需求函数，收入效应和替代效应：理论和实证

David Autor

14.03 2004 秋季

1　马歇尔需求中的价格变化

- 消费者预算的微小变化（即 I 的上升或者下降）都涉及到消费线自原始位置向内或向外平行移动。这样的经济学是很简单的。既然这样的移动保持了价格比率$\left(\frac{p_x}{p_y}\right)$，那么它对消费者的边际替代率（MRS）就没有任何影响，$\left(\frac{U_x}{U_y}\right)$，除非选定的商品组合在一开始或者最终处于边角解答中。

- 保持其他商品价格和收入不变，一种商品的价格上升在经济学上有着更复杂的效应：

  — 它使得预算线由原始位置向内移动了。换言之，消费者现在更穷了。与之相对的是“收入效应”。

  — 它改变了预算线的斜率，这样消费者就面临了一个不同的市场交易比率。与之相对的是“价格效应”。

- 尽管两种移动是同时发生的，但它们的概念是有区别的，而且对消费者行为而言也存在不同的含意。

1.1　收入效应

首先，考虑“收入效应”。在一个两商品的经济体(X_1, X_2)中，预算线由原始位置向内移动有什么影响：

1. 总消费？[下降]

2. 效用？[下降]

3. 对X_1的消费？[答案取决于是正常物品或是低档物品]

4. 对X_2的消费？[答案取决于是正常物品或是低档物品]

1.2 替代效应

- 在同一个两商品的经济体中，对X_1的消费会有什么变化，若：

$$\frac{p_1}{p_2}\uparrow$$

  而且效用保持不变？

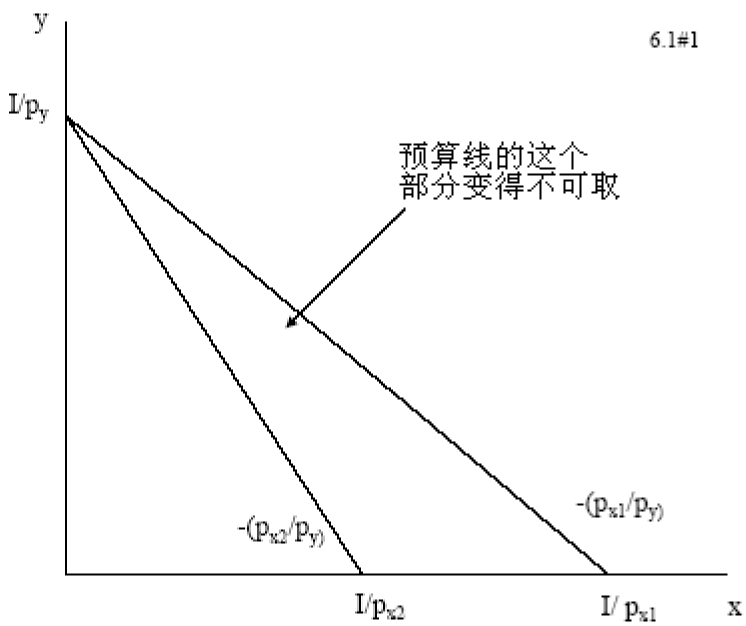
- 换句话说，我们想要得出：

$$\text{Sign}\left\langle \frac{\partial X_1}{\partial p_1}|_{U=U_0} \right\rangle.$$

- 在应用 MRS 递减公理的情况下，我们有 $\frac{\partial X_1}{\partial p_1}|_{U=U_0} < 0$.
- 总之，保持效用不变，替代效应*总是*负的。
- 相反地，按照上面的推理，收入效应的符号却是不确定的，

