Algoritmos (3): recursión, arboles, DaC

Dr. J.B. Hayet

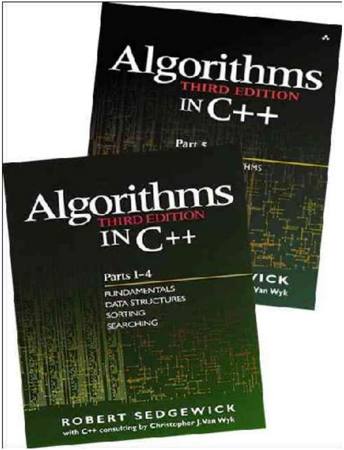
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

Octubre 2012

Outline

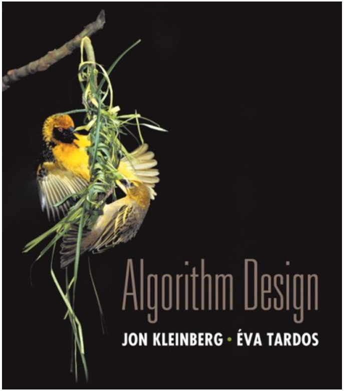
Referencias

- *Algorithms in C++*, R. Sedgewick (Part I y II)
- *Algorithms design*, K. Kleinberg and E. Tardos
- *Introduction to Algorithms*, T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest and C. Stein
- *The art of computer programming*, D. Knuth



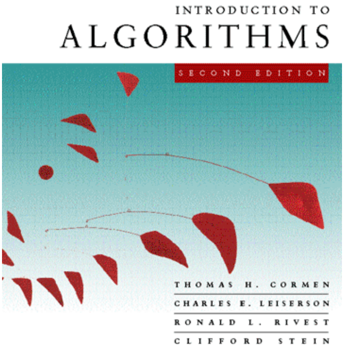
Referencias

- *Algorithms in C++*, R. Sedgewick (Part I y II)
- *Algorithms design*, K. Kleinberg and E. Tardos
- *Introduction to Algorithms*, T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest and C. Stein
- *The art of computer programming*, D. Knuth



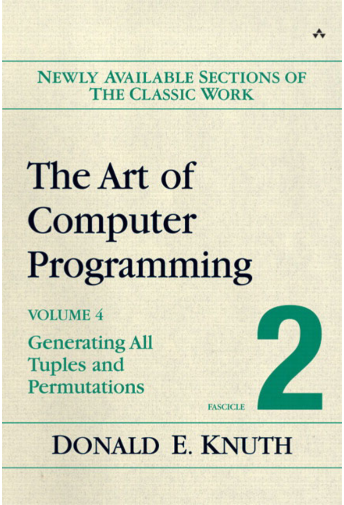
Referencias

- *Algorithms in C++*, R. Sedgewick (Part I y II)
- *Algorithms design*, K. Kleinberg and E. Tardos
- *Introduction to Algorithms*, T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest and C. Stein
- *The art of computer programming*, D. Knuth



Referencias

- *Algorithms in C++*, R. Sedgewick (Part I y II)
- *Algorithms design*, K. Kleinberg and E. Tardos
- *Introduction to Algorithms*, T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest and C. Stein
- *The art of computer programming*, D. Knuth



Outline

Recursión

- Concepto muy clásico en computación y matemática; un programa recursivo es uno que se llama a sí mismo.
- Concepto intrínsecamente ligado al de árbol: la estructura de las llamadas al programa es la de un árbol, cada llamada (nodo padre) llamando sí misma una o mas llamadas al mismo programa (nodos hijos).

La recursión mas vieja del mundo

```
int gcd(int m, int n)  {
    if (n == 0) return m;
    return gcd(n, m % n);
  }
```

Basada en el hecho que si $m > n$,

$$m = kn + m\%n.$$

Un divisor común a m y n tiene que dividir n y $m\%n$: version reducida del problema.

Otra recursión clásica

```
int factorial(int N) {
    if (N == 0) return 1;
    return N*factorial(N-1);
  }
```

Equivalente a un ciclo, ¿no?

```
for (int i=1;i<=N;i++) fac *= i;
```

- En general, las funciones recursivas se pueden escribir como ciclos y viceversa.
- Algoritmo escrito de manera corta.
- Puede haber un costo adicional muy grande al usar funciones recursivas, por parte de la recursión intrínsecamente (ex: Fibonacci) o de los mecanismos informáticos (llamadas a funciones).

Una recursión problemática

```
int puzzle(int N) {
    if (N == 1) return 1;
    if (N % 2 == 0)
         return puzzle(N/2);
    else return puzzle(3*N+1);
}
```

Comportamiento?

