《随机过程期末考试卷》

1．设随机变量 X 服从参数为λ的泊松分布，则 X 的特征函数为________。

2．设随机过程 X(t)=Acos(ω t+Φ),-∞<t<∞ 其中ω为正常数，A 和Φ是相互独立的随机变量，且 A 和Φ服从在区间$\left[0,1\right]$上的均匀分布，则 X(t) 的数学期望为____________。

3．强度为λ的泊松过程的点间间距是相互独立的随机变量，且服从均值为__的同一指数分布。

4．设$\left\{W_n,n\geq 1\right\}$是与泊松过程$\left\{X(t),t\geq 0\right\}$对应的一个等待时间序列，则$W_n$服从____分布。

5．袋中放有一个白球，两个红球，每隔单位时间从袋中任取一球，取后放回，对每一个确定的 t 对应随机变量 $X(t)=\begin{cases}\frac{t}{3}, & \text{如果}t\text{时取得红球}\\ e^t, & \text{如果}t\text{时取得白球}\end{cases}$，则 这个随机过程的状态空间_________。

6．设马氏链的一步转移概率矩阵 $P=(p_{ij})$，n 步转移矩阵 $P^{(n)}=(p_{ij}^{(n)})$，二者之间的关系为_______。

7．设$\left\{X_n,n\geq 0\right\}$为马氏链，状态空间 I，初始概率 $p_i=P(X_0=i)$，绝对概率 $p_j(n)=P\left\{X_n=j\right\}$，n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$，三者之间的关系为___________。

8．设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是泊松过程，且对于任意 $t_2>t_1\geq 0$ 则

$P\{X(5)=6\,|\,X(3)=4\}=$ ______

9．更新方程 $K(t)=H(t)+\int_0^t K(t-s)dF(s)$ 解的一般形式为_______。

10．记 $\mu=EX_n$,对一切$a\geq 0$，当$t\to\infty$时，$M(t+a)-M(t)\to$______。

得 分	评卷 人

二、证明题（本大题共 4 道小题，每题 8 分，共 32 分）

1. 设 A,B,C 为三个随机事件，证明条件概率的乘法公式：
$P(BC|A)=P(B|A)P(C|AB)$。

2. 设$\{X(t),\ t\geq 0\}$是独立增量过程, 且 $X(0)=0$, 证明$\{X(t),\ t\geq 0\}$是一个马尔科夫过程。

3. 设$\left\{X_n,n\geq 0\right\}$为马尔科夫链，状态空间为 I，则对任意整数 $n\geq 0, 1\leq \ell<n$ 和 $i,j\in I$，n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}=\sum_{k\in I}p_{ik}^{(\ell)}p_{kj}^{(n-\ell)}$，称此式为切普曼—科尔莫哥洛夫方程，证明并说明其意义。

4. 设$\{N(t), t \geq 0\}$是强度为λ的泊松过程，$\{Y_k, k=1,2,L\}$是一列独立同分布随机变量，且与$\{N(t), t \geq 0\}$独立，令$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, t \geq 0$，证明：若$E(Y_1^2<\infty)$，则$E[X(t)] = \lambda t E\{Y_1\}$。

得 分	评卷 人

三、计算题（本大题共 4 道小题，每题 8 分，共 32 分）

1. 设齐次马氏链的一步转移概率矩阵为$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \mathbf{1/3} & \mathbf{2/3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1/3} & \mathbf{0} & \mathbf{2/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/3} & \mathbf{2/3} \end{pmatrix}$，求其平稳分布。

2. 设顾客以每分钟 2 人的速率到达，顾客流为泊松流，求在 2 分钟内到达的顾客不超过 3 人的概率。

3. 设明天是否有雨仅与今天的天气有关，而与过去的天气无关。又设今天下雨而明天也下雨的概率为α，而今天无雨明天有雨的概率为β；规定有雨天气为状态 0，无雨天气为状态 1。设$\alpha = 0.7, \beta = 0.4$，求今天有雨且第四天仍有雨的概率。

4. 设有四个状态 $I=\{0,1,2,3\}$ 的马氏链，它的一步转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（1）画出状态转移图；

（2）对状态进行分类；

（3）对状态空间 I 进行分解。

得 分	评卷 人

四、简答题（本题 6 分）

简述指数分布的无记忆性与马尔科夫链的无后效性的关系。

一．填空题

1．为 $e^{\lambda(e^{it}-1)}$。2．$-\frac{1}{2}(\sin(\omega t+1)-\sin\omega t)$。3．$-\frac{1}{\lambda}$

4．Γ　5．$-\left\{\frac{1}{3}t,\frac{2}{3}t,\cdots;e,e^2\cdots\right\}$。6．$P^{(n)}=P^n$。　7．$p_j(n)=\sum_{i\in I}p_i\cdot p_{ij}^{(n)}$。

8．$18e^{-6}$　9。$K(t)=H(t)+\int_0^t K(t-s)dM(s)$　10. $\frac{a}{\mu}$

二．证明题

1.

