专题八 二重积分

1. 设$f(x)=\begin{cases} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}, & x<0 \\ sinx-1, & x\geq 0 \end{cases}$,求

(1)$f(x)$在点$x=0$处的左导数α和右导数β;

(2)$I=\iint_D |x+y-(\alpha+\beta)|dxdy$,其中$D=\{-1\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 3\}$

2. 设$f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}}-x-11 \quad (x<3)$和二元函数$\varphi(x,y)=\begin{cases}3, & x<0, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(1)求$y=f(x)$的渐近线方程

(2)记D是由曲线$y=f(x)$的渐近线和$y=1$所围成的包含原点的区域,
求$\iint_D \varphi(x,y)dxdy$.

3. 设$a=\iint_D cos\frac{x-y}{x+y}dxdy$,其中$D=\{(x,y)|x+y\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$

(1)a的值

(2)求b, 使$\lim_{x\to\infty}(\frac{x-a}{x+a})^{\frac{2x}{sin1}}=\frac{1}{3}\int_b^{+\infty}xe^{-x}dx$

4. $\iint_D x(x+y)dxdy$, 其中$D=\{(x,y|x^2+y^2\leq 2, y\geq x^2\}$（难度0.474）

5. D由$y=1, y=x, y=-x$围成的有界区域, 计算 $\iint_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy$

6. 计算 $\iint_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dxdy$, 其中$D$是第一象限中以曲线$y=\sqrt{x}$与$x$轴为边界的无界区域

7. D由曲线$\begin{cases} x = t - sint \\ y = 1 - cost \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$与$x$轴围成，求$\iint_D (x+2y)dxdy$.

8. D由$y=\sqrt{3(1-x^2)}$与$y=\sqrt{3}x$及y轴围成, 计算 $\iint_D x^2dxdy$

9. 设有界区域D是圆$x^2+y^2=1$和$y=x$及x轴在第一象限围成的部分.
计算 $\iint_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)dxdy$

10. 计算 $\iint_D xyF''(x^2+y^2)dxdy$, 其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}$

其中$F(u)$在$[0,1]$上具有连续的二阶导数.

11. $\lim_{t\to 0} \frac{1}{\pi t^3} \iint_{x^2+y^2\leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy(t>0)$,其中$f(u)$可微,且$f(0)=0$.

12. 设$D=(x,y)|x^2+y^2\leq 1, y\geq 0$,连续函数$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint_D f(x,y)dxdy$.

求$\iint_D xf(x,y)dxdy$.

13. $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续, 且满足$f(t)=2\iint_{x^2+y^2\le t^2}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy+t^4$,

求$f(t)$.

14. (1) $\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2} e^{2xy}cos(x^2-y^2)dxdy = \lim_{\varepsilon,\eta\to(0,0)} e^{2\varepsilon\eta}cos(\varepsilon^2-\eta^2) = 1$

(2) $lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2\leq t^2} e^{-xy}cos(x+y)dxdy = \lim_{\varepsilon,\eta\to(0,0)} e^{-\varepsilon\eta}cos(\varepsilon+\eta) = 1$