专题一 数列极限

不动点定义：

在$f(x)$的取值过程中，如果存在x_0, 使$f(x_0) = x_0$, 则称x_0为$f(x)$的不动点.

1. 设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续, 且$f[f(x)] = x$, 证明$f(x)$存在不动点.

2. 若$f(x)$为$[a, b]$到自身的映射, 且$\forall x, y \in [a, b]$有$|f(x) - f(y)| < \theta|x - y|, (0 < \theta < 1)$.
   对$[a, b]$内任一点x_0, 做递推数列$x_n = f(x_{n-1}), (n = 1, 2, \ldots)$
   证明此数列$\{x_n\}$收敛且极限为$f(x)$的不动点。

3. 已知$f(x)$可导，且$f(0)=1, 0<f^{'}(x)<\frac{1}{2}$, 设$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=f(x_n), (n=1,2,\ldots)$

证明：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛

(2) $\lim_{n\to\infty}x_n$存在，且$0<\lim_{n\to\infty}x_n<2$

4. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导, $0<f^{'}(x)<g(x)$, 且$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx<+\infty$, 若

$x_0\in(-\infty,+\infty)$, 令$x_n=f(x_{n-1}), (n=1,2,\ldots)$

证明此数列收敛且极限为$f(x)$的不动点。

5. 设$f(x)$在$[0,1]$上二次可导，且$f(0)=f(1), 0<f(x)<1, |f''(x)|<1$，则对任意的$x_0\in(a,b)$，$x_n=f(x_{n-1}), (n=1,2,\dots)$，证明数列收敛且极限为$f(x)$的不动点。

6. $f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$|f'(x)|<1, f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0, x_0\in(a,b)$，其中$x_0$满足$f(x_0)=x_0$.

证明:

(1)$\forall x_1\in[a,b], x_{n+1}=f(x_n)$，证$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$

(2)当$n\to\infty$时，$x_{n+1}-x_0$是x_n-x_0的二阶无穷小