讲义：不确定性，期望效用理论和风险市场

David Autor
14.03 2004 秋季

1 风险回避和保险：介绍

- 目前我们的理论中还有个很大的漏洞，即我们只有排除了不确定性的选择模型。
- 这是为了简便，但并不特别合理。
  - — 价格变化
  - — 收入波动
  - — 坏事发生
- 多数重大的决定都是向前看的，而且取决于我们的信条，即什么计划对现在和未来都是最优的。不可避免地，这些选择都是在不确定的背景下作出的。那么就会存在我们在计划中的假设并不成立的风险（实际上是可能性）。很可能是在做计划的时候，我们就要考虑到这些偶然和可能性。
- 如果我们想要一个现实的选择模型，就必须考虑到不确定性如何影响选择和状况。
- 这个模型会有助于解释：
  - — 人们如何在回报不确定的“组合”中做出选择的，例如，是否搭飞机，和谁结婚。
  - — 保险：为什么人们会想要购买它。
  - — 市场如何（以及为什么）操作风险。

1.1 一些例子

1 人们似乎不想那么精确地进行公平比赛。公平比赛 $E(X)=$ 代价或准入 $=$ $P_{win}\cdot$ 赢家\$
$+\ P_{lose}\cdot$ 输家\$。

- 大多数人不会参与一个\$1000 的抛硬币游戏，尽管头/字的选择是很公平的。

2 人们不一定会参与一个统计算法上*有利*的游戏。

- 有这样一个赌局给你，我们抛一个硬币。如果是头像朝上，我给你 1000 万美元。如果字朝上，那么你欠我 900 万美元。

  它的期望货币价值是：

$$\frac{1}{2}\cdot 10-\frac{1}{2}\cdot 9=\$0.5\text{ 百万}$$

  想玩么？

3 人们*不一定*会付大量的钱来玩一个有巨大潜在利益的游戏。例：“圣彼得堡悖论”。

- 抛一个硬币。一旦头像朝上，我就付给你 2^n 美元，这里 n 是所抛硬币的次数：

$$X_1=\$2, X_2=\$4, X_3=\$8, \ldots X_n=2^n$$

- 这个游戏的期望效用是多少？

$$E(X)=\frac{1}{2}2+\frac{1}{4}4+\frac{1}{8}8+\ldots\frac{1}{2^n}2^n=\infty$$

- 你*愿意*支付多少玩这个游戏？[人们一般不会想为玩这个游戏而付出太多钱。]

- 这个赌局中的方差是多少？$V(X)=\infty$。

- 一个期望货币价值为正的赌局却有负的“效用价值”，这使人想到了人们行为中的一些普遍而重要的东西。

- **作为一般性规则，不确定的期望在效用上比确定的期望的价值要小得多，即使它们的预期回报是相同的。**

- 我们要说明人们如何进行选择：

  — 行为人会对结果进行估价（如我们一直建立的模型）

  — 行为人也对这些结果的风险有感觉/偏好。

2 三个简单的统计学概念[背景/复习]

1 概率分布：

定义世界 1,2……n 的状态中的事件发生的概率为 $\pi_1,\pi_2\ldots\pi_n$。
有效的概率分布满足：

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_i=1,\ \text{或}\ \int_{-\infty}^{\infty}f(s)\partial x=1\ \text{和}\ f(x)\geq 0\ \forall x.$$

2 预期价值或“期望”
比方说每种状态 i 的支付为 x_i，那么

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n}\pi_i x_i\ \text{或}\ E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\partial x.$$

3 方差（离散）

同样预期价值的赌局可能会有不同的离散程度。

我们用方差来计算离散程度。

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n}\pi_i\left(x_i-E(x)\right)^2 \text{ 或 } V(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-E(x)\right)^2 f(x)\partial x.$$

在投骰子的例子中，$V(x)=\sum_{i=1}^{n}\pi_i\left(i-\frac{7}{2}\right)^2=2.92$。

离散和风险是这两个概念是相近的。保持 $\boldsymbol{X}$ 的期望不变，离散程度越大意味着结果就越“有风险” — 面向上和面向下的可能性都增加了。考虑三个赌局：

1 固定的$ 0.50。$V(L_1)=0$。

2 头像朝上能得到$ 1.00，字朝上就是 0。
$V(L_2)=0.5(0-.5)^2+0.5(1-.5)^2=0.25$

3 抛 4 次硬币，每次头像朝上得到$ 0.25。
$V(L_3)=4\cdot\left(.5(0-.125)^2+.5(.25-.125)^2\right)=0.0625$

4 抛 100 次硬币，每次头像朝上得到$ 0.01。
$V(L_4)=100\cdot\left(.5(.0-.005)^2+.5(.01-.005)^2\right)=0.0025$

上面 4 种“博彩”有相同的期望，但是它们的风险水平却不同。

3 风险偏好和期望效用理论[1]

3.1 风险选择的描述

- 我们假想决策者面对一些有风险的选择。每个有风险的选择都可能带来许多可能的结果之一，不过会发生哪种结果是不确定的。

- 令一种结果为一个货币支付或消费组合。

- 假设可能的结果的数量是有限的，并且把这些结果标记为 $n=1,...,N$。

- 进一步假设每种结果的概率都是*客观上已知*的。例：有风险的选择就象旋转着的饿轮盘赌上的货币回报。

- 我们理论大厦的基石是博彩的概念：

  定义 1 *一个简单博彩* $\boldsymbol{L}$ *就是一系列* $L=(p_1,...p_N)$*，对所有的* n *都有* $p_n\geq 0$ *以及* $\Sigma_n p_n=1$*，这里* p_n *是结果* n *发生的概率。*

- 在一个简单博彩中，可能出现的结果是确定的。

- 一种更普遍的不一样的博彩，称为复合式博彩，它结果就是一些简单博彩。

定义 2 *给定*K*个简单博彩* $L_k = (p_1^k, ...p_N^k)$， $k = 1..., K$, *它们的概率为* $\alpha_k \geq 0$ *并且* $\Sigma_k \alpha_k = 1$，*复合式博彩*$(L_1, ...L_K; \alpha_1, ...\alpha_K)$ *就是这样一种风险选择，即对于* $k = 1, ..., K.$，*有*α_k *的概率引发一个简单博彩* L_k *。*

- 对任何一个复合式博彩$(L_1, ...L_K; \alpha_1, ...\alpha_K)$，我们能计算同简单博彩 $L = (p_1, ...p_N)$产生一样无穷分布结果的相应的*简化博彩*。所以，简化博彩中结果n的概率为：

$$p_n = \alpha_1 p_n^1 + \alpha_2 p_n^2 + ... + \alpha_k p_n^k.$$

- 也就是，我们把所有 k个博彩中每个结果n的概率 p_n^k都乘以每个博彩 k的概率 α_k，然后将它们简单地加总。

3.2 对博彩的偏好

- 现在我们来研究决策者*对博彩的偏好*。

- 模型依据的基本前提就是哲学家所言的“唯结果论”的前提：对于任何有风险的选择，决策者仅仅关心简化博彩的最终结果。复合式博彩（可能有许多）和以之为基础的简化博彩对决策者的效率并没有差异。

- [这是真的吗？直观上难以判断这点，但很多研究表明这个假设是违反的。见你们的习题集……]

- 现在，讨论这些决策者所面对的选择，将其记为$\pounds$，表示可能的结果为 N 的所有简单博彩。

- 我们假设消费者对$\pounds$有理性的偏好关系$\succsim$，完全和可传递的关系以及允许比较任何成对的简单博彩（我强调完全和可传递这两个词，以提醒你们不同于我们学期初给出的效用理论公理，它们有着特定的含义）。

公理 3 ***连续性***。 *概率上的微小变化不会改变两种博彩的顺序。这里表现得很具体（我不会用正式的概念* b/c *以免引起混乱）。如果一碗“酱汤”比一杯“肯尼亚咖啡”更受偏好，那么 “酱汤”和非常小但有正概率的“寿司刺身”的混合结果仍然优于“肯尼亚咖啡”。*

