



河南大學

明德新民 止于至善

第4章 图像复原

陈小潘

计算机与信息工程学院

4.1 图像复原基础

在图像形成、记录、处理和传输过程中，由于成像系统、记录设备和记录载体受各种因素的影响，摄像机与物体的相对运动，传输介质和处理方法的不完善等，会导致**图像质量的下降**，这种现象称为**图像退化（image degradation）**。

图像退化

- 光学系统像差
- 传感器非线性畸变
- 几何畸变
- 光学衍射
- 摄影胶片的非线性
- 大气流的扰动效应
- 图像运动造成的模糊

4.1 图像复原基础

常见的4种退化现象的物理模型

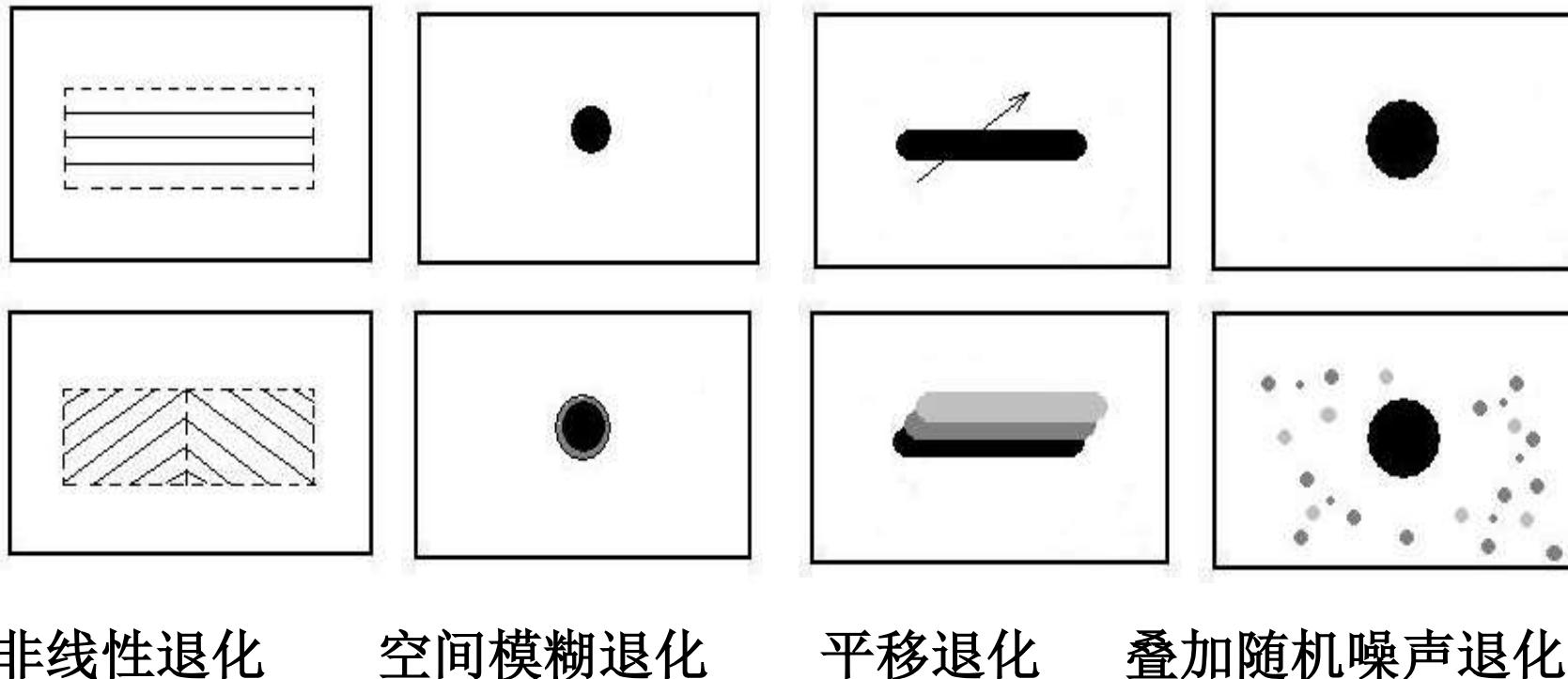


图 常见的4种退化现象的物理模型示意图

4.1 图像复原基础

- 非线性退化：一般在摄影过程中，由于曝光量和感光密度的非线性关系，会引起非线性退化。
- 空间模糊退化：在光学成像系统中，光穿过孔径时发生的衍射作用可用这种模型表示。
- 平移退化：由于目标或成像设备旋转或者平移而引起的退化模型。
- 叠加随机噪声退化

