公式

高等数学

1.点火公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}, & n\text{为大于1的奇数} \end{cases}$$

特别地，

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 2\int_0^{\pi}\sin^n x dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx, n\text{为偶数} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^n x dx = \int_0^{\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx, n\text{为偶数} \end{cases}$$

2.翻转公式

（1） $\int_a^b f(x) = \int_a^b f(a+b-x)dx$

（2） $\int_0^{\pi} xf(sinx)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(sinx)$

3.Γ函数

$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$

$T(n+1) = n\Gamma(n), \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

4.万能代换

$$\text{令}\tan\frac{x}{2} = t$$

$$\text{则}\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt$$

5. 等价无穷小

$1-\cos^\alpha x \sim \frac{\alpha}{2}x^2$

$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \sim x$

$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$

6.积分表

$\int \tan x = -\ln|\cos x| + C$

$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\int \csc x dx = \ln|\csc x - cotx| + C$

$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln|\frac{a+x}{a-x}| + C$

$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C$

$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$

$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C$

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{1+e^{ax}}dx = x - \frac{1}{a}\ln\left(1+e^{ax}\right) + C$

$\frac{1}{\sin x\cos x}dx = d\ln\tan x$

$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = d\sqrt{1+x^2}$ (分部极其重要)

$\int \frac{1}{\sqrt[n]{(ax+b)^{n-1}(cx+d)^{n+1}}}dx = \frac{n}{ad-bc}\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} + C$

$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx = 2d\arcsin\sqrt{x} = d\arcsin(2x-1) = 2d\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

$\int \frac{dx}{a^2sin^2x+b^2cos^2x} = \frac{1}{ab}\arctan\frac{a\tan x}{b} + C$

$\int xe^{-x}dx = -e^{-x}(x+1) + C$

7. 泰勒公式

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(n)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11}{24}ex^2 + o(x^2)$

8. 泰勒级数

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad -1 < x < 1$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad -1 < x < 1$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty$

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty$

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \ldots, \quad -1 < x \le 1$

$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad -1 < x < 1$, 区间端点展开式是否成立

9. B函数

$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

1. $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$（函数值与变量顺序无关）
2. $Beta(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1)$
   $=\frac{p-1}{q+p-1}\mathrm{B}(p-1,q)$
   $=\frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}\mathrm{B}(p-1,q-1)$

10. 柯西不等式

- $(x^2+y^2)(a^2+b^2)\geq(ax+by)^2$
- 积分形式：$\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\geq(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2$

初等数学

1. 和差化积

> sin=帅，cos=哥

- $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$（帅+帅=帅哥）
- $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$（帅-帅-哥帅）
- $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$（哥+哥=哥哥）
- $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

2. 积化和差

- $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$（帅哥=（帅+帅）/ 2）
- $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$（哥哥=（哥+哥）/2）
- $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

结论

秒杀公式

1. 变限积分无穷小比阶

$x\to0$时，$f(x)$为m阶无穷小，$g(x)$为n阶无穷小，则$\int_0^{g(x)}f(x)dx$为$(m+1)n$阶无穷小。

2. 几个重要极限

1. $\lim_{x\to0}\frac{e-(1+kx)^{\frac{1}{kx}}}{x}=\frac{k}{2}e$——$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e-\frac{e}{2}x+\frac{11}{24}ex^2+o(x^2)$
   $\lim_{x\to\infty}x[e-(1+\frac{1}{x})^x]=\frac{e}{2}$
2. $\lim_{x\to\infty}(\frac{ax+b}{ax+c})^{hx+k}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}$
3. $\lim_{x\to0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{abc}$
4. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_1^n+x_2^n+...+x_m^n|}=max\{|x_1|,|x_2|,...|x_n|\}$

3. $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$

1. $\alpha>0:f(x)$连续
2. $\alpha>1:f'(0)$存在
3. $\alpha>\beta+1:f'(x)$连续
4. $\alpha>\beta+2$：$f''(0)$存在

4. 六个定积分

(1) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi}{4}a^2$(四分之一圆面积)

(2) $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{3}a^3$(奇次幂没有$\pi$)

(3) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi}{16}a^4$

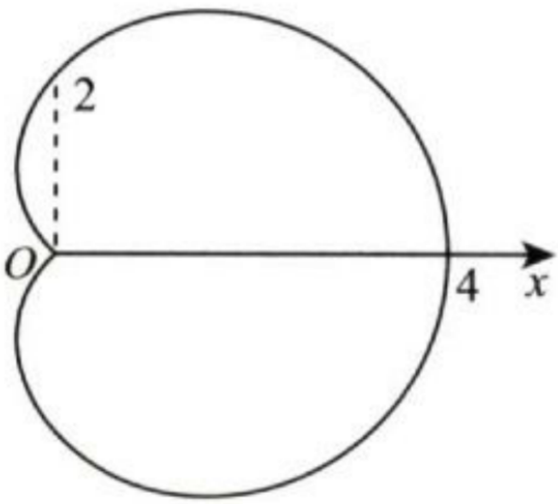
(4) $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}$

