相似理论

关于矩阵对角化

- 相似对角化与一般对角化不同，相似对角化的结果唯一，元素是特征值
- 二次型即实对称阵可以用配方法也可以用正交变换法标准化(对角化)
  - 正交变换法即相似对角化（$Q^T = Q^{-1}$），结果唯一，是特征值
  - 配方法即普通坐标变换法，结果不唯一，且不是相似对角化
- 实对称矩阵既可以用可逆矩阵也可以用正交矩阵相似对角化，两种方法的结果一样（特征值）
- 实对称矩阵可以对角化变为任意正负惯性指数相同的对角阵
  - 即合同的矩阵不唯一
  - 对角阵只需做伸缩变换，即可任意变换元素值
- 配方法标准化其实就是求合同矩阵，而合同矩阵不唯一，因此标准化后的系数可以是任意值
  - 但正负惯性指数不会变
- 不管怎么对角化，规范型都是一样的
  - 同一个二次型，正负惯性指数唯一

重要结论：**Ax**列向量左乘矩阵

> 列向量左乘矩阵仍是列向量

$(Ax)^T(Ax)$——平方和(一定非负)

- 记$(Ax)^T(Ax) = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_m^2 \geq 0$
- $(Ax)^T(Ax) = 0$:
  - $\forall b_i = 0$
  - $Ax = 0$
- $(Ax)^T(Ax) > 0$:
  - $\exists b_i \neq 0$
  - $Ax \neq 0$

可以证明$Ax = 0$和$A^TAx = 0$同解

矩阵等价、相似与合同区别

1. 等价

- A与B等价：A经初等变换得到B
- PAQ = B（P、Q可逆）
- P和Q没有任何关系
- 充要条件：r(A) = r(B)
- A和B同型

2. 相似

- A与B相似：$\exists$可逆P，$P^{-1}AP = B$
- 判断相似
  1. 实对称$A \sim B \Leftrightarrow \lambda_A = \lambda_B$
  2. 普通矩阵：相似对角化后的对角阵相同，则相似

     $A \sim \Lambda, B \sim \Lambda \Rightarrow A \sim B$

- 判断不相似（由简到繁）
  1. $\sum a_{ii} \neq \sum b_{ii}$——最简单
  2. $r(A) \neq r(B)$
  3. $|A| \neq |B|$
  4. $\lambda_A \neq \lambda_B$
  5. 一个能相似对角化，另一个不能

3. 合同(仅研究实对称即二次型)

> 为什么合同只研究对称矩阵？
> 因为对称矩阵的合同矩阵一定也是对称矩阵，考研不研究非对称矩阵的合同。

- A与B合同：$\exists$可逆C,使$C^TAC = B$
- 惯性定理：二次型经坐标变换正负惯性指数不变
- 只要正负惯性指数相同，两矩阵必合同

4. 特征值相同但不相似的例子

- 思路：特征值没有重根，一定能相似对角化。
  只要举出特征值重根但不能对角化的例子
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$和$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  由于$r(E - B) = 1$，于是B只有一个无关特征向量，因此不能对角化
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. 实对称矩阵相似一定合同，合同不一定相似

- $A \sim B \Leftrightarrow \lambda_A = \lambda_B \Rightarrow$ 标准型相同 $\Leftrightarrow$ 正负惯性指数相同 $\Rightarrow AB$合同
- 合同只能说明正负惯性指数相同，不能保证特征值相同

6. 两矩阵都不能相似对角化，它们俩也能相似

例：$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix}$

- A、B都不能相似对角化（二重根0对应特征向量只有一个）
- 根据定义$P^{-1}AP = B \Rightarrow AP = PB$
- 可以想到$P = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$(第三行/列乘2)
- 则$AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} = PB$

求特征值

由矩阵方程求特征值

- 由矩阵方程只能得到特征值的取值范围
- 例：$A^2 = E \Rightarrow \lambda^2 = 1, \lambda = \pm 1,$即$\lambda$只可能取$1$和$-1$两种取值,
  但λ可能全为$1,$可能全为$-1,$即不能说1和-1必是A的特征值

