Lista nr 13 z matematyki dyskretnej

1. Udowodnij uogólnienie wzoru Eulera dla grafu planarnego z k składowymi spójności.

2. Wykaż, że graf i jego graf dopełniający nie mogą być jednocześnie grafami planarnymi, jeśli graf G ma co najmniej 11 wierzchołków.

3. Dla jakich wartości k, kostka Q_k jest grafem planarnym? Odpowiedź uzasadnij.

4. Narysuj graf K_6 (pełny na 6-ciu wierzchołkach) na płaszczyźnie z możliwie najmniejszą liczbą przecięć. Niech H oznacza graf powstały z grafu K_6 przez usunięcie z niego trzech krawędzi, z których żadne dwie nie mają wspólnych wierzchołków. Czy graf H jest planarny? Uzasadnij swoją odpowiedź odpowiednim rysunkiem.

5. Na płaszczyźnie narysowano skończoną liczbę przecinających się prostych (nieskończonych). Wykaż, że utworzone obszary mogą być pomalowane dwoma kolorami tak, że żadne dwa obszary mające wspólny odcinek („dłuższy” od punktu) nie są pomalowane tym samym kolorem.

6. Niech G będzie spójnym grafem planarnym o n wierzchołkach ($n \geq 3$) i niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w grafie G, dla $i \geq 0$.
   (a) Wykaż nierówność: $\sum_{i \in N}(6-i)t_i \geq 12$.
   (b) Wywnioskuj stąd, że graf G ma co najmniej trzy wierzchołki o stopniach 5 lub mniej.

7. Pokaż, że skojarzenie największe (co do licznosci) ma co najważej dwa razy więcej krawędzi od dowolnego skojarzenia maksymalnego względem zawierania.

8. Pokaż, że aktualizacja wartości $t(v)$ w kroku algorytmu Dijkstry działa poprawnie.

9. Udowodnij lub obal: Jeśli T jest minimalnym drzewem spinającym grafu G, to ścieżka łącząca wierzchołki u i v w drzewie T jest minimalną wagowo ścieżką między u i v w grafie G.

Katarzyna Paluch