复习题

例 1. 在$P[x]_3$中，选定一组基

$$\alpha_1 = -x^2 + x + 1, \alpha_2 = 2x^2 + x + 1, \alpha_3 = 2x^2 - x$$

及另一组基

$$\beta_1 = 2x + 2, \beta_2 = x^2 + x + 2, \beta_3 = x^2 + 1$$

求由基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$到基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的过渡矩阵.

解： 假设过渡矩阵 T

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(1,x,x^2\right)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}=\left(1,x,x^2\right)A$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(1,x,x^2\right)\begin{pmatrix}2&2&1\\2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\left(1,x,x^2\right)B$$

由$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(1,x,x^2\right)A$可知

$$\left(1,x,x^2\right)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}$$

则$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1}B$

则$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

求得$\boldsymbol{A}$的逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4/3 & 5/3 & 1 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 2 设 P 是一个数域，在 P^4 内给出三个向量组，其中

(1) $\alpha_1 = (1, -1, 0, 0), \alpha_2 = (2, 0, 0, 0)$,

(2) $\beta_1 = (0, 0, 1, -1), \beta_2 = (0, 0, 2, 0)$,

(3) $\gamma_1 = (1, 1, 1, 1), \gamma_2 = (1, 2, 1, 2)$,

它们分别生成三个子空间$W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$, $W_2 = L(\beta_1, \beta_2), W_3 = L(\gamma_1, \gamma_2)$.

(1) 判断$W_1 + W_2$是否直和; (2)判断$W_1 + W_2 + W_3$是否直和.

解： (1) $W_1+W_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$，对$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta_1^T,\beta_2^T)$作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

则秩$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=4$，则$W_1+W_2$为直和.

(2) $W_1+W_2+W_3=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2)$，

对$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta_1^T,\beta_2^T,\gamma_1^T,\gamma_2^T)$作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

则秩$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2)=4$,

即维数$(W_1+W_2+W_3)\neq$维数$(W_1)+$维数$(W_2)+$维数(W_3)， $W_1+W_2+W_3$不是直和.

例 3 设 A 为n阶复数矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，λ 是 A 的一个特征值，α是A的对应于 λ 的一个特征向量. 证明：存在数μ，使μ是A^*的一个特征值且使α是A^*对应于μ的一个特征向量(按$\lambda \neq 0, \lambda = 0$. 当$\lambda = 0$时，按0为单根及重根等情况予以讨论.)

证明:（1）当秩$(A)=n$，则$\lambda\neq 0$，$A\alpha=\lambda\alpha$，$\alpha\neq 0$，于是，

$$A^{*}A\alpha=A^{*}\lambda\alpha=|A|\alpha$$

那么

$$A^{*}\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$$

于是

$$\mu=\frac{|A|}{\lambda}.$$

（2）当秩$(A)=n-1$，那么秩$(A^*)=1$，0 是A的特征值且 0 是单根，那么存在$\alpha\neq 0$，使

$$A\alpha=0\alpha=\vec{0}$$

于是A^*的列向量都是$AX=0$的非零解，令$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，则$\alpha$是$AX=0$的一个基础解系，又

$$AA^*=|A|=0$$

于是A^*的列向量都是$AX=0$的解，不妨令

$$A^* = (c_1\alpha, c_2\alpha \cdots, c_n\alpha)$$

$$= (\alpha, \alpha \cdots, \alpha)\begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}$$

那么

$$A^*\alpha = (\alpha, \alpha \cdots, \alpha)\begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha,\alpha\cdots,\alpha)\begin{pmatrix}c_1a_1\\c_2a_2\\\vdots\\c_na_n\end{pmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n}c_ia_i\right)\alpha$$

于是$\mu=\sum_{i=1}^{n}c_ia_i$.

（3）当秩$(A)<n-1$，则$A^*=0$，$\mu=0$.

例 4 设 A 为n阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的特征值和特征向量；

(2) 求可逆矩阵P，使$P^{-1}AP$为对角矩阵.

解： 由(1) $|\lambda E - A| = \lambda^{n-1}(\lambda - n) = 0$，得

$\lambda_1 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$，$\lambda_n = n$.

将 $\lambda = 0$ 代入 $(\lambda E - A)X = 0$ 解得$-AX = 0$.

