讲义 3 — 消费者偏好公理和消费者选择理论

David Autor

14.03 2004 秋季

<u>日程</u>：

1. 消费者偏好理论

   (a) 效用函数观点

   (b) 消费者偏好公理

   (c) 单调转换

2. 选择理论

   (a) 解决消费者的问题

   - 组成
   - 解决办法的特征
   - 内部解 对 边角解

   (b) 约束下的消费者最大化

   (c) 拉格朗日乘数的解释

<u>路线图</u>：

<u>理论</u>

1. 消费者偏好理论
2. 选择理论
3. 个体需求函数

4. 市场需求

应用

1. 圣诞节的无谓损失

2. 食品券，税收和转移支付

3. 吉芬物品：理论和实证

1. 消费者偏好理论

消费者从给定的一种消费组合中得到的效用取决于个人的效用函数。

1.1 基数和序数效用

- 基数效用函数
  根据这种方法$U(A)$是一个基数，意为：
  U：消费组合 $\longrightarrow R^1$ 以“尤特尔”为单位

- 序数效用函数
  相较基数函数而言更常见
  表示对一种组合的“排位”或“偏好次序”。

$$U:(A,B)\longrightarrow\begin{cases}A\ ^P\ B\\ B\ ^P\ A\\ A\ ^I\ B\end{cases}$$

  用于 需求/消费者 理论

- 基数与序数效用函数对比

  基数效用函数的问题来自于难以找到一个合适的测量指数（尺度）。
  例：某个人的 1 尤特尔效用等于另一个人的 1 尤特尔效用吗？
  或者，若一个人的效用由 1 增加到 2，他的快乐也增加了一倍吗？
  而不带单位的序数效用函数则避免了这些问题。

  效用函数的重要性在于它能使我们建立模型探讨个人如何做出选择。为了回答这个问题，我们并不需要知道人们从每个选择中得到了多少“尤特尔”效用；只用知道他们对他们的选择如何排序就行了。

