

北京科技大学 2020--2021 学年 第 一 学期

离散数学试卷 (A) 答案及评分标准

一、填空题 (共 30 分 每空 3 分)

1. 5

2.  $\neg \exists x (F(x) \wedge \forall y (G(y) \rightarrow H(x, y)))$

3.  $\{\Phi, \{\Phi\}\}$

4.

5.  $\{ \langle a, a, \rangle, \langle a, c, \rangle, \langle c, a, \rangle, \langle c, c, \rangle, \langle b, b, \rangle, \langle b, d, \rangle, \langle d, b, \rangle, \langle d, d, \rangle \}$

6. 33

7. 2

8. 6

9. 11

10. 25

二、(12 分)

答案: 1)  $\forall x \exists y F(x, y) \Leftrightarrow \exists y F(3, y) \wedge \exists y F(4, y)。$

$$\Leftrightarrow F(3, 3) \vee F(3, 4) \wedge F(4, 3) \vee F(4, 4) \Leftrightarrow 1 \quad (6 \text{ 分})$$

2)  $\forall x \forall y F(x, y) \rightarrow F f(x), f(y)$

$$\Leftrightarrow \forall y F(3, y) \rightarrow F f(3), f(y) \wedge \forall y F(4, y) \rightarrow F f(4), f(y)$$

$$\Leftrightarrow F(3, 3) \rightarrow F f(3), f(3) \wedge F(3, 4) \rightarrow F f(3), f(4) \wedge F(4, 3) \rightarrow F f(4), f(3) \wedge F(4, 4) \rightarrow F f(4), f(4) \Leftrightarrow 1 \quad (6 \text{ 分})$$

三、(12 分)

答案: A: A 参与了作案; B: B 参与了作案; C: C 参与了作案

前提:  $A \vee B \vee C; C \rightarrow A; B \rightarrow A \vee C$

1) 判断  $(A \vee B \vee C) \wedge (C \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow A \vee C) \Rightarrow A$  推理是否正确, 即判断

$(A \vee B \vee C) \wedge (C \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow A \vee C) \rightarrow A$  是否为永真式。

用真值表或者简化的真值表判断上式为永真式, 推理正确。 (6 分)

2) 求公式  $(A \vee B \vee C) \wedge (C \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow A \vee C)$  的主析取范式

$$(A \vee B \vee C) \wedge (C \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow A \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \quad (6 \text{ 分})$$

四、(12 分)

答案：1) 成立，证明：

$$\begin{aligned} & A - (B \cap C) \\ \Leftrightarrow & A \cap \sim(B \cap C) \\ \Leftrightarrow & A \cap (\sim B \cup \sim C) \\ \Leftrightarrow & (A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C) \\ \Leftrightarrow & (A - B) \cup (A - C) \end{aligned} \quad (6 \text{ 分})$$

2) 不成立，反例不唯一：

$$\text{比如： } R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}, S = \{\langle 2, 2 \rangle\}, T = \{\langle 3, 2 \rangle\}$$

$$\text{则 } R \circ (S \cap T) = R \circ \phi = \phi, (R \circ S) \cap (R \circ T) = \{\langle 1, 2 \rangle\} \cap \{\langle 1, 2 \rangle\} = \{\langle 1, 2 \rangle\} \neq \phi,$$

故等式不成立 (6 分)

五、(12 分)

答案：1) 求  $R^2$ ,  $t(R)$ ,  $tr(R)$ 。

$$R^2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\} \quad (3 \text{ 分})$$

$$t(R) = A \times A; \quad (3 \text{ 分})$$

$$tr(R) = A \times A \quad (3 \text{ 分})$$

2) A 上的二元关系中，即是等价关系又是偏序关系为

$$I_A = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\} \quad (3 \text{ 分})$$

六、(10 分)

答：

1) 既是欧拉图又是哈密顿图。答案不唯一，比如： (4 分)

2) 不是二部图的树。不存在，因为 G 为二部图的充要条件是 G 中无奇数长度的回路，树中无回路，所以，树必为二部图 (3 分)

3) 非连通的二部图。答案不唯一，比如： (3 分)

七、(12 分)

答：(1)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

成立。证明：  $\forall y \in f(A \cup B)$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B, \text{ 使得 } f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \exists x (x \in A \vee x \in B) \text{ 使得 } f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \exists x(x \in A) \vee \exists x(x \in B) \text{ 使得 } f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow (\exists x(x \in A \wedge f(x) = y) \vee (\exists x(x \in B \wedge f(x) = y))$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B) \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \quad \text{不成立}$$

反例不唯一。比如：  $X=\{1,2,3,4\}$ ,  $A=\{1,2\}$ ;  $B=\{3,4\}$   $f(1)=f(2)=f(3)=1$ ;  $f(4)=2$

$$f(A \cap B) = \Phi; \quad f(A) \cap f(B) = \{1\} \quad (6 \text{ 分})$$