



河南大學

明德新民 止于至善

第3章 频率域滤波

陈小潘

计算机与信息工程学院



目录

- 引 频率域处理
- 3.1数学基础
- 3.2 离散傅里叶变换
- 3.3 频率域图像处理

频域处理

- **频率域图像**是将空间域图像像素的灰度值表示成随位置变化的空间频率，并以频谱（也称为频谱图）的形式表示图像信息分布特征的一种表示方式。



(a) 图像



(b) 图像的原频谱图

频域处理

- **频域（频率域）**：描述信号的频率结构及频率与该频率信号幅度的关系。在频率域分析时横坐标是频率，纵坐标是振幅或相位。**频率**就是信号变化的快慢，在图像中就是指灰度变化的快慢。与**频率域**相对的是**时间域或空间域**。
- **频域处理的过程**：对图像施加**频域变换**将图像由空间域转换到频率域，在频率域中对图像的频谱作分析、处理以改变图像的频率特征，最后再通过**逆变换**将图像由频域转换回空间域。
- 常见的频域变换：**傅里叶变换**、**离散余弦变换**、**小波变换**等。
- **频域处理的应用**：图像增强、图像复原、图像编码、图像压缩、特征抽取。

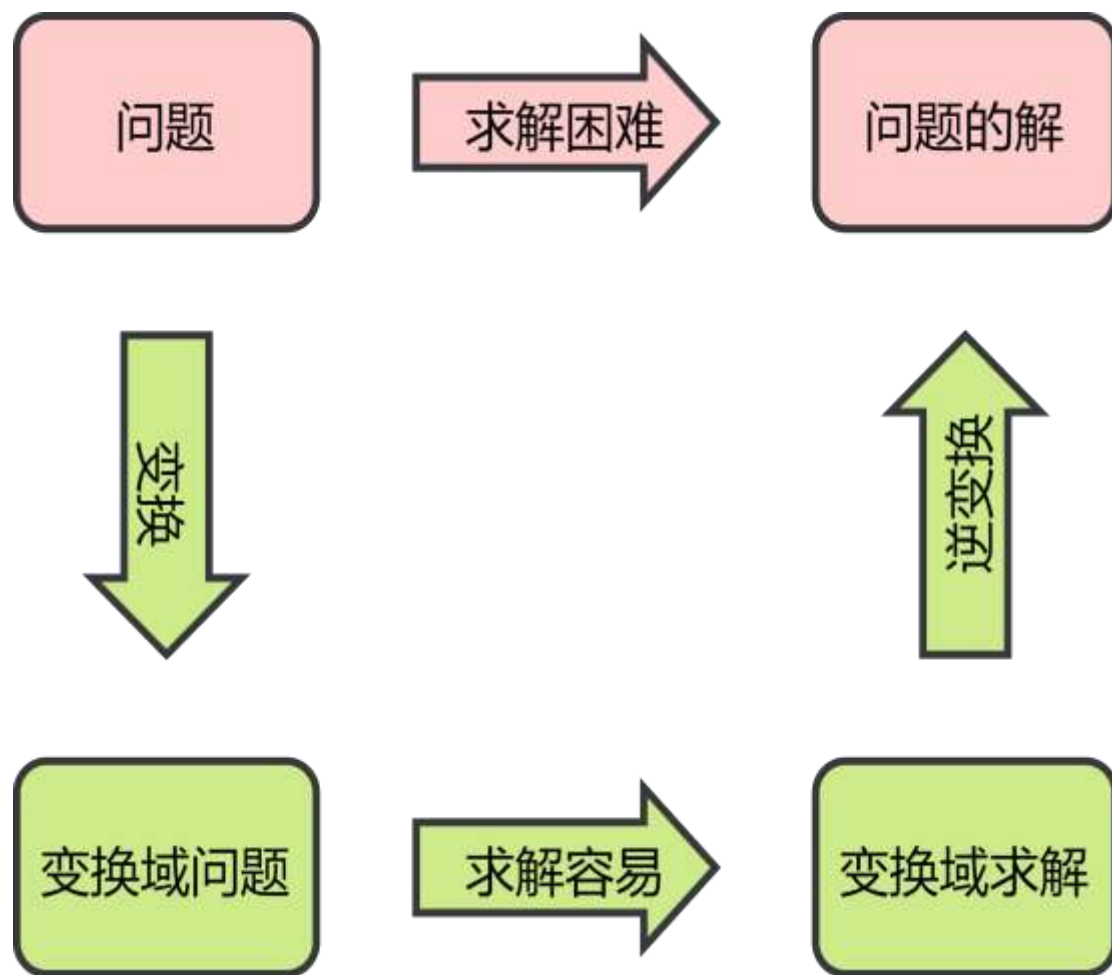
频域处理

- 人类视觉通常感受到的是在空间域和时间域的信号。
- 许多问题在频域中讨论时，有其非常方便的一面。例如，空间位置上的变化不改变信号的频域特性。

空间域（时域）→ 频率域

- 图像频域处理的物理背景：图像中结构复杂的区域、图像细节及噪声等信息集中在高频区，而图像中灰度变化平缓部分集中在低频区。图像的大部分能量都集中在低、中频段，高频分量能量较低。

频域处理



不识庐山真面目
只缘身在此山中

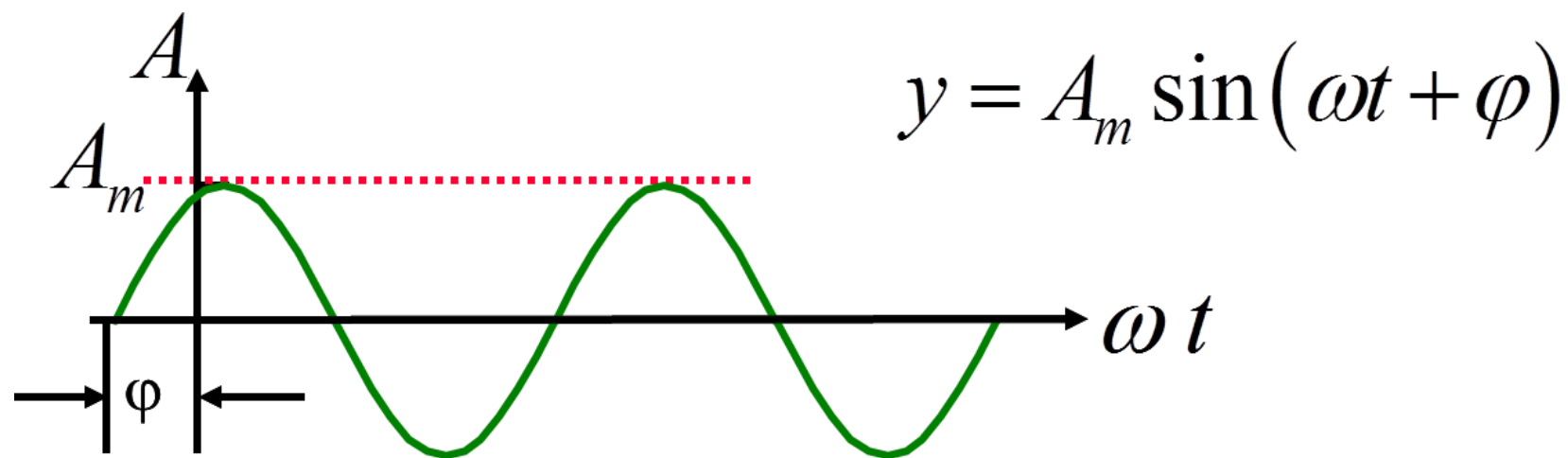
跳脱固有的思维模式

目录

- 3.1 数学基础
- 3.2 离散傅里叶变换
- 3.3 频率域图像处理

3.1 数学基础

■ 正弦波



$$y = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

A_m : 幅值 (最大值)

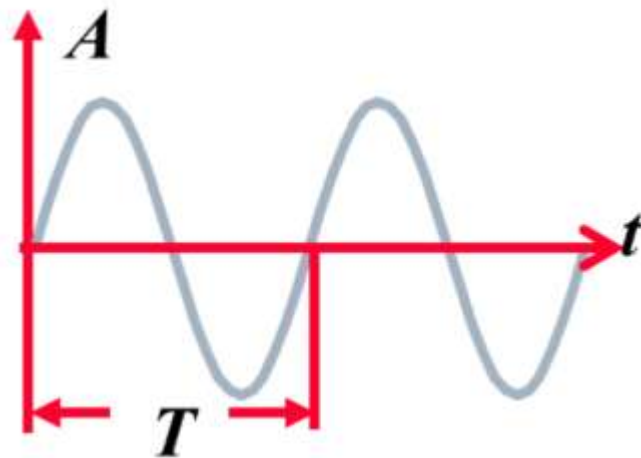
ω : 角频率 (弧度/秒)

φ : 初相位

3.1数学基础

■ 正弦波

- ✓ 周期 T : 正弦量完整变化一周所需要的时间。
- ✓ 频率 f : 正弦量在单位时间内变化的周数。
- ✓ 周期与频率的关系角频率 $f = \frac{1}{T}$
- ✓ 角频率: 正弦量单位时间内变化的弧度数。
- ✓ 角频率与周期及频率的关系 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

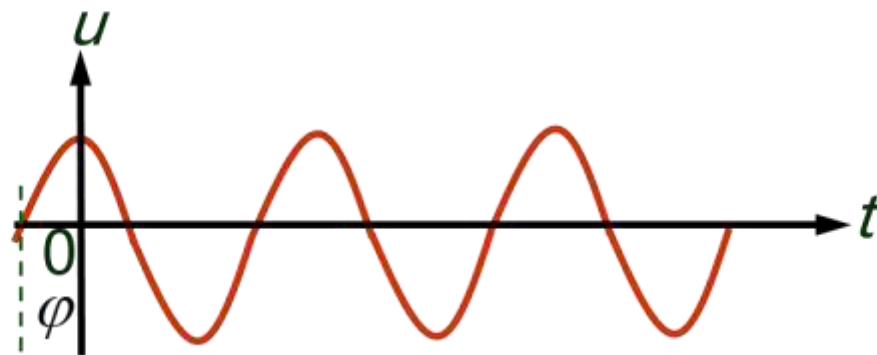


3.1 数学基础

■ 正弦波

相位 $(\omega t + \varphi)$ 称为相位，相位是时间的函数，反映了正弦量随时间变化的整个进程。

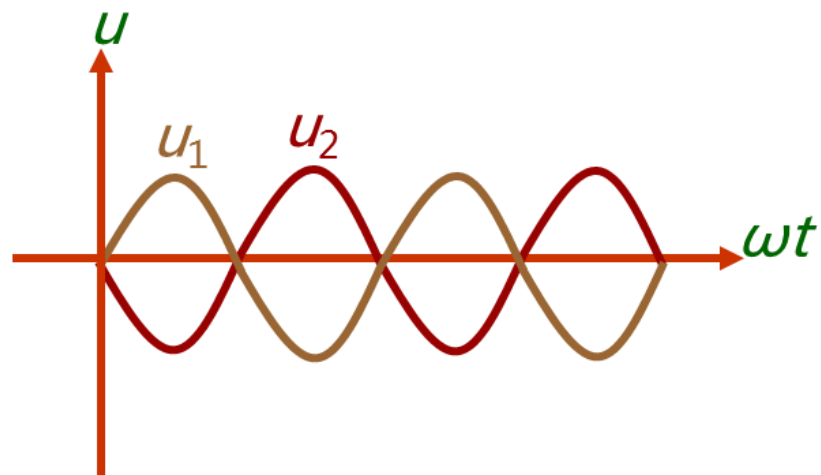
初相 $t=0$ 时的相角 φ ，初相确定了正弦量计时开始的位置。



3.1 数学基础

■ 正弦波

相位差 指两个波形之间的相位差异,通常用角度或弧度表示。

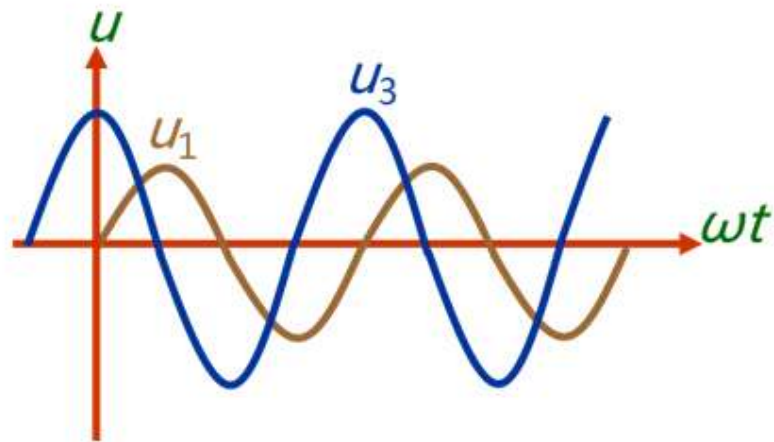


u_1 与 u_2 反相,即相位差为 180° ;

3.1 数学基础

■ 正弦波

相位差

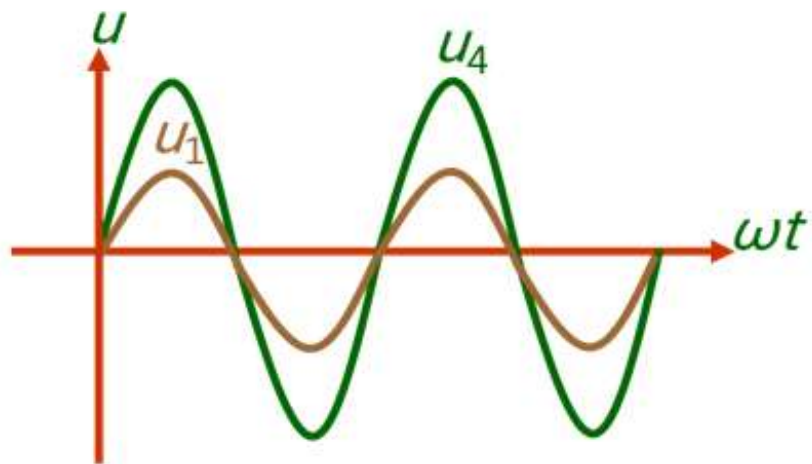


u_3 超前 $u_1 90^\circ$ ，或说 u_1 滞后 $u_3 90^\circ$ ，二者为正交的相位关系。

3.1 数学基础

■ 正弦波

相位差

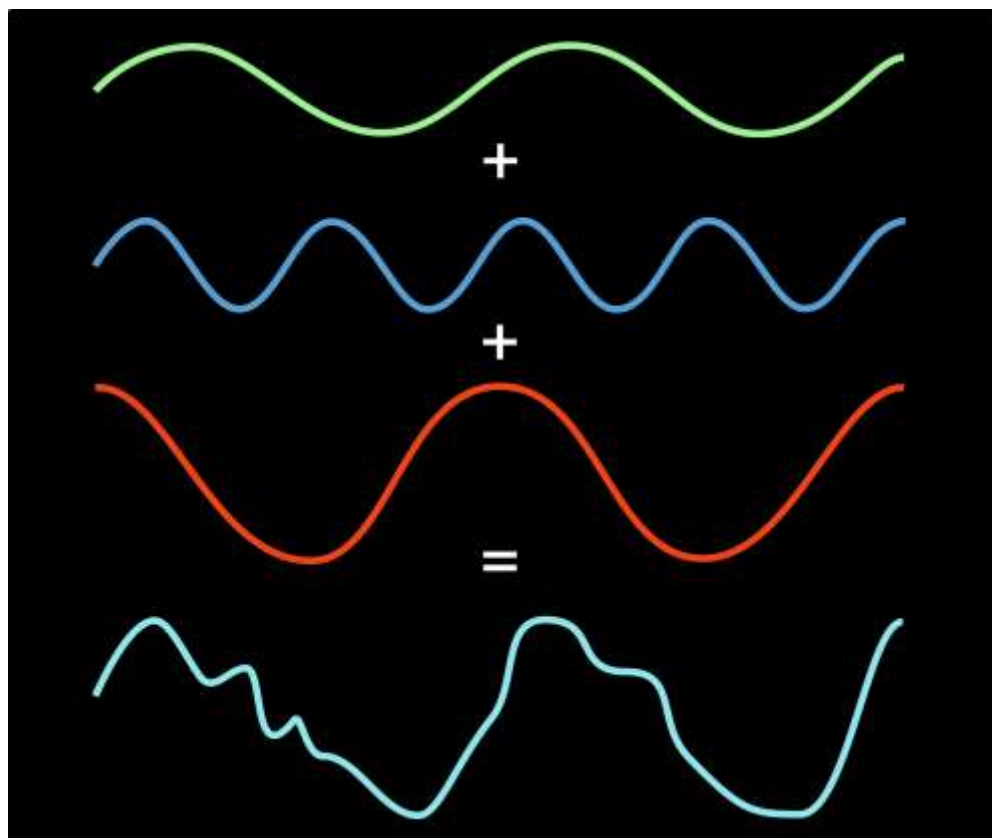


u_1 与 u_4 同相，即相位差为零。

3.1 数学基础

■ 正弦波

任意波形都可以分解为正弦波的加权和（调和分析）



3.1 数学基础

- 空间域（或时域）和频率域之间的变换可用数学公式表示如下

$$f(x) \begin{matrix} \xrightarrow{\text{正变换}} \\ \xleftarrow{\text{逆变换}} \end{matrix} A(f), \Phi(f)$$

$A(f)$ 、 $\phi(f)$ 分别表示信号的振幅、相位与频率 f 的关系。

- 为了能够同时表示信号的振幅和相位，通常采用复数表示，上式用复数可以表示为：

$$f(x) \begin{matrix} \xrightarrow{\text{正变换}} \\ \xleftarrow{\text{逆变换}} \end{matrix} F(f)$$