连续性消除了“词汇”上对选择的偏好，如“安全第一”。安全第一只是词汇上的偏好，因为在安全和竞争选择（快乐）之间并不存在取舍关系，而仅仅是要求在固定的得到正效用价值时保证安全。

- 我们理论大厦第二个关键的基石是有关博彩偏好的，就是所谓的“*独立性公理*”。

公理 4 ***独立性***。*对所有的*$L, L', L'' \in \pounds$ *以及*$\alpha \in (0, 1)$，*如果对简单博彩*$\pounds$ *的偏好关*

系$\succsim$都满足独立性公理，我们有：

$$L \succsim L' \text{ 当且仅当 } \alpha L + (1-\alpha) L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha) L''.$$

- 总之，当我们将两种博彩同第三种混合时，对两种博彩混合结果的偏好顺序不取决于（*独立于*）第三种。
- 这个公理说明了博彩的“结构”或者顺序是不重要的。所以考虑一个博彩的两步：
- 步骤 1：抛出一个硬币。
- 步骤 2：
  如果头像朝上，再抛一次。支付头像$1.00，字$0.75。
  如果字朝上，掷骰子，根据结果 1—6 而支付$0.10,$0.20……$0.60。

现在考虑一个单一的博彩情况，这里：

- 我们在一个有 8 个区域的圆盘上转动指针，90º 的 2 个区域代表$1.00 和$0.75，6 个 30º 的区域每个代表$0.10,$0.20……$0.60。
- 这个单一的博彩同前一个 2 步骤的博彩有相同的概率。
- “复合式博彩”公理说明消费者对这两个博彩是无差异的。
- 反例？[这并不是一个无关紧要的假设。]

3.3 期望效用理论

- 我们现在要定义一个有着“期望效用形式”的风险选择的效用函数。我们接着会证明如果一个效用函数满足上面博彩偏好*连续性*和*独立性*的定义，那么这个效用函数就具有期望效用的形式。
- 现在重要的是要弄清楚 “期望效用理论”不能替代我们这个学期一直在介绍的消费者理论。期望效用理论将消费者理论模型扩展到了风险选择方面。标准的消费者理论仍然描述的是消费特定商品*组合*的效用。期望效用理论描述的是消费者在风险组合下的选择。

  定义 5 *效用函数 U：如果把* ***N*** *个结果赋给一组数* $(u_1, ...u_N)$，$\pounds \to \mathbb{R}$ 有期望效用形式，*那么对每个简单博彩* $L = (p_1, ...p_N) \in \pounds$ *我们有：*
  $$U(L) = u_1 p_1 + ... + u_N p_N.$$
  *有期望效用形式的效用函数称为 von Neumann-Morgenstern（**VNM**）期望效用函数。*

- *期望效用*这个词是很合适的，因为以 ***VNM*** 的形式，博彩的效用可以被看作是 ***N*** 个结果的效用 u_n 的预期价值。

- 换句话说，效用函数有期望效用形式，当且仅当：

$$U\left(\sum_{k=1}^{K}\alpha_k L_k\right)=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k U\left(L_k\right)$$

  对任何 ***K*** 个博彩 $L_k\in \pounds$, $k=1,...,K$,及其概率 $(\alpha_1,...,\alpha_K)\geq 0$, $\Sigma_k\alpha_k=1$都成立。

- 直观上看，当博彩的效用（在概率上）仅为每个结果的平均效用时，效用函数就有着期望效用的性质。

- 若一个人的效用函数有期望效用的性质，那么当他抛硬币决定得失一美元时。这个博彩的效用是

$$U\left(L\right)=0.5U\left(w+1\right)+0.5U\left(w-1\right)$$

  这里 w 是初始财富

- 问：这是否意味着

$$U\left(L\right)=0.5\left(w+1\right)+0.5\left(w-1\right)=0?$$

  不。我们实际上并没有定义*结果*的效用，当然我们也不愿假设 $U\left(x\right)=x$。

3.4 期望效用理论的证明[供自学]

- **命题 6**（*期望效用理论）设对博彩*$\pounds$ *的理性偏好关系*$\succsim$*都满足连续性和独立性公理，那么*$\succsim$*就能以期望效用形式表达效用。也即我们能给每个结果* $n=1,...,N$ *分配一个数* u_n*，这样对于任何两个博彩* $L=(p_1,...P_N)$ *和* $L'=(p'_1,...P'_N)$*，我们都有* $L\succsim L'$*，当且仅当*

$$\sum_{n=1}^{N}u_n p_n\geq\sum_{n=1}^{N}u_n p'_n$$

证明：期望效用性质（五个步骤）

假设$\pounds$ 中存在最好和最坏的博彩，$\bar{L}$ 和 $\underline{L}$ 。

1　如果$L\succ L'$并且$\alpha\in(0,1)$，那么 $L\succ\alpha L+(1-\alpha)L'\succ L'$。这由独立性公理得出。

2　令$\alpha,\beta\in[0,1]$，那么当且仅当$\beta>\alpha$，$\beta\bar{L}+(1-\beta)\underline{L}\succ\alpha\bar{L}+(1-\alpha)\underline{L}$ 。这来自前一步。

3　对于任意$L\in\pounds$，都有唯一的α_L使得$[\alpha_L\bar{L}+(1-\alpha_L)\underline{L}]\sim L$。存在性源于连续性，唯一性源于前一步。

4　函数 U：对于所有的$L\in\pounds$，赋值$U(L)=\alpha_L$，$\pounds\to\mathbb{R}$表示这个偏好关系$\succsim$。
由第 3 步可以观察到，对任意两个博彩$L,L'\in\pounds$以及$\beta[0,1]$，我们有

$$L\succsim L' \text{ 当且仅当 } \left[\alpha_L\bar{L}+(1-\alpha_L)\underline{L}\right]\succsim\left[\alpha_{L'}\bar{L}+(1-\alpha_{L'})\underline{L}\right]$$

所以当且仅当$\alpha_L \geq \alpha_{L'}$时，$L \succsim L'$。

5 对于所有的$L \in \pounds$，赋值$U(L) = \alpha_L$的函数 U 是线性的，因此有期望效用的形式。**我们想要说明对任意**$L, L' \in \pounds$，以及$\beta[0,1]$，我们都有
$U(\beta L + (1-\beta) L') = \beta U(L) + (1-\beta) U'(L)$。
由上面的步骤（3），我们有

$$\begin{aligned} L &\sim U(L)\bar{L} + (1 - U(L))\underline{L} = \alpha_L \bar{L} + (1-\alpha_L)\underline{L} \\ L' &\sim U(L')\bar{L} + (1 - U(L'))\underline{L} = \alpha'_L \bar{L} + (1-\alpha'_L)\underline{L}. \end{aligned}$$

由独立性公理，

$$\beta L + (1-\beta) L' \sim \beta \left[U(L)\bar{L} + (1-U(L))\underline{L}\right] + (1-\beta)\left[U(L')\bar{L} + (1-U(L'))\underline{L}\right]$$

重写这个式子，我们有

$$\begin{aligned} \beta L + (1-\beta) L' &\sim [\beta U(L) + (1-\beta) U(L')]\bar{L} + \left[\beta(1-U(L)) + (1-\beta)\left(1-U(L)'\right)\right]\underline{L} \\ &= [\beta U(L) + (1-\beta) U(L')]\bar{L} + [1 - \beta U(L) + (\beta - 1) U(L')]\underline{L}. \end{aligned}$$

由步骤（4），这个表达式可以写为

$$\begin{aligned} & [\beta\alpha_L + (1-\beta)\alpha_{L'}]\bar{L} + [1 - \beta\alpha_L + (\beta-1)\alpha'_L]\underline{L} \\ = & \ \beta\left(\alpha_L \bar{L} + (1-\alpha_L)\underline{L}\right) + (1-\beta)\left(\alpha_{L'}\bar{L} + (1-\alpha'_L)\underline{L}\right) \\ = & \ \beta U(L) + (1-\beta) U(L'). \end{aligned}$$