4.1 图像复原基础

1、造成图像退化的因素

- 透镜象差/色差
- 聚焦不准（失焦，限制了图象锐度）
- 模糊（限制频谱宽度）
- 噪声（是一个统计过程）
- 抖动（机械、电子）

4.1 图像复原基础

2、图像退化举例1



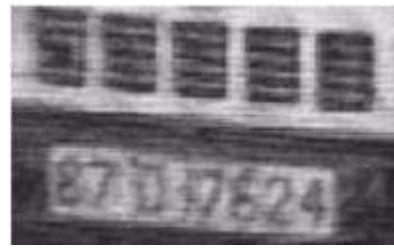
成像模糊



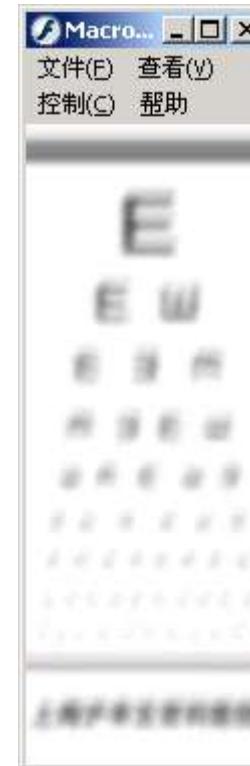
恢复后结果



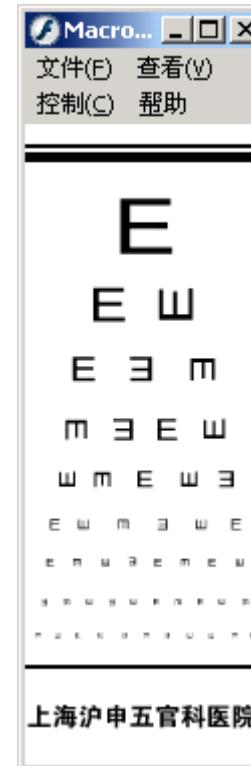
运动成像模糊



恢复后结果



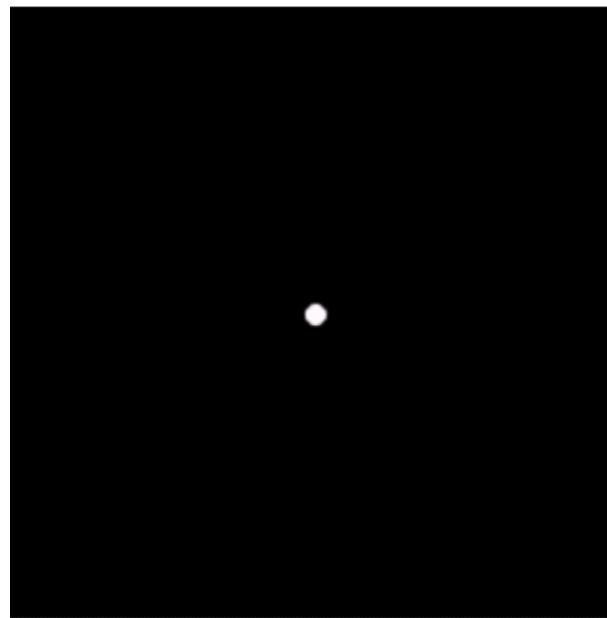
上海沪申五官科医院



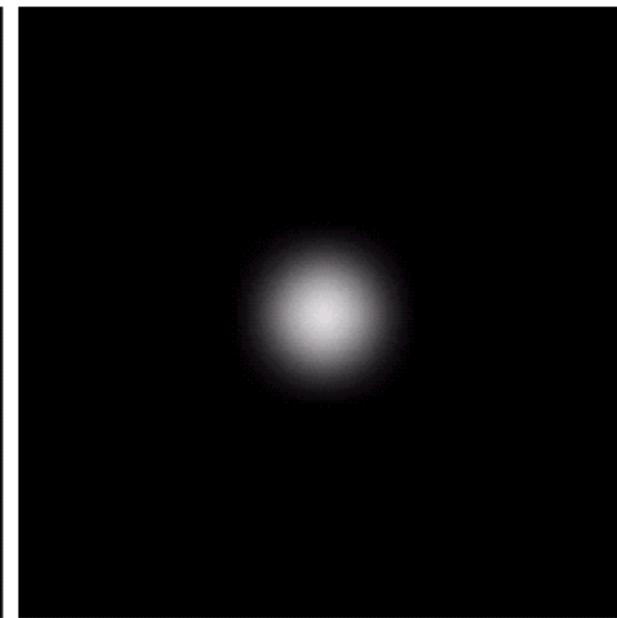
上海沪申五官科医院

4.1 图像复原基础

2、图像退化举例2



光脉冲



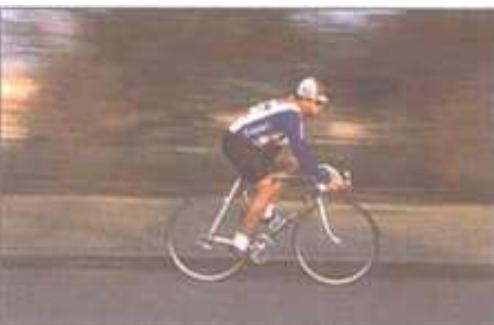
退化的光脉冲

4.1 图像复原基础

2、图像退化举例3

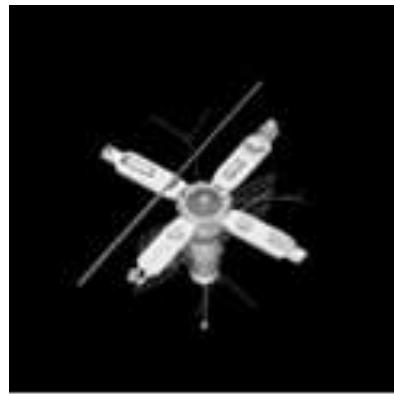


运动模糊

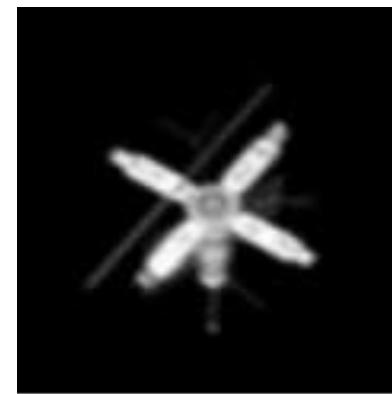


4.1 图像复原基础

2、图像退化举例4



原始图像



模糊图像



抖动模糊图像

4.1 图像复原基础

- 图像复原，又称图像恢复（image restoration），是根据图像质量下降的原因，去除或减轻在获取数字图像过程中发生的图像质量下降的因素，使图像尽可能地接近于真实场景。
- 图像复原广泛应用在天文、航空、公安、医学、安防等领域的残损图像复原、离焦衍射模糊图像、湍流退化图像复原、图像及视频编码等。
- 图像超分辨率(Super-Resolution)是通过硬件或软件的方法提高原有图像的分辨率，通过一系列低分辨率的图像来得到一幅高分辨率的图像过程就是超分辨率重建。

4.1 图像复原基础

- 图像复原及图像增强的目的都是改善图像的质量，提高图像的视觉效果。
- 两者存在的本质区别
 - ✓ 图像复原是找到图像降质的**根本原因**，对退化的图像去除退化因素，找出或估计其物理模型，进而复原或重建被退化的图像的技术；恢复的过程是沿着质量下降的**逆过程**来重建原始图像。
 - ✓ 图像增强目的是改善图像的视觉效果，增加图像的信息量，使之适合于人眼或机器的观察判断，以及进一步的分析和处理。但增强后的图像颜色、灰度及直方图的成分可以与原图像不同，**只要图像的可读性更好即可**
 - ✓ 图像增强是一种**主观处理**，图像复原是一种**客观处理**。

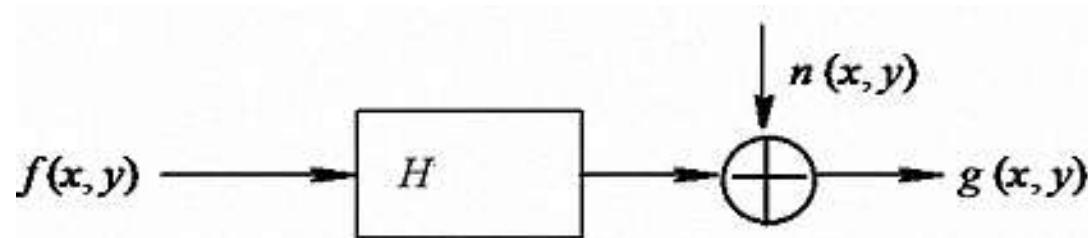
4.1 图像复原基础

- 图像复原的研究方法是根据一定的**先验知识**，建立退化模型，然后用退化的逆运算，来恢复原始图像。
- 图像复原可以看作是降质过程的**反向操作**过程，关键步骤是求取反向的数学模型。因此，图像复原的质量与描述图像退化的数学模型直接相关。

4.1 图像复原基础

图像退化模型的表示

设 $f(x, y)$ 是一幅原图像，图像的退化过程可以理解为一个作用于原图像 $f(x, y)$ 的系统 H ，或理解为施加于原图像 $f(x, y)$ 上的一个运算 H ；同时数字图像也常会因受一些随机误差，也即噪声 $n(x, y)$ 而退化。由此可得退化模型：



可以表示为：

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + n(x, y) \quad (4.1)$$

4.1 图像复原基础

图像退化模型的表示

- 退化图像 $g(x, y)$ 可以用下式表示

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

其中 $*$ 表示卷积，将离散卷积写成矩阵形式（把图像按列堆叠为向量）：

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$$

- 图像复原是在已知 $g(x, y)$, $h(x, y)$, $n(x, y)$ 等先验知识的条件下，求得 $f(x, y)$ 的过程。

4.1 图像复原基础

图像退化模型的表示

- ✓ 由于图像退化往往由多种因素共同造成，为了便于利用数学工具进行处理，人们通常会忽略其中的次要因素，只考虑主要的降质原因。
- ✓ 进一步地，假定图像的退化性质与像素的位置无关，这样的系统被称为线性位移不变系统。

4.1 图像复原基础

为什么使用线性位移不变系统？

- **简化计算：**许多图像退化可近似为线性位移不变模型，便于应用数学工具快速求解。
- **效果良好：**在退化不严重时，复原结果较好，且计算效率高。
- **权衡精度与复杂度：**虽然非线性或位移可变模型能更准确地反映图像复原问题本质，但求解复杂，一般仅在要求极高精度时才使用，且其经常基于线性位移不变方法加以修正。

4.1 图像复原基础

图像退化模型的表示

线性位移不变系统的退化模型

- 不考虑加性噪声: $g(x,y) = f(x,y) * h(x,y)$
- 考虑加性噪声: $g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) + n(x,y)$

其中 $f(x,y)$ 与 $h(x,y)$ 在空间域内的卷积等同于频域内乘积:

$$G(u,v) = F(u,v)H(u,v) + N(u,v)$$

4.2 典型的图像复原的方法

图像复原可以在时域或者频率域中进行，时域是通过卷积实现，卷积是积分求和的过程。根据傅里叶变换的时域卷积性质，可知频域处理是通过乘积来实现。乘法计算比卷积计算简单，同时傅里叶变换的快速实现（FFT）使得对图像的频率域处理更为简单。因此，可以在频率域来解决该问题。常用方法有两类：

- 缺乏先验知识：可对退化过程（模糊和噪声）建立模型进行描述，进而寻找一种去除或削弱其影响的过程。本质是一种基于估计的思路。
- 有足够的先验知识：可以对原始图像建立数学模型，然后对退化图像进行拟合，从而取得更好的复原效果。

4.2 典型的图像复原的方法

- **逆滤波法**: 在没有噪声的情况下，其可精确地复原图像。在有噪声的情况下，会对复原图像产生严重的影响。
- **维纳滤波法**: 基于复原后的图像与原始图像之间的均方误差最小化，通过选择变换函数，同时使用图像和噪声的统计信息实现。但是，维纳滤波法需要较多的图像先验知识，在实际应用中具有较大难度。
- **最大熵恢复法**: 利用优化方法复原图像，其按照准则函数在最大的情况下得到图像复原的最优解。无需对图像的先验知识做更多假设，但其属于非线性算法，在数值求解上比较困难，通常只能用极为耗时的迭代算法，计算量巨大。