矩阵、向量和方程组理论

矩阵有关结论

1. 互逆矩阵之和可能为0

- $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$
- $AB=E$,但$A+B=0$

2. 矩阵秩的公式

- $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$
- $AB=0\Rightarrow r(A)+r(B)\leq$ 内标
- $r(A)+r(B)\leq n-r(AB)$
- $A^2=A\Rightarrow r(A)+r(E-A)=n$
  $n=r(E)=r(A+E-A)\leq r(A)+r(E-A)\leq n$
- $A^2=E\Rightarrow r(A+E)+r(A-E)=n$
  证明与上一个同理

3. 求逆的优化

> 已知A、B，求AB^{-1}和BA^{-1}

1. $(A|B)$初等行变换为$(E|AB^{-1})$——行变换相当于左乘A^{-1}
2. $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$初等列变换为$\begin{pmatrix}E\\BA^{-1}\end{pmatrix}$——列变换相当于右乘$A^{-1}$

- 用于求$A=P\bigwedge P^{-1}$

抽象矩阵/行列式变形

$|A+B|$

- $|A+B|=|EA+BE|=|BB^{-1}A+BA^{-1}A|=|B(B^{-1}+A^{-1})A|$
- 线代辅导讲义例1.11

$|E+A^T|=|E+A|$

- $|E+A^T|=|E^T+A^T|=|(E+A)^T|=|E+A|$
- 880行列式基础，填空题7

$A=E+\alpha\beta^T$

- $A^2=(E+\alpha\beta^T)(E+\alpha\beta^T)=E+\alpha\beta^T+\alpha\beta^T+\alpha\beta^T\alpha\beta^T$
- 记$\beta^T\alpha=k$,则

  $A^2=E+(k+2)\alpha\beta^T=(k+2)A-(k+1)E$
- 从而$A^{-1}=-\frac{1}{k+1}(A-(k+2)E)$

$A^{-1}+B^{-1}$

- $A^{-1}+B^{-1}=B^{-1}BA^{-1}+B^{-1}AA^{-1}=B^{-1}(B+A)A^{-1}$
- $A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}BB^{-1}+A^{-1}AB^{-1}=A^{-1}(B+A)B^{-1}$
- 即$A^{-1}(A+B)B^{-1}=B^{-1}(A+B)A^{-1}$

反对称矩阵

> 定义：$A^T = -A$

性质

- 主对角线一定是0（$a_{ii} = 0$）
- 对称位置相差负号（$a_{ij} = -aji$）
- $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
- $|A| = |A^T| = |-A| = (-1)^n|A|$

  易知奇数阶的反对称阵行列式为**0**

向量组等价

概念

- 两向量组可以互相表示

充要条件

1. $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = r(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_t)$,且可以单方向表示
2. 三秩相等：$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = r(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_t) = r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_t)$

方程组结论

同解方程组

1. $Ax = 0$与$A^TAx = 0$同解
2. $A^Tx = 0$与$AA^Tx = 0$同解

A经初等列变换化为B

- 等价于$AX = B$有解
- 也等价于$r(A) = r(B)$（初等变换不变秩）

同解和公共解的区别

> 已知两方程组$(I)Ax = \beta_1$和$(II)Ax = \beta_2$

1. (I)和(II)的公共解

- 只要将两方程组联立，变成一个新的方程组
- 新方程组的解就是公共解
- 联立后约束条件变多了

2. (I)和(II)同解

- 要同解，必须满足(I)和(II)以及联立后的系数矩阵三秩相等！！！
- 即$r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$
- 理解：俩方程组同解，说明这两方程组是一样的，相当于一个方程组，联立之后当然还是同一个方程组

A的列向量是$A^*x=0$的解

> 2011、2020

- $Ax=0$有非零解$\Rightarrow r(A)<n\Rightarrow |A|=0\Rightarrow AA^*=A^*A=|A|E=0$
- 看到$AB=0$，想到$\begin{cases}r(A)+r(B)\le n\\ B\text{的列向量全是}Ax=0\text{的解}\end{cases}$
- 因此由$A^*A=0\Rightarrow A$的列向量是$A^*x=0$的解

