

Lista nr 3 z matematyki dyskretnej

1. Niech s, n, k oznaczać pewne liczby naturalne. Pokaż, że jakkolwiek wrzucimy $s > nk$ kulek do k szuflad, któraś szuflada będzie zawierać co najmniej $n + 1$ kulek.
2. Oblicz, ile jest liczb naturalnych między 1 i n (włącznie z tymi liczbami), które są podzielne przez 2 lub 3, ale nie dzielą się ani przez 5, ani przez 7.
3. *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączania i wyłączania.
4. Korzystając z zasady włączania-wyłączania oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawienie $a, a, a, a, b, c, b, c, b$ jest zakazane, ale ustawienie $a, a, a, b, a, c, b, c, b$ jest dobre.
5. Każde pole tablicy 5×5 kolorujemy na niebiesko lub czerwono. Na ile sposobów można to zrobić, by nie powstał jednokolorowy wiersz?
6. (2p) Zadanie takie samo jako wyżej, ale nie może powstać ani jednokolorowy wiersz, ani jednokolorowa kolumna.
7. Mamy 15 piłek czerwonych i 15 zielonych. Na każdej z nich zapisujemy jakąś liczbę naturalną z przedziału $[1, 100]$. Żadna z liczb się nie powtarza. Udowodnij, że istnieją dwie pary piłek - zielona plus czerwona, dla których suma liczb napisanych na piłkach jest taka sama. A gdyby piłek było po 14?
8. Na ile sposobów można wrzucić n kulek do k szuflad tak, by żadna szuflada nie była pusta?
9. Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych (z zerem) mniejszych od 21 ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 70$?

Katarzyna Paluch