北京科技大学 2022—2023 学年第一学期

数学分析 III 试卷（B 卷）

一、（本题 20 分）判断下列反常积分与数项级数的收敛性与绝对收敛性。

（1）$\int_1^{\infty}\frac{cos2x}{1+x^2}dx$　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{4n^2-2}}$

二、（本题 30 分）计算下列反常积分与级数和.

（1）$\int_0^{+\infty}e^{-x}sinxdx$　　（2）$1+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+\cdots+\frac{(n+1)^2}{n!}+$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$　　（4）$\int_0^1\frac{lnx}{\sqrt{x}}dx$

三、（本题 10 分）设u_n是单调递减正数列，且级数$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$收敛。证明：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$;(2)级数$\sum_{n=1}^{+\infty}n(u_n-u_{n+1})$收敛。

四、（本题 10 分）证明：若积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，且存在极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=C$，则$C=0$。

五、（本题 10 分）判断所给积分或级数的一致收敛性，任选一个解答即可。

（1）

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{x^n},\ \ |x|\geq r>1$$

（2）

$$\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx,\ \ y\in(-\infty,+\infty)$$

六、（本题 10 分）设$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$。

（1）证明：$s>0$时$\Gamma(s)$收敛。（2）证明：$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$。（3）证明：$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$。

七、（本题 10 分）下面两题任选一个解答。

（1）计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}ln(a^2sin^2x+b^2cos^2x)dx,\quad a^2+b^2\neq 0$$

（2）计算级数和

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+--\cdots\cdots$$