如此建立了一个满足连续性和独立性公理的效用函数，同时也有着期望效用的性质：$U(\beta L + (1-\beta) L') = \beta U(L) + (1-\beta) U'(L)$

3.5 期望效用理论总结

- 一个对博彩有 ***VNM*** 期望效用偏好的人会按照他的期望效用最大化来行动 — 每种状况下的平均效用由它们的概率来衡量。

- 如果这个模型是正确的，那么我们就不必为了对人们的风险选择作出强有力的预测而准确地知道每个人对风险的感觉。

- [如果这个模型不是全部正确的（肯定是这样）它也能提供对世界的有用的描述，或是规范地引导人们应该如何基于分析作出风险选择。]

- 为了运用这个模型，有两个元素是不可或缺的：

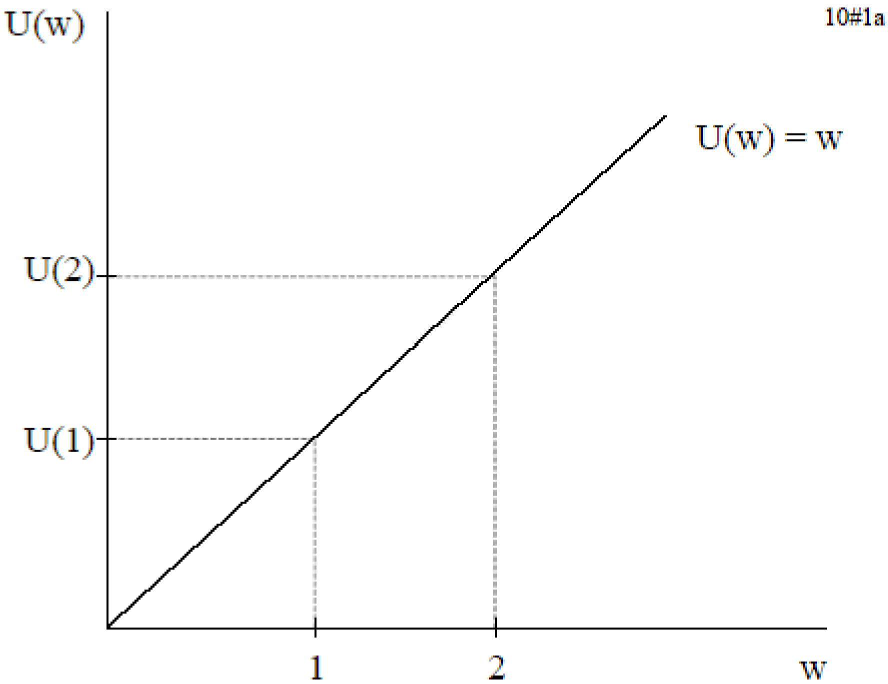
  1 第一，按序数效用排列商品组合的效用函数。注意这样的效用函数是定义在仿射（即正线性）交换上的。这意味着要求比标准的定义在单调交换上的消费者效用函数有更多结构（即更有限制性）。

  2 第二，***VNM*** 假设。消费者面对有风险的选择（即或然的结果）时，会对这些商品组合按照这个效用函数进行排序。这就是说消费者接受了这些对选择最

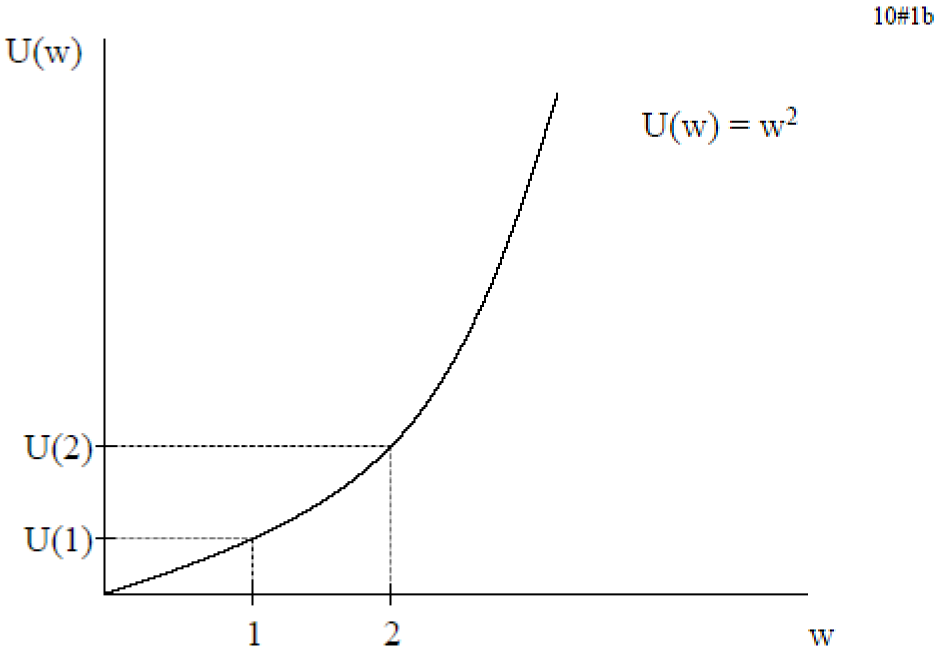
优化做出的强假设。

4 期望效用理论和风险回避

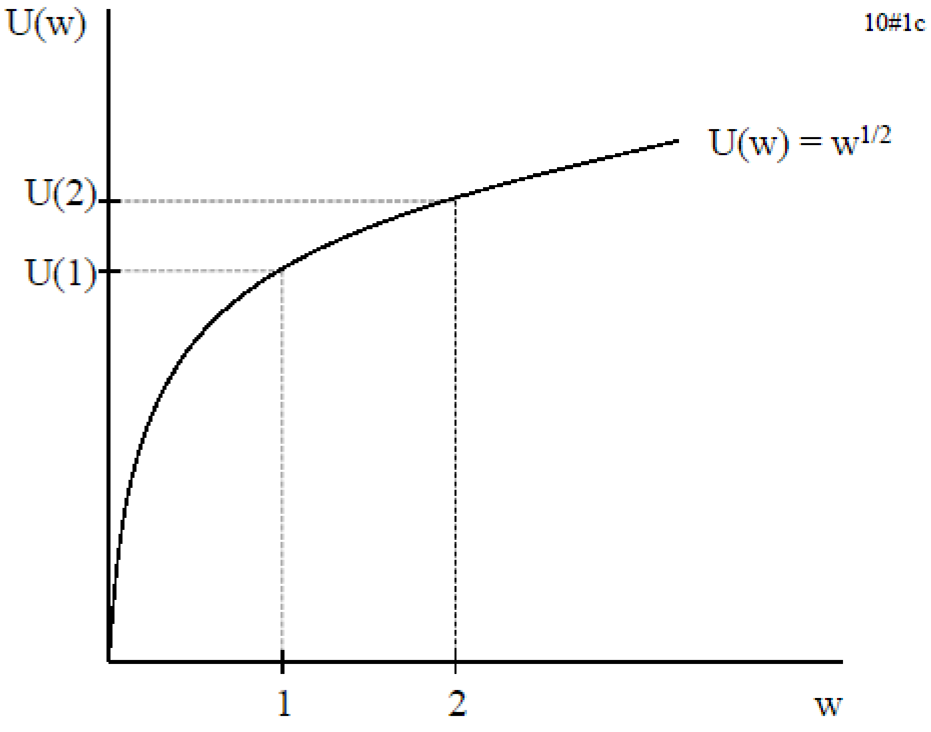
- 我们开始解释风险回避。到目前为止，我们所做的是说明了期望效用理论。
- 风险回避源何而来？
- 考虑下面三个效用函数描述了三种不同的期望效用最大化：
- $u_1(w) = w$



- $u_2(w) = w^2$



- $u_3(2) = w^{\frac{1}{2}}$



- 一个博彩中消费者面对一个两美元和零间的有 50/50 机会的单选。这个博彩的预期货币价值是$1。

- 这三个消费者在风险偏好方面有什么不同?