即 $AX = 0$，它与$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$同解，于是

属于特征值0的全部特征向量为

$$c_2\xi_2 + c_3\xi_3 + \cdots + c_n\xi_n\ (c_2, c_3, \cdots, c_3\text{不全为}0)$$

其中 $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

再解$(nE-A)X=0$解得$\xi_1=(1,1,\cdots,1)^T$是它的基础解系. 属于特征值n的全部特征向量为$c_1\xi_1$，$c_1\neq 0$.

（2）令

$$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

则$P^{-1}AP=diag(n,0,0,\cdots,0)$.

例 5 设 V 为数域 P 上字母 x 的次数小于 n 的全体多项式与零多项式构成的向量空间，定义 V 上线性变换

$$\sigma\big(f(x)\big) = xf'(x) - f(x)$$

(1) 求σ的核$\sigma^{-1}(\vec{0})$与值域$\sigma(\mathrm{V})$；

(2) 证明：$V = \sigma^{-1}\big(\vec{0}\big) \oplus \sigma(\mathrm{V})$.

解：(1) $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$是$n$维线性空间$V$的一组基，那么$\sigma$的值域

$$\sigma(V) = L(\sigma(1), \sigma(x), \sigma(x^2), \cdots, \sigma(x^{n-1}))$$

$$= L(-1, x^2, 2x^3, \cdots, (n-2)x^{n-1})$$

$$= L(1, x^2, x^3, \cdots, x^{n-1})$$

容易证明，这$n-1$个生成元是线性无关，

$$dim\sigma(V) = n - 1.$$

因为$dim\sigma^{-1}(\vec{0}) + dim\sigma(V) = dimV = n.$

于是$dim\sigma^{-1}(\vec{0}) = 1$，而$\sigma(x) = 0$，于是

$$\sigma^{-1}(\vec{0}) = L(x).$$

(2) $\forall f(x) \in \sigma^{-1}(\vec{0}) \cap \sigma(\mathrm{V})$，则

$$f(x) = a_1 x = a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

那么

$$a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_{n-1} x^{n-1} = 0,$$

于是$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0, f(x) = 0,$ 因此

$$\sigma^{-1}(\vec{0}) \cap \sigma(\mathrm{V}) = \{0\}.$$

所以

$$V = \sigma^{-1}(\vec{0}) \oplus \sigma(\mathrm{V}).$$

例 6. 设$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -5 & 21 & 17\\ 6 & -26 & -21\end{pmatrix}$，（1）求$A$的不变因子；（2）求$A$的初等因子；（3）求$A$的若尔当标准形$J$；（4）求可逆矩阵$T$使得$T^{-1}AT=J$.

解：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & -1\\ 5 & \lambda-21 & -17\\ -6 & 26 & \lambda+21\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0 & -1\\ 5 & \lambda-4 & -17\\ -6 & -\lambda+5 & \lambda+21\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0 & -1\\ 5 & \lambda-4 & -17\\ -1 & 1 & \lambda+4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & \lambda+4\\ 5 & \lambda-4 & -17\\ \lambda+1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 5 & \lambda+1 & 5\lambda+3\\ \lambda+1 & \lambda+1 & \lambda^2+5\lambda+3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 5\lambda+3\\ 0 & \lambda+1 & \lambda^2+5\lambda+3\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 5\lambda+3\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & -2\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & \lambda+1\\ 0 & \lambda^2 & 0\end{pmatrix}\quad\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & \lambda^2 & \frac{1}{2}(\lambda+1)\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda^2(\lambda+1)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda+1)\end{pmatrix}$$

所以A的不变因子为$1,1,\lambda^2(\lambda+1)$. A的初等因子为$\lambda^2,\lambda+1$. A的若尔当标准形为$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

因为$T^{-1}AT=J$，所以$AT=TJ$，假设$T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

则有$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(0,\alpha_1,-\alpha_3)$.

解下列方程$A\alpha_1=0,A\alpha_2=\alpha_1,(A+E)\alpha_3=0$.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -5 & 21 & 17\\ 6 & -26 & -21\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 16 & 12\\ 0 & -20 & -15\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 16 & 12\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解得$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$.

$$(A,\alpha_1)=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\-5&21&17&-3\\6&-26&-21&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\0&16&12&-8\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\0&4&3&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

解得$\alpha_2=\begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}$.

$$A+E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -5 & 22 & 17\\ 6 & -26 & -20\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ 0 & 7 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解得$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$.