3.1 数学基础

■ 复数

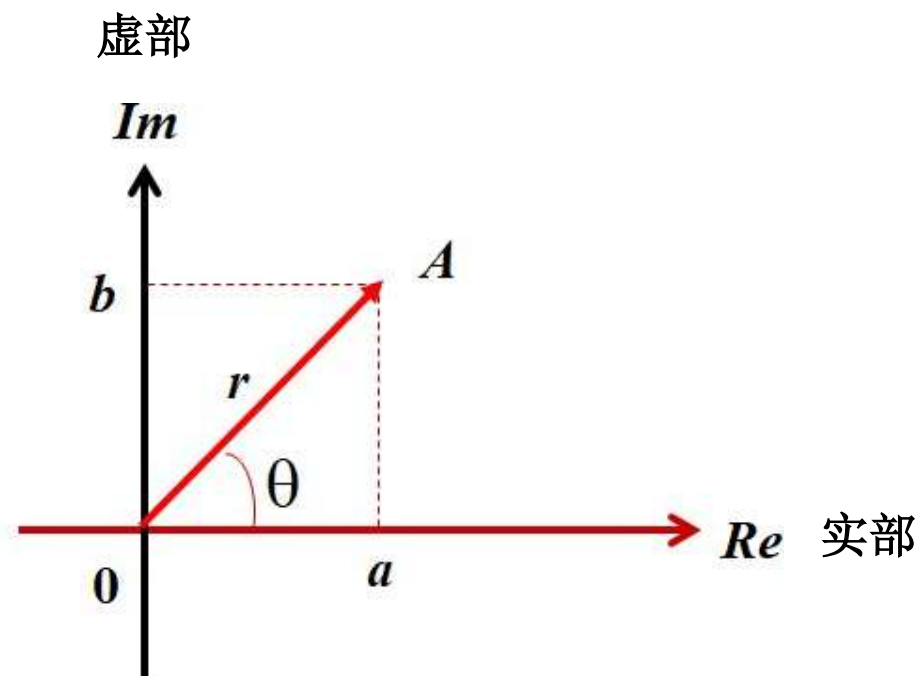
① 代数形式

$$A = a(\text{实}) + ib(\text{虚})$$

其中: $i = \sqrt{-1}$

② 三角形形式

$$A = r \cos \theta + ir \sin \theta$$



$$\begin{aligned} a &= r \cos \theta & r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ b &= r \sin \theta & \theta &= \arctan(b / a) \end{aligned}$$

3.1 数学基础

■ 复数

③ 指数形式 $A = re^{i\theta}$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(欧拉公式)

由欧拉公式可知

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i = i$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0 - i = -i$$

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i0 = -1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad \text{(欧拉恒等式)}$$

e 称为自然常数

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$e \approx 2.71828$$



目录

- 3.1 数学基础
- 3.2 傅里叶变换
- 3.3 频率域图像处理

傅里叶变换

当数学遇见浪漫

想象一下，你站在海边，看着潮起潮落。浪花看似杂乱无章，却暗藏着某种规律：它们由无数微小的波浪叠加而成，每一朵浪花的节奏都与深海中的风、月球的引力、海底的地形息息相关。而傅里叶变换，正是人类发现的那把“魔法钥匙”——它将这些看似混沌的浪花拆解成无数纯净的正弦波，让我们看到隐藏在时间长河中的频率密码。

从拿破仑远征的沙漠热浪，到现代AI语音助手的“嗨 Siri”；从钢琴上跳跃的音符，到核磁共振中的人体断层——傅里叶变换像一位优雅的翻译官，将复杂的世界翻译成数学的诗行。它不仅是科学的工具，更是一种浪漫的思维方式：万物皆可分解为简单的和谐，混沌中藏着秩序，时间与频率在数学的桥梁上相遇。



傅里叶变换

■ 傅里叶的背景

- ✓ 18世纪末，法国数学家傅里叶曾随拿破仑远征军前往埃及，研究热力学。
- ✓ 他对“热”的传播产生了浓厚兴趣，探究为何不同材料的导热性差异如此巨大。

■ 傅里叶的突破

- ✓ 1807年，傅里叶提出：任何连续周期信号都可以由一组正弦波叠加而成。
- ✓ 这一观点引发了当时数学界的激烈争议，拉格朗日等数学家认为正弦波无法描述带有棱角的信号（如方波）。

■ 傅里叶级数与变换

- ✓ 1822年，傅里叶在《热的解析理论》中正式提出“傅里叶级数”和“傅里叶变换”的数学框架。

■ 理论影响

- ✓ 尽管初期遭遇拒绝，傅里叶的理论最终得到了历史的验证，成为现代科学的基石。
- ✓ 物理学家开尔文勋爵称其为“现代分析学最优美的成果之一”，并且成为解决几乎所有物理学深奥问题的关键工具。

傅里叶变换

1822年，法国工程师傅里叶（1768—1830）指出：一个“任意”的周期函数都可以分解为无穷多个不同频率的正弦和余弦和，即傅里叶级数。求傅里叶级数的过程就是傅里叶变换。傅里叶级数和傅里叶变换统称为傅里叶分析或谐波分析。傅里叶变换是傅里叶级数的推广，可以将非周期函数分解成一系列正弦和余弦函数的和。



傅里叶变换

- 傅里叶变换（Fourier transform），将满足一定条件的某个函数表示成三角函数（正弦和或余弦函数）的线性组合或者积分。
- 傅里叶变换具有多种不同的变体形式，如连续傅里叶变换和离散傅里叶变换。
- 傅里叶变换实际上是将非周期函数作为一个周期无限大的函数做傅里叶级数展开。

傅里叶变换

■ 傅里叶变换使用的条件

✓ 傅里叶变换使用的条件（狄里赫莱条件）

当一个一维信号 $f(x)$ 满足如下条件时，

①具有有限个间断点

②具有有限个极值点

③在单个周期内绝对可积 $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$

则其傅里叶变换对（傅里叶变换和逆变换）一定存在。在实际应用中，狄里赫莱条件一般总是可以满足的。

连续傅里叶变换

■ 一维连续傅里叶变换对的定义

$$\text{正变换 } F[f(x)] = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

$$\text{反变换 } F^{-1}[F(u)] = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

其中 x 为空域变量， u 为频域变量， $j = \sqrt{-1}$

上式函数 $F(u)$ 和 $f(x)$ 称作一个傅里叶变换对。对于任一函数 $f(x)$ 其对应傅里叶变换 $F(u)$ 只有一个，反之亦然。并且正反傅里叶变换形式上唯一的不同在于幂的符号。

连续傅里叶变换

$f(x)$ 和 $F(\omega)$ 分别是实函数和复函数。 $F(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$

实部: $R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(2\pi\omega x) dx$

虚部: $I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(2\pi\omega x) dx$

振幅: $|F(\omega)| = [R^2(\omega) + I^2(\omega)]^{\frac{1}{2}}$

能量: $E(\omega) = |F(\omega)|^2 = R^2(\omega) + I^2(\omega)$

相位: $\varphi(\omega) = \arctan \frac{I(\omega)}{R(\omega)}$

连续傅里叶变换

■ 二维连续傅里叶变换对的定义

$$\text{正变换 } F[f(x, y)] = F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

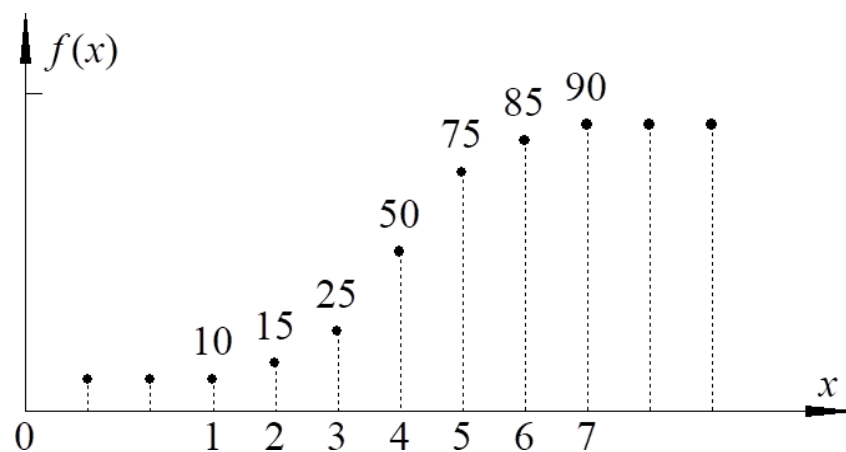
$$\text{反变换 } F^{-1}[F(u, v)] = f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

x, y 为空间变量, u, v 为频域变量; $j = \sqrt{-1}$

离散傅里叶变换

在数字图像处理中使用傅里叶变换，需要解决两个问题

- 将连续函数 $f(x)$ 或 $f(x, y)$ 离散化（等间隔采样）



- 将积分中的无穷大改为有限次计算

这种傅里叶变换称为**离散傅里叶变换**（Discrete Fourier Transform, DFT）。

离散傅里叶变换

■ 一维离散傅里叶变换对的定义

设 $\{f(x)|f(0), f(1), f(2), \dots, f(N-1)\}$ 为一维信号 $f(x)$ 的 N 个采样，其离散傅里叶变换DFT为：

$$F\{f(x)\} = F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi u x / N]$$

离散傅里叶逆变换（反变换）IDFT为

$$F^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[j2\pi u x / N]$$

表示为： $F[f(x)] = F(u)$ 或 $f(x) \Leftrightarrow F(u)$

离散傅里叶变换

令 $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, 则有

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)W^{ux} \quad u = 0, 1, 2, \dots, N-1$$
$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u)W^{-ux} \quad x = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

W因子具有周期性和对称性

$$W^{u \pm rN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(u \pm rN)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}u} \times e^{\mp j2\pi r} = e^{-j\frac{2\pi}{N}u} = W^u$$
$$W^{u \pm \frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(u \pm \frac{N}{2}\right)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}u} \times e^{\mp j\pi} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}u} = -W^u$$

快速傅里叶变换FFT，不是一种新的变换，只是DFT的一种算法。FFT通过合理安排重复出现的相乘运算，减少计算工作量。

离散傅里叶变换

■ 一维离散傅里叶变换对的定义

- ✓ 将欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ 带入到DFT公式中,

$$F[f(x)] = F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi ux/N}$$

- ✓ 利用 $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$, 可得

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \left(\cos \frac{2\pi ux}{N} - j \sin \frac{2\pi ux}{N} \right)$$

- ✓ 离散序列的傅里叶变换仍是一个离散的序列
- ✓ 离散傅里叶变换结果是三角函数的加权和（每一个 $f(x)$ 都乘以不同频率的正弦和余弦值）。

二维离散傅里叶变换

■ 二维离散傅里叶变换对定义为

$$F[f(x, y)] = F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

$$F^{-1}[F(u, v)] = f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

式中的系数 $1/MN$ 既可以出现在正变换的前面，也可以出现在逆变换的前面。

二维离散傅里叶变换

■ 二维离散傅里叶变换对定义为

二维离散傅里叶变换的复数形式（代数复数形式）

$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$$

式中， $R(u, v)$ 和 $I(u, v)$ 分别是 $F(u, v)$ 的实部和虚部。傅里叶变换的频谱（或幅度谱）

$$|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$$

傅里叶变换的相位角（或相位、相角）

$$\phi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)}$$

二维离散傅里叶变换

傅里叶变换的复数形式（指数复数形式）

$$F(u, v) = |F(u, v)|e^{-j\phi(u,v)}$$

傅里叶变换的功率谱定义为幅度的平方

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

二维离散傅里叶变换

```
%傅里叶变换原始实现
clc; clear all; close all;
f=imread('lena.jpg'); % 读灰度图像
[M,N,color]=size(f);
if (color==3) % 如果输入图像是彩色图像, 将其转换成灰度图像
    f=rgb2gray(f);
end
f=im2double(f);
for u=0:M-1
    for v=0:N-1
        sum=0;
        for x=0:M-1
            e1=exp(-i*2*pi*u*x/M);
            for y=0:N-1
                e2=exp(-i*2*pi*v*y/N);
                sum=sum+f(x+1,y+1)*e1*e2;
            end
        end
        F(u+1,v+1)=real(sum);
    end
end
F_log=log(1+abs(F));
subplot(1,2,1);imshow(f);title('原灰度图像','FontSize',14);
subplot(1,2,2);imshow(F_log,[]);title('原图像的傅里叶频谱图像','FontSize',14);
```

当M和N较大时计算量非常大，以至于受当前计算机能力无法实现。

二维离散傅里叶变换

%傅里叶变换基于Matlab原始实现

```
clc; clear all; close all;
```

```
f=imread('lena.jpg'); % 读灰度图像
```

```
[M,N,color]=size(f);
```

```
if (color==3)      % 如果输入图像是彩色图像, 将其转换成灰度图像
```

```
    f=rgb2gray(f);
```

```
end
```

```
F=fft2(f);
```

```
F_log_img=log(1+abs(F));
```

```
subplot(1,2,1);imshow(f);title('原灰度图像','FontSize',14);
```

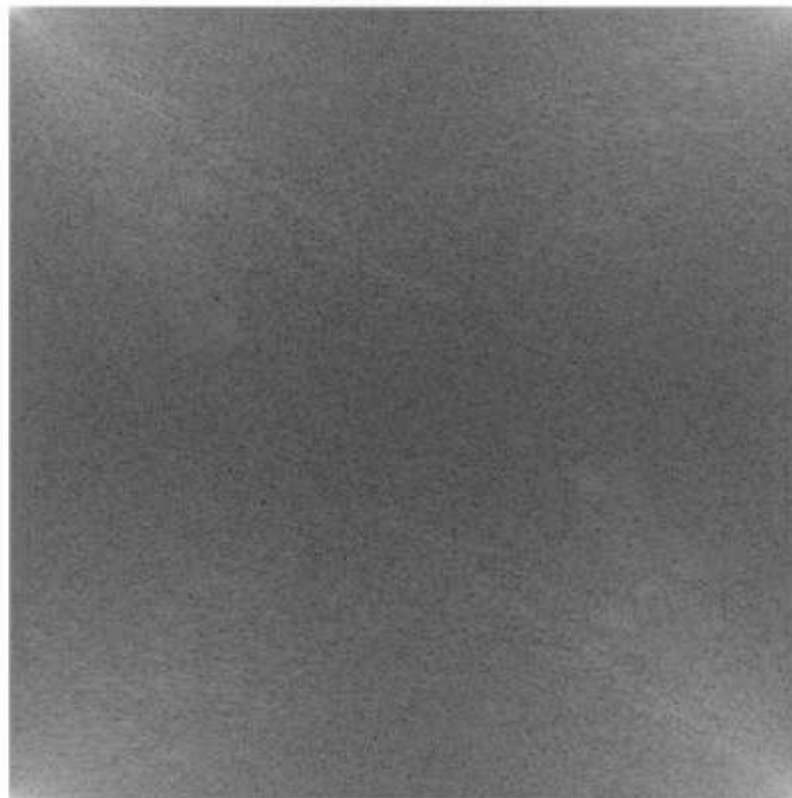
```
subplot(1,2,2);imshow(F_log_img,[]);title('原图像的傅里叶频谱图像',  
'FontSize',14);
```

二维离散傅里叶变换

原灰度图像



原图像的傅里叶频谱图像



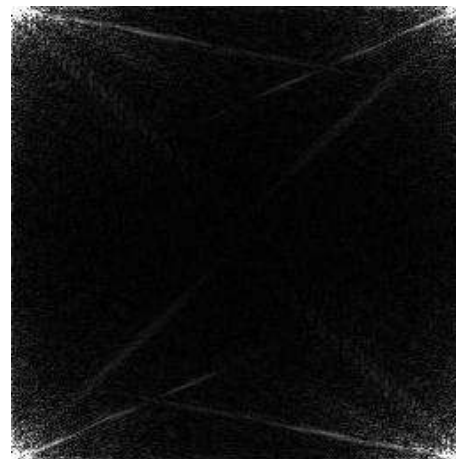
二维离散傅里叶变换

```
%对灰度图像进行DFT
clear,clc,close all;
grayI=imread('cameraman.tif');
DFT=fft2(grayI);    %计算二维DFT
ADFT=abs(DFT);    %计算傅里叶谱
top=max(ADFT(:));
bottom=min(ADFT(:));
ADFT1=(ADFT-bottom)/(top-bottom)*100;    %将傅里叶谱系数规格化到[0,100]
ADFT2=fftshift(ADFT1);    %将规格化频谱图位移，低频移至频谱图中心。
recI=ifft2(DFT);    %频率分量进行IDFT，重建图像
recI=uint8(abs(recI)); %重建图整理
subplot(221),imshow(grayI),title('原图');
subplot(222),imshow(ADFT1),title('原频谱图');
subplot(223),imshow(ADFT2),title('移位频谱图');
subplot(224),imshow(recI),title('重建图');
```

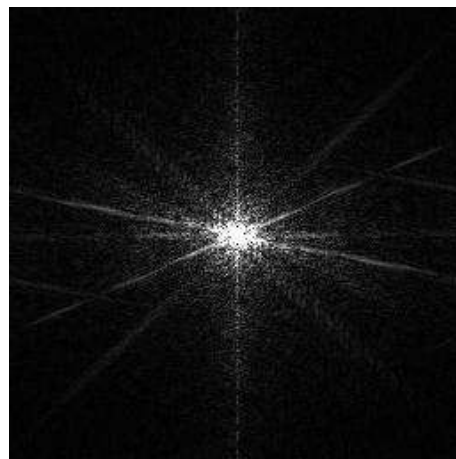
二维离散傅里叶变换



(a) 原图



(b) 原频谱图



(c) 移位频谱图



(d) 重建图

(b) 图中四角部分对应低频成分，中央部分对应高频成分；
(c)图是频谱搬移图，图中**中间部分为低频部分**，越靠外边频率越高。图像中的**能量主要集中在低频区**，高频能量很少或为零。