4.2 典型的图像复原的方法

- **卡尔曼滤波法**: 一种基于**最小方差估计**的**递推式滤波方法**, 根据前一个估计值和最近一个观测数据来估计信号的当前值。是状态空间模型的状态矢量估计的一种有效方法。但在实际应用中, 由于**计算量过大**, 限制了应用的效果。
- **传播波方程恢复法**: 一种基于数学物理方程的方法, 利用一维传播波方程来描述匀速水平运动形成的模糊图像, 从而实现对匀速直线运动模糊图像的有效恢复。优点是可以利用物理学方面的知识进行复原, 更符合实际, 但对运动方向敏感。

4.2 典型的图像复原的方法

图像复原处理的步骤

- 确定图像的退化函数：实际图像复原中，退化函数一般是未知的，需要通过建模或估计来得到。
- 采用合适的图像复原方法复原图像。
 - ✓ 图像复原的基本思路是采用与退化相反的过程，使结果尽可能接近原图。
 - ✓ 关键在于确定准则函数并寻找其最优解，因为最优解对应最佳复原效果。

4.2 典型的图像复原的方法

退化函数估计

- 图像观察估计法
- 试验估计法
- 模型估计法

4.2 典型的图像复原的方法

(1) 图像观察估计法

给定一幅退化图像，但没有退化函数 H 的知识，可以通过收集图像自身的信息来估计退化函数：

- ✓ 寻找简单结构的子图像
- ✓ 寻找受噪声影响小的子图像

例如，若图像被模糊，则可以观察图像中包含样本结构的一个小矩形区域，如某个物体和背景的部分。为了降低噪声的影响，我们可以寻找一个信号内容很强的区域(如一个高对比度区域)。下一步是处理子图像，得到尽可能不模糊的结果。

4.2 典型的图像复原的方法

(1) 图像观察估计法

构造一个和观察的子图像 $g_s(x, y)$ 有相同大小和特性的估计子图像 $\hat{f}_s(x, y)$ ，它们对应的傅立叶变换分别为 $G_s(u, v)$ 和 $\hat{F}_s(u, v)$ 。利用下面的公式得到 $H_s(u, v)$ ，然后由 $H_s(u, v)$ 推导出完全函数 $H(u, v)$ ，再经过傅里叶反变换得到 $H(x, y)$ 。

$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}_s(u, v)}$$

4.2 典型的图像复原的方法

(2) 试验估计法

试验估计法是构造一个和退化图像成像相似的装置，通过一个冲激（小亮点）成像进行退化处理，进一步分析得到退化的冲激响应函数，再实现较准确的退化

$$\text{估计。冲激响应为: } H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$$

其中 $G(u, v)$ 是退化图像的傅里叶变换， A 是一个描述冲击强度的傅里叶变换（常量）。

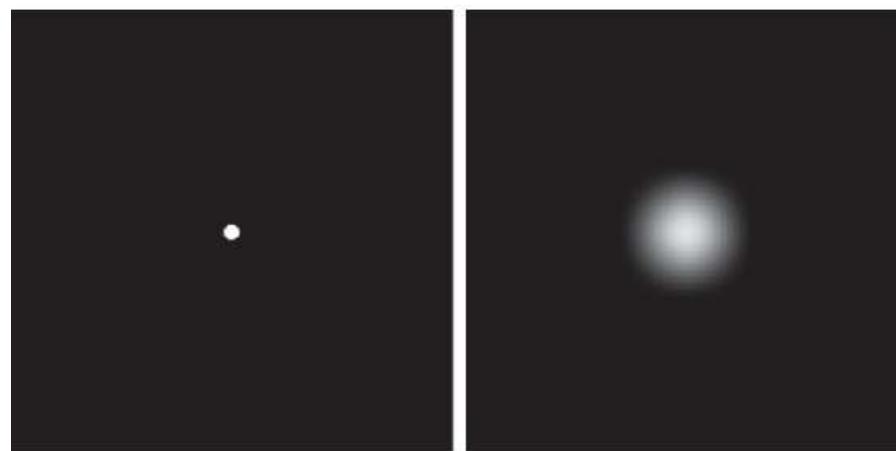


图 亮点冲激及退化后的冲激

4.2 典型的图像复原的方法

(3) 模型估计法

- 模型估计法考虑引起退化的环境因素（前提是已知退化的原因），建立系统的退化模型。例如考虑大气湍流的物理特性（大气湍流效应使光波相位产生畸变，降低了光学成像系统分辨率，影响成像质量。），可以建立如下模型：

$$H(u, v) = e^{-k(u^2+v^2)^{5/6}}$$

其中 k 为常数，与湍流特性相关。

- 模型估计根据退化的基本原理推导出退化模型。例如，考虑基于物理的运动模型，可以建立基于匀速直线运动规律的退化函数，然后利用退化后的图像估计直线运动的规律，从而确定系统的 $H(u, v)$ 函数。

4.3 逆滤波图像恢复

图像恢复按是否对图像恢复施加约束条件分为：

- **无约束恢复方法：**逆滤波图像恢复方法是一种典型的无约束最小二乘方恢复方法
- **有约束恢复方法：**维纳滤波是一种典型的有约束图像恢复方法。

4.3.1 无约束最小二乘方恢复

为了分析噪声的统计特征，以及噪声与图像的相关情况，需要引入最小二乘方恢复。由式 $g(x, y) = H(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$ 有：

$$n = g - Hf \quad (4.2)$$

当叠加的噪声 n 事先未知时，可从 $g - Hf$ 获得 n 。

由于 g 是已知的退化图像，因此如果取 \hat{f} 为 f 的估计，可使 $H\hat{f}$ 在最小均方误差的意义下代替 Hf ，并通过求退化后的实际图像 g 与退化图像的估值 $H\hat{f}$ 的模(或范数)平方，也即

$$\|n\|^2 = \|g - H\hat{f}\|^2 \quad (4.3)$$

4.3.1 无约束最小二乘方恢复

从而可将图像的恢复问题看作是对 \hat{f} 求下式的最小值：

$$J(\hat{f}) = \|g - H\hat{f}\|^2 = (g - H\hat{f})^T(g - H\hat{f}) \quad (4.4)$$

$J(\hat{f})$ 的最小值对应最优， $H\hat{f}$ 在最小二乘方意义上近似于 g ，选择 \hat{f} 不受其他条件约束，称为无约束复原。

如果在求最小值的过程中，不施加任何约束，称这种复原为无约束复原，或称为非约束复原。

4.3.1 无约束最小二乘方恢复

$$\begin{aligned}\frac{\partial J(\hat{f})}{\partial \hat{f}} &= \frac{\partial}{\partial \hat{f}} (\| g - H\hat{f} \|^2) \\ &= -2H^T(g - H\hat{f}) \\ &= -2H^Tg + 2H^TH\hat{f}\end{aligned}\tag{4.4}$$

根据极值条件 $\frac{\partial J(\hat{f})}{\partial \hat{f}} = 0$ (4.5)

$$-2H^Tg + 2H^TH\hat{f} = 0 \tag{4.7}$$

$$\therefore H^Tg = H^TH\hat{f} \tag{4.8}$$

4.3.1 无约束最小二乘方恢复

上式两端同乘以 $(H^T H)^{-1}$ 得

$$(H^T H)^{-1} H^T g = (H^T H)^{-1} (H^T H) \hat{f} \quad (4.9)$$

则有

$$\hat{f} = (H^T H)^{-1} H^T g \quad (4.10)$$

当图像矩阵的尺寸满足 $N=M$, 且和满秩非奇异(即可逆)时, 则有

$$\hat{f} = H^{-1} (H^T)^{-1} H^T g = H^{-1} g \quad (4.11)$$

式(4.11)说明: 当已知 H 时, 可由 g 求出 f 的估值 \hat{f} 。 H^{-1} 是矩阵意义上的逆卷积。“矩阵的逆”对应到频域就是逐点相除。

4.3.2 逆滤波图像恢复方法

如果对式（4.11）两边取傅立叶变换，可以证明有：

$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} \quad u=0,1,\dots,M-1; \quad v=0,1,\dots,N-1 \quad (4.12)$$

