五大积分

1. 曲面$Z=\sqrt{2-x^2-y^2}$与$Z=\sqrt{x^2+y^2}$围成一立体，其体密度为$\mu=\sqrt{x^2+y^2}$，求此立体的质量M.

2. 若$F(t) = \iiint_V f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, 其中$f$是可微函数,

V由闭曲面$x^2+y^2+z^2=t^2$所围, 若$f(0)=0$, 求$\lim_{t\to 0^-}\frac{F(t)}{t^5}$.

3. 设L是曲面$x^2+y^2+z^2=a^2$与$x+y+z=0$的交线，计算下列曲线积分

(1) $\int_L x^2 dS$

(2) $\oint_L (y^2+x) dS$

(3) $\int_L xy dS$

(4) $\int (xy+yz+zx) dS$

4. 设S为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$, 计算下列曲面积分

(1) $\iint_S x^2 dS$

(2) $\iint_S (y^2+z^2) dS$

(3) $\iint_S (\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}) dS$

(4) $\iint_S (x+y+z)^2 dS$

8. $\int_L \sqrt{x^2+y^2}dx+y(xy+ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))dy$,其中$L$为$y=\sin x(0\leq x\leq \pi)$按$x$轴增大方向

9. 验证$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$在右半平面$x>0$内是某函数$u(x,y)$的全微分, 并求$u(x,y)$

10. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，求$\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}(y^2f(xy)-1)dy$，其中$L$为从$A(3,\frac{2}{3})$到点$B(1,2)$的任何分段光滑曲线(不含$y=0$的点)

11. 设在上半平面$D=\{(x,y|y>0\}$内, $f(x,y)$具有连续偏导数, 且对任意$t>0$都有$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$

证：对D内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L, 都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$

12. 设$\varphi(x)$由连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单曲线C上, $\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$的值为常数

(1)设C为正向闭曲线$(x-2)^2+y^2=1$.证：$\oint \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$

(2)求$\varphi(x)$

13. $\oint_L \frac{(2x-y)dx+(2y+x)dy}{x^2+y^2}$, 其中$L$为绕原点一周的任一简单曲线, 取逆时针方向.

14. $\oint_L (z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$, 其中$L$是$x^2+y^2=1$与$x-y+z=2$的交线. 从$z$轴正向往负向看$L$的方向是顺时针.

15. 设Σ是由曲线$\begin{cases} z=\sqrt{x-1} \\ y=0 \end{cases}(1\le x\le 3)$绕$x$轴旋转成的旋转曲面. Σ的法向量n与x轴的夹角$\theta>\dfrac{\pi}{2}$.

求 $\iint_{\Sigma}(1-x)^2dzdy+y(4x+1)dxdz-2xzdxdy$

16. 设Σ是由曲面$x = \sqrt{1 - 3y^2 - 3z^2}$的前侧, 计算曲面积分

$I = \iint_{\Sigma} xdzdy + (y^3 + 2)dxdz + z^3dxdy$

17. 设Σ为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}(1\leq x^2+y^2\leq 4)$的下侧，$f(x)$为连续函数，计算

$$I=\iint[xf(xy)+2x-y]dzdy+[yf(xy)+2y+x]dxdz+[zf(xy)+z]dxdy$$