专题四 中值定理

1. 设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0.$

   证明：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\varepsilon_1,\varepsilon_2$,使$f(\varepsilon_1)=f(\varepsilon_2)=0.$

2. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = 0$.

证明：在(a,b)内至少存在两个不同的点x_1, x_2, 使$f(x_1) = f(x_2) = 0$.

3. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x^2 f(x)dx = 0$

证明：在(a,b)内至少存在三个不同的点$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, 使$f(\varepsilon_1) = f(\varepsilon_2) = f(\varepsilon_3) = 0$.

4. 设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx=\int_0^\pi f(x)\cos x dx=0.$

证明：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\varepsilon_1,\varepsilon_2$, 使$f(\varepsilon_1)=f(\varepsilon_2)=0.$

5. 设$f(x)$是$[0,\pi]$上的正值连续函数，且 $\int_0^\pi e^{f(x)}\sin x\ln f(x)dx=\int_0^\pi e^{f(x)}\cos x\ln f(x)dx=0$.

证明：$f(x)=1$在$(0,\pi)$内至少有两个根.

6. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0.$

(1)证：存在$a\in(0,1)$, 使得$f(a)+af^{'}(a)=0$

(2)证：存在$b\in(0,1)$, 使得$bf^{'}(b)+2f(b)=0$

(3)证：存在$\varepsilon\in(0,1)$, 使得$2f(\varepsilon)+4\varepsilon f^{'}(\varepsilon)+\varepsilon^2f^{''}(\varepsilon)=0$

7. 设$0 < a < b, f(x)$在$[a, b]$上连续

证明：至少存在一点$\varepsilon \in (a, b)$, 使得$a\int_{\varepsilon}^{b} f(x)dx + b\int_{a}^{\varepsilon} f(x)dx = (b-a)\varepsilon f(\varepsilon)$.

8. 设$a>1, f(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$上可导，且$af(a)=\ln\frac{e^{f(1)}-1}{f(1)}$

证明：存$\varepsilon\in(0,a)$, 使得$f(\varepsilon)+\varepsilon f^{'}(\varepsilon)=0.$

9. 设$f(x), g(x)$在$(2,3)$内可导，且存在$x_1 < x_2 \in (2,3)$使$f(x_1) = f(x_2) = 0$,
证明：(x_1, x_2)内至少有$xf^{'}(x)\ln x + f(x)[g^{'}(x) \cdot x\ln x + \ln x + 1]$的一个零点

10. 设$f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内二阶可导，且$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}=0$, $2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx=f(2)$,证明：存在$\varepsilon\in(0,2)$使$f^{''}(\varepsilon)=0$.

11. 设$f(x)$在$[a,b]$上有连续导数，在(a,b)内二阶可导, 且$f(a)=f(b)=0$, $\int_a^b f(x)dx=0$.证明：

(1)存在$\varepsilon \in (a,b)$, 使得$f^{'}(\varepsilon)=f(\varepsilon)$;

(2)存在$\eta \in (a,b)$, 且$\eta \neq \varepsilon$, 使得$f^{''}(\eta)=f(\eta)$

12. 证明：若$x>0$,则

(1)$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$,其中$\frac{1}{4}<\theta<\frac{1}{2}$.

(2) $\lim_{x\to 0^-}\theta(x)=\frac{1}{4}$, $\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

13. 证明：导函数至多有第二类间断点

14. 设$f(x)$在$[-l,l]$上连续, 在$x=0$处可导, 且$f^{'}(0)\neq 0$.

(1)证明：对任意$x\in(0,l)$, 至少存在一个$\theta\in(0,1)$

使得$\displaystyle\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$.

(2)求$\lim_{x\to 0^-}\theta$

15. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内二阶可导, 且$f(a)=f(b)=0$, $f'(a)$存在且大于0.证明：在(a,b)内至少存在一点ε使得$f''(\varepsilon)<0$.

16. 若$f(x)$有二阶导数，满足$f(2) > f(1), f(2) > \int_2^3 f(x)dx$,

证明：至少存在一点$\varepsilon \in (1,3)$，使得$f''(\varepsilon) < 0$.

17. 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)>0$.设$g(x)$在(a,b)上连续，且$g^{'}(x)\neq 0$.

$\forall x\in[a,b]$, 证明：至少存在一点$\varepsilon\in(a,b)$, 使$g^{'}(\varepsilon)\cdot\int_a^b f(x)dx=f(\varepsilon)g(\varepsilon)\ln\frac{g(b)}{g(a)}$.

18. 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，且$g(a)=g(b)=1$, 在(a,b)内$f(x),g(x)$可导，且$g(x)+g^{'}(x)\neq 0$.

证明：$\exists\varepsilon,\eta\in(a,b)$, 使得$\frac{f^{'}(\varepsilon)}{f^{'}(\eta)}=\frac{e^{\varepsilon}(g(\varepsilon)+g^{'}(\varepsilon))}{e^{\eta}}$.

19. 设$f(x)$在$[-a,a](a>0)$上具有二阶连续导数，$f(0)=0$.

(1)写出$f(x)$的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式

(2)证明：$\exists\eta\in[-a,a]$, 使$a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx$.