

Lista nr 12 z matematyki dyskretnej

1. Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach $1, 2, \dots, n$, w których nie ma petli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?
2. Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.
3. Naszym zadaniem jest zorganizowanie turnieju szachowego między n zawodnikami. W ciągu ilu najmniej dni można zorganizować ten turniej, jeśli każda para zawodników musi rozegrać partię i żaden zawodnik nie może grać dwukrotnie w ciągu jednego dnia? Odpowiedź uzasadnij pokazując jak uzyskać optymalne rozłożenie.
4. Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie $\deg(v) \geq n/2$ w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem $\deg(v) \geq (n-1)/2$.
5. Niech G będzie grafem spójnym nieskierowanym o n wierzchołkach takim, że dla każdej pary wierzchołków u, v niepołączonych krawędzią zachodzi: $\deg(u) + \deg(v) \geq n-1$. Czy taki graf zawsze zawiera ścieżkę Hamiltona?
6. (Problem haremu). Niech A i B będą dwoma rozłącznymi zbiorami osób. Przypuśćmy, że każda osoba a należąca do zbioru A chce poślubić (naraz) co najmniej $n_a \geq 1$ osób ze zbioru B . Jaki jest warunek konieczny i wystarczający, aby ten problem miał rozwiązanie? Wskazówka: Zastosuj klonowanie i tw. Halla.
7. nk studentów, przy czym $k \geq 2$, jest podzielonych na n towarzystw po k osób i na $n \geq 2$ kół naukowych po k osób każde. Wykaż, że da się wysłać delegację $2n$ osób tak, by każde towarzystwo i każde koło naukowe było reprezentowane. (Każdy student należy do jednego towarzystwa i jednego koła.) Jeden student może reprezentować tylko jedną grupę (typu koło lub towarzystwo).

8. Budowlanec poszukuje malarza, murarza, cieśli, hydraulika i ślusarza. Otrzymuje zgłoszenia od pięciu osób: cieśli, osoby z kwalifikacjami cieśli i hydraulika, dwóch osób z kwalifikacjami murarza i ślusarza oraz osoby, która może pracować jako malarz i jako murarz. Czy budowlanec ruszy z robotą? Jeśli tak, to na ile sposobów może rozdzielić funkcje osobom?