学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号____________

（在此卷上答题无效）

绝密 ★ 启用前

北京科技大学 2022-2023 学年第一学期

高等代数（B 卷）

本试卷为学长回忆版．全卷满分 100 分．考试用时 120 分钟．

★ 祝考试顺利 ★

注意事项：

1. 要求正确地写出主要计算或推导过程，过程有错或只写答案者不得分；
2. 考场、学院、班级、学号、姓名均需写全，不写全的试卷为废卷；
3. 涂改学号及姓名的试卷为废卷；
4. 请在试卷上答题，在其他纸张上的解答一律无效．

一、解答题：本题共 7 小题，共 100 分．解答应写出文字说明、证明过程或者演算步骤．

1.（15 分）

在 P^4 中，选定一组基 $\begin{cases}\varepsilon_1=(1,1,1,1),\\ \varepsilon_2=(1,1,-1,-1),\\ \varepsilon_3=(1,-1,1,-1),\\ \varepsilon_4=(1,-1,-1,1),\end{cases}$ 及另一组基 $\begin{cases}\eta_1=(1,1,0,1),\\ \eta_2=(2,1,3,1),\\ \eta_3=(1,1,0,0),\\ \eta_4=(0,1,-1,-1),\end{cases}$

（1）求出由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵；

（2）求向量 $\xi=(1,0,0,-1)$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标．

2.（10 分）

证明：用 C_n 表示如下三角多项式全体，$C_n=\{a_0+a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+...+a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)|a_i,b_i\in F\}$，则在函数通常的加法、数与函数的乘法下构成线性空间．

3.（15 分）

试判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$ 是否可对角化？若 A 可以对角化，求出实数域上的一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并写出这个对角矩阵．

4.（12 分）

用施密特正交化方法，将向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1),\alpha_2=(1,-1,0,4),\alpha_3=(3,5,1,-1)$ 正交规范化．

5.（15 分）

设 $\mathscr{A}$ 为线性空间 V 的线性变换，且 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$，试证明：

（1）$\mathscr{A}$ 的特征值只能是 0 和 1；

（2）若用 V_1 与 V_2 分别表示对应于特征值 1 和 0 的特征子空间，则

$$V_1=\mathscr{A}V, \qquad V_2=\mathscr{A}^{-1}(\vec{0});$$

（3）$V=V_1\oplus V_2=\mathscr{A}V\oplus\mathscr{A}^{-1}(\vec{0})$.

6.（15 分）

设 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$ 是 n 维欧式空间中两个向量组. 证明存在一正交变换 $\mathscr{A}$，使

$$\mathscr{A}\alpha_i=\beta_i, \qquad i=1,2,...,m$$

的充分必要条件为

$$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j), \qquad i,j=1,2,...,m.$$

7.（18 分）

设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -5 & 21 & 17\\ 6 & -26 & -21\end{pmatrix}$.

（1）求 A 的不变因子；

（2）求 A 的初等因子；

（3）求 A 的若尔当标准型 J；

（4）求可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT=J$.