二维离散傅里叶变换

■ 再谈频率域的理解

傅里叶变换以前，图像是由对在连续空间(现实空间)上的采样得到一系列点的集合，我们习惯用一个二维矩阵表示空间上各点，则图像可由 $z=f(x,y)$ 来表示。实际上对图像进行二维傅里叶变换得到频谱图，就是图像梯度的分布图，当然**频谱图上的各点与原图像上各点并不存在一一对应的关系，即使在不移频的情况下也没有。**

傅里叶频谱图上看到的明暗不一的亮点，实际上反映了图像中某一点（像素灰度值）与其邻域点差异的强弱，即梯度的大小，也可以理解为该点频率的高低（图像中的低频部分对应梯度较小的点，高频部分则对应梯度较大的点）。

二维离散傅里叶变换

■ 再谈频率域的理解

- ✓ 在空间域图像中，线性的地物为高频成分，大块面状的地物为低频成分。图像经过傅里叶变换后产生频率域图像，这些空间频率信息被突出出来。
- ✓ 图像灰度变化缓慢的部分，对应变换后的低频分量部分（白色）；图像的细节和轮廓边缘都是灰度突变区域，它们是变换后的高频分量（黑色）。
- ✓ 频域图像的每一点都来自于整个原图像。

二维离散傅里叶变换

■ 二维DFT转换为一维DFT

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \frac{xu}{M}} e^{-j2\pi \frac{yv}{N}} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \left[\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \frac{yv}{N}} \right] e^{-j2\pi \frac{xu}{M}} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \left\{ \mathcal{F}_y[f(x, y)] \right\} e^{-j2\pi \frac{xu}{M}} \\ &= \mathcal{F}_x \left\{ \mathcal{F}_y[f(x, y)] \right\} \end{aligned}$$

含义：二维DFT可用一维DFT来实现，先对每一列进行DFT，再对每一行进行DFT；或相反顺序。

实现：可采用一维FFT实现一维DFT

二维离散傅里叶变换

■ 二维DFT转换为一维DFT

上式称为二维DFT的**可分离性**，表明二维DFT可以采用一维DFT来实现，即先对 $f(x, y)$ 的每一列进行一维DFT，得到 $F_y[f(x, y)]$ ，再对该中间结果的每一行进行一维DFT得到 $F(u, v)$ ，运算过程中可以采用一维FFT实现快速运算。相反的顺序（先行后列）也可以。

二维离散傅里叶变换

■ 可分离性

- ✓ 二维离散傅里叶变换DFT可分离性的基本思想是二维DFT可分离为两次一维DFT。

因此可以用通过计算两次一维的FFT来得到二维快速傅里叶变换FFT算法。根据快速傅里叶变换的计算要求，需要图像的行列数均满足2的n次方，如果不满足，在计算FFT之前先要对图像补零以满足2的n次方。

一个M行N列的二维图像 $f(x,y)$ ，先按行对列变量y做一次长度为N的一维离散傅里叶变换，再将计算结果按列向对变量x做一次长度为M傅里叶变换就可以得到该图像的傅里叶变换结果，如下式所示：

$$F(u,v) = 1/MN \sum_{x=0}^{M-1} \left[\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \exp(-j2\pi vy/N) \right] \exp(-j2\pi ux/M)$$

二维离散傅里叶变换

■ 可分离性

将上式分解开来就是如下两部分，首先得到 $F(x,v)$ 再由 $F(x,v)$ 得到 $F(u,v)$:

$$F(x, v) = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi v y / N] \quad v = 0, 1, \dots, N-1$$

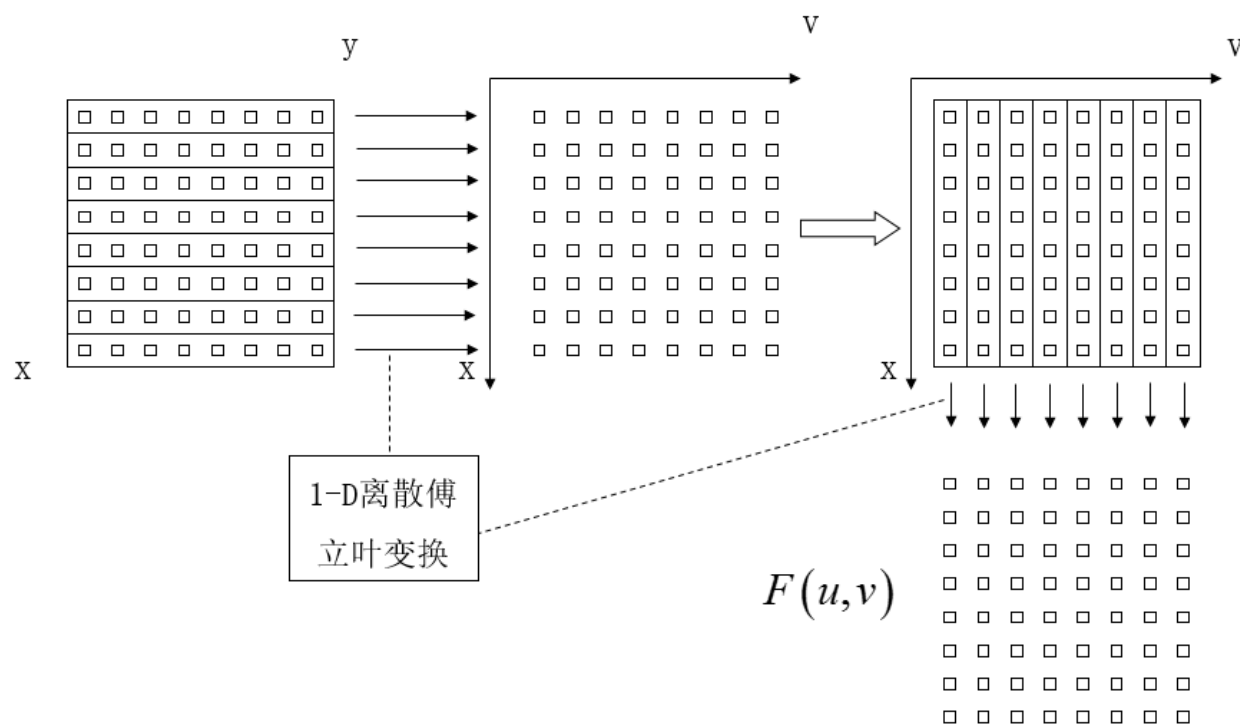
$$F(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) \exp[-j2\pi u x / M] \quad u = 0, 1, \dots, M-1$$

$$u=0,1,2,\dots,M-1; v=0,1,2,\dots,N-1$$

二维离散傅里叶变换

■ 可分离性

计算过程如下图所示



每一行有 N 个点，对每一行的一维 N 点序列进行离散傅里叶变换得到 $F(x, v)$ ，再对得到 $F(x, v)$ 按列向对每一列做 M 点的离散傅里叶变换，就可以得到二维图像 $f(x, y)$ 的离散傅里叶变换 $F(u, v)$ 。

傅里叶变换的性质

■ 周期性

若离散Fourier变换和它的反变换周期为N，则有

$$F(u, v) = F(u + N, v) = F(u, v + N) = F(u + N, v + N)$$

$$f(x, y) = f(x + M, y) = f(x, y + N) = F(x + M, y + N)$$

对一维傅里叶变换 $F(u) = F(u \pm kN) \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots$

对二维傅里叶变换 $F(u, v) = F(u \pm kN, v \pm lN) \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad l = 0, 1, 2, 3 \dots$

$$f(x \pm kN, y \pm lN) = f(x, y)$$

■ 共轭对称性

共轭性对称性，傅里叶变换结果是以原点为中心的共轭对称函数。可表示为

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)| \quad F(u, v) = F(-u, -v)$$

傅里叶变换的性质

■ 周期性和共轭对称性

尽管 $F(u,v)$ 对中有无穷多个 u 和 v 的值重复出现，但只需根据在任一个周期里的 N 个值就可以从 $F(u,v)$ 得到 $f(x,y)$ ，即只需一个周期里的变换就可将 $F(u,v)$ 在频域里完全确定，同样的结论对 $f(x,y)$ 在空域也成立。

根据周期性和共轭对称性，在对图像进行频谱分析时只需要处理一个周期即可，同时利用该性质可以直接计算图像的幅度谱，使得图像的频谱计算和显示得以简化。

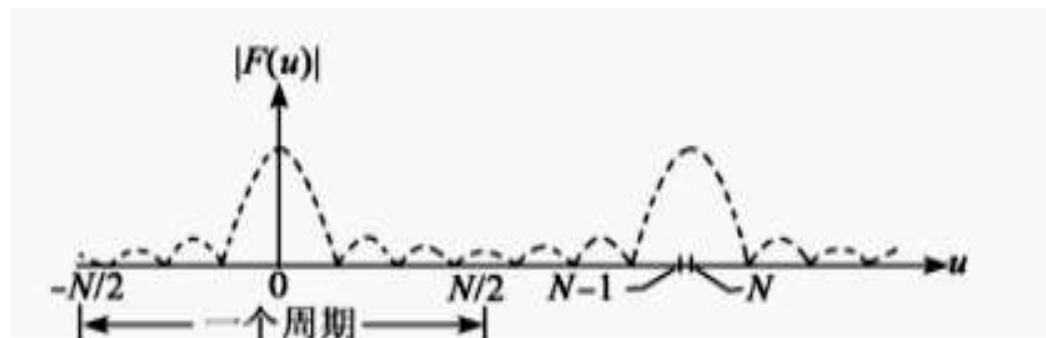


图 傅里叶的周期性和共轭对称性

傅里叶变换的性质

■ 平移定理:

设
$$f(x, y) \stackrel{\text{FT}}{\Leftrightarrow} F(u, v)$$

则:
$$f(x, y) \exp\left[j \frac{2\pi}{N} (u_0 x + v_0 y)\right] \Leftrightarrow \underline{F(u - u_0, v - v_0)}$$

相当于 $F(u, v)$ 的频率平面
坐标原点移到 (u_0, v_0) 点。

$$\underline{f(x - x_0, y - y_0)} \Leftrightarrow F(u, v) \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} (ux_0 + vy_0)\right]$$

相当于 $f(x, y)$ 的空间平面
坐标原点移到 (x_0, y_0) 点。

傅里叶变换的性质

■ 平移定理:

- ✓ $f(x, y)$ 通过和一个指数相乘可以将对应变换的频率域中心移至新的位置。
- ✓ 将 $F(u, v)$ 与一指数项相乘相当于将其反变换后的空间域中心移至新的位置。
- ✓ $f(x, y)$ 中发生的平移不会改变频谱的幅值。

傅里叶变换的性质

```
%% 傅里叶变化的平移特性
%空间域乘以exp，频率域移动
I = imread('rice.png');
I = im2gray(I);
I = im2double(I);
figure;subplot(1, 3, 1);imshow(I);title('原图');
%傅里叶变换
f = fft2(I);
f = fftshift(log(1+abs(f)));
subplot(1, 3, 2);imshow(f, []);title('频谱图');
%假设图像尺寸是10mm×10mm，被离散采样为256×256个像素点，那么采样频率为25.6，系
统可采集最高频率为25.6/2（奈奎斯特频率）
% 每个像素大小为10/256mm，单位频率是0.1
kx=25.6/2; %频率如果为25.6/2则移动到最边缘；如果是25.6则为一个周期重新回来
ky=0;      %测试只在x方向(行移动)发生平移
```

傅里叶变换的性质

```
[M,N]=size(I);  
MM=linspace(0,10,256);% 1~10分为256个数，保存在MM中，10mm的空间分为256份  
NN=linspace(0,10,256);  
for i=1:N  
    for j=1:M  
        r(i,j)= exp(1i.*2.*pi.*kx.*MM(i)+ 1i.*2.*pi.*ky.*NN(j));  
    end  
end  
I2= I * r;  
f2 = fft2(I2);  
f2 = fftshift(log(1+abs(f2)));  
subplot(1, 3, 3);imshow(f2, []);title('平移后-频谱图2');
```



原图



频谱图



平移后-频谱图2

傅里叶变换的性质

■ 旋转性质

- ✓ 当图像旋转某一角度时，FT图像也旋转相同角度，反之也成立。
- ✓ 当变量 x, y, u, v 都用极坐标表示时，

$$\begin{array}{lll} x = \gamma \cos \theta & u = \omega \cos \varphi & f(x, y) \rightarrow f(\gamma, \theta) \\ y = \gamma \sin \theta & v = \omega \sin \varphi & F(u, v) \rightarrow F(\omega, \end{array}$$

$$\text{若 } f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \text{ 则 } f(\gamma, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$$

上式表明，对 $f(x, y)$ 旋转一个角度 θ_0 对应于将其傅里叶变换 $F(u, v)$ 也旋转相同的角度 θ_0 ， $F(u, v)$ 到 $f(x, y)$ 也有类似的过程。

傅里叶变换的性质

■ 旋转性质 【例】 二维离散傅里叶变换的旋转性。

```
clc; clear all; close all;
```

```
f = zeros(64,64);
```

```
for j=1:5
```

```
    f(:, j*10:j*10+1)=1;
```

```
end
```

```
F=fft2(f);
```

```
Fc=fftshift(F);
```

```
subplot(2,2,1), imshow(f,[ ]);title('原始图像');
```

```
subplot(2,2,2), imshow(abs(Fc),[ ]);title('图像傅里叶变  
换');
```

```
frotate=imrotate(f,45);% 图像旋转
```

```
Frotate=fft2(frotate);
```

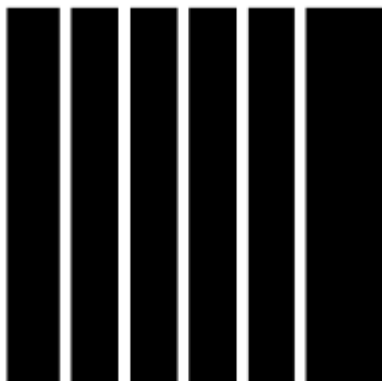
```
Fc2=fftshift(Frotate);% 图像旋转后做傅里叶变换
```

```
subplot(2,2,3), imshow(frotate,[ ] );title('图像旋转');
```

```
subplot(2,2,4), imshow(abs(Fc2),[ ]);title('图像旋转后傅里叶');
```

傅里叶变换的性质

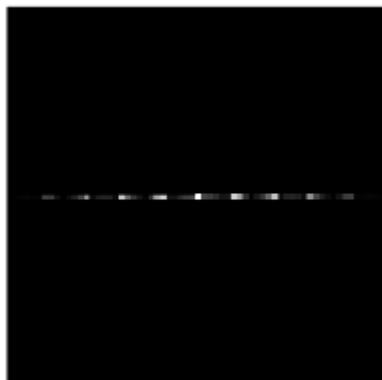
旋转性质



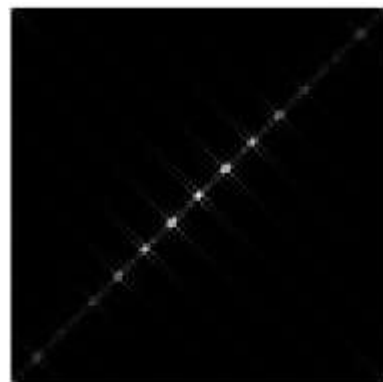
原始图像



旋转后图像



原图像傅里叶变换



旋转后图像的傅里叶变换

傅里叶变换的性质

【例】二维离散傅里叶变换的旋转性。

```
%构造原始图像
```

```
I=zeros(256,256);I(28:228,108:148)=1;subplot(1,4,1);imshow(I)
```

```
%求原始图像的傅里叶频谱
```

```
J=fft2(I);F=abs(J);J1=fftshift(F);
```

```
subplot(1,4,2);imshow(J1,[5 50])
```

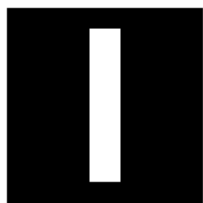
```
%对原始图像进行旋转
```

```
J=imrotate(I,315,'bilinear','crop');subplot(1,4,3);imshow (J)
```

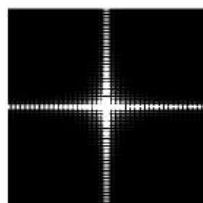
```
%求旋转后图像的傅里叶频谱
```

```
J1=fft2(J);F=abs(J1);J2=fftshift(F);
```

```
subplot(1,4,4);imshow(J2,[5 50])
```



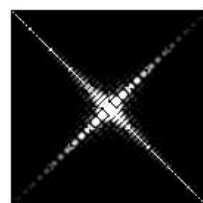
(a)原始图像



(b)原图像的傅里叶频谱



(c)旋转后的图像



(d)旋转后图像的傅里叶频谱

图 二维离散傅里叶变换的旋转性

傅里叶变换的性质

■ 分配律

根据傅里叶变换对的定义可得到:

$$F\{f_1(x, y) + f_2(x, y)\} = F\{f_1(x, y)\} + F\{f_2(x, y)\}$$

上式表明傅里叶变换和反变换对加法满足分配律，但对乘法则不满足，即有：

$$F\{f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)\} \neq F\{f_1(x, y)\} \cdot F\{f_2(x, y)\}$$

傅里叶变换的性质

■ 尺度定理

空域变量的扩展导致频域变量的压缩及幅值的变化，反之也成立。

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v)$$
$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

■ 线性定理

傅里叶变换是线性变换

$$af(x, y) + bg(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v) + bG(u, v)$$

