Caminho Mínimo (2)

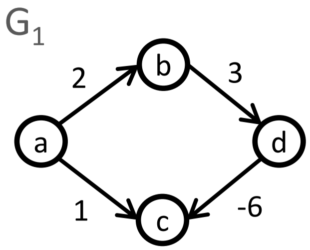
Zenilton Patrocínio

Caminho Mínimo com Custos Negativos

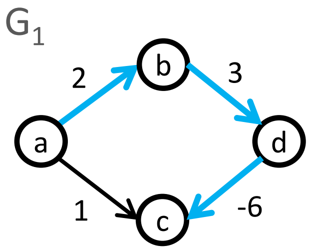
Além de distâncias geográficas, caminhos mais curtos podem ser usados para modelar diversas outras situações reais, incluindo aquelas que necessitam de arestas cujo peso é negativo:

- Movimentações financeiras, nas quais é possível obter lucro ou prejuízo;
- Um taxista que recebe mais dinheiro do que gasta com combustível a cada viagem: se o táxi roda vazio, ele gasta mais do que recebe;
- Um entregador que necessita atravessar um pedágio e pode acabar pagando mais do que recebe para entregar encomendas;
- A energia gerada e consumida durante uma reação química;
- . . .

Exemplos

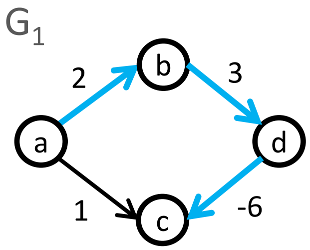


Exemplos



Método de
Dijkstra falha!

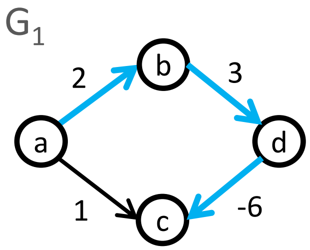
Exemplos



Reponderar (adicionando uma constante) também pode falhar!

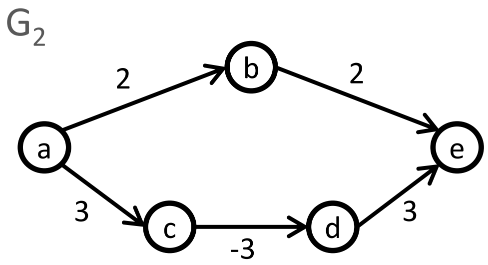
Método de Dijkstra falha!

Exemplos



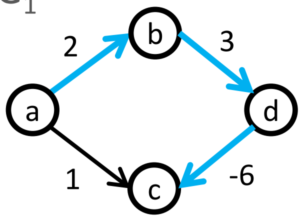
Método de Dijkstra falha!

Reponderar (adicionando uma constante) também pode falhar!



Exemplos

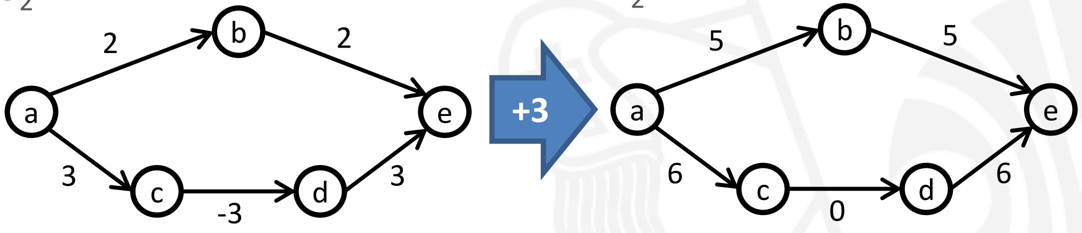
G_1



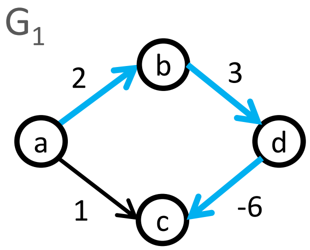
Método de Dijkstra falha!

