

专题二 定积分计算

1. (1) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$

(2) $\int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx$

(3) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$

(4) $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

(5) $\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

(6) $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

$$2. (1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} dx$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$(4) \int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx$$

$$(5) \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$$

$$3. (1) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx$$

$$(2) \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos bx dx$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos^2 x dx$$

4. (1) $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{1+x} + e^{3-x}} dx$

5. (1) $\int_0^{+\infty} e^{-2x} |\sin x| dx$

(2) 求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴围成的图形面积

6. (1) $I = \int x^2 \sqrt{1+x^2} dx$

(2) $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$, 其中 n 为正整数, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}}$

(3) $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$

1. 证明: a_n 单调递减, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, 4, \dots)$

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$

7. 设 n 为正整数, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx$

(1) 求 $I_n - I_{n-2} (n \geq 2)$

(2) 求 $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6x}{\sin x} dx$

8. 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin t} dx$, 其中 n 为正整数, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (2I_n - \ln n)$ 存在

9. (1) $\int_0^\pi (x \sin x)^2 dx$

(2) $\int_0^4 x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)dx$

(3) $\int_0^\pi x \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx$

(4) $\int_{-1}^1 \frac{x^2 + x \ln |x|}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$

(5) $\int_{-1}^1 \ln(1+x^2) \arccos x dx$

10. 被积函数内含变上限积分的定积分

(1) $\int_0^\pi f(x)dx$, 其中 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt$

(2) $\int_0^1 x^2 f(x)dx$, 其中 $f(x) = \int_x^1 e^{-t^2} dt$

(3) $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$

11. (1) $f'(x) = \arcsin(x-1^2)$, $f(0) = 0$, 求 $\int_0^1 f(x)dx$

(2) 设 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$, 求 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x) dx$

(3) $f(x) \in (-\infty, +\infty)$ 满足 $f(x) = f(x - \pi) + \sin x$,
且 $f(x) = x, x \in [0, \pi)$, 求 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx$

12. (1) $\int_{-1}^x (1 - |t|) dt (x \geq -1)$

(2) $f(x) = \int_{-1}^x t|t| dt$, 求 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的图形面积

(3) $\int_{-1}^2 [x] \max\{1, e^{-x}\} dx$

13. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 求 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

14. 设 $f(x) = x - [x]$, $S(x) = \int_0^x f(t) dt$

(1) 证: $f(x+1) = f(x)$, 且当 n 为正整数, $n \leq x \leq n+1$ 时, $\frac{n}{2} \leq S(x) \leq \frac{n+1}{2}$

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$