциплине «Теория принятия решений»

Тема: Бесконечные антагонистические игры

Вариант 2

Студент гр. 8383 ____________________ Бабенко Н.С.

Преподаватель ____________________ Попова Е.В.

Санкт-Петербург

2022

Цель работы

Использование инструментальных средств для решения задач поддержки принятия решения, а также овладение навыками принятия решения на основе бесконечных антагонистических игр.

Основные теоретические положения

В данной работе рассматриваются антагонистические игры, которые отличаются от матричных тем, что в них один или оба игрока имеют бесконечное (счётное или континуум) множество стратегий. С теоретико-игровой точки зрения это отличие малосущественно, поскольку игра остаётся антагонистической и проблема состоит в использовании более сложного аналитического аппарата исследования.

Таким образом, исследуются общие антагонистические игры, т.е. системы вида (1)

$$\Gamma = (X, Y, H), \tag{1}$$

где X и Y – произвольные бесконечные множества, элементы которых являются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно, а $H: X \times Y \to \mathbb{R}^1$ – функция выигрыша игрока 1. Выигрыш игрока 2 в ситуации (x, y) равен $[-H(x, y)], x \in X, y \in Y$ (игра антагонистическая). Далее рассматриваются такие игры, у которых функция H ограничена.

Одновременная игра преследования на плоскости.

Пусть S_1и S_2 – множества на плоскости. Игра Г заключается в следующем. Игрок 1 выбирает некоторую точку $x \in S_1$, а игрок 2 выбирает точку $y \in S_2$. При совершении выбора игроки 1 и 2 не имеют информации о действиях противника, поэтому подобный выбор удобно интерпретировать как одновременный. В этом случае точки $x \in S_1$, $y \in S_2$ являются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно. Таким образом, множества стратегий игроков совпадают с множествами S_1 и S_2 на плоскости.

Целью игрока 2 является минимизация расстояния между ним и игроком 1 (игрок 1 преследует противоположную цель). Поэтому под выигрышем $H(x, y)$

игрока 1 в этой игре понимается евклидово расстояние $\rho(x, y)$ между точками $x \in S_1$ и $y \in S_2$, т.е. $H(x, y) = \rho(x, y), x \in S_1, y \in S_2$. Выигрыш игрока 2 полагаем равным выигрышу игрока 1, взятому с обратным знаком, а именно $[-\rho(x, y)]$ (игра антагонистическая).

Модель покера с одним кругом ставок и одним размером ставки.

В начале партии каждый из двух игроков A и B ставит по единице. После того, как каждый из игроков получит карту, ходит игрок A: он может или поставить ещё c единиц или спасовать и потерять свою начальную ставку. Если A ставит, то у B две альтернативы: он может или спасовать (теряя при этом свою начальную ставку), или уровнять, поставив c единиц. Если B уравнивает, то игроки открывают свои карты и игрок с лучшей картой выигрывает.

Стратегии строятся следующим образом. Пусть

- $\alpha(x)$ – вероятность того, что если A получит x, то он поставит c,
- $1 - \alpha(x)$ – вероятность того, что если A получит x, то он спасует,
- $\beta(y)$ – вероятность того, что если B получит y, то он уравняет ставку c,
- $1 - \beta(y)$ – вероятность того, что если B получит y, то он спасует.

Если игроки применяют эти стратегии, то ожидаемый чистый выигрыш $H(\alpha, \beta)$ представляет собой сумму выигрышей.

Постановка задачи

Используя инструментальные средства компьютерной алгебры решить задачи преследования и покера.

Выполнение работы

Одновременная игра преследования на плоскости.

Для задачи преследования были отображены фигуры на плоскости: равносторонний треугольник со стороной a и квадрат со стороной b. Согласованные с вариантом фигуры представлены на рис. 1.

Были рассмотрены два случая задачи: центр масс фигуры S_1 принадлежит фигуре S_2 и центр масс фигуры S_1 не принадлежит фигуре S_2.