若 $F[f_i(t)] = F_i(\omega)$ ，则

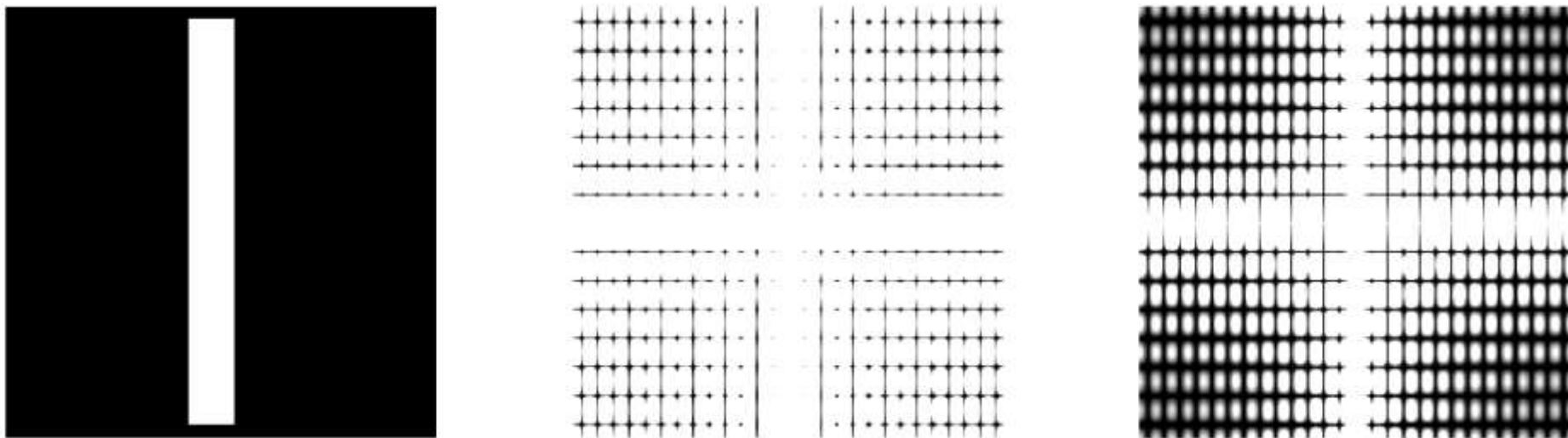
$$F\left[\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n a_i F_i(\omega)$$

傅里叶变换的性质

【例】比例尺度展宽。

```
I=zeros(256,256);I(8:248,110:136)=255;  
% 原始图像的傅里叶频谱  
J3=fft2(I);F2=abs(J3);J4=fftshift(F2);  
% 乘以比例尺度  
a=0.1;  
for i=1:256  
    for j=1:256  
        I(i,j)=I(i,j)*a;  
    end  
end  
% 比例尺度展宽后的傅里叶频谱  
J2=fft2(I);F1=abs(J2);J3=fftshift (F1);  
figure  
subplot(1,3,1),imshow(I)  
subplot(1,3,2),imshow(J4,[5 30])  
subplot(1,3,3),imshow(J3,[5 30])
```

傅里叶变换的性质



可以看出，当在水平方向扩展时，频谱中方向的零点数以相同的间隔增加。

傅里叶变换的性质

【例】图像乘以 e^{-1} ，使图像亮度整体变暗，求其频谱图。

程序如下：

```
I=imread('liftingbody.png');
```

```
P=I*exp(-1);
```

```
P1=fftshift(fft2(P));
```

```
subplot(1,3,1),imshow(I)
```

```
subplot(1,3,2),imshow(P)
```

```
subplot(1,3,3),imshow( log(abs(P1)),[8,10])
```

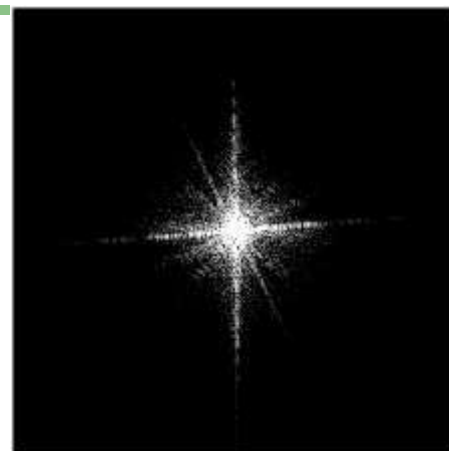
傅里叶变换的性质



(a)原始图像



(b)变暗后的图像



(c)变暗后中心移到零点的频谱图

图变暗后图像及其频谱图

将图（a）中的函数乘以 e^{-1} ，结果如图（b）所示。对亮度平均变暗后的图像进行傅里叶变换，将坐标原点移动到频谱图的中心。结果如图（c）所示。比较图（b）和（c）可以看出：**当画面亮度变暗后，中心低频分量变小**。因此可以看出中心低频分量代表了画面的平均亮度。当画面的平均亮度发生变化时，相应频谱图中心的低频分量也会发生变化。

傅里叶变换的性质

■ 平均值

对一个2-D离散函数 $f(x, y)$ ，其平均值可用下式表示：

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

其傅里叶变换在原点的频谱分量为：

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{x}{M} \cdot 0 + \frac{y}{N} \cdot 0)} = MN \left[\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \right] = MN \bar{f}(x, y)$$

两式比较可得：
$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} F(0,0)$$

也就是说，频谱的直流成分的 $\frac{1}{MN}$ 等于图像平面的亮度平均值。在使用诸如高通滤波器的场合，值会衰减，因为图像的亮度在很大程度上受到影响，采用对比度拉伸的方法可以缓和这种衰减。

傅里叶变换的性质

■ 卷积定理

函数卷积的傅里叶变换是函数傅里叶变换的乘积。

如果 $f_1(x)$ 的傅里叶变换是 $F_1(\omega)$ ， $f_2(x)$ 的傅里叶变换是 $F_2(\omega)$ ，那么时域中卷积定理可表示为

$$f_1(x) * f_2(x) \Leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

频域中卷积定理可表示为

$$f1(x) \cdot f2(x) \Leftrightarrow F1(\omega) * F2(\omega)$$

一个域中的卷积对应于另一个域中的乘积。

傅里叶变换的性质

卷积定理的证明

$$f_1(x) * f_2(x) \Leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

两个信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积定义为:

$$\begin{aligned} & (f_1 * f_2)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

证明: $F[f_1(t) * f_2(t)]$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega[(t-\tau)+\tau]} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) F_2(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned}$$

傅里叶变换的性质

■ 二维卷积定理

二维卷积定理设

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$

$$g(x, y) \Leftrightarrow G(u, v)$$

则

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot G(u, v)$$

$$f(x, y) \cdot g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v)$$

傅里叶变换的性质

■ 二维卷积定理

设两个二维离散信号（或者图像）分别是： $f(x,y)$ 大小是 $A \times B$ ， $g(x,y)$ 图像大小是 $C \times D$ ，做二维卷积时，结果的尺寸 $(M, N) = (A + C - 1, B + D - 1)$

$$f(x, y) * g(x, y) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(m, n) g(x - m, y - n)$$

式中 $x = 0, 1, \dots, M - 1, y = 0, 1, \dots, N - 1; M = A + c - 1, N = B + D - 1$

傅里叶变换的性质

■ 二维卷积定理

对上式两边进行傅里叶变换有

$$\begin{aligned} F\{f(x, y) * g(x, y)\} &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) g(x-m, y-n) \right\} \exp[-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp[-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})] \cdot \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} g(x-m, y-n) \exp[-j2\pi(\frac{u(x-m)}{M} + \frac{v(y-n)}{N})] \\ &= F(u, v)G(u, v) \end{aligned}$$

这就是空间域卷积定理。

傅里叶变换的性质

【卷积定理】

【例】使用傅里叶变换完成二维卷积。

注意观察程序运行得到的结果c1和c2。

```
f=[8,1,6;3,5,7;4,9,2];
```

```
g=[1,1,1;1,1,1;1,1,1];
```

```
f(8,8)=0; g(8,8)=0;
```

```
c=ifft2(fft2(f).*fft2(g));
```

```
c1=c(1:5,1:5)
```

%利用conv2(二维卷积函数)校验

```
a=[8,1,6;3,5,7;4,9,2];
```

```
b=[1,1,1;1,1,1;1,1,1];
```

```
c2=conv2(a,b)
```

c1 =

8.0000	9.0000	15.0000	7.0000	6.0000
11.0000	17.0000	30.0000	19.0000	13.0000
15.0000	30.0000	45.0000	30.0000	15.0000
7.0000	21.0000	30.0000	23.0000	9.0000
4.0000	13.0000	15.0000	11.0000	2.0000

c2 =

8	9	15	7	6
11	17	30	19	13
15	30	45	30	15
7	21	30	23	9
4	13	15	11	2

傅里叶变换的性质

■ 相关定理

$$f(x, y) \circ g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot G^*(u, v)$$

$$f(x, y) \cdot g^*(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ G(u, v)$$

* 表示取复共轭

自相关与功率谱的关系

$$f(x, y) \circ f(x, y) \Leftrightarrow |F(u, v)|^2$$

$$|f(x, y)|^2 \Leftrightarrow F(u, v) \circ F(u, v)$$

数字图像傅里叶变换的频谱分布

数字图像的二维离散傅里叶变换所得结果的频率成分如下图所示，**左上角为直流成分**，**变换结果的四个角的周围对应于低频成分**，**中央部位对应于高频部分**。为了便于观察谱的分布，使直流成分出现在窗口的中央，可采用图示的换位方法，根据傅里叶频率位移的性质，只需要用 $f(x,y)$ 乘上因子进行傅里叶变换即可实现，变换后的坐标原点移动到了窗口中心，围绕坐标中心的是低频，向外是高频。

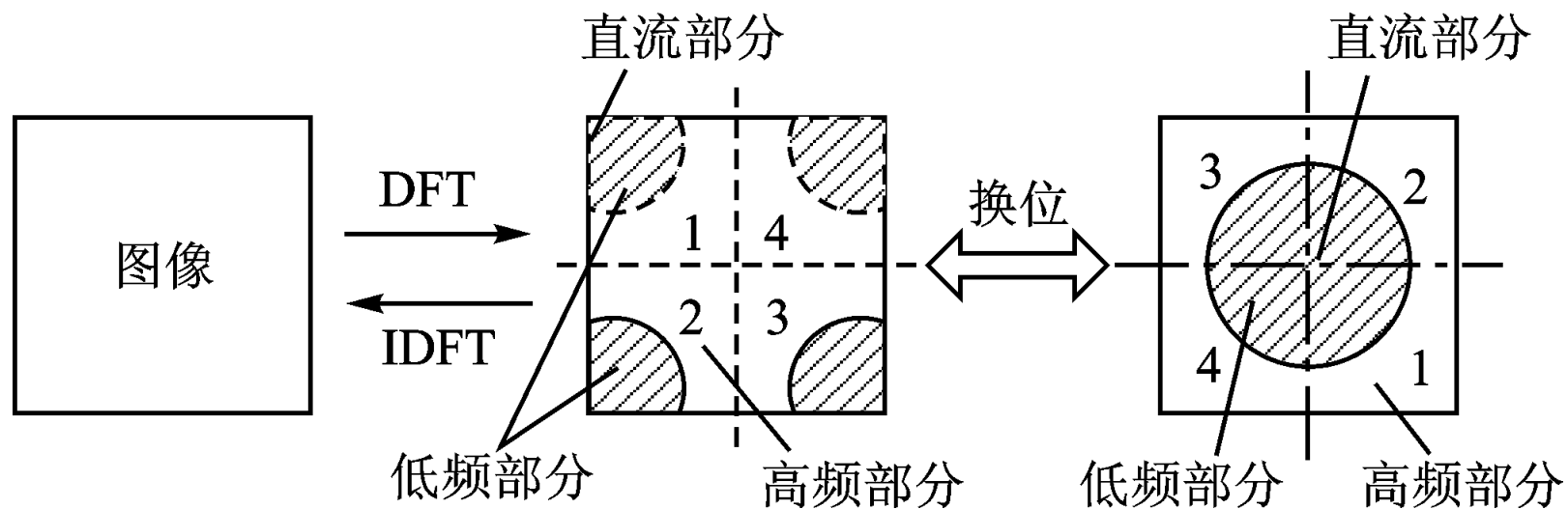
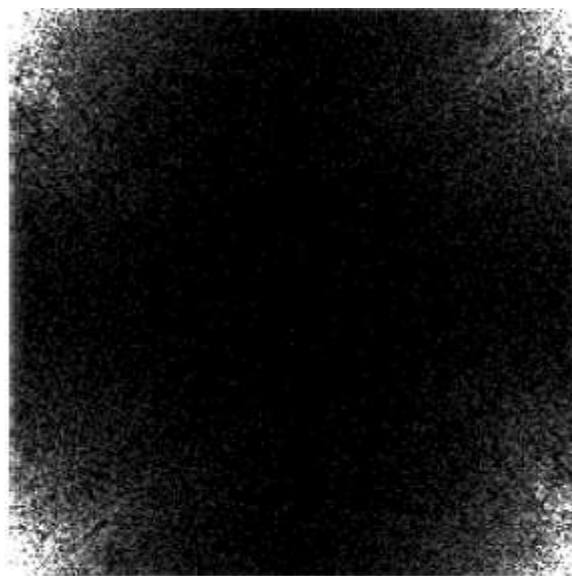


图 二维傅里叶变换的频谱分布

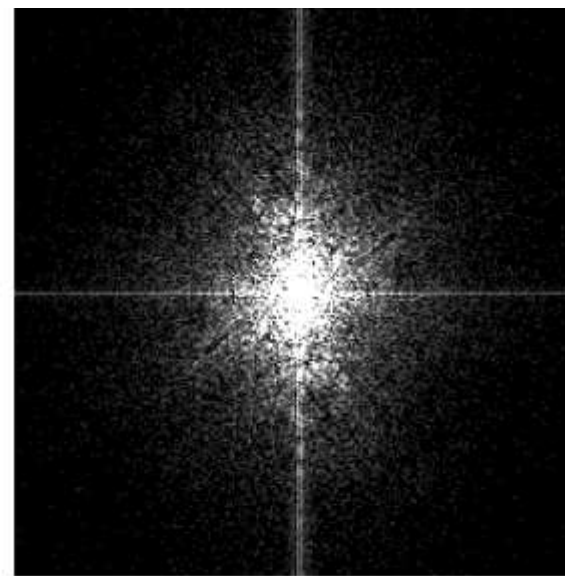
数字图像傅里叶变换的频谱分布



(a) 原图像



(b) 傅里叶谱



(c) 原点移到中心的谱

图 频率位移示例

数字图像傅里叶变换的频谱分布

```
clc
clear all;
close all;
gray_img= imread( 'liftingbody.png'); % 读取灰度图像
FT_img= fft2(gray_img); % 二维傅里叶正变换
FTS_img= fftshift(FT_img); % 实现频谱图的中心对称
FTS_log_img= log(1 + abs(FTS_img)); % 频谱图对数运算
Inverse_I= ifftshift(FTS_img); % 反移频谱中心
Inverse_img= real(ifft2 (Inverse_I)) ;% 傅里叶反变换 并取变换结果的实部
Inverse_FT_img= uint8(Inverse_img) ;% 转换为8 位图像
subplot( 1,3,1); imshow(gray_img); title ('原灰度图像 ');
subplot( 1,3 ,2); imshow(FTS_log_img,[]) ;title( '中心对称傅里叶频谱图 ');
subplot( 1,3 ,3) ;imshow(Inverse_FT_img) ;title('反变换结果图像');
```


数字图像傅里叶变换的频谱分布

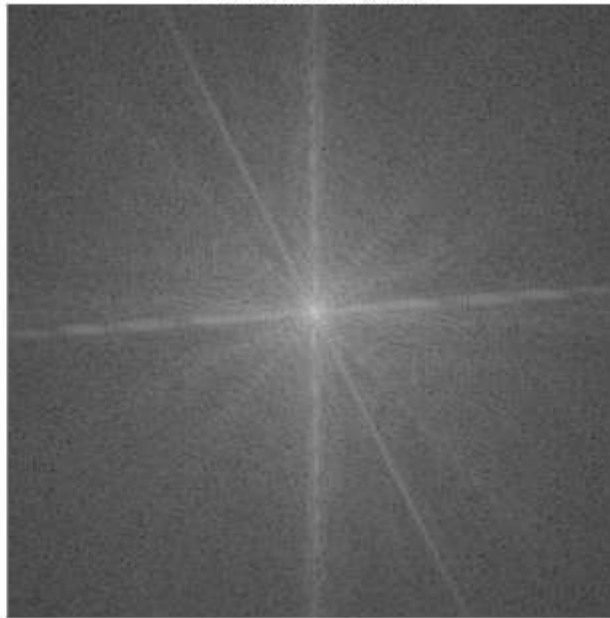
- (1) `fftshift(F)` : 将低频在4个角的非中心对称傅里叶频谱图, 通过对其对角的平移, 使低频部分移到中心, 实现频谱图中心对称。
- (2) `ifftshift(F)` : 将中心对称傅里叶频谱图 F 分块平移成低频在4个角 (非中心对称) 的傅里叶频谱。
- (3) `ifft2(F)` : 对傅里叶频谱 F 进行傅里叶反变换。
- (4) `real(cI)` : 求傅里叶反变换结果 (复数结果) cI 的实部值

