数学中的美

黄金分割与和谐

卓勇霖

(05级数学科学学院　　0510133)

摘　要：我喜欢在严冬的深夜拨弄心弦

线段上的黄金分割不止一点

一个中庸一个潇洒，没有高下

关键词：黄金分割；阴阳；《易》；《老子》

前面的话：我喜欢在严冬的深夜拨弄凌乱的心弦召唤来自天国被神吻过的雪，那种闪着神的智慧，泛着神的容光菊花般的雪。

1　大哉，言数!

“过去诸佛。如恒河沙。未来现在。亦复如是。”

这是佛在《楞伽经》中对弟子大慧大士所说的话。他的意思是天下的致理（佛）就像恒河中的沙子一样不可计数。是然，人类创造的智慧，多如恒沙。在我看来数学同佛儒道一样都是人类的智慧之沙。且这粒沙子也非同一般!

To see a world in a grain of sand
And a Heaven in a wild flower
Hold Infinity in the palm of your hand
And Eternity in an hour

“Auguries of Innocence”By Willian Blake

这诗虽不是数学的赞歌，但我觉得用它来形容数学再切义不过。我试着做了翻译，潦以表达我对数学的感受。

一沙一大千，一花一净土。

运掌合无边，刹那含永劫。

确然。数学正是那被神所亲吻过的雪。她幻化无穷，微妙玄通，能让你陶醉在极大的愉悦之中——心灵的愉悦！热爱数学。她将是你思接千载，视通万里的工具；热爱数学，她将是你神交三代圣王的青鸟。老子说：天得一以清，地得一以宁。我说：君子得“数” 而悠游天地；天地得“数”而和谐永续，无垢无净！

2　无所不在的“黄金分割”

为了说明我的想法，我将以“黄金分割”为平台来展开讨论。

“黄金分割” 正如其名，恐怕是数学中最闪亮的明星。人类对她 “天不老，情难绝，心似双丝网，中有千千结”。从两千多年前的毕达哥拉斯学派一直到现在，人们对黄金分割真可谓“天不

老，情难绝”。同时，人们在两千年间又总能不断发现她与万物及万物变化规律之间“心似双丝网，中有千千结”的微妙联系。

几何上，它是如此定义的，即把单位线段1分成X与(1-X)两段，使之满足：

$X:1=(1-X):X$ ，即 $x^2+x-1=0$

解之 X=$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，这种分割，史称“中外比分割”。通过计算约等于0.618。由于达芬奇将其誉为“黄金分割数”，故亦称“黄金分割”。它是如此具有奇妙的普适性，以至你会惊呼：天呐！无所不在的精灵！

首先。黄金分割是人类艺术的宠儿，特别是绘画，建筑和摄影。雅典巴台农神庙。巴黎圣母院等著名建筑的外观，都利用黄金分割比给人以美的享受。金字塔的斜面三角高与底面半边长之比也是黄金分割比。

这还不够，有时连兔子和上帝都争着往黄金分割扎堆。真真奇哉怪也！

可不，著名的“兔子数列”即斐波那契数列，就是兔子蹦出来的杰作。它是这样定义的 ：

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad (F_0=F_1=1)$$

通过运算，我们知道当n趋于无穷时数列第 $n-1$ 项与第n项之比的极限为：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

此外，上帝似乎也是玩转黄金分割的大师。这在他所造万物的身上得到应验。例如：玫瑰按“斐波那契数列”由内而外排列。常见的向日葵有两组相反的螺旋：一组排列数目是34，另一组为55。较大的向日葵螺旋数为89及144，更大的甚至还有144及233，这些全部都是“斐波那契数列”中相邻两项的数值。当然，类似的例子不胜枚举，这里由于篇幅所限不可能加入更多的实例，也不可能对所举实例做细致的解释，有兴趣的读者可以查阅相关的资料。但管中窥豹，通过上面的介绍读者应当可以感觉到，“黄金分割”的确是“金身无处不在”了。

3　我看黄金分割

以上的介绍，也许在许多的资料上都能见到，但下面的讨论就未必能找得到了。这也是本文的中心。

上文说过几何上黄金分割点在线段的$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$处。但我现在要告诉你线段上的黄金分割点不止一个！这不奇怪，也不矛盾！我们试着做如下分析，

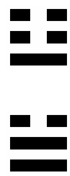
设线段AB=1.AC=$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,则根据上文的定义C即为黄金分割点。但倘若我们把AB倒着看。取BD=$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。这样就得到异于C且也在AB上的另一个黄金分割点D。好了！到此我们可以

引出黄金分割更接近本质的定义了。我的定义是线段的黄金分割应当是分别到两端点距离为（1—$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$）的两点。对应于图，即C与D。AD=BC=（1-$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$）。为什么说这种定义更接近“本质”呢？因为依据这样的定义我们能引出黄金分割一些鲜为人知的“形而上”的东西。它是深刻的，我敢说！

如果我们将A与B分别看作任何一组对立的极端的话，那么很自然地我们认为D与C是两个分别偏向于极端A与B的两个位置。上文我们讨论过黄金分割点往往是“最优”点。可凭什么是它俩，而不是极端A,B；或者是“不好不坏”的中点呢？这很有意思，引起了我的思考，也许我下面的工作能从侧面勉强回答这个问题。

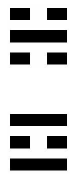
我认为“黄金分割”代表着一种至高的“和谐”。如同佛家所说的“华严”，儒家所说的“中庸”，道家所说的“自然”。在此由于笔者对佛家尚不能“言”，且先对其他两家作初步的讨论，以后有机会，再补充对佛家的说明及完善对儒道的理解。

“这种有所偏依倚”但又表达着无限和谐的思想在儒家经典《易经》中，显得尤为显著。六十四卦八宫卦最后一卦是



雷泽归妹。

而《周易》六十四卦的最后一卦是



水火未济。

（注：所谓八宫卦是指伏羲六十四卦，《周易》六十四卦是周文王研究《易》的成果，这两者是不同的），“雷泽归妹”和“水火未济”虽不同，但体现的“易理”有一个共同点，就是“不损不盈”，也就是说不走极端的好，而是寻求一种“满”与“损”的“和谐”，什么才是儒家所追求的和谐呢，当然不是中点，而是他们所倡导的中庸，倘若我们把前面的A点看作绝对的低势（阴），把B看作绝对的高势（阳）。（注：本质上说“阴”和“阳”只是两个代表相反极端的符号而已，没有高低之分，只是一般默认阴是低势，阳是高势罢了）儒家的“中庸”大多表现在偏阳性的那个黄金分割点上。

北宋有易学名家邵康节说了一个偈子“冬至子之半，天心无改移。一阳初动出，万物未生时 ”。什么意思？我们用孔子在《易.系辞》中的话来解释，子曰：“乾坤其易之门耶?

乾阳物也，坤，阴物也，阴阳合德而刚柔有体，以体天地之撰，以通神明之德”。在这里，孔子讲的很清楚，万物都有两个极端，乾与坤即阳与阴，也就是图中的两个端点，A与B。儒家所追求的和谐就是“一阳初动出”的那种感觉，刚偏阳又不完全是阳，这不就是C点吗？在《易-系辞》中，孔子还说：“一阴一阳之谓道。夫乾静也专，其动也直，是以大生焉。夫坤其静也翕，其动也辟。是以广生焉。”这正是说了阳中偏阴，阴中带阳，阴阳和合的和谐思想，亦即点C与D对“亢龙有悔”卦，孔子是如此解释的：“贵而无位，高而无名，贤人在下位而无辅，是以动而有悔也。”他是在告诫人们不要爬得那么的高啊！不要走这么远啊！过后你一定会后悔为何当初拼命往上爬，夫子教化后人是启发式的，我想他要表达的言外之意应该是劝诫人们要懂得阴阳和合的道理，在世事纷扰中寻求“和谐”，这是一种冬日阳光般的和谐。

再看道家。

“万物负阴而抱阳，冲气以为和”（《老子.四十二章》）略作思考我们很快会意识到老子说的不就是D点吗？“负阴”就是总体上偏向于阴，“抱阳”，即是有些许偏阳。留心者会发现这种思想在《老子》中几乎随处可见，试举若干：

“知其雄，守其雌，为天下谿；知其白，守其辱，为天下谷。”

“甚爱大费，多藏必厚亡。故知足不辱，知止不殆，可以长久。”

“大成若缺，其用不蔽，大盈若冲，其用不穷。”

“处莫大于欲得，祸莫大于不知足。”

“故知足之足，常足矣。”

“物壮则老，谓之不道，不道早已。”

这些话，只要粗通文理，其含义都是十分了然的，淡定而非禁欲，这是一种秋风送爽般的和谐。慨而括之。生命的道理就像黄金分割点，不拼命但拼劲，不追求极端而寻求卓越，在这点上，儒，道两家可谓殊途同归，他们追求的是线段两端不同的黄金分割点，但都达到了一种和谐，一个中庸，一个潇洒，这并无高下。此外，通过本文的分析，我们应该消除一种常有的误解，就是儒家是“明知不可为而为之”的极端入世者，而道家是“曳尾涂中”的极端出世者，两家都在追求理性的和谐，一个在左，一个在右，我想我们应该把它们理解为交相辉映才对。当然，这两者的光辉在本文中通过另一种至理而融为了一体。它就是数学！

参考文献：

[1] 《数学中的美》，吴振奎等，上海教育出版社。

[2] 《科学》第58卷第五期，作者不详，上海科学技术出版社。

[3] 《易经杂说》，南怀瑾，复旦大学出版社。

[4] 《诸子集成.老子》，上海古籍出版社。

※○

悖论中的美

张 群

（数学科学学院　 数学专业　 0510127）

摘　要：悖论是美的，它不仅表现在形式上的生动有趣，还为数学的发展做出了杰出的贡献，表现出了其深邃的美。通过阅读本文，读者可以了解悖论的基本知识、体会到其生动有趣的一面，还可以品味到其深刻的美。

关键字：悖论；美；推动；发展

数学中充满了美，悖论作为数学中的一部分也不例外，在日常生活中，当我们不经意地说出一句悖论（类似于理发师悖论）而使自己左右为难，哭笑不得时，我们发现了它的趣味性，体会到了它生动的美；在学习数学文化，通读数学发展史时，我们发现了它深刻的内涵，领略到了它深刻的美……

对于悖论的概念，也许大家并不熟悉。下面先简明扼要地介绍一下悖论的基础知识。

1　悖论的基础知识

“悖论”（paradox）是一个逻辑学的名词，其字面意思为“荒谬的理论或自相矛盾的话”。这样说或许过为笼统，下面给悖论下一个完整的定义：由一个被承认是真的命题为前提，设为 A，进行正确的逻辑推理后，得出一个与前提互为矛盾命题的结论非 A；反之，以非 A 为前提，亦可推得 A。那么命题 A 就是一个悖论。当然非 A 也是一个悖论。

更形式化的悖论定义是：“由 A 可以推导出¬ A（A 的否定的形式写法），并且由¬ A 可以推导出 A。”

从逻辑上看，悖论性的语句具有这样的特征：如果假定这个语句为真，那么会推出这个语句为假；反之，如果假定这个语句为假，又会推出这个语句为真。说它对也不是，不对也不是，真是左右为难。