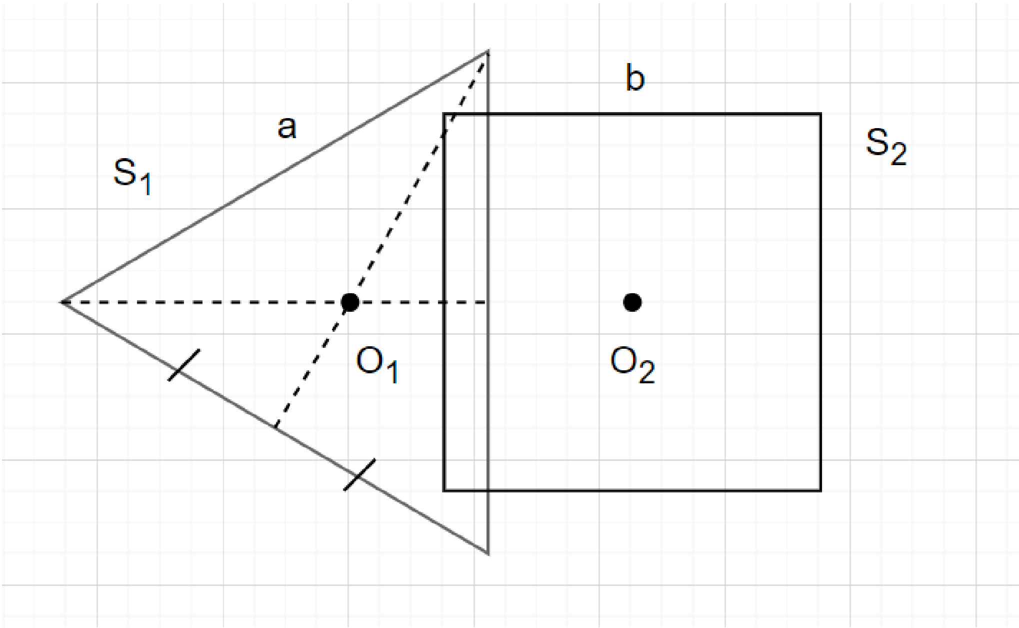

Рисунок 1 – Отображение фигур для случая $O_1 \notin S_2$

1. *Центр масс фигуры S_1 не принадлежит фигуре S_2*

Найдём ***нижнюю цену игры***. Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 2.