- 首先注意 $u_1(1) = u_2(1) = u_3(1) = 1$。也即他们认为*确定的一美元*的价值相等。

- 现在考虑一个$2 对$0 的 50/50 的博彩 ***L*** 的*确定等价*。确定等价是指以确定性代替博彩 ***L*** 的情况下消费者所愿意接受的现金的数量。

- 预期货币价值是多少？

1. $u_1(L) = .5 \cdot u_1(0) + .5 \cdot u_1(2) = 0 + .5 \cdot 2 = 1$
2. $u_2(L) = .5 \cdot u_1(0) + .5 \cdot u_1(2) = 0 + .5 \cdot 2^2 = 2$
3. $u_3(L) = .5 \cdot u_1(0) + .5 \cdot u_1(2) = 0 + .5 \cdot 2^{.5} = .71$

- 这三个效用函数对博彩 L 的确定等价是多少？

1. $CE_1(L) = U_1^{-1}(1) = \$1.00$
2. $CE_2(L) = U_2^{-1}(2) = 2^{.5} = \$1.41$
3. $CE_3(L) = U_3^{-1}(0.71) = 0.71^2 = \$0.51$

- 取决于效用函数不同，一个人为参与这个博彩会愿意付$1，$1.41 或$0.51。

- 尽管这个博彩的预期货币价值$E(V)$为$1.00，然而这三个效用函数对此估价不同：

1. 效用为U_1的人是风险中立的 $CE = \$1.00 = E(V) \Rightarrow$ 风险中立

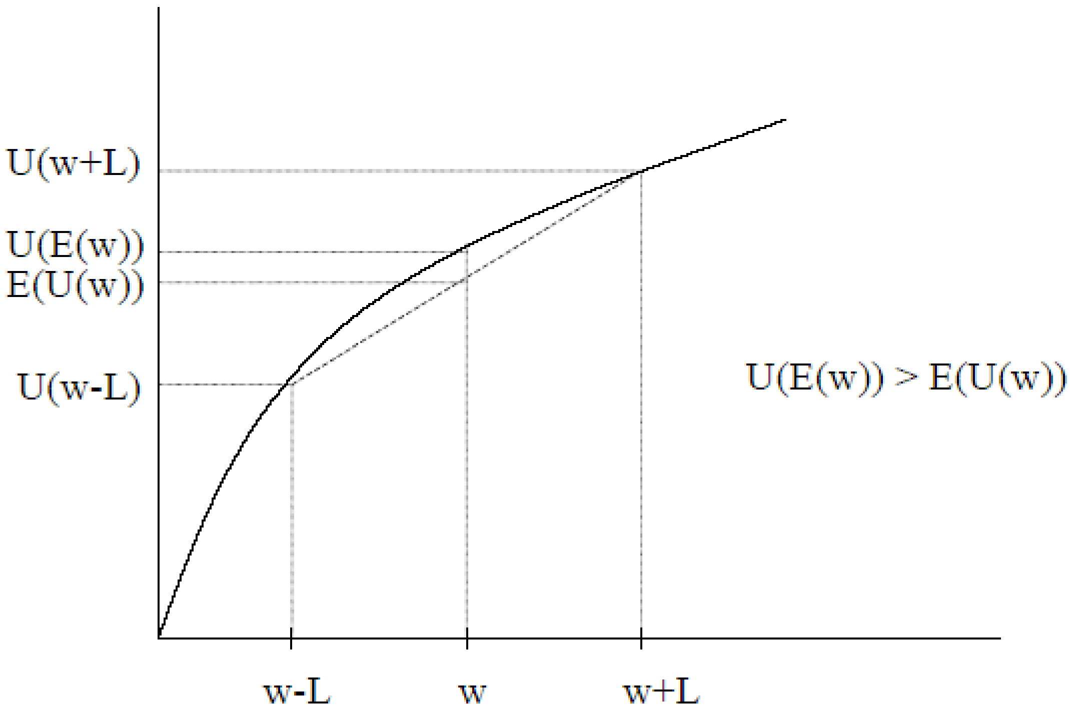
2. 效用为U_2的人是风险喜好的 $CE = \$1.41 > E(V) \Rightarrow$ 风险喜好
3. 效用为U_3的人是风险回避的 $CE = \$0.50 < E(V) \Rightarrow$ 风险回避

- 这些不等式取决于效用函数的形式。风险偏好来自于效用函数的凸凹程度：
- 财富的预期效用：$E(U(w)) = \sum_{i=1}^{N} p_i U(w_i)$
- 效用的预期财富：$U(E(w)) = U\left(\sum_{i=1}^{N} p_i w_i\right)$

- Jensen 不等式：

  - $E(U(w)) = U(E(w)) \Rightarrow$ 风险中立
  - $E(U(w)) > U(E(w)) \Rightarrow$ 风险喜好
  - $E(U(w)) < U(E(w)) \Rightarrow$ 风险回避

- 所以，期望效用理论的核心观点是：
对风险回避的行为人，财富的预期效用低于效用的预期财富（风险非零）。



- 原因如下：
  如果财富的边际效用递减（就如$U(w) = w^{1/2}$），等价货币的损失的效用成本比获得的更大。

- 由此，一项*确定*的定额财富，或者*平均*量相等然而在这个数字附近变动的财富，一个风险回避的行为人接受前者的的状况会更好。

4.1 应用：风险回避和保险

- 考虑统计算法上公平的保险，意即保险金等于预期赔款：保险金$= p \cdot A$，这里p是赔款的期望概率，A是意外事件中赔付的金额。

- 一个风险回避的人会买多少保险？

- 考虑在财富w_0处的初始禀赋，这里L表示事故带来的损失额：

$$\Pr(1-p) \quad : \quad U(\cdot) = U(w_o),$$
$$\Pr(p) \quad : \quad U(\cdot) = U(w_o - L)$$

- 如果投保的话，禀赋是（包含保险金pA，可能发生的赔款的数额A，以及损失L）：

$$\begin{aligned} \Pr(1-p) &: U(\cdot) = U(w_o - pA), \\ \Pr(p) &: U(\cdot) = U(w_o - pA + A - L) \end{aligned}$$

- 未投保的期望效用是：

$$E(U|I=0) = (1-p)U(w_0) + pU(w_o - L).$$

- 投保后的期望效用是：

$$E(U|I=1) = (1-p)U(w_0 - pA) + pU(w_o - L + A - pA). \tag{1}$$

- 此人会买多少保险（至多不超过他们的初始财富：$w_0 - pL$）？为了解决这个行为人应该购买多少保险的最优问题，（1）式对 A 求微分：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A} &= -p(1-p)U'(w_0 - pA) + p(1-p)U'(w_o - L + A - pA) = 0. \\ &\Rightarrow U'(w_0 - pA) = U'(w_o - L + A - pA), \\ &\Rightarrow A = L \end{aligned}$$

  这表明了在两种情况下（赔付或不赔付）的财富都是 $w_0 - L$。

- 如果保险在统计算法上是公平的，那么一个风险回避的人应该购买*全额保险*。

- 那么购买了保险以后此人的状况是否改善了呢？绝对如此。可以验证*尽管期望财富不变*，但是购买保险提高了期望效用。

- 现在你就能够解决这个问题了：消费者愿意支付多少购买一份给定的保险。既然保险提高了消费者的福利，那么为了抵御风险，他会愿意比*统计上公平的保险金多*支付多少？

- 这个结果从直观上怎么看？

  — **行为人试图平衡不同状态下财富的边际效用。**

  — **为什么？对于风险回避的行为人，平均财富的的效用大于财富的平均效用。**

  — **因此行为人就想把财富平均分置于各种状态中，而不是集中在一种状态中。**

  — **行为人会试图将各种状态中的财富维持在同样的水平，前提是他能在各种状态之间零成本地转移财富（统计上公平的保险使得行为人可以这么做）**

- 这同消费组合的凸的无差异曲线非常相似。

  — 商品的边际替代率递减（得自消费的边际效用递减）使得消费者的商品需求多样化而非专注于单一品种。

— 同样地，财富的边际效用递减使得消费者愿意将财富的状态多样化而非集中在一种状态中。

- 问：如果消费者是*风险喜好*的，保险问题的答案会有什么变化？

- 答：他们的意愿会位于一个边角解中。在这个边角解中，同保持期望财富稳定相反，所有的风险都转化为了那种可能性最小的状态。

- 风险越大，愉悦越多。会购买“无保险”。

- **可选：**

— 举个例子，设想行为人面对发生概率为p的带来损失为 L 的一些事件。

— 想象保险金额为pA，有损失的事件赔付为 $A=\frac{w_0}{p}$ 。

$$
\begin{aligned}
W(\text{无损失}) &= w_0 - p\left(\frac{w_0}{p}\right) = 0, \\
W(\text{损失}) &= w_0 - L - p\left(\frac{w_0}{p}\right) + \frac{w_0}{p} = \frac{w_0}{p} - L. \\
E(U) &= (1-p)U(0) + pU\left(\frac{w_0}{p} - L\right).
\end{aligned}
$$