作为悖论，一般说，它具有以下的特征：

① 悖论是一个命题；

② 悖论是被承认作为前提的一个真命题；

③ 以上述真命题为前提，进行正确的逻辑推理；

④ 结论是一个与前提互相矛盾的命题。（理所当然也应该承认是一个真命题）

有两个和悖论容易混淆的概念，分别为：“自毁命题”和“自成命题”。下面对这两个概念作简要的介绍。

如果由 A 可以推导出¬ A，但由¬ A 并不能推导出 A，那么这个命题就是自毁命题。自毁命题具有自毁性质，其本身是不能成立的，但它的否定却没有约束。比如克里特哲学家说：“克里特人总是说谎。”，这就是一个自毁命题。这个命题与说谎者悖论（后面会具体介绍）

很相似，但两者并不一样。假设这句话是真话，那么由它所指及这个哲学家是个克里特人的事实，可以推出这个哲学家也总是说谎，这个哲学家现在当然也是在说谎，即这句话是谎言；再看另外一个方向，假设这句话是谎话，也就是“克里特人并不总是说谎”，由此并不能推出矛盾。

自毁命题也还有很多，比如“真理是不可言说的”；“墙上不准写字”；“我没有在说话”；“我现在在睡觉”等。

自成命题的定义是：“A 并不可以推导出¬ A，但由¬ A 可以推导出 A。”自成命题具有自成性质，自成命题的否定会导致矛盾，但它的肯定却没有约束。

悖论与自毁命题、自称命题既相似，又有本质的区别，为了避免混淆，下面介绍一下它们之间的区别与联系。

悖论与自毁命题、自成命题的相同之处就在于矛盾性，即不一致性；而区别在于：悖论在肯定和否定两个方向都会产生矛盾，而自毁命题在肯定命题时会产生矛盾，自成命题在否定命题时会产生矛盾。自毁命题只能假，自成命题只能真。

2 悖论中的美

悖论是有趣的，它可以“顽皮地”使人陷入尴尬的境地。说是也不是，说不是也不是。下面举几个轻松活泼的例子，让大家体会其生动的美。

说谎者悖论是最早的悖论，它是语言学悖论中的一个典型的例子：

一个人说：“我正在说谎。”然后又问：“这句话是真话还是谎话？”如果你认为他说的是真话，那就肯定了他说谎话；如果你认为他说的是谎话，那又肯定了他这句话是真话。回答者不得不陷于矛盾。

后来又发现了好几种“说谎者悖论”的变种，例如所谓“说谎者循环”：

A说：“下面是句谎话。”

B说：“上面是句真话。”

从此，人们发现了悖论。随后，人们又试图寻找其他悖论。其中，古希腊四大悖论可谓饶有趣味。

二分法、阿基里斯（Achilles）追龟、飞矢不动、游行队伍悖论四个悖论合称为古希腊四大悖论。在这里，一些显然的事实被“振振有词”地否定了，究竟是怎么一回事呢？

二分法：

“在你穿过一段距离之前，必先穿过这个距离的一半。”意思是向着一个目的地运动的物体，首先必须经过路程的中点；然而要经过这点，又必须先经过路程的四分之一点；要过四分之一点又必须首先通过八分之一点等等，如此类推，以至无穷。由此得出的结论就是：运动是不可穷尽的过程，运动永远不可能有开始。

阿基里斯追龟：

阿基里斯是希腊传说中的一个善走的神。可芝诺（Zeno）却声言，虽然阿基里斯走的速度很快，假设10倍于龟，但却永远追不上徐徐前进的乌龟。他的理由是：开始时，乌龟在

阿基里斯前面10里，当阿基里斯走完这10里时，在这段时间里，乌龟又向前走了1里；而当阿基里斯再走完这1里时，乌龟又向前走了1/10里，这样推论下去，阿基里斯每追赶乌龟一段路程，乌龟就又向前前进了这段路程的1/10。于是，阿基里斯和乌龟之间总有一段距离，因此始终追不上乌龟。这个问题的症结在于：无限段长度的和可能是有限的；无限段时间的和也可能是有限的。

飞矢不动：

“飞着的箭静止着”。意思是飞箭在运动的任一瞬间必在空间的某一确定的位置上，因而它是静止的。

游行队伍悖论：

“跑道上有两排物体，大小相同，数目相同，一排从终点排到中间点，另一排从中间点排到起点，它们以相同的速度做相对运动”。芝诺认为据此可以说明：一半时间和整个时间相等。

上面四个悖论合称为古希腊四大悖论。在后面的时间里，人们对悖论的研究并未停止，接连发现了一些有趣且有深远意义的悖论。

下面的一个悖论是“理发师悖论”——集合论悖论的通俗形式。

一个理发师声称他只给不为自己理发的人理发。那么问题来了，这个理发师是否给自己理发？如果他不给自己理发，那么按照他的声称，他应该给自己理发。如果他给自己理发，那么他便具有“不为自己理发”性质的，也就是他不为自己理发。

其实，站在数学家的角度，有趣的“理发师悖论”并不是那么轻松。因为它引发了第三次数学危机，撼动了整个数学的基础，使多数数学家陷入了迷茫。这就引出了下面的问题——悖论中的深刻的美。

历史上共发生过三次数学危机。毫无例外，每次数学危机都由悖论引发。虽然这些悖论把数学逼到了十分危险几乎崩溃的境地，但可喜的是，数学家凭着辛勤的工作一一化解了这些难题（第三次数学危机还未得到满意的解决），与此同时，数学得到了发展。我们可以这样说：正是因为悖论的产生，才有数学的进步，悖论推动了数学的发展。

希帕索斯悖论与第一次数学危机：

第一次数学危机来源于毕达哥拉斯学派中的成员希帕索斯(Hippasus)对其内部“万物皆数”理论中矛盾的揭露，并实际上发现了数学历史上第一个无理数：$\sqrt{2}$。

所谓“万物皆数”学说，主要包含两个方面。一、数：是世界的法则和关系，是主宰生死的力量，是决定一切事物的条件。事物的实质是神按照书的原理创造出来的；二、任意两条线段都是可公度量。

从另一个方面来说：当时看来，在数学中，算术比几何是更基本的。算术以数为基础，数则由整数组成（分数不过是两整数的比）。一切几何量都可由数表示，亦即可由整数和可比数表示。

因此，几何线段的长当然也都可以由整数和可比数表示了。但是边长为1的正方形的对

角线的长是$\sqrt{2}$，显然不是可比数。这就引发了第一次数学危机：按当时的理论，一切数都是可比数，然而，却出现了一个（乃至更多）不可比数。在当时的理论体系下无法解释。

这场危机从公元前一直拖到公元后19世纪才完全解决。所谓完全解决，就是说，新的理论建立起来了，在新的理论体系下，数系扩张了，被认为是“异物”的东西成了这个体系合理的“存在物”。这场危机使算数的地位动摇了，几何的地位上升了。几何的地位支撑着数学的发展。

第一次数学危机的产生是由希帕索斯悖论引起的。无理数的发现、数系的扩充标志着危机的解除。可以这么说，希帕索斯悖论是无理数发现的一个前提条件，悖论推动了数学的发展。

贝克莱(Berkeley)悖论与第二次数学危机：

第二次数学危机导源于微积分工具的使用。但是不管是牛顿，还是莱布尼茨所创立的微积分理论都是不严格的。两人的理论都建立在无穷小分析之上，但他们对作为基本概念的无穷小量的理解与运用却是混乱的。因而，从微积分诞生时就遭到了一些人的反对与攻击。其中攻击最猛烈的是英国大主教贝克莱。

贝克莱对牛顿的理论进行了攻击。例如他指责牛顿，为计算比如说x的平方的导数，先将x取一个不为0的增量Δx，由$(x+\Delta x)(x+\Delta x)-xx$，得到 $2x\Delta x+(\Delta x)(\Delta x)$，后再被 Δx 除，得到$2x+\Delta x$，最后突然令$\Delta x=0$，求得导数为$2x$ 。这是“依靠双重错误得到了不科学却正确的结果”。因为无穷小量在牛顿的理论中一会儿说是零，一会儿又说不是零。因此，贝克莱嘲笑无穷小量是“已死量的幽灵”。贝克莱的攻击虽说出自维护神学的目的，但却真正抓住了牛顿理论中的缺陷，是切中要害的。

数学史上把贝克莱的问题称之为“贝克莱悖论”。笼统地说，贝克莱悖论可以表述为“无穷小量究竟是否为0”的问题：就无穷小量在当时实际应用而言，它必须既是0，又不是0。但从形式逻辑而言，这无疑是一个矛盾。这一问题的提出在当时的数学界引起了一定的混乱，由此导致了第二次数学危机的产生。

第二次数学危机的实质是极限的概念不清楚，极限的理论基础不牢固。也就是说，微积分理论缺乏逻辑基础，是不明确的，是含糊的。此后一百年间的数学家，都不能满意地解释贝克莱提出的悖论。所以，由“无穷小”引发的第二次数学危机，实质上是缺少严密的极限概念和极限理论作为微积分学的基础。

到19世纪，一批杰出数学家辛勤、天才的工作，终于逐步建立了严格的极限理论，并把它作为微积分的基础。

建立了严格的极限理论后，第二次数学危机便迎刃而解。我们看到了，贝克莱悖论的出现促进了微积分学的发展，同时也间接地促进了许多数学分支的诞生。悖论又一次为数学的发展做出了杰出的贡献！

罗素（Russell）悖论与第三次数学危机：

前面曾经提到的“理发师悖论”也许只会作为人们茶余饭后的一个轻松愉快的话题，而

在数学家看来，这却是一个严肃的问题。因为“理发师悖论”的严格形式——罗素悖论指出了集合论的漏洞：是刚刚建立起来的数学大厦在根基上有了深深的裂痕。

十九世纪下半叶，康托尔(Cantor)创立了著名的集合论，在集合论刚产生时，曾遭到许多人的猛烈攻击。但不久这一开创性成果就为广大数学家所接受了，并且获得广泛而高度的赞誉。数学家们发现，从自然数与康托尔集合论出发可建立起整个数学大厦。因而集合论成为现代数学的基石。“一切数学成果可建立在集合论基础上”这一发现使数学家们为之陶醉。

可是，好景不长。1903年，一个震惊数学界的消息传出：集合论是有漏洞的！这就是英国数学家罗素提出的著名的罗素悖论。

罗素构造了一个集合S：S由一切不是自身元素的集合所组成。然后罗素问：S是否属于S呢？根据排中律，一个元素或者属于某个集合，或者不属于某个集合。因此，对于一个给定的集合，问是否属于它自己是有意义的。但对这个看似合理的问题的回答却会陷入两难境地。如果S属于S，根据S的定义，S就不属于S；反之，如果S不属于S，同样根据定义，S就属于S。无论如何都是矛盾的。

