专题四 中值定理

1. 设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi f(x)\cos x dx=0$.

   证明：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点ϵ_1,ϵ_2,使$f(\epsilon_1)=f(\epsilon_2)=0$.

2. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xf(x)dx=0$.

   证明：在(a,b)内至少存在两个不同的点x_1,x_2,使$f(x_1)=f(x_2)=0$.

3. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x^2 f(x)dx = 0$

证明：在(a,b)内至少存在三个不同的点$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3,$ 使$f(\epsilon_1) = f(\epsilon_2) = f(\epsilon_3) = 0.$

4. 设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx = \int_0^\pi f(x)\cos x dx = 0$.

证明：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点ϵ_1, ϵ_2, 使$f(\epsilon_1) = f(\epsilon_2) = 0$.

5.

设$f(x)$是$[0,\pi]$上的正值连续函数，且 $\int_0^\pi e^{f(x)}\sin x\ln f(x)dx=\int_0^\pi e^{f(x)}\cos x\ln f(x)dx=($

证明：$f(x)=1$在$(0,\pi)$内至少有两个根.

6. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0$.

(1)证：存在$a\in(0,1)$, 使得$f(a)+af^{'}(a)=0$

(2)证：存在$b\in(0,1)$, 使得$bf^{'}(b)+2f(b)=0$

(3)证：存在$\epsilon\in(0,1)$, 使得$2f(\epsilon)+4\epsilon f^{'}(\epsilon)+\epsilon^2f^{''}(\epsilon)=0$

7.