- Mecanismo de terminación.
- Las llamadas recursivas se deben de hacer sobre valores, conjuntos de datos "más chicos" que los de la entrada para asegurar una convergencia hacia el caso de terminación (o sea para poder hacer pruebas inductivas).

Otro ejemplo

```
char *a; int i;
int eval() { int x = 0;
    while (a[i] == ' ') i++;
    if (a[i] == '+')
      { i++; return eval() + eval(); }
    if (a[i] == '*')
      { i++; return eval() * eval(); }
    while ((a[i] >= '0') && (a[i] <= '9'))
      x = 10*x + (a[i++]-'0');
    return x;
  }
```

¿Qué hace el programa?
Pruebas por inducción, recurrencia.

Estructuras recursivas

Estructuras intrínsecamente recursivas:

- Listas ligadas.
- Arboles.

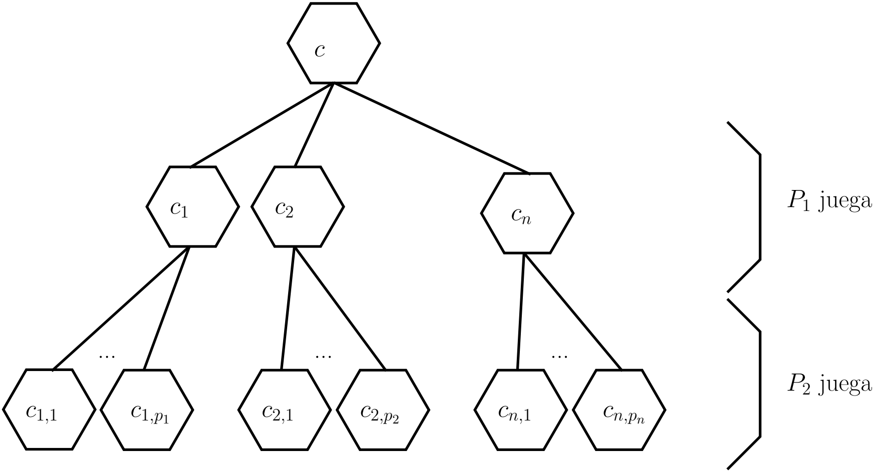
Generalmente estructuras construidas expresando hijos/siguientes en función del nodo corriente y apuntadores, y que implican funciones de recorrido recursivas

```
void traverse(chainlink h, void (*visit)(chainlink)) {
    if (h == 0) return;
    (*visit)(h);
    traverse(h->next, visit);
  }
```

Estructuras recursivas

```
void traverse(btreelink h, void (*visit)(btreelink)) {
    if (h == 0) return;
    (*visit)(h);
    traverse(h->left , visit);
    traverse(h->right , visit);
  }
```

Cerillos



Cerillos

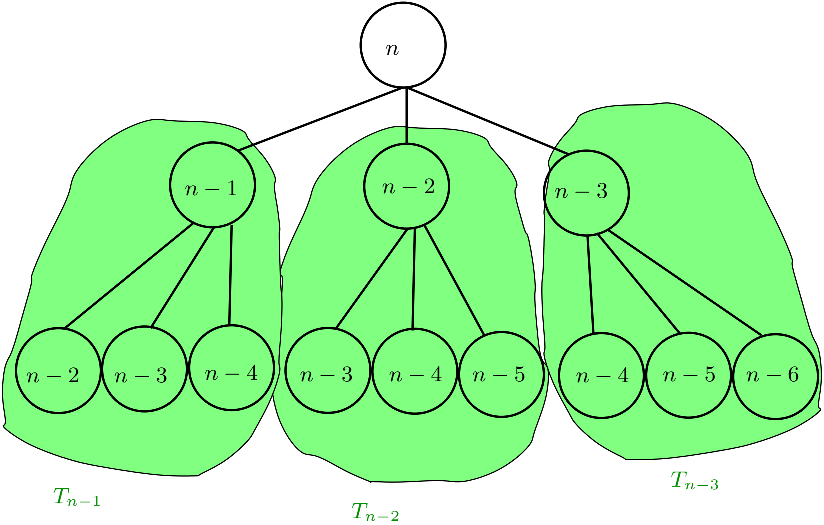
```
// Compute best turn
int computeBestTurnMiniMax(const configuration *s,
                           turn *best,
                           double *valmax) {
  //
  int nTurns = computePossibleTurnNumber(s);
  if (nTurns<=1) {
    *valmax = evaluation(s);
    return 0;
  }
  // Turns
  turn *turns  = NULL;
  computePossibleTurns(s,&turns,&nTurns);
  double *vals = (double *)malloc(nTurns*sizeof(double));

  for (int i=0;i<nTurns;i++) {
    // Next configuration
    configuration snext = nextConfiguration(s,&turns[i]);
    // Compute recursively the best turn
    computeBestTurnMiniMax(&snext,best,&vals[i]);
  }
  ...
```