数字图像傅里叶变换的频谱分布

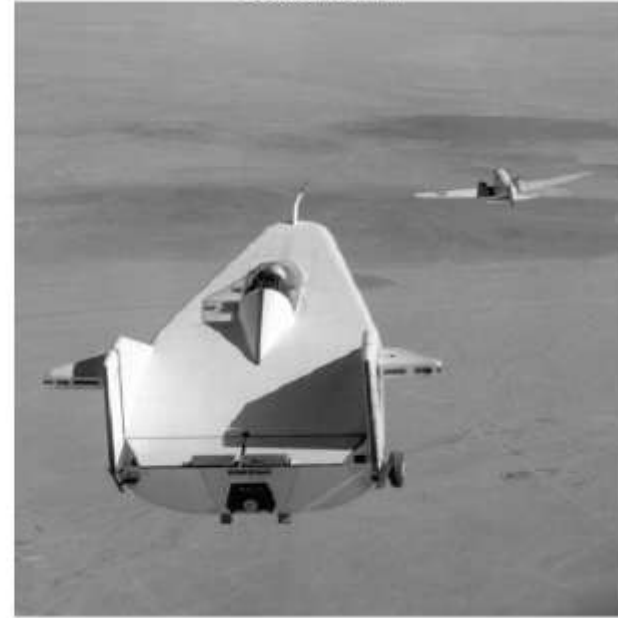
原灰度图像



中心对称傅里叶频谱图



反变换结果图像



对图像进行傅里叶变换的意义

利用傅里叶变换将空间域的图像变换到频率域，即可得到该图像所含频率分量分布情况的傅里叶频谱，进而可以利用频率域的图像处理方法对傅里叶频谱进行处理，其意义如下。

(1)简化计算。在空间域中处理图像时所进行的复杂的卷积运算，等同于在频率域中简单的乘积运算。

(2)将某些只能在频率域处理的特定应用需求进行转换，比如频率域图像特征提取、数据压缩、纹理分析、水印嵌入等。

(3)在用频谱图表示的频率域图像中，中心部位是能量集中的低频特征，反映的是图像的平滑部分。随着不断远离频谱图的中心位置，对应于空间图像中变化越来越快的细节、边缘、结构复杂区域、突变部位和噪声等高频成分逐渐加强。所以，在频率域中滤波的概念更为直观，更容易理解；即某些在空间域中难以处理或处理起来比较复杂的问题，在频率域却比较容易处理。

DFT在图像处理中的应用

- 描述图像信息
- 在图像滤波中的应用
- 在图像压缩中的应用

DFT在图像处理中的应用

(1) 描述图像信息

描绘子 (Descriptor) : 从原始图像中产生的数值、符号或者图形称为图像的特征，反映了原图像的重要信息和主要特性，以便让计算机有效地识别目标。这些表征图像特征的一系列符号就称之为描述子；

描绘子的几何变换不变性: 图像内容不变，仅产生几何变换的情况下，描绘子不变，以保证识别结果的稳定性。DFT在图像特征提取方面的应用较多，傅里叶描绘子是将DFT系数直接作为特征使用。

DFT在图像处理中的应用

(2) 在图像滤波中的应用

经过DFT后，傅里叶频谱的中间部分为低频部分，越靠外频率越高。因此，可以在应用DFT后设计相应的滤波器，实现低通滤波、高通滤波处理。

(3) 在图像压缩中的应用

高频反映细节、低频反映景物概貌，往往认为可将高频系数置为0，降低数据量。同时由于人眼的惰性，合理地设置高频系数为0，图像质量一定范围内的降低不会被人眼察觉到。因此，DFT可以方便地进行压缩编码。

目录

- 3.1 数学基础
- 3.2 傅里叶变换
- 3.3 频率域图像处理

频率域图像处理

二维离散傅里叶变换很好地描述了二维离散信号的空间域与频域之间的关系，因此，对于那些在空间域中表述起来比较困难，甚至是不太可能实现的图像处理问题，可以先通过对图像进行离散傅里叶变换将图像变换到频率域，然后利用适当的频率域图像处理方式对图像进行处理，处理完后再将它转换回空间域中。

基本实现思想

由傅里叶频谱的特性可知， u 和 v 同时为0时的频率成分对应于图像的平均灰度级。当从(傅里叶)变换的原点离开时，低频对应图像的慢变化分量，比如一幅图像中较平坦的区域；当进一步离开原点时，较高的频率开始对应图像中变化越来越快的灰度级，它们反映了一幅图像中物体的边缘和灰度级突发改变(如噪声)部分的图像成分。

频率域图像增强正是基于这种机理，通过对图像的傅里叶频谱进行低通滤波(使低频通过，使高频衰减)来滤除噪声；通过对图像的傅里叶频谱进行高通滤波(使高频通过，使低频衰减)突出图像中的边缘和轮廓。

基本实现思想

频率域图像处理步骤:

(1) 设 $f(x, y)$ 为 $M \times N$ 的图像, 对 $f(x, y)$ 进行二维傅里叶变换, 得到原点在 $(0, 0)$ 的傅里叶频谱 $F(u, v)$

(2) 将原点在 $(0, 0)$ 的傅里叶频谱 $F(u, v)$ 进行平移。即先将 $F(u, v)$ 分成上下两部分, 然后将上半部分向下平移到下半部分位置, 将下半部分向上平移到上半部分位置; 接着将其中间结果分成左右各半, 将左半部分向右平移到右半部分位置, 将右半部分向左平移到左半部分位置, 就可得到原点在 $(M/2, N/2)$ 的傅里叶频谱 $F'(u, v)$ 。

基本实现思想

频率域图像处理步骤:

(3) 进行频率域滤波，也即用设计的滤波器函数（又称转移函数） $H(u,v)$ 乘以原点在 $(M/2, N/2)$ 的傅里叶频谱 $F'(u,v)$ ，根据式 $G'(u,v) = F'(u,v)H(u,v)$ 可得 $G'(u,v)$ 。

(4) 将 $G'(u,v)$ 的原点平移回 $(0,0)$ 可得 $G(u,v)$ 。

(5) 对 $G(u,v)$ 进行傅里叶反变换，并取变换结果的实部，即计算 $F^{-1}[G(u,v)]$ 并取计算结果的实部，就可得到通过频率域滤波后的结果图像 $g(x,y) = F^{-1}[G(u,v)]$

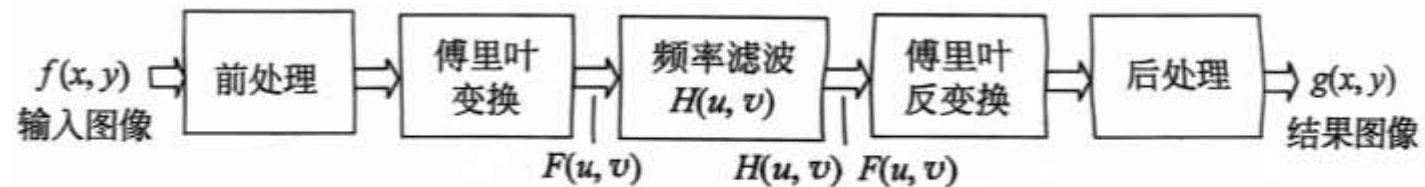
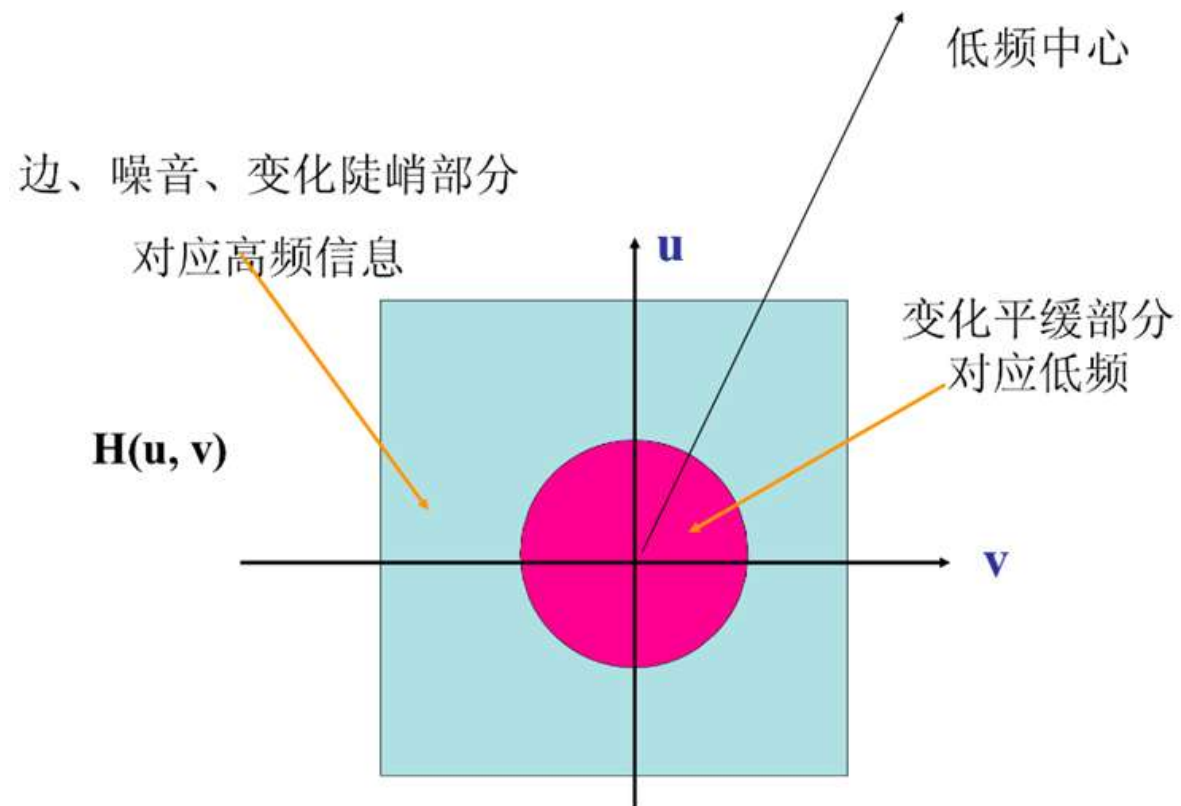


图 频率域图像增强步骤

基本实现思想

■ 频谱增强的原理



滤波器函数的设计

假设原图像 $f(x,y)$ 经傅里叶变换为 $F(u,v)$ ，频率域图像处理就是选择合适的滤波器函数 $H(u,v)$ 对 $F(u,v)$ 的频谱成分进行调整，然后经傅里叶反变换得到空间域的图像 $g(x,y)$ 。因此，频率域图像处理的关键是设计合适的滤波器函数 $H(u,v)$ 。

滤波器函数 $H(u,v)$ 的设计方法：

- (1) 先凭直观感觉选择一个理想的滤波器模型，然后通过反复的滤波实验和参数修正来逼近并设计出实际的滤波器。
- (2) 利用频率成分和图像外表之间的对应关系选择频率域滤波器。
- (3) 基于数学和统计准则设计频率域滤波器。

滤波器函数的设计

对于大小为 $M \times N$ 的函数 $f(x,y)$ 和 $h(x,y)$ ，其卷积形式表示为：

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N f(m, n) h(x - m, y - n)$$

用 $F(u,v)$ 和 $H(u,v)$ 分别表示 $f(x,y)$ 和 $h(x,y)$ 的傅里叶变换，则有傅里叶变换变换对：

$$F(u, v) * H(u, v) \Leftrightarrow f(x, y) h(x, y)$$

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) H(u, v)$$

也即，空间域的卷积在频率域简化为相乘，频率域的卷积在空间域简化为相乘；有时也可以将频率域的滤波器函数变换到空间域，然后再在空间域对图像进行滤波运算。

频率域低通滤波

在频率域中，图像中的噪声和边缘对应于傅里叶频谱的高频部分，选择能使低频通过、使高频衰减的转移函数，就可以实现低通滤波，达到滤除噪声的目的。

■ 低通滤波

- ✓ 从信号频谱角度来看，信号的缓慢变化部分在频率域属于低频部分，而信号的快速变化部分在频率域是高频部分。
- ✓ **图像的边缘以及噪声干扰的频率分量都处于频率域较高的部分**，可以采用低通滤波的方法来去除噪声。频域低通滤波法可以去除或削弱图像的高频成分，以去掉噪声使图像平滑。
- ✓ 低通滤波是一个以牺牲图像清晰度为代价来减少噪声干扰效果的修饰过程。

理想低通滤波器 (ILPF)

理想低通滤波是指小于 D_0 的频率可以完全不受影响地通过滤波器，而大于 D_0 的频率则完全通不过。理想低通滤波器使得输入信号在通带内所有频率分量完全无损地通过，而在阻带内所有频率分量完全衰减。

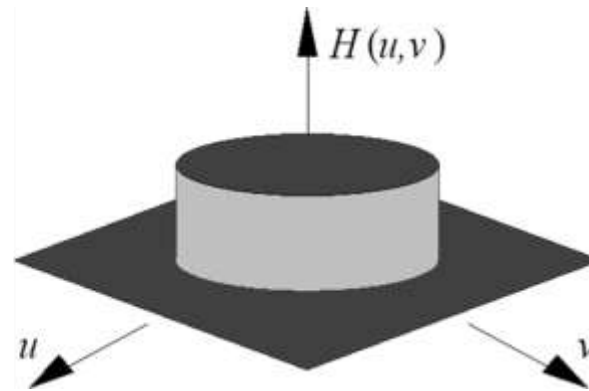
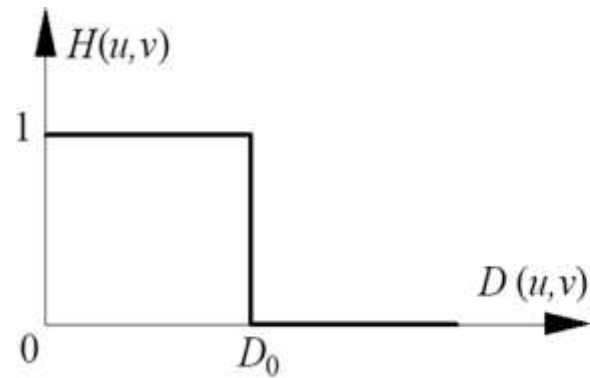
低通滤波的效果是**图像去噪声平滑增强**，但同时也抑制了图像的边界，造成图像不同程度上的模糊。

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$H(u, v)$: 传递函数; D_0 : 截止频率; $D(u, v)$ 是从点 (u, v) 到频率平面原点的距离。

设已经将傅里叶频谱的原点平移到 $(M/2, N/2)$ ，则点 (u, v) 到频率平面原点 $(M/2, N/2)$ 的距离为 $D(u, v) = [(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2]^{1/2}$ 。

理想低通滤波器 (ILPF)



理想低通滤波器 (ILPF)

构建一个大小为 484×484 ，截止频率为80的理想滤波器的透视图如图所示。

```
M = 484;           %滤波器的行数
N = 484;           %滤波器的列数
u = -M/2:(M/2-1);
v = -N/2:(N/2-1);
[U,V] = meshgrid(u,v);
D = sqrt(U.^2+V.^2);
D0 = 80;           %截止频率设置为80
H = double(D<=D0); %理想低通滤波器
mesh(U,V, H);
```

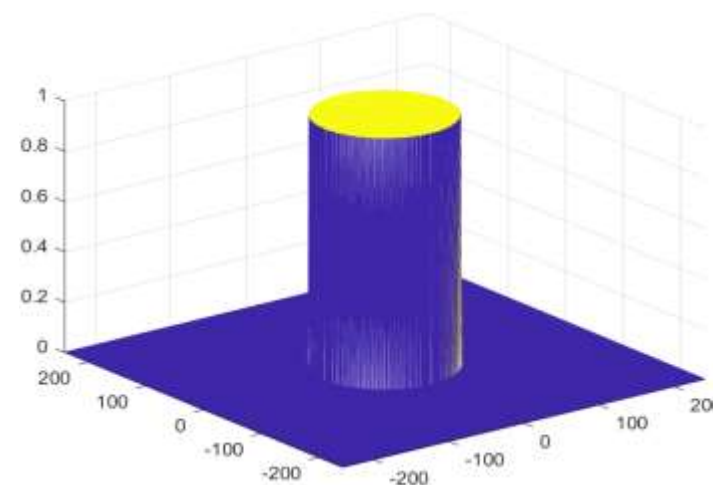


图 理想低通滤波器变换函数的透视图

理想低通滤波器 (ILPF)

利用滤波器对图像进行理想低通滤波，示例代码如下：

```
I = imread('eight.tif');
I = im2double(I);
M = 2*size(I,1);           %滤波器的行数
N = 2*size(I,2);           %滤波器的列数
u = -M/2:(M/2-1);
v = -N/2:(N/2-1);
[U,V] = meshgrid(u,v); %基于向量u和v中包含的坐标来返回二维网格坐标。
D = sqrt(U.^2+V.^2);
D0 = 80;                   %截止频率设置为80
H = double(D<=D0);         %理想低通滤波器
J = fftshift(fft2(I,size(H,1),size(H,2))); %时域图像转换到频域
K = J.*H;                  %滤波处理
L = ifft2(ifftshift(K));    %傅里叶反变换
L = L(1:size(I,1),1:size(I,2));
figure;
subplot(1,2,1);imshow(I);  %显示原图像
subplot(1,2,2);imshow(L);  %显示滤波后的图像
```



(a) 原始图像

(b) 理想低通滤波器处理后图像

图 理想低通滤波处理前后对比图

理想低通滤波器 (ILPF)

经理想低通滤波器处理后的输出图像，其灰度值剧烈变化处产生的震荡，即周围伴随着**环形波纹**，这就是理想低通滤波器因其突变的滤波性质产生的**振铃效应**。理想低通滤波器会使得图像变模糊。**截止频率 D_0 越低，滤除噪声越彻底，高频分量损失越严重，图像就越模糊。**



(a) 原始图像

(b) 理想低通滤波器处理后图像

图 理想低通滤波处理前后对比图

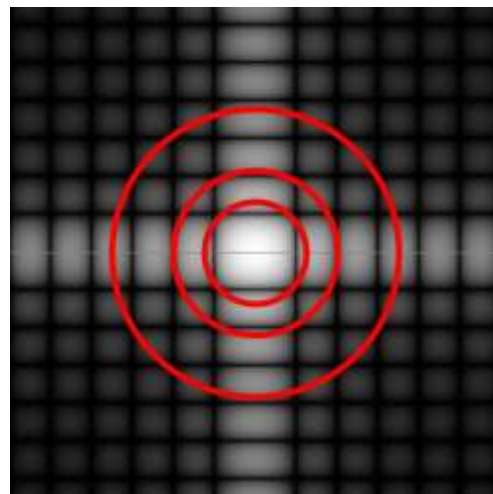
理想低通滤波器 (ILPF)

■ 如何确定理想低通滤波器的截止频率 D_0 ?