Reponderar (adicionando uma constante) também pode falhar!

G_2 G'_2

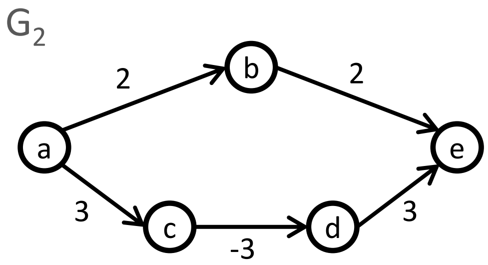


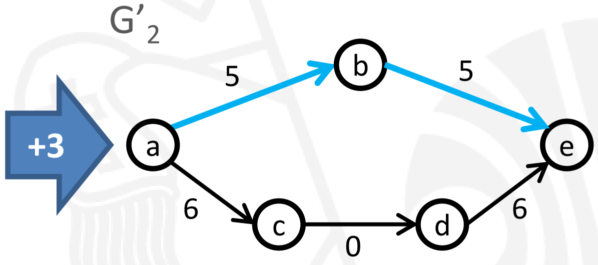
Exemplos



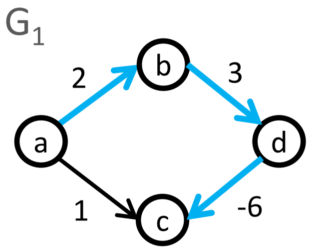
Método de Dijkstra falha!

Reponderar (adicionando uma constante) também pode falhar!



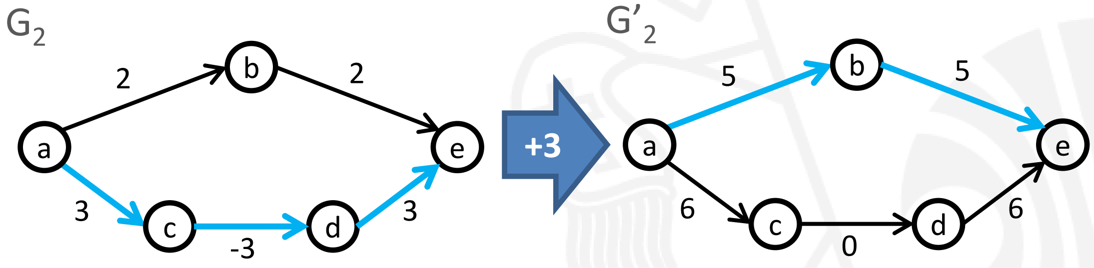


Exemplos



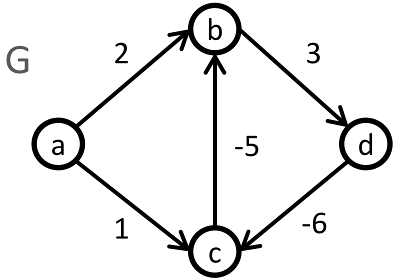
Método de Dijkstra falha!

Reponderar (adicionando uma constante) também pode falhar!



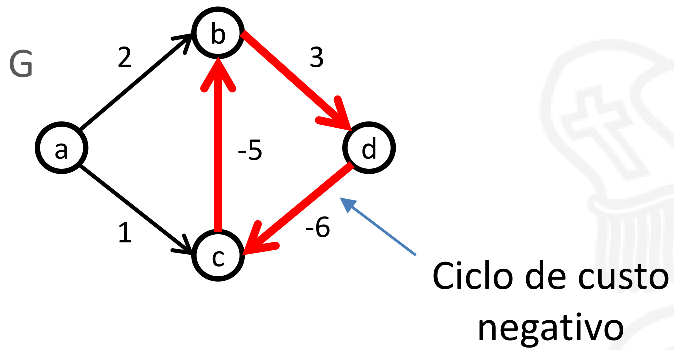
Ciclo de Custo Negativo

Se um caminho do vértice s para o vértice t contém um ciclo de custo negativo, então não há caminho mínimo entre s e t; caso contrário ele existe e é "simples" (isto é, não há repetição de vértices).