$$\frac{\partial X_1}{\partial I} \gtrless 0,$$

  取决于X_2是正常物品还是低档物品。

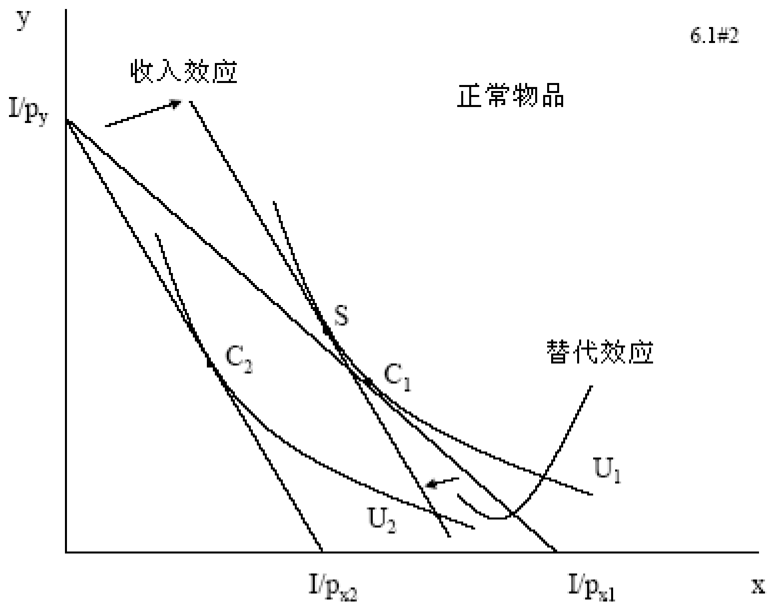


1.3 商品的类型

替代效应总是负的而收入效应却是不确定的，这就引出了三种类型的商品的划分：

1. 正常物品： $\frac{\partial X}{\partial I} > 0, \frac{\partial X}{\partial p_x}|_{U=U_0} < 0$。对于这种商品，价格的上升和收入的下降有着

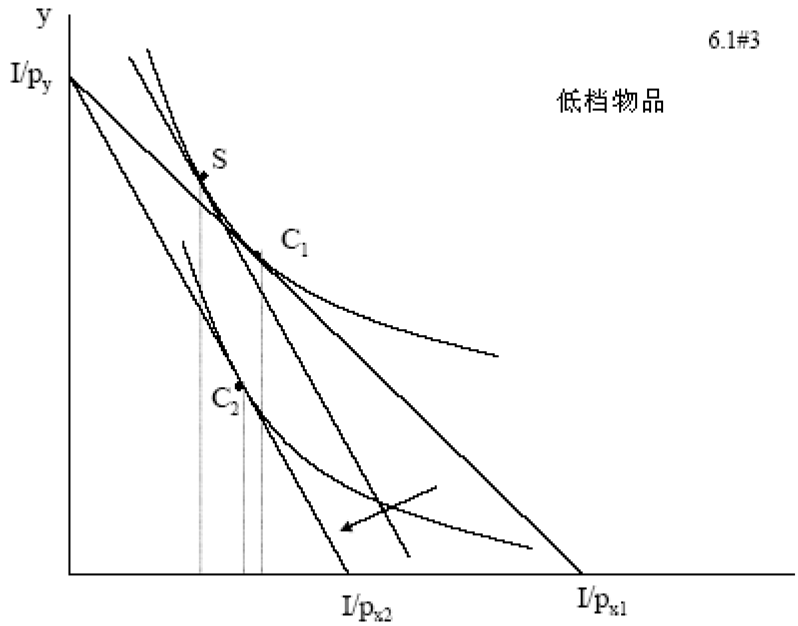
相同的影响 — 更少的消费量。



尽管只观察了从C_1到C_2的移动，我们也能理解这种移动由两个部分组成：从C_1到S的移动（替代效应）和从S到C_2的移动（收入效应）。

2. 低档物品：$\frac{\partial X}{\partial I} < 0, \frac{\partial X}{\partial p_x}|_{U=U_0} < 0$。对于这种商品，收入和替代效应是相互抵消的。

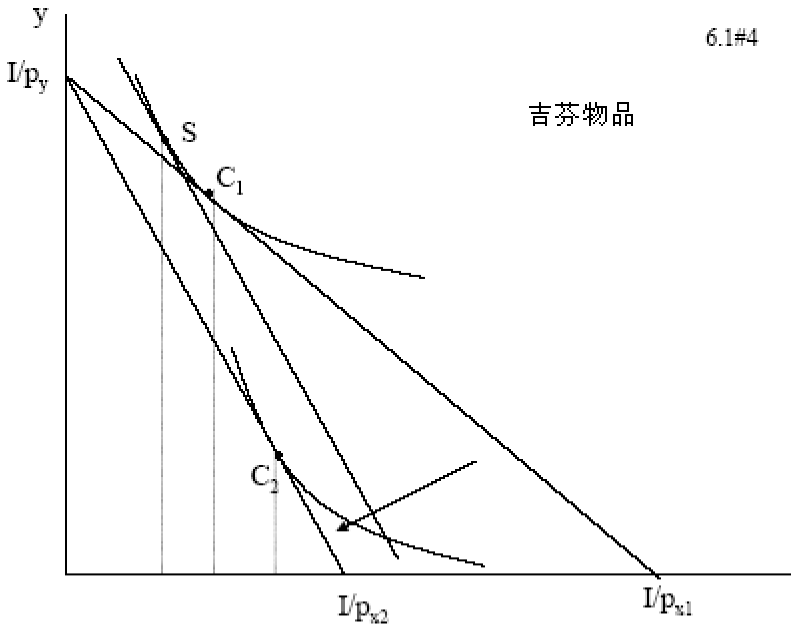
为什么？甚至于尽管导数是同号的，它们的效应也是相反的。因为价格的上升减少了实际收入 — 从而通过收入效应增加了消费，即便是替代效应同时也使消费减少。



