

Lista nr 8 z matematyki dyskretnej

1. Przekonaj się, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieje 11 grafów z czterema wierzchołkami.
2. Niech Q_k oznacza graf k -wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k -elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Oblicz, ile wierzchołków i krawędzi ma graf Q_k . Dla jakich k graf Q_k jest dwudzielny?
3. Problem izomorfizmu dwóch grafów jest trudny. Załóżmy natomiast, że w komputerze są dane dwa grafy G i H , określone na tym samym zbiorze wierzchołków $V(G) = V(H) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Niech m oznacza liczbę krawędzi grafu G . Podaj algorytm sprawdzający w czasie $O(m + n)$, czy te grafy są identyczne.
4. Udowodnij, że graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy z rodziny $\{G_v : v \in V\}$ są spójne, gdzie G_v jest grafem powstałym z G przez usunięcie wierzchołka v i incydentnych z nim krawędzi.
5. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe co do długości ścieżki mają wspólny wierzchołek.
6. Wykaż, że przynajmniej jeden z grafów $G = (V, E)$ i \bar{G} (\bar{G} jest dopełnieniem grafu G) jest spójny. Dopełnienie $\bar{G} = (V, E')$ grafu G zdefiniowane jest jako graf (V, E') taki, że $\{u, v\} \in E' \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$.
7. Rozważ reprezentacje grafu G : macierzową, listową. Dla każdej z tych reprezentacji, określ złożoność wykonania na grafie G następujących operacji:
 - (a) oblicz stopień ustalonego wierzchołka,
 - (b) przejrzyj wszystkie krawędzie grafu,
 - (c) sprawdź, czy krawędź (u, v) należy do grafu G ,
 - (d) usuń z grafu G krawędź (u, v) ,
 - (e) wstaw do grafu G krawędź (u, v) .

8. Niech $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ będzie ciągiem stopni wierzchołków grafu prostego. Podaj algorytm porządkowania ciągu d działający w czasie $O(n)$.
9. Pokaż, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków o stopniu nieparzystym jest parzysta.
10. Pokaż, że jeśli w grafie G istnieje droga z u do v , to istnieje też ścieżka z u do v .

Katarzyna Paluch