笔记

独立和互斥

概念

1. 独立是没有任何影响，毫无关系
2. 互斥指排斥，你发生我就不能发生，两者是有影响的
3. 独立两者可以同时发生，排斥不能同时发生
4. 独立和互斥两者不能互推

数学语言：

1. $P(AB)=P(A)P(B)$,称AB独立
2. $P(AB)=0 \Leftarrow$AB互斥$\Leftrightarrow AB=\phi$
3. $P(AB)=0 \nRightarrow AB$互斥

   例：$A=x\le\frac{1}{2},B=x\ge\frac{1}{2},P(AB)=P(x=\frac{1}{2})=0,A\cap B\neq\phi$（连续性随机变量取到任何一个点的概率都是0）

两者关系

互斥不独立，独立不互斥

- 由于互斥是有影响的，独立无影响，因此两者只能存在一个
- 理解：有你没我，有我没你，因此你我之间有紧密联系；

  你我独立说明互相不认识，没有任何关系。
- 前提是两者都不是不可能事件（不可能事件与任何事件都互斥且独立）

常见分布

一、离散

(1)二项分布$B(n,p)$

- 投篮投进概率是p，投n次，$P\{x=k\}$为投进**k**次的概率
- $P\{x=k\}=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\ldots,n$
- $EX=np,DX=np(1-p)$
- $n=1$时为0-1分布

(2)泊松分布$P(\lambda)$

- $P\{x=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\ldots,\lambda>0$
- $EX=DX=\lambda$
- 由级数$\Sigma_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots=e^x$可知，$P\{x=k\}$即此级数中第$k$项占整体的比例

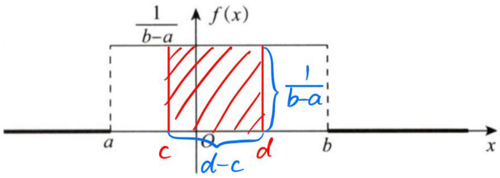
(3)几何分布

- 一直投篮直到命中为止，$P\{x=k\}$为一共投了**k**次的概率
- $P\{x=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,3,..$
- $EX=\frac{1}{p}, DX=\frac{1-p}{p^2}$（会推导）

二、连续

(4)均匀分布$U(a,b)$

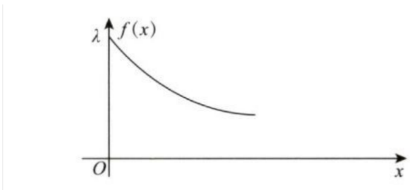
- $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, a<x<b \\ 0, 其他\end{cases}$
- $EX=\frac{a+b}{2}, DX=\frac{(b-a)^2}{12}$

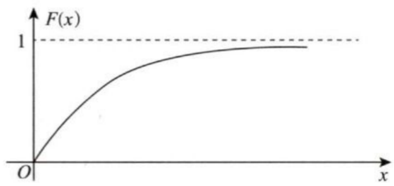


- $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{a}^{x}f(x)dx=\frac{x-a}{b-a}, a<x<b$
- 若$[c,d]\subset(a,b)$, 则$P\{c<x<d\}=\frac{d-c}{b-a}$(长度之比)

(5)指数分布$E(\lambda)$

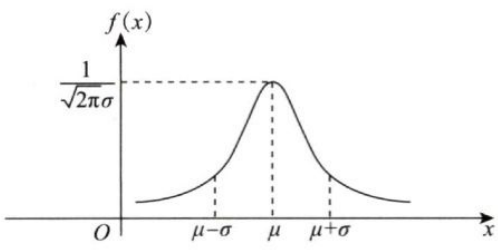
- $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0 \\ 0, 其他\end{cases}, \lambda>0$
- $F(x)=\begin{cases}0, x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, x\geq 0\end{cases}$
- $EX=\frac{1}{\lambda}$(均值为$\frac{1}{\lambda}$或参数为λ), $DX=\frac{1}{\lambda^2}$
- 背景：寿命
- 无记忆性：$P\{X>s+t|X>s\}=P\{X>t\}$
  $P\{已经活了60岁，再活30岁\}=P\{从出生开始活30岁\}$





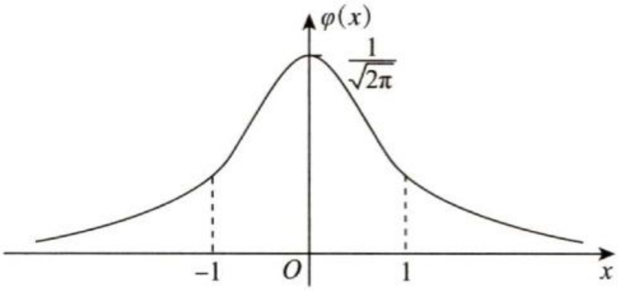
(6)正态分布$N(\mu,\sigma^2)$

- $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x\in R$
- 分布函数积不出
- $EX=\mu, DX=\sigma^2$



$\frac{x-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$为标准正态分布（标准化）

- $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$
- $\Phi(0)=\frac{1}{2},\Phi(1)=0.841,\Phi(1.645)=0.95,\Phi(1.96)=0.975$
- $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$
- $\varphi(x)$积不出，但$\Phi'(x)=\varphi(x)$
- $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=0(x\varphi(x)为奇函数)$



记：$\Phi(1)=0.8413;\quad\Phi(1.645)=0.95;\quad\Phi(1.96)=0.975$

(7)二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

1. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-u},u=\frac{1}{1-\rho^2}[\frac{(x-\mu_1^2)}{2\sigma_1^2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}]$
2. $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$
3. $\rho是X与Y的相关系数，即\rho=\frac{Cov\{X,Y\}}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{Cov\{X,Y\}}{\sigma_1\sigma_2}$
   $其中|\rho|<1$
4. X、Y的条件分布都是正态分布
5. $aX+bY(a\neq 0,b\neq 0)$服从正态分布
6. **X**、**Y**独立的充要条件是**X**与**Y**不相关，即$\rho=0$
   此时$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