危机的消除：危机出现以后，包括罗素本人在内的许多数学家作了巨大的努力来消除悖论。数学家们希望改造集合论，从而在消除悖论的同时，尽量把原有理论中有价值的东西保留下来。罗素等人分析后认为，这些悖论的共同特征（悖论的实质）是“自我指谓”。即，一个待定义的概念，用了包含该概念在内的一些概念来定义，造成恶性循环。例如，悖论中定义“不属于自身的集合”时，涉及到“自身”这个待定义的对象。为了消除悖论，数学家们要将康托“朴素的集合论”加以公理化；并且规定构造集合的原则，例如，不允许出现“所有集合的集合”、“一切属于自身的集合”这样的集合。1908年，策梅洛（E.F.F.Zermelo，1871—1953）提出了由7条公理组成的集合论体系，称为Z-系统。1922年，弗兰克（A.A.Fraenkel）又加进一条公理，还把公理用符号逻辑表示出来，形成了集合论的ZF-系统。再后来，加上选择公理，这就是著名的ZFC-系统。这样，大体完成了由朴素集合论到公理集合论的发展过程，悖论消除了。

但是，新的系统的相容性尚未证明。因此，庞加莱在策梅洛的公理化集合论出来后不久，形象地评论道：“为了防狼，羊群已经用篱笆圈起来了，但却不知道圈内有没有狼”。

这就是说，第三次数学危机的解决，并不是完全令人满意的。虽然说集合论还未达到绝对的严格，但是我们看到了集合论的改进、发展。悖论又一次推动了数学的发展。

以上简单介绍了数学史上由于数学悖论而导致的三次数学危机与度过，从中我们不难看到数学悖论在推动数学发展中的巨大作用。有人说：“提出问题就是解决问题的一半”，而数学悖论提出的正是让数学家无法回避的问题。悖论的出现逼迫数学家投入最大的热情去解决它。而在解决悖论的过程中，各种可被称作“里程碑”式的理论应运而生了：第一次数学危机促成了公理几何与逻辑的诞生；第二次数学危机促成了分析基础理论的完善与集合论的创立；第三次数学危机促成了数理逻辑的发展与一批现代数学的产生。数学由此获得了蓬

勃发展。我们从中体会到了悖论内在的美、深刻的美。它好比一位良师益友，又好比一面镜子，是数学家们清楚地看到自己理论的不足，并一步一步地推动数学的发展。因此，我们可以坚定地说：“悖论是美的!”

参考文献：

[1] 张楚廷，数学文化，高等教育出版社，2000.7月。

[2] 顾沛，数学文化，内部讲义。

[3] 申先甲，科学悖论集，湖南科技出版社，1998 。

[4] 杨熙龄，奇异的循环逻辑悖论探析，辽宁人民出版社，1986。

[5] 韩雪涛，数学悖论与三次数学危机，湖南科技出版社，1989 。

[6]《科学美国人》编辑部，从惊讶到思考——数学悖论奇景，科学技术文献出版社 1982。

※○

美丽“数”世界

王 颖

（信息科学技术学院 计算机科学与技术 0510699）

摘 要：讲述数学语言的精髓——数字的魅力，奇妙无穷从数字的起源、发展，应用解释数字的美妙，展示数学之美。

关键词： 黄金分割；自然数；圆周率；梅森素数；素数

就人类而言，每个国家都有自己的语言，就整个宇宙，每个世界也都有自己语言 ，语言是一种美妙而自然的东西，他让这个世界生机无限。数学世界也有自己独特简约，理性至上的语言，展示它朴实无华却玄而又玄的魅力的，这便是数字。

数字世界是严谨的，它将现实世界用数字诠释，我们可以发现宇宙的结构，以及宇宙运行机制的秘密，数学已经以某种神秘的方式证明了自己是人类认识世界最可靠的向导。

数字是数学中最常见、最实用、最具体、最易接近的。天地之间、星球运行、时空的递嬗、社会的构成、生产活动、交通进行、衣食住行娱乐诸般需求的供应都与数字结下了不解之缘。如今数字产品满天飞，由数字引发的高科技风暴，给我们的生活带来革新性的变化，我们更没有理由小觑数字的威力了！

此外，数字从另一个最本质的方面显示自己的威力。曾经有一本著作引爆日本数学学习的热潮——《数字——成功之本》，其作者认为数字是破译成功的密码。数字思维=创造思维，人类生活起居多处涉数，要学会用数字掌握趋势，抓住成功的机会。大到用数字掌握社会脉

动，用数字计算投资风险与获利，小到用数字分配自己做事的时间限制，让生活井井有条。学会从数字的角度冷静地思考问题，数字感好的人容易拥有更充实顺畅的生活，更容易拥有成就感，当然自信也就多一点，办事成功率自然不在话下。无须赘言，生活用数字统筹乃明智之举。

用数字统筹生活？那生活岂不会很枯燥？在大多数人的直觉中数字成了“枯燥乏味”的代名词，那我只能说你对数字的了解“只是未到通透时，细细体味子自知”。要不然，古今中外，那么多伟大的有所创举的人都投入毕生精力去研究数学难道是喜欢枯燥吗？当然不是，我们用理性看待数字，就会发现它的朴实无华，其间蕴含着深邃悠远的美，不是一眼可看穿，一触即可感的。然而当你调动一下自己的感性神经便可体味到那种品不尽的的美，普罗休斯则言简意赅的指出“哪里有数哪里就有美”， 不信请抬眼纵观一下人类的文明史，便可瞥见数字那叱咤风云的身影。

历史车轮前进，数字的符号就经历了一个漫长的过程，从古巴比伦的楔形文字到我国的算筹再到形象自如的甲骨文数字，而后我国商业曾经通用方便明快的所谓“苏州码”，而欧洲人开始使用的则是罗马数字，最终大家十分熟悉的阿拉伯数字因其简便性而传遍全世界并流传至今。同时整数，分数，小数，负数，虚数，复数，有理数，无理数一一脱颖而出，数字王国的成员在不断增加，她们各司其职，构建数字王国的繁荣昌盛。

首先出场的是数学世界的美丽女神——0.618，即最完美的比例即黄金分割，源于古希腊毕达格拉斯学派，AB：CB=CB：AC(C为AB上的点且CB为较长的线段)即为黄金分割，这是极具美学价值的数，毕氏学派成员的标志即是正五角星，这是他们精心挑选的，他们认为这是最美的图形。而正五角星中则是黄金分割的完美体现，也许这也是我们把它作为国旗上主要图案的原因吧。一些著名雕像如女神维纳斯身上多处比例都接近于0.618；埃及金字塔，古雅典娜的他侬神庙，印度泰姬陵，还有今日的巴黎埃菲尔铁塔这些世人瞩目的建筑中都蕴藏着0.618，就连达芬奇的绘画中也含有黄金比，美的地方似乎总有黄金分割的身影，管弦乐器在黄金分割点上奏出的声音最悦耳，有经验的报幕员会站在舞台宽度的黄金分割点的位置上这样最美观音响效果最佳。它不仅在音乐美术建筑方面被作为美的标准来使用，在自然界黄金比也不少见，不少植物的叶子虽然叶状不同，但在螺旋上升的排列中从茎的垂直面看去，相邻两片叶子的夹角是137度28分把圆周分成了比例为0.618的两部分， 这种排列叶片的受光效果最好从而启发建筑师设计出世房间接受阳光最充足的新颖高楼大厦。大自然几十亿年苛近完美的造化也不过如此。

0.618这个数字不仅美而且充满灵性，科学实验用最少的试验次数达到目的，也要借助黄金律， 用0.618法，也就是优选法。我国著名数学家华罗庚在应用优选法应用做出杰出贡献。该方法曾经于70年代在我国得以推广，并取得了很大的成就。在社会主义市场经济中，科学严谨的方法往往能有事半功倍的效果。如在炼钢时需加入某种元素来增加钢材强度，若将试验点取在这一元素用量区间的0.618处，获得理想用量的试验次数将大大减少。实验证明，对一个因素的问题，用优选法做16次试验，就可达到“对分法”做2000余次试验的

效果。优选法在经济、金融中已得到广泛应用，形成“用科学的方法指导实践，在实践中验证科学”的良性循环。

此外，人生存的最佳气温是23度{人体正常体温的0.618 ，有趣的是吃饭六七成饱健康，饮食六粗四精也是最合理的搭配，运动静养比：四动六静……这样一个其貌不扬的数字竟然操纵了美的角角落落，并在和谐舒服的意境里打下了一片天地。

如果0.618 这个数字因被冠以黄金的美誉而光彩夺目，那么王国一隅的素数会因此而淡出美的视野吗？答案是否定的，因为此刻他正披着神秘的斗篷在远处向人类招手，他遍及整个自然数域，梅森素数（数学家梅森最早提出的形如2^n-1的素数，后来人们找出的大素数都符合这种形式，因此称为梅森素数以作纪念）曾激发一批人为寻找其最大值而不懈努力，至今没有人能找到一个简单实用的公式表示自然数中所有的素数，就是说仍然有许多大素数不为人知。素数世界虽然有许多未解的谜，如乌拉姆现象，但它却已然开始在各个领域显示自己的作用了，中国学者张春暄认为素数反映了自然在量的方面的某种稳定性并由此提出了素数原理（由素数个基本单位组成的多体结构是有极性的稳定结构）、对称原理（由双奇素数个基本单位构成的结构是中心对称的，由此而涉及到原子结构“多稳定性理论”）；此外，多年来它都是评判电子计算机硬件综合水平（寻找大素数的能力）的方法之一，它还关系到编制和破译密码的问题，因为很多密码都是用很大的数来编制的，在这里忍不住要提到一个实例： 1977 年发明的利用素数因子分解大数字的原理来为网络加密，提高网络安全性的RSA密码编制体系，尽管后来IBM电脑公司的一个研发人员提出了“点阵约简”据说更为安全的保密方案，但前者在政府，商业，等方面网络中的应用仍然十分广泛。总之，素数的研究会极大促进数论的发展，也会促进计算数学、程序设计、分布式计算技术、Internet 技术等的发展，从而在一定意义上，体现一个国家的数学水平。

说到数字，就不能漏掉数学世界的五朵金花e、p 、i、0、1——两个无理数，也是超越数，1、0 来自算术，p 来自几何，自然对数的底来自高等数学的微积分，1是实数单位，i是虚数单位。他们之所以被连在一起归功于欧拉发现的一个公式$e^{ip}+1=0$，左边是$2.71828^{i\times 3.1415926}+1$这样无穷无尽的超越数，右边却神奇简洁地归为零，这便是数学中不期而遇而又出乎意料的美。

陈省身大师曾说p这个数浸透了整个数学。确实如此吗？众所周知，p是圆周率，一个与圆形影不离的的常数，但除之此外，它还身兼数职：$p(n)$还表示不大于n的素数的个数。处理统计学和或然率的问题，也要用到p 。然而不管它的用途有多广，圆周率始终是它最美丽的光环。提到圆，我们会想到永恒，因为圆涵盖了无限的时空，它是所有界限的原型，是空间的主宰，它决定了空间的大小和形状，纬度、经度是圆的，日月行星的运行轨道是圆的，而圆似乎是宇宙中最简单的结构， 但当人类开始研究他们，才发现其中处处玄机，其玄妙之处在于如此简单的圆居然会有如此复杂的圆周率，古人经过苦苦探索才发现其大致范围和为数不多的小数位数，当然这在当时已经是相当了不起的成就了，直到50年代，人们才计算出圆周率小数点后一万位，直到科技高度发达的今天，也才算出小数点后510亿位，