Cerillos

```
// I am playing : at this step I want to maximise my gains
if (s->player==0) {
  // Search the max
  *valmax = -1.0;
  for (int k=0;k<nTurns;k++) {
    if (vals[k]>*valmax) {
      *valmax = vals[k];
      *best   = turns[k];
    }
  }
}
// He is playing : he will minimize my gains
else {
  // Search the min
  *valmax = 10.0;
  for (int k=0;k<nTurns;k++) {
    if (vals[k]<*valmax) {
      *valmax = vals[k];
      *best   = turns[k];
    }
  }
}
free(vals);
```

Cerillos



Recorrido del arbol. . .

Outline

Divide and Conquer

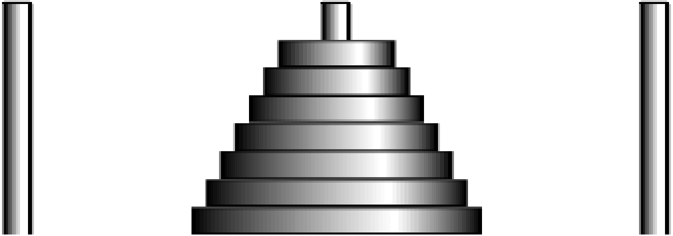
Una primera clase de algoritmos recursivos: los de Divide And Conquer. Separan la resolución de un problema en la resolución de varios sub-problemas "mas fáciles" e independientes, suponiendo que se tiene un operador que permite calcular el resultado global a partir de los resultados de las sub-estancias.

```
Item max(Item a[], int l, int r) {
    if (l == r) return a[l];
    int m = (l+r)/2;
    Item u = max(a, l, m);
    Item v = max(a, m+1, r);
    if (u > v) return u; else return v;
  }
```

Interesante solo si es más eficiente que la versión iterativa...

Divide and Conquer: las torres de Hanoi

- Discos de tamaño decreciente en pila sobre un palo.
- No se puede poner un disco de tamaño mas grande arriba de un disco de tamaño mas chico.
- Hay tres palos, como pasar la pila de un palo al de su derecha?



Divide and Conquer: las torres de Hanoi

Intuición, programa recursivo:

```
void hanoi(int N, int d)  {
    if (N == 0) return;
    hanoi(N-1, -d);
    shift(N, d);
    hanoi(N-1, -d);
  }
```

Se mueve las torres de arriba hacia la dirección opuesta a la que queremos ir, se mueve el disco de abajo por la buena dirección y se mueve de nuevo la torre movida de un desplazamiento por la dirección opuesta a la deseada (circularidad).

Divide and Conquer: las torres de Hanoi

Complejidad: se resuelve el problema de N instancias como 2 problemas a $N-1$ instancias. Ademas $T_1 = 1\ldots$

$$T_N = 2T_{N-1} + 1,$$

que lleva fácilmente (recurrencia) a $T_N = 2^N - 1$.

Divide and Conquer: un problema similar

Dibujar una regla graduada, con marcas grandes cada unidad, marcas mas pequeñas cada media unidad, marcas menos pequeñas cada cuarto de unidad...

```
void rule(int l, int r, int h) {
    int m = (l+r)/2;
    if (h > 0) {
        rule(l, m, h-1);
        mark(m, h);
        rule(m, r, h-1);
    }
}
```

Ejemplo: que hace $rule(0, 8, 3)$? Estructura muy similar al de las torres de Hanoi!

Divide and Conquer

- En el caso del max, problema lineal en el tamaño de los inputs.
- En el caso de Hanoi o de las marcas, problema lineal en el tamaño del output (pero exponencial en el tamaño de los inputs; pero queríamos de todos modos 2^N marcas, no ?).
- Un algoritmo iterativo simple en el caso de las marcas de la regla?

Divide and Conquer

Observar que la estructura del problema es la de los múltiples de las potencias de 2 dentro de números a N bits:

0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	0	1

Divide and Conquer

Observar que la estructura del problema es la de los múltiples de las potencias de 2 dentro de números a N bits:

0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	0	1

Un algoritmo muy simple: contar los ceros consecutivos a partir del bit de peso mas chico!