(8)二维均匀分布

- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_G}(面积倒数),(x,y)\in G\\0,其他\end{cases}$
- 概率直接算面积之比

数字特征公式

1. 期望和方差

求期望方法

- 期望=函数值*概率的均值
- 一维：$Eg(X)=\sum g(x_i)p_i$
  $$Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$
  特别地, $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$
- 二维：二维变量没有期望，但二维变量的函数有期望(一维)!!!
  $EZ=Eg(X,Y)=\sum\sum g(x_i,y_i)p_{ij}$
  $EZ=Eg(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$
- 特别地，$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$（由二维密度求边缘期望）

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$
$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$

2. 协方差和相关系数

协方差

1. $Cov(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)] = EXY - EXEY$
2. $Cov(X,X) = DX$
3. 若X、Y独立，则$Cov(X,Y) = 0$
4. $D(aX+bY) = D(aX) + D(bY) + 2Cov(aX,bY) = a^2DX + b^2DY + 2ab\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$

相关系数

1. $\rho_{XY} = Cov(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}, \frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{EXY-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

3. 独立和不相关

若X,Y独立，则

1. $EXY = EX{\cdot}EY$
2. $D(X \pm Y) = DX + DY$
3. $Cov(X,Y) = 0$
4. $\rho_{XY} = 0$

不相关的充分必要条件

1. X,Y不相关，即$\rho_{XY} = 0$
2. $\Leftrightarrow Cov(X,Y) = 0$
3. $\Leftrightarrow EXY = EX{\cdot}EY$
4. $\Leftrightarrow D(X \pm Y) = DX + DY$
5. X,Y无线性关系

两者关系

1. 独立是没有任何关系，而不相关是没有线性关系
   因此独立一定不相关
2. 不相关不一定独立（没有线性关系也可能有其他关系）
3. $\rho \neq 0 \Rightarrow$ 不独立（$\rho \neq 0$表示有一点线性关系，那必然不独立）
4. 对于二维正态分布，独立 $\Leftrightarrow \rho = 0 \Leftrightarrow$ 不相关（只可能是线性关系）

卷积公式

原理：将X,Y的密度转换成X和Z(或Y和Z)的密度，再用边缘密度的公式求出Z的边缘密度

证明方法：通过暴力求导公式$\frac{d}{dz}\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)}G(z,x)dx=\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)}G^{'}(z,x)dx+G(z,\beta(z))\beta^{'}(z)-G(z,\alpha(z))\alpha^{'}(z)$

> 下面只转换成X和Z的密度

1. $Z=X+Y$

> $y=z-x,\quad |y_z^{'}|=1$

- $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$
- 已知$f(x,y)$时，只需将y换成$z-x$就能得到Z的概率密度
- 注意x,y的范围也要改成x,z的范围，并化简

计算步骤

1. $f(x,y)$改写成$f(x,z)$
2. 讨论z的范围
3. 定x的限：画$z=z$的直线，在取值范围内穿进穿出的点就是x的上下限

   只要看穿进穿出的点，不是二重积分看面积！！！！　！！

   > 例题：讲义P128 13题

2. $Z=X\cdot Y$

> $y=\frac{z}{x},\quad |y_z^{'}|=\frac{1}{|x|}$

- $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\frac{z}{x})\frac{1}{|x|}dx$

3. $Z=\frac{Y}{X}$

> $y=xz,\quad |y_z^{'}|=|x|$

- $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,zx)|x|dx$
- 例题:讲义P128 14题

4. $Z=\frac{X}{Y}$

> $y=\frac{x}{z},|y_z^{'}|=\frac{|x|}{z^2}$

- $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\frac{x}{z})\frac{|x|}{z^2}dx$
- 880基础解答6

易混淆

（1）边缘密度$f(x)$和边缘分布$F(x)$

只讨论连续型——只有连续型才讨论密度

1. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$（固定一个，累加另一个所有取值）
2. 若X,Y独立，则$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \Leftrightarrow f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$
3. $F_X(x) = P\{X \le x, Y \le +\infty\} = \lim_{y\to\infty} F(x,y)$
4. 若X,Y独立，则$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

特殊古典概型

某事件第i次发生的概率为p_i,问前n次中平均发生了多少次？（期望）

- 将每次的概率全部累加即得到期望
- 证明:

  $$记X_n为前n次发生的次数,Y_i为第i次发生的次数,则Y_i \sim \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1-p_i & p_i \end{vmatrix}, EY_i = p_i$$

  $$且X_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n, 则EX_n = EY_1 + EY_2 + \ldots + EY_n = \sum p_i$$

什么是参数估计

> 参数估计分为点估计和矩估计

点估计

- 例如估计国家线是60分
- 点估计常用方法：矩估计法、最大/极大似然估计法、最小二乘法、贝叶斯估计法
- 点估计能明确告知人们“未知参数是多少”，而不能反应估计的可信程度

矩估计（methods of moments）

- 原理是用样本矩作为相应的总体矩来求出估计量
- 相比于最大似然估计、最小二乘法，效率很低，目前很少使用

区间估计

- 例如估计国家线是50~70分区间内
- 依据抽取的样本，根据一定的正确度和精确度的要求，构造适当的区间，作为总体分布的未知参数或参数函数的真值所在范围的估计
- 根据给定的概率值估计出来一个区间，这个区间称为置信区间，给定概率值称为置信度或置信水平
- 置信水平就是实际落在置信区间的信心

