Lista 2, Zadanie 6

Wojciech Ganobis 310519

20/05/20

Do wykonania tego zadania potrzebujemy udowodnić dodatkowy lemat.

Lemat1: Dla dowolnego cyku w grafie, jeśli waga krwaędzi jest większa niż waga każdej innej krawędzi w tym cyku wtedy krawędź nie może należeć do minimalego drzewa spinającego.
Dowód nie wprost: Załóżmy że mamy drzewo e z taką krawędzią, która jest największa w cyklu C, oraz że ta krawędź e należy do drzewa MST. Teras usuńmy tą krawędź e. Otrzymujemy dwa drzewa. Zróbmy ponownie drzewo MST. Szukamy najmniejszej krawędzi i znajdujemy mniejszą niż e, bo był cykl z e. Czyli nasze pierwsze MST nie było MST.

Lemat2: Jeśli krawędź e nie jest maksymalna na żadnym cyklu w G, to należy do jakiegoś MST.
Dowód nie wprost: Załóżmy że e nie jest maksymalna na żadnym cyklu G i nie należy do MST. Teraz mamy dwie możliwośći:
- e nie należy do cyklu, wtedy e musi należeć do MST więc sprzeczność
- e należy do cyklu, wiemy także że e nie jest maksymalne, więc z lematu1 wiemy że tu także mamy sprzeczność, bo jeśli coś w tym cyklu jest większe(a jest) to każde mniejsze musi należeć do MST

Teraz wykorzystując lematy ułóżmy algorytm. Działa on tak, że bierzemy nasz graf i usuwamy w nim krawędź do sprawdzneia. Potem puszczamy zmodyfikowanego DFS'a, który nie przechodzi przez krawędzie "cięższe" niż nasz krawędź do usunięcia. Jeśli dojdize do końca oznacza to że usuneliśmy maksymalną krawędź, z Lematu1 nie należy do MST. Jeśli natomiast końcowa krawędź nie została owiedzona to znaczy że graf się rozspujnił albo wybrana krawędź nie była krawędzią maksymalną. Z lematu 2 wiemy że ta krawędź musi należeć do MST. Wiedząc to rozważmy taki algorytm:

CzyNależy(G, e): /G-graf, e-szukany, odwiedzony - tabelka z odwiedzonymi wieszchołkami, .1, .2- początek, koniec krawędzi
    usuń krawędź e
    DFS(e.1, e.waga)
    return !odwiedzony[e.2]

DFS(p, w):
    odwiedzony[p] = true
    for($0 \leq i \leq G[p].size$)
        jeśli (!(odwiedzony[G[p][i].1])$\wedge$ G[p][i].2<w)
            to DFS(G[p][i].1, w)

W tym algorytmie przechodzimy po wszystkich wieszchołkach i po wszystkich krawędziach więc złożonośc to O(n+m)