

Zadanie 4

Wojciech Ganobis

28/04/20

Niech $X_1 = Y_1 \cos Y_2$, $X_2 = Y_1 \sin Y_2$, $0 < Y_1 < 1$, $0 \leq Y_2 \leq 2\pi$. Znajdź gęstość $g(y_1, y_2)$ zmiennej (Y_1, Y_2) . Sprawdź czy Y_1 i Y_2 są niezależne.

Jakobian:

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos Y_2 & Y_1 \sin Y_2 \\ \sin Y_2 & -Y_1 \cos Y_2 \end{vmatrix} = | -Y_1 \cos^2 Y_2 - Y_1 \sin^2 Y_2 | = | -Y_1 | = Y_1$$

Gęstość:

$$g(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \cdot |J| = \frac{1}{\pi} \cdot y_1 = \frac{y_1}{\pi}$$

Gęstość y_1 :

$$g(y_1) = \int_0^{2\pi} \frac{y_1}{\pi} dy_2 = \left[\frac{y_1 y_2}{\pi} \right]_0^{2\pi} = 2y_1$$

Gęstość y_2 :

$$g(y_2) = \int_0^1 \frac{y_1}{\pi} dy_1 = \frac{1}{2\pi}$$

Niezależność:

$$g(y_1) \cdot g(y_2) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2y_1 = \frac{y_1}{\pi} = g(y_1, y_2)$$

Y_1 i Y_2 są niezależne, ponieważ $g(y_1, y_2) = g(y_1) \cdot g(y_2)$