Ciclo de Custo Negativo

Se um caminho do vértice s para o vértice t contém um ciclo de custo negativo, então não há caminho mínimo entre s e t; caso contrário ele existe e é "simples" (isto é, não há repetição de vértices).



Método de Bellman-Ford

Método de Bellman-Ford

Calcula caminhos mais curtos via programação dinâmica.

Ao invés de “fechar” um vértice por iteração, como o método de Dijkstra, examina todos os vértices de um grafo a cada iteração até que atualizações não sejam mais possíveis.

Em um grafo com n vértices, qualquer caminho possui no máximo $n - 1$ arestas, portanto, cada vértice é examinado no máximo $n - 1$ vezes.

Com esta estratégia, é possível calcular caminhos mínimos em grafos com arestas de peso negativo (mas sem ciclos negativos).

Método de Bellman-Ford

Assim como o método de Dijkstra, baseia-se no princípio de relaxação: uma aproximação da distância da origem até cada vértice é gradualmente atualizada por valores mais precisos até que a solução ótima seja atingida.

Se, em alguma iteração os caminhos até cada um dos vértices permanecerem inalterados, não haverá atualizações nas próximas iterações e o algoritmo pode terminar.

Entretanto, se houver atualizações na última iteração do algoritmo, é sinal de que há pelo menos um ciclo negativo no grafo, dado que algum caminho terá n arestas ou mais.

Princípio da Relaxação

Relaxação de arestas: mantém-se um potencial dist[ ] sobre os vértices do grafo e relaxa, sistematicamente, as arestas que estão tensas em relação a esse potencial.

Operação de relaxação

se dist[v] + d_{vw} < dist[w] então // se aresta (v, w) está tensa?

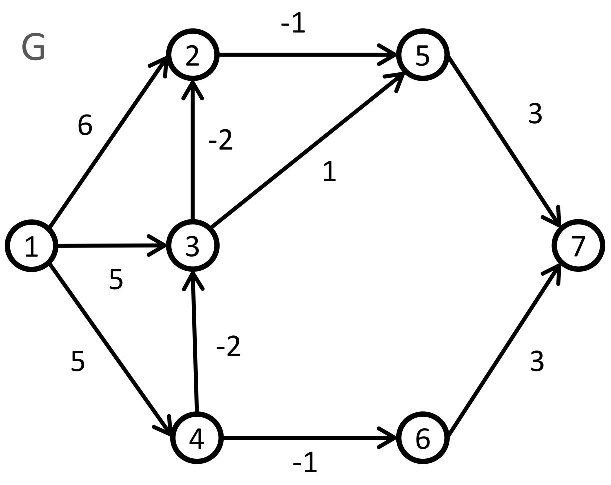
dist[w] $\leftarrow$ dist[v] + d_{vw}

pred[w] $\leftarrow$ v

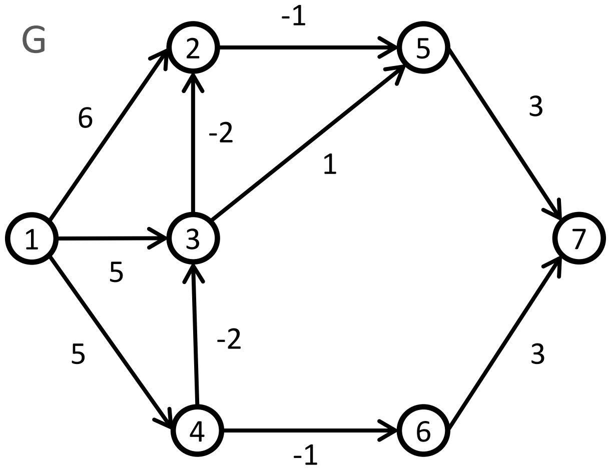
Método de Bellman-Ford – Algoritmo

1. para todo vértice $v \in V(G)$ faça
    a. dist[v] $\leftarrow \infty$; // Inicializar distâncias
    b. pred[v] $\leftarrow \varnothing$; // Inicializar predecessores
2. dist[s] $\leftarrow$ 0; // Fazer distância da raiz igual a zero
3. para i = 1, . . ., |V(G)| – 1 faça
    para cada (v, w) $\in$ E(G) faça
        se dist[w] > dist[v] + d_{vw} então // Se aresta está tensa?
            i. dist[w] $\leftarrow$ dist[v] + d_{vw}; // Atualizar a distância
            ii. pred[w] $\leftarrow$ v; // Atualizar predecessor de w

