笔记

独立和互斥

概念

1. 独立是没有任何影响，毫无关系
2. 互斥指排斥，你发生我就不能发生，两者是有影响的
3. 独立两者可以同时发生，排斥不能同时发生
4. 独立和互斥两者不能互推

数学语言：

1. $P(AB) = P(A)P(B)$,称AB独立
2. $P(AB) = 0 \Leftarrow$AB互斥$\Leftrightarrow AB = \phi$
3. $P(AB) = 0 \nRightarrow AB$互斥

   例：$A = x \leq \frac{1}{2}, B = x \geq \frac{1}{2}, P(AB) = P(x = \frac{1}{2}) = 0, A \cap B \neq \phi$（连续性随机变量取到任何一个点的概率都是0）

两者关系

互斥不独立，独立不互斥

- 由于互斥是有影响的，独立无影响，因此两者只能存在一个
- 理解：有你没我，有我没你，因此你我之间有紧密联系；

  你我独立说明互相不认识，没有任何关系。
- 前提是两者都不是不可能事件（不可能事件与任何事件都互斥且独立）

常见分布

离散

(1)二项分布$B(n, p)$

- 投篮投进概率是p，投n次，$P\{x = k\}$为投进**k**次的概率
- $P\{x = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$，$k = 0, 1, 2, \ldots, n$
- $EX = np, DX = np(1-p)$
- $n = 1$时为0-1分布

(2)泊松分布$P(\lambda)$

- $P\{x=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,...,\lambda>0$
- $EX=DX=\lambda$
- 由级数$\Sigma_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+...=e^x$可知，
  $P\{x=k\}$即此级数中第k项占整体的比例

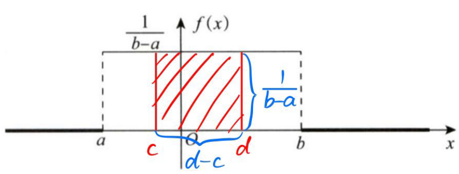
(3)几何分布

- 一直投篮直到命中为止，$P\{x=k\}$为一共投了**k**次的概率
- $P\{x=k\}=(1-p)^{k-1}p,k=1,2,3,..$
- $EX=\frac{1}{p},DX=\frac{1-p}{p^2}$（会推导）

连续

(4)均匀分布$U(a,b)$

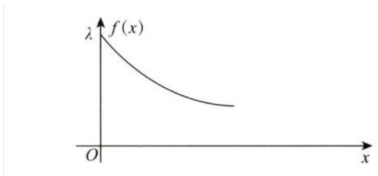
- $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a},a<x<b\\0,其他\end{cases}$
- $EX=\frac{a+b}{2},DX=\frac{(b-a)^2}{12}$

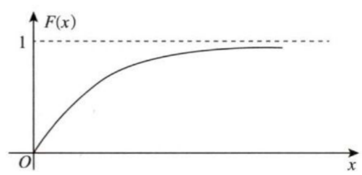


- $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{a}^{x}f(x)dx=\frac{x-a}{b-a},a<x<b$
- 若$[c,d]\subset(a,b)$,则$P\{c<x<d\}=\frac{d-c}{b-a}$(长度之比)

(5)指数分布$E(\lambda)$

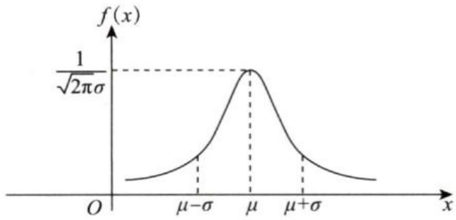
- $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},x>0\\0,其他\end{cases},\lambda>0$
- $F(x)=\begin{cases}0,x<0\\1-e^{-\lambda x},x\geq 0\end{cases}$
- $EX=\frac{1}{\lambda}$(均值为$\frac{1}{\lambda}$或参数为λ), $DX=\frac{1}{\lambda^2}$
- 背景：寿命
- 无记忆性：$P\{X>s+t|X>s\}=P\{X>t\}$
  $P\{$已经活了60岁，再活30岁$\}=P\{$从出生开始活30岁$\}$





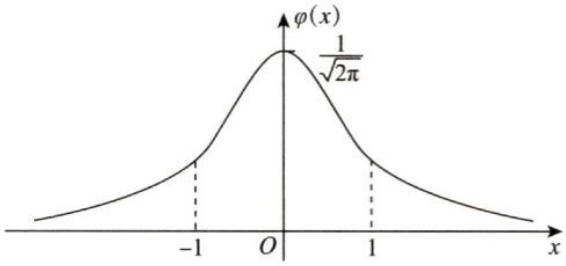
(6)正态分布$N(\mu,\sigma^2)$

- $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in R$
- 分布函数积不出
- $EX=\mu,DX=\sigma^2$