对式（4.12）的结果求傅立叶反变换，就可得到恢复后的图像：

$$\hat{f}(x, y) = F^{-1} \left[\frac{G(u, v)}{H(u, v)} \right] \quad u=0,1,\dots,M-1; \quad v=0,1,\dots,N-1 \quad (4.13)$$

公式（4.13）是频率域的逆滤波恢复方法，其是一种无约束最小二乘方恢复方法。逆滤波是一种在对噪声 n 没有先验知识（或者说是未知噪声）的情况下，通过寻找一个 \hat{f} ，使得 $H\hat{f}$ 在最小二乘方误差意义下最接近 g 的图像恢复方法。

4.3.2 逆滤波图像恢复方法

【例】设有退化函数 $H(u, v) = e^{\left(-0.0025 \times \left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2\right)^{(5/6)}}$ 对原图像进行退化和逆滤波
图像恢复的结果如图所示。



(a) 原图像 (b) 生成的退化图像 (c) $FR=80$ 复原图像 (d) $FR=115$ 复原图像
逆滤波图像复原方法验证结果示例 (FR 为逆滤波半径)

4.3.2 逆滤波图像恢复方法

【例】逆滤波图像复原MATLAB编程。

```
clc; clear all; close all;  
img0=imread('lena.jpg');  
subplot(1,3,1); imshow(img0); title('原图像'); % 显示原  
图像  
% 1. 频率域方法生成退化图像  
f=im2double(img0);  
FTS_img=fftshift(fft2(f)); % 傅里叶变换-平移频谱图  
为中心对称  
% 执行退化：退化函数H(u,v)=exp(-0.0025*((u-  
M/2).^2+(v-N/2).^2).^(5/6))  
[M,N]=size(img0);  
for u=1:M  
    for v=1:N  
        H(u,v)=exp(-0.025*((u-M/2).^2+(v-N/2).^2).^(5/6));  
    end  
end
```

```
G_FTS_img=FTS_img.*H; % G=F*H  
degraded_I=ifftshift(G_FTS_img); % 反移频谱中心  
degraded_img0=real(ifft2(degraded_I)); % 傅里叶逆变换，并  
取变换结果的实部  
degraded_img=uint8(abs(degraded_img0)*256); % 生成的退化图  
像  
subplot(1,3,2); imshow(degraded_img); title('生成的退化图  
像');
```

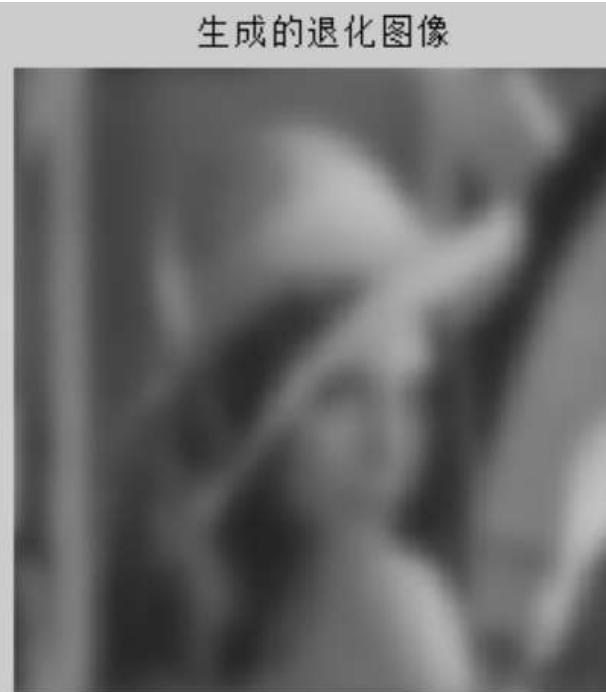
4.3.2 逆滤波图像恢复方法

【例】逆滤波图像复原MATLAB编程。

```
% 2. 对退化图像进行逆滤波
Filter_R=80; % 设置逆滤波半径
if Filter_R>M/2
    F_Id_img=G_FTS_img./(H+eps); % 全滤波F=G/H
else % 对滤波半径范围内进行滤波
    for i=1:M
        for j=1:N
            if sqrt((i-M/2).^2+(j-N/2).^2)<Filter_R
                F_Id_img(i,j)=G_FTS_img(i,j)./(H(i,j)+eps);
            end
        end
    end
end
Inverse_f_I=ifftshift(F_Id_img); % 反移频谱中心
Inverse_f_img0=ifft2(Inverse_f_I); % 傅里叶反变换
Inverse_f_img=uint8(abs(Inverse_f_img0)*255);
subplot(1,3,3); imshow(Inverse_f_img); title('滤波半径为80的逆滤波复原图像');
```

4.3.2 逆滤波图像恢复方法

【例】逆滤波图像复原MATLAB编程。



4.3.3 无约束图像恢复的病态性

由式(4.12)可知，若 $H(u,v)$ 在v-v平面上取零或很小，就会带来计算上的困难或导致不稳定解。如果实际中有噪声 $n(x,y)$ 出现(未知噪声，不等于绝对没有噪声)，可得

$$\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)} + \frac{N(u,v)}{H(u,v)} \quad u = 0, 1, \dots, M - 1; \quad v = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (4.15)$$

则在 $H(u,v)$ 非常小的情况下，噪声项将被放大并对恢复的结果起主导地位，这即是无约束图像复原方法的**病态性**。所以，对于光学系统中会导致 $H(u,v)$ 很小或等于零的情况，采用逆滤波复原就会遇到上述求解方程的病态性问题。

4.3.3 无约束图像恢复的病态性

为了克服这种不稳定性，一是可利用有约束图像恢复方法；二是可利用 $N(u,v)$ 在高频范围衰减速度较慢，而 $H(u,v)$ 则随着 u 、 v 的增加迅速减小的特点，只在与离 u 、 v 原点较近(接近频域中心)的范围内进行复原。



河南大學
Henan University



计算机与信息工程学院

School of Computer and Information Engineering

明德新民 止于至善

4.4 维纳滤波图像恢复



4.4.1 有约束最小二乘方恢复

为了避免图像恢复过程中的病态问题，通常会在恢复过程中加入某种约束，从而引入有约束的最小二乘法恢复方法。

1、有约束的最小二乘方恢复方法

有约束的最小二乘方恢复方法需要知道噪声的模平方 $\|n\|^2$ ，有学者已经证明， $\|n\|^2$ 能用噪声的均值 \bar{e}_n 和方差 σ_n^2 表示为：

$$\|n\|^2 = (M - 1)(N - 1)[\bar{e}_n^2 + \sigma_n^2] \quad (4.16)$$

也就是说，只要知道噪声的均值和方差，就可实现有约束的最小二乘方图像恢复方法。

4.4.1 有约束最小二乘方恢复

■ 有约束恢复的一般表示形式

设对原图像施加某一线性运算 Q ，求在约束条件

$$\|g - H\hat{f}\|^2 = \|n\|^2 \quad (4.17)$$

下，使 $\|Q\hat{f}\|^2$ 为最小的原图像 f 的最佳估计 \hat{f} 。

这一问题实际上是求极值问题，通常采用拉格朗日乘数法来实现。即要寻找一个 \hat{f} ，使得构造的辅助函数（准则函数）

$$J(\hat{f}, \lambda) = \|Q\hat{f}\|^2 + \lambda(\|g - H\hat{f}\|^2 - \|n\|^2) \quad (4.18)$$

为最小。

4.4.1 有约束最小二乘方恢复

也即令

$$\begin{aligned}\frac{\partial J(\hat{f}, \lambda)}{\partial \hat{f}} &= \frac{\partial}{\partial \hat{f}} \left[(\hat{Qf})^T \cdot (\hat{Qf}) \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial \hat{f}} \left[(g - H\hat{f})^T \cdot (g - H\hat{f}) \right] \quad (4.19) \\ &= 2\hat{Q}^T \hat{Qf} - 2\lambda H^T (g - H\hat{f}) \\ &= 2\hat{Q}^T \hat{Qf} + 2\lambda H^T H\hat{f} - 2\lambda H^T g = 0\end{aligned}$$

其中： λ 是拉格朗日乘子， $(\|g - H\hat{f}\|^2 = \|n\|^2)$ 是约束项，如果找到
 $\|\hat{Qf}\|$ 为最小的原图像f的最佳估值 \hat{f} 时， λ 就为0。

4.4.1 有约束最小二乘方恢复

设 $r=1/\lambda$, 并带入式 (4.19) 可得

$$\begin{aligned} H^T g &= rQ^T Q\hat{f} + H^T H\hat{f} \\ &= (rQ^T Q + H^T H)\hat{f} \end{aligned} \tag{4.20}$$

