Студент: Переверзев Дмитрий
Группа: 8383
Вариант: 18
Дата: 11 декабря 2020 г.

Статистический анализ

Индивидуальное домашнее задание №1

Плотность двумерного нормального распределения имеет вид:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = C \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(3x^2 - 4xy + 6y^2 - 2x - 8y + 5)\right\}$$

Задача 1. *Вычислить вектор мат. ожиданий и ковариационные характеристики данного случайного вектора.*

Решение. Обозначим степень экспоненты через $q(x,y)$. Тогда:

$$q(x,y) = (3x^2 - 4xy - 2x) + 6y^2 - 8y + 5 =$$

$$= ((\sqrt{3}x)^2 - 2 \cdot \sqrt{3}x(y\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}) + (\frac{4}{3}y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{1}{3})) + 6y^2 - \frac{4}{3}y^2 - 8y + 5 - \frac{4}{3}y - \frac{1}{3} =$$

$$= (\sqrt{3}x - \frac{2}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + \frac{14}{3}y^2 - \frac{28}{3}y + \frac{14}{3} = (\sqrt{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}y - \frac{\sqrt{3}}{3})^2 + \frac{14}{3}(y^2 - 2y + 1) =$$

$$= \underline{(\sqrt{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}y - \frac{\sqrt{3}}{3})^2 + \frac{14}{3}(y-1)^2} = ([\sqrt{3}x - \sqrt{3}] - \frac{2\sqrt{3}}{3}[y-1])^2 + \frac{14}{3}(y-1)^2 =$$

$$= 3(x-1)^2 - 4(x-1)(y-1) + \frac{4}{3}(y-1)^2 + \frac{14}{3}(y-1)^2 =$$

$$= 3(x-1)^2 + 2 \cdot (-2) \cdot (x-1)(y-1) + 6(y-1)^2$$

Получаем: $\mathbb{E}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$,

$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix}$, $\Sigma = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$,

$$\mathrm{cov}(\xi,\xi) = \mathbb{D}\xi = \sigma_\xi^2 = \frac{6}{14} = \frac{3}{7},$$
$$\mathrm{cov}(\eta,\eta) = \mathbb{D}\eta = \sigma_\eta^2 = \frac{3}{14},$$
$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \frac{1}{7}, \rho_{\xi,\eta} = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D_\xi D_\eta}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{\sqrt{9}}{98}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$
$$C = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sqrt{\det\Sigma}} = \frac{\sqrt{14}}{2\pi}.$$

□

Задача 2. *Найти аффинное преобразование, переводящее исходный случайный вектор в стандартный нормальный.*

Решение.

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{42}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 - 1 \\ \xi_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\xi_1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\xi_2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{42}}{3}\xi_2 - \frac{\sqrt{42}}{3} \end{pmatrix};$$
$$B\Sigma B^T = I \Rightarrow \frac{1}{14}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{42}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{42}}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} \frac{14\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{42}}{3} & \sqrt{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{42}}{3} \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \sim N(0, I).$$

□

Задача 3. *Найти ортогональное преобразование, переводящее соответствующий центрированный случайный вектор в вектор с независимыми компонентами.*

Решение.

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\det\left(\Sigma^{-1} - \lambda I\right) = 0$$
$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0; 18 - 3\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 4 = 0;$$
$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 2}; \underline{\lambda_2 = 7}$$
$$\lambda_1 = 2 : \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\lambda_2 = 7 : \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\underline{Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$ – матрица ортогональных преобразований

$$\mathbb{E}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = Q \cdot \mathbb{E}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Q\Sigma Q^T; \Sigma = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$Q\Sigma Q^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 35 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow M\left(\begin{pmatrix} 3/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$\square$

Задача 4. *Вычислить характеристики совместного распределения случайного вектора (3ξ - 2η, -2ξ - 2η) и записать его плотность.*

Решение.

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\xi - 2\eta \\ -2\xi - 2\eta \end{pmatrix}$$

$$x \sim N(\mu, \Sigma); Y = BX; Y \sim N(B\mu, B\Sigma B^T);$$

$$\mathbb{E}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \Sigma = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{E}\begin{bmatrix} 3\xi - 2\eta \\ -2\xi - 2\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_Y = B\Sigma B^T = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ -16 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 42 & -28 \\ -28 & 52 \end{bmatrix}$$

$$\det(\Sigma_Y) = \frac{50}{7}$$

$$\Sigma_Y^{-1} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 52 & 28 \\ 28 & 42 \end{pmatrix}$$

$$p_{\zeta_1,\zeta_2}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{50}{7}}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 52 & 28 \\ 28 & 42 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \end{pmatrix}\right\}$$

Обозначим степень экспоненты как $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot q(x,y)$. Тогда:

$$
\begin{aligned}
q(x,y) &= \left(\frac{1}{100}\right)\cdot\begin{pmatrix}x-1 & y+4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}52 & 28\\ 28 & 42\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y+4\end{pmatrix} = \\
&= \left(\frac{1}{100}\right)\cdot\begin{pmatrix}52(x-1)+28(y+4) & 28(x-1)+42(y+4)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y+4\end{pmatrix} = \\
&= \left(\frac{1}{100}\right)\cdot\left(52(x-1)^2+56(x-1)(y+4)+42(y+4)^2\right) = \\
&= \left(\frac{1}{100}\right)\cdot(52x^2+56xy+42y^2+120x+280y+500) = \\
&= \frac{13}{25}x^2+\frac{14}{25}xy+\frac{21}{50}y^2+\frac{6}{5}x+\frac{14}{5}y+5 \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\underline{p_{\zeta_1,\zeta_2}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{50}{7}}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{13}{25}x^2+\frac{14}{25}xy+\frac{21}{50}y^2+\frac{6}{5}x+\frac{14}{5}y+5\right)\right\}}
$$

$\square$

Задача 5. *Найти условное распределение ξ при условии η.*

Решение.

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = C\cdot\exp\left\{-\tfrac{1}{2}(3x^2-4xy+6y^2-2x-8y+5)\right\}$$

$$p_{\xi|\eta=y} = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} = \frac{C\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(3x^2-4xy+6y^2-2x-8y+5)\right\}}{C_1(y)} =$$

$$= C_2(y)\cdot\exp\{-\tfrac{1}{2}(3x^2-2x-4xy)\underbrace{-\frac{1}{2}(6y^2-8y+5)\}}_{C_3(y)} =$$

$$
\begin{aligned}
= C_2(y)\cdot\exp\Bigg\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1/3}\left(x^2-2\cdot x\cdot\left(\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}\right)^2\right)+ \\
\underbrace{+\frac{1}{2\cdot 1/3}\cdot\left(\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\left(6y^2-8y+5\right)}_{C_3(y)}\Bigg\} =
\end{aligned}
$$

$$= C_4(y) \cdot \exp\left\{ \frac{-\left(x - \left(\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\right)\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \right\}; \mu = \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}; \sigma = \tfrac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\mathbb{E}(\xi|\eta = y) = \frac{2}{3}\eta + \frac{1}{3}; \mathbb{D}(\xi|\eta = y) = \frac{1}{3}; \sigma = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}};$$

$$p_{\xi|\eta=y}(x, y) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \exp\left\{ \frac{-\left(x - \left(\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\right)\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \right\};$$

□