

首先定义两个集合 A, B 与两个函数 $f: A \mapsto B, g: B \mapsto A$ 此时集合 A 与集合 B 存在两种关系, 即 $A = B$ 和 $A \neq B$.

Case 1. 当 $A \neq B$ 时不满足交换律

假设

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B = \{a, b, c, d\}$$

那么

$$f = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, c \rangle, \langle 5, b \rangle\}$$

$$g = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 5 \rangle, \langle d, 2 \rangle\}$$

不难发现

$$\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 5, 3 \rangle\} \neq \{\langle a, a \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, b \rangle, \langle d, a \rangle\}$$

所以

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Case 2. 当 $A = B$ 时

$$f: A \mapsto A, g: A \mapsto A$$

$$f \circ g = g \circ f$$

综上所述

当集合 $A = B$ 相等时, $f \circ g = g \circ f$

当集合 $A \neq B$ 时, $f \circ g \neq g \circ f$