Método de Bellman-Ford – Exemplo

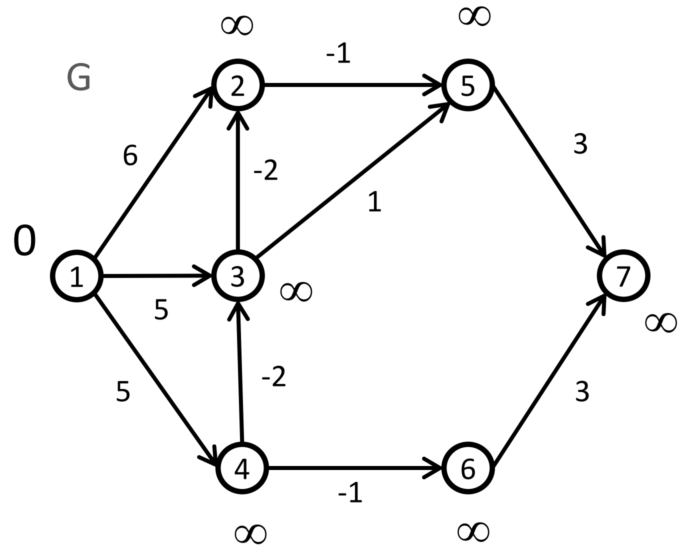


Método de Bellman-Ford – Exemplo



Lista de arestas:
(1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)

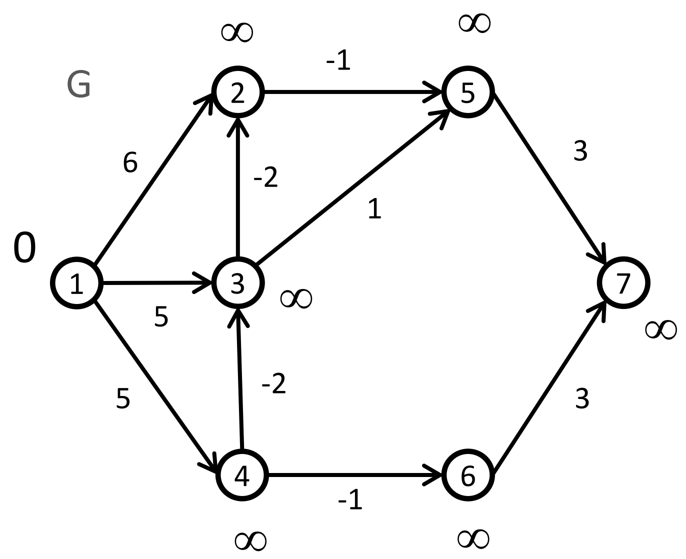
Método de Bellman-Ford – Exemplo



Lista de arestas:
(1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1							
2							
3							
4							