(5) $\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a$(奇次幂没有$\pi$)

(6) $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{\pi}{4}a^2$(同1)

5. 心形线面积

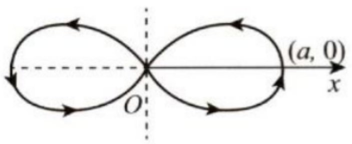
1. 表达式：$r=a(1\pm\cos\theta)$
2. 面积$S=\frac{3}{2}\pi a^2$



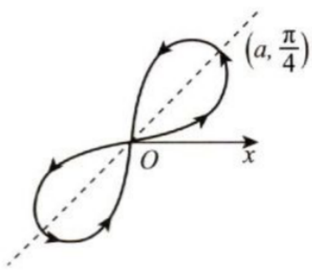
$r=2(1+\cos\theta)$

6. 双纽线面积

1. 表达式：$r^2=2a^2\cos 2\theta$
   $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$
2. 面积$S=2a^2$



$r^2=a^2\cos 2\theta$



$r^2=a^2\sin 2\theta$

7.五大积分

1. $\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dV=\frac{4}{5}\pi R^5$
   其中,$\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$
2. 例7 设 L 为任意一条不过原点的简单光滑正封闭曲线,对曲线积分 $\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{c_1x^2+c_2y^2}$ $(c_1>0, c_2>0)$ 有下列结论:

   Ⅰ. 若给定的曲线 L 所围成的闭区域不包括原点 $(0,0)$,则 $\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{c_1x^2+c_2y^2}=0$;

   Ⅱ. 若给定的曲线 L 所围成的闭区域包括原点 $(0,0)$,则 $\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{c_1x^2+c_2y^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{c_1c_2}}$.

   例8 设 L 为平面内任意一条不经过点 (x_0, y_0) 的正向光滑封闭简单曲线. 证明: $\oint_L \frac{(x-x_0)dy-(y-y_0)dx}{c_1(x-x_0)^2+c_2(y-y_0)^2}$ $(c_1>0, c_2>0)$ 的值为常数,并求下列曲线积分.

   (1) $\oint_L \frac{-y\,dx+(x+1)dy}{(x+1)^2+y^2}$,其中 L 为 $x^2+y^2=4$,逆时针方向;

   (2) $\oint_L \frac{y\,dx-(x-1)dy}{4(x-1)^2+y^2}$,其中 L 为 $x^2+y^2=9$,逆时针方向.

   - 例8是例7的推广,答案都是 $\frac{2\pi}{\sqrt{c_1c_2}}$
3. 例2 设 L 为绕原点一周的任意简单曲线,取逆时针方向. 证明:当 $a_2=-b_1$, $a_1c_2=c_1b_2$ 时,曲线积分 $\oint_L \frac{(a_1x+a_2y)dx+(b_1x+b_2y)dy}{c_1x^2+c_2y^2}$ $(c_1>0, c_2>0)$ 的值恒为常数,并求下列曲线积分.

   (1) (2020) 计算曲线积分 $I_1=\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$,其中 L 是 $x^2+y^2=2$,方向为逆时针.

   (2) $\oint_L \frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy$,其中 L 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,方向逆时针.

   - 答案为 $\frac{2b_1\pi}{\sqrt{c_1c_2}}$

8.幂级数求和必背公式

1. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$; $\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}, |x|<1$
2. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x}$; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{-x}{1+x}, |x|<1$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}, |x|<1$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, |x|<1$
5. $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}, |x|<1$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x), -1\le x<1$

9. 周期函数极限

- $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$

硬背

广义积分

1. $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx(a>0)\begin{cases}p>1:收敛\\p\le 1:发散\end{cases}$
2. $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx(a>1)\begin{cases}p>1:收敛\\p\le 1:发散\end{cases}$
3. $\int_0^{+\infty}x^k e^{-\lambda x}dx(k\ge 0)\begin{cases}\lambda>0:收敛\\\lambda\le 0:发散\end{cases}$
4. $\int_0^{a}\frac{1}{x^p}dx(a>0)\begin{cases}p<1:收敛\\p\ge 1:发散\end{cases}$
   - $\sim\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx$
   - $\sim\int_0^a\frac{\ln x}{x^p}dx(a>0)$ P

无穷级数

1. p级数：$\sum\frac{1}{n^p}\begin{cases}p>1:收敛\\p\le 1:发散\end{cases}$
2. 等比级数$\sum aq^n(a\ne 0)=\begin{cases}\frac{a}{1-q}(\frac{首项}{1-公比}),|q|<1\\发散，q\ge 1\end{cases}$
3. 对于正项级数$\sum a_n$收敛 $\Rightarrow\sum a_n^2$收敛吗

姜150

凹函数的充要条件

$f(x)$可导, 则$f(x)$为凹函数 $\Leftrightarrow$

1. $f''(x)>0$
2. $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$——曲线在切线上方
3. $f(x)<f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),a<x<b$——曲线在割线下方