线性代数的本质

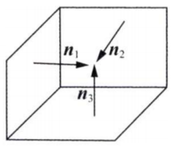
线性方程组几何意义 $Ax = b$

- $A_{3\times3}$的行向量为三个平面的法向量
- 解$x = (x_0, y_0, z_0)$为坐标

有解（即三平面交于一点或一条直线）

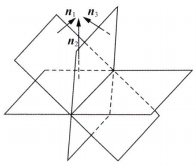
1. 三平面交于一点：$r(A) = r(\overline{A}) = 3$

- 即法向量线性无关
- 方程组唯一解（解为一个点）



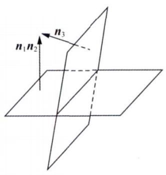
2. 三平面交于一条线：$r(A) = r(\overline{A}) = 2$

- 法向量共面，但不共线
- 方程组无穷解（解集为一条直线）



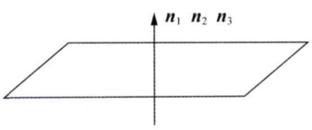
3. 三平面交于一条线，但两平面重合：$r(A) = r(\overline{A}) = 2$

- 法向量共面，其中两个法向量共线



4. 三平面重合：$r(A) = r(\overline{A}) = 1$

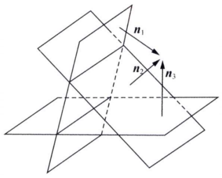
- 三个法向量成比例（共线）
- 解集为平面



无解

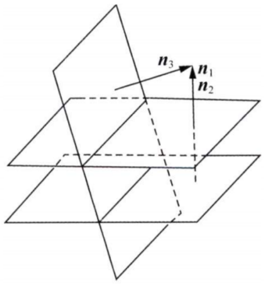
1. 三平面两两相交（交于三条平行直线）：$r(A) = 2, r(\overline{A}) = 3$

- 法向量共面，且任意两向量不共线
- **A**任意两个行向量线性无关
- 不可能出现三条直线不平行即三条交线交于两个点的情况
  （一个平面与一条直线只可能有一个交点，而三条交线任意两条都共面，因此交点必然只有一个）



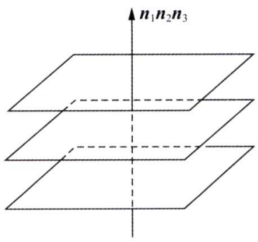
2. 两平面平行，第三张平面与之相交（交于两条平行直线）：$r(A)=2, r(\overline{A})=3$

- 法向量共面，其中两个法向量共线



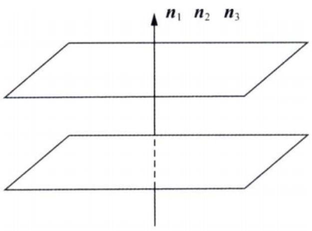
3. 三平面平行：$r(A)=1, r(\overline{A})=2$

- 三个法向量成比例（共线）



4. 两平面重合，第三张与之平行：$r(A)=1, r(\overline{A})=2$

- 三个法向量成比例（共线）



向量空间

各种概念

1. 基：即基础解系，基础解系个数=向量空间维数
2. 规范正交基：即坐标轴方向的单位向量
3. 在基下的坐标：即线性表示中基的系数
4. 过渡矩阵：$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)C=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$，称$C$为由基$\alpha$到基$\beta$的过渡矩阵（右乘过渡）

性质

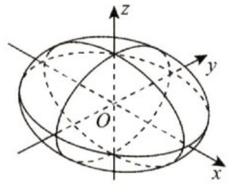
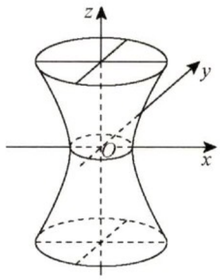
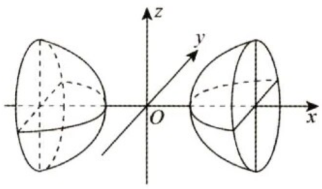
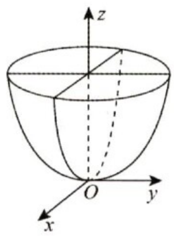
1. 过渡矩阵可逆
2. 过渡矩阵与坐标变换方向是反的！
   若$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)C$，则$y=C^{-1}x$, 其中$x, y$是同一个向量分别在$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$和$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$下的坐
3. 两规范正交基间的过渡矩阵为正交矩阵