求得$T=\begin{pmatrix}1 & -3/2 & 1\\ -3 & -1/2 & 1\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$使得$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

练习 设准对角形$A=\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$$A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

(1) 求A的特征矩阵$\lambda E-A$的行列式因子，不变因子，初等因子以及它的标准形;

(2) 求A的若尔当标准形J；

(3) 求可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=J$.

例 7 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

的若尔当标准形 $(a_1 \neq 0)$.

解法一：

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 0 & 0 & \lambda - a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_1 \end{pmatrix}$$

$|\lambda E - A| = (\lambda - a_1)^4$. 下面分情况讨论:

(i) 当$a_2 \neq 0$时，则$\lambda E - A$中存在一个3阶子式为

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 0 & \lambda - a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & \lambda - a_1 \end{vmatrix} = (\lambda - a_1)^3$$

以及另一个3阶子式

$$\begin{vmatrix} -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 0 & \lambda - a_1 & -a_2 \end{vmatrix} = -a_2^3 - (\lambda - a_1)(a_2 a_3 + a_3^2 - a_2 a_4)$$

显然两个3阶子式的公因式为1，则3阶行列式因子

$D_3 = 1$，从而$D_1 = D_2 = D_3 = 1$， $D_4 = (\lambda - a_1)^4$，

初等因子为$(\lambda - a_1)^4$，此时若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

(ii) 当$a_2 = 0, a_3 \neq 0$时，则$\lambda E - A$中存在一个2阶子式为$\begin{vmatrix} -a_3 & -a_4 \\ 0 & -a_3 \end{vmatrix} = a_3^2$，则$D_2 = 1$，

而3阶行列式因子为$D_3 = (\lambda - a_1)^2$，$D_4 = (\lambda - a_1)^4$

从而不变因子为$1, 1, (\lambda - a_1)^2, (\lambda - a_1)^2$，初等因子为$(\lambda - a_1)^2, (\lambda - a_1)^2$，若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

(iii) 当$a_2 = a_3 = 0, a_4 \neq 0$时，则$\lambda E - A$中1阶行列式因子$D_1 = 1$, 2阶行列式因子$D_2 = \lambda - a_1$，3阶行列式因子$D_3 = (\lambda - a_1)^2$，4阶行列式因子等于$|\lambda E - A| = (\lambda - a_1)^4$.

故不变因子为$1, \lambda - a_1, \lambda - a_1, (\lambda - a_1)^2$. 初等因子为$\lambda - a_1, \lambda - a_1, (\lambda - a_1)^2$. 若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

(iv) 当$a_2 = a_3 = a_4 = 0$时，则$A = a_1 E$.

此时若尔当标准形为

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

解法二：

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 0 & 0 & \lambda - a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_1 \end{pmatrix}$$

$|\lambda E - A| = (\lambda - a_1)^4$. 下面分情况讨论：

(i) 当$a_2 \neq 0$时，秩$(a_1E - A) = 3$，A的若尔当标准形由1个Jordan块组成.

$$A \sim J = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

(ii) 当$a_2=0,a_3\neq 0$时，则秩$(a_1E-A)=2$，则A的若尔当标准形由2个Jordan块组成，且$(a_1E-A)^2=O$，那么这两个Jordan块都是2阶的，因此

$$A\sim J=\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

(iii) 当$a_2=a_3=0,a_4\neq 0$时，则秩$(a_1E-A)=1$，则A的若尔当标准形由3个Jordan块组成，2个1阶的，1个2阶的. 因此

$$A \sim J = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

(iv) 当$a_2 = a_3 = a_4 = 0$时，则$A = a_1 E$. $a_1 E$就是A的若尔当标准形.

例 8 设 F^3 的线性变换：

$$f(x)=\begin{pmatrix}2x_1-x_2-x_3\\2x_1-x_2-2x_3\\-x_1+x_2+2x_3\end{pmatrix},\ \forall X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in F^3$$

(1) 求$\alpha=\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$的像在基$\xi_1=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},$

$\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$下的坐标；

(2) 求一组新基，使在该基下f的矩阵是Jordan标准形.

解：(1) 由题意，易知$f(\alpha)=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，令

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

解得$f(\alpha)$在基ξ_1,ξ_2,ξ_3下的坐标为(1,1,2).

