Lista nr 6 z matematyki dyskretnej

1. Wykaż, że iloczyn dowolnych kolejnych k liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$.

2. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Pokaż, że funkcją tworząca ciągu b_n postaci $(0, 0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$, takiego, że $b_{k+i} = a_i$ oraz $b_0 = \ldots = b_{k-1} = 0$ jest funkcja $x^k A(x)$.

   A jak otrzymać funkcję tworzącą ciągu c_n postaci $(a_k, a_{k+1}, \ldots,)$, czyli takiego, że $c_i = a_{k+i}$?

3. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzących dla następujących ciągów:

   (a) $b_n = na_n$
   (b) $c_n = a_n/n$
   (c) $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

   Wskazówka: Rozważ różniczkowanie i całkowanie funkcji tworzących.

4. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n^2$
   (b) $a_n = n^3$
   (c) $\binom{n+k}{k}$

   Wskazówka: Wszędzie przyda się funkcja tworząca $\frac{1}{1-x}$. W ostatnim podpunkcie będzie to odpowiednia potęga tej funkcji.

5. Oblicz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych n
   (b) $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ $(H_0 = 0)$.

6. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(0, 0, 0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots)$.

7. Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej n (czyli rozkładów liczby n na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):

(a) na dowolne składniki,

(b) na różne składniki nieparzyste,

(c) na składniki mniejsze od m,

(d) na różne potęgi liczby 2.

8. Niech p_n oznacza liczbę podziałów liczby naturalnej n, w których każdy składnik nieparzysty występuje nieparzystą liczbę razy a każdy parzysty parzystą, np. $p_4 = 2$, bo interesujące nas podziały to $1+3$ i $2+2$. Podaj funkcję tworząca dla ciągu p_n.

9. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Znajdź funkcję tworzącą ciągu b_n postaci $(a_0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_6, \ldots)$, czyli takiego, że dla każdego naturalnego k, $b_{3k} = a_{3k}$ oraz $b_{3k+1} = b_{3k+2} = 0$.

   Wskazówka: Spróbuj użyć zespolonych pierwiastków stopnia 3 z 1. W podobnym zadaniu na wykładzie używaliśmy dwóch pierwiastków z 1 drugiego stopnia: 1 i -1, żeby otrzymać funkcję tworząca ciągu $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \ldots)$.

10. Korzystając z twierdzenia o rekurencji uniwersalnej, oszacuj złożoność czasową binarnego przeszukiwania.

Katarzyna Paluch