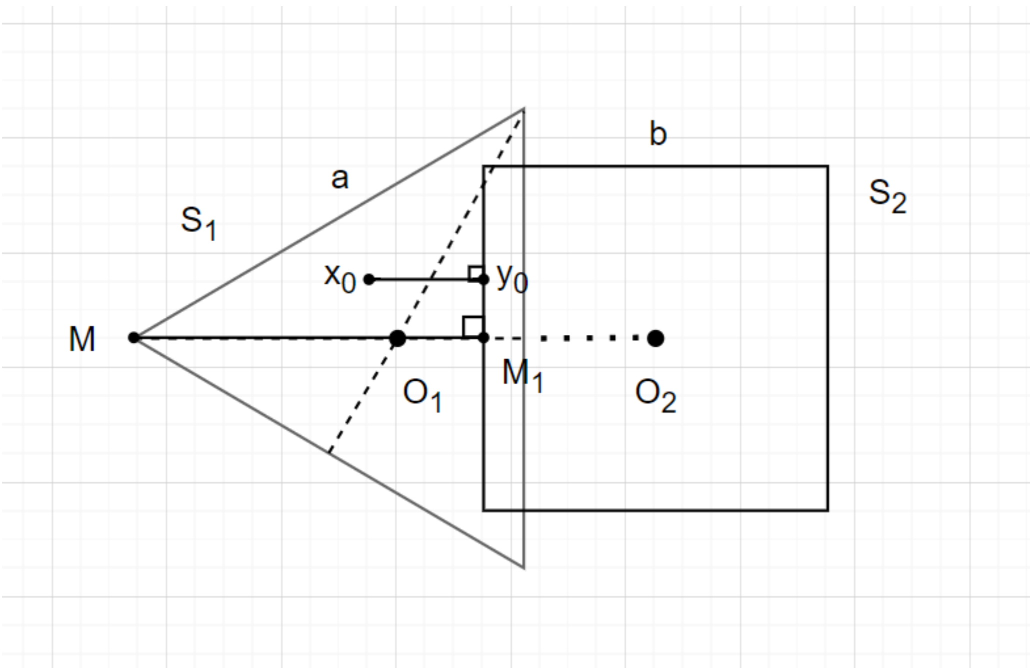

Рисунок 2 – Нахождение нижней цены игры для случая $O_1 \notin S_2$

1. Для любой точки x_0 принадлежащей S_1 и не принадлежащей S_2 минимальное расстояние до S_2 равно перпендикуляру, опущенному на сторону S_2. На рис. 2 изображен пример поиска минимального расстояния.

2. Для того, чтобы данное расстояние было максимально возможным, точка x_0 должна находиться в дальней вершине треугольника S_1 и пересекать центр масс треугольника, а также образовывать перпендикуляр. На рис. 2 изображено данное расстояние MM_1.
3. Таким образом, согласно рис. 2 определим нижнюю цену игры:

   В равностороннем треугольнике медианы, высоты и биссектрисы равны. Следуя из этого, можно найти высоту треугольника по теореме Пифагора. Высота треугольника равна $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Также известно, что медианы в равносторонним треугольнике точкой пересечения делятся в отношении 2:1 считая от вершины. Следовательно, можно определить расстояние от вершины до O_1, которое равно $\rho = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

   Нижняя цена игры равна:

$$\underline{v} = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} p(x, y) = \frac{a\sqrt{3}}{3} + \left(O_1 O_2 - \frac{b}{2}\right)$$

Найдём ***верхнюю цену игры*** для случая $O_1 \notin S_2$. Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 3.