因此，替代效应是$S - C_1$，收入效应是$C_2 - S$.。

3. 极端低档物品（“吉芬”物品）：$\frac{\partial X}{\partial I} < 0, \frac{\partial X}{\partial p_x}|_{U=U_0} < 0$。与一般低档物品相同，收入和替代效应是相互抵消的。但是特殊的地方在于吉芬物品的收入效应是最主要

的（在一定范围内）。于是，吉芬物品的价格的上升使消费者买得更多 — 需求是向上倾斜的。即使是由于替代效应保持了效用不变而价格上升减少了需求，但因为收入的损失令消费者变穷了，所以他们对低档物品的需求反而上升了。



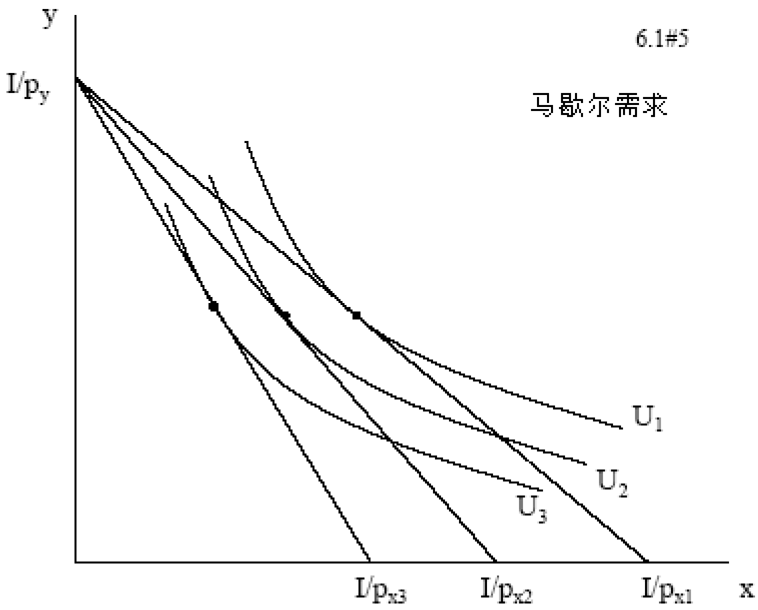
吉芬物品的现象是个理论难题。商品的价格上升需求也增加的情况是很难想象的。但是理论证明这样的商品的确存在。在 Jesen 和 Miller 的论文中我们会看到这方面的证据。

问题：每个夏天差不多油价都在上涨，同时每户人家的汽油消费量也在增加。那么汽油是吉芬物品吗？

1.4 马歇尔和希克斯需求

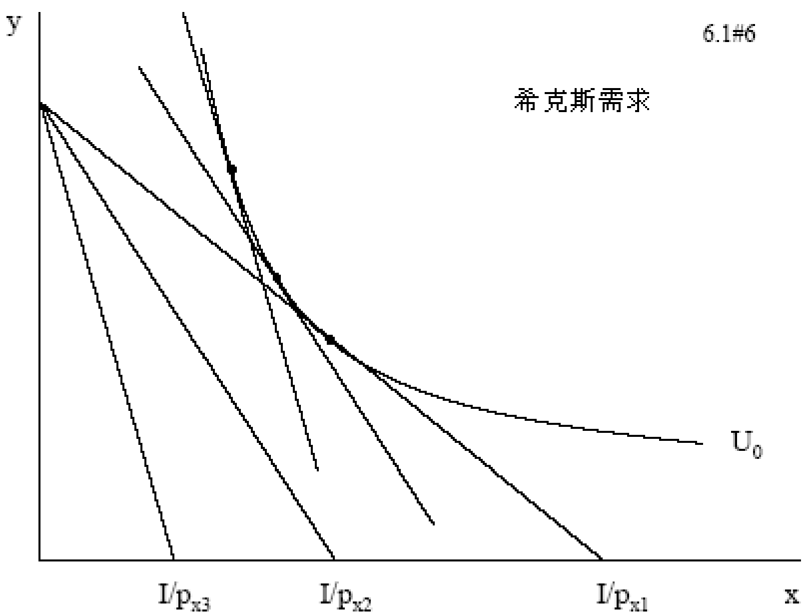
Alfred Marshall 是第一个画出供给和需求曲线的经济学家。“马歇尔交叉”是经济学板书的主要内容。马歇尔需求曲线是简单的常规市场或个人的需求曲线。它回答了这个问题：