当 D_0 变化时, 通过以 D_0 为半径的圆形低频区域的能量 E_0 和总能量 E_T 比值与 D_0 有关。

以 256×256 的Lena图像为例

D_0	5	10	20	50
E_0/E_T	0.9025	0.9223	0.9323	0.9412



理想低通滤波器 (ILPF)

- 有噪声的Lena图像和理想低通滤波器滤波效果（截止频率 $D_0=5$ ）



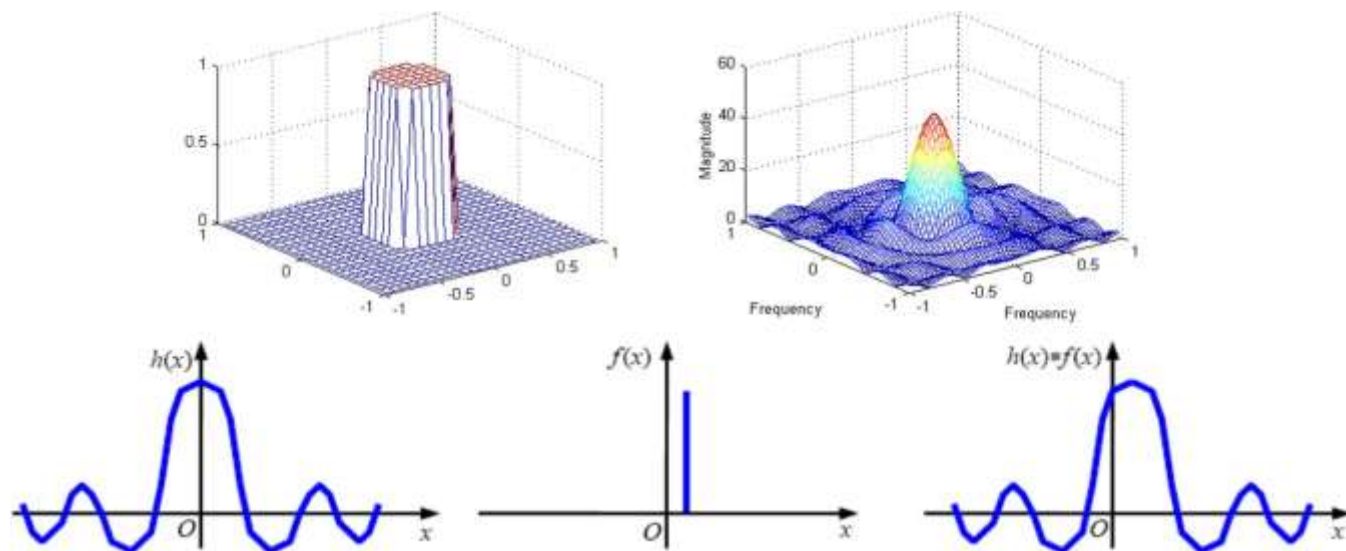
- 理想低通滤波器滤波效果， $D_0=10$ 、 $D_0=20$ 、 $D_0=50$



理想低通滤波器 (ILPF)

■ 理想低通滤波器的缺点

- ✓ **模糊**：频域中的滤波相当于空域中的卷积，卷积的邻域平均效果导致图像的模糊。
- ✓ **振铃效应**：频域中剧烈的滤波（小的 D_0 ），在空域 $h(x, y)$ 中发生震荡，在 $g(x, y)$ 边缘处产生大量的环。所谓“振铃”，就是指输出图像的灰度剧烈变化处产生的震荡，就好像钟被敲击后产生的空气震荡。



理想低通滤波器 (ILPF)

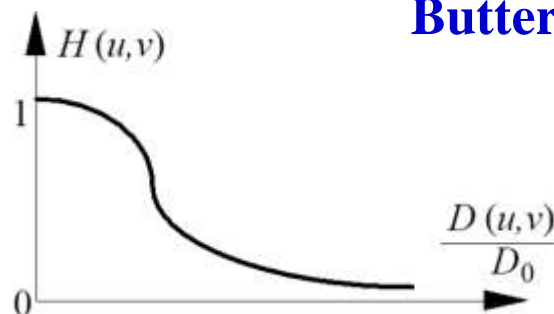
■ 理想低通滤波器的缺点

- ✓ 振铃效应在图像上表现为边缘处的波纹。
- ✓ 振铃效应是由于信号截断（不连续）造成的。



巴特沃斯低通滤波器

Butterworth Lowpass Filtering, BLPF



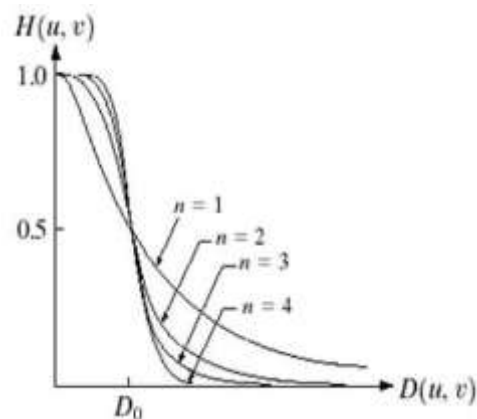
- 传递函数

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

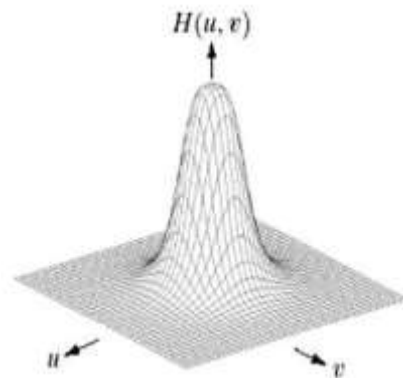
- D_0 为截止频率， n 为巴特沃斯函数的阶数； $D(u, v)$ 为频率平面从原点到点 (u, v) 的距离，且 $D(u, v)$ 由 $D(u, v) = [(u - \frac{M}{2})^2 + (v - N/2)^2]^{1/2}$ 给出。
- 通常将小于 $H(u, v)$ 最大值一定比例的点作为截止频率点。
- 选择1: $H(u, v) = 1/2$; 选择2: $H(u, v) = 1/\sqrt{2}$

巴特沃斯低通滤波器

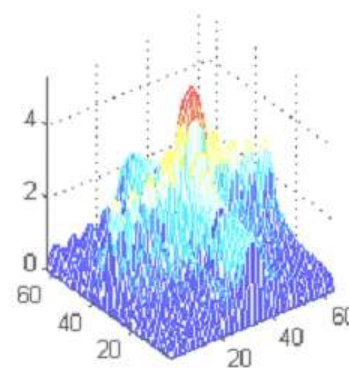
转移函数横截面图和透视图（阶数 n 为1~4）



(a) 转移函数



(b) 透视图



频谱幅度谱

透视图的含义：

只有那些位于该草帽型体内的频率范围的信号才能通过，而位于草帽型体外的频率成分都将被滤除掉。

巴特沃斯低通滤波器

- 模糊减少，增加了更多的高频信息。
- 滤波器是平滑连续的，减少了振铃现象。



巴特沃斯低通滤波器

%利用巴特沃斯低通滤波器进行图像去噪matlab编程

```
clc; clear all; close all;
```

```
img0=imread('lena.jpg');
```

```
[h, w, color]=size(img0);
```

```
if (color==3) % 如果输入图像是彩色图像, 将其转换成灰度图像
```

```
    img0=rgb2gray(img0);
```

```
end
```

```
Noisy_img = imnoise(img0,'salt & pepper',0.02); %噪声密度为0.02的椒盐噪声
```

```
f = double(Noisy_img);
```

```
FT_img = fft2(f); %傅里叶变换
```

```
FTS_img = fftshift(FT_img); % 平移频谱图为中心对称
```

```
D0=input('\n请输入非负的截止频率值(10/20/30) D0='); % 正整数
```

```
n=input('\n请输入巴特奥斯滤波器的阶数(1/2/3) n='); % 滤波器阶数1至3
```

巴特沃斯低通滤波器

```
M=fix(h/2); N=fix(w/2); % 将h/2和w/2分别向零方向(向下)取整

for u=1:h
    for v=1:w
        duv=sqrt((u-M)^2+(v-N)^2);
        huv=1/(1+(duv/D0)^(2*n)); % 计算巴特沃斯低通滤波器转移函数值
        huv_img(u,v)=huv*FTS_img(u,v); % 对傅里叶频谱进行滤波
    end
end
Inverse_I=ifftshift(huv_img); % 反移频谱中心
Inverse_img=real(ifft2(Inverse_I)); % 傅里叶逆变换，并取变换结果的实部
Inverse_H_img=uint8(Inverse_img); % 转换成8位图像

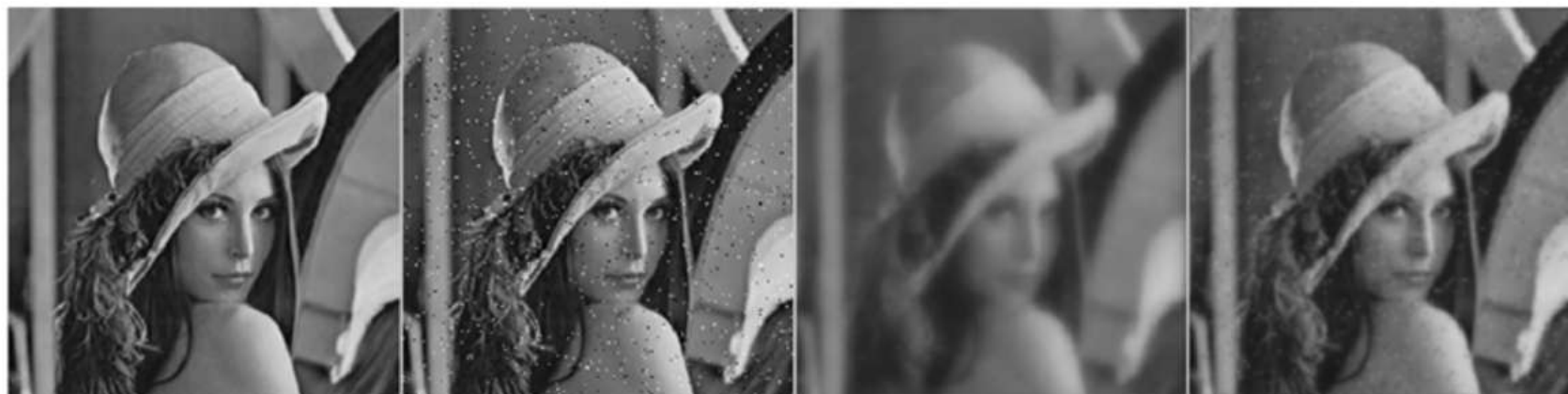
figure; subplot(1,3,1); imshow(img0); title('原图像');
subplot(1,3,2); imshow(Noisy_img); title('加入椒盐噪声图像');
subplot(1,3,3); imshow(Inverse_H_img); title('低通滤波结果图像');
```

巴特沃斯低通滤波器



截至频率 $D_0=10$ ，滤波器阶数 $n=2$

巴特沃斯低通滤波器



(a) 原图像 (b) 加椒盐噪声图像 (c) $D_0=10, n=1$ 图像 (d) $D_0=30, n=1$ 图像



(e) $D_0=10, n=2$ 图像 (f) $D_0=30, n=2$ 图像 (g) $D_0=10, n=3$ 图像 (h) $D_0=30, n=3$ 图像

利用巴特沃斯低通滤波器进行图像去噪实验结果

高斯低通滤波器

■ 二维高斯低通滤波器传递函数

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

其中， $D(u, v)$ 为频率平面从原点到点 (u, v) 的距离， σ 表示高斯曲线扩展的程度，且

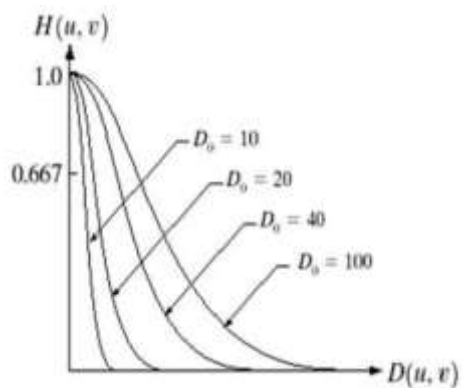
$D(u, v)$ 由下式给出： $D(u, v) = [(u - \frac{M}{2})^2 + (v - N/2)^2]^{1/2}$ 。

当 $\sigma=D_0$ 时，可得到高斯低通滤波器的一种更为标准的表示形式：

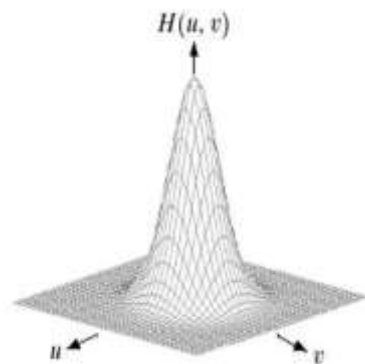
$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

高斯低通滤波器 (GLPF)

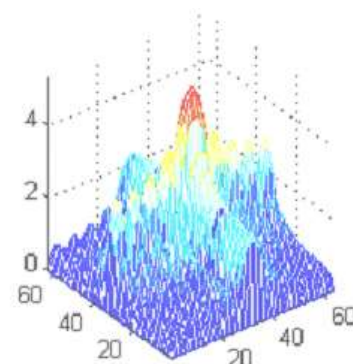
转移函数横截面图和透视图 ($D=10, 20, 40, 100$)



(a) 转移函数



(b) 透视图



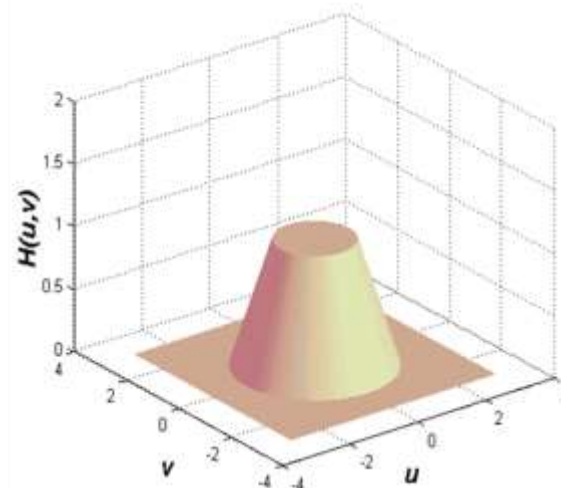
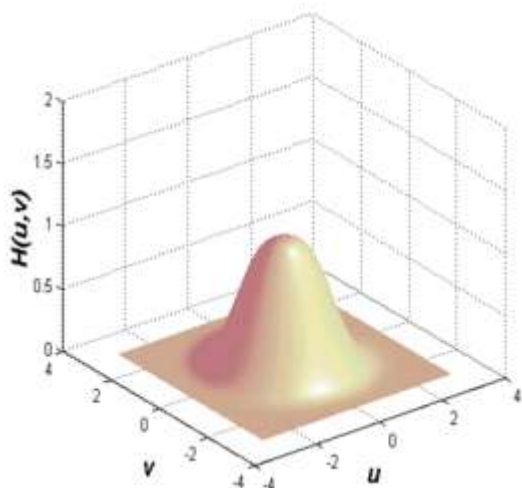
频谱幅度谱

透视图的含义是：

只有那些位于该草帽型体内的频率范围的信号才能通过，而位于草帽型体外的频率成分都将被滤除掉。

高斯低通滤波器 (GLPF)

- 其它低通滤波器还包括梯形低通滤波器、指数低通滤波器等。



频率域高通滤波

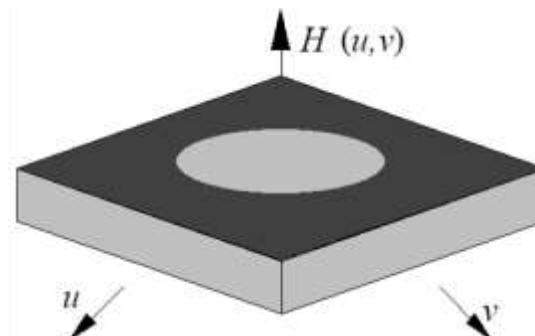
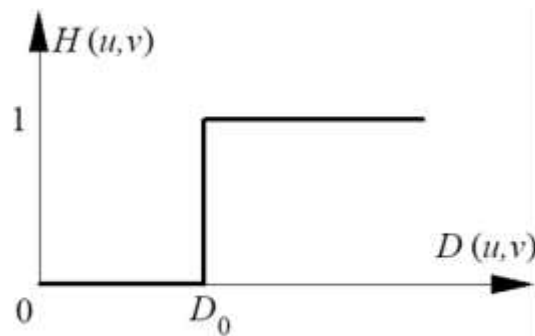
- 图像的边缘、细节主要在高频，图像模糊是由于高频成分较弱产生的。
- 为了消除模糊，突出边缘，可以采用高通滤波的方法，使低频分量得到抑制，增强高频分量。
- 高通滤波对应于空域处理中采用微分运算的图像锐化。

理想高通滤波器 (IHPF)