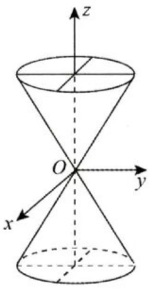
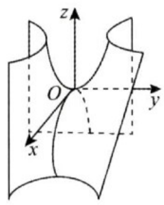
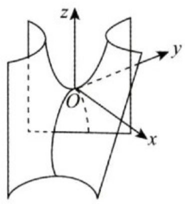
标准型与空间曲面

对应表格

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的符号	$f(x_1,x_2,x_3)=1$
3正	椭球面
2正1负	单叶双曲面
1正2负	双页双曲面
2正1零	椭圆柱面
1正1负1零	双曲柱面

曲面图像

曲面名称	方程	图形
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$	

椭圆锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$	
双曲抛物面（马鞍面）	$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$	
	$z=xy$	

线代做题大招

重要结论

1. $r(A)=1$

> 姜150例2

- $r(A)=1 \Leftrightarrow A$成比例(行列都成比例！！！)——秩为1，即只有一个有效向量，不管怎么组合都成比例
- $\Leftrightarrow \lambda_1 = tr(A), \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$
- $\Leftrightarrow A^n = tr^{n-1}A$
- $\Leftrightarrow A$的特征向量就是列向量
  即$A\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix} = tr(A)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix}$
- $\Leftrightarrow tr(A) \neq 0 \Rightarrow A$必能相似对角化
  若$tr(A)=0$,则0为n重特征值,但$n-r(A)=n-1\neq n$,因此不能相似对角化
- 若A为实对称,则$A=\lambda_1\gamma_1\gamma_1^T$,其中$\lambda_1 = tr(A)$,$\gamma_1$为列向量$\alpha_1$的单位化

2. $AB = aA + bB$

> 姜150例4

1. $AB = BA$
2. $r(A) = r(B)$
3. A与B的特征向量相同(特征值不同)

3. 行满秩与列满秩

> 行满秩：$A_{m\times n}, r(A) = m(\leq n)$

1. $BA = CA \Rightarrow B = C$（右乘行满秩可以消去）
   - B和C都是对A做行变换,而对行满秩矩阵做行变换后相等,变换矩阵必相等
2. $r(BA) = r(B)$（右乘行满秩，秩不变）
3. A行向量无关
4. 非齐次方程$AX = b$有解（是不是唯一解取决于m是否等于n）
   - $r(A) = r(A|b) = m(?n)$

> 列满秩：$A_{m\times n}, r(A) = n(\leq m)$

1. $AB = AC \Rightarrow B = C$（左乘列满秩可以消去）
2. $r(AB) = r(B)$（左乘列满秩，秩不变）
3. A列向量无关
4. 齐次方程$AX = 0$只有零解
5. $ABX = 0$与$BX = 0$同解（可消去）

4. $E+\beta\beta^T$可逆

> 其中β为单位列向量，即$\beta^T\beta=1$

法一：可逆定义

- 记$B=\beta\beta^T$，由$r(B)=1, tr(B)=\beta^T\beta=1$，得$B^2=B$
- 即$B^2+2B+E=3B+E=3(B+E)-2E$
  $\Rightarrow (B+E)^2-3(B+E)=-2E$
  $\Rightarrow (B+E)(B+E-3E)=-2E$
- 因此$B+E$可逆

法二：特征值

- $\lambda_B=1,0,\dots,0 \Rightarrow \lambda_{E+B}=2,1,\dots,1 \Rightarrow |E+B|=2 \Leftrightarrow E+B$可逆

5. $r(A^n)=r(A^{n+1})=r(A^{n+2})=\dots$

> A是n阶矩阵

- $A^nx=0$与$A^{n+1}x=0$同解
- 姜150例26以及线代41
- 应用：$A_{2\times 2}$，则$A^5=0 \Leftrightarrow A^2=0$（某次幂等于零，只要知道阶数就能反推）