- 保持收入和所有其他价格不变，商品的需求数量 X 怎样随着 p_x 的改变而改变？我们将这个需求曲线记作 $d_x(p_x, p_y, \overline{I})$。马歇尔需求曲线包含了收入和替代效应，是加总了这两种对价格变化的不同反应后的“净”需求。



也可以设想一种需求曲线仅由替代效应决定，这就是希克斯需求（以 J.R.Hicks 命名），回答了这个问题：

- 保持消费者效用不变，商品的需求数量 X 怎样随着 p_x 的改变而改变？我们将这个需求曲线记作 $h_x(p_x, p_y, \overline{U})$。这里的 $\overline{U}$ 是作为希克斯需求函数中的一个参数，说明当价格改变时函数中的消费者效用保持不变 — 在同一条无差异曲线上。希克斯需求也被称为“补偿”需求。这个名字来自于价格变动时，为保持消费者处于同一条无差异曲线上，就必须调整消费者的收入，即对其予以补偿。由于相同的理由，马歇尔需求被称为“非补偿”需求。



1.5 补偿和非补偿需求之间的关系

- 这两种需求函数是相当接近的（如上所示），不过它们也并不是一样的。

- 回忆以前支出函数的讲义：

$$E(p_x, p_y, \overline{U})$$

  给出了在既定的价格p_x, p_y下为获得效用$\overline{U}$所必要的最小支出。

- 对于任意给定的效用水平$\overline{U}$，有下面的式子：

$$h_x(p_x, p_y, \overline{U}) = d_x(p_x, p_y, E(p_x, p_y, \overline{U}))$$

- 换言之，对于任意给定的效用水平，补偿和非补偿需求一定是相等的。另一种说法：固定价格于p_x, p_y，固定效用于$\overline{U}$，用支出函数决定必要的收入$\overline{I}$。情况应该是这样的：$h_x(p_x, p_y, \overline{U}) = d_x(p_x, p_y, \overline{I})$。

- 尽管这些需求曲线相交于任意选定的点，*对价格变化的反应它们不尽相同*。特别地，对上式关于p_x进行微分，得到下式：

$$\frac{\partial h_x}{\partial p_x} = \frac{\partial d_x}{\partial p_x} + \frac{\partial d_x}{\partial I}\frac{\partial E}{\partial p_x}. \tag{1}$$

  重写这个式子：

$$\frac{\partial d_x}{\partial p_x} = \frac{\partial h_x}{\partial p_x} - \frac{\partial d_x}{\partial I}\frac{\partial E}{\partial p_x}. \tag{2}$$

- 总之，非补偿需求对价格变化的反应等于补偿需求的反应$(\partial h_x/\partial p_x)$减去另外一项：

$$\frac{\partial d_x}{\partial I}\frac{\partial E}{\partial p_x}$$

  这一项还需要进一步考察。

- 项$\partial d_x/\partial I$看上去很熟悉。它是商品X的需求收入效应。但是$\partial E/\partial p_x$是什么？

- 回忆支出最大化问题$E(p_x, p_y, \overline{U})$。如下：

$$\min_{X,Y} p_x X + p_y Y \ \ s.t. U(X,Y) \geq \overline{U}.$$

- 拉格朗日项为：

$$\pounds = p_x X + p_y Y \ + \lambda(\overline{U} - U(X,Y)).$$

- 这个问题的第一顺序条件是：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pounds}{\partial X} &= p_x - \lambda U_x = 0, \\ \frac{\partial \pounds}{\partial y} &= p_x - \lambda U_y = 0, \\ \frac{\partial \pounds}{\partial \lambda} &= \overline{U} - U(X,Y). \end{aligned}$$

- 这个问题的解答中的拉格朗日乘数如下：

$$\lambda = \frac{p_x}{U_x} = \frac{p_y}{U_y}.$$

- 根据包络定理，在该问题的解答中：

$$\frac{\partial E}{\partial \overline{U}} = \lambda.$$

换言之，最小效用约束条件放松一单位，支出就以价格比边际效用的比例增加。

- 那什么是$\partial E/\partial p_x$？那就是，保持效用不变，如何优化支出？答案是：

$$\frac{\partial E}{\partial p_x} = X.$$

- 这是直接从包络定理中得出的。既然X和Y是最优化选择，那么*保持效用不变*，p_x, p_y的一点微小的变化不会影响商品的最优消费数量（就如同支出函数的例子一样）。[见下面的证明]