理想高通滤波形状与理想低通滤波器的形状正好相反。

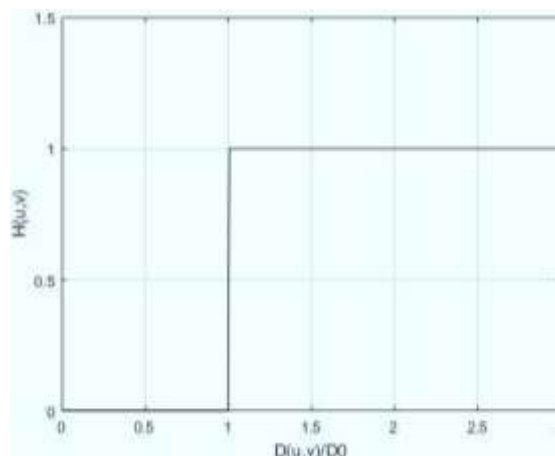
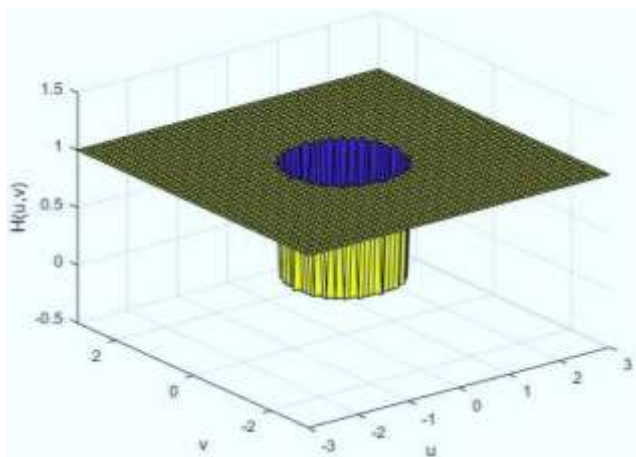
$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{当 } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{当 } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

以截止频率 D_0 为半径的圆外的所有频率分量无损地通过，圆内的所有分量完全衰减。



理想高通滤波器 (IHPF)

转移函数的横截面图和透视图



衰减以 D_0 为
半径的圆内
频率成分，
圆外频率成
份无损通过

透视图的含义是：

只有那些位于该圆柱体外的频率范围的信号才能通过，而位于圆柱体内的频率成分都将被滤除掉。

巴特沃斯高通滤波器

1. 巴特沃斯高通滤波器的转移函数定义

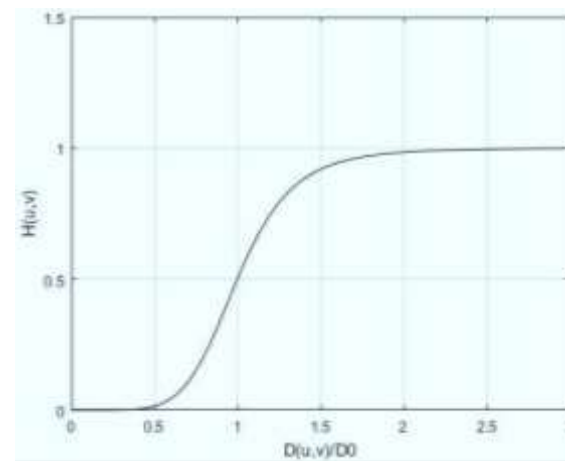
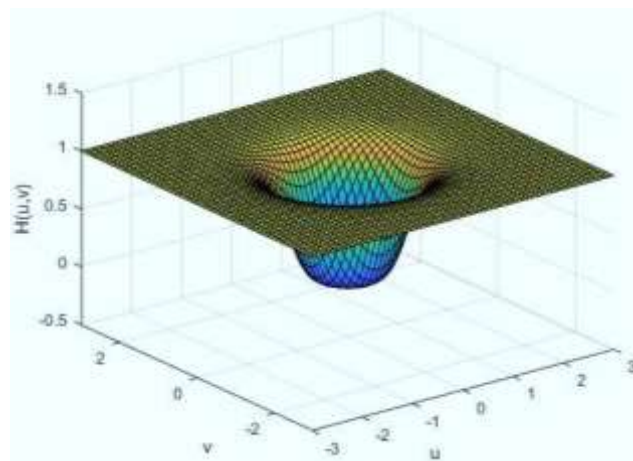
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$

其中， D_0 为截至频率； $D(u, v)$ 为频率平面从原点到点 (u, v) 的距离，且 $D(u, v)$ 由下式给出：

$$D(u, v) = [(u - \frac{M}{2})^2 + (v - N/2)^2]^{1/2}$$

巴特沃斯高通滤波器

2. 转移函数的横截面图和透视图

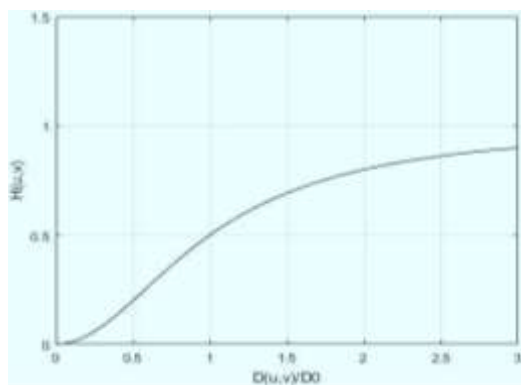
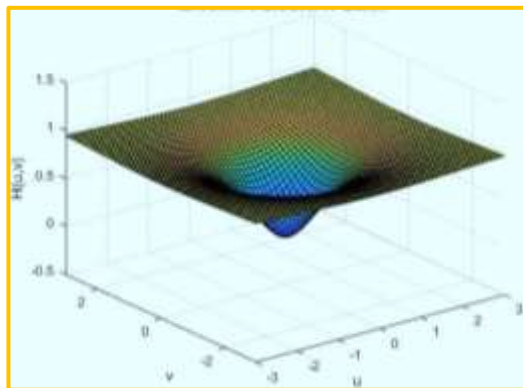


透视图的含义是：

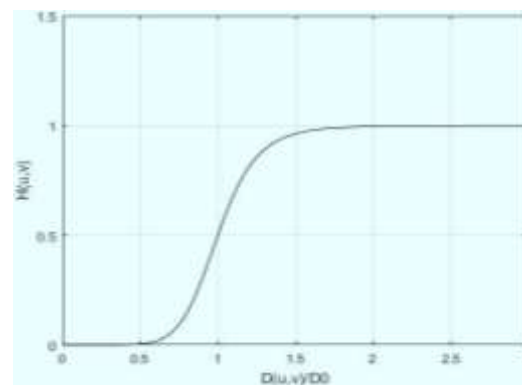
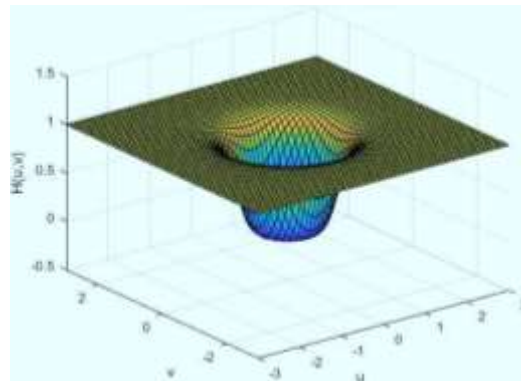
只有那些位于该倒立型草帽体外的频率范围的信号才能通过,而位于倒立型草帽体内的频率成分都将被滤除掉。

巴特沃斯高通滤波器

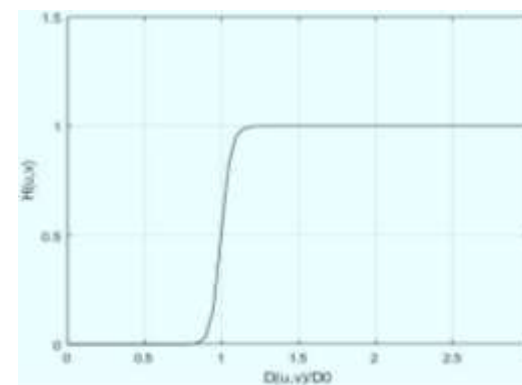
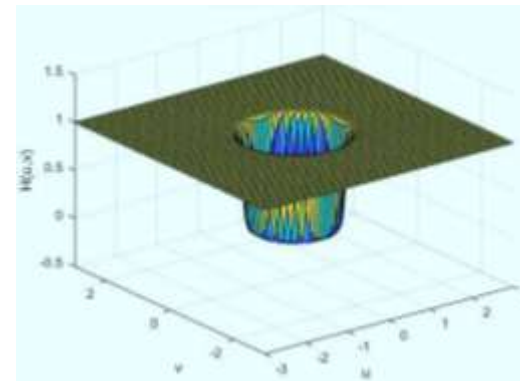
传递函数三维特性
及二维剖面图



$n=1$

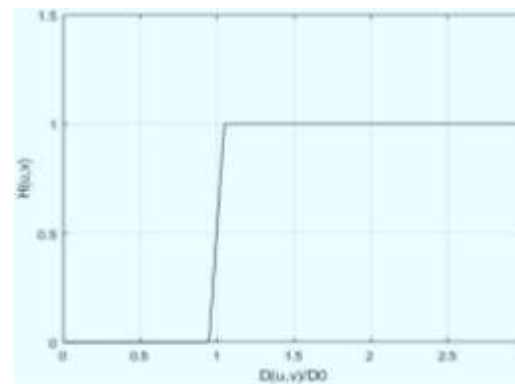
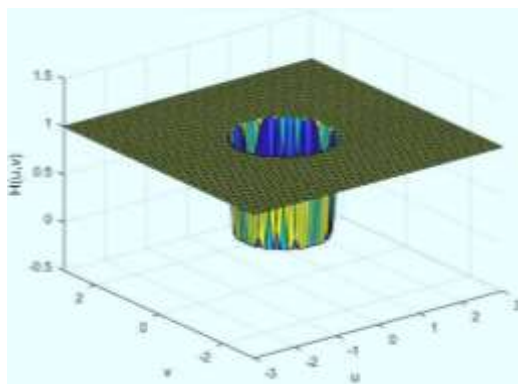


$n=4$



$n=1$
6

巴特沃斯高通滤波器



传递函数三维特性及二维剖面图（ $n=64$ ）

n 改变滤波器的形状： n 越大，滤波器越接近于理想滤波器

巴特沃斯滤波比理想高通滤波结果更平滑

高斯高通滤波器

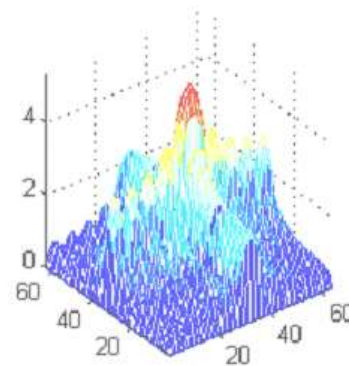
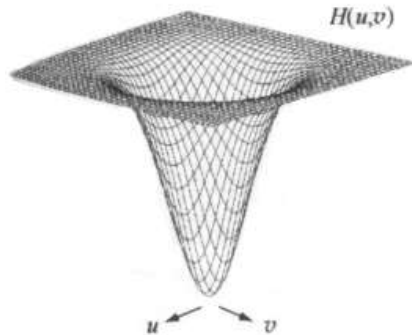
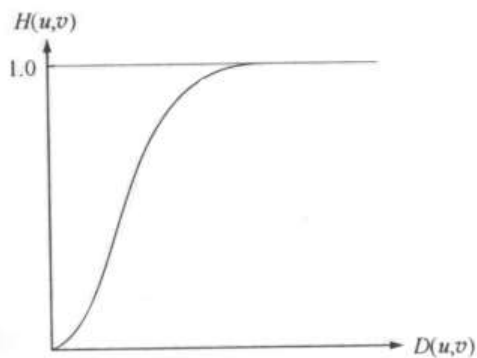
1. 高斯高通滤波器的转移函数定义

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

其中， $D(u, v)$ 为频率平面从原点到点 (u, v) 的距离，且 $D(u, v)$ 由下式给出： $D(u, v) = [(u - \frac{M}{2})^2 + (v - N/2)^2]^{1/2}$

高斯高通滤波器

2. 转移函数的横截面图和透视图



频谱幅度谱

透视图的含义是：

只有那些位于该倒立型草帽体外的频率范围的信号才能通过,而位于倒立型草帽体内的频率成分都将被滤除掉。

高斯高通滤波器

%利用高斯高通滤波器进行图像增强MatLab编程

```
clc; clear all; close all;
```

```
img0=imread('lena.jpg');
```

```
[h, w, color]=size(img0);
```

```
if (color==3) % 如果输入图像是彩色图像, 将其转换成灰度图像
```

```
    img0=rgb2gray(img0);
```

```
end
```

```
f = double(img0);
```

```
FT_img = fft2(f); % 傅里叶变换
```

```
FTS_img = fftshift(FT_img); % 平移频谱图为中心对称
```

```
D0=input('\n请输入非负的截止频率值(10/20/30/40) D0=') % 正整数
```

```
[h,w] = size(img0);
```

```
M=fix(h/2); N=fix(w/2); % 将h/2和w/2分别向零方向(向下)取整
```

```
d=2*D0^2;
```

高斯高通滤波器

```
for u=1:h
    for v=1:w
        duv=sqrt((u-M)^2+(v-N)^2);
        huv=1-exp(-duv^2/d);    % 计算高斯高通滤波器转移函数值
        huv_img(u,v)=huv*FTS_img(u,v); % 对傅里叶频谱进行滤波
    end
end
Inverse_I=ifftshift(huv_img); % 反移频谱中心
Inverse_img=real(ifft2(Inverse_I)); % 傅里叶逆变换，并取变换结果的实部
img1=f+Inverse_img;    % 形成结果图像
result_img=uint8(img1); % 转换成8位图像

figure;subplot(1,2,1); imshow(img0); title('原图像');
subplot(1,2,2); imshow(result_img); title('高斯高通滤波结果图像');
```

高斯高通滤波器



(a) 原图



(b) $D_0=20$



(c) $D_0=60$

随着截止频率 D_0 值的增大，增强效果进一步明显，即使对于细线条的头发丝，肉眼可能看出其细微的增强效果变化。但同时，随着 D_0 的增大，低频信息减少较多，图像中灰度剧烈变化的区域也出现了微弱的振铃现象(也即，图像灰度剧烈变化处产生的震荡，就好像钟被敲击后产生的空气震荡)。

带阻滤波器

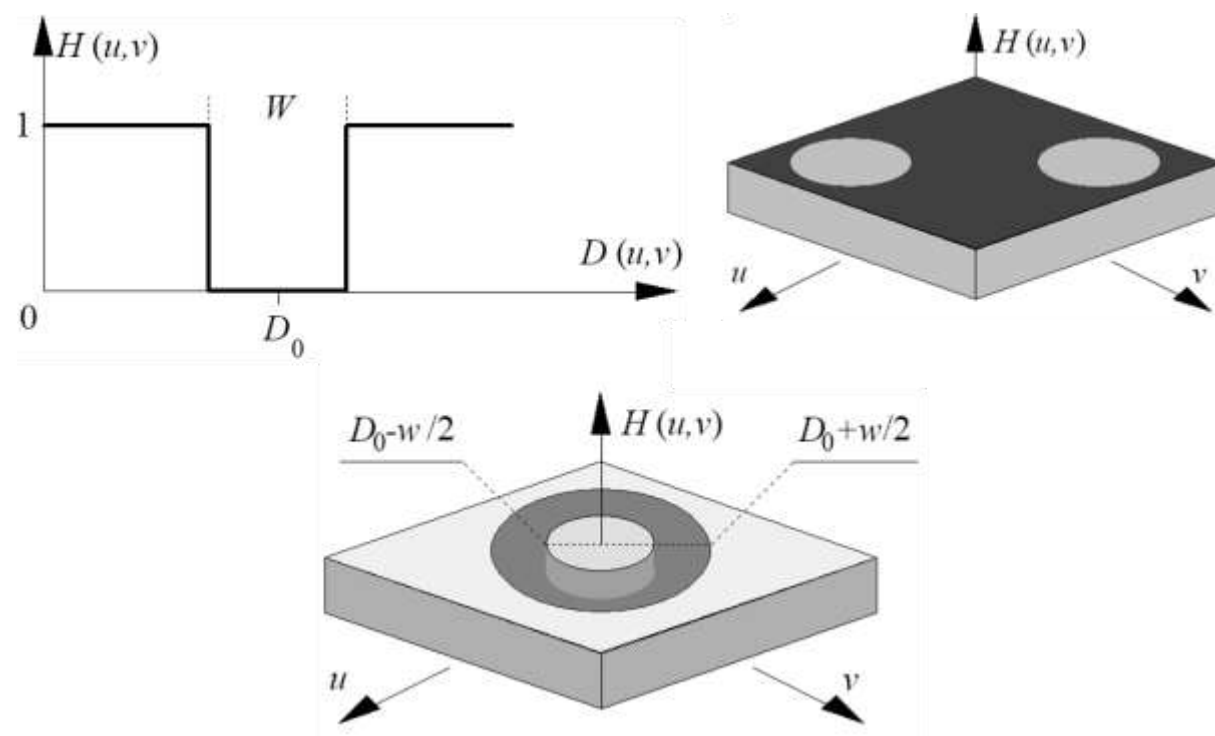
在某些应用中，图像的质量可能受到带有一定规律的结构性噪声的影响。

比如，图像上叠加有正弦干扰图案就是这类噪声的一个典型情况。

当正弦干扰图案比较明显时，会在图像的频谱平面上出现2个比较明显的对称点（由傅里叶变换的共轭对称性所致）。这种用于消除以某点为对称中心的给定区域内的频率，或用于阻止以原点为对称中心的一定频率范围内信号通过的问题，就可以用带阻滤波器实现。

带阻滤波器

- 带阻滤波器：阻止一定频率范围



带阻滤波器

1. 带阻滤波的传递函数定义1

一个用于消除以某点为中心，以D为半径的圆域上的带阻滤波器，可以通过将以原点为中心的高通滤波器平移到该点得到，设该带阻滤波器的中心为点 (u_0, v_0) ，半径为 D_0 ，则其传递函数定义为：

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

其中： $D(u, v) = \{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2\}^{\frac{1}{2}}$

带阻滤波器

1. 带阻滤波的传递函数定义2

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D_1(u, v) \leq D_0 \quad \text{或} \quad D_2(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \end{cases}$$