所以有 $\hat{f} = (rQ^T Q + H^T H)^{-1}H^T g$ (4.21)

4.4.1 有约束最小二乘方恢复

由此可得恢复步骤为：

- (1) 选取一个 r 代入式(4.21)，将求得的 \hat{f} 代入式(4.17)。
- (2) 当结果大于 $\|n^2\|$ ，减小 r ，返回步骤(1)。
- (3) 当结果小于 $\|n^2\|$ ，增加 r ，返回步骤(1)。
- (4) 重复上述迭代过程，直到式(4.17)两边满足相等为止。此时的 \hat{f} 即为求得的恢复图像。

4.4.2 维纳滤波图像恢复方法

维纳滤波的总体思路是寻找图像 $f(x, y)$ 的一种估计 $\hat{f}(x, y)$ ，使得 $f(x, y)$ 和 $\hat{f}(x, y)$ 之间的均方误差最小，即 $e^2 = E[(f - \hat{f})^2]$ 。因此，维纳滤波也称为最小均方误差滤波器。

设 R_f 和 R_n 分别表示原图像和噪声的自相关矩阵，对图像取线性运算

$$Q = R_f^{-\frac{1}{2}} \cdot R_n^{\frac{1}{2}} \quad (4.22)$$

如果用 $E\{\}$ 一般地表示自相关矩阵，则有

$$R_f = E(f f^T) \quad (4.23)$$

$$R_n = E(n n^T) \quad (4.24)$$

其中， R_f 的第*i*和第*j*个元素是 $E(f_i f_j)$ ，代表 f 的第*i*和第*j*个元素的相关。因为 f 和 n 中的元素是实数，所以 R_f 和 R_n 都是实对称矩阵。

4.4.2 维纳滤波图像恢复方法

将式 (4.22) 代入式 (4.21) 可得

$$\begin{aligned}\hat{f} &= \left[H^T H + r \left(R_f^{-\frac{1}{2}} \cdot R_n^{\frac{1}{2}} \right)^T \cdot \left(R_f^{-\frac{1}{2}} \cdot R_n^{\frac{1}{2}} \right) \right]^{-1} H^T g \\ &= (H^T H + r R_f^{-1} R_n)^{-1} H^T g\end{aligned}\quad (4.25)$$

如果式 (4.25) 可使 $Q\hat{f} = R_f^{-\frac{1}{2}} R_n^{-\frac{1}{2}} \hat{f}$ 的模最小，也即使噪声和信号的比对复原图像的影响最小。式 (4.25) 即是最小均方误差滤波恢复方法的表示式。

4.4.2 维纳滤波图像恢复方法

有学者已经证明，当式（4.25）中 $r=1$ 时，即可得下式的（标准）维纳滤波器公式：

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{1}{H(u, v)} \times \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + [S_n(u, v)/S_j(u, v)]} \right] G(u, v) \quad (4.26)$$

其中： $S_n(u, v)$ 为噪声的功率谱， $S_j(u, v)$ 为图像的功率谱。

由式(4.26)可知，当没有噪声时， $\hat{F}(u, v) = G(u, v)/H(u, v)$ ，维纳滤波器就可简化成逆滤波器；当有噪声时，维纳滤波器也可用信噪功率比作为修正函数对逆滤波器进行修正，可在均方误差最小的意义上提供最佳恢复。

4.4.2 维纳滤波图像恢复方法

通常将噪声假设为白噪声[指功率谱密度在整个频域内是常数的噪声]，则
噪声的功率谱 $S_n(u, v)$ 为常数，也即认为

(4.27)

$$S_n(u, v) = S_n(0, 0) = \text{常数}$$

由于 $S_j(u, v)$ 通常难以估计，一种近似的解决方法是用一个系数 K 来代替
 $S_n(u, v)/S_j(u, v)$ ，这样 (4.26) 就可用下式来近似

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{1}{H(u, v)} \times \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right] G(u, v) \quad (4.28)$$

其中， K 是根据信噪比的某些先验知识来预先设定的一个常数。

4.4.2 维纳滤波图像恢复方法

【例】设有退化函数 $H(u, v) = e^{\left(-0.0025 \times \left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2\right)^{(5/6)}}$ 对原图像进行退化和逆滤波图像恢复的结果如图所示。



(a) 原图像 (b) 生成的退化图像 (c) 加高斯噪声图像 (d) 维纳滤波复原图像
维纳滤波方法图像复原验证结果图例

4.4.2 维纳滤波图像恢复方法

【例】维纳滤波（Wiener Filtering）图像复原MATLAB程序。

```
clc; clear all; close all;  
img0=imread('lena.jpg');  
subplot(1,4,1); imshow(img0); title('原图像');  
% 1. 频率域方法生成退化图像  
f=double(img0);  
FTS_img=fftshift(fft2(f)); % 傅里叶变换-平移频谱图为中心对称  
  
% 执行退化：退化函数H(u,v)=exp(-0.005*((u-M/2).^2+(v-N/2).^2).^(5/6))  
[M,N]=size(img0);  
for u=1:M  
    for v=1:N  
        H(u,v)=exp(-0.005*((u-M/2).^2+(v-N/2).^2).^(5/6));  
    end  
end
```

```
G=FTS_img.*H; % G=F×H  
  
G_I=ifftshift(G); % 反移频谱中心  
G_img=real(ifft2(G_I)); % 傅里叶反变换，并取变换结果的实部  
degraded_img=uint8(G_img); % 生成的退化图像  
subplot(1,4,2); imshow(degraded_img); title('退化图像');
```

4.4.2 维纳滤波图像恢复方法

```
% 2. 对退化图像叠加高斯噪声
```

```
f1=imnoise(uint8(G_img),'gaussian',0,0.001)
```

```
subplot(1,4,3); imshow(uint8(f1));title('模糊退化且添加高斯噪声的图像');
```

```
% 3. 对退化图像进行维纳滤波
```

```
F1=fftshift(fft2(f1)); % 对退化图像进行傅里叶变换，移频谱中心对称
```

```
K=0.1;
```

```
for u=1:M
```

```
    for v=1:N
```

```
        H(u,v)=exp(-0.005*(((u-M/2)^2+(v-N/2)^2)^(5/6)));
```

```
        H0(u,v)=(abs(H(u,v)))^2;
```

```
        H1(u,v)=H0(u,v)/(H(u,v)*(H0(u,v)+K));
```

```
    end
```

```
end
```

```
F2=F1.*H1; % matlab中的点乘，也即卷积乘法
```

```
f2=ifft2(ifftshift(F2)); % 反移频谱中心-傅里叶反变换
```

```
f2_img=uint8(f2); % 转换成0-255图像数据
```

```
subplot(1,4,4);imshow(f2_img);title('维纳滤波复原图');
```

4.4.2 维纳滤波图像恢复方法

【例】维纳滤波（Wiener Filtering）图像复原MATLAB程序



4.4.2 维纳滤波图像恢复方法

MTALAB中的deconvwnr函数使用 Wiener 滤波对图像进行去模糊处理。

$J = \text{deconvwnr}(I, \text{psf}, \text{nsr})$

$J = \text{deconvwnr}(I, \text{psf}, \text{ncorr}, \text{icorr})$

$J = \text{deconvwnr}(I, \text{psf})$

- **$J = \text{deconvwnr}(I, \text{psf}, \text{nsr})$** : 使用Wiener 滤波算法对图像I进行反卷积，从而返回去模糊后的图像J。psf是对I进行卷积的点扩散函数 (PSF)。nsr是加性噪声的噪信功率比。在估计图像与真实图像之间的最小均方误差意义上，该算法是最优的。
- **$J = \text{deconvwnr}(I, \text{psf}, \text{ncorr}, \text{icorr})$** : 对图像I进行反卷积，其中ncorr是噪声的自相关函数， icorr是原始图像的自相关函数。
- **$J = \text{deconvwnr}(I, \text{psf})$** : 使用Wiener滤波算法对图像I进行反卷积，无估计噪声。在不含噪情况下， Wiener滤波等效于理想的逆滤波。