每章概念

第一章 概率

1. 概率中$A^2 = AA = A \cap A = A$, 即$P(A^2) = P(A)$
2. 多个事件相互独立，只要字母不重叠，经过任意运算后都独立

   例：A、B、C相互独立，A-C和B-C不独立，而A-B与C独立

第二章 一维**r.v.**

- 由分布函数求某一点的密度（离散）：
  $P\{X = x_0\} = P\{X \leq x_0\} - P\{X < x_0\} = F\{x_0\} - F\{x_0 - 0\}$
- 只有连续型随机变量才有密度函数

分布函数性质

1. 单调不减（求参数判断取舍P97例2.2）
2. 取值0~1
3. 处处右连续

概率密度性质（充要条件）

1. 非负
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$（规范性）

分布函数和概率密度的组合

1. $F_1(x)F_2(x)$一定是密度函数，是$max\{F_1(x), F_2(x)\}$的分布函数
2. $a_1 + a_2 = 1$时，$a_1F_1(x) + a_2F_2(x)$一定是分布函数
3. $a_1 + a_2 = 1$时，$a_1f_1(x) + a_2f_2(x)$一定是密度函数

记公式

1. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = e^x$
2. $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$
3. $\int_0^{+\infty} x^n e^x dx = n!$($n$是自然数)
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$(凑正态)

一维连续型

- $X \sim f(x)$, 分布函数为$F(x)$
- 取任一点的概率都是0
- $P\{a < x < b\} = P\{a < x \leq b\} = P\{a \leq x < b\} = P\{a \leq x \leq b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$(面积)

随机变量函数的分布

1. 求$Y = g(X)$的分布函数/概率密度，首先应该画图！！（把**X**做自变量，不用管**X**是什么）
2. 画直线$Y = y$, 找出与图像相交的部分，下方的区域转换为X的范围(积分区间)，用X的概率密度计算, 得到$P\{Y \leq y$

- 结论：如果X的分布函数$F(x)$是连续函数，则有$Y = F(X) \sim U(0, 1)$

第三章 二维r.v.

二维离散型

- 离散型变量一般研究分布函数

边缘分布

- $F_X(x)=P\{X\le x,Y\le +\infty\}=\lim_{y\to\infty}F(x,y)$
- 已知边缘分布，得不到联合分布
- 求边缘概率即固定一行，累加求和

二维连续型

- 连续型变量一般研究概率密度，而不是概率分布

边缘密度和边缘分布

- $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy, f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$（固定一个，累加另一个所有取值）注意是$f$不是$F$!!!
- 若X,Y独立，则$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\Leftrightarrow f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)$
- $F_X(x)=P\{X\le x,Y\le +\infty\}=\lim_{y\to\infty}F(x,y)$
- 若X,Y独立，则$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

由概率密度求概率分布

- $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$，表示点落在**(x,y)**左下方矩形区域的概率

独立性

若X,Y独立，则

1. $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
2. $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

(离，连**)**型求概率

将离散型的取值视为完备事件组，接着用全概公式

第四章 数字特征

数学期望EX

求期望的两个思路

1. 用自己的分布求
   先求出自己的概率密度，再用定义求期望
2. 用别人的分布求
   $EXY=\begin{cases}\sum_j\sum_i x_iy_jP\{X=x_i,Y=y_i\}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy\end{cases}$
   直接用函数值*自变量概率求和/积分

期望性质

1. 期望即均值
2. 常数的期望为常数（**EX**本身也是常数）
3. 期望有线性性质
   $E(ax+b)=aEX+b$
   $E(X\pm Y)=EX\pm EY$
4. $E(XY)=EX{\cdot}EY\Leftrightarrow X,Y$不相关（不相关的充要条件）
5. 独立能推出不相关，不相关推不出独立

   独立是没有任何关系，而不相关是没有线性关系！！！
6. $X\geq a,则EX\geq a$

求$U=max(X,Y),V=min(X,Y)$的期望

1. 可以用(X,Y)的分布求，
2. 求出U、V各自的分布后用定义求期望
3. 特殊方法：

- $U=max(X,Y)=\frac{X+Y+|X-Y|}{2},V=min(X,Y)=\frac{X+Y-|X-Y|}{2}$
- $U+V=X+Y,U-V=|X-Y|,U\times V=X\times Y$
- $EU+EV=EX+EY,EU-EV=E|X-Y|,联立求得EU和EV$

若$X_1,X_2,\dots X_n$独立同分布$,X_i\sim F(x),$如何求$U=max(X_1,X_2,\dots,X_n)$和$V=min(X_1,X_2,\dots X_n)$的期望?

- 只能先求各自的分布函数，再用定义求期望
- $F_U(x)=F^n(x);F_V(x)=1-[1-F(x)]^n$
- $EU=\int_{-\infty}^{+\infty}uf_U(u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_U(x)dx$

方差DX

定义

- $DX=E[X-EX]^2>0,\sqrt{DX}$称标准差
- $DX=E[X-EX]^2=E[X^2-2EX{\cdot}X+(EX)^2]=EX^2-2EX{\cdot}EX+(EX)^2=EX^2-(EX)^2$
- $EX^2>(EX)^2$（显然：平方的均值大于均值的平方）

计算

1. $DX=EX^2-(EX)^2$
2. $EX^2=DX+(EX)^2$（结合常见分布）
   例如，见到$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx$，想到凑出正态分布，利用某正态分布的方差和均值算此积分

性质

1. 方差反应随机变量对中心位置的偏移
2. $D(C)=0$(常数没有偏移)
3. $D(aX+b)=D(aX)=a^2DX,\quad D(-X)=DX$
   $D|X|=EX^2-(E|X|)^2\neq DX$
4. X,Y独立 $\to D(X\pm Y)=DX+DY\Leftrightarrow X,Y$不相关
5. $D(aX+bY)=\begin{cases}a^2DX+b^2DY+2cov(aX,bY)\\E(aX+bY)^2-(E(aX+bY))^2\end{cases}$