$\frac{x-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$为标准正态分布（标准化）

- $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$
- $\Phi(0)=\frac{1}{2},\Phi(1)=0.841,\Phi(1.645)=0.95,\Phi(1.96)=0.975$
- $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$
- $\varphi(x)$积不出，但$\Phi^{'}(x)=\varphi(x)$



- $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=0(x\varphi(x)$为奇函数)

(7)二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

1. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-u},u=\frac{1}{1-\rho^2}[\frac{(x-\mu_1^2)}{2\sigma^2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}]$
2. $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$
3. ρ是X与Y的相关系数，即$\rho=\frac{Cov\{X,Y\}}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{Cov\{X,Y\}}{\sigma_1\sigma_2}$
   其中$|\rho|<1$
4. X、Y的条件分布都是正态分布
5. $aX+bY(a\neq 0,b\neq 0)$服从正态分布
6. **X**、**Y**独立的充要条件是**X**与**Y**不相关，即$\rho=0$
   此时$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

(8)二维均匀分布

- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_G}(\text{面积倒数}),(x,y)\in G\\0,\text{其他}\end{cases}$
- 概率直接算面积之比

数字特征公式

1. 期望和方差

求期望方法

- 期望=函数值*概率的均值
- 一维：$Eg(X)=\sum g(x_i)p_i$

  $Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$

  特别地, $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$
- 二维：二维变量没有期望，但二维变量的函数有期望**(**一维**)!!!**

  $EZ=Eg(X,Y)=\sum\sum g(x_i,y_i)p_{ij}$
  $EZ=Eg(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$
- 特别地，$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$（由二维密度求边缘期望）

  $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

  $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$

2. 协方差和相关系数

3. 独立和不相关

若X,Y独立，则

1. $EXY=EX{\cdot}EY$
2. $D(X\pm Y)=DX+DY$
3. $Cov(X,Y)=0$
4. $\rho_{XY}=0$

不相关的充分必要条件

1. X,Y不相关，即$\rho_{XY}=0$
2. $\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0$
3. $\Leftrightarrow EXY=EX{\cdot}EY$
4. $\Leftrightarrow D(X\pm Y)=DX+DY$
5. X,Y无线性关系

两者关系

1. 独立是没有任何关系，则不相关是没有线性关系
   因此独立一定不相关
2. 不相关不一定独立（没有线性关系也可能有其他关系）
3. $\rho\neq 0\Rightarrow$ 不独立（$\rho\neq 0$表示有一点线性关系，那必然不独立）
4. 对于二维正态分布，独立 $\Leftrightarrow \rho=0\Leftrightarrow$ 不相关（只可能是线性关系）

卷积公式

原理：将X,Y的密度转换成X和Z(或Y和Z)的密度,再用边缘密度的公式求出Z的边缘密度

证明方法：通过暴力求导公式$\frac{d}{dz}\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)}G(z,x)dx=\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)}G^{'}(z,x)dx+G(z,\beta(z))\beta^{'}(z)-G(z,\alpha(z))\alpha^{'}(z)$

> 下面只转换成X和Z的密度

1. $Z=X+Y$

> $y=z-x,\quad y_z^{'}=1$

- $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$
- 已知$f(x,y)$时,只需将y换成$z-x$就能得到Z的概率密度
- 注意x,y的范围也要改成x,z的范围,并化简

计算步骤

1. 讨论z的范围
2. 定x的限：画$z=z$的直线,在取值范围内穿进穿出的点就是x的上下限

   只要看穿进穿出的点，不是二重积分看面积！！！！！！

   > 例题：讲义$P128\ 13$题

2. $Z=X{\cdot}Y$

> $y=\frac{z}{x},\quad y_z^{'}=\frac{1}{|x|}$

- $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\frac{z}{x})\frac{1}{|x|}dx$

3. $Z=\frac{Y}{X}$

> $y=xz,\quad y_z^{'}=|x|$

- $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,zx)|x|dx$
- 例题:讲义P128 14题

易混淆

（**1**）边缘密度$f(x)$和边缘分布$F(x)$

只讨论连续型——只有连续型才讨论密度

1. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$（固定一个，累加另一个所有取值）
2. 若X,Y独立，则$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\Leftrightarrow f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)$
3. $F_X(x)=P\{X\leq x,Y\leq +\infty\}=\lim_{y\to\infty}F(x,y)$
4. 若X,Y独立，则$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

特殊古典概型

某事件第i次发生的概率为p_i

问前**n**次中平均发生了多少次？（期望）

- 将每次的概率全部累加
- 证明:

  记X_n为前n次发生的次数,Y_i为第i次发生的次数,则$Y_i\sim\begin{vmatrix}0&1\\1-p_i&p_i\end{vmatrix},EY_i=p_i$

  且$X_n=Y_1+Y_2+...+Y_n$,则$EX_n=EY_1+EY_2+...+EY_n=\sum p_i$

《概率辅导讲义》笔记

第一章 概率

1. 概率中$A^2=AA=A\cap A=A$,即$P(A^2)=P(A)$
2. 多个事件相互独立，只要字母不重叠，经过任意运算后都独立

   例：A、B、C相互独立，A-C和B-C不独立，而A-B与C独立

第二章 一维r.v.