(2) 令 $\varepsilon_1=(1,0,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,0)^T,\varepsilon_3=(0,0,1)^T$

$$则f(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$$

$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^3$，于是$\lambda=1$是$A$的三重特征值，而秩$(E-A)=1$，则属于特征值1有两个线性无关的特征向量，因此$A$的Jordan标准形为

$$J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

那么存在可逆矩阵P，使得$AP=PJ$，令$P=(P_1,P_2,P_3)$，则

$$\begin{cases}AP_1=P_1\\AP_2=P_2\\AP_3=P_2+P_3\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (E-A)P_1 = O \\ (E-A)P_2 = O \\ (E-A)P_3 = -P_2 \end{cases}$$

属于特征值1的两个线性无关的特征向量为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

令$P_1 = \xi_1, P_2 = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$

$$(E-A,-P_2)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -k_1-k_2 \\ -2 & 2 & 2 & -k_1 \\ 1 & -1 & -1 & -k_2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -k_1-k_2 \\ 0 & 0 & 0 & k_1+2k_2 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1-2k_2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -k_1-k_2 \\ 0 & 0 & 0 & k_1+2k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令$k_2=1$，则$k_1=-2$，于是

$$P_2=\xi_1-2\xi_2=(-1,-2,1)^T$$

把P_2代入$(E-A)P_3=-P_2$，解得$P_3=(1,1,1)^T$.

因此，P_1,P_2,P_3就是所求的一组基，使f在这组基下的矩阵是J.

注：如果直接将ξ_1,ξ_2代入$(E-A)X=-\xi$，则此方程组无解，因此需要选择适当的k_1,k_2使得$P_2=k_1\xi_1+k_2\xi_2$，从而$(E-A)X=-P_2$有解.

矩阵可对角化的判断方法：

（1）秩方法：首先求出特征多项式的特征根，对于k重特征值$\lambda_i(k \geq 1)$，检验条件

$$r(A-\lambda_i I)=n-k$$

是否满足．只有当所有重特征值都满足上述条件，才能判断A可对角化.

（2）不变因子法（初等因子法）：检验A的不变因子$d_n(\lambda)$是否有重根.

例 9 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$是否可对角化？

提示：A的全部特征值为$\{1,2,2\}$，$r(A-2E)=1$，A可对角化.

例 10 设$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\b&d&2&0\\c&e&f&2\end{pmatrix}$，求$A$的可对角化的条件？

解： 可以直接看出A的全部特征值为$\{1,1,2,2\}$.

因为

$$A-E=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\a&0&0&0\\b&d&2&0\\c&e&f&2\end{pmatrix}$$

可知$r(A-E)=2 \Leftrightarrow a=0$;

$$A-2E=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ c & e & f & 0 \end{pmatrix}$$

同理可知$r(A-2E)=2 \Leftrightarrow f=0$.

因此，A可对角化$\Leftrightarrow a=0, f=0$.

例 11 设$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ a & 4 & b\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$可对角化，2是$A$的2重特征值，求矩阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角形.

解： 设A的特征值为$\{2,2,\lambda_3\}$，则由

$$4+\lambda_3=trA=10$$

可得$\lambda_3=6$. 可对角化意味着$r(A-2E)=3-2=1$,

于是由$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ a & 2 & b\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ a-2 & 0 & b+2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得$a=2,b=-2$. 由以上结果可以看出

$\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,-1,0)^T$ 是$(A-2E)x=0$

的基础解系. 其次求出$(A-6E)x=0$的一个解是

$\alpha_3=(1,-2,3)^T$，令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\1&0&3\end{pmatrix},$$

则必$P^{-1}AP=diag(2,2,6)$.

例 12 设A为数域P上的一个n阶方阵，且满足$A^2=A$，证明：A与对角矩阵

$$C=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

相似.

证明一： 设A的若尔当标准形为

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}, J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

即有可逆矩阵Q，使$Q^{-1}AQ=J$.

由于$A^2=A$，故

$$J^2=(Q^{-1}AQ)^2=Q^{-1}A^2Q=Q^{-1}AQ=J$$

从而$J_i^2=J_i, i=1,2,\cdots,s$.