协方差$Cov(X,Y)$

定义

- $Cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$
- $Cov(X,X)=DX$

计算

- $Cov(X,Y)=EXY-EX{\cdot}EY$
- $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$
- $Cov(X,-Y)=-Cov(X,Y)$

性质

1. $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
2. $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$
3. $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$
4. 独立则协方差为0（$\rho=0$）
5. $D(aX+bY)=D(aX)+D(bY)+2Cov(aX,bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$

相关系数ρ

定义

- $\rho_{XY}=Cov(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}},\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}})=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{EXY-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

性质

1. $|\rho_{XY}|\leq 1$
2. $\rho_{XY}=0$，称**XY**不相关（无线性关系）
3. $|\rho_{XY}|=1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b,a\neq 0\}=1$（X,Y是线性关系）
   $a<0\Rightarrow\rho=-1;a>0\Rightarrow\rho=-1$
4. 相关系数表示X,Y线性关系的紧密程度

独立和不相关判定

不相关的等价说法

- X,Y不相关，即$\rho_{XY}=0$
- $\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0$
- $\Leftrightarrow EXY=EX{\cdot}EY$
- $\Leftrightarrow D(X\pm Y)=DX+DY$

- X,Y无线性关系

判断不独立

- 只需要找一个点，说明$PXPY \neq PXY$
- 对于连续型，已知联合密度，只要满足取值为正矩形且密度可分离变量，就独立

两者关系

1. 独立是没有任何关系，则比没有线性关系
   因此独立⇒不相关
2. 不相关不一定独立（没有线性关系也可能有其他关系）
3. $\rho \neq 0 \Rightarrow$ 不独立（$\rho \neq 0$表示有一点线性关系，那必然不独立）
4. 对于二维正态分布，独立 $\Leftrightarrow \rho = 0 \Leftrightarrow$ 不相关（只可能是线性关系）

正态分布的问题

一维正态

1. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$
2. 独立正态的线性组合仍是正态分布(加常数也是线性组合)
   $aX + bY + C \sim N(a\mu_1 + b\mu_2 + C, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$
   - 注意必须要独立
   - 例如X,Y服从正态，但X=-Y,此时X+Y=0（常数）不符合正态分布

二维正态$N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

会写概率密度$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-u}, u = \frac{1}{1-\rho^2}[\frac{(x-\mu_1^2)}{2\sigma^2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}]$

1. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), |\rho| < 1$
   X, Y独立 $\Leftrightarrow \rho = 0 \Leftrightarrow X, Y$不相关
2. $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\rho\sigma_2\sigma_2)$
   - **X,Y不需要独立！！**
3. 对于$\begin{cases} U = a_1X + b_1Y \\ V = a_2X + b_2Y \end{cases}$, 当$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$时, (U, V)仍服从二维正态
   - 可逆线性变换把X,Y的关系传递给了U,V
   - 如$(X + Y, X - Y)$服从二维正态
   - 相关系数可能会变**!!!!!**
4. X正态, Y正态, 且X, Y独立 $\Rightarrow (X, Y)$服从二维正态, 其中$\rho = 0$
   X正态, Y正态, 但X, Y不独立 $\nRightarrow (X, Y)$服从二维正态！！！
   X正态, Y正态, X, Y不相关$(\rho = 0)$, 同样推不出(X, Y)服从二维正态！！！

> 不相关推不出独立，也推不出二维正态

求EXY

方法：转换成随机变量函数的期望

- $Y=g(X)\Rightarrow EXY=E(Xg(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}xg(x)dx$

1. X、Y都是连续型

- 直接带进积分

2. （离、连）型——讲义P147例4.14

- 根据Y关于X的取值，将积分分段

第五章 大数定律与中心极限定理

1. 切比雪夫不等式

- $P\{|x-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$
  $P\{|x-EX|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$
- 注意有绝对值！！！
- 越靠近均值，概率越大
- 只能用于估计概率，不能精确计算

2. 大数定律

依概率收敛

- 序列$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$依概率收敛于a,即Y在a附近取值
- 频率（实际）依概率收敛与期望（理论）
- 性质：$X_n\rightarrow a,Y_n\rightarrow b,$则$X_n,Y_n$的函数$g(X_n,Y_n)\rightarrow g(a,b)$

各种大数定律

- 一句话：算术平均依概率收敛于期望(很大概率在期望附近取值)
- 例：$\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}X_i^2-(\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}X_i)^2$依概率收敛于$EX_i^2-(EX_i)^2$

3. 中心极限定理

- 记一句话：大量r.v的和（近似）服从正态分布
- 只需要算出期望和方差，就可以当成正态分布来做题

第六章 数理统计概念

一、总体和样本

看到$X_1, X_2, \dots X_n$是来自总体X的容量为n的简单随机样本,应想到：

1. $X_1, X_2, \dots X_n$相互独立
2. $X_1, X_2, \dots, X_n$同分布（同分布不是相等）
   但期望和方差相等：$EX_i = \mu = E(\frac{1}{n}\sum X_i), DX_i = \sigma^2 = D(\sum X_i)/n$

统计量

- 指样本$X_1, X_2, \dots, X_n$ 不含总体任何未知参数 的函数$g(X_1, X_2, \dots, X_n)$
- 例：若总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中μ已知，σ^2未知，则
  1. $maxX_i - \mu$是统计量
  2. $\frac{1}{\sigma^2}\sum(X_i - \mu)^2$不是统计量