4.4.2 维纳滤波图像恢复方法

```
%维纳滤波
I=imread('lena.jpg');
N=0.1*randn(size(I)); %创建一个棋盘图像号
PSF=fspecial('motion',21,11);%产生随机噪声——运动模糊
BlurredNoisy = imfilter(I,PSF,'circular');
NP = abs(fftshift(N)).^2;%添加噪声

NPOW = sum(NP(:))/numel(size(N));
NCOR = fftshift(real(ifftn(NP)));
IP = abs (fftshift(N)).^2;%噪声的自相关
IPOW=sum(IP(:))/numel(size(IP));%原始图像功率,numel等同于
prod
ICOR = fftshift(real(ifftn(IP)));
ICOR1 =ICOR(:,ceil(size(IP,1)/2));%图像的自相关
NSR = NPOW/IPOW;
%信噪比

subplot(2,2,1);imshow(BlurredNoisy,[]);
title('模糊和噪声图像');
subplot(2,2,2);
R= deconvwnr(BlurredNoisy,PSF,NSR);
imshow(R,[]);%常数比率维纳斯滤波
title('deconvwnr(A,PSF ,NSR)');
subplot(2,2,3);
R = deconvwnr(BlurredNoisy,PSF,NCOR,ICOR);
imshow(R,[]);%使用自相关的维纳斯滤波
title('deconvwnr(A,PSF,NCOR,ICOR)');
subplot(2,2,4);
R = deconvwnr(BlurredNoisy,PSF,NPOW,ICOR1);
imshow(R,[]);
title('deconvwnr(A,PSF,NPOW,ICOR_1_D)');
```

4.4.2 维纳滤波图像恢复方法

模糊和噪声图像



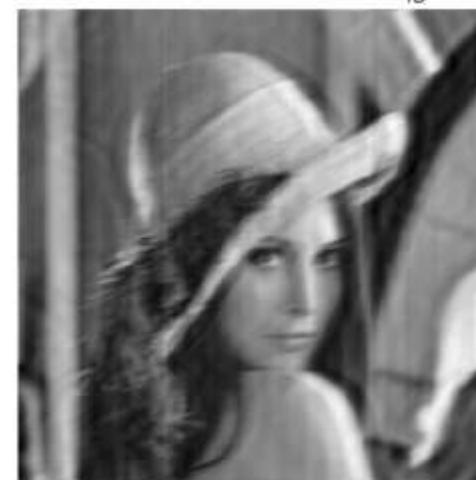
deconvwnr(A,PSF,NSR)



deconvwnr(A,PSF,NCORR,ICORR)



deconvwnr(A,PSF,NPOW,ICORR_1D)



4.4.3 图像恢复的病态性

- 由于在通常情况下无法得知原图像的本来面目，所以恢复后的图像只能是原始图像的一种近似。由于噪声的随机性，使得模糊图像（即被噪声污染的图像）有无限多的可能情况，所以恢复的图像不具有唯一性，这称为图像恢复的**病态性**（ill-posed）。
- 由公式 $n = g - Hf$ 可知，在不考虑图像噪声的情况下，要恢复原图像需要对矩阵H求逆，即 $f = H^{-1}g$ 。实际上，可能有逆矩阵 H^{-1} 不存在的情况，但确实存在有与 f 十分近似的解，这称为图像恢复问题的**奇异性**。



河南大學
Henan University



计算机与信息工程学院

School of Computer and Information Engineering

明德新民 止于至善

4.5 几何失真校正

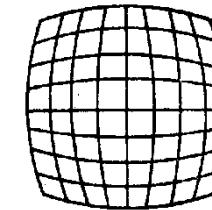
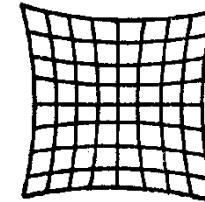
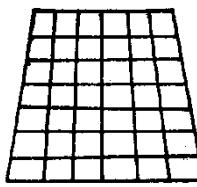
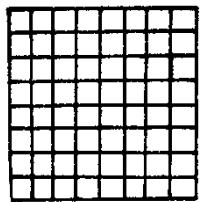


4.5 几何失真校正

由于相机的拍摄姿态、图像传感器承载工具的旋转或姿态的偏差、图像采集或传输过程中受到电磁干扰等，而引起图像画面中出现的**横线不平、竖线不直、圆线不圆**等情况，称为**图像失真**。

4.5 几何失真校正

典型的几何失真：



(a) 原图像 (b) 透视失真 (c) 枕形失真 (d) 桶形失真

图像的几何畸变在广义上属于一种图像退化现象，需要通过几何变换来修正图像中像素之间的空间联系，也即通过几何校正来消除类似于上述所列的各种失真。

4.5 几何失真校正

对图像几何失真校正一般分为两步：

- 首先是对图像进行坐标变换，也即对图像平面上的像素坐标位置进行校正或重新排列，以恢复其原空间关系。
- 其次是进行灰度级插值，也即对空间变换后的图像的像素赋予相应的灰度值，以恢复其原空间位置上的灰度值。

4.5 几何失真校正

设原图像 $f(x, y)$ 的坐标是 x 和 y , 几何畸变的图像 $g(x', y')$ 的坐标为 x' 和 y' , 则两个坐标之间的关系可以用如下变换描述为:

$$\begin{cases} x' = X(x, y) \\ y' = Y(x, y) \end{cases} \quad (4.79)$$

其中, $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 分别表示引起图像平面上位于 (x, y) 处的像素的坐标位置发生变化的单值映射变换函数。

4.5.1 坐标的几何校正

对于线性失真， $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 可分别表示为：

$$X(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \quad (4.80)$$

$$Y(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y \quad (4.81)$$

对于非线性二次失真， $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 可分别表示为：

$$X(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \quad (4.82)$$

$$Y(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 \quad (4.83)$$

其中， a_i 、 b_i 为待定系数。

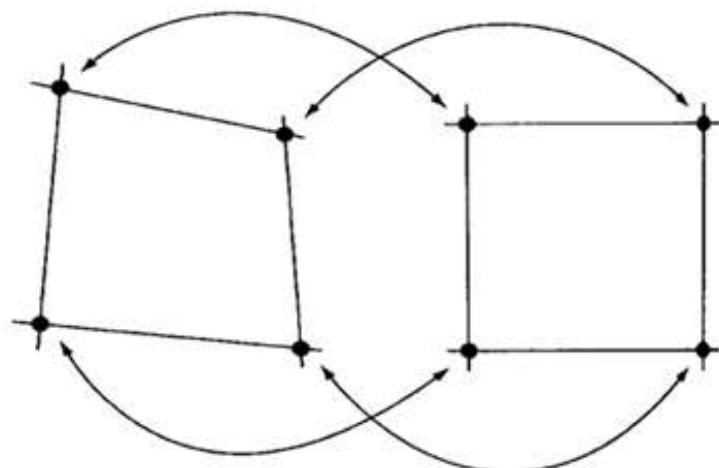
4.5.1 坐标的几何校正

如果已知 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 的解析表达形式，并认为校正后的图像 $\hat{f}(x, y)$ 与原图像 $f(x, y)$ 尽可能地相似，理论上可以用公式（4.79）的反变换将几何畸变的失真图像 $g(x', y')$ 恢复为矫正后的图像 $\hat{f}(x, y)$ 。

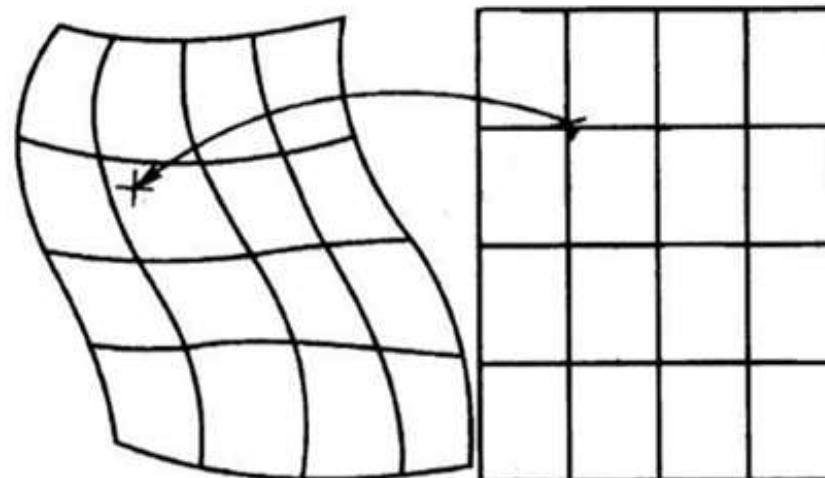
然而在实际中，产生几何畸变的映射函数一般是未知的，因此首先要找到这种映射关系。具体来说在恢复过程中需要在输入图像（失真图像）和输出图像（校正后的图像）上找一些其精确位置已知的点（称为控制点），然后利用这些控制点建立两幅图像的其余像素点的空间位置的对应关系。