或即

$$\begin{pmatrix} \lambda_i^2 & & & & \\ 2\lambda_i & \lambda_i^2 & & & \\ 1 & 2\lambda_i & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \lambda_i^2 & \\ & & 1 & 2\lambda_i & \lambda_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

因此当且仅当J_i是一阶矩阵时上式成立，且$\lambda_i^2 = \lambda_i$.

故得$\lambda_i = 1$或$\lambda_i = 0$.

从而J为一个对角矩阵，且主对角线上元素只能是1或0. 适当调换J中主对角线上元素次序，可得方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

仍与A相似.

证明二： 取V为数域P上的一个n维线性空间.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$为其一组基. 令线性变换$\mathcal{A}$在此基下的矩阵为$A$，则由于$A^2 = A$，故$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. 由小测题可知,

$$V = \mathcal{A}V \oplus \mathcal{A}^{-1}\{0\}$$

分别取$\mathcal{A}V$与$\mathcal{A}^{-1}\{0\}$的基为$\eta_1, \cdots, \eta_r$与$\eta_{r+1}, \cdots, \eta_n$，则两者合起来便是$V$的一组基. 于是

$$\mathcal{A}\eta_i = \eta_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, r;$$

$$\mathcal{A}\eta_i = 0, \qquad i = r+1, r+2, \cdots, n.$$

即$\mathcal{A}$在基$\eta_1,\cdots,\eta_n$下的矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

由于A与C为线性变换$\mathcal{A}$在不同基下的矩阵，故A与C相似.

证明三： 设A的秩为r．因为$A^2 = A$，即

$A(E-A)=O$，则

$$\text{秩}(A)+\text{秩}(E-A)=n.$$

由此即得$A-E$的秩为$n-r$．现在来求A的特征值和特征向量． 设λ_0是A的任一特征值，$\alpha \neq 0$是属于它的特征向量，即$A\alpha = \lambda_0\alpha$，则

$$A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda_0\alpha) = \lambda_0^2\alpha.$$

故有$\lambda_0\alpha = \lambda_0^2\alpha$，得$\lambda_0 = 1$或$0$.

当$\lambda_0 = 1$时，特征矩阵$\lambda_0 E - A = E - A$的秩为

$n-r$，因此属于1的线性无关的特征向量有r个，记为$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$.

当$\lambda_0 = 0$时，特征矩阵$\lambda_0 E - A = -A$的秩为r，因此属于0的线性无关的特征向量有$n-r$个，记为$\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \cdots, \varepsilon_n$.

于是$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n$是$A$的$n$个线性无关的特征向量．以它们为列作矩阵$P = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, , \varepsilon_n)$，则有$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

例 13 设$\alpha_1=(1,1,1,1)^T$, $\alpha_2=(0,0,2,-6)^T$,

将α_1,α_2标准正交化并补足为R^4的一组标准正交基.

解： 首先解齐次方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -6\end{pmatrix}x=0$$

求得基础解系$\alpha_3=(-4,0,3,1)^T$, $\alpha_4=(0,-4,3,1)^T$.

将α_1,α_2标准正交化为$e_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$,

$e_2=\frac{1}{6}(1,1,3,-5)^T$; 将$\alpha_3,\alpha_4$标准正交化为

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{26}}(-4, 0, 3, 1)^T,\ \ \boldsymbol{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{234}}(5, -13, 6, 2)^T$$

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$即为所求的标准正交基.

例 14 用正交变换化二次型$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$为标准形.

解： f的矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 下面按三步骤进行：

(i) 求特征值. 由$|\lambda E - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$得$A$的特征值为$\{2, -1, -1\}$.

(ii) 解方程组$(A - 2E)x = 0$. 由

$$A - 2E \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

看出一非零解为$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^T$，单位化后得

$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$.

(iii) 解方程组$(A+E)x=0$. 由

$$A+E\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

看出线性无关的解$\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)^T$;

标准正交化为$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T,\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$.

(iv) 令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$,

$x=Py$，则得到$f=2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

例 15 设$A=A^T\in R^{3\times3}$，A的特征值为$\{1,2,3\}$，$\alpha_1=(1,1,-1)^T$与$\alpha_2=(1,-2,-1)^T$分别为A属于$1,2$的特征向量，求A.