无论我们如何寻寻觅觅最终还是没有找到p 的确切数值，更有趣的是这个没有尾巴的家伙居然可以被一群有规律的分数级数表示，这正是无穷与收敛的奥妙。有人也许会奇怪花那么多时间精力去寻找p 的小数位数有用吗？研究人员不会认为那是徒劳，他们在探索中体味一种乐趣，在寻找中成就一份充实，他们认为一切立体图形中最美的是球体，一切平面图形中最美的是圆形。而圆周率就是造就这些美丽的先决条件，所以他们的口号是因为喜欢美丽的圆，所以探究神奇的p 。

e 是数学计算的工具，它的价值于一次偶然的机会被发现， 一些繁琐的计算正是因为 e 的引进才有了极大的简化，因此被科学探索者认为是极其可爱的数字。而取 e 作对数的底，绝不是科学家的心血来潮，而是微积分运算的必然结果，因此有人说是自然选择了 e 作自然对数的底，数学家不过是发现者和执行者。

0 的发现是数学史上的一大发明，其意义非同小可，0 是一切数的基础，它在任何计量单位中表示没有，但没有 0 就谈不上进位制，大数也难以表示。

i 这个超乎寻常的数， 过了好久才被承认。这也得归功于它在数学研究、物理学研究领域不容忽视的作用和不可替代的地位。它引领复数世界，导出虚轴概念，开辟了数学史的新纪元。

数字世界的成员很多，以上只是典型的几个而已，他们各司其职，又互相合作，为数学事业，乃至人类文明的进步作着不可或缺的贡献 。

前面提到$p(n)$ 还表示不大于 n 的素数的个数， $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)}{(x/\ln x)}=1$（虽然素数有无穷多个，但在趋向于无穷的空间里，大素数出现的几率几乎为零。）此外p 和 e 也有过几次亲密接触，$p^4+p^5=e^6$，还有上述的欧拉公式，科学家还通过 e 证明了p 的超越性。

无理数之间联系很紧密，但是无理数与有理数之间也有一座美丽的桥梁——级数，级数让无穷归为有限，凌乱归为整齐，有着丰富深刻的思想内涵，又有和谐简洁和对称美的形式。无论是泰勒级数还是傅立叶级数它们都营造了一种“此中有真意，欲辩已忘言”的意境，给人的理智以极大的美感享受。

$$p=4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\mathbf{L}+(-1)^n\frac{4}{2n+1}+\mathbf{L}$$

$$e=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\mathbf{L}+\frac{1}{n!}+\mathbf{L}$$

取得项数越多，得到的 e 和p 越精确。这种数学现象确实透露出一种绵长的诗的意象，因此级数又被冠以美誉——“数学诗”。

数字世界是个无穷无尽的空间，里面有着无穷无尽的奥秘。当一门学问用精确的数字阐述，它才成为了科学。科学也追求美，它崇尚真，崇尚创造，崇尚对束缚的解脱，崇尚人和自然，崇尚对自然和人的超越，以至于爱迪生用百分比说明劳动和灵感的关系；托尔斯泰用

分数做比喻，一个人好像是分数，他的实际才能好比是分子，而他对自己的估计好比是分母，分母越大分数的值就越小告诫那些没有自知之明，稍有成绩就骄傲自满的人。

社会上流行的 8-1＞8 虽然在数学上不成立，但在生活中却饱含着辩证法，他告诉人们，每天 8 小时拿出一小时锻炼效果比 8 小时全部学习工作要好。

数字存在于生活的方方面面，是科学的语言又演绎着真善美的人性世界。本文仅浅显的勾勒了数字世界的一隅，希望大家借此文见识到这个世界的神奇与美丽，它们交织在一起，构成社会文明前进的风帆，当你可以带着一种审美情趣探索这个世界，与之共呼吸时，定会有意想不到的收获。记住，数字如果正确地看，不但拥有真理，而且拥有至高无上的美。

参考文献：

[1] 吴义方，吴卸耀，《数学文化趣谈》， 上海大学出版社.
[2] 大卫·布拉特纳著，潘恩典译，《神奇的p》， 汕头大学出版社.
[3] 王树禾，《数学演义》， 科学出版社.
[4] 王庚， 《数学文化与数学教育——数学文化报告集》 科学出版社.
[5] 陈仁政， 《不可思议的 e》 科学出版社.

※○

数学之美与数学文化

——从文化的角度看数学之美

申建阁

（数学学院 数学与应用数学系 0510082）

摘 要：利用数学文化的理念研究数学美之所在，从不同侧面及不同角度探寻思考数学之美。

关键词：数学文化；数学之美

有一位伟大的数学家曾经这样说过：“数学在某个程度上说是美丽的科学。”而美国著名数理推理逻辑学家科恩(P.Cohen)就曾明确指出：“数学只是一种纯粹的符号游戏,而这种游戏的唯一要求就是它不会导致矛盾,这就是数学的美之所在。”自古希腊以来，随着几何学的美妙结构和精美推理的发展，数学变成了一门艺术，数学工作必须满足审美要求，正如英国著名数学家哈代（Godfrey Harold hardy,1877-1947）所说：“美是首要的标准，不美的数学在世界上是找不到永久的容身之地的。”庞加莱也说过：“数和形的美妙和谐……难道没有艺术的特征吗？”

其实数学是一种十分有趣的文化,即这往往并非纯粹的理性行为,也包含有强烈的感情因素,特别是,所说的数学精神常常就表现在对于数学的美的追求与欣赏上,具体一点说,数学家们在自己的工作中切实的感受到了数学的美,这就正如庞加莱所指出的："一个名副其实的科学家,尤其是数学家,他在他的工作中体验到和艺术家一样的印象,他的乐趣和艺术家的乐趣具有相同的性质。"

而且重要的是,数学家们往往以对美的追求作为自己的工作目标,例如,冯·诺意曼就曾这样写道:"我认为数学家无论是选择题材还是判断成功的标准，主要都是美学的。"又"数学家成功与否和他们的努力是否值得的主观标准是非常自足的、美学的，不受经验的影响。"法国著名的数学家阿达玛（J.Hadamard 1865-1963）也曾明确的指出:"究竟是什么制约着这样重要而困难的选择呢？……我们所必须遵守的准则就是科学的审美感。数学家的美感犹如一个筛子，没有它的人永远成不了数学家。"

首先让我们先了解一下美感的定义，美有两条标准：一.一切绝妙的美都显示出奇异的均衡关系（培根）；二.美是各部分之间以及各部分与整体之间固有的和谐（海森伯）。这是科学与艺术共同追求的东西。就只有从这样的角度进行分析，我们才能很好的理解罗素和王浩等人何以把数学美分别称为"冷而严肃的美"和"干涩美（dry-beauty）";另外，尽管不同个体对于数学的美可能有着不同的感受，但是，从整体上说，数学美又不是什么虚无缥缈、忽东忽西的东西，也不是某种纯粹主观、不可捉摸的东西，而是有着较为确定的客观内容，特别是，从历史的角度看，数学之美表现在简单、对称、完备、统一、和谐与奇异。现举一个简单的例子：以数学家欧拉命名的式子$e^{ip}+1=0$，这里指数中用到的p，就是众所周知的圆周率，它是数学中的一个最重要的常数，其次就是上面等式中左端还出现的 e,它也是一个无理数，是自然对数的底。指数中出现的另一个数i，仅是一个虚数单位，即$i^2=1$，谁能想到，这三个出身似乎大不相同的数，竟能被这样一个简单的式子联系起来呢？数学的简单美与奇异美在这个式子中体现到了极致。

一位学者还特意为数学的美写了一首激情洋溢的赞美诗：

我赞美那与我日夜相守的
数字、字母、符号、式子和图形，
像浮在空中轻轻飘荡的五色花瓣
萦绕在我的脑海之中；
……
那数字、字母、符号、式子和图形，
在莫测的变幻中
组合出一个神奇的世界。
而我从方程、公式、图形的直觉
和逻辑推理中，
获得一种优美而崇高的体验，

痴情、忘我，融会成了

一种快慰和神圣的感情！

对数学家关于数学美的言论进行具体分析，可以看出，数学家们关于数学的美的感受的确带有强烈的感情色彩。显然，从这样的角度去分析，我们也就可以更好的理解对于美的追求何以可能在数学家的成就甚至于数学文化的发展中发挥如此重大的作用，因为，前人在很大程度上就以数学上的考虑作为直接的背景;另外，就数学美本身而言，这就清楚的表明了数学之美主要的并非仅是“感性美”而是一种“理性美”，所以说，数学家的对于数学美的追求与感受是与其事业上的追求和成功的喜悦密切联系的。由此可见，所说的数学美事实上就是与数学文化和数学成就有着直接的联系，或者说，数学中的“美学标准”在很大程度上就从属于“数学的标准”。

香港旅美数学家、菲尔兹奖获得者丘成桐先生曾在一次讲演中这样说道：“数学家找寻美的境界，讲求简单的定律，解决实际的问题，而这些因素都永远不会离开世界。”即对数学之美的追求是数学文化取之不尽的源泉。

从历史中的数学文化角度分析，数学最初只是作为整个人类文化的一个部分得到了局部的发展，规模并不是十分的突出，然而，随着数学本身与整个人类文明的高速发展和不断的进步，数学又逐渐表现了相对于整个人类文化的独立性，尤其是获得了特殊的发展动力并表现了特有的发展规律。正是基于这一点考虑，一些资深学者认为，数学文化的发展已经达到了一个较高的水平，并可被认为构成了一个相对独立的文化系统。

数学文化的研究，其基本立场就是把数学看成整个人类文化的一个有机组成部分，并从这样的角度指明数学历史发展的社会文化渊源。就数学作为整个文化的一个有机组成部分而言，我们当然不仅应当看到整体性的文化环境对于数学发展的重要影响，而且也应看到数学对于整个文化、特别是人类文明进步的重要作用。

随着数学自身与整个人类文明的发展和进步，数学文化必然的有一个发展和演变的过程，所以，对于新方法的不同态度则可能导致相对统一的数学传统文化的分化，因此，应当与时俱进，使数学成为不断发展中的整个人类文化的一个子系统，即更高层次上的数学文化概念。

从历史的角度来看，数学的发展不断地经历着深刻的变化。每个时代都有每个时代追求的主题。在古代是常量的数学，主要的研究对象是数和形。随着科学的发展和生产技术的进步，变量的数学出现了，在 17 世纪，解析几何与微积分相继诞生；18 世纪叫做“数学英雄世纪”，数学科学空前繁荣起来；到 19 世纪非欧几何和非交换代数被正式提出，这是从变量数学时代向现代数学时期的转折点。在新的时期，数学是模式与结构的一项新的科学。

20 世纪又出现了分形几何与混沌学。计算机的诞生不但正在改变着数学的研究工具和研究方式，更将改变数学研究和数学教学的面貌，甚至还诞生了一门新的科学——数学实验，正是因为现代数学研究的范围空前广阔，数学将步入一个全新的黄金阶段，更加有必要加强对数学文化的重视，让更多的非数学专业的人通过对数学文化以及数学的美的了解，来加强

对数学的兴趣，事实上，没有什么科学文化比数学更卓越更有用。数学是自然科学之母，一个国家的科学发展水平，可以用它使用的数学的质与量来衡量。现在的数学已经是一个巨大的复杂的知识文化体系，急需向非数学专业的人们宣传普及数学的内容思想和方法，国际数学联盟（IMU）把 2000 年定为“世界数学年”，并订立了如下宗旨:“使数学及其对世界的意义被世界所了解，特别是被普通公众所了解”。只有让人们充分了解数学美之所在和数学文化的传统，让人们觉得“数学很好玩（陈省身 2002）”，才能赢得人们对数学的逐步重视，才能更加有利于数学的充分发展。

正是通过数学文化这个窗口，人们可以充分领略到另一个世界的风光——数学的博大精深，数学的广阔用场；数学的美之所在！筚路蓝缕，以启山林。数学界的前辈已经在数学的文化和发展领域做了大量开拓性的工作，提供了宝贵的研究资源。相信继此以往，在学者们不断的努力之下，数学文化和数学之美一定会被更多的人所认可，相信有一天，数学文化一定会发扬光大，我国也不但会成为数学大国，更将成为真正意义上的数学强国！

参考文献：

[1] 张顺燕，数学的美与理，北京大学出版社，2004 年出版.