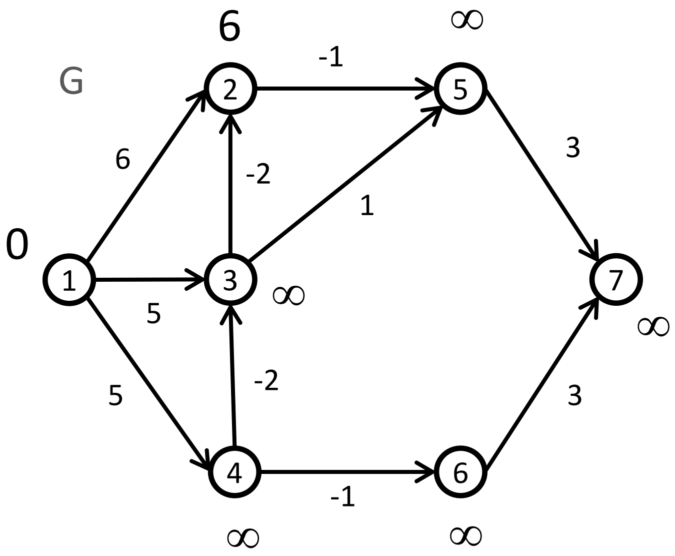
Método de Bellman-Ford – Exemplo



Lista de arestas:
(1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2							
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

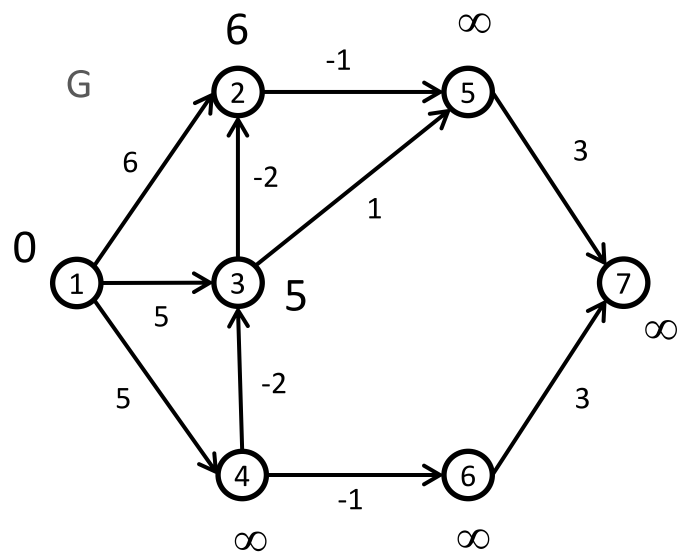


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ (1,3) (1,4) (2,5) (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	6	∞	∞	∞	∞	∞
2							
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

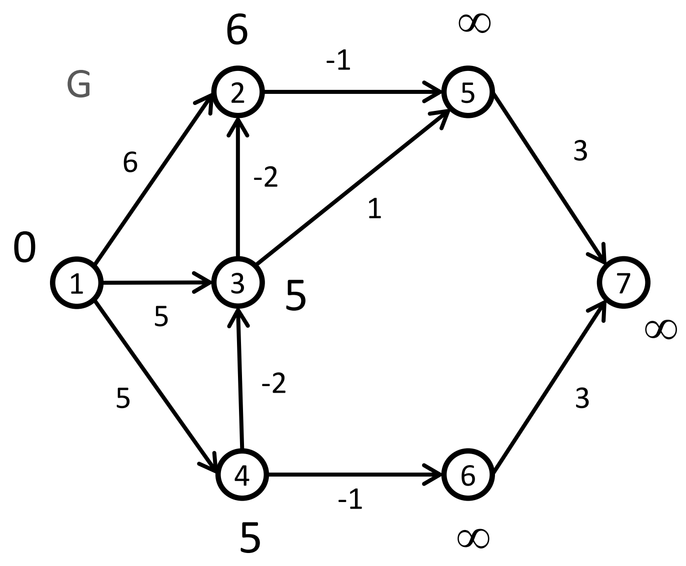


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ (1,4) (2,5) (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	6	5	∞	∞	∞	∞
2							
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