— 对于风险喜好的行为人，把所有的鸡蛋都放在可能性最小的那个篮子里，这样他们的期望效用达到最大化。

4.2 保险运作：状态相关的或有商品

- 为了弄清楚风险偏好如何带来保险需求，要将保险视作一种“状态相关的或有商品”，一种你现在购买*但仅仅*在某些特殊状态下才*消费*的商品。

- 保险是一种状态相关的或有商品：当你购买保险时，你购买的是$1.00 的赔款权。这份保险购买于某种状态发生之前。如果相应的状态发生，那么你只能得到你购买的赔款权那么多的支付。

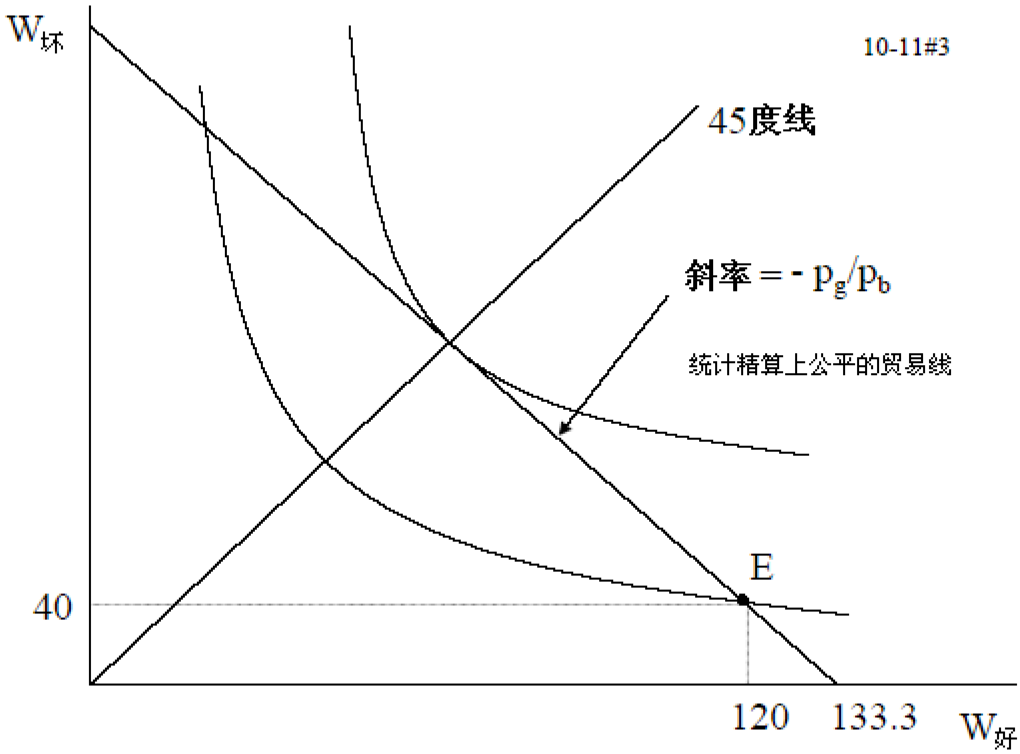
- 以前我们已经画出了有关商品 ***X，Y*** 的无差异曲线图。现在我们要画有关两种状态的无差异曲线图：*好，坏*。

- 消费者能经由保险来使用他们的禀赋（等价于预算线）从而增加不同状态下的财富，就如预算线能用于提高商品 ***X，Y*** 的消费量。

- 例：两种状态，好和坏。

$$
\begin{aligned}
w_g &= 120 \\
w_b &= 40 \\
\Pr(g) &= P = 0.75 \\
\Pr(b) &= (1-P) = 0.25 \\
E(w) &= 0.75(120) + .25(40) = 100 \\
E(u(w)) &< u(E(w)) \text{ 若行为人是风险回避的}
\end{aligned}
$$

- 见图。



- 比方说这个行为人能买到统计精算上公平的保险。它会以什么价格出售？
- 如果你想要**好**状态下的$1.00，那么*在状态显示出来之前*，它会卖$0.75。
- 如果你想要**坏**状态下的$1.00，那么*在状态显示出来之前*，它会卖$0.25。
- 为什么是这些价格？因为这些是取得赔款权的期望概率。所以，一个风险中立的行为人（如中央银行）能以$0.25 的价格将抵御坏状态的保险卖给你，并且以$0.75 的价格将抵御好状态（假设你想买的话）的保险卖给你。
- 因此价格比率就是

$$\frac{X_g}{X_b} = \frac{P}{(1-P)} = 3.$$

- 这些状态间的公平交易线可以视为斜率是$-\frac{P_g}{(1-P_g)}$的“预算线”。

- 现在我们要的是无差异曲线。

- 回忆这个博彩（禀赋）的效用是：

$$u(L) = Pu(w_g) + (1-P)u(w_b).$$

- 沿着无差异曲线

$$\begin{aligned} dU &= 0 = Pu'(w_g)\partial w_g + (1-P)u'(w_b)\partial w_b, \\ \frac{\partial w_b}{\partial w_g} &= -\frac{Pu'(w_g)}{(1-P)u'(w_b)} < 0. \end{aligned}$$