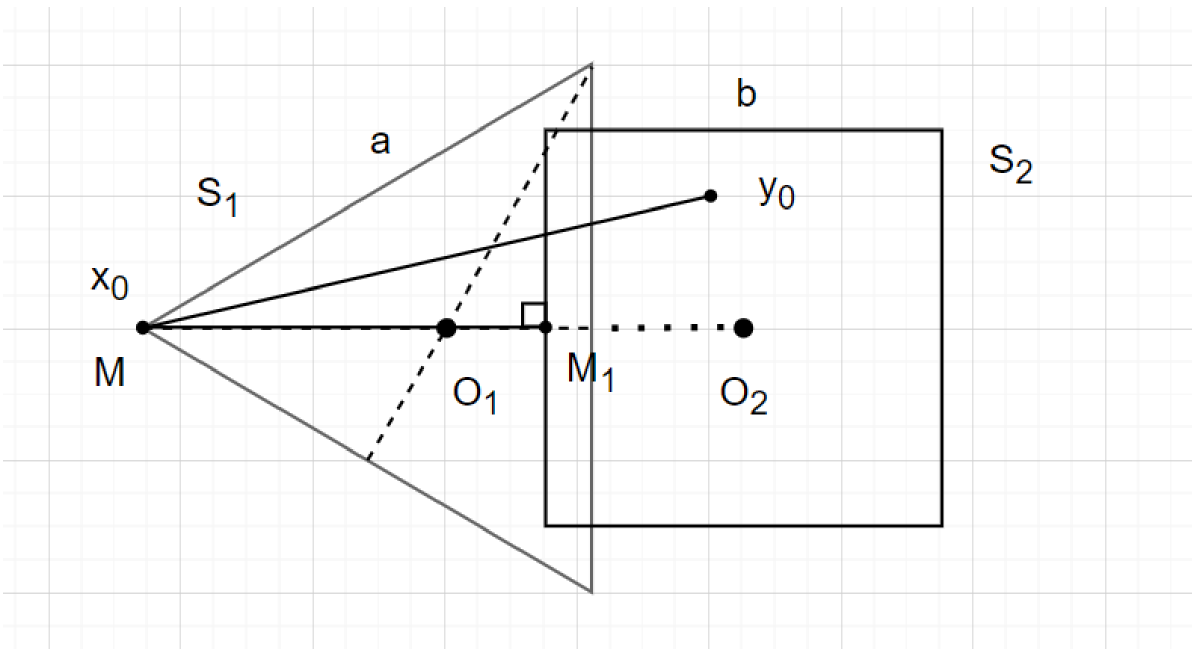

Рисунок 3 – Нахождение верхней цены игры для случая $O_1 \notin S_2$

1. Для любой точки y_0 принадлежащей S_2 расстояние до любой точки $x_{0,}$ принадлежащей S_1 будет максимальным, только в том случае если x_0 лежит в дальней вершине S_1.
2. Для того, чтобы данное расстояние было минимально возможным, точка y_0 должна находится на границе квадрата и образовывать перпендикуляр с точкой x_0.
3. Согласно рис. 3 определим верхнюю цену игры:

$$\overline{\nu} = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} p(x, y) = \frac{a\sqrt{3}}{3} + \left(O_1O_2 - \frac{b}{2}\right)$$

Проверим, существуют ли такие значения, при которых $\overline{\nu} = \underline{\nu}$. Формулы для $\overline{\nu}$ и $\underline{\nu}$ совпадают, поэтому нижняя цена игры равна верхней цене игры, поэтому данный случай является игрой в чистых стратегиях.

$$\underline{\nu} = \frac{a\sqrt{3}}{3} + \left(O_1O_2 - \frac{b}{2}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3} + \left(O_1O_2 - \frac{b}{2}\right) = \overline{\nu}$$

2. ***Центр масс фигуры S_1 принадлежит фигуре S_2.***

Найдём ***нижнюю цену игры***.

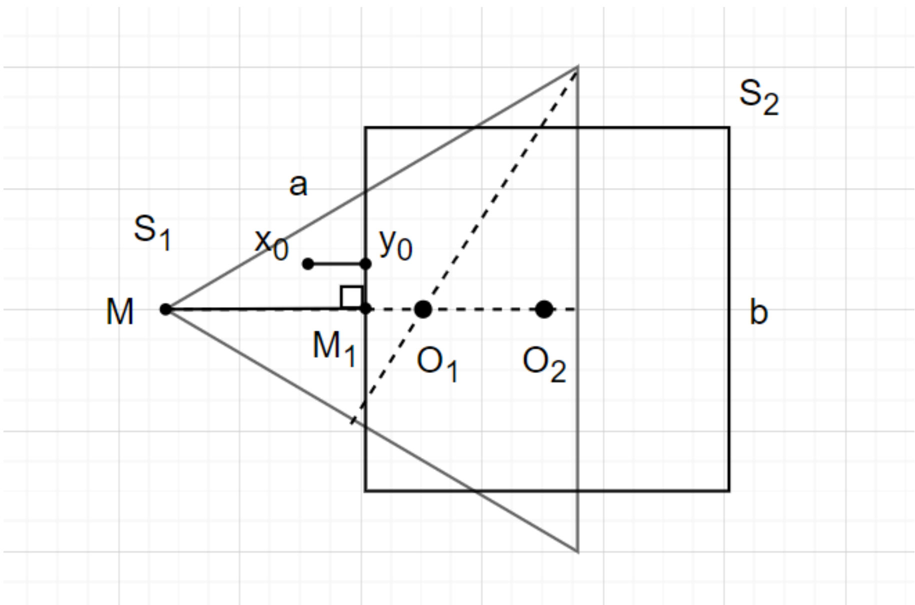

Рисунок 4 – Нахождение нижней цены игры для случая $O_1 \in S_2$

Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 4.

