自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不得答题

北京科技大学 2010 — 2011 学年度第 1 学期

常微分方程试卷

院(系)________ 班级________ 学号________ 姓名________

试卷卷面成绩										占课程考核成绩	平时成绩占 20 %	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	五	六	七	八	小计			
得分												

得 分

一、（10 分）已知方程 $y' = x + y + 1$，求满足初始条件 $x = 1, y = 1$ 的特解

，

得 分

二、（15 分）求方程 $\frac{dy}{dx} = 4e^{-y}\sin x - 1$ 的通解

1 、方程可化为 $\frac{de^y}{dx} = -e^y + 4\sin x$

令 $z = e^y$，得 $\frac{dz}{dx} = -z + 4\sin x$

由一阶线性方程的求解公式，得

$$z = e^{\int(-1)dx}(\int 4\sin x e^{-\int(-1)dx})dx + c = e^{-x}\left[2(\sin x - \cos x)\right]e^x + c = 2(\sin x - \cos x) +$$

所以原方程为：$e^{y}=2(\sin x-\cos x)+ce^{-x}$

得 分

三、（15 分）求方程 $4x^2y^2dx+2(x^3y-1)dy=0$ 的积分因子，并求出方程的通解

解：$\frac{\partial M}{\partial y}=8x^2y,\frac{\partial N}{\partial x}=6x^2y$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{1}{2y} \quad 积分因子\ \mu(y)=e^{-\int\frac{1}{2y}dy}=y^{-\frac{1}{2}}$$

两边同乘以 $\mu(y)$ 后方程变为恰当方程：

$$4x^2y^{\frac{2}{3}}dx+2y^{-\frac{1}{2}}(x^3y-1)dy=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M=4x^2y^{\frac{2}{3}} \quad 两边积分得：u=\frac{4}{3}x^3y^{\frac{3}{2}}+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3y^{\frac{1}{2}}+\varphi'(y)=N=2x^3y^{\frac{1}{2}}-2y^{-\frac{1}{2}}$$

得：$\varphi(y)=-4y^{\frac{1}{2}}$

因此方程的通解为：$y^{\frac{1}{2}}(x^3y-3)=c$

得 分

四、（15 分）求初值问题$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=x^2-y^2\\ y(-1)=0\end{cases}$　$R:|x+1|\le 1,|y|\le 1$的解的存在区间，并求第二次近似解，给出在解的存在区间的误差估计。

解：$M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=4$

$$|x-x_0|\le 1=a,|y-y_0|\le 1=b，\ h=\min(a,\frac{b}{M})=\frac{1}{4}$$

解的存在区间为$|x-x_0|=|x+1|\le h=\dfrac{1}{4}$

即$-\dfrac{5}{4}\le x\le -\dfrac{3}{4}$

令$\varphi_0(x)=y_0=0$

$$\varphi_1(x)=0+\int_{-1}^{x}x^2dx=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}$$

$$\varphi_2(x)=0+\int_{-1}^{x}\left[x^2-(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3})^2\right]dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{63}-\frac{x^4}{18}-\frac{x}{9}+\frac{11}{42}$$

又$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|=|-2y|\le 2=L$

误差估计为：$|\varphi_2(x)-\varphi(x)|\le \dfrac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}=\dfrac{1}{24}$

得 分

五、（15 分）求方程 $\boldsymbol{y' = x^3 y^3 - xy}$ 的通解

得 分

六、（10 分）求方程 (2x+2y-1)dx+(x+y-2)dy=0 的通解

解：$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2(x+y)-1}{(x+y)-2}$，令 z=x+y

则 $\dfrac{dz}{dx} = 1 + \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dz}{dx} = 1 - \dfrac{2z-1}{z-2} = \dfrac{z+1}{-z+2}, \dfrac{-z+2}{z+1} dz = dx$

所以 –z+3ln|z+1|=x+C_1， $\ln|z+1|^3$=x+z+C_1

即 $(x+y+1)^3 = Ce^{2x+y}$

得 分

七、（10 分）求方程 $\mathbf{y} = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{\mathbf{1} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\mathbf{2}}}$ 的奇解。

得 分

八、（10 分）设 $\varphi(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续．试证明方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x)\sin y$$

的所有解的存在区间必为 $(-\infty, +\infty)$.

由已知条件，该方程在整个 xoy 平面上满足解的存在唯一及解的延展定理条件． 显然 $y=\pm\pi$ 是方程的两个常数解． 任取初值 (x_0, y_0)，其中 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$，$|y_0| < \pi$．记过该点的解为 $y=y(x)$，由上面分析可知，一方面 $y=y(x)$ 可以向平面无穷远处无限延展；另一方面又上方不能穿过 $y=\pi$，下方不能穿过 $y=-\pi$，否则与惟一性矛盾．故该解的存在区间必为 $(-\infty, +\infty)$．