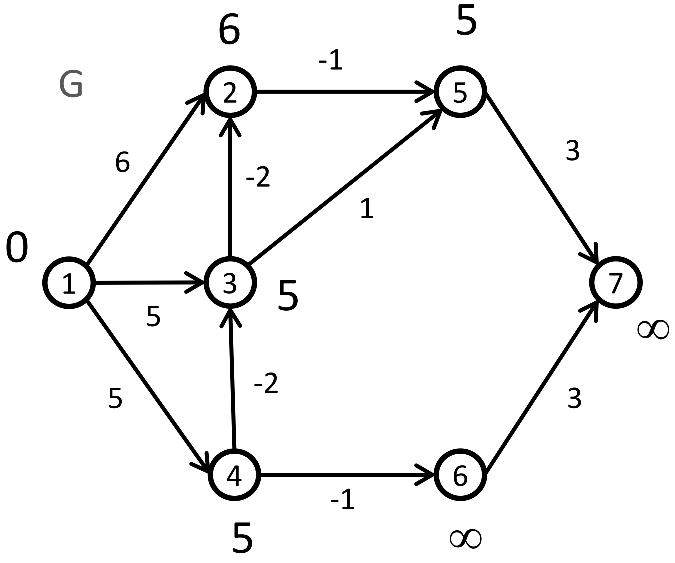


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ (2,5) (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	6	5	5	∞	∞	∞
2							
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

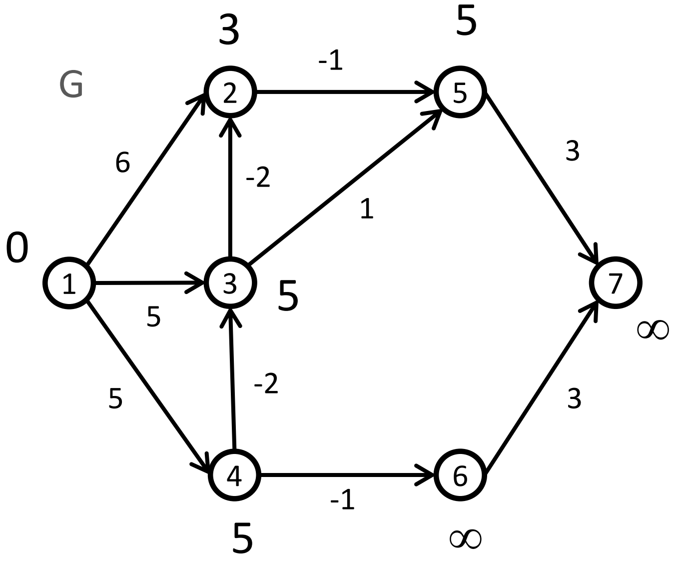


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ ~~(2,5)~~ (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	6	5	5	5	∞	∞
2							
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

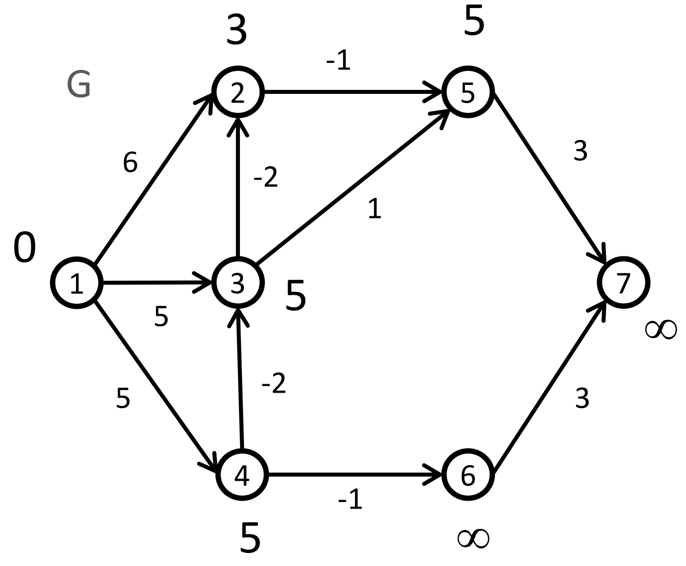


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ ~~(2,5)~~ ~~(3,2)~~ (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	5	5	5	∞	∞
2							
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

