Lista nr 11 z matematyki dyskretnej

1. Digraf, w którym każda para różnych wierzchołków jest połączona dokładnie jedną krawędzią skierowaną, nazywamy *turniejem*. Pokaż, że w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego wierzchołka po drodze o długości co najwyżej 2.

2. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą przez wszystkie wierzchołki.

3. Czy n-wymiarowa kostka Q_n zawiera ścieżkę Hamiltona?

4. Dana jest kostka sera 3×3. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną krawędź z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?

5. Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konika) szachowego wszystkie pola szachownicy 5×5, każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.

6. Udowodnij lub obal: Nie istnieje graf eulerowski (tj. zawierający cykl Eulera) o parzystej liczbie wierzchołków i nieparzystej liczbie krawędzi.

7. *Minimalnym cięciem* w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

8. Pokaż, że graf G zawiera ścieżkę Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny i ma dokładnie dwa wierzchołki o stopniu nieparzystym.

9. Czy graf dwudzielny regularny tzn. taki, w którym wszystkie wierzchołki mają taki sam stopień, zawsze zawiera skojarzenie doskonałe?

10. Podaj metodę znajdowania ścieżki M-powiększającej w grafie dwudzielnym $G = (A \cup B, E)$.

    Wskazówka: skieruj krawędzie z M od B do A, a pozostałe z A do B.

Katarzyna Paluch