解： 设α_3是A的属于$\lambda_3=3$的特征向量，则α_3必同时正交于α_1与α_2. 因此不妨取$\alpha_3=-\frac{1}{3}\alpha_1\times\alpha_2$ $=(1,0,1)^T$. 今由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$求出矩阵$A$. 方法之一是将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$单位化，构成正交矩阵$P$，然后用公式$A=Pdiag(1,2,3)P^{-1}$，即

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

例 16 设 σ 是数域 P 上 n 维空间 V 上的一个线性变换，在$P[x]$中，$f(x)=f_1(x)f_2(x)$，且$f_1(x)$与$f_2(x)$互素，用$ker\sigma$表示线性变换σ的核．证明：

$$ker f(\sigma)=ker f_1(\sigma)\oplus ker f_2(\sigma).$$

证明： 由$f(x)=f_1(x)f_2(x)$，令$\alpha\in kerf_1(\sigma)$

则 $f_1(\sigma)\alpha=0$,

$$f(\sigma)\alpha=(f_2(\sigma)f_1(\sigma))\alpha=f_2(\sigma)(f_1(\sigma))\alpha=0$$

$$\alpha\in kerf(\sigma)$$

于是$kerf_1(\sigma)$是$kerf(\sigma)$的子空间，同理$kerf_2(\sigma)$是$kerf(\sigma)$的子空间.

由于$\left(f_1(x),f_2(x)\right)=1$，那么存在$u(x),v(x)\in P[x]$，使

$$f_1(x)u(x)+f_2(x)v(x)=1$$

$$f_1(\sigma)u(\sigma)+f_2(\sigma)v(\sigma)=\mathcal{E}$$

其中 $\mathcal{E}$ 表示恒等变换.

$\forall\alpha\in\ker f(\sigma)$，则$f(\sigma)\alpha=\mathbf{0}$.

$$\alpha=f_1(\sigma)u(\sigma)\alpha+f_2(\sigma)v(\sigma)\alpha \qquad (1)$$

而

$$f_1(\sigma)\big(f_2(\sigma)v(\sigma)\big)\alpha=\mathbf{0},\ f_2(\sigma)\big(f_1(\sigma)u(\sigma)\big)\alpha=\mathbf{0}$$

于是

$$f_2(\sigma)v(\sigma)\alpha\in\ker f_1(\sigma),\ f_1(\sigma)u(\sigma)\alpha\in\ker f_2(\sigma),$$

因此

$$\ker f(\sigma)=\ker f_1(\sigma)+\ker f_2(\sigma).$$

$\forall \alpha \in ker f_1(\sigma) \cap ker f_2(\sigma)$，则$f_1(\sigma)\alpha = \mathbf{0}$, $f_2(\sigma)\alpha = \mathbf{0}$. 由(1)式，$\alpha = \mathbf{0}$，于是

$$ker f_1(\sigma) \cap ker f_2(\sigma) = \{\mathbf{0}\}$$

因此

$$ker f(\sigma) = ker f_1(\sigma) \oplus ker f_2(\sigma).$$

例 17 设 $\mathcal{A}$ 是欧氏空间 V 上的一个线性变换，

那么$\mathcal{A}V+ker(\mathcal{A})$是直和的三个等价充要条件：

(1) $\mathcal{A}V\cap ker(\mathcal{A})=\{\mathbf{0}\}$；

(2) 不存在向量 $\alpha\in V$，使得$\mathcal{A}\alpha\neq\mathbf{0}$，但$\mathcal{A}^2\alpha=\mathbf{0}$；

(3) $rank\mathcal{A}=rank\mathcal{A}^2$.

证明：(1) ⇒ (2) 用反证法，假设存在$\alpha \in V$，使得$\mathcal{A}\alpha \neq 0$，但$\mathcal{A}^2\alpha = 0$. 由于$\mathcal{A}\alpha \in \mathcal{A}V$，并且$\mathcal{A}^2\alpha = \mathcal{A}(\mathcal{A}\alpha) = 0$，所以$\mathcal{A}\alpha \in ker(\mathcal{A})$，因此有$\mathcal{A}\alpha \in \mathcal{A}V \cap ker(\mathcal{A})$，且$\mathcal{A}\alpha \neq 0$，与已知条件矛盾，所以假设不成立，证毕.