- 但是价格的上升会改变*总支出*（否则效用就不会保持不变）。

- 既然消费者已经预备消费X单位的商品，为维持X带来的效用水平，1 单位的价格上升会使总支出增加。这个结果被称为“Shephard 引理”。

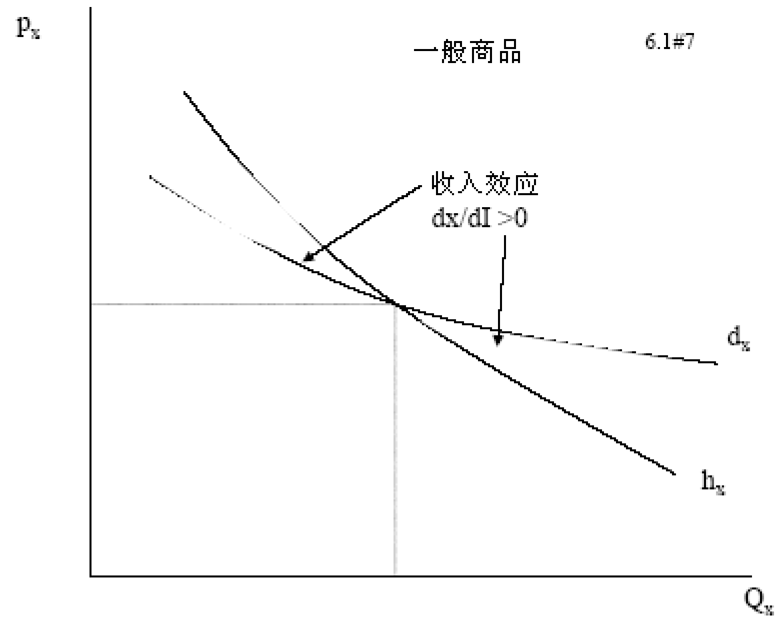
- 一个直觉上的例子。如果你每天买 10 袋薯片而每袋薯片的价格提高了 1 美分，那么为了保持效用不变，你需要得到多少补偿？初步估计，10 美分（不可能更多，实际上也许会少一些）。为了保持效用不变给定价格的变化，你的支出一定提高了，这个提高量是价格的变化乘以初始消费水平。

- 问题：从$\partial E/\partial p_x$中得到的X是等于h_x即补偿需求，或是d_x即非补偿需求？
答案：h_x。

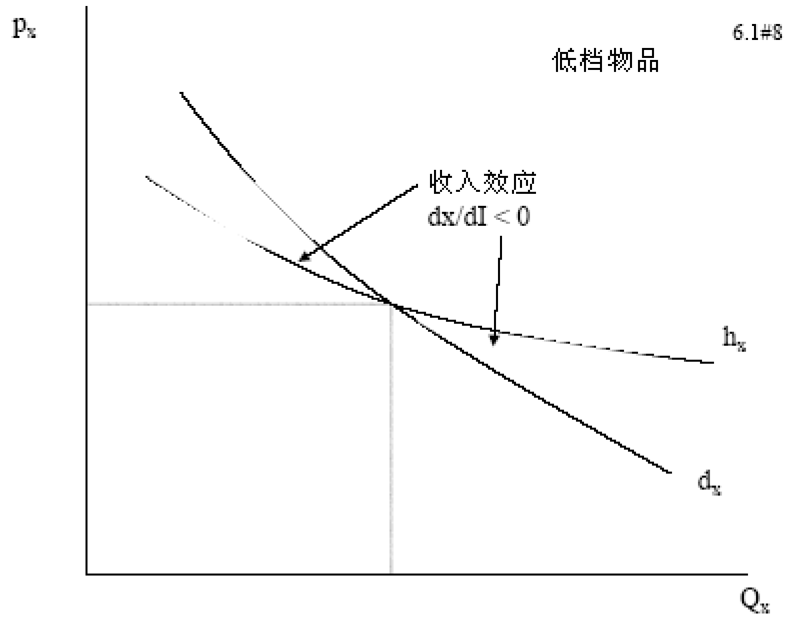
- 因为支出函数保持效用不变，任何由支出函数导出的需求函数也一定保持效用不变 — 补偿需求函数也是如此。