  注意：建立人际效用比较的模型会更加困难。

1.2 消费者偏好理论的一些公理

目的在于：

1. 运用效用函数的数学表达式

2. 描述理性行为（在这里理性意为“最佳化”）

3. 推导“表现良好”的需求曲线

1.2.1 公理 1：偏好是完全的（完全性）

对于任意两种组合 ***A*** 和 ***B***，消费者可以作出一个偏好次序。这就是说，对于任何供比较的组合，总是可以并且也只能选择下面的其中一种

1. $A \;^{P}\; B$

2. $B \;^{P}\; A$

3. $A \;^{I}\; B$

1.2.2 公理 2：偏好可以传递（传递性）

对于任何消费者来说如果$A \;^{P}\; B$并且$B \;^{P}\; C$那么一定有$A \;^{P}\; C$.。

消费者的偏好是一致的。

1.2.3 公理 3：偏好是连续的（连续性）

如果$A \;^{P}\; B$并且C位于 B 的ε半径内，那么有$A \;^{P}\; C$。

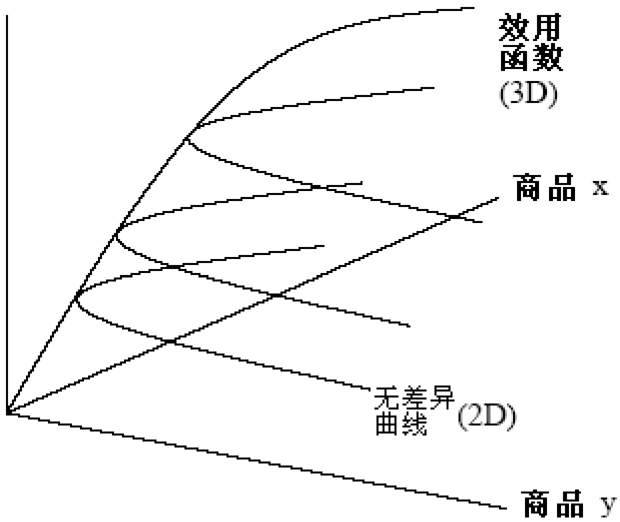
我们需要连续性以推导需求曲线。

遵从给定的公理 1-3 我们就总是能定义出效用函数。

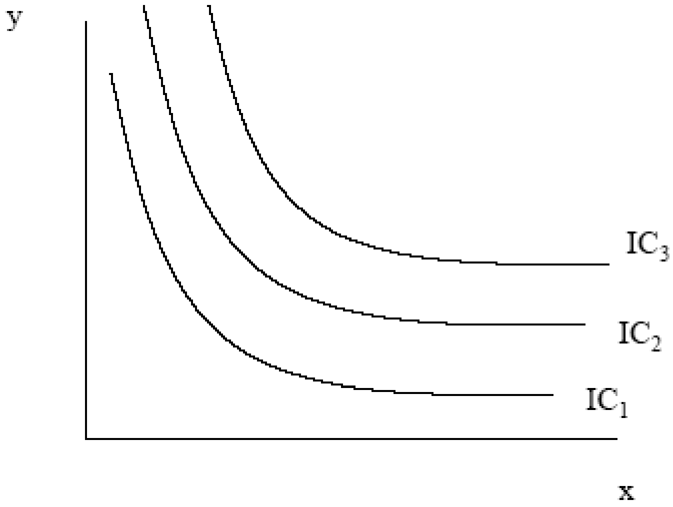
任何满足公理 1-3 的效用函数都有不相交的无差异曲线。

无差异曲线 定义一个效用水平为$U(x) = \overline{U}$以及无差异曲线$\overline{U}$，在效用函数$U(x)$中，$IC(\overline{U})$是能带来***U***水平效用的所有商品组合的轨迹。.

无差异曲线图是一系列无差异曲线族，这些无差异曲线是由每个可能的商品组合及其效用水平所决定的：$\{IC(0), IC(\varepsilon), IC(2\varepsilon), ...\}$，其中$\varepsilon = epsilon$ 。



无差异曲线是这个效用函数中各水平的集合。



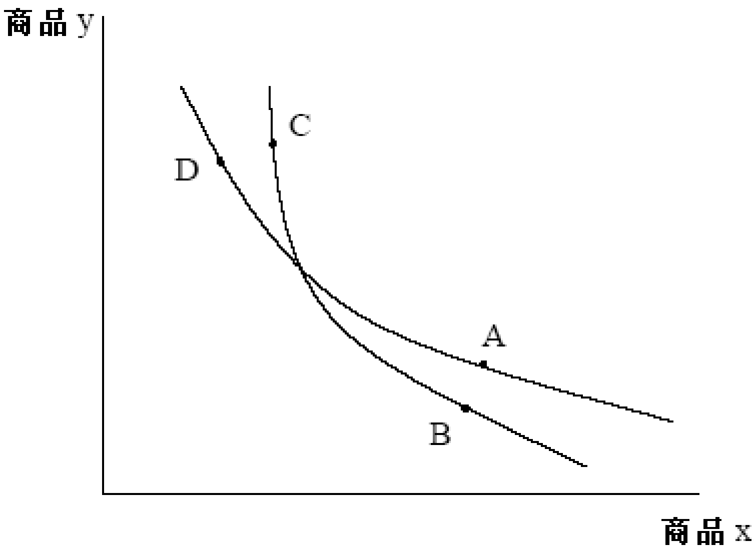
$$\left.\begin{array}{l} IC_3 \longrightarrow \text{效用水平} U_3 \\ IC_2 \longrightarrow \text{效用水平} U_2 \\ IC_1 \longrightarrow \text{效用水平} U_1 \end{array}\right\} U_3 > U_2 > U_1$$

这叫做无差异曲线图。

性质：

- 每个商品组合对应某条无差异曲线（由完全性公理）
- **无差异曲线不能相交**（由传递性公理）

证明：若两条无差异曲线相交：



根据这些无差异曲线：

$A \ ^{P}\ B$

$B \ ^{I}\ C$

$C \ ^{P}\ D$

$D \ ^{I}\ A$

而根据上面所提到的公理： $A \ ^{P}\ D$ 并且 $A \ ^{I}\ D$

存在矛盾。

为了反映观测到的行为，引入公理 4 和 5。它们使问题大大的简化了，不过对于理性选择理论来说却并不是必要的。

1.2.4 公理 4：非饱和（永远不够多）

给定两种组合，A 和 B，由两种商品组成，X 和 Y

X_A = A 组合中 X 的数量，X_B同理

Y_A = A 组合中 Y 的数量，Y_B同理

若 $X_A = X_B$ 并且 $Y_A > Y_B$（假设二者中效用都是增加的）那么 $A \ ^{P}\ B$（不论 X_A, X_B, Y_A, Y_B的大小）