- 在$u()$为凹的条件下，这些概率空间里的无差异曲线是呈向原点的弧形。只要对第二个求导，就能立刻证明无差异曲线是向原点凸出的。不过直觉上看更直观。

  — 平坦的无差异曲线意味着风险中立 — 因为对于风险中立的行为人，对期望财富的期望效用是线性的。

  — 凸的无差异曲线意味着为了承受风险你需要得到补偿。

  — 即，如果在好状态下给你$133.33，在坏状态下给你 0，相比每种状况下给你$100，你的状况一定严格恶化了，尽管你的期望财富是

$$E(w) = 0.75 \cdot 133.33 + 0.25 \cdot 0 = 100.$$

  — 所以，为了补偿这种风险，我在好状态下给你的要多于$133.33。

  — 承受风险是有心理成本的 — 需要得到补偿。

- 因此减少风险能带来潜在的效用改进。

- 注意图中沿着 45º 线，$w_g = w_b$。

- 但是如果 $w_g = w_b$，这就意味着

$$\frac{dw_b}{dw_g} = -\frac{Pu'(w_g)}{(1-P)u'(w_b)} = \frac{P}{(1-P)}.$$

- 这样，无差异曲线同预算线会相切于不同状态下财富相等的点。

- 这是个由期望效用性质而得到的十分强的约束条件：
期望效用空间中无差异曲线的斜率一定等于概率的比。

5 一个反例（来自 MacLean,1986）

考虑下面这个有些牵强的例子。一个决策者和他的六个雇员的团队被恐怖分子胁持了。恐怖分子给他六颗子弹和六支枪，每支枪都可射击六次，并要他的雇员玩俄式轮盘，规则如下：

- 他能按照他的喜好把这六颗子弹分配到这六支枪中。
- 然后在下面的两种“游戏”中任选其一：

  1 他随意选一支枪并向所有六个雇员轮流开枪。

  2 **或者**，他随意给六个雇员每人一支枪。每个雇员转动枪的左轮（使子弹在枪中随机分布）并且开一次枪。

考虑下面的他的选择带来的可能的结果（总共有 390 万种变化）：

1 他在每支枪中放一颗子弹，任意选一支枪并且向所有六个雇员轮流开枪。结果是有一个人一定会死。

2 他在一支枪中放六颗子弹并把这些枪分给雇员。这次同样也一定有个人会死。

3 他在每支枪中放一颗子弹并分配这些枪。那么这样就有 7 种可能的结果：

(a) 没有死亡 $p = 0.335$

(b) 1 人死亡 $p = 0.402$

(c) 2 人死亡 $p = 0.201$

(d) 3 人死亡 $p = 0.054$

(e) 4 人死亡 $p = 0.008$

(f) 5 人死亡 $p = 0.001$

(g) 6 人死亡 $p = 1/6^6 \approx 0$

4 他在一支枪中放六颗子弹，任意选一支枪并且轮流开枪：

(a) 没有死亡 $p = 0.833$

(b) 6 人死亡 $p = 0.167$

5 他在三支枪中每个放两颗子弹，任意选一支并且轮流开枪：

(a) 没有死亡 $p = 0.5$

(b) 2 人死亡 $p = 0.5$

6 他在三支枪中每个放两颗子弹，把这些枪随意分配：

(a) 没有死亡 0.297

(b) 1 人死亡 0.444

(c) 2 人死亡 0.222

(d) 3 人死亡 0.037

MacLean 说，如果认为所有的雇员都是可互换的（有相同的效用价值），那么这六种情景从期望效用理论的角度看就是相同的。这正确吗？可能是的，这取决于这些结果表达在效用函数中是线性的还是非线性的。MacLean 所想的是：

$$U(L) = \Sigma_{i=1}^{6}[p_i U(D_i)].$$

这里，p_i'的和为 1，每个人的死亡带来的效用损失都是一样的。因此任何和为 1 的p_i'的组合对决策者都有着相同的期望效用。这看上去很现实。

如果说 MacLean 的模型是不正确的：死亡在效用函数中是非线性的。这样：

$$U(L) = p_1 U(1 \cdot D) + p_2 U(2 \cdot D) + ... + p_6 U(6 \cdot D).$$

进一步假设决策者是风险回避的，这意味着死亡的边际损害是递增的（两人死亡的负效用要高于一人死亡的负效用的两倍）。这个模型能对决策者的选择作出什么预测？

6 保险市场

现在考虑保险市场是如何运转的。如果每个人都是风险回避的（假设大多数人是这样的更谨慎些），保险怎么会存在？谁会出售它？

实际上有三种不同的保险运作机制：风险共担，风险分摊和风险转移。

6.1 风险共担

风险共担是多数*私人*保险市场的主要运作机制的基础。它的运转依赖于大数法则。这种机制承担了风险，或者说它消除了风险。

定义 7 *大数法则：在多次重复独立试验中，若单次试验成功的概率相同且为p，那么随着试验的次数n无限大，成功的百分比会从概率p变化到一个趋近于零的固定的正数$\epsilon > 0$。*

- 例如，掷n次硬币，头像朝上H的期望分式是$E(H) = \frac{0.5n}{n} = 0.5$。但是在这个期望（等于$\frac{p(1-p)}{n}$）附近的变动也随着掷硬币的次数增加而下降。

$$\begin{aligned} V(1) &= 0.25 \\ V(2) &= 0.125 \\ V(10) &= 0.025 \\ V(1,000) &= 0.00025 \end{aligned}$$

- 我们无法准确地预测掷一次硬币是否会头像朝上，但是我们能相对准确地预测掷 1000 次硬币会有多少次头像朝上。这个概率会相当接近于 0.5。

- 因此，通过共担大量独立风险的方式，保险公司能将不确定的结果变得几乎已知。
- 所以，“风险共担”是提供保险的一种机制。利用大数法则，它承担了独立事件的风险 — 有效地消除了风险。

6.1.1 例子：

- 比方说每年我的房子着火的几率是 1/250。如果发生了，我会损失这栋价值$250000 的房子。因此每年我的房屋发生火灾的预期成本就是$1000。
- 给定我是风险回避的，那么从期望效用上说，我承受这个风险就是代价高昂的（即比每年减少我的财富$1000 的代价更大）。
- 如果 100000 个拥有价值$250000 的房屋的人每人出$1000，那么就会筹集到$1 亿。
- 预期上，我们当中的 400 个会有房屋的损失$\left(\frac{100,000}{250}=400\right)$。
- 因此从筹款中支付大约$250,000\cdot 400=$$1 亿。
- 尽管多数没损失房屋的人都付了$1000 的保险金，但是因为它消除了风险，所以参与其中的每个人的状况都改善了。
- 可是仍然会存在一些风险，受到损失的参保人可能会多于预期的 1/400。
- 大数法则表明，若筹款的总数足够大这种浮动微乎其微，风险也是独立的。有多小？
$$\begin{aligned} V(\text{损失}) &= \frac{P_{\text{损失}}(1-P_{\text{损失}})}{100,000}\frac{0.004(1-0.004)}{100000}=3.984\times 10^{-8} \\ SD(\text{损失}) &= \sqrt{3.984\times 10^{-8}}=0.0002 \end{aligned}$$
- 当n足够大时，二项分布同正态分布十分接近，这意味着：
$$\Pr[\text{损失}\in(0.004\pm 1.96\cdot 0.0002)]=0.95$$
- 所以，损失的数目有 95%的几率在 361 到 439 之间，那么参保人的成本就在$924.5 到$1075.5 之间。
- 由于 100000 人的保险，大部分风险被抵消了。
- 随着$n\to\infty$，风险完全消失了。
- 所以风险共担产生了纯粹的帕累托改进（假设我们在知道谁的房子会发生火灾之前就建立了保险机制）。
- 在课堂上，我也会展示一些数字作为例子。这里我已经画出了独立的布尔变量，每

个都有 1/250 的概率（表示损失）。我将这些分布频率 1000 等分，样本大小（等分的数目）是变化的：1000，10000，100000，1000000 以及 10000000。

- 当样本大小为 10000000 时，受损人数超过 1/250 . N 几个百分点，这样的事实际上不可能发生。因此独立风险的共担有效地消除了这些风险 — 一个帕累托改进。