[2] 郑毓信 王宪昌 蔡仲，数学文化学，四川教育出版社，2004.

※○

圆中的数学文化

赵光

(物理科学学院　物理学　0410215)

摘　要：本文通过对圆的相关问题的讨论以发掘其中的数学文化。

关键词：圆；圆周率；万有引力；数学文化

1　引言

“圆”是我们日常生活中最常见的东西了。　也许自从有人类文明的时候开始，圆就成为了人类文明中一个重要而不可分割的一部分。本文中，将从理想与现实中的圆、圆周率、日常生活中的应用、天文学中的圆的应用四个方面以及其中蕴含的数学文化加以说明。

2　理想与现实中的圆

圆是什么？人类是如何发现圆的？这是一个如此简单而又让人难以回答清楚的问题。也许你会说，自然界中的圆太多了。每天在天空上的太阳、月亮，我们的地球。树干是圆的，樱桃是圆的。……的确，也许正是大自然中的这些天然的“圆”，使人们关注这个奇特的形

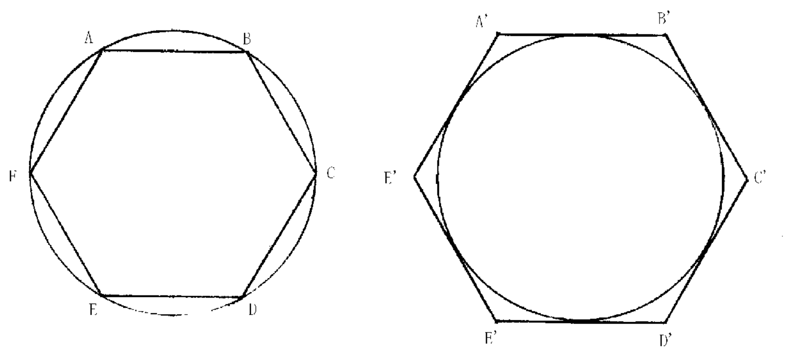
状。但这些现实世界中的“圆”并不是书本中所写的“圆”。圆的定义是：当一条线段绕它一个端点在平面内旋转一周时，它的另一个端点的轨迹叫做圆。可见，这是人类从大自然之中，抽象出来的概念，区别于现实之中的圆，体现了人的能力与创造能力。因为，任何现实中的圆都或多或少有些，不可能完全满足定义。

3　圆周率

有了圆，就自然有了圆周率。马车的轮子，转一圈空间车子要走多远呢？后来人们发现，车子走的距离与车轮的直径成正比，而且这个比值总是某一个恒定的值。于是，人们就把上述的比率定义为圆周率，即π。上述这种思想，对于人们认识客观世界，进行科学探索，起到了至关重要的作用。比如物理学中的同一物质的密度、比热、电导率等，都运用了“相同比率”这一概念。

既然定义了圆周率，人们就想方设法去计算它的值。一种最简单而又直接的方法就是通过测量轮子转一周所运动的距离与直径的比值。古巴比伦人和古埃及人都用过这种方法。测量精度只有2到3个有效数字。

后来，阿基米德深知用测量的方法计算圆周率的局限性，发明了用圆的正内接多边形和正外切多边形去逼近圆的方法去计算圆周率。当正多边形的边数很大时，可近似逼近圆周，从而通过计算正多边形的周长，而得到圆的周长的近似值。（如下图）



阿基米德的这种思想，体现了初期的极限思想。尤其是极限理论中“夹挤”的思想。阿基米德用这种方法，算得了4位有效数字的圆周率。值得一提的是，我们中国的数学家祖冲之，也是运用同样的方法，算出圆周率的值在3.1415926到3.1415927之间。这一记录在一千年之内，都无人打破。

随着人们对级数研究的不断深入，人们发现圆周率可以用无穷级数来表示出来。这样避免了复杂的正多边形周长的计算，而且不存在理论上的缺陷，避免产生不必要的误差。但是，由于不同级数在收敛性上的差异，使得在级数的计算之中，产生了很大的不同。格里高利发现的反正切级数

$$p = 4*(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots)$$

运算到300项时，刚刚精确到小数点后第2位及3.14。而用牛顿发现的公式

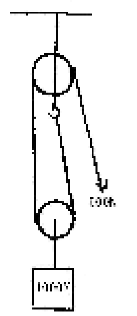
$$p = 6*(\frac{1}{2}+\frac{1}{2*3*2^3}+\frac{1*3}{2*4*5*2^5}+\cdots\cdots)$$

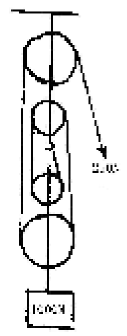
运算到第 4 项即达到同样的精度。后来随着电子计算机的出现，使得用级数法计算圆周率更加快速便捷了。

除了古代的多边形逼近法和近代的级数法，还有著名的蒙特卡罗法[4]。该方法的基本原理是在正方形 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 内，有一个内切圆。随机地向正方形内投掷点，假设一共投了 n 个点。最后通过数落在圆内的点的个数 m，如果 n 足够大的话，则 m/n 可近似表示任意一点落在圆内的几率。而这个几率正是圆的面积与正方形面积的比值，知道了圆的面积，就可以求出圆周率的值了。蒙特卡罗方法在求解线性方程组、微分方程等都有十分重要的应用。

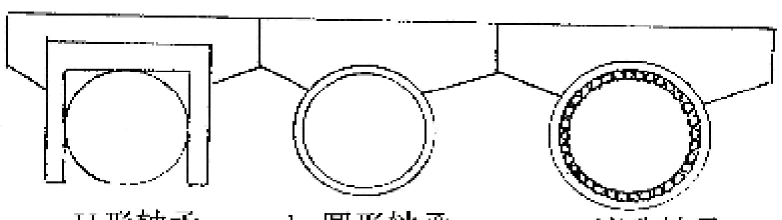
4　生活中的圆的应用

人类对圆应用，可以说从远古到现代，无时无刻不在。虽然包括南美文明在内的许多发达文明，都没有发明轮子，但是古代人在修建大型建筑时，普遍采用了滚筒。因为我们知道，比起滑动摩擦来，滚动摩擦往往可以节省 90%的劳力。这就使大型石材的运输，成为了可能。从而创造了诸多的人类文明。





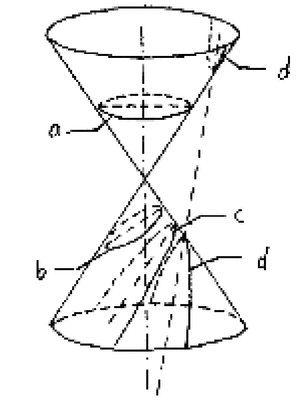
在平地上运输物资，滚筒相当有用，但是当我们垂直提升生重物时，滑轮就成了十分有用的工具。滑轮分为两种，一种是定滑轮，一种是动滑轮。（左图）通过使用动力滑轮可以省掉至少一半的力。若想更省力，则可使用不同的滑轮组，以达到目的。这种原理其实我们中学都学过，就是以加大作用力的作用距离来达到省力的目的。在传统的机械之中，轴承都是必不可少的部分。(下图[1])最早的轴承是 U 型的，它的特点就是接触面积小而摩擦大。圆形轴承是对 U 形轴承的改进。轴承环绕轮轴，这种设计使得轴承与轮轴的接触面积最大化，从而使局部的材料磨损最小化。圆形轴承的另一个好处是可以在轴承与轮轴之间加入润滑剂。最后，是滚珠轴承，这是为了适应高速发动机的产生，而出现的产物。在滚珠轴承中，一些钢制小球嵌在一个环绕轮轴的槽里。滚珠轴承可以大大降低摩擦，从而延长轴承的使用寿命。滚珠轴承在我们日常生活中应用十分广泛。



a. U 形轴承　　b. 圆形轴承　　c. 滚珠轴承

从上面介绍的几个应用不难看出，我们利用了圆在几何上的特性，来达到我们的目的。也就是说由于圆周到圆心的距离都是相等的，所以它这种几何上的稳定性是十分优越的。这就是我们为什么使用圆而不使用正方形、三角形等其它形状。

5　天文学中圆的应用



a. 圆　b. 椭圆　c. 抛物线　d. 双曲线

沿与底面平行的方向切一个圆锥，得到的是一个圆；切面稍微斜一点，得到的是椭圆。随着切面角度的增加，椭圆会越来越扁（离心率增大）。然后变成了一条抛物线。随着切面角度的进一步增加，抛物线变成了双曲线。(左图[5])

在十六世纪，德国天文学家开普勒，发现了行星运动的规律，使圆锥曲线在天文学中得到了广泛应用。他在总结了前人对行星运动测量的大量数据后，得到了三大定律。定律的内容为[3]：（1）每个行星都以椭圆轨道太阳运动，而太阳位于椭圆的一个焦点上。（2）太阳到行星的矢径在相等的时间间隔中扫过的面积相等。（3）行星的轨道周期的平方与它的椭圆轨道的半长轴的立方成正比。

究竟是什么原因使行星绕日运转？它们的轨道为什么是椭圆的？1666 年，瘟疫袭击英国，牛顿从剑桥大学来到了家乡的村庄。他院子中那个著名的“苹果”，唤起了他对宇宙结构的思考。经过不懈的努力，他终于概括出了万有引力的概念：“……如果由实验和天文学观测，普遍显示出地球周围的一切天体被地球重力所吸引，并且其重力与它们各自含有的物质之量成正比，则月球同样按照物质之量被地球重力所吸引。另一方面，它显示出，我们的海洋被月球重力所吸引；并且一切行星相互被重力所，彗星同样被太阳的重力所吸引。由于这个规则，我们必须普遍地承认，一切物体，无论是什么，都被赋予了相互引力的原理。因为根据这些表象所得出的物体的万有引力的论证，要比它们的不可入性的论证有力的多……”[2]

运用万有引力定律，可以完美的解释开普勒三定律，万有引力的数学表达式是

$$F=\frac{GMm}{R^2}$$

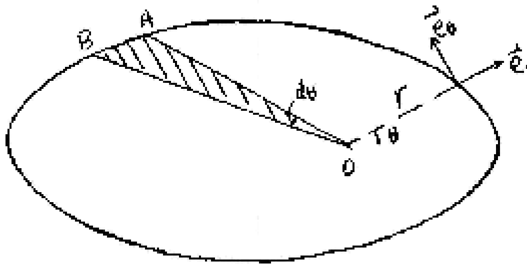
其中 m 表示物体的质量，M 表示引力中心的质量，R 表示两个物体之间的距离，G 表示引力常数。