这意味着：

1. 消费者总是认为更多的商品价值更大

2. 无差异曲线图无限延伸（效用没有上限）

1.2.5 公理 5：边际替代率递减

为了定义这个公理我们需要引入边际替代率的概念以及一些更进一步的预备说明。

定义：MRS 表示用一种组合交换另一种的意愿。

例：

组合 A =（6 小时睡眠，作业得 50 分）

组合 B =（5 小时睡眠，作业得 60 分）

A 与 B 处于同一条无差异曲线上

一名学生愿意为了作业多得 10 分而放弃 1 个小时的睡眠。

他想要用成绩替代睡眠的边际意愿（即少一小时的睡眠）是：$\frac{10}{-1} = -10$

$$MRS\ (sleep\ for\ points) = |-10| = 10$$

MRS，由无差异曲线衡量，能沿着同一条无差异曲线变动。如此，我们必须通过某一种组合（起始点）来确定 MRS。

$dU = 0$沿一条无差异曲线

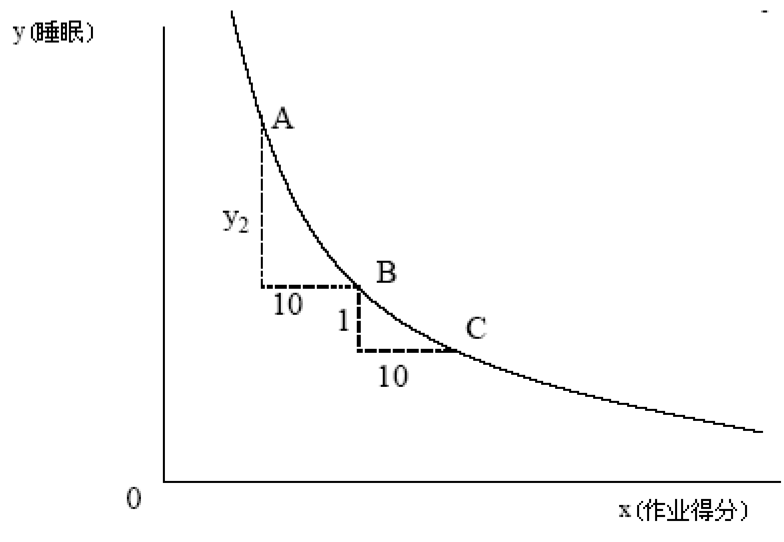
因此：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy \\ 0 &= MU_x dx + MU_y dy \\ -\frac{dy}{dx} &= \frac{MU_x}{MU_y} = x\text{对}\ y\ \text{的}\ MRS \end{aligned}$$

MRS 一定要在无差异曲线上某个特殊的点（商品组合）测定。

所以应该写作$\mathrm{MRS}(\overline{x},\overline{y})$，这里$(\overline{x},\overline{y})$是一个特定的商品组合。

我们已经为解释边际替代率递减的意义做好了准备。



当沿着无差异曲线向下时，x 对 y 的 MRS 是下降的。

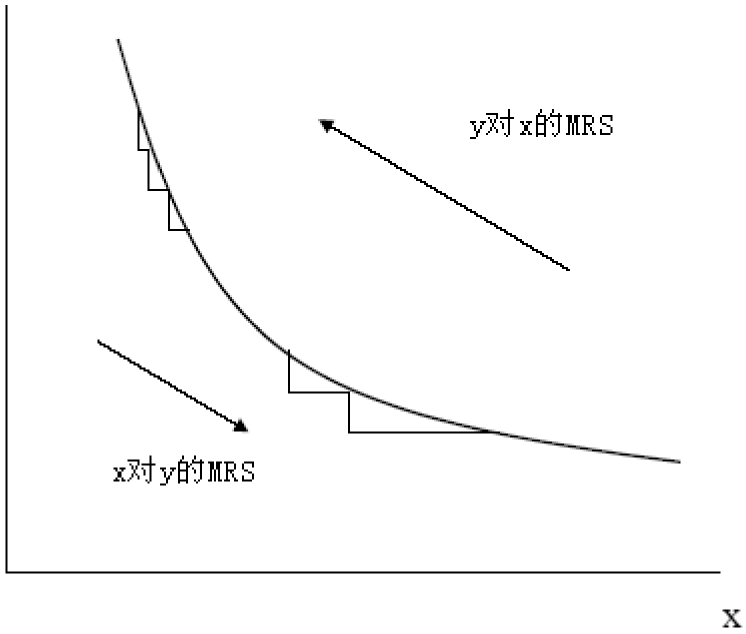
这条无差异曲线展示了递减的 MRS：随着对 x 消费的上升，消费者愿意用 x 交换 y 的的比率（边际上）是下降的。