4.5.1 坐标的几何校正

图4.8 (a) 给出了失真图像中的某一四边形区域(左)和对应的校正后的图像中的四边形区域（右）及其对应的像素点的关系，四边形的顶点就是“控制点”。图4.8（b）是校正前后图的示例。



(a) 四边形区域像素点对应关系



(b) 几何校正前后素点对应关系

图 4.8 失真图像与校正后的图像的像素点的对应关系

4.5.1 坐标的几何校正

假设失真图像中的某些控制点组成的四边形区域中的某一像素点的坐标为 (x', y') , 与其对应的校正后的图像 $\hat{f}(x, y)$ 中的四边形区域中的像素点的坐标为 (x, y) [由于假设校正后的图像 $\hat{f}(x, y)$ 与原图像 $f(x, y)$ 尽可能地相似, 因此认为校正后的图像的相应坐标也为 (x, y)]。

4.5.1 坐标的几何校正

基于此，四边形区域中的几何失真过程可用如下的双线性方程对来表示为：

$$\begin{cases} X(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \\ Y(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \end{cases} \quad (4.84)$$

将以上公式代入式 (4.79) 即： $\begin{cases} x' = X(x, y) \\ y' = Y(x, y) \end{cases}$

可得：
$$\begin{cases} x' = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \\ y' = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \end{cases} \quad (4.85)$$

4.5.1 坐标的几何校正

对于图4.8 (a) 中的两个四边形来说，已知的对应点有4组共8个，根据式（4.85）可有：

$$x_1' = a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 + a_3x_1y_1$$

$$y_1' = b_0 + b_1x_1 + b_2y_1 + b_3x_1y_1$$

$$x_2' = a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 + a_3x_2y_2$$

$$y_2' = b_0 + b_1x_2 + b_2y_2 + b_3x_2y_2$$

$$x_3' = a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 + a_3x_3y_3$$

$$y_3' = b_0 + b_1x_3 + b_2y_3 + b_3x_3y_3$$

$$x_4' = a_0 + a_1x_4 + a_2y_4 + a_3x_4y_4$$

$$y_4' = b_0 + b_1x_4 + b_2y_4 + b_3x_4y_4$$

根据图4.8 (a) 中4组8个控制点的对应关系，以及校正后图像上的像素坐标与失真图像中相应像素坐标的对应关系，可知图4.8 (a) 中左右两个四边形区域分别在校正后图像中的4个像素点坐标和在失真图像中的4个像素点坐标是已知的，则求解由上述8个关系式组成的方程组即可解出8个待定的系数 a_i 、 b_i ， $i=1, 2, 3, 4$ 。

再将这些系数带入由上述8个关系式组成方程组，就建立了校正四边形区域内所有像素点的空间变换公式（模型）。

4.5.1 坐标的几何校正

通常，在图像的几何畸变校正中，需要足够多的对应控制点以产生覆盖整个图像的四边形集。由于每个四边形的系数集是不同的，运用以上方法即可得得到每个四边形的系数集，由此实现整幅图像中所有像素点的校正。

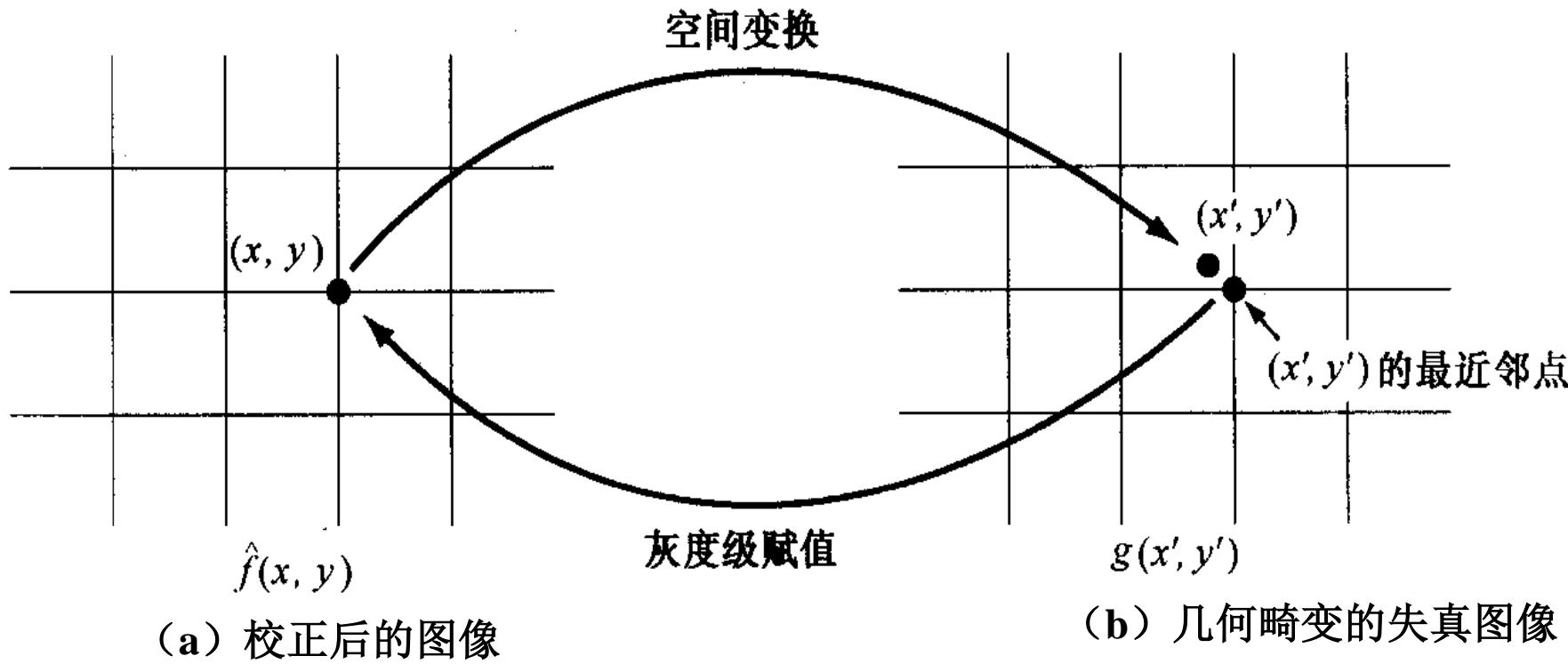
4.5.2 灰度值恢复

对于数字图像来说，原图像 $f(x, y)$ 以及几何畸变的失真图像 $g(x', y')$ 二者的像素值都应定义在**整数坐标**上，即 x 、 y 、 x' 、 y' 都应是**整数值**。

然而在图像恢复过程中，根据确定的待定系数建立的空间变换模型计算出的 x' 和 y' 可能是**非整数值**，这样用非整数值的坐标位置 (x', y') 确定的一个到 $g(x', y')$ 的映射会没有灰度定义，因此需要用其周围的整数坐标位置上的像素值来推算该非整数的坐标位置的像素值，即进行**灰度插值**。