首先从圆形的轨道分析，万有引力与向心力相等，即

$$\frac{GMm}{R^2}=\frac{v^2}{R}m=\left(\frac{2pR}{T}\right)^2\cdot\frac{1}{R}\cdot m=\frac{4p^2Rm}{T^2}$$

$$\frac{T^2}{R^3}=\frac{4p^2}{GM}$$

这正是开普勒第三定律的内容。



上面的分析，我们只用到了圆形轨道，那么在椭圆轨道下：会得到什么结论呢？为了解决这样的问题，牛顿创立了崭新的“微积分”，开创了数理领域的新纪元。这里我们选用极坐标（*r*, *θ*），在极坐标下，物体的加速度可分解为沿极轴 $\overrightarrow{e_r}$ 和垂直于极轴 $\overrightarrow{e_q}$ 两方向（如上图）：

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_r} = \left[\dfrac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\dfrac{dq}{dt}\right)^2\right]\overrightarrow{e_r} \\ \overrightarrow{a_q} = \left[2\dfrac{dr}{dt}\cdot\dfrac{dq}{dt} + r\dfrac{d^2 q}{dt^2}\right]\overrightarrow{e_q} \end{cases}$$

由牛顿第二定律

$$\begin{cases} m\overrightarrow{a_r} = -\dfrac{GM}{r^2}\overrightarrow{e_r} \\ m\overrightarrow{a_q} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\dfrac{dq}{dt}\right)^2 = -\dfrac{GM}{r^2} \\ 2\dfrac{dr}{dt}\cdot\dfrac{dq}{dt} + r\dfrac{d^2 q}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

解上面两个微分方程，得到

（1） $r^2\dfrac{dq}{dt} = Const.$

当 r 较大时，θ 变化较小；当 r 较小时，θ 变化较大。对于相同的时间间隔 dt，$r^2 d\theta$ 正是这 dt 时间中，物体掠过的面积（上图中 OAB 面积），这正是开普勒第二定律。

（2） $r = r_0\dfrac{1+e}{1+e\cos q}$

其中 r_0 表示 θ＝0 时 r 值。E 是一个与 GM 成反比的常数。而这个方程就是极坐标下的圆锥曲线方程，*e* 就是离心率。当 *e*=0 时该曲线为圆；0<*e*<1 时为椭圆；*e*=1 时为抛物线；

$e>1$ 时为双曲线。这样一来，开普勒第一定律就得到了证明。

由前面的论述，在天体运动之中，许多星体的运动轨迹都可归结为圆锥曲线（二体问题），可见对圆锥内环线的探索与研究，在天文学中得到了重要的应用。

6 结论

通过上述的四个方面的内容，可见圆与人类文明是息息相关的。人类在探索相关问题时，拓展出了许许多多的新问题，发明了很多问题的方法，人的思维也得到了飞跃的发展，其中迸发出的数学文化，更是影响整个人类的发展

参考文献：

[1] 泽布罗夫斯基，圆的历史，北京理工大学出版社，2003。

[2] 牛顿　著，王克迪　译，自然哲学之数学原理，北京大学出版社,2006。

[3] 赵凯华 罗蔚茵，力学，高等教育出版社，2004。

[4] 梁之舜　吴伟贤，数学古今纵横谈，科学普及出版社广州分社，1982。

[5] 顾沛,数学文化讲义。

※○

从高等几何看数学的对称美

金庆

（信息技术与科学学院 微电子系 0510378）

摘要：本文从高等几何中定理、公式的特点出发，围绕数学的对称美展开了探讨，希望启发读者的思维，对数学的对称美有一个新的认识。

关键词： 高等几何；对称美

1 传统的欧氏几何

在传统的欧氏几何中，点是最基本的元素，一切几何图形无一不是由点组成的。点的运动可以产生线，线是除点以外最基本的元素。线是曲线的统称，其中最简单的是直线。直线平行地移动就产生了平面。作为简单介绍，本文所讨论的范围仅局限于平面上的点与直线，事实上，其中的许多内容对于立体几何等也同样适用，结果是类似的，有兴趣的读者不妨自己作出一些推广。

可以看到，在传统欧氏几何中，点被看作是最基本的，线次之，面再次。也就是说，在传统欧氏平面几何的认识里，几何图形的产生过程是这样的：点→线→面。这种认识符合人们的日常生活经验，容易被人们接受，然而，这种认识是必须的吗？或者说，这种认识是唯

一正确的吗？

2　传统欧氏平面几何在认识上的缺点与不足

应该看到，传统欧氏平面几何的认识方法存在着明显的缺点与不足，它把点放在很高的位置，认为线和面只是点的产物，这种观点虽然符合人们的日常经验，却是一种形而上学的观点。它虽然看到了点与线、线与面之间的关系，但是却片面地强调了点的基本性而没有用辩证的方法去分析。这种做法，破坏了数学的对称美，造成了点、线、面之间关系的不和谐。

3　高等几何的认识

高等几何是如何认识的呢？以平面几何为例，可以说点是基本的，线是具有某种属性的点的集合，把具有某种属性的点顺次连接起来就得到了线；也可以说线是基本的，点是具有某种属性的线的集合，具有某种属性的线的公共部分就是点。由此可见，点和线是平等的，都可以是最基本的，也都可以作为对方的产物。这样，点与线之间的对称美就体现出来了。那么，高等几何是如何描述平面上的点与线的呢？

4　平面上的点

传统的欧氏平面几何利用解析几何的办法，通过建立平面直角坐标系，将平面上的点与一对实数对应起来，从而实现了利用数表示点，将数与形结合起来。然而，由于实数都是有限大的，因而利用实数对不能表示平面上的无穷远点。即使引入记号“∞”，也不能对不同的无穷远点加以区分。然而，人们一般不涉及无穷远点，因此这一点不是十分重要。

高等几何考虑了这样的问题。按照传统欧氏平面几何的观点，互相平行的两条直线是不相交的。但是，这种做法显然破坏了相交线与平行线间的统一美。高等几何认为，两条互相平行的直线也是相交的，它们的交点是无穷远点。相互平行的直线有共同的交点。两组相交于有限远点的平行线交于不同的无穷远点，所有的无穷远点在一条直线上（称为无穷远直线）。这样，平行线与相交线就统一了起来。由此看来，对无穷远点问题的解决，不再是无关紧要的，简直是必须的了！*

如何对平面上的无穷远点加以区分呢？我们知道，实数对(x,y)可以表示平面上的一个点。现在，我们把(x,y)用$(x,y,1)$来表示，这里的“1”只是数字“1”，没有特殊的含义。

我们看到，这样并未改变点的自由度，每一个点仍是由两个实数x，y确定的。我们假设$x=\dfrac{x_1}{x_3}, y=\dfrac{x_2}{x_3}$，其中$x_1$、$x_2$、$x_3$都是实数，那么，$(x,y,1)$就可以表示成（$\dfrac{x_1}{x_3}$，$\dfrac{x_2}{x_3}$，1）。注意，这里虽然是用三个变量$x_1$、$x_2$、$x_3$来表示的，但是其自由度仍是2，这是由于，只要$x_1:x_2:x_3=x_1':x_2':x_3'$，就有（$\dfrac{x_1}{x_3},\dfrac{x_2}{x_3},1$）=（$\dfrac{x_1'}{x_3'},\dfrac{x_2'}{x_3'},1$）现在，我们把（$\dfrac{x_1}{x_3},\dfrac{x_2}{x_3},1$）

* 读者不要产生误解，认为这有悖于欧氏几何的第五公设。第五公设仅是在有限区域内讨论的，不涉及无穷远点，实际上，高等几何不能囊括非欧几何的内容。

用（x_1,x_2,x_3）代替，并且规定：对于不同的（x_1,x_2,x_3）与（x_1',x_2',x_3'），只要 $x_1:x_2:x_3=x_1':x_2':x_3'$，就有（$x_1,x_2,x_3$）=（$x_1',x_2',x_3'$），否则，（$x_1,x_2,x_3$）≠（$x_1',x_2',x_3'$）。这样，平面上的点就可以与三个实数组成的实数组相对应。

值得一提的是，我们是由（$\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3},1$）得出（$x_1,x_2,x_3$）的，因此，应该有 $x_3\neq 0$。现在，我们认为这种限制是多余的。我们规定，（$x_1,x_2,0$）也表示平面上的点（只要 x_1、x_2 不全为零），点（0，0，0）没有意义。这样，平面上的点就都可以表示成（x_1,x_2,x_3）的形式，其中 x_1、x_2、x_3 不都为零（以后都这样假定）。那么，（$x_1,x_2,0$）表示什么点呢？

我们看到，若令（$x_1,x_2,0$）=（$x,y,1$），则有 $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{x_2}=\frac{1}{0}$，可见，由于 x_1、x_2 不都为零，故 x，y 中至少有一个为∞，因此，（$x_1,x_2,0$）表示的是平面上的无穷远点。

综上，我们可以得出以下三条结论：

(1)平面上的点可以与有序实数组（x_1,x_2,x_3）构成一一对应，其中 x_1、x_2、x_3 不全为零。

(2)对于不同的有序实数组（x_1,x_2,x_3）与（x_1',x_2',x_3'），与之对应的点是同一个点等价于 $x_1:x_2:x_3=x_1':x_2':x_3'$。

(3)与有序实数组（x_1',x_2',x_3'）对应的点在 $x_3\neq 0$ 时为有限远点，在 $x_3=0$ 时为无穷远点。

5 平面上的线

传统欧氏平面几何在建立直角坐标系表示出点之后，是通过方程来描述线的。现在，我们用高等几何的方法来描述线。作为一个简单介绍，我们只讨论直线，对于曲线的理论，读者可查阅相关文献。

我们知道，平面上直线的一般方程为 $Ax+By+C=0$，由于 $x=\frac{x_1}{x_3}$，$y=\frac{x_2}{x_3}$，代入可得，$Ax+Bx_2+Cx_3=0$，我们换一种形式来写：$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$。这样，我们就得到了平面上直线的一般方程。

我们看到，方程 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ 中，u 与 x 有很好的对称性。我们用（x_1,x_2,x_3）来表示点并称为点的坐标，那么该方程自然就是线的方程。但是我们也可以这样认为：我们用 $[u_1,u_2,u_3]$ 来表示直线并称为直线的坐标（用中括号而不用小括号仅仅是为了与点相区别），并且认为上述方程是点的方程，这恰恰是前文所说的“线是基本的”的观点。这样一来，点与线的对称性空前地体现了出来，它们就好像物体与镜子里的像一样，简直难以区分！

这样，我们就得到了平面上点和线的两种表示方法：

（1）点的坐标：(x_1,x_2,x_3)，线的方程：$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$

（2）线的坐标：$[u_1,u_2,u_3]$，点的方程：$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$

并且，如果 $u_1:u_2:u_3=u_1':u_2':u_3'$，则有 $[u_1,u_2,u_3]=[u_1':u_2':u_3']$；[0，0，0] 没有意义；