这就是说，B 与 C 两点间的无差异曲线斜率小于 A 与 B 两点间的斜率。

递减的 MRS 是<u>边际效用递减</u>的结果。

由于对 x 的消费上升而使MU_x下降时，效用函数显示了商品 x 的边际效用递减。

两种商品的 MU 递减，在效用函数中是一条向原点凸出的弧形的无差异曲线。



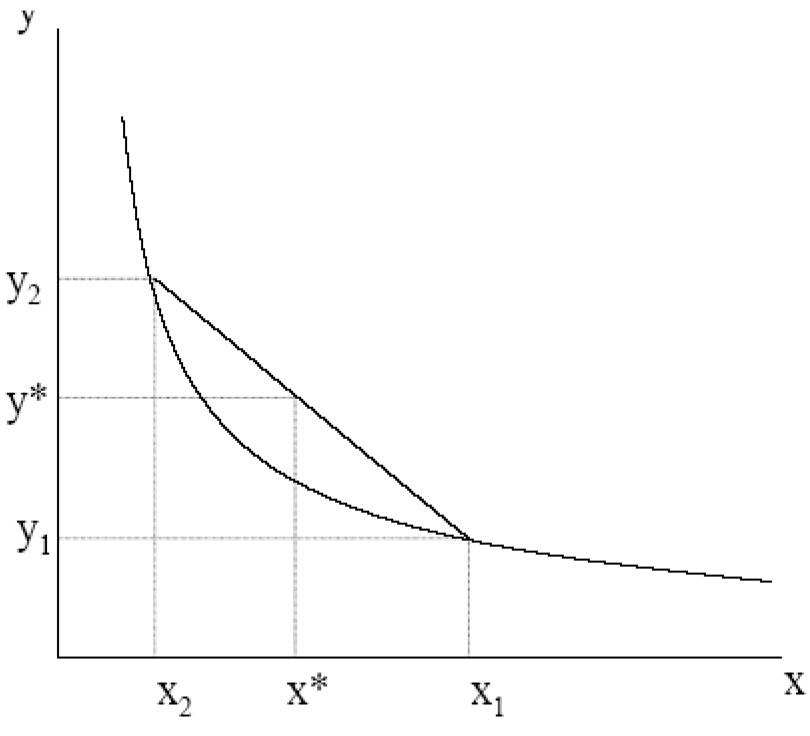
这意味着消费者总是喜好消费品的多样性。

由数学上对凸凹性的解释，能给出另一种对 MRS 递减的定义能给出。

定义：函数$U(x,y)$是凸的，若：

$$U(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha y_1+(1-\alpha)y_2)\geq \alpha U(x_1,y_1)+(1-\alpha)U(x_2,y_2)$$

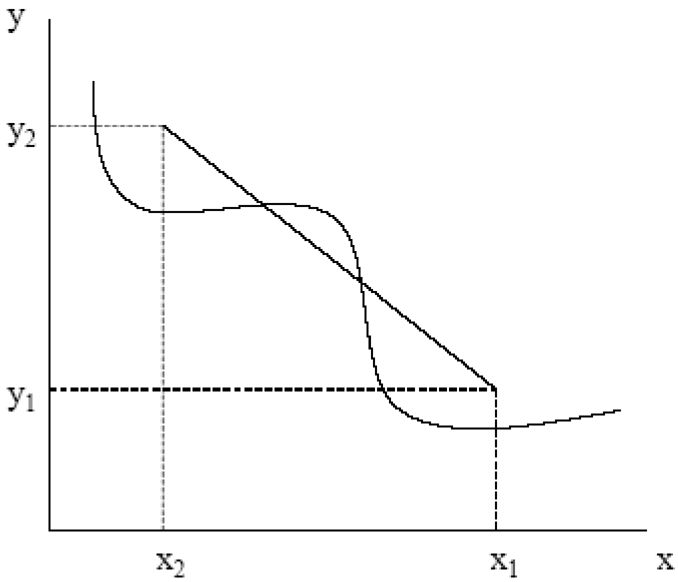
假设两种组合，(x_1,y_1)和(x_2,y_2)在同一条无差异曲线上。这种性质表示两种商品更凸出的组合位于一条更高的无差异曲线上，相较于起初的两种而言。



