专题五 证明不等式

1. $b>a>0$, 证 $\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{b+a}$

2. 设$a \neq b$, 证$e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^b-e^a}{b-a} \leq \frac{e^a+e^b}{2}$

3. 设$0 < a < b$, 证$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b-\ln a} < \frac{a+b}{2}$

4. 设$f(x)$在$[0,1]$上只有连续导数, 且$f(0)=0, 0<f^{'}(x)\leq 1$.

证 : $(\int_0^1 f(x)dx)^2 \geq \int_0^1 f^3(x)dx$

5. 设$x > 0$, 证$\frac{2}{1+2x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}$

6. (1)设$f(x)$在(a,b)内二阶可导, 且$f^{''}(x) \geq 0, x \in (a,b)$.

证：对(a,b)内任意两点x_1, x_2, 有$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f(\frac{x_1+x_2}{2})$

(2)证：$\forall x > 0, y > 0, n > 1, x \neq y$, 总有$\frac{1}{2}(x^n + y^n > (\frac{x+y}{2})^n)$

7. 设$f''(x) \geq 0$, 证 : $f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$

8. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上二阶可导, $f(a)=f(b)=0$, 对$\forall x\in(a,b)$, 有$f''(x)+2f^{'}(x)+f(x)\geq 0$.证：对$\forall x\in[a,b]$, 有$f(x)\leq 0$.

9. $f(x)$在$[0,+\infty)$上二阶可导, $f(0)=1, f^{'}(0)\leq 1, f''(x)\leq f(x)$,

证 : $x>0$时, $f(x)<e^x$

10. 设$f(a) \geq f(a+b), f''(x) \leq 0.$

证：对$0 < a < b < a+b < 2$, 恒有$\frac{af(a)+bf(b)}{a+b} \geq f(a+b)$

11. 设$f(x)$二阶可导, $f''(x) > 0, \int_0^1 f(x)dx = 0$.证 : $f(\frac{1}{2}) < 0$.

12. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续可导,且$f(a)=f(b)=0$.证：$\int_a^b|f(x)|dx \le \frac{(b-a)^2}{4}max_{a\le x\le b}|f^{'}(x)|$.