$u_3=0$ 表示该直线过原点；$u_1=u_2=0$，则 $x_3=0$，表示该直线为无穷远直线。

由于无穷远点均满足 $x_3=0$，故它们在一条直线上。

6.两点之间的连线与两线的交点

（1）两点连线

设点 A、B 坐标分别为（a_1,a_2,a_3）、（b_1,b_2,b_3），直线 AB 方程为 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$，则有

$$\begin{cases} u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3=0 \\ u_1b_1+u_2b_2+u_3b_3=0 \end{cases}$$

$$\therefore u_1:u_2:u_3=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$

坐标为 $\left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right]$。

（2）两线交点

设直线 a、b 坐标分别为 $[A_1,A_2,A_3]$、$[B_1,B_2,B_3]$，交点 ab 方程为 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$，则有

$$\begin{cases} A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3=0 \\ B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3=0 \end{cases}$$

$$\therefore x_1:x_2:x_3=\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ 交点 ab 的方程为 $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}=0$

坐标为 $\left(\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}\right)$。

可见，点与线是完全对称的。

我们知道，传统欧氏几何中，两直线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax+By+C_2=0$ 平行（其中 $\mathrm{C}_1\neq\mathrm{C}_2$ 且 A、B 不全为零）。以高等几何的观点，它们的坐标分别为 $[A,B,C_1]$ 和 $[A,B,C_2]$，故其交点坐标应为 $\left(\begin{vmatrix} B & C_1 \\ B & C_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} C_1 & A \\ C_2 & A \end{vmatrix},\begin{vmatrix} A & B \\ A & B \end{vmatrix}\right)$，因 A、B 不全为 0，故 $\begin{vmatrix} B & C_1 \\ B & C_2 \end{vmatrix}$ 与 $\begin{vmatrix} C_1 & A \\ C_2 & A \end{vmatrix}$ 不全为 0，因而两平行线的交点为无穷远点 $\left(\begin{vmatrix} B & C_1 \\ B & C_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} C_1 & A \\ C_2 & A \end{vmatrix},0\right)$，这也是两直线平行的充分条件。

可以看到，平面上两点 A（a_1,a_2,a_3）与 B（b_1,b_2,b_3）之间的连线 AB $\left[\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right]$ 是唯一确定的。事实上，A 点的坐标只能是（ka_1,ka_2,ka_3），其中 $k\neq 0$ 为常数，此时 AB 坐标变为 $\left[\begin{vmatrix}ka_2 & ka_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}ka_3 & ka_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}ka_1 & ka_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right]$ $=\left[k\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},k\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},k\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right]=\left[\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right]$。即使对于无穷远点而言$\left(a_3=0\text{或}b_3=0\right)$，上述结论也成立。因此，“两点确定一条直线”这一命题仍成立。同样地，“两线确定一个交点”也成立，可见，平面上两组相交于有限远点的平行线不会交于同一无穷远点。

7　点共线与线共点

（1）点共线

设平面上有三点 A（a_1,a_2,a_3）、B（b_1,b_2,b_3）、C（c_1,c_2,c_3），则 A、B、C 共线等价于 C 在直线 AB 上，即 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0$。

（2）线共点

设平面上有三点 $a\left[A_1,A_2,A_3\right]$、$b\left[B_1,B_2,B_3\right]$、$c\left[C_1,C_2,C_3\right]$，则 a、b、c 共点等价于 c 通过点 ab，即 $\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}=0$。

对于无穷远点 A（$a_1,a_2,0$）、B（$b_1,b_2,0$）、C（$c_1,c_2,0$）而言。显然上述条件满足，故所有无穷远点在一条直线上。对于三条平行线 a、b、c，无妨设它们的坐标依次为 $\left[A,B,C_1\right]$、$\left[A,B,C_2\right]$、$\left[A,B,C_3\right]$ 显然上述条件满足，故相互平行的直线交于同一（无穷远）点。

8　笛沙格定理及其逆定理

现在，我们简单介绍一下笛沙格定理及其逆定理，其证明过程较为繁琐，本文不拟赘述，有兴趣的读者可查阅相关文献。

（1）笛沙格定理

设平面上六个点 A、B、C、A'、B'、C'，若 AA'、BB'、CC' 三线共点，则 AB 与 $A'B'$、BC 与 $B'C'$、AC 与 $A'C'$ 的交点共线。

（2）笛沙格逆定理

设平面上六条线 a、b、c、a'、b'、c'，若 aa'、bb'、cc' 三点共线，则 ab 与 $a'b'$、bc 与 $b'c'$、ac 与 $a'c'$ 的连线共点。

9　对偶原理

从上面点与线的关系、线共点与点共线的命题及笛沙格定理及其逆定理中，读者应该已经感觉到，点与线、坐标与方程、共点与共线等之间具有一种对称性和统一性。事实上，这正是对偶原理要说的内容。在介绍对偶原理之前先介绍一些概念。

平面上的点与直线称为一对对偶元素。过一点作一条直线与在一直线上取一点称为一对对偶运算。互换对偶元素的地位和作对偶运算统称为对偶变换。对一个命题进行对偶变换所得到的命题称为对偶命题。显然，一个命题与它的对偶命题互为对偶命题。

对偶原理是说，如果一个命题成立，，则其对偶命题也成立。这就是说，一个命题与它的等价。例如，根据“两点确定一条直线”成立，可以得出其对偶命题“两直线确定一个交点”也成立。再如，笛沙格定理的对偶定理就是它的逆定理。

根据对偶原理，对一个命题进行对偶变换，就可以得到一个新命题，从而可以从已知的定理得出新的定理。

10　从高等几何看数学的对称美

通过上面对高等几何的简单介绍，特别是从对偶原理中，我们看到了其中体现出许多对称的关系，它们体现了数学命题与概念的对称美。作为总结，现将各对称关系简要列举如下：

（1）点与线的概念的对称关系

a.点是基本的，线是具有某种性质的点的集合，平面上的点与坐标相对应，线与一个方程相对应。

b.线是基本的，点是具有某种性质的线的集合，平面上的线与坐标相对应，点与一个方程相对应。

（2）点与线的命题的对称关系

如果一个命题只涉及平面上的点与直线，则将点与直线互换所得到的对偶命题与原命题真值相同（等价）。

高等几何深刻地揭示了几何中点与线的对称性，把点与线放在了平等的地位进行讨论。高等几何中还有许多十分精彩漂亮的结论和思想，有兴趣的读者可以查阅相关书籍。

参考文献：

[1]《高等几何》，周兴和，科学出版社，2003，1-43.

※○

品味数学之美

张林

（化学学院 药学专业 0511025）

摘 要： 数学之美，美在纯净，美在和谐，美在对称，美在奇异。数学中的美如美酒，如甘泉，那是一种完全和谐的，抽象形式的艺术美，是一种客观存在，是大自然的美在数学中的反映，同时也是反映客观世界并能动地改造客观世界的世界美。

关键词： 纯净；和谐；对称；奇异；美

1 引言

初中时的数学成绩还不错，不过并没过多研究过数学，只是在题海里遨游，进去了就出不来。上了高中以后，渐渐地，我发现数学真的很美。现在我有了时间，可以仔细地品味数学。“数学之美”并非只是老师的观点，就连中国的大数学家陈省身也支持这一点。被世界公认为“微分几何之父”的陈省身在 92 岁时自费印刷了一批挂历，主题就定为“数学之美”。就像有人惊叹艾菲尔铁塔的高度一样，我惊叹于数学的美；就像有人惊叹兵马俑的壮丽一样，我惊叹于数学的美；就像有人惊叹金字塔的雄伟一样，我惊叹于数学的美。数学之美不仅在于那美丽的王冠—歌德巴赫猜想，也不只在那诱人的沃尔夫奖，而是无处不在的，只要细心观察，你会发现数学之美！数学—美呀！

2 数学之美

数学之美，美在纯净。当有人询问数学大师纳什研究数学问题有何作用的时候，这位《美丽心灵》的主角坦率地说，有时研究成果并没有什么用。正是这种不带功利性的数学思维，造就了数学的空灵和纯净。而数学的圣洁又造就了一个个美丽的数学心灵。亲近数学，犹如亲近雪山，它能以自身的洁白净化研究者的灵魂。

数学的纯净并不等于数学真的无用。作为科学的圣母，数学孕育着无数的科学圣婴。在其他自然科学和社会科学的发展中，时时需要数学之母的呵护，而数学也在其他学科的发展中不断吸取营养，逐渐地充实扩大。经济学因对纳什博弈理论的成功运用而产生了新的学派，纳什也因解决了经济学上的难题而获得了诺贝尔经济学奖。数学就是这样。它因超凡脱俗而又如此关照社会环境，它面向苍穹而又体察芸芸众生。数学的纯净在于它能吸纳涓涓细流，数学的纯净还在于它能通过理论性的过滤将甘甜回报社会。

数学之美还在于它和谐。当有人问到我国的数学家王元先生，数学的魅力在哪里的时候，他顺口答道，数学之美就在于和谐。在一般人看来，数学的和谐之美或许是两条永不相交的平行线，或者就是一个大大的圆。在数学家眼里，数学之美就是一个公式，一个方程，一个几何图形甚至一个小小的点。这些数学的美是那样的抽象，普通人很难欣赏。但是，当霍金先生以近乎静态的残躯，向公众描述宇宙演进历史的时候，你难道不能感受到动静之间的和

谐之美吗？当那些为数学的发展作出巨大贡献的前辈数学家们坐在讲台下面，仔细地聆听数学晚辈讲座的时候，你难道不能感受到神圣与朴素之间的和谐之美吗？是的，这些都不是数学的和谐之美。但我们通过数学家所展现的和谐之美，难道不能窥测到数学的和谐之美吗？或许数学的和谐之美就在于数学家的和谐之美。

数学之美也在于对称。在日常生活中，我们可以看到许多对称的图案，对称的建筑物。绘画中利用对称的手法，文学作品中也运用。数学中的对称更是它的美丽。

在几何图形中，有所谓点对称，线对称，面对称。球形既是点对称的，又是线对称的，还是面对称的。古希腊学者认为“一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形。”这种赞美其原因很可能是基于球形圆形的对称性，匀称性。

对称是数学中常见的形式之一，但它是否给人以形式之美的感觉，又总是与内容相联系的。在数学中，关键在于准确与否，在此基础上的简洁，对称都能给人以美感；然而，事情的另一面也值得注意，对简洁，对称的追求在许多情况下导致准确。

数学还有奇异之美。数学中的奇异是吸引许多人喜欢数学的原因之一。奇异有时与稀罕联系在一起，人们也因此而特别愿意考察它，了解它，欣赏它。奇异的东西引起你的兴趣，也引起你研究它的兴趣，又从研究中看到奇异深处所隐藏的东西，这样，你就会更喜欢它，就更有可能产生美感。

历史证明，中国人最早知道了勾股定理。3，4，5 即一组勾股数。其他的勾股数呢？也不是轻易能说出来的。有没有一个一般方法寻求勾股数呢？17 世纪时，有位法国数学家费马认为，当 $n \geq 3$ 时不定方程 $x^n + y^n = z^n$ 都没有整数解。费马说他已经找到了这一结论的证明，但是三百多年过去了，谁也没有找到他的证明，因此很多人只把这一结论叫做费马猜想。