样本均值$\overline{X}$和样本方差S^2

- 样本均值$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$
- 样本方差$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum X_i^2 - n\overline{X}^2)$

记公式

总体X,期望$EX = \mu$,方差$DX = \sigma^2$

1. $E\overline{X} = \mu, D\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}$
2. $ES^2 = \sigma^2, E\sum(X_i - \overline{X})^2 = (n-1)ES^2 = (n-1)\sigma^2$
3. $DS^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1}$
   - 由$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$得
   - $D\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)^2}{\sigma^4}DS^2 = 2(n-1)$

二、三大分布

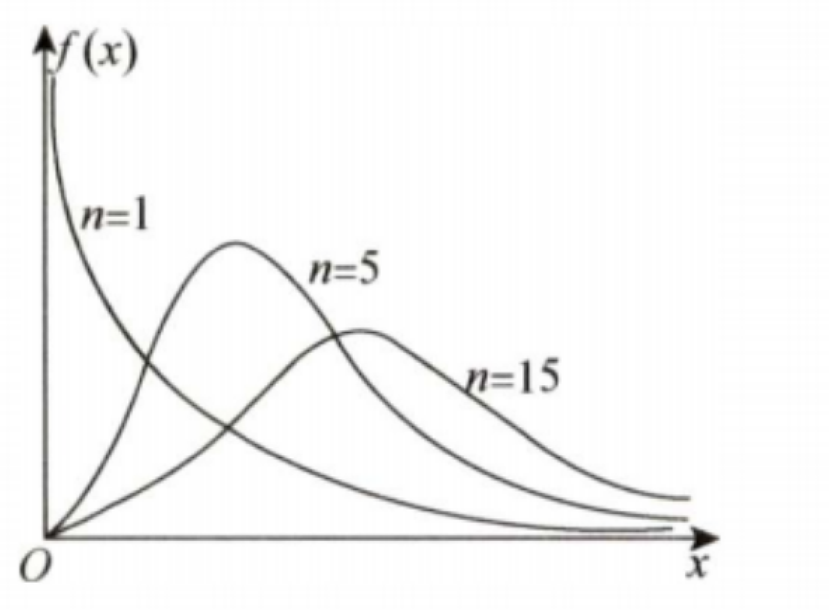
> 考试要求：记住构造、性质、会画密度草图（密度表达式不考）

1. 卡方分布χ^2

- 构造：X_1, X_2, X_n独立同分布$\sim N(0,1)$

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n), n\text{称为自由度——}\chi^2\text{符号是一个整体！！！}$$

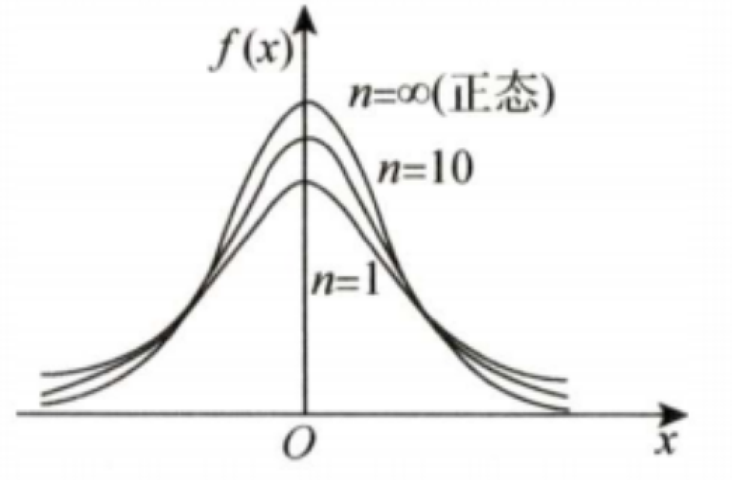
- 性质：
  $(1) X \sim N(0,1)$, 则$X^2 \sim \chi^2(1); EX^2 = 1, DX^2 = 2$
  $(2) \chi^2 \sim \chi^2(n)$, 则$E\chi^2 = n, D\chi^2 = 2n$
  (3)可加性：$\chi_1^2 \sim \chi_1^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi_2^2(n_2)$, 且$\chi_1^2, \chi_2^2$独立, 则$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$
- 密度图



- 平方和>0，因此只在第一象限取值

2. t分布（student分布）

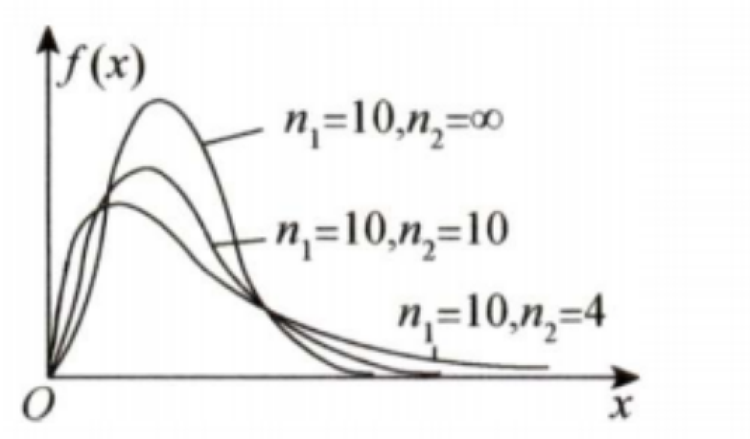
- 构造：$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n), X, Y$独立
  则$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n)$
- 性质：$T \sim t(n)$, 则$T^2 = \frac{X^2}{Y/n} \sim F(1,n); \frac{1}{T^2} \sim F(n,1)$
- 密度图



3. F分布

- 构造：$X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(n), X, Y$独立
  $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$
- 性质：$F \sim F(n_1, n_2)$, 则$\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