- 由分布函数求某一点的密度（离散）：$P\{X=x_0\}=P\{X\leq x_0\}-P\{X<x_0\}=F\{x_0\}-F\{x_0-0\}$
- 只有连续型随机变量才有密度函数

分布函数性质

1. 单调不减（求参数判断取舍P97例2.2）
2. 取值0~1
3. 处处右连续

概率密度性质（充要条件）

1. 非负
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$（规范性）

分布函数和概率密度的组合

1. $F_1(x)F_2(x)$一定是密度函数，是$max\{F_1(x),F_2(x)\}$的分布函数
2. $a_1+a_2=1$时，$a_1F_1(x)+a_2F_2(x)$一定是分布函数
3. $a_1+a_2=1$时，$a_1f_1(x)+a_2f_2(x)$一定是密度函数

记公式

1. $1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=e^x$
2. $1+x+x^2+...+x^n+...=\frac{1}{1-x}$
3. $\int_0^{+\infty}x^ne^xdx=n!(n是自然数)$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1(凑正态)$

一维连续型

- $X\sim f(x)$,分布函数为$F(x)$
- 取任一点的概率都是0
- $P\{a<x<b\}=P\{a<x\leq b\}=P\{a\leq x<b\}=P\{a\leq x\leq b\}=F(b)-F(a)=\int_a^bf(x)dx$

随机变量函数的分布

- $Y=g(X)$，首先应该画图！！（把**X**做自变量，不用管**X**是什么）
- 结论：如果X的分布函数$F(x)$是连续函数，则由$Y=F(X)\sim U(0,1)$

第三章 二维r.v.

二维离散型

- 离散型变量一般研究分布函数

边缘分布

- $F_X(x)=P\{X\le x, Y\le +\infty\}=\lim_{y\to\infty}F(x,y)$
- 已知边缘分布，得不到联合分布
- 求边缘概率即固定一行，累加求和

二维连续型

- 连续型变量一般研究概率密度，而不是概率分布

边缘密度和边缘分布

- $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy, f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$（固定一个，累加另一个所有取值）
  注意是f不是F!!!
- 若X,Y独立，则$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\Leftrightarrow f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)$
- $F_X(x)=P\{X\le x, Y\le +\infty\}=\lim_{y\to\infty}F(x,y)$
- 若X,Y独立，则$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

由概率密度求概率分布

- $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$，表示点落在**(x,y)**左下方矩形区域的概率

独立性

若X,Y独立，则

1. $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
2. $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

(离，连)型求概率

将离散型的取值视为完备事件组，接着用全概公式

第四章 数字特征

数学期望EX

求期望的两个思路

1. 用自己的分布求
   先求出自己的概率密度，再用定义求期望
2. 用别人的分布求
   $EXY=\begin{cases}\sum_j\sum_i x_iy_jP\{X=x_i,Y=y_i\}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy\end{cases}$
   直接用函数值*自变量概率求和/积分

期望性质

1. 期望即均值
2. 常数的期望为常数（**EX**本身也是常数）
3. 期望有线性性质
   $E(ax+b)=aEX+b$
   $E(X\pm Y)=EX\pm EY$
4. $E(XY)=EX·EY\Leftrightarrow X,Y$不相关（不相关的充要条件）
5. 独立推出不相关，不相关推不出独立

   独立是没有任何关系，而不相关是没有线性关系！！！
6. $X\geq a$,则$EX\geq a$

求$U=max(X,Y),V=min(X,Y)$的期望

1. 可以用(X,Y)的分布求，
2. 求出U、V各自的分布后用定义求期望
3. 特殊方法：

- $U=max(X,Y)=\frac{X+Y+|X-Y|}{2},V=min(X,Y)=\frac{X+Y-|X-Y|}{2}$
- $U+V=X+Y,U-V=|X-Y|,U\times V=X\times Y$
- $EU+EV=EX+EY,EU-EV=E|X-Y|$,联立求得EU和EV