- 重述一遍：关于商品价格的支出函数推导是该商品的希克斯（补偿）需求函数。

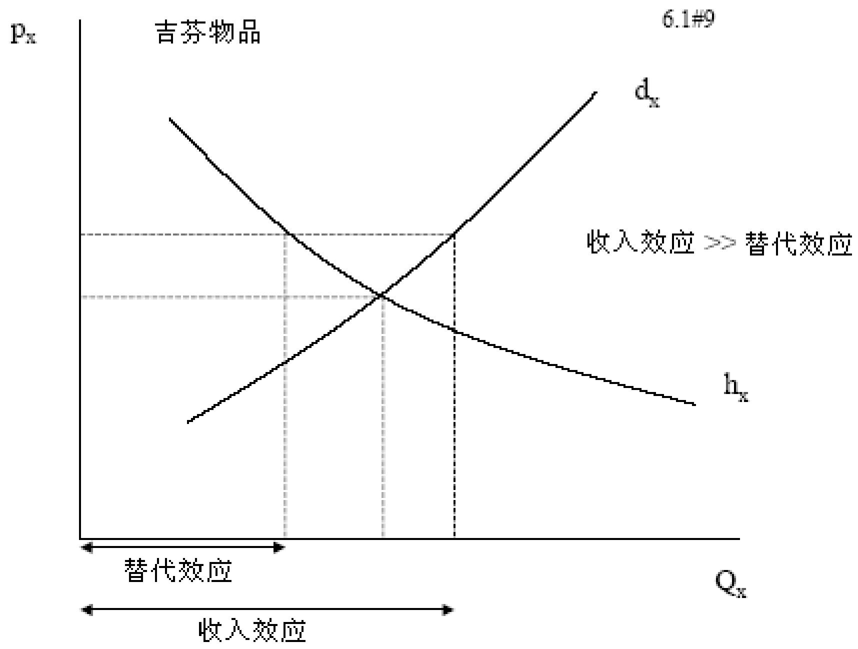
- 依据商品的类型，两种需求函数图像表示如下：



p_x
一般商品
6.1#7
收入效应
dx/dI >0
d_x
h_x
Q_x



p_x
6.1#8
低档物品
收入效应
dx/dI < 0
h_x
d_x
Q_x



1.6 Shephard 引理的证明[可选]

回忆消费者问题的对偶问题：效用约束下的支出最小化。

$$\begin{aligned} & \min p_x x + p_y y \\ s.t. U(x,y) &\geq v^* \\ \pounds &= p_x x + p_y y + \lambda\left(U(x,y) - \bar{U}\right), \end{aligned}$$

由 $U(x^*, y^*) = v^*$，给出 $E^* = p_x x^* + p_y y^*$

记住下面的第一顺序条件：

$$\lambda = \frac{p_x}{U_x} = \frac{p_y}{U_y}.$$

现在计算

$$\frac{\partial \pounds}{\partial p_x} = x + \left(p_x \frac{\partial x}{\partial p_x} - \lambda U_x \frac{\partial x}{\partial p_x}\right) + \left(p_y \frac{\partial y}{\partial p_x} - \lambda U_x \frac{\partial y}{\partial p_x}\right).$$

将 λ 带入

$$\frac{\partial \pounds}{\partial p_x} = x + \left(p_x \frac{\partial x}{\partial p_x} - \frac{p_x}{U_x} U_x \frac{\partial x}{\partial p_x}\right) + \left(p_y \frac{\partial y}{\partial p_x} - \frac{p_y}{U_y} U_y \frac{\partial y}{\partial p_x}\right) = x.$$

因此，

$$\frac{\partial \pounds}{\partial p_x} = \frac{\partial E}{\partial p_x} = x.$$

注意这个 x 实际上是 $h_x(p_x, p_y, \overline{U})$，因为效用是保持不变的。

1.7 应用 Shephard 引理

- 回到等式 2，用 Shephard 引理往回代入可得：

$$\frac{\partial d_x}{\partial p_x} = \frac{\partial h_x}{\partial p_x} - \frac{\partial d_x}{\partial I} \cdot X.$$

- 该恒等式被称为*斯特拉斯基方程*。

- 它表明非补偿需求对于价格变化的反应（等式左边，$\partial d_x / \partial p_x$）等于补偿需求的反应$(\partial h_x / \partial p_x)$再减去价格变化引起收入变化的收入效应（回忆$X = \partial E / \partial p_x$）。
- 也要注意最后一项的经济学意义，$\frac{\partial d_x}{\partial I} \cdot X$。收入效应影响到商品$X$总需求对价格$p_x$变化的反应，而其效果则取决于消费者已经预备购买$X$的数量。