4.5.2 灰度值恢复

最简单的灰度插值是最近邻插值，也称为零阶插值。

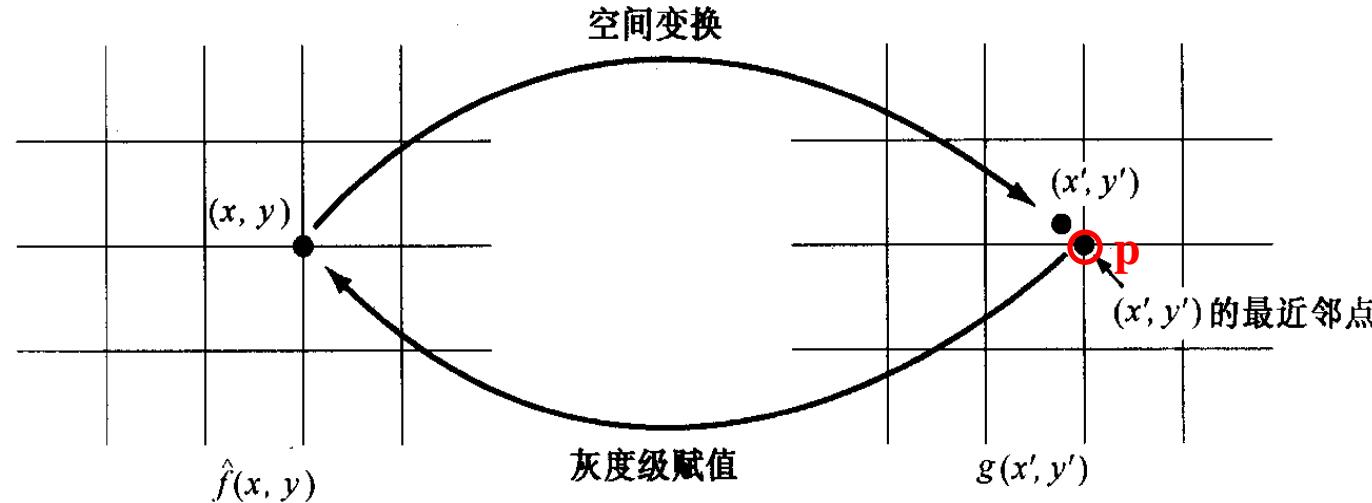


最简单的最近邻插值法示意图

4.5.2 灰度值恢复

理想情况下，校正后的图像不应该再有失真，即校正后的图像 $\hat{f}(x, y)$ 的坐标位置应与原图像 $f(x, y)$ 的坐标位置完全吻合。由于失真，原图像中的整数坐标点 (x, y) （也即上图左部 $\hat{f}(x, y)$ 中的 (x, y) ）就会映射到失真图像 $g(x', y')$ 中的非整数坐标位置 (x, y) （也即，上图右边由整数坐标像素位置组成的网格中的非整数位置的 (x', y') ），但非整数坐标位置的像素点是没有定义。

4.5.2 灰度值恢复



为了表述方便，若将整数坐标位置的“ (x', y') 的最近邻点”记为像素点 p ，则所谓最近邻插值，就是将 (x', y') 处的灰度值，看作是与其最近邻的整数坐标位置的像素点 p 的灰度值，并将其赋给校正后图像 $\hat{f}(x, y)$ 的位于 (x, y) 处的像素。

4.5.2 灰度值恢复

最近邻插值法对几何畸变失真图像进行校正的步骤：

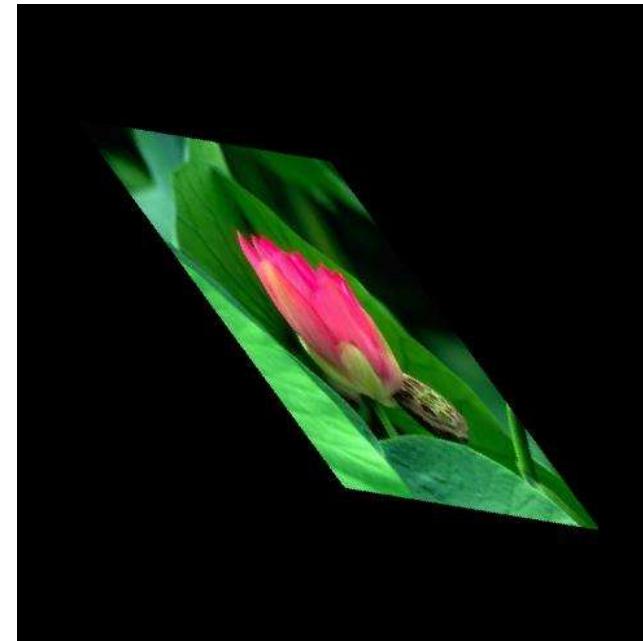
- (1) 根据控制点划分图像的四边形区域，认为每个四边形区域内可以用式(4.85)近似表示校正后图像与失真图像的关系。
- (2) 分别对每个四边形区域，确定校正后图像与失真图像上的四边形的对应点，并利用式(4.85)建立方程组。
- (3) 求解方程组，将校正后图像的所有整数坐标点 (x,y) 映射到失真图像上的非整数坐标 (x,y)
- (4) 选择与 (x',y') 最近邻的整数坐标。
- (5) 令校正后图像位于 (x,y) 处的像素灰度值，取由第(3)步和第(4)步确定的整数坐标处的像素灰度值。

4.5.3 几何校正演示

■ 实例



原始图像



几何失真图像

4.5.3 几何校正演示

```
clear,clc,close all;

Image=im2double(imread('lotus.jpg'));
[h,w,c]=size(Image);

subplot(131),imshow(Image),title('原图');

RI=imrotate(Image,20);

tform=affine2d([1 0.5 0;0.5 1 0; 0 0 1]);    % affine2d对象存储有关二维仿射几何变换

NewImage=imwarp(RI,tform); %根据几何变换tform来变换数值、逻辑或分类图像A。

subplot(132),imshow(NewImage),title('几何畸变图像');

cpselect(NewImage,Image);    %选择控制点，在界面中文件->将控制点导出到工作区

tform=fitgeotrans(movingPoints,fixedPoints,'affine');

R=imref2d([h,w],[1 w],[1 h]); %% 不扩大尺寸输出图像对象

result=imwarp(NewImage,tform,'OutputView',R);

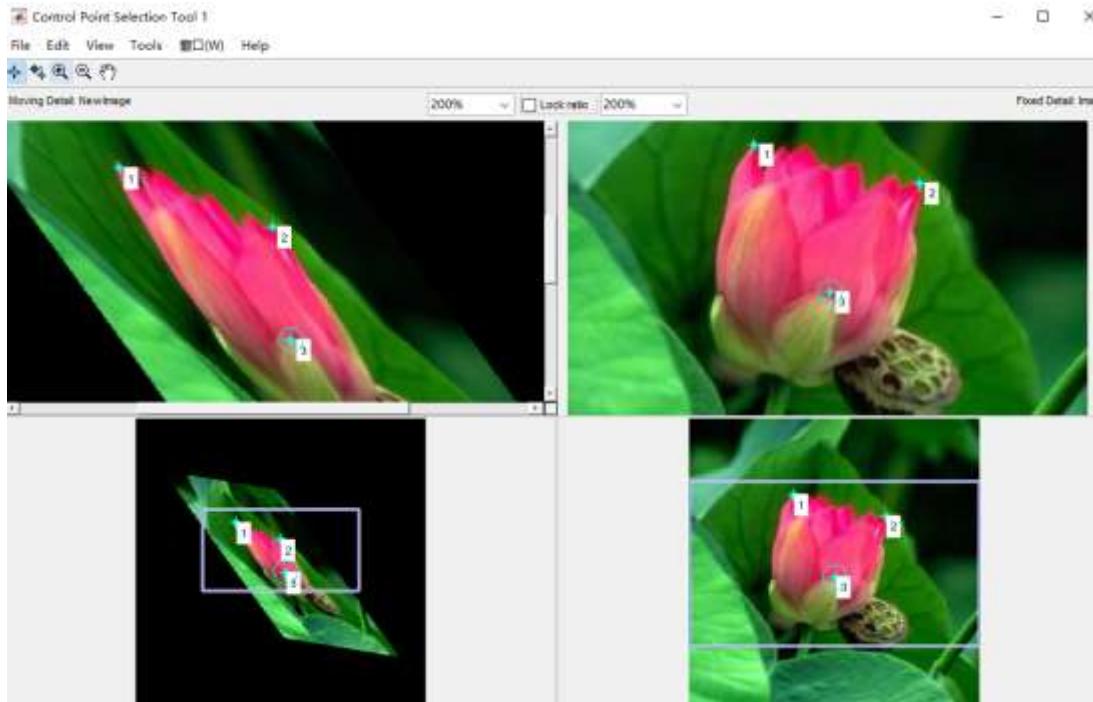
subplot(133),imshow(result),title('校正后的图像');
```

4.5.3 几何校正演示

当变换类型是afine时，其变换参数为3x3矩阵。设原始图像坐标系统为 (x,y) ，几何失真后图像的坐标系统为 (x',y') ，则有 $(x' \ y' \ 1) = (x \ y \ 1)T$ ，其中 T 为变换矩阵。

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00}^*x + m_{01}^*y + m_{02} \\ m_{10}^*x + m_{11}^*y + m_{12} \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.5.3 几何校正演示



连接点选择



校正后的图像

例子中是采用几何变换生成的几何失真图像，手工标记的对应点，在实际问题中，需要检测图中的特殊点来建立对应关系。

THE END
Thank You.

