

Zadanie Kolokwium

Wojciech Ganobis, Bartosz Troszka

19/04/20

Dla ustalonego $t > 0$ obliczyć wartość całki

$$G(t) = \int_0^t \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$$

używając metody Romberga i złożonego wzoru trapezów.

Opiszmy metodę Romberga.

Metoda Romberga jest metodą całkowania numerycznego.

Obliczając wzorem otrzymujemy tablice Romberga która wygląda następująco:

$$\begin{matrix} R_{0,0} \\ R_{0,1} R_{1,0} \\ R_{0,2} R_{1,1} R_{2,0} \\ \dots \end{matrix}$$

Metodę Romberga można opisać rekurencyjnie:

$$\begin{cases} R_{m,i} & : \frac{4^m \cdot R_{m-1,i+1} - R_{m-1,i}}{4^m - 1} \\ R_{0,i} & : R_{2^i} = h_i \cdot \sum_{k=0}^{2^i-1} \left(\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right) \end{cases}$$

Pierwsza kolumna obliczana jest metodą trapezów, druga to metoda Simpsona. Naszym wynikiem będzie ostatni element trójkąta (prawy dolny róg $R(n, 0)$), ponieważ ma najlepsze przybliżenie.

Trzeba teraz napisać program obliczający tablice Romberga, z wystarczającym błędem przybliżenia.

Błąd w naszym przybliżeniu:

$$\text{blad} R_{n,0} = O\left(\left(\frac{1}{2^n} * (b-a)^2\right)\right) =$$

$$= O\left(\left(\frac{1}{2^n} * t\right)^2\right)$$

$$\frac{t^2}{2^{2n}} < 10^{-4}$$

$$2^{2n} > 10^4 * t^2$$

Podstawiając to powstałego wzoru wiemy już jak dobrać n w zależności od t .

Wzór Romberga w języku C++:

```
h=xn-x0;
t[0][0]=h/2*((1/x0)+(1/xn));
for(i=1;i<=p;i++){
    sl=pow(2,i-1);
    sm=0;
    for(j=1;j<=sl;j++){
        a=x0+(2*j-1)*h/pow(2,i);
        sm=sm+(1/a);
    }
    t[i][0]=t[i-1][0]/2+sm*h/pow(2,i);
}
for(i=1;i<=p;i++){
    for(j=1;j<=i && j<=q;j++){
        m=i-j;
        t[m+j][j]=(pow(4,j)*t[m+j][j-1]-t[m+j-1][j-1])/(pow(4,j)-1);
    }
}
printf("%f",t[p][q]);
```

Gdzie :

- a) x_0 = początek przedziału
- b) x_n = koniec przedziału
- c) t = tablica Romberga