- 如果消费者买大量的X，p_x的上升就带来很大的收入效应。而若消费者对商品X的初始消费量为 0，p_x的变化带来的收入效应也就为 0。

- 对三种类型的商品应用斯特拉斯基方程，易得：

  — 对于正常物品$(\frac{\partial d_x}{\partial I} > 0)$，收入和替代效应是互补的。

  — 对于低档物品$(\frac{\partial d_x}{\partial I} < 0)$，收入和替代效应是抵消的。

  — 对于正常物品，替代效应是主要的：$-\frac{\partial d_x}{\partial I} \cdot X > \frac{\partial h_x}{\partial p_x}$。

- **两商品经济(X, Y)中p_x的变化的效应。**

	非补偿需求“马歇尔”	补偿需求“希克斯”
X的消费量	替代 $-$ 收入 $+/-$	替代 $-$ 收入 0
Y的消费量	替代 $+$ 收入 $+/-$	替代 $+$ 收入 0
消费者效用	$-$	0

1.8 非补偿需求和间接效用函数[可选]

- 对支出函数进行微分，我们能推导出补偿需求函数。那么推导非补偿需求函数有相似的技巧吗？问得好！

- 回忆间接效用函数的拉格朗日项：

$$\begin{aligned}
V &= \max_{x,y} U(X,Y) \ s.t. \ Xp_x + Yp_y \le I, \\
\pounds &= U(X,Y) + \lambda(I - Xp_x - Yp_y), \\
\frac{\partial \pounds}{\partial X} &= U_x - \lambda p_x = \frac{\partial \pounds}{\partial Y} = U_y - \lambda p_y = \frac{\partial \pounds}{\partial \lambda} = I - Xp_x - Yp_y = 0.
\end{aligned}$$

- 现在，根据约束问题的包络定理：

$$\frac{\partial \pounds}{\partial I}=\frac{\partial V}{\partial I}=\frac{U_y}{p_y}=\frac{U_x}{p_x}=\lambda.$$

新增收入的影子价格等于每种商品消费的边际效用除以商品的花费。

- 同样由包络定理：

$$\frac{\partial V}{\partial p_x}=\frac{\partial \pounds}{\partial p_x}=-\lambda X. \tag{3}$$

- 注意这个表达式的推导。一单位价格上升的效用花费等于增加的货币成本（仅仅等于X，你的预备消费量）乘以新增收入的影子价格。

- 回到薯片的例子，如果你想买 10 袋，价格上升 1 美分你就多花了 10 美分。按照以前的效用，这 10 美分的价值是λ乘以 10 美分。

- 将 3 和 4 联立，我们得到下面的表达式：

$$-\frac{\partial V(P,I)/\partial P}{\partial V(P,I)/\partial I}=X(P,I), \tag{4}$$

称为 Roy 恒等式。

- Roy 恒等式同上面的引理是相似的；二者都是通过对价格微分的方法得出需求函数，解答消费者问题。不同之处在于，Shephard 引理对支出函数进行微分得出补偿需求函数，而 Roy 恒等式则是对间接效用函数进行微分得出非补偿需求函数。