Поиск нижней цены игры для случая $O_1 \in S_2$:

1. Для любой точки x_0 принадлежащей S_1 и не принадлежащей S_2 минимальное расстояние до S_2 равно перпендикуляру, опущенному на сторону S_2. На рис. 4 изображен пример поиска минимального расстояния.
2. Для того, чтобы данное расстояние было максимально возможным, точка x_0 должна находиться в дальней вершине S_1 и образовывать перпендикуляр к стороне квадрата.
3. Таким образом, согласно рис. 4 определим нижнюю цену игры:

$$\underline{v} = \max_{x \in S_1} \min_{y \in S_2} p(x,y) = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{b}{2} - O_1O_2\right)$$

Найдём ***верхнюю цену игры***. Графическое изображение рассуждений представлено на рис. 5.

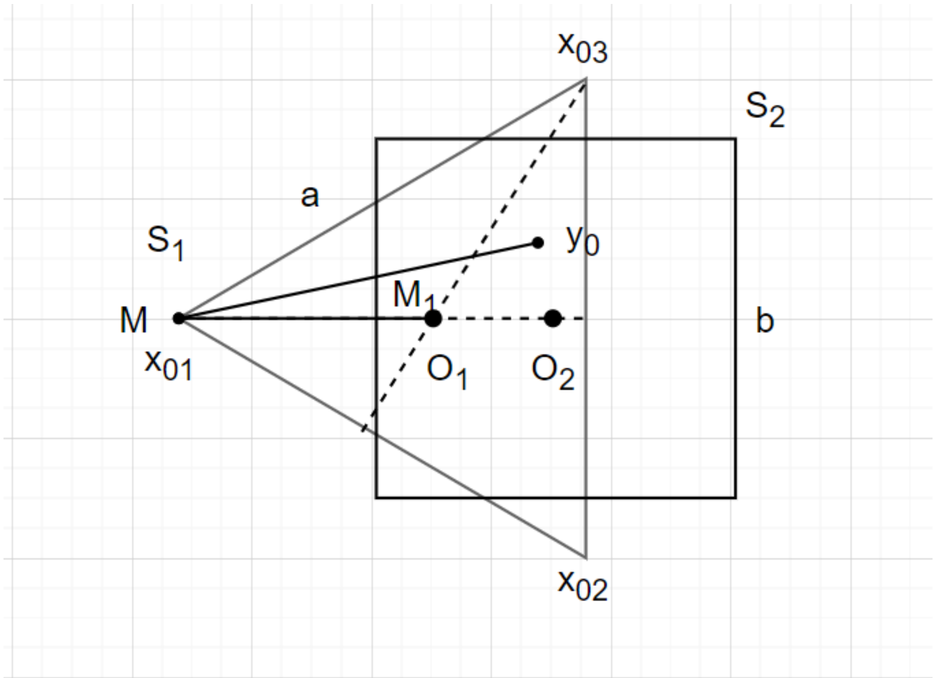

Рисунок 5 – Нахождение верхней цены игры для случая $O_1 \in S_2$

1. Для любой точки y_0 принадлежащей S_2 расстояние до любой точки x_0, принадлежащей S_1 будет максимальным, только в том случае если x_0 лежит на в вершине треугольника S_1. Но в зависимости от расположения точки y_0 точка x_0 будет изменяться: может быть любая вершина треугольника, на рис. 5 показаны примеры расположения x_0. Можно увидеть, что при лю-

бом расположении y_0 расстояние до x_0 будет всегда больше или равно расстоянию от вершины до центра масс треугольника, которое было найдено ранее.

2. Для нахождения минимального расстояния можно заметить, что если выбрать точку y_0 в центре масс треугольника, то можно найти минимальное расстояние, которое равно от вершины до центра масс $= \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
3. Согласно рис. 5 определим верхнюю цену игры:

$$\overline{\nu} = \min_{y \in S_2} \max_{x \in S_1} p(x, y) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Проверим, существуют ли такие значения, при которых $\overline{\nu} = \underline{\nu}$.

