

试卷名称：北京科技大学 2011-2012 学年第二学期常微分方程试卷 (A)

试卷来源：试题原卷

整理人员：宗德

录入时间：2014/1/23

试卷现状：☒ 原题 ☐ 答案 ☐ 解析

一、填空题（本题共 21 分，每小题 3 分）

1、方程  $\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 2y^2$  定义在矩形域  $R: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$  上，则经过点  $(0,0)$  的解的存在区间是\_\_\_\_\_。

2、若  $\Phi(t)$  和  $\psi(t)$  都是  $x' = A(t)x$  的基解矩阵，则  $\Phi(t)$  和  $\psi(t)$  具有关系\_\_\_\_\_。

3、求  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  满足  $y(x_0) = y_0$  的解等价于求积分方程\_\_\_\_\_的连续解。

4、方程  $y = x \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$  的奇解是\_\_\_\_\_。

5、 $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$ ，则矩阵指数  $\exp At =$  \_\_\_\_\_。

6、若  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  为  $n$  阶齐线性方程在区间  $[a, b]$  上的  $n$  个解，则它们线性无关的充要条件是\_\_\_\_\_。

7、方程  $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{4}{16}\right) = 0$  的通解是\_\_\_\_\_。

二、计算题（本题共 33 分）

1、求  $\frac{dy}{dx} = 3xy$  的所有解，并求满足初值条件  $x = 1, y = 1$  的特解（8 分）

2、求  $x\sqrt{1+y'^2} = y'$  的通解（8 分）

3、求出  $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$  的积分因子，并求此方程的通解（9 分）

4、求  $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$  的所有解（8 分）

三、试求方程组  $x' = Ax$  的基解矩阵，并求满足  $x' = Ax + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$ ,  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  的解，其中  $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ （13 分）

四、求  $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 2t + \cos 2t + e^{-t}$  的通解（15 分）

五、求方程  $tx'' - x' + (1-t)x = 0$  的通解（8 分）

六、设方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的系数  $p(x)$ 、 $q(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续。

试证：1、由任意初值  $y(x_0) = y_0$ ,  $x_0 \in [a, b]$  所确定的解在整个区间  $[a, b]$  上存在且唯一（5 分）

2、若方程的两个解  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  在  $x = x_1 \in [a, b]$  时达到极值，则  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  在  $[a, b]$  上线性相关（5 分）