一些更复杂的例子，却令人感到新奇，这就是奇异的数学中的美之所在。

数学中的美如美酒，如甘泉，自古以来就吸引着人们的注意力。古希腊的学者认为球形是最完美的形体，毕达哥拉斯发现了勾股定理，他认为直角三角形具有这种简明，和谐的关系而赞叹；爱因斯坦几岁时，得到了一本欧几里德几何教科书，它的严谨，明澈和确定，给爱因斯坦留下了不可磨灭的印象；罗索在学习欧几里德几何时，感到这是他一生中的一件大事，他像初恋一样地入迷，没想到世界上还有这样有趣的东西。

可见，数学之美是一种完全和谐的，抽象形式的艺术美，是一种客观存在，是自然美在数学中的反映；同时也是反映客观世界并能动地改造世界的科学美。

参考文献：

[1] 《数学文化》南开大学 顾沛著。

[2] 《数学文化》高等教育出版社 张楚延著。

※○

由数学美到艺术美的一些探讨

杨烨

（生命科学学院　生物技术专业　0511234）

摘　要： 数学和音乐是人类精神中两种最伟大的产品，是两个金碧辉煌的世界。数学仅用了十个阿拉伯数字和若干个符号就造出了一个无限的、真的世界；音乐只用了五条线和一些蝌蚪状的音符就创造出了一个无限的、美丽的世界。

关键词： 数学； 艺术； 音乐； 美

数学是历史最悠久的人类知识领域之一，它以其抽象的形式，追求高精度、可靠的知识，成为人类缜密思维的一种典范，并日益渗透到其他知识领域。在对宇宙世界和人类社会的探索中，还有追求最大限度的一般模式的倾向，这种倾向使数学具有了广泛的适用性。数学作为一种创造性活动，还具有艺术的特性，即对美的追求。一些抽象简洁完美的数学原理与概念，为艺术创作提供了丰富的美的源泉，是数学成为促进人类艺术发展的文化激素。毋庸置疑，数学乃是各个时代人类文明的标志之一。

而数学作为一门学科所表现出的文化特性，使其在整个人类文明史上占有独特的地位。数学作为人类文化的重要组成部分，一方面受着社会经济、政治和其他区文化诸多因素的影响，另一方面，又始终作为一种积极力量推动人类物质文明和精神文明的进步，这一点可以在中西数学发展情况发展情况的区别种深刻的体会到。让我们先从中西园林的不同审美角度谈起吧！西方园林追求着一种对称美和一览无余的透视感，而中国园林却追求曲径通幽的境界，这是与中西对数学美感的追求分不开的，而这种对美感的追求不同的取向更是与当时社会形态分不开的。当时中国处于君主专制的统治之下，心理承受着过多的君与主、言与不言、出世与入世的思考，士大夫阶层祈求训导一方独处之地得以放松，故在对数学的审美取向上更选择了曲线，而这种取向造就了中国园林的协议取经的情态；而当时的西方却处于侵略、战争、分裂、民主而却步的的历史情态，贵族们期望权势与统治，故在审美取向上倾向于直线与一览无余，这也决定了西方园林的透视情态。漫观中西数学的早期发展，西方数学的发展具有维理主义的倾向，他们效力于经验算法和几何方法并将其加工升华为具有初步逻辑结构的论证数学体系，相对而言的中世纪的东方数学则表现出强烈的算法精神，这一时期的总国数学家创造了大量的算法是一种归纳思维的产物，这与欧几里得几何演绎的风格迥然不同。由于数学发展的不同方向，中西绘画也沿着不同的方向行走：西方更注重于写实的雕塑与素描以及三维透射的应用，而中国则为写意的山水。中国的中医缺少解剖学的记录不仅是人们对于灵魂的警卫，更多的源自于几何的不发达难以描述各种器官的形状，这是后话。

数学的理性之光照亮了人类文明的发展历程。

转入正题，让我们来谈谈数学之美与艺术之美吧。

数学之美究竟是什么呢？审美实践告诉我们，人们对美的感受都是直接由形式引起的。

但数学的形式美不单纯表现在自然数所玩弄的些许花样上，和谐的比例和优美的曲线或图形都能给人以强烈的形式美的感受。

和谐中最负盛名的是开普勒称为欧几里得学的两颗明珠之一的黄金分割，它成为人们普遍喜爱的审美比例，并为广泛应用，艺术家利用它创造令人赞叹的艺术珍品，科学家利用它创造了丰硕的科技成果。象征黄金分割的毕达哥拉斯学派的五角星在欧洲也成为了一种巫术的标志，这神圣的比例也被抬高了身价，被称为黄金数了，成了宇宙的美神！

优美的曲线同样给人以美的享受，如四叶玫瑰线，对数螺线，超椭圆曲线等，还有那久负盛名的茂比乌斯圈。华盛顿一座博物馆的门口，有一座神奇的数学纪念碑，碑上是一个八尺高的不锈钢制的茂比乌斯圈。它日夜不停地旋转着，带给人们美的享受的同时，又昭示着人类正如它一样无休止地前进着。

对称均衡更是数学形式美的主要特征，它在自然和艺术中如此广泛地存在着，使数学家外尔在他的著作《对称》中重申柏拉图的思想：制约着大自然的数学规律是自然界中的对称性的根源；而创造型艺术家心灵中对数学观念的直观领悟则是艺术中的对称性的根源。

然而数学家带给人们的美远不止直观的形式美，数学深刻的本质更加诱人，数学宽广无际的美还在于它内在结构的完美和谐统一性。“数学美是一种人的本质力量通过宜人的数学思维结构的呈现”，“数学美是数学创造的自由形式”，“数学美是真与善的额统一”，“感觉数学美，感觉数与形调和，感觉几何优雅……这是所有真正数学家都知道的真正美感”……

数学与艺术有什么关系呢？数学对艺术的影响遍及绘画、音乐、建筑、文学等各个方面，而数学本身也是一门艺术，当今兴起的电子音乐、数字影视更加明显的显示出其关系。希腊作曲家克塞纳基斯（1933~ ）创立“算法音乐”，以数学方法代替音乐思维、创作过程也即演算过程，作品名也类似数学公式，如《S+/10-1.08026》为 10 件乐器而创作。马卡黑尔发展了斯托克豪森的“图表音乐”（读和看的音乐）的思想，以几何图形的轮转方式作出“几何音乐”，这就说到了音乐与数学的事上了——

数学是以数字为基本符号的排列组合，它是对事物在量上的抽象，并给出各种公式，揭示出客观世界的内在规律；而音乐是以音符为基本符号加以排列组合，它是对自然音响的抽象，并通过联系着这些符号的文法对它们进行组织安排，概括我们主观世界的各种活动罢了，正是抽象这一点将音乐与数学连接在一起了，它们都是通过有限去反映和把握无限。

数学和音乐位于人类精神的两个极端，一个人创造性的精神活动就在这两个对立点的范围之内展开，而人类在科学和艺术领域总所创造出来的一切都分布在这两者之间。有位哲人说，数学和音乐是人类精神中两种最伟大的产品，是两个金碧辉煌的世界：数学仅用了十个阿拉伯数字和若干个符号就造出了一个无限的、真的世界，音乐只用了五条线和一些蝌蚪状的音符就创造出了一个无限的、美丽的世界。

“难道不可以把音乐描述为感觉的数学，把数学描述为理智的音乐吗”J.J.西尔威斯特。最先将音乐于数学联系起来的是毕达哥拉斯学派，他们将乐音与数字比例相对应，将一种抽象的感觉——声音的和谐——做了量化，率先建立了音乐理论基础的数学学说“音乐之所以

神圣而崇高，就是因为他反映出作为宇宙本质的数的关系”。之后，音乐家巴赫首创十二平均律。

十二平均律是目前世界山个通用的一个八度（频率ｆ到２ｆ之间的频段称为一个八度，数学上称为一个倍频)分成十二个半音音程的律制，各相邻两律之间的振动数之比完全相等。这种律制包括了乐音的标准音高、乐音有关的法则和规律，钢琴键上共黑白键８８个，就是根据十二平均律的额原理制作的。

十二音律对应着的自然音阶，以Ｃ大调为例：

音名	C	D	E	F	G	A	B	C
唱名	1	2	3	4	5	6	7	8
频率	264	297	330	352	396	440	495	528
频率比	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
半音数	0	2	4	5	7	9	11	12

根据理论：１和３之间相差４个半音，故ｆ３＝ｆ１＊２（１／３）

乐谱的书写是表现数学对音乐影响的又一个显著领域，而大提琴为何制作成那种形状也是因为这样的结构反映出一条指数曲线的形状。

说了这么多数学与音乐的故事，有些将艺术限于音乐了，不仅音乐，在艺术创作领域工人有两次最大的创新，一次是文艺复兴，另一次是本世界初兴起的现代艺术。两次大的变革都与几何学的变革有关，前者与三维透视机和有关，后者与Ｎ维几何和非欧几何有关。几何学与艺术的关系源远流长，每一种艺术、每一个艺术流派都无法回避几何学，问题不在于是否接受几何学，是否受几何学影响，而在于接受哪一种几何学，主动或者被动吸收哪一种几何的空间观念，如达芬奇讲求透视观念的射影几何学，毕加索讲求的是非欧几何学；而后现代主义、纯粹主义那里也许是现在说的分形几何学，虽然艺术家们本身也许并未意识到。

提到后现代主义，不得不提一提塔西奇著的《后现代思想的数学的数学根源》，这本书颇为另类，因为没人再后现代和数学之间寻求什么关系，尽管有人从后现代和科学之间引起“科学大战”，作者在纷乱复杂的后现代思想中找到意想不到的数学根源，可见数学已渗透在哲学并将永远渗透在哲学中。

也有人从复调的角度看待数学、音乐、文学三者之间的神秘关系。复调形式本是音乐领域中的一个基本概念，指的是两个或几个旋律的多重组和，运用复调形式，可以丰富音乐形象，嘉庆音乐发展的气势和声部的独立性，造成前呼后应、此起彼的效果。同样，在数学和文学领域也存在这种要素的多重组合，与音乐的复调有着异曲同工之妙。音乐之美来自和谐，而现代音乐美学中，和谐不再是美学的最高追求，于是20世纪初出现了无调性音乐，用迷乱音响组合表现人的复杂灵魂境界，如巴赫的《α小调小提琴协奏曲》。而文学艺术现代小说创作流行的复调小说，一个作家，作为一个叙述者，也就是一个讲故事的人，就不再是个

全知全能的上帝，可以把一个故事讲述得非常完整，因为他自己的灵魂源处也可能是割裂的，在他的人物设计和情节讲述中，无意识的把自己的矛盾在故事中流露出来，因此也把自己表露的更深刻，如《泡沫之恋》。而对于数学，代数和几何的并存和互补，就是复调在数学中存在的一个有力证明，解析几何以一种复调的形式发挥着完美的作用。

于是，在这里，我开始想是否存在唯一的一条普遍真理，能够用来解释人们关于世界的所有疑问，使得任何学科的划分是多余的，而且这个问题也许会由数学的进一步发展而解决。

源于数学，回归数学——

数学，文明之光。

参考文献：

[1] 李文林，文明之光：图说数学史，山东教育出版社，2005。

[2] 胡作玄，《数学是后现代思想的根源吗？》，中国图书商报，2005 。

※○