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{b}{2} - O_1O_2\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\left(\frac{b}{2} - O_1O_2\right) = 0$$

$$b/2 = O_1O_2$$

Таким образом, чтобы $\overline{\nu} = \underline{\nu}$ расстояние между центрами масс треугольника S_1 и квадрата S_2 должно быть равно половине стороны квадрата. Значит при данном условии, нижняя цена игры будет равна верхней цене игры, поэтому данный случай является игрой в чистых стратегиях.

$$\underline{\nu} = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{b}{2} - O_1O_2\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \overline{\nu}$$

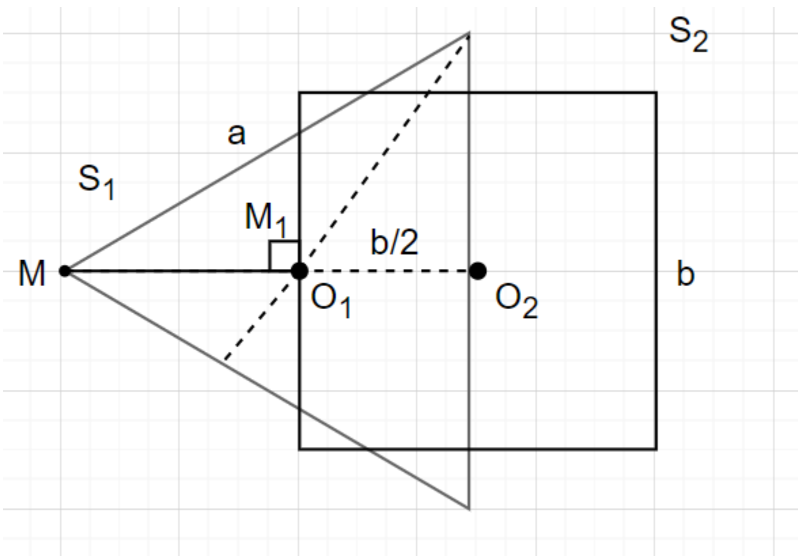

Рисунок 6 – Чистая стратегия

Модель покера с одним кругом ставок и одним размером ставки

Найдено значение игры покера с одним кругом ставок при значении ставки c, равной 3.

1. ***Первая стратегия***

Средний выигрыш А $H(\alpha, \beta)$ определяется как:

$$H(\alpha, \beta) = \int_0^1 \int_0^1 [-\overline{\alpha(x)} + \alpha(x)\overline{\beta(y)} + (c+1)sgn(x-y)\alpha(x)\beta(y)]dxdy$$

Первый игрок максимизирует выигрыш, а второй – минимизирует. А использует стратегию $\alpha(x)$ с порогом a. Порог $b = \frac{1}{2(c+1)}(a(c+2)+c)$ получается из формулы проигрыша В, и далее можно найти минимальный проигрыш В, который рассчитывается по формуле ниже, где a – стратегия А:

$$H(a) = \frac{(\mathrm{c}+2)^2}{4(\mathrm{c}+1)}\left(-a^2 + 2a\frac{c^2}{(c+2)^2} - \frac{c^2}{(c+2)^2}\right)$$

Постараемся максимизировать минимальный проигрыш В, находим максимум параболы, который равен:

$$a = \left(\frac{c}{c+2}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \mathbf{\frac{9}{25}};\ b = \frac{c}{c+2} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

Подсчитаем значение выигрыша первого игрока:

$$H(\alpha, \beta) = \frac{(\mathrm{c}+2)^2}{4(\mathrm{c}+1)}\left(\frac{c^4}{(c+2)^4} - \frac{c^2}{(c+2)^2}\right) = -\frac{c^2}{(c+2)^2}$$

Выигрыш А равен:

$$H(\alpha, \beta) = -\frac{3^2}{(3+2)^2} = -\mathbf{\frac{9}{25}}$$

Проверим ответ, решив задачу с помощью программы.

```
'Порог игрока А = 0.36, порог игрока В = 0.6'

'Выигрыш игрока А = -0.36'
```

Рисунок 7 – Результат выполнения программы

Игрок В находится в выигрышном положении, так как порог игрока А = $\frac{9}{25} = 0.36$ меньше порога игрока В = $\frac{3}{5} = 0.6$, следовательно, игрок А должен быть более осторожен.