证明：左边=$\frac{P(ABC)}{P(A)}=\frac{P(ABC)}{P(AB)}\frac{P(AB)}{P(A)}=P(C|AB)P(B|A)$=右边

2.

证明：当 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t$ 时，$P(X(t)\le x|X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots X(t_n)=x_n)=$

$P(X(t)-X(t_n)\le x-x_n|X(t_1)-X(0)=x_1,X(t_2)-X(0)=x_2,\cdots X(t_n)-X(0)=x_n)=$

$P(X(t)-X(t_n)\le x-x_n)$，又因为

$P(X(t)\le x|X(t_n)=x_n)=P(X(t)-X(t_n)\le x-x_n|X(t_n)=x_n)=$

$P(X(t)-X(t_n)\le x-x_n)$，故 $P(X(t)\le x|X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots X(t_n)=x_n)=$

$P(X(t)\le x|X(t_n)=x_n)$

3.

证明：$P_{ij}^{(n)}=P\{X(n)=j|X(0)=i\}=P\left\{X(n)=j,\bigcup_{k\in I}X(l)=k|X(0)=i\right\}=$

$\sum_{k\in I}P\{X(n)=j,X(l)=k|X(0)=i\}$

$=\sum_{k\in I}P\{X(l)=k|X(0)=i\}\cdot P\{X(n)=j|X(l)=k,X(0)=i\}=\sum P_{ik}^{(l)}P_{kj}^{(n-l)}$，其意义为n步转移概率可以用较低步数的转移概率来表示。

4.

证明：由条件期望的性质 $E[X(t)]=E\{E[X(t)|N(t)]\}$，而

$E[X(t)|N(t)=n]=E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i|N(t)=n\right]$

$=E\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i|N(t)=n\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i\right]=nE(Y_1)$，所以 $E[X(t)]=\lambda tE\{Y_1\}$。

三．计算题（每题 10 分，共 50 分）

1．解：

解方程组 $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$ 和 $\sum\pi_i=1$，即 $\begin{cases}\pi_1=\frac{1}{3}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2\\ \pi_2=\frac{2}{3}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_3\\ \pi_3=\frac{2}{3}\pi_2+\frac{2}{3}\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$

解得 $\pi_1=\frac{1}{7},\pi_2=\frac{2}{7},\pi_3=\frac{4}{7}$，故平稳分布为 $\pi=(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7})$

2.解：设 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是顾客到达数的泊松过程，$\lambda=2$，故 $P\{N(2)=k\}=\frac{(4)^k}{k!}e^{-4}$，则

$P\{N(2)\le 3\}=P\{N(2)=0\}+P\{N(2)=1\}+P\{N(2)=2\}+P\{N(2)=3\}=e^{-4}+4e^{-4}+8e^{-4}+\frac{32}{3}e^{-4}=\frac{71}{3}e^{-4}$

3.解：由题设条件，得一步转移概率矩阵为 $P=\begin{bmatrix}p_{00}&p_{01}\\p_{10}&p_{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7&0.3\\0.4&0.6\end{bmatrix}$，于是

$P^{(2)}=PP=\begin{bmatrix}0.61 & 0.39\\ 0.52 & 0.48\end{bmatrix}$，四步转移概率矩阵为$P^{(4)}=P^{(2)}P^{(2)}=\begin{bmatrix}0.5749 & 0.4251\\ 0.5668 & 0.4332\end{bmatrix}$，从

而得到今天有雨且第四天仍有雨的概率为$P_{00}^{(4)}=0.5749$。

4.

解：（1）图略；

（2）$p_{33}=1$,而p_{30}，p_{31}，p_{32}均为零，所以状态 3 构成一个闭集，它是吸收态，记$C_1=\{3\}$；0，1 两个状态互通，且它们不能到达其它状态，它们构成一个闭集，记$C_2=\{0,1\}$，且它们都是正常返非周期状态；由于状态 2 可达C_1，C_2中的状态，而C_1，C_2中的状态不可能达到它，故状态 2 为非常返态，记$D=\{2\}$。

（3）状态空间 I 可分解为：$E=D\cup C_1\cup C_2$

四. 简答题（6 分）　答：（略）