# 专题一 数列极限

**不动点定义：**

在$f(x)$的取值过程中，如果存在$x_0$, 使$f(x_0) = x_0$, 则称$x_0$为$f(x)$的不动点.

1. 设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续, 且$f[f(x)] = x$, 证明$f(x)$存在不动点.

2. 若$f(x)$为$[a,b]$到自身的映射，且$\forall x,y\in[a,b]$有$|f(x)-f(y)|<\theta|x-y|,(0<\theta<1)$.

对$[a,b]$内任一点$x_0$，做递推数列$x_n=f(x_{n-1}),(n=1,2,\ldots)$

证明此数列$\{x_n\}$收敛且极限为$f(x)$的不动点。

3. 已知$f(x)$可导，且$f(0)=1, 0<f^{'}(x)<\frac{1}{2}$, 设$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=f(x_n), (n=1,2,\dots)$

证明：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n$存在，且$0<\lim_{n\to\infty} x_n<2$

4. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导, $0<f^{'}(x)<g(x)$, 且$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx<+\infty$, 若

$x_0\in(-\infty,+\infty)$, 令$x_n=f(x_{n-1}),(n=1,2,\dots)$

证明此数列收敛且极限为$f(x)$的不动点。

5. 设$f(x)$在$[0,1]$上二次可导，且$f(0)=f(1), 0<f(x)<1, |f^{''}(x)|<1$，则对任意的$x_0\in(a,b)$，$x_n=f(x_{n-1}), (n=1,2,\dots)$，证明数列收敛且极限为$f(x)$的不动点。

6. $f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$|f^{'}(x)|<1, f^{'}(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0, x_0\in(a,b)$，其中$x_0$满足$f(x_0)=x_0$.

证明：

(1)$\forall x_1\in[a,b], x_{n+1}=f(x_n)$，证$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$

(2)当$n\to\infty$时，$x_{n+1}-x_0$是$x_n-x_0$的二阶无穷小

7. $f(x)$是$[0,+\infty]$上单调减少且非负的连续函数。记$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx,(n=1,2,\ldots)$.

证：$\lim_{n\to\infty}a_n$存在

8. $0 < x_0 < 1, x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n, (n = 0, 1, 2, \dots)$

(1)求 $\lim_{n\to\infty} x_n$

(2)计算当$n \to \infty$时, $e^{sin(x_n-1)} - e^{x_n-1}$的等价无穷小

9. $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$, 证$\{x_n\}$收敛, 并求$\lim_{n\to\infty} x_n$

10. (1)求$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$的最小值

(2)设$\{x_n\}$满足$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$,求$\lim_{n\to\infty}x_n$

11. 已知$f_n(x)=C_n^1\cos x-C_n^2\cos^2 x+\ldots+(-1)^n C_n^n\cos^n x$

(1)对任意自然数$n$,证明方程$f_n(x)=\frac{1}{2}$在区间$(0,\frac{\pi}{2})$中仅有一根

(2)$x_n\in(0,\frac{\pi}{2})$,满足$f_n(x_n)=\frac{1}{2}$,证:$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$