Игрок А:

- $x < a$ –> $\alpha(x) = 0$, пасует
- $x \geq\ a$ –> $\alpha(x) = 1$, ставит

Игрок В:

- $y < b$ –> $\beta(y) = 0$, пасует
- $y \geq\ b$ –> $\beta(y) = 1$, ставит

2. ***Стратегия с блефом***

При использовании оптимальной стратегии $\alpha(x)$ игроком А, наилучший ответ В – использование $\beta(y)$ с порогом b. Вычислим Q(x) для данного b.

$x \leq b$: $Q(x) = 1 + \int_0^b 1\, dy - \int_b^1 (c+1)dy = 1 + b - (c+1)(1-b) = 0$

$H(\alpha, \beta) = -1$

$x > b$: $Q(x) = 1 + b + \int_b^x (c+1)\, dy - \int_x^1 (c+1)dy = 2(c+1)x - c(b+1) > 0$

Выигрыш игрока А:

$$H(\alpha, \beta) = \int_b^1 \alpha(x)[2(c+1)x - c(b+1)]dx - 1 =$$

$$= 2(\mathrm{c}+1)\int_b^1 xdx - c(b+1)\int_b^1 1dx - 1 =$$

$$= 1 - b^2 - 1 = -b^2$$

$$H(\alpha, \beta) = -b^2 = -0.36$$

Следовательно, игрок А:

- $x \geq b$ – $\alpha(x) = 1$, ставит
- $x < b$ – с вероятностью $p = \frac{c}{c+2} = \frac{3}{5}$ - пасует, $\alpha(x) = 0$, и начинает блефовать с вероятностью $1 - p = \frac{2}{5}, \alpha(x) = 1$

Игрок В:

- $y \geq b, \beta(y) = 1$, ставит
- $y < b \ \beta(y) = 0$, пасует

Выводы

В ходе выполнения практической работы по изучению бесконечных игр были использованы инструментальные средства для решения задач поддержки принятия решения, а также освоены навыки принятия решения на основе бесконечных антагонистических игр.

При поиске оптимальных стратегий для одновременной игры преследования на плоскостях, которыми являются две фигуры: равнобедренный треугольник и квадрат, было выяснено, что данная игра решается в чистых стратегиях при случае, когда центр масс первой фигуры не принадлежит второй фигуре, а в случае, когда центр масс принадлежит второй фигуре игра решается в чистых стратегия только при условии, что расстояние OO_1 равняется половине стороны квадрата.

При поиске оптимальных стратегий для покера с одним кругом ставок при значении ставки с $= 3$ было выявлено, что при реализации оптимальных стратегий α и β ожидаемый чистый выигрыш $H = -\frac{9}{25}$, что свидетельствует о том, что после первого круга ставок игрок А окажется в проигрышном положении.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ИСХОДНЫЙ КОД ДЛЯ ПОКЕРА С ОДНИМ КРУГОМ СТАВОК

```
from IPython.core.interactiveshell import InteractiveShell
InteractiveShell.ast_node_interactivity = "all"

c = 3
a = pow(c/(c+2), 2)
b = c/(c+2)

H = (pow((c+2),2)/(4*(c+1)))*(-pow(a,2)+2*a*(pow(c,2)/pow(c+2,2))-
(pow(c,2)/pow(c+2,2)))

f'Порог игрока A = {a}, порог игрока B = {round(b,2)}'
f'Выигрыш игрока A = {H}'

a = (c-1)/(c+1)
b = (c-2)/c

H2 = ((c**2)/(4*(c+1)))*((b**2)-2*b*(((c**2)-2*c)/(c**2))+1)

f'Порог игрока A = {a}, порог игрока B = {round(b, 2)}'
f'Выигрыш игрока A = {round(H2, 2)}'
```