若$X_1,X_2,...X_n$独立同分布,$X_i\sim F(x)$,如何求$U=max(X_1,X_2,...,X_n)$和$V=min(X_1,X_2,...X_n)$的

- 只能先求各自的分布函数，再用定义求期望
- $F_U(x)=F^n(x);F_V(x)=1-[1-F(x)]^n$
- $EU=\int_{-\infty}^{+\infty}uf_U(u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_U(x)dx$

方差DX

定义

- $DX=E[X-EX]^2>0,\sqrt{DX}$称标准差
- $DX=E[X-EX]^2=E[X^2-2EX{\cdot}X+(EX)^2]=EX^2-2EX{\cdot}EX+(EX)^2=EX^2-(E$
- $EX^2>(EX)^2$（显然：平方的均值大于均值的平方）

计算

1. $DX=EX^2-(EX)^2$
2. $EX^2=DX+(EX)^2$（结合常见分布)
   例如，见到$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx$，想到凑出正态分布

性质

1. 方差反应随机变量对中心位置的偏移
2. $D(C)=0$(常数没有偏移)
3. $D(aX+b)=a^2DX,\quad D(-X)=DX$
   $D|X|=EX^2-(E|X|)^2\neq DX$
4. X,Y独立 $\rightarrow D(X\pm Y)=DX+DY\Leftrightarrow X,Y$不相关
5. $D(aX+bY)=\begin{cases}a^2DX+b^2DY+2cov(aX,bY)\\E(aX+bY)^2-(E(aX+bY))^2\end{cases}$

协方差$Cov(X,Y)$

定义

- $Cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$
- $Cov(X,X)=DX$

计算

- $Cov(X,Y)=EXY-EX{\cdot}EY$
- $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$
- $Cov(X,-Y)=-Cov(X,Y)$

性质

1. $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
2. $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$
3. $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$
4. 独立则协方差为0
5. $D(aX+bY)=D(aX)+D(bY)+2Cov(aX,bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$

相关系数ρ

定义

- $\rho_{XY}=Cov(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}},\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}})=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{EXY-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

性质

1. $|\rho_{XY}|\leq 1$
2. $\rho_{XY}=0$，称**XY**不相关（无线性关系）
3. $|\rho_{XY}|=1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b,a\neq 0\}=1$（X,Y是线性关系)
   $a<0\Rightarrow\rho=-1;a>0\Rightarrow\rho=-1$
4. 相关系数表示X,Y线性关系的紧密程度

独立和不相关判定

不相关的等价说法

- X,Y不相关，即$\rho_{XY}=0$
- $\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0$
- $\Leftrightarrow EXY=EX{\cdot}EY$
- $\Leftrightarrow D(X\pm Y)=DX+DY$
- X,Y无线性关系

判断不独立

- 只需要找一个点，说明$PXPY\neq PXY$
- 对于连续型，已知联合密度，只要满足取值为正矩形且密度可分离变量，就独立

两者关系

1. 独立是没有任何关系，则比没有线性关系
   因此独立⇒不相关
2. 不相关不一定独立（没有线性关系也可能有其他关系）
3. $\rho\neq 0\Rightarrow$ 不独立（$\rho\neq 0$表示有一点线性关系，那必然不独立）
4. 对于二维正态分布，独立 $\Leftrightarrow\rho=0\Leftrightarrow$ 不相关（只可能是线性关系）

正态分布的问题

一维正态

1. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则$Y=aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$
2. 独立正态的线性组合仍是正态分布(加常数也是线性组合)
    - 注意必须要独立
    - 例如X,Y服从正态，但X=-Y,此时X+Y=0（常数）不符合正态分布

二维正态$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

会写概率密度
$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-u},u=\frac{1}{1-\rho^2}[\frac{(x-\mu_1^2)}{2\sigma^2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}]$

1. $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2),|\rho|<1$

    X,Y独立$\Leftrightarrow\rho=0\Leftrightarrow X,Y$不相关
2. $aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\rho\sigma_2\sigma_2)$
    - **X,Y**不需要独立！！
3. 对于$\begin{cases}U=a_1X+b_1Y\\V=a_2X+b_2Y\end{cases}$,当$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$时,$(U,V)$仍服从二维正态
    - 可逆线性变换把X,Y的关系传递给了U,V
    - 如$(X+Y,X-Y)$服从二维正态
    - 相关系数可能会变**!!!!!**
4. X正态,Y正态,且X,Y独立$\Rightarrow(X,Y)$服从二维正态,其中$\rho=0$
    X正态,Y正态,但X,Y不独立$\nRightarrow(X,Y)$服从二维正态！！！
    X正态,Y正态,X,Y不相关$(\rho=0)$,同样推不出(X,Y)服从二维正态！！！

    不相关推不出独立，也推不出二维正态