(2) ⇒ (1) 用反证法，假设$\mathcal{A}V \cap ker(\mathcal{A}) \neq \{0\}$，则存在$\alpha \neq 0$，$\alpha \in \mathcal{A}V \cap ker(\mathcal{A})$. 由于$\alpha \in \mathcal{A}V$，则一定存在$\beta \neq 0$，使得$\alpha = \mathcal{A}\beta$. 同时$\mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}^2\beta = 0$，这样存在一个不为零的$\beta$，使得$\mathcal{A}\beta \neq 0$，但$\mathcal{A}^2\beta = 0$，与已知条件矛盾，所以假设不成立，证毕.

(2) $\Rightarrow$ (3) 用反证法，注意到$ker\mathcal{A} \subseteq ker\mathcal{A}^2$，$\mathcal{A}^2V \subseteq \mathcal{A}V$，故若$rank\mathcal{A} \neq rank\mathcal{A}^2$，则必有$rank\mathcal{A} > rank\mathcal{A}^2$，亦即$dim\mathcal{A}V > dim\mathcal{A}^2V$. (*)

又因为$dim\mathcal{A}V + dimker\mathcal{A} = dimV$，且

$$dim\mathcal{A}^2V + dimker\mathcal{A}^2 = dimV$$

故由(*)知$dimker\mathcal{A} < dimker\mathcal{A}^2$. 亦即存在$\alpha \neq 0$, $\alpha \in ker\mathcal{A}^2$，但$\alpha$不属于$ker\mathcal{A}$，即存在$\alpha \neq 0$, $\mathcal{A}\alpha \neq 0$，但$\mathcal{A}^2\alpha = 0$，与已知条件矛盾，假设不成立，故(3)成立.

(3) ⇒ (2) 用反证法，若有$\alpha \neq 0, \mathcal{A}\alpha \neq 0$，但$\mathcal{A}^2\alpha = 0$，则$\alpha$不属于$ker\mathcal{A}$，但$\alpha \in ker\mathcal{A}^2$. 因而$ker\mathcal{A}$是$ker\mathcal{A}^2$的真子集，亦即$dimker\mathcal{A} < dimker\mathcal{A}^2$，亦即$dim\mathcal{A}V > dim\mathcal{A}^2V$，亦即$rank\mathcal{A} < rank\mathcal{A}^2$，与已知条件矛盾，假设不成立，故(2)成立.

例 18 设 n 阶矩阵 A 的 n 个特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$两两互异. 证明：若$AB = BA$，则$B$与一个对角矩阵相似，且$B$是$A$的一个多项式.

证明： 取V为复数域上的一个n维线性空间，并令$\mathcal{A},\mathcal{B}$为两个线性变换，它在一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵分别为$A,B$. V_{λ_i}为对应于特征值λ_i的特征子空间. 由于$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$互不相同，故

$$V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_n},$$

每个V_{λ_i}都是一维子空间.

又由于$AB=BA$，则$\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$，从而$A$的特征子空间是$\mathcal{B}-$子空间. 从而在$V_{\lambda_i}$中任取一个非零向量$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，则令

$$\mathcal{B}\alpha_1 = k_1\alpha_1$$

$$\mathcal{B}\alpha_2 = k_2\alpha_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathcal{B}\alpha_n = k_n\alpha_n$$

即$\mathcal{B}$在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}$$

B 与对角矩阵 C 为线性变换 $\mathcal{B}$ 在两组不同基下的矩阵，故两者相似，即B与对角矩阵C相似.

又由拉格朗日插值方法知存在唯一的$n-1$次多项式，使

$$f(\lambda_i)=k_i,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

于是由(1)得

$$Q^{-1}f(A)Q=\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}=Q^{-1}BQ$$

从而$B=f(A)$.

例 19 证明：奇数维欧氏空间中的旋转变换一定有特征值1.

证明： 设V是n维线性空间，n是奇数，$\mathcal{T}$是V的一个旋转变换，A是$\mathcal{T}$在一组标准正交基下的矩阵，则A是正交矩阵，且$|A|=1$. 因为n是奇数，故有

$$|E-A|=|-(A-E)|=(-1)^n|A-E|=-|A-E|$$

另一方面，因为A是正交矩阵，就有

$$|E-A|=\left|A^TA-A\right|=\left|(A^T-E)A\right|=|A^T-E||A|$$
$$=|A-E|$$

比较两式可知$|E-A|=0$. 因此，1是$f(\lambda)=|\lambda E-A|$的根. 即1为$A(\mathcal{T})$的特征值.