这里$x^*=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$以及$y^*=\alpha y_1+(1-\alpha)y_2$。

对于每个$\alpha \in (0,1)$，这都是可以验证的。

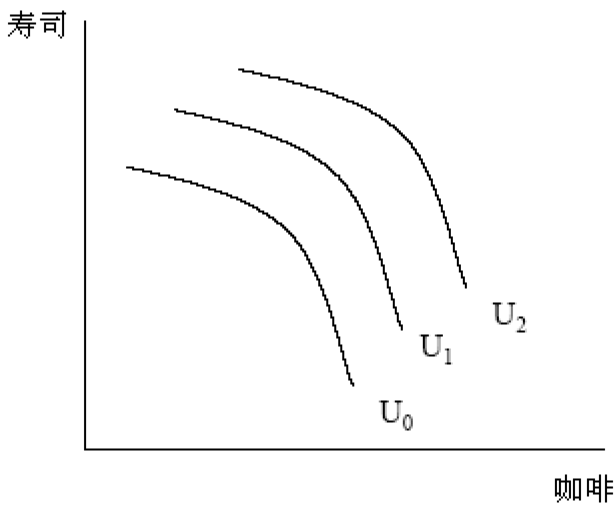
下面是一个非凸曲线的例子：



在这幅图中连接两点的线段上，不是每个点都高于曲线，所以这条曲线并不是凸的。

问：假设咖啡和寿司有相同的质量：消费的越多，想要的就越多。怎么画这个图？对于给定的预算，如果有多样化偏好的话应该这样消费么？

不，因为偏好不是凸出的。



1.3 基数与序数效用论的比较

形如$U(x,y) = f(x,y)$的效用函数是基数的，即它把“尤特尔”记为消费的函数。

显然，我们并不知道尤特尔是什么以及如何去测量它。何况我们也更不能假设 10 尤特尔效用就是 5 尤特尔效用的两倍那么好。然而，这正是基数效用论的假设。

效用函数中我们真正关心的是通过商品组合而给出的次序（排序），由此我们倾向于使用序数效用论。

我们想要知道的是$A \succ B$是否正确，而不是在什么样的程度上正确。

可是，我们也关心沿着无差异曲线上的 MRS，也就是说，我们也想要准确地知道人们

如何在无差异（等偏好）的商品组合中做出交易的。

问：我们所关心的效用的性质是怎么维持的呢？如果效用没有基数的性质的话我们如何相信（1 排序是唯一的 以及 2 存在 MRS）呢？

答：我们说效用函数仅仅定义在*单调变换*的区间上。

定义：单调变换

令 I 为线 (R^1) 上的一个区间，那么有：如果 g 是 I 区间上严格上升的函数，g：$I \longrightarrow R^1$是单调变换的。

若$g(x)$是可微的，那么$g'(x) > 0\ \forall x$

非正式地：一个变量的单调变换是保序的变化。[注意：并不是所有的保序变化都是可微的。]

例：哪些是单调函数

令 y 定义在R^1上：

1. $x = y + 1$ [是]
2. $x = 2y$ [是]
3. $x = \exp(y)$ [是]
4. $x = abs(y)$ [不是]
5. $x = y^2\ if\ y \geq 0$ [是]
6. $x = \ln(y)\ if\ y > 0$ [是]
7. $x = y^3\ if\ y \geq 0$ [是]
8. $x = -\frac{1}{y}$ [是–但在点 $y = 0$ 无意义]
9. $x = \max(y^2, y^3)\ if\ y \geq 0$ [是]
10. $x = 2y - y^2$ [不是]