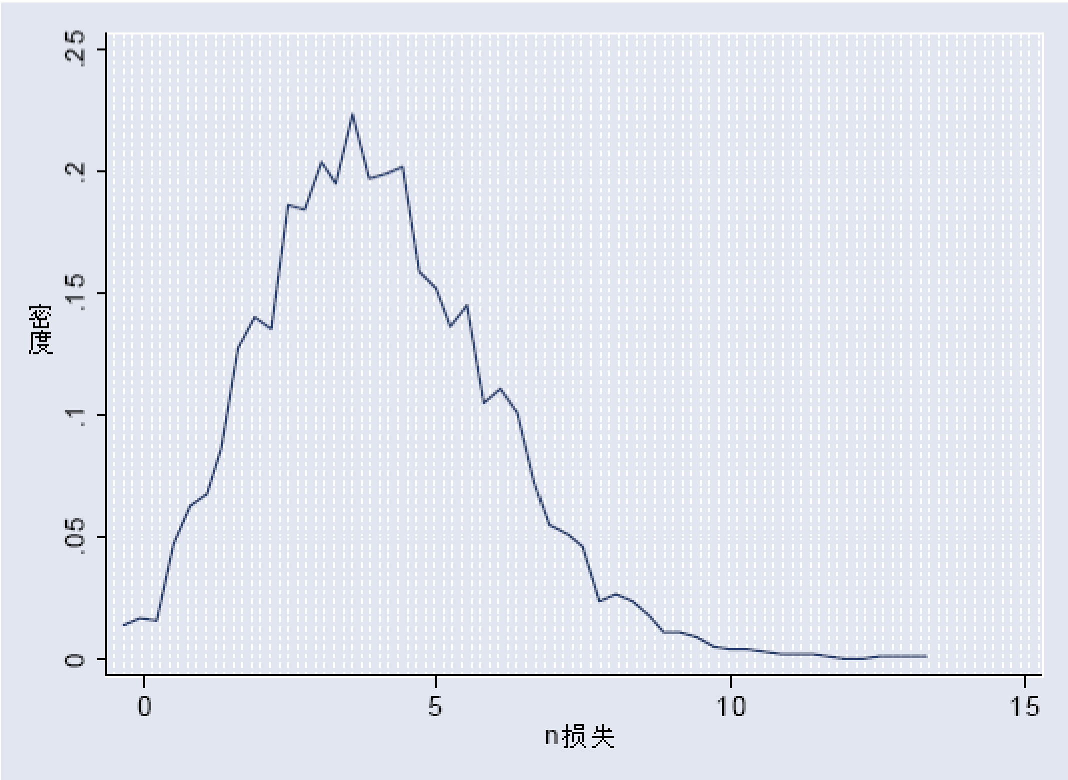


图1: N=1,000; 1,000 等份

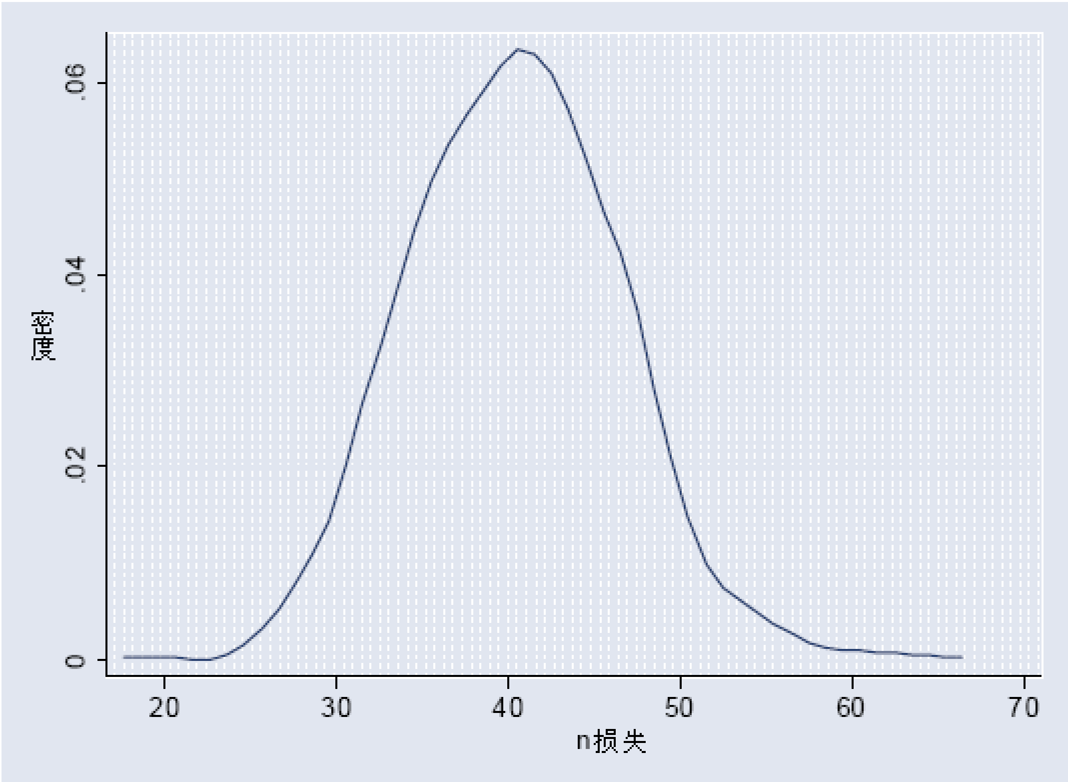


图 2: N=10,000; 1,000 等份

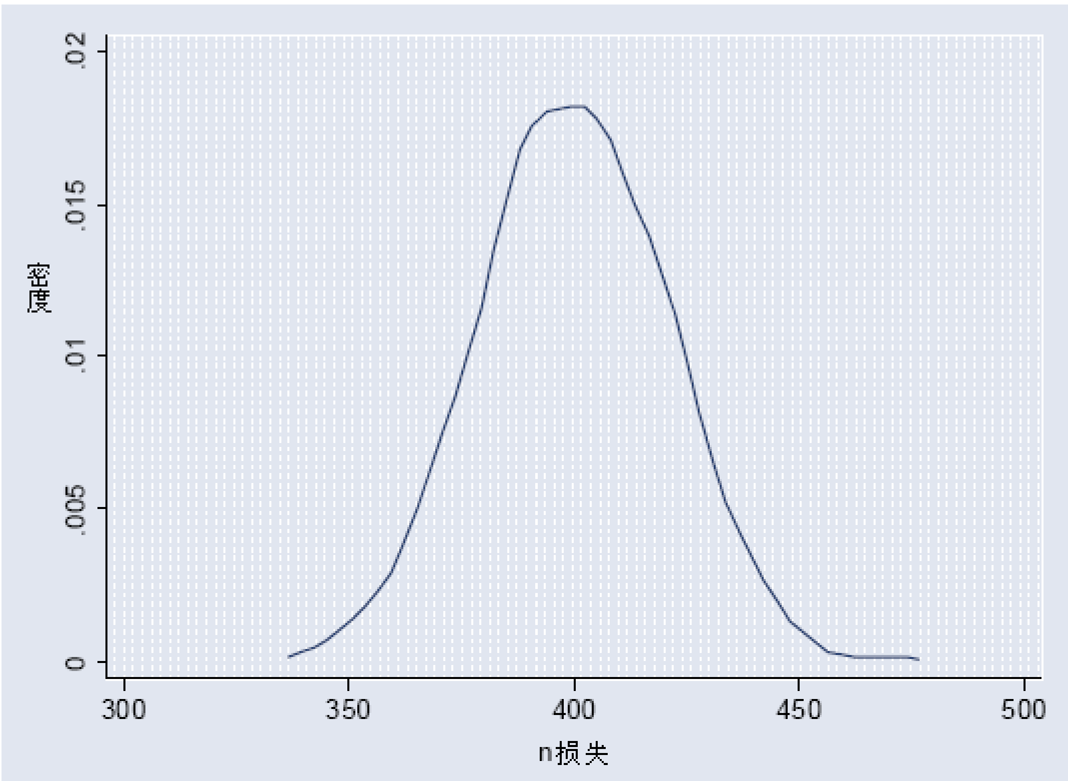


图 3: N=100,000; 1,000 等份

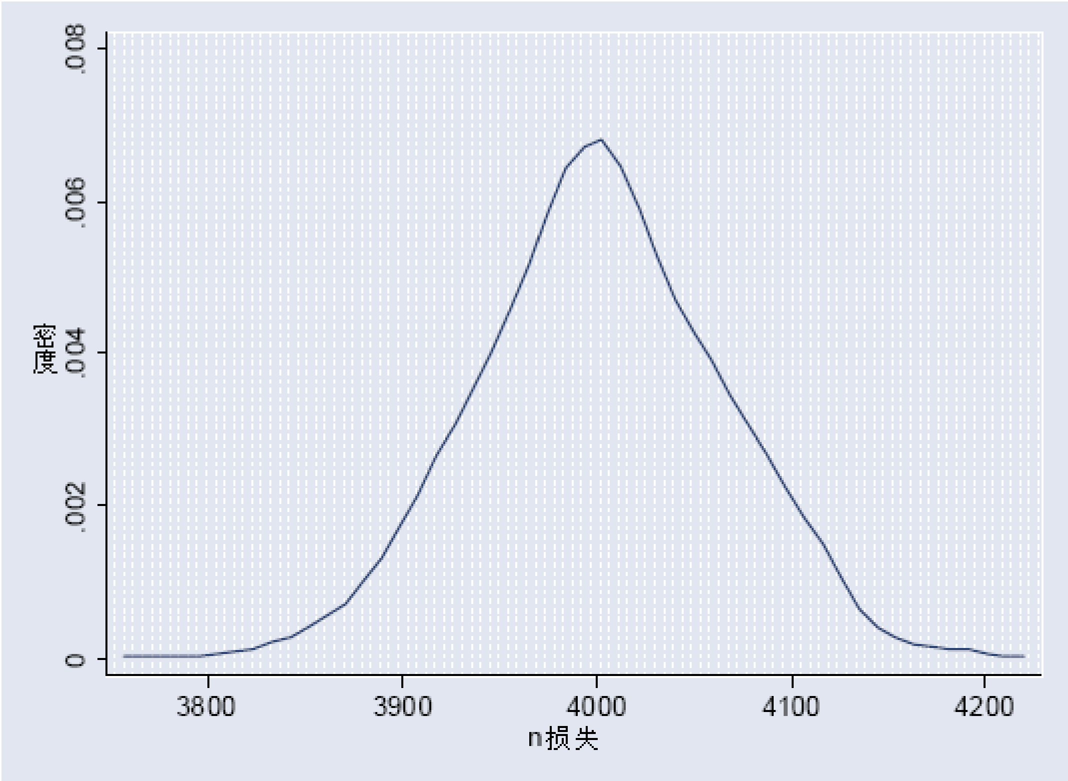


图 4: N=1,000,000; 1,000 等份

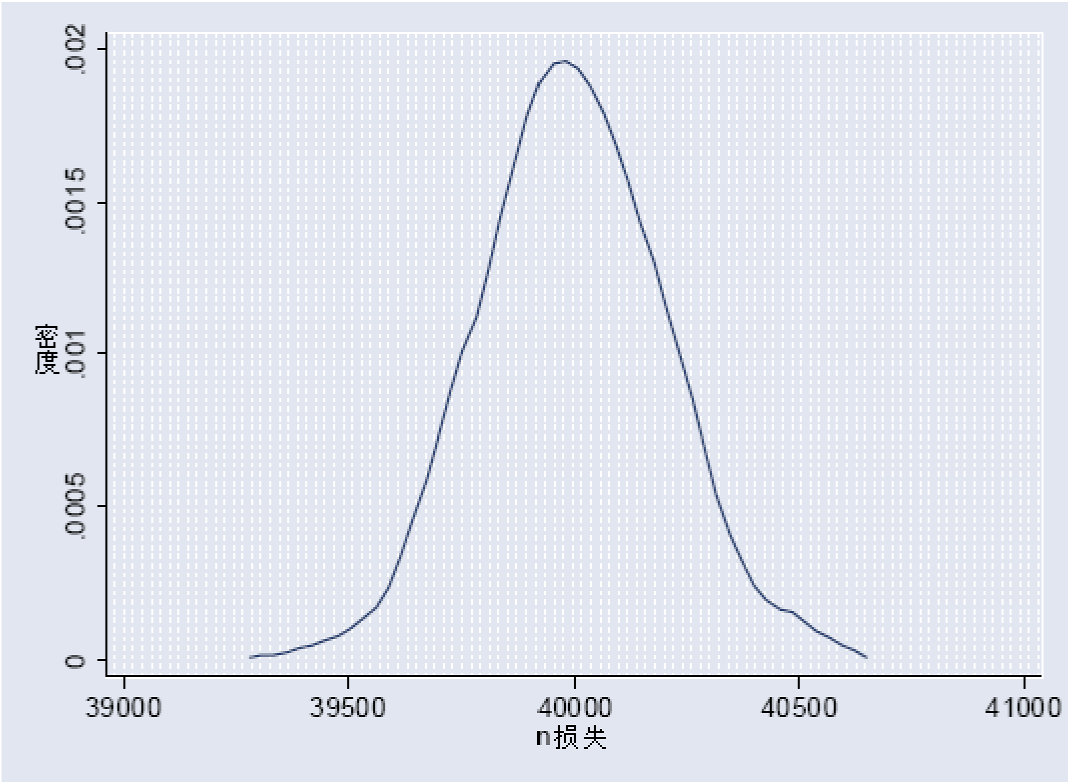


图 5: N=10,000,000; 1,000 等份

6.2 风险分摊

- 在什么情况下上面的“分担”机制不起作用呢？当风险不是独立的时候。
  — 地震
  — 洪水
  — 传染病
- 当一个灾难性的事件的发生很可能同时影响到许多人时，它（在某种程度上）就是不可分散风险。
- 这就是为什么许多灾难，如洪水，核战争等等，是保险策略所特地回避的。
- 但是不是意味着就没办法保险了呢？
- 实际上在部分人有可能没有受到影响的条件下，我们仍然能够“分摊”风险。
- 这里基本的思路是来自于（风险回避的）效用函数的凹性，从每个人那里多拿走

一点点钱的社会成本会低于从一部分人那里拿走许多钱。

- 很多风险不可能由保险公司处理，但是政府能将钱在各个团体间转移。一些例子：
  — 世界贸易中心的受害者补偿基金。
  — 医疗补助以及一些其他形式的灾难健康保险
  — 各种形式的灾难救济。
- 当灾难发生时，这些保险“策略”中的许多甚至都没制订 — 没有市场。但是政府仍然能够分摊风险来提高社会福利。
- 例如，设想有 100 个人，每个人的 VNM 效用函数为$u(w)=\ln(w)$，财富为 500。想象其中一个经历了 200 的损失。他的效用损失是
$$L=u(300)-u(500)=-0.511.$$
- 现在来考虑若我们将这个损失分配给所有人：
$$L=100\cdot[\ln(498)-\ln(500)]=-0.401.$$
- 总损失比个人的损失小很多。（这是由于效用函数的凹性。）
- 因此，风险分摊能提高社会福利，尽管它并没有抵消社会所面临的风险总量。
