

常微分方程 试卷 (C)

院(系)_____ 班级_____ 学号_____ 姓名_____

题号	一	二	三	四	五	六	卷面总成绩 (满分 100 分)
得分							

得 分

一、 填空题 (本题共 18 分, 每空 3 分)

1、方程 $\frac{dy}{dx} = x^4 + y$ 定义在矩形域 $R: -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$ 上, 则经过点 $(0, 0)$ 的解的存在区间是_____。

2、 $\frac{dy}{dx} = 6xy$ 的通解是_____, 满足初值条件 $x = 1, y = 2$ 的特解_____。

3、函数组 $2t, e^t, \cos t$ 的伏朗斯基行列式为_____。

4、 $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则矩阵指数 $\exp At =$ _____。

5、与 $x'' + \cos t x' + tx = t, x(0) = 0, x'(0) = 1$ 等价的一阶方程组的初值问题是_____。

得 分

二、 计算题 (本题共 34 分)

1、求 $y^2 \left[1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = 1$ 的通解 (7 分)

2、求 $\frac{dy}{dx} = y + xy^3$ 的通解 (7 分)

3、求出 $(x^2 e^y - y)dx + xdy = 0$ 的积分因子，并求此方程的通解（7 分）

4、试求初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + 2y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的第二次近似解（7 分）

5、试求 $y = xy' + y^2$ 的奇解 (6 分)

得 分

三、求 $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = t + 2\sin t + e^t$ 的通解 (15 分)

得 分

四、试求方程组 $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 的基解矩阵，并求满足 $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的解，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (15 分)

得 分

五、求方程 $x'' = \frac{1}{2x}$ 的解 (8 分)

得 分

六、试证如果 $\Phi(t), \Psi(t)$ 在区间 $a \leq t \leq b$ 上是 $x' = A(t)x$ 的两个基解矩阵, 那么, 存在一个非奇异 $n \times n$ 常数矩阵 C , 使得在区间 $a \leq t \leq b$ 上 $\Psi(t) = \Phi(t)C$ (10 分)