其中： $D_1(u, v) = [(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2]^{1/2}$

$$D_2(u, v) = [(u + u_0)^2 + (v + v_0)^2]^{1/2}$$

带阻滤波器

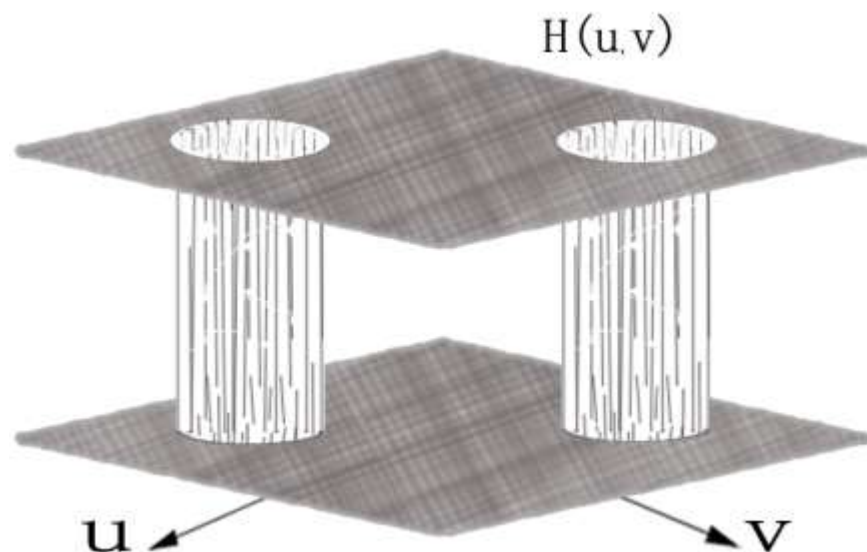
2. 一种n阶径向对称的巴特沃斯带阻滤波器的传递函数定义

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$

其中，W为阻带带宽， D_0 为阻带中心半径。

带阻滤波器

3. 带阻滤波转移函数的透视图



透视图的含义：

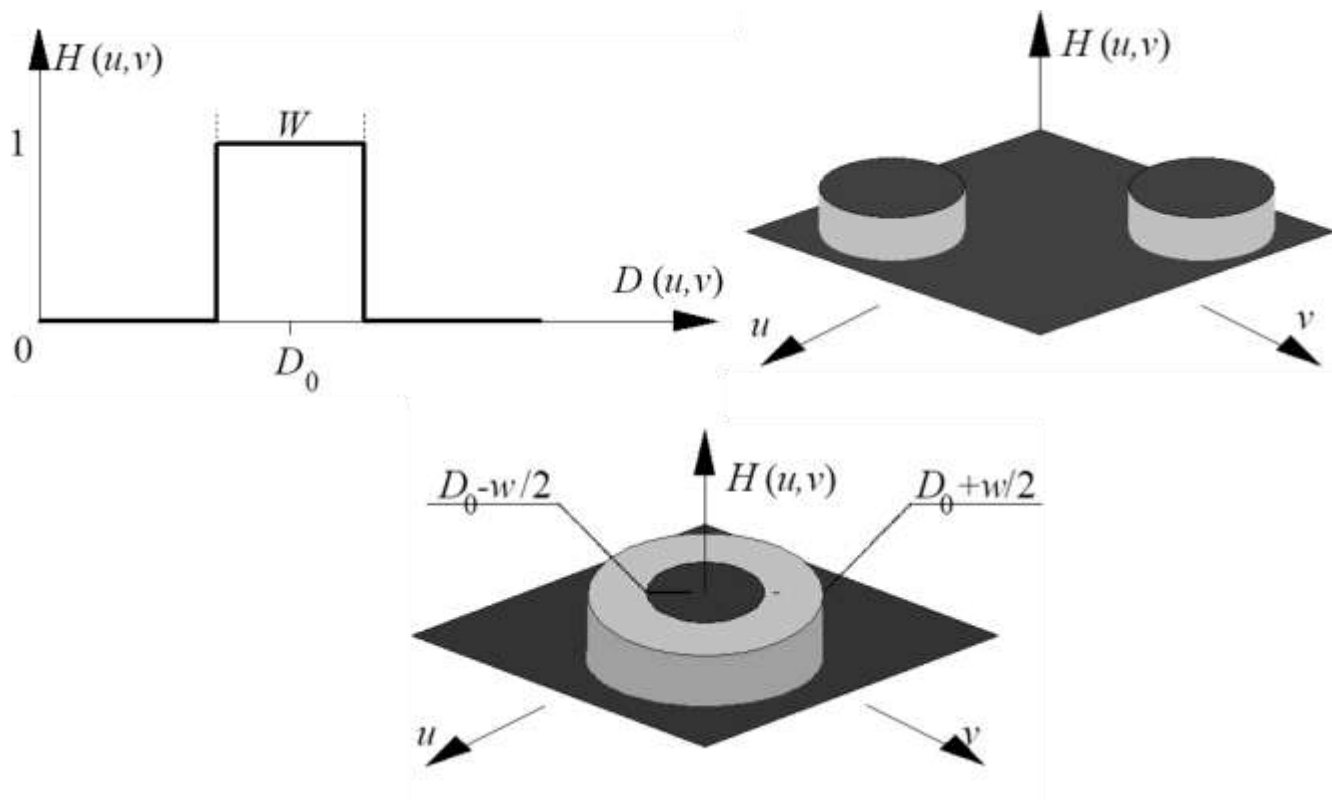
只有那些位于两个立方体外的频率范围的信号才能通过，而位于两个立方体内的频率成分都将被滤除掉。

带通滤波器

- 带阻滤波器的主要功能是**阻止**特定频率范围内的信号，主要应用于如降噪、音频处理等。
- 带通滤波器的主要功能是**放大或衰减**特定频率范围内的信号，滤除其他频率的信号。主要应用于需要保留特定频率范围内的信号，如信号处理、通信系统等。

带通滤波器

- 带通滤波器：与带阻滤波器互补



带通滤波器

1. 带通滤波器转移函数的定义

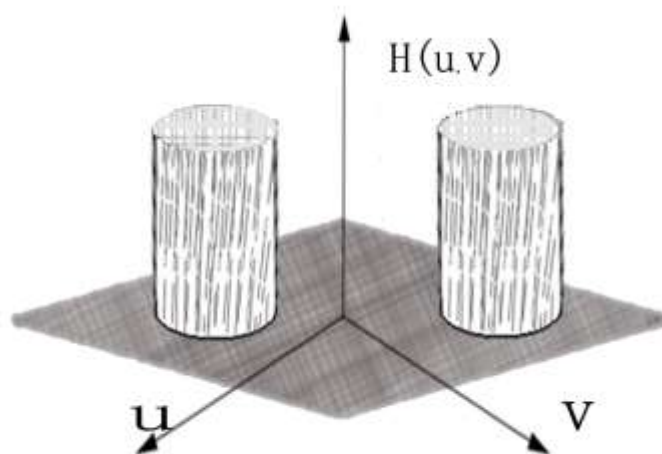
$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D_1(u, v) \leq D_0 \quad \text{或} \quad D_2(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \end{cases}$$

带通滤波器也可以通过对应的带阻滤波器进行“翻转”获得。若设 $H'(u, v)$ 为带阻滤波器的传递函数，则对应的带通滤波器的传递函数 $H(u, v)$ 可定义为：

$$H(u, v) = 1 - H'(u, v)$$

带通滤波器

2. 带通滤波器转移函数的透视图



透视图的含义：

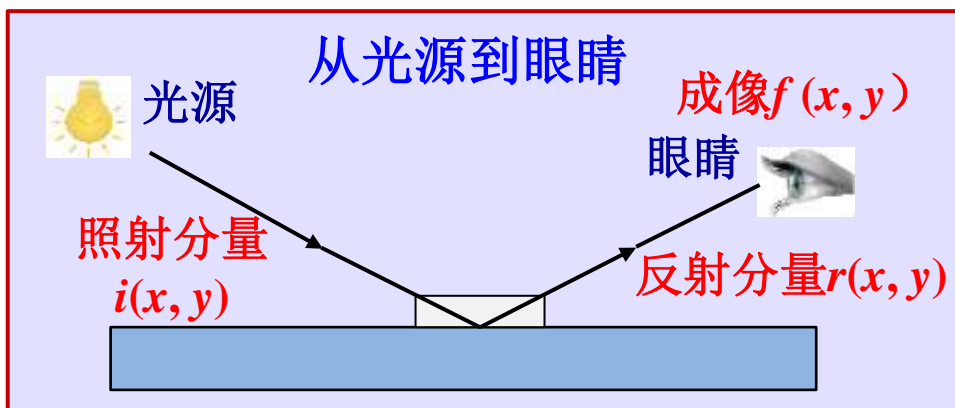
只有那些位于两个立方体内的频率范围的信号会被通过，而位于两个立方体外的频率成分都将被滤除掉。

同态滤波

- 频率域滤波可以灵活地**解决加性畸变问题**。
- 实际成像过程中有很多**非线性干扰问题**，直接使用频率域滤波无法消减乘性或者卷积噪声。
- 例如，当物体受到的照度明暗不均时，图像上对应照度暗的部分，其细节就较难辨别。这部分图像的特点是动态范围较大而对比度不足，此时需要同时对图像进行动态范围压缩和对比度增强。

同态滤波

照度-反射模型



照度-反射模型:

$$f(x, y) = i(x, y) \cdot r(x, y)$$

$$0 < i(x, y) < \infty$$

$$0 < r(x, y) < 1$$

(0全吸收, 1全反射)

但是，经过傅里叶变换后，照射分量和反射分量二者因是卷积而难以分开。

同态滤波

一般认为,

- 照明函数 $i(x, y)$ 描述景物的照明, 其性质取决于照射源, 与景物无关。

$i(x, y)$ 描述景物照明的缓慢变换, 近似为低频分量。

- 反射函数 $r(x, y)$ 描述景物内容, 随图像细节不同在空间上快速变化, 近似为高频分量。 $r(x, y)$ 的性质取决于成像物体的特性, 与照明无关。
- 将图像理解为高频分量与低频分量的乘积的结果。

同态滤波

在基于照度-反射模型的图像处理算法中，通常会借助于对数变换。

- 简化计算。将照度-反射模型中两个相乘分量变成为两个相加分量。
- 对数变换接近人眼亮度感知能力，能够压缩动态范围，增强对比度。

同态滤波

■ 同态滤波

是将频域滤波和灰度变换结合起来的一种图像处理方法。利用对数将图像中的照度分量和反射分量分开，这样滤波函数就可以分别作用在这两个分量上。

同态滤波

- 同态滤波的**主要目的**是消除不均匀照度的影响，增强图像细节。

光照明暗不匀，图像暗区细节难辨别



同态滤波

步骤1：对图像函数 $f(x,y)$ 取对数变换：

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \ln[f(x, y)] = \ln[i(x, y) \cdot r(x, y)] \\ &= \ln[i(x, y)] + \ln[r(x, y)] \end{aligned}$$

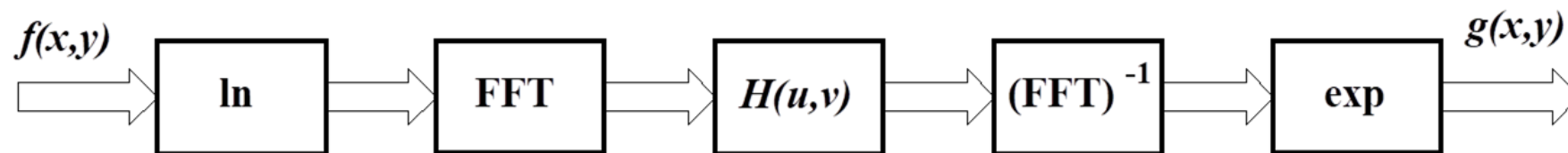
步骤2：傅里叶变换

$$\begin{aligned} Z(u, v) &= DFT\{\ln[i(x, y)]\} + DFT\{\ln[r(x, y)]\} \\ &= I(u, v) + R(u, v) \end{aligned}$$

步骤3：同态滤波

$$\begin{aligned} S(u, v) &= Homo(u, v) \cdot Z(u, v) \\ &= Homo(u, v) \cdot I(u, v) + Homo(u, v) \cdot R(u, v) \end{aligned}$$

同态滤波

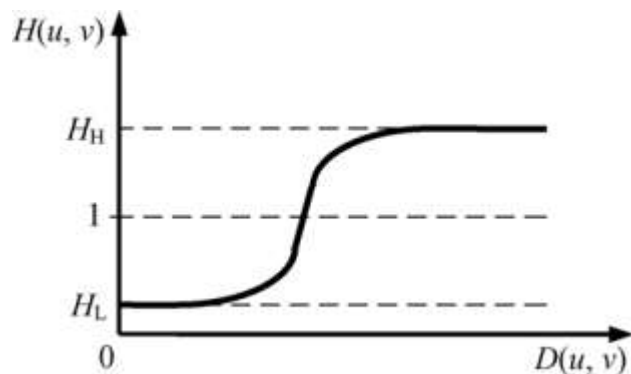


- 同态滤波传递函数 $H(u,v)$ 的设计思路:
 - ✓ **压缩照度分量**: 照度分量变化幅度大, 使图像动态范围很宽, 占用很多比特数, 但包含信息量少。
 - ✓ **扩展反射分量**: 反射分量描述的区域灰度变化小, 但是往往是人们感兴趣的区域。

同态滤波

同态滤波的传递函数

$$Homo(u,v) = (H_H - H_L) * High(u,v) + H_L$$



- 参数 $H_L < 1$ 、 $H_H > 1$ ， $High(u,v)$ 是高通滤波转移函数。
- H_H : 高频分量频率场滤波特性
- H_L : 低频分量频率场滤波特性
- 滤波器将压缩低频部分、扩大高频部分。
- 最后滤波的结果将是既压缩了灰度的动态范围，又扩大了对比度。

同态滤波

步骤4: 求傅里叶逆变换:

$$\begin{aligned} s(x,y) &= DFT^{-1}\{Homo(u,v) \cdot I(u,v) + Homo(u,v) \cdot R(u,v)\} \\ &= i'(x,y) + r'(x,y) \end{aligned}$$

步骤5: 进行指数变换, 得到输出图像

$$\begin{aligned} g(x,y) &= e^{\{s(x,y)\}} = e^{\{i'(x,y) + r'(x,y)\}} \\ &= i_0(x,y) \cdot r_0(x,y) \end{aligned}$$

同态滤波

```
Image=rgb2gray(imread('img5_6.jpg'));
[M,N]=size(Image);
Hmin=0.5; Hmax=2.0; c=1.1; d0=1800;
FImage=fft2(log(double(Image)+1));
for i=1:M
    for j=1:N
        D(i,j)=((i-(floor(M/2))))^2+(j-(floor(N/2))))^2);
        H(i,j)=(Hmax-Hmin)*(1-exp(c*(-D(i,j)./(d0^2)))))+Hmin;
    end
end
result=real(exp(ifft2(H.*FImage)));
imshow(Image),title('原图');
figure,imshow(result,[]);title('同态滤波增强后');
```

同态滤波



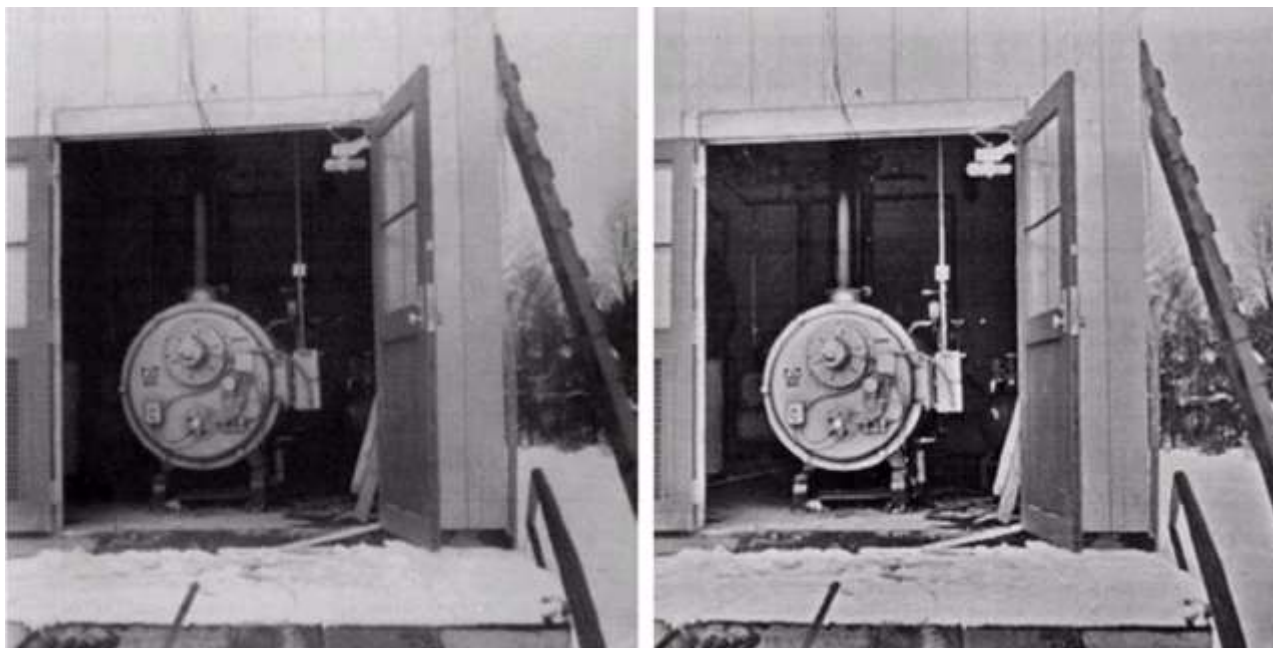
原图



同态滤波增强后图像

同态滤波

- 同态滤波将非线性问题转化成线性问题处理（将乘法变换成加法），然后用频域滤波方法处理。
- 同态滤波可以消除乘性噪声。



THE END
Thank You.