Lista nr 5 z matematyki dyskretnej

1. (2p) Udowodnij, że liczba sposobów, w jaki można podzielić $(n+2)$-kąt wypukły na płaszczyźnie na rozłączne trójkąty za pomocą $n-1$ przekątnych, które nie przecinają się wewnątrz tego wielokąta, jest równa n-tej liczbie Catalana.

2. Określ liczbę drzew binarnych, zawierających n wierzchołków wewnętrznych. W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.

3. Ile nie krzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie n par osób siedzących za okrągłym stołem?

4. Na ile sposobów można wstawić liczby $1, 2, \ldots, 2n$ w pola szachownicy $2 \times n$ tak, by ciąg w każdym wierszu i każdej kolumnie był rosnący?

5. Sprawdź prawdziwość następujących relacji:

   $n^2 \in O(n^3)$; $n^3 \in O(n^{2.99})$; $2^{n+1} \in O(2^n)$; $(n+1)! \in O(n!)$; $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$; $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$.

6. Pokaż, że $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Theta(\log_2 n)$.

   Wskazówka: Pogrupuj mianowniki względem kolejnych potęg 2 tzn., jedną grupę tworzą mianowniki z przedziału $[2^i, \ldots, 2^{i-1})$.

7. Niech $f, g, h : N \to R$. Pokaż,że:

   (a) jeśli $f(n) = O(g(n)$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$,

   (b) $f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$,

   (c) $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Theta(f(n))$.

8. Niech f i g będą dowolnymi wielomianami o stopniach k i l takimi, że $k < l$.

   Pokaż, że wówczas $f(n) = o(g(n)$.

9. Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:

   (a) $a_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2} \right\rfloor$, $a_0 = a_1 = 1$,

(b) $b_{n+1} = \left| \sqrt{b_n^2 + 3} \right|, \; b_0 = 8,$

(c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1}, \; c_0 = 0, \; c_1 = 1.$

Wskazówka: zastosuj odpowiednie podstawienie.