6. AB和BA特征值相同

7. 能正交对角化的充要条件：实对称

- A的n个特征向量相互正交⇔A实对称

8. $A^k=0 \Rightarrow |A|=0$

- 即可逆矩阵的幂不可能是0

9. 相似表格

A	λ	α
A^k	λ^k	α
$f(A)$	$f(\lambda)$	α
A^{-1}	$\frac{1}{\lambda}$	α
A^*	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	α
$P^{-1}AP$	λ	$P^{-1}\alpha$
PAP^{-1}	λ	$P\alpha$
A^T	λ	none

10. 判断相似

1. $A\sim B$，则：
   - $A^k\sim B^k$
   - $A^T\sim B^T$
   - $A^{-1}\sim B^{-1}$
   - $A^*\sim B^*$
   - $f(A)\sim f(B)$（f中可有A^k、A^{-1}、A^*、E，但绝不能有A^T!）

2. $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$，但
    - $A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2$——不一定！
    - $A_1A_2 \sim B_1B_2$——不一定！

秒杀方法

由二求一

> 已知α_1, α_2（无关）,求α_3（与α_1、α_2均正交）
> 则$\alpha_3 = \alpha_1 \times \alpha_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

1. 题型1：实对称矩阵不同特征向量正交
    - 已知两特征向量，求第三个特征向量
2. 题型2:齐次方程组$AX = 0$的行向量与解向量正交
    - $r(A) = 2 \Rightarrow$ 基础解系为一个向量

      已知A线性无关的两行,就能直接得到基础解系
    - 同理,$r(A) = 1 \Rightarrow$ 基础解系为2个向量
      已知两个解向量,就能直接得到A

行列式公式

1. $|A + \alpha\beta| = |A|(1 + \beta A^{-1}\alpha)$
2. $|\lambda E + \alpha\beta| = \lambda^n(1 + \beta\lambda^{-1}\alpha)$
3. $|E - AB| = |E - BA|$
    - 只要是方阵，两行列式必相等（不需要同阶！！）
    - 严重超纲
4. 二阶差分方程（见刷题班数列极限）

相似矩阵传递性

> $A \sim B$, 要求P, 使得$P^{-1}AP = B$

- 不需要轮流求两组特征向量，将A和B化为对角阵
- 直接解方程组！
    1. 设$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$——可逆
    2. 根据$AP = PB$, 得到三组方程组, 直接解得$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
        - $A\alpha_1 = \ldots$
          $A\alpha_2 = \ldots$
          $A\alpha_3 = \ldots$

实对称矩阵分解定理

> $Q^TAQ = \Lambda$, 其中$Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$为正交矩阵

- 由正交矩阵反求实对称矩阵A:

- $A=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1^T\\ \gamma_2^T\\ \gamma_3^T\end{pmatrix}=\lambda_1\gamma_1\gamma_1^T+\lambda_2\gamma_2\gamma_2^T+\lambda_3\gamma_3\gamma_3^T$

合同变换法

> 已知A、B, 求可逆C, 使得$C^TAC=B$

- $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$行列同时变换为$\begin{pmatrix}C^TAC\\EC\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bigwedge\\C\end{pmatrix}$（下面的E只会同时做列变换，A做行变换不影响E）
- 行列同时变换举例：
  1. 第一行加到第二行时，第一列也要加到第二列；
  2. 第一行乘**2**，第一列也要乘**2**

若**B**不是$\bigwedge$，则需要将**B**也变换成$\bigwedge$（规范型）再将变换矩阵组合

- $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\bigwedge\\C_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}B\\E\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\bigwedge\\C_2\end{pmatrix}$——合同矩阵规范型一样
- $C_1^TAC_1=\bigwedge=C_2^TBC_2\Rightarrow(C_1C_2^{-1})^TA(C_1C_2^{-1})=B$
- 令$C=C_1C_2^{-1}$, 则$C^TAC=B$

经典实对称求逆

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+E=B+E$$

$\Rightarrow B=A-E, B^2=3B=3(A-E)=(A-E)^2$

$\Rightarrow A(A-5E)=-4E\Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{4}(B-5E)$