- 密度图

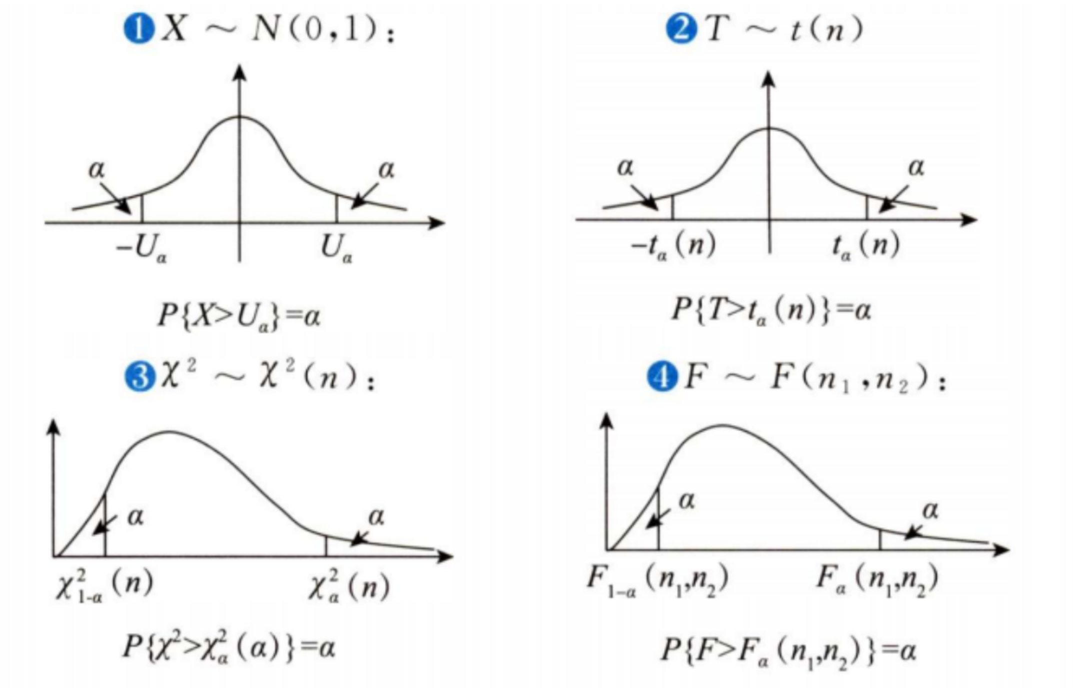


4. 上侧α分位点$(0 < \alpha < 1)$

> 适用标准正态$N(0,1)$、卡方$\chi(n)$、t分布和F分布

设$U \sim N(0,1)$, 对于给定正数$\alpha, 0 < \alpha < 1$, 称满足$P\{U \geq U_\alpha\} = \alpha$的点为$N(0,1)$的上侧$\alpha$分位点

- $U\alpha$取值与α有关，因此用下标α来标记(点U_α指该点右边面积为α)
- 一般通过查表来得到U_α的值
- α与n没关系, n决定分布函数, α是人为选取的正数



1. 对于标准正态:$\Phi(U_\alpha) = P\{X \leq U_\alpha\} = 1 - \alpha$
   例:
   $\Phi(1.645) = 0.95$, 则$U_{0.05} = 1.645$. (1.645左边面积是0.95, 则右边面积就是0.05, 即1.645就是$U_{0.05}$)
   - $U_{1-\alpha} = -U_\alpha$
2. 对于t分布$T \sim t(n), P\{T > t_\alpha(n)\} = \alpha$
   - 与$N(0,1)$类似, 概率密度都是偶函数 $\Rightarrow t_{1-\alpha} = -t_\alpha$
3. 对于卡方分布$\chi^2 \sim \chi^2(n), P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \alpha$
   - 密度函数不对称，因此$\chi^2_{1-\alpha}$与χ^2_α没有对应表达式

- 由图易知$P\{\chi^2_{1-\alpha} < \chi^2 < \chi^2_\alpha\} = 1-2\alpha$

4. 对于F分布$F \sim F(n_1,n_2), P\{F > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \alpha$
   - $F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$

重要结论：$\chi^2_\alpha(1) = U^2_{\frac{\alpha}{2}}; F_\alpha(1,n) = t^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$

1. $X \sim t(n), X^2 \sim F(1,n)$.
   $P\{X > t_{\frac{\alpha}{2}}\} = \frac{\alpha}{2}, P\{X^2 > F_\alpha\} = \alpha$, 记$t_{\frac{\alpha}{2}} = c$
   则$P\{X^2 > c^2\} = P\{X > c\} + P\{X < -c\} = \alpha = P\{X^2 > F_\alpha\}$
   于是$c^2 = F_\alpha = t^2_{\frac{\alpha}{2}} = c^2$
2. $X \sim N(0,1), X^2 \sim \chi^2(1)$
   记$c = U_{\frac{\alpha}{2}}, P\{X^2 > c^2\} = P\{X > c\} + P\{X < -c\} = \alpha = P\{X^2 > \chi^2_\alpha\}$
   于是$c^2 = \chi^2_\alpha = U^2_{\frac{\alpha}{2}}$

三、单正态总体下样本均值与样本方差的分布

总体$X \sim N(\mu,\sigma^2), X_1, X_2, \dots, X_n$为样本. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \overline{X})^2$
记$S_*^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})^2$
$E\overline{X} = \mu, D\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}; ES^2 = \sigma^2$

结论1：样本均值的分布

由于独立正态的线性组合仍是正态分布，则$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

- $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- $(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})^2 \sim \chi^2(1)$

结论2：样本与总体均值μ

由$\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, 则$\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$, 于是

