

专题四 中值定理

1. 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$.

证明: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, 使 $f(\varepsilon_1) = f(\varepsilon_2) = 0$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x f(x) dx = 0$.

证明: 在 (a, b) 内至少存在两个不同的点 x_1, x_2 , 使 $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x^2 f(x)dx = 0$

证明: 在 (a, b) 内至少存在三个不同的点 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, 使 $f(\varepsilon_1) = f(\varepsilon_2) = f(\varepsilon_3) = 0$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$.

证明: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, 使 $f(\varepsilon_1) = f(\varepsilon_2) = 0$.

5. 设 $f(x)$ 是 $[0, \pi]$ 上的正值连续函数, 且 $\int_0^\pi e^{f(x)} \sin x \ln f(x) dx = \int_0^\pi e^{f(x)} \cos x \ln f(x) dx = 0$.

证明: $f(x) = 1$ 在 $(0, \pi)$ 内至少有两个根.

6. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$.

(1) 证: 存在 $a \in (0, 1)$, 使得 $f(a) + af'(a) = 0$

(2) 证: 存在 $b \in (0, 1)$, 使得 $bf'(b) + 2f(b) = 0$

(3) 证: 存在 $\varepsilon \in (0, 1)$, 使得 $2f(\varepsilon) + 4\varepsilon f'(\varepsilon) + \varepsilon^2 f''(\varepsilon) = 0$

7. 设 $0 < a < b$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续

证明: 至少存在一点 $\varepsilon \in (a, b)$, 使得 $a \int_{\varepsilon}^b f(x) dx + b \int_a^{\varepsilon} f(x) dx = (b - a) \varepsilon f(\varepsilon)$.

8. 设 $a > 1$, $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 上可导, 且 $a f(a) = \ln \frac{e^{f(1)} - 1}{f(1)}$

证明: 存 $\varepsilon \in (0, a)$, 使得 $f(\varepsilon) + \varepsilon f'(\varepsilon) = 0$.

9. 设 $f(x), g(x)$ 在 $(2, 3)$ 内可导, 且存在 $x_1 < x_2 \in (2, 3)$ 使 $f(x_1) = f(x_2) = 0$,
证明: (x_1, x_2) 内至少有 $xf'(x) \ln x + f(x)[g'(x) \cdot x \ln x + \ln x + 1]$ 的一个零点

10. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\cos \pi x} = 0$,
 $2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$, 证明: 存在 $\varepsilon \in (0, 2)$ 使 $f''(\varepsilon) = 0$.

11. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $\int_a^b f(x)dx = 0$. 证明:

(1) 存在 $\varepsilon \in (a, b)$, 使得 $f'(\varepsilon) = f(\varepsilon)$;

(2) 存在 $\eta \in (a, b)$, 且 $\eta \neq \varepsilon$, 使得 $f''(\eta) = f(\eta)$

12. 证明: 若 $x > 0$, 则

(1) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, 其中 $\frac{1}{4} < \theta < \frac{1}{2}$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \theta(x) = \frac{1}{4}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

13. 证明：导函数至多有第二类间断点

14. 设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上连续, 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) \neq 0$.

(1) 证明：对任意 $x \in (0, l)$, 至少存在一个 $\theta \in (0, 1)$

使得 $\int_0^x f(t)dt + \int_0^{-x} f(t)dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$.

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \theta$

15. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$,
 $f'(a)$ 存在且大于 0. 证明 : 在 (a, b) 内至少存在一点 ε 使得 $f''(\varepsilon) < 0$.

16. 若 $f(x)$ 有二阶导数, 满足 $f(2) > f(1)$, $f(2) > \int_2^3 f(x) dx$,
证明 : 至少存在一点 $\varepsilon \in (1, 3)$, 使得 $f''(\varepsilon) < 0$.

17. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x) > 0$. 设 $g(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且 $g'(x) \neq 0$.

$\forall x \in [a, b]$, 证明: 至少存在一点 $\varepsilon \in (a, b)$, 使 $g'(\varepsilon) \cdot \int_a^b f(x) dx = f(\varepsilon)g(\varepsilon) \ln \frac{g(b)}{g(a)}$.

18. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(a) = g(b) = 1$, 在 (a, b) 内 $f(x), g(x)$ 可导, 且 $g(x) + g'(x) \neq 0$.

证明: $\exists \varepsilon, \eta \in (a, b)$, 使得 $\frac{f'(\varepsilon)}{f'(\eta)} = \frac{e^\varepsilon(g(\varepsilon) + g'(\varepsilon))}{e^\eta}$.

19. 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上具有二阶连续导数, $f(0) = 0$.

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式

(2) 证明: $\exists \eta \in [-a, a]$, 使 $a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$.