- 那风险分摊是帕累托改进吗？不是，因为我们必须将某些人的福利拿给另一些人。

6.3 风险转移

- 第三种思路：如果风险的效用成本是财富的减少（比如风险回避绝对的稳定也就意味着相对的下降），这意味着财富较少的人可以对财富较多的人给与支付以承受风险，并且双方的状况都会改善。
- 我们再次以$u(w)=\ln(w)$为例。设想一个人面临 50%的几率损失 100。为了消除风险这个人会支付多少？取决于他的初始财富。
- 假设初始财富是 200，这样期望效用就是
$$u(L)=0.5\ln 200+0.5\ln 100=4.952$$
这个博彩的确定等价是$\exp[4.592]=141.5$。这样，行为人就会愿意支付 8.5 来抵消风险。
- 现在考虑有相同效用函数的一个人，他有 1000 财富。期望效用为

$$u(L) = .5 \ln 1000 + .5 \ln 900 = 6.855.$$

这个博彩的确定等价是 $\exp[6.855] = 948.6$.。这样，行为人就只愿意支付 1.4 来抵消风险。

- 在 1.4 的心理成本上，富有的行为人能完全对贫穷的行为人进行保险，同时贫穷的行为人也会愿意为保险支付 8.5。在（1.4，8.5）之间，他们所达成的任何价格都代表了一种帕累托改进。

- 为什么这样做有效呢？因为对数形式的效用函数表示了绝对风险回避的下降。你越富有，承受定量货币风险的心理成本就越低。这现实吗？或许。

- 例子：伦敦的 Lloyds 曾经扮演这个风险转移的角色：

  — 承保巨大而特殊的风险：卫星发射，油轮运输，巨型轮船。

  — 这些风险从任何意义上说都是不可分散的。

  — 但是公司和个人为了抵消这些风险会愿意支付很多。

  — Lloyds 集中了英国的贵族和绅士（名人）的财富从而创造了一个超级富裕的行为人。这个行为人总体上甚至比最大的公司的风险承受能力还要强。

  — 一个多世纪以来，由于名人们的投保，这个想法给 Lloyds 带来了一个稳定的巨额现金流入。

  — 然后他们又承担了石棉责任险……

6.4 保险市场：结论

- 保险市场可能是个难以置信的有益的财务/经济机构。它能以很低的甚至等于零的总成本（在大数法则的例子中）改善人们的状况。

- 这学期晚些我们将详细地讨论为什么保险市场在实践中并不象在理论上那样运转良好（尽管它们仍然创造了大量的社会价值）。