- $\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

结论3：样本方差的分布

- $\frac{\sum(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{nS_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$(注意自由度是**n-1**不是**n**)
- $i = n$时, $X_1 - \overline{X} + X_2 - \overline{X} + \dots + X_n - \overline{X} = 0$，因此只有$n-1$个随机变量
- 无法证明

结论4：样本均值与样本方差

- $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1); (\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}})^2 \sim F(1,n-1)$
- 特别地，$nS_*^2 = (n-1)S^2 \Rightarrow S_*^2/(n-1) = S^2/n$, 则$\frac{\overline{X}-\mu}{S_*/\sqrt{n-1}} \sim t(n-1)$

结论5：单正态总体下，$\overline{X}$与S^2独立

- 注意一定是正态总体

第七章 参数估计

一、矩估计

> 思想：用样本矩（实际）来估计总体矩（理论）

总体X，样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$

1. 总体矩

- EX为X的一阶原点矩
- EX^2为X的二阶原点矩
- $DX = E(X-EX)^2$为X的二阶中心矩

2. 样本矩

- $A_1 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$为样本的一阶原点矩
- $A_2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2$为样本的二阶原点矩
- $B_2 = S_*^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}(\sum X_i^2 - n\overline{X}^2)$为样本的二阶中心矩
  - 注意样本方差$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \overline{X})^2$不是矩,不能用于矩估计

3. 关系

由大数定律：算术平均依概率收敛于数学期望

- $A_1 \to EX$
- $A_2 \to EX^2$
- $B_2 \to DX$
  - $EB_2 = \frac{1}{n}(\sum EX_i^2 - n(E\overline{X})^2) = EX^2 - (EX)^2 = DX$

解题步骤

求θ的矩估计值

1. 列等式，解θ（由低阶到高阶）——θ和X一样，都是随机变量
   - 一阶：$\overline{X} = EX$
   - 二阶：$\frac{1}{n}\sum X_i^2 = EX^2$—— 优先用原点矩！
     $\frac{1}{n}(\sum X_i^2 - n\overline{X}^2) = DX$ 中心矩后用
2. 考研只考过一阶

二、最大似然估计

> 让似然函数取到最大值的估计
> 思想：在未知参数θ的取值范围内,让L(θ)取到最大值的$\hat{\theta}$作为θ的最大似然估计

1. 似然函数

- 样本X_i取到观测值x_i的概率$L(\theta)$,称为似然函数
- θ为待估参数
- 对于离散型，$L(\theta) = P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\} = \prod P\{X_i = x_i\}$

- 对于连续型，不能取到某个点，因此用取到邻域的概率代替
  $P\{X_1 \in U(x_1), \dots, X_n \in U(x_n)\} = f(x_1)\Delta x \cdot f(x_2)\Delta x \dots f(x_n)\Delta x$
  由于$f(x_i)$与θ有关，Δx与θ无关，因此取$L(\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\dots f(x_n;\theta)$，即
  $(X_1, X_2, \dots X_n)$联合密度的观测值

2. 大题步骤

1. 写$L(\theta)$
2. 取对数，求导，即令$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 0$
   解得驻点$\hat{\theta}$,即为θ的最大似然估计
3. 若没有驻点，即$L(\theta)$单调$\begin{cases} 单调增：\theta的最大值是样本的最小值，即\hat{\theta} = min(X_1, X_2, \dots X_n) \\ 单调减：\theta的最大值是样本的最大值，即\hat{\theta} = max(X_1, X_2, \dots X_n) \end{cases}$
4. 估计量:用X
   估计值:用x

三、估计量的评选标准

1.无偏估计

- $E\hat{\theta} = \theta$，称$\hat{\theta}$为θ的无偏估计
- $\lim_{n\to\infty} E\hat{\theta} = \theta$，称$\hat{\theta}$为$\theta$的渐进无偏估计

结论:

1. 无偏估计不唯一
2. $E\overline{X} = \mu \Rightarrow \overline{X}$是$\mu$的无偏估计
3. $ES^2 = DX = \sigma^2 \Rightarrow S^2$是$\sigma^2$的无偏估计

2. 有效性

- 多个无偏估计中，方差越小的越有效
- 方差反应对中心位置的偏移
- 必须先是无偏估计，才能说有效性

3. 一致性（相合性）

- $\hat{\theta}$依概率收敛于θ，称$\hat{\theta}$是θ的一致/相合估计量

四、区间估计

求置信区间步骤

> 给定置信度1-α,求未知参数θ的置信区间（即求θ有$1-\alpha$的概率在什么区间取值）
> 置信区间的左右端点称为 置信下限和置信上限

1. 选择一个概率密度函数$T(X_1, X_2, \dots, X_2, \theta) = T(\theta)$(只有$\theta$一个未知参数)
   - 根据什么参数未知选择对应的分布
2. 求$P\{a < T(\theta) < b\} = 1 - \alpha$
3. 将上式转化为$P\{\hat{\theta}_1 < T(\theta) < \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha$，即求得置信区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$

正态总体下μ,σ^2的置信区间

1. σ^2已知，求μ的置信区间——T中可以出现σ
   - 选$T(\mu)=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$
   - $P\{-U_{\frac{\alpha}{2}}<T(\mu)<U_{\frac{\alpha}{2}}\}$
   - 反解μ得置信区间$(\overline{X}-U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
2. σ^2未知，求μ的置信区间
   - 选$T(\mu)=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
3. μ已知，求σ^2的置信区间——T中可以出现μ
   - 选$T(\mu)=\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$
4. μ未知，求σ^2的置信区间
   - 选$T(\mu)=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

