Solow 模型之详细推导

参考资料：戴维·罗默 《高级宏观经济学》
龚六堂 《经济增长理论》
研究生一年级 《高级宏观经济学》、《动态优化》课堂笔记

Solow 模型含四个变量：产出（Y）、资本（K），劳动（L）、技术进步（A）。

生产函数的形式为：

$Y(t)=F(K(t),A(t)L(t))$

满足：

① $F(\cdot,\cdot)$ 二阶连续可微；

② $F(\cdot,\cdot)$ 对变量非减且严格凹（即资本和劳动力的边际生产率都是递减的）；

③生产函数是常数规模回报的，即对任意 λ>0，有

$$F(\lambda K,\lambda AL)=\lambda F(K,AL)\,,\qquad (1)$$

从而可得到欧拉（Euler）方程：

$$F(K,L)=\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}K+\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}L\,;$$

④生产函数满足 Inada 条件，即

$$\lim_{K\to 0}F_K(K,L)=\infty,\qquad \lim_{L\to 0}F_L(K,L)=\infty$$
$$\lim_{K\to \infty}F_K(K,L)=0,\qquad \lim_{L\to \infty}F_L(K,L)=0\ 。$$

通常所讲的 Cobbel-Douglas 生产函数满足此条件：

$$Y(t)=A(t)K(t)^{\alpha}L(t)^{\beta}\,,\quad 0<\alpha,\beta<1\ 。$$

规模报酬不变的假定使我们得以使用密集形式的生产函数。

$$F(\frac{K}{AL},1)=\frac{1}{AL}F(K,AL)=\frac{1}{AL}Y\,,\qquad (2)$$

令 $k=\dfrac{K}{AL}$ 表示每单位有效劳动的平均资本数量，

$y=\dfrac{Y}{AL}$ 表示每单位有效劳动的平均产出

那么可将（2）式写为：

$$y=F(k,1)=f(k)$$

假定储蓄率为 s，资本折旧为 δ，人口增长率既定，为 $\dfrac{\dot{L}}{L}=n$，技术进步率也既

定，设为$\frac{\dot{A}}{A}=g$。

那么，

$$\dot{K}=sY-\delta K \text{。}$$

即资本的变化由储蓄（sY）减去折旧掉的资本存量。
人均资本存量的变化为

$$\dot{k}(t)=\frac{\partial(\frac{K}{AL})}{\partial t}=\frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)}-\frac{K(t)}{[A(t)L(t)]^2}[A(t)\dot{L}(t)+L(t)\dot{A}(t)]$$
$$=\frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)}-\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}-\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$$

从而有

$$\dot{k}(t)=\frac{sY(t)-\delta K(t)}{A(t)L(t)}-k(t)\cdot n-k(t)\cdot g$$

$$\dot{k}(t)=sy(t)-(n+g+\delta)k(t) \qquad (4)$$

方程（4）是 Solow 模型的关键。

均衡时人均资本存量不再变化，$\dot{k}=0$，于是得到

$$sf(k^*(t))=(n+g+\delta)k^*(t)$$

作图：

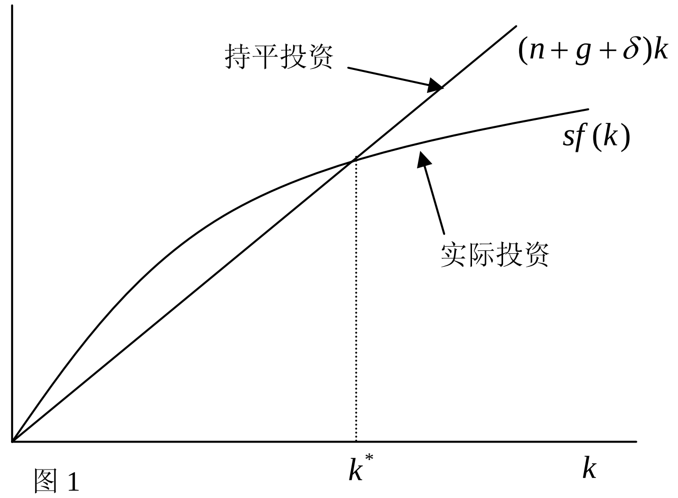

图 1

如果每单位有效劳动的平均实际投资大于所需的持平投资，则k上升。反之，如果每单位有效劳动的平均实际投资小于所需的持平投资，则k下降。如果两者相等，则k不变。从图中显然可以看出，不管经济初始位于何处，最终总能达到均衡（这一点与 Ramsey 模型有显著区别）。
根据图 1 可研究储蓄率 s，人口增长率 n，技术进步率 g 的变化对均衡人均资本存量的影响。具体讨论参见罗默书。

资本的黄金积累率

这是求一储蓄率，在这一储蓄率下，均衡时居民的人均消费水平达到最大化。这时的人均资本存量称为黄金律资本存量水平。

$$\max_{s} c(s) = f(k^*) - sf(k^*) = f(k^*) - (n+g+\delta)k^*,$$

特别要注意的是其中的每个 k^* 均是均衡资本存量，显然 k^* 也为 s 的函数，

由一阶条件：

$$\frac{\partial c(s)}{\partial s} = [f'(k^*) - (n+g+\delta)]\frac{\partial k^*}{\partial s},$$

故黄金律的资本存量水平 k^{**} 必须满足

$$f'(k^{**}) = (n+g+\delta)\text{。}$$

（黄金积累率是资本存量的所有平衡增长路径当中的最佳路径。）

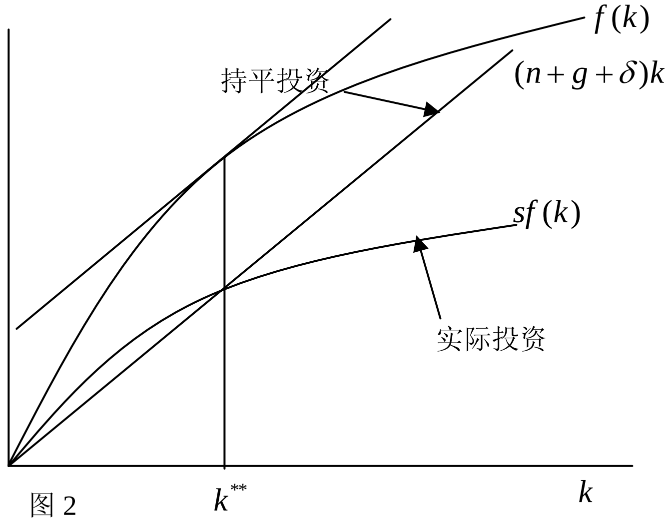

图 2