Divide and Conquer

De la misma observación se puede deducir un algoritmo iterativo para las torres de Hanoi (p.e. mover una torre de N elementos a la derecha): alternar hasta la meta

1. mover el disco más chico hacia la derecha si N impar (izquierda si N par),
2. efectuar el único movimiento posible que no involucra a este mismo disco más chico,

se empieza Y se acaba por un movimiento de disco más chico.
Prueba: por recurrencia !

Divide and Conquer

Usar las potencias de 2:

```
void rule(int l, int r, int h) {
    for (int t = 1, j = 1; t <= h; j += j, t++)
      for (int i = 0; l+j+i <= r; i += j+j)
        mark(l+j+i, t);
  }
```

Implementación *bottom-up*.

Divide and Conquer

Las diferentes maneras de resolver el problema de dibujo de marcas finalmente solo se distinguen en cuanto al orden de hacer los dibujos, y, al fin y al cabo, todos los dibujos están hechos:

- El programa bottom-up recorre el árbol nivel por nivel.
- El programa inicial hace un recorrido in-orden: recorre la rama izquierda, hace la marca y recorre la rama derecha.
- Se puede proponer un algoritmo que haga un recorrido pre-orden (marcar y luego ocuparse de las dos mitades).
- El orden puede importar o no, dependiendo del problema.

Divide and Conquer

- Extensión a fractales: fractal de Koch (sigue linear en el numero efectivo de segmentos que se obtiene pero exponencial en la profundidad del árbol).
- Otros ejemplos de Divide And Conquer: búsqueda binaria y mergeSort (complejidad?).

Divide and Conquer

Productos de dos polinomios de grado d :

$$\begin{cases} P_a(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k \\ P_b(x) = \sum_{k=0}^{d} b_k x^k. \end{cases}$$

Los coeficientes del producto:

$$c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}.$$

Complejidad cuadrática.

Divide and Conquer

Ahora, hay correspondencia entre coeficientes y evaluación del polinomio : con $d+1$ evaluaciones del polinomio, en puntos diferentes, podemos reconstruir el polinomio por interpolación,

$$\{a_k\}_{k\in[0,d]} \Leftrightarrow \{P(x_l)\}_{l\in[0,d]}.$$

Si entonces conociéramos $2d+1$ evaluaciones del producto (a través de $2d+1$ evaluaciones de cada uno de P_a y P_b), podríamos tener la representación de P_aP_b en tiempo lineal en d.

Divide and Conquer

Problema: cada evaluación es también lineal. A partir de los coeficientes de P_a y P_b, el calculo de los coeficientes de P_aP_b sería cuadrático.

$$P_a(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k = (\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} a_{2p}(x^2)^p) + x(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} a_{2p+1}(x^2)^p)),$$

o sea:

$$P_a(x) = P_a^p(x^2) + xP_a^i(x^2).$$

Divide and Conquer

Para tener dos puntos (x y $-x$) evaluados con un polinomio de grado d, usar la evaluación de un punto (x^2) en 2 polinomios de grado $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. Podríamos poder usar lo mismo para los dos polinomios resultantes ¿pero?

Divide and Conquer

Considerar los números complejos ($n = 2d + 1$):

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

y

$$\omega^0, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}.$$

Habrá entre ellos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pares opuestas $\pm\gamma$ de cuadrado idéntico.
Luego entre esos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ cuadrados habrá opuestos...

Divide and Conquer

Consecuencia:

$$P_a(x) = P_a^p(x^2) + xP_a^i(x^2).$$

calculado en las $(2d+1)-$ésimas raices de la unidad genera el polinomio y si $n = 2d+1$,

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n),$$

i.e. $T(n) = O(n \log n)$.

Master theorem

Una receta de cocina para determinar el comportamiento asintótico de secuencias (T_n) satisfaciendo:

$$T_n = aT_{\lfloor n/b \rfloor} + f_n,$$

donde $a \geq 1$ y la secuencia (f_n) es también dada.

Master Theorem.

Master theorem

- Si $f_n = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$ entonces

$$T_n = \Theta(f_n)$$

con la condición que $af_{\frac{n}{b}} < cf_n$ par algún $c < 1$.
- Si las dos secuencias (f_n) y (T_n) son con valores estrictamente positivos y $f_n = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$ para algún k entonces

$$T_n = \Theta(n^{\log_b a} \log_b^{k+1} n).$$

- Si $f_n = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$ entonces

$$T_n = \Theta(n^{\log_b a}).$$

Master theorem

Ejemplos:

1. $T_n = T_{n/2} + 1.$
2. $T_n = T_{n/3} + n.$
3. $T_n = 2T_{\frac{1}{2}n} + \log n.$