第八章 假设检验

一、假设检验的概念

1. 假设检验

- 即先假设，再检验（抽样），并检验假设对不对
- 依据——小概率原理：小概率事件在一次抽样下几乎不可能发生

2. 两类错误

> 记H_0为优秀，H_1为不优秀

- 第一类——弃真：实际上很优秀（真实情况的是H_0，假设了H_0），但检验时发挥失常（检验结果H_1），错认为不优秀（拒绝了H_0的假设）
- 第二类——存伪：实际上很菜（真实情况的是H_1，假设了H_1），但检验时超常发挥（检验结果H_0），错认为优秀（拒绝了H_1的假设）

真实情况 \ 检验结果	接受 H_0	接受 H_1
接受 H_0	判断正确	第一类错误(弃真错误)
接受 H_1	第二类错误(存伪错误)	判断正确

3. 显著性检验

- 无法同时使第一类和第二类错误概率都很小
- 此时总是控制第一错误的概率（尽量不弃真）
- 使第一类错误的概率不大于给定的α，这种检验就是显著性检验问题
- α称为显著性水平

4. 假设检验的步骤

1. 提出原假设H_0，备择假设H_1
   - 带等号的做H_0
2. 构建检验统计量

3. 写出拒绝域W

   检验时，用一个统计量T作为检验统计量，T落在区域W时，就拒绝H_0的假设，这一区域W称为H_0的拒绝域。

   W的选取是通过控制第一类错误的概率α来决定的。

4. 根据样本观测值，计算统计量，进行判断

   将假设的参数直接带入,计算得到统计量,判断是否落在接受域,如果落在了拒绝域,就拒绝

二、正态总体下的均值和方差的假设检验

> $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 要对μ和σ^2进行假设和检验

1. 假设

- 根据μ和σ^2已知和未知, 以及假设检验的是μ还是σ^2, 分为四种情况
- 即上述μ和σ^2的置信区间四种情况

2. 检验

- 如下表
- 带等号的为假设（H_0）
- 对于μ的假设检验：$\overline{X}$依概率收敛与μ, 即$\overline{X}$很大概率在假设的μ_0附近取值, 而当$\overline{X}$的检验值离μ_0太远, 即$\overline{X}$落在了μ_0的拒绝域, 说明不正常, 假设不对, 应该拒绝当前的假设

单正态总体：

编号	$H_0 \leftrightarrow H_1$	H_0 为真时，检验统计量及其分布	H_0 的拒绝域 W
1	$\mu = \mu_0 \leftrightarrow \mu \neq \mu_0$	(σ^2 已知) $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\|U\| \geqslant U_{\frac{\alpha}{2}}$
	$\mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow \mu > \mu_0$		$U \geqslant U_\alpha$
	$\mu \geqslant \mu_0 \leftrightarrow \mu < \mu_0$		$U \leqslant -U_\alpha$
2	$\mu = \mu_0 \leftrightarrow \mu \neq \mu_0$	(σ^2 未知) $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\|T\| \geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$\mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow \mu > \mu_0$		$T \geqslant t_\alpha(n-1)$
	$\mu \geqslant \mu_0 \leftrightarrow \mu < \mu_0$		$T \leqslant -t_\alpha(n-1)$
3	$\sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	(μ 已知) $\chi^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$	$\chi^2 \geqslant \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$
	$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \leftrightarrow \sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha(n)$
	$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \leftrightarrow \sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha}(n)$
4	$\sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	(μ 未知) $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\chi^2 \geqslant \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \leftrightarrow \sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha(n-1)$
	$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \leftrightarrow \sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

双正态总体：

编号	$H_0 \leftrightarrow H_1$	H_0 为真时，检验统计量及其分布	H_0 拒绝域 W
5	$\mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow \mu_1 \neq \mu_2$	(σ_1^2, σ_2^2 均未知，但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$	$\lvert T \rvert \geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$
	$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leftrightarrow \mu_1 > \mu_2$		$T \geqslant t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$
	$\mu_1 \geqslant \mu_2 \leftrightarrow \mu_1 < \mu_2$		$T \leqslant -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$
6	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	(μ_1, μ_2 未知) $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$F \geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 或 $F \leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$
	$\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2 \leftrightarrow \sigma_1^2 > \sigma_2^2$		$F \geqslant F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$
	$\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2 \leftrightarrow \sigma_1^2 < \sigma_2^2$		$F \leqslant F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

结论

无记忆性

- 几何分布和泊松分布都有无记忆性
- $P\{X>m+n|X>n\}=P\{x>m\}$

分布函数服从均匀分布

- 随机变量$X\sim F(x)$,则$Y=F(x)\sim U(0,1)$

极值分布

- $M=max\{X_1,X_2,\dots X_k\},N=min\{X_1,X_2,\dots X_k\}$
- $F_M(m)=[F_X(m)]^k,F_N(n)=1-[1-F_X(n)]^k$

积分表

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$
   $\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$
   $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$
   - $X\sim N(0,1),EX=1,EX^2=DX+(EX)^2=1+0=1$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$
   $\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}dx=0$
   $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
   - $X\sim N(0,\frac{1}{2}),EX=0,EX^2=DX+(EX)^2=\frac{1}{2}$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=2$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{a}$

正态分布绝对值的期望方差

1. $X\sim N(0,1)$,则$E|X|=\sqrt{\frac{2}{\pi}},D|X|=1-\frac{2}{\pi}$
2. $X\sim N(0,\sigma^2)$,则$E|X|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,D|X|=(1-\frac{2}{\pi})\sigma^2$

两点分布独立等价于不相关

- A、B为两随机事件,$X=\begin{cases}p,A\text{发生}\\1-p,A\text{不发生}\end{cases}\quad Y=\begin{cases}q,B\text{发生}\\1-q,B\text{不发生}\end{cases}$
- 则X、Y不相关$\Leftrightarrow X$、Y独立