- 我们现在来运用这些工具……

2 中国的吉芬物品（Jensen 和 Miller）

2.1 目录

- 在中国，30%多的人口日均生活费少于 1 美元。（这个信息是 2002 年的，既这篇论文完成的时候；由于中国的迅速增长，这些肯定已经过时了）。

- 这些人的饮食结构很简单，主要由大米和面条组成，加上一些猪肉以及其他肉类。

- 仅从大米和肉中大多数消费者获取总热量的 70%。

- 重要的是，对于大米和面条的地域偏好差异相当大（表 1a）。
  在南方，大米是主食。
  在北方，面条是主食。

- 无论是相比大米还是面条，肉都是更受偏好的，但是也更贵。每元钱肉提供的卡路

里或蛋白质只相当于大米或面条的三分之一（表 2）。

2.2 实验

Jensen 和 Miller（J&M）从 1989，1991，1993 年的中国健康和营养调查（CHNS）中获得了非常精确的数据。这些数据包括：

- 3 天时期的进食记录
- 当地所有主要食物的市场价

接着他们做了如下假设：

- 当地食物价格水平的变化是外生的，时高时低。
- 这种变化可能是由于任何供给和需求的因素。这有什么意义？
- 家庭是价格接受者，所以他们仅面临市场价格。

方法是考察家庭对于价格变化的反应程度。因为 J&M 数据（既同一个家庭，不同时期），他们可以大概地保证个人的口味不变。方式是：

- 同一个人
- 同样口味
- 不同价格
- 研究问题：消费发生了什么变化

对价格变化导致的需求数量变化，吉芬的基本预测是什么？

2.2.1 实验设置

我们用我们的结果符号来设置这个实验，尽管 Jensen 和 Miller 没有这样做。

考虑南方的两个地方，j 和 k。

令 Y_{jt} 为在 t 时刻 j 地家庭大米的消费量，Y_{kt} 同样。

如果大米的价格很高就令 $X_{jt}=1$，若很低则令 $X_{jt}=0$（在 t 时刻 j 地）。

我们可以认为这个实验“自然”随机选择米价 $(X = \{1,0\})$。

如果这种随机化是有效的，有下面的式子：

$$
\begin{aligned}
E\left[Y_{jt}^{0}|X_{jt}=0\right] &= E\left[Y_{kt}^{0}|X_{jt}=0\right], \\
E\left[Y_{jt}^{1}|X_{jt}=1\right] &= E\left[Y_{kt}^{1}|X_{jt}=1\right].
\end{aligned}
$$

这就是说，面临相同的价格，j和k地有相同的大米需求。如果这样的话，我们只用比较j地和k地大米的需求（消费数量）。吉芬预测是$Y_{jt}^1 > Y_{kt}^0$，也就是如果米价很高的话j地比k地消费更多的大米。

然而这并不十分令人满意，因为j地和k地的大米需求有着潜在的细小的区别。这就是倍差法应用的地方：

比如说：

$$
\begin{aligned}
Y_{jt} &= \alpha_j + X_{jt} \cdot T + \delta_t \\
Y_{kt} &= \alpha_k + X_{kt} \cdot T + \delta_t,
\end{aligned}
$$

这里T是高价“处理”对消费量的影响，δ_t是时间效应（需求是季节性变化的）。

现在，想想你有下面的两行两列的表格：

	$t=1$	$t=2$
j 地（处理）	$Y_{j1}, X_{j1}=0$	$Y_{j2}, X_{j2}=1$
k 地（控制）	$Y_{k1}, X_{k1}=0$	$Y_{k2}, X_{k2}=0$

这里我们在 1 期两地大米的价格都很低时取得米价的基线数据。在 1 期，j地的米价上升。再次进行比较，得到了什么？

$$
\begin{aligned}
\Delta Y_j &= Y_{j2} - Y_{j1} = \alpha_j - \alpha_j + T + \delta_2 - \delta_1 = T + \delta_2 - \delta_1 \\
\Delta Y_k &= Y_{k2} - Y_{k1} = \alpha_k - \alpha_k + \delta_2 - \delta_1 = \delta_2 - \delta_1 \\
\Delta Y_j - \Delta Y_k &= T.
\end{aligned}
$$

因此经由这样的倍差设置，我们就能分辨出处理的效果。

注意到这个“实验”中一个很有趣的地方：每个家庭都有自身的前后比照。这意味着 Jensen 和 Miller 也假设*因果关系短暂性*。（不过他们不必假设*暂时稳定性*，因为控制组提供了对时间效应的估计：$\delta_1, \delta_2 ... \delta_T$。）

3　预测和结果

地方间价格的差别提供了控制组。在最简单的例子中，1 地的价格上升，2 地的价格不变。

- 南北方相比会有不同的吉芬预测吗？
  是的。只要想想一种食物占了预算的大部分，就知道主食是一种吉芬物品并且有很大的收入效应（回忆斯特拉斯基方程）。
  南方 — 大米是吉芬物品
  北方 — 面条是吉芬物品

- 低收入和高收入的家庭会有不同的行为吗？
  是的。对于高收入家庭主食可能不占预算的大部分，这样就减少了吉芬行为。低收入家庭更有可能出现吉芬行为。

- 所以，这里有一些对照：

  — 不同地方价格变化的家庭的前后比照。

  — 不同地域饮食习惯，根据哪一种会是吉芬物品预测南北方。

  — 地区内收入水平差别预测。只有穷人有吉芬需求。

有了这三种对照，就非常有利于进行令人信服的实验。

3.1 他们的发现

所有的关键结果都在表 3 中：

1. 无论在南方还是北方，大米和面条都是低档品（见第 4 行），然而猪肉是正常物品。

2. 沿着对角线看，对于南方的贫穷家庭，面条和猪肉的需求都是向下倾斜的。但是大米有向上倾斜的需求。

3. 沿着对角线看，对于北方的贫穷家庭，大米和猪肉的需求都是向下倾斜的。但是面条有向上倾斜的需求。

4. 无论在南方还是北方，对于富裕的家庭，所有的需求都是向下倾斜的。

这些结果似乎提供了吉芬需求的令人信服的证据。

有别的解释吗？