性质：

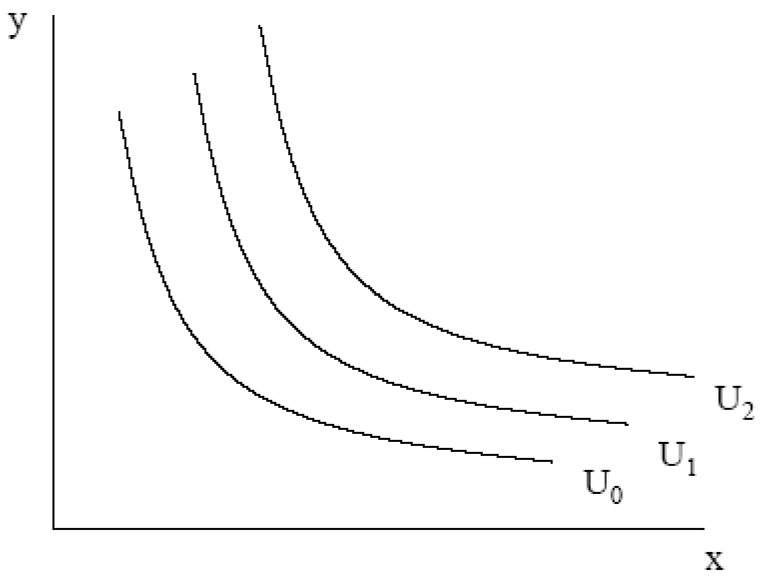
如果$U_2(.)$是$U_1(.)$的一个单调变换，即$U_2(.) = f(U_1(.))$，这里$f(.)$是在已定义的U_1上单调的，那么：

- — U_1和U_2表示相同的偏好次序

  — $U_1(\overline{U})$和$U_2(\overline{U})$的 MRS

  $\Longrightarrow U_1$和U_2在消费者理论中是等价的

例：$U(x, y) = x^\alpha y^\beta$（柯布-道格拉斯）



沿无差异曲线U_0'的 MRS 是多少？

$$\begin{aligned} U_0 &= x_0^{\alpha} y_0^{\beta} \\ dU_0 &= \alpha x_0^{\alpha-1} y_0^{\beta} dx + \beta x_0^{\alpha} y_0^{\beta-1} dy \\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{U=U_0} &= -\frac{\alpha x_0^{\alpha-1} y_0^{\beta}}{\beta x_0^{\alpha} y_0^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{y_0}{x_0} = \frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} \end{aligned}$$

考虑到一个U的单调变换：

$$\begin{aligned} U^1(x,y) &= x^{\alpha} y^{\beta} \\ U^2(x,y) &= \ln(U^1(x,y)) \\ U^2 &= \alpha \ln x + \beta \ln y \end{aligned}$$

设$U^2 = \ln U_0$'，那么U^2的沿无差异曲线的 MRS 是多少？

$$\begin{aligned} U_0^2 &= \ln U_0 = \alpha \ln x_0 + \beta \ln y_0 \\ dU_0^2 &= \frac{\alpha}{x_0} dx + \frac{\beta}{y_0} dy = 0 \\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{U^2=U_0^2} &= \frac{\alpha}{\beta}\frac{y_0}{x_0} = \frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} \end{aligned}$$

这同我们从U^1中得出的是一样的。

我们怎么知道效用函数中 MRS 总是单调变换的？
令$U = f(x,y)$是一个效用函数
令$g(U)$是$U = f(x,y)$的一个单调变换
$g(U)$的 MRS 沿无差异曲线$U_0 = f(x_0, y_0)$以及$g(U_0) = g(f(x_0, y_0))$
对这个等式全微分，我们可得到 MRS：

$$
\begin{aligned}
dg(U_0) &= g'(f(x_0,y_0))f_x(x_0,y_0)dx + g'(f(x_0,y_0))f_y(x_0,y_0)dy \\
-\frac{dy}{dx}\bigg|_{g(U)=g(U_0)} &= \frac{g'(f(x_0,y_0))f_x(x_0,y_0)}{g'(f(x_0,y_0))f_y(x_0,y_0)} = \frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y}
\end{aligned}
$$

这就是原函数$U(x,y)$的 MRS。