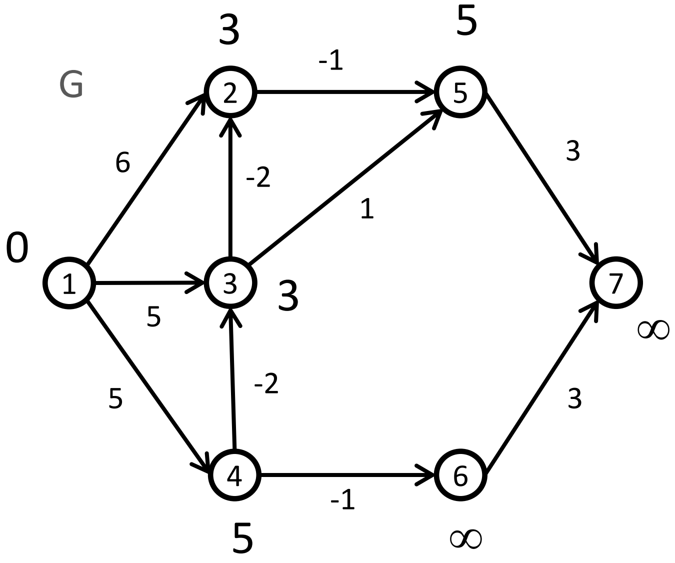


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ ~~(2,5)~~ ~~(3,2)~~ ~~(3,5)~~ (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	5	5	5	∞	∞
2							
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

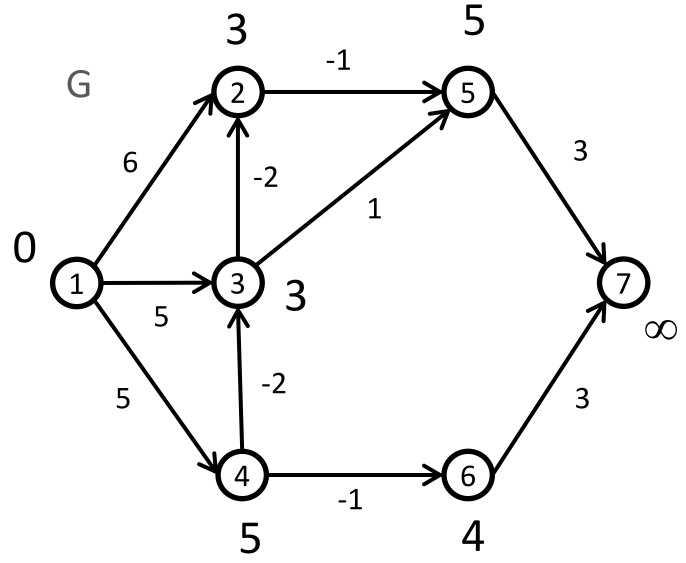


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ ~~(2,5)~~ ~~(3,2)~~ ~~(3,5)~~ ~~(4,3)~~ (4,6) (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	3	5	5	∞	∞
2							
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

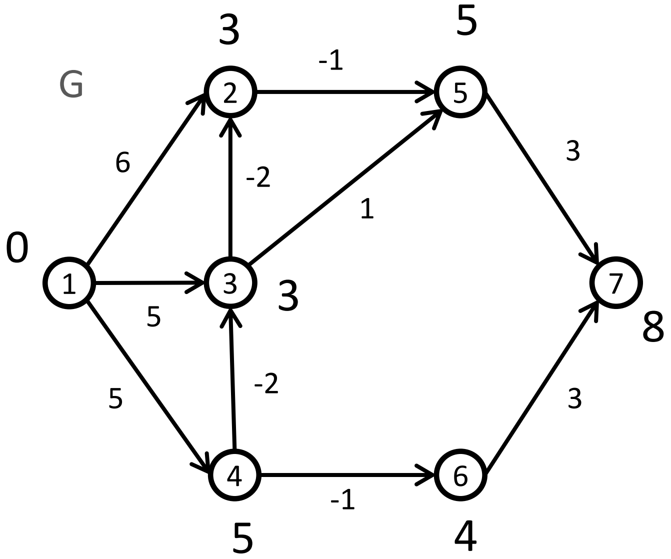


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ ~~(2,5)~~ ~~(3,2)~~ ~~(3,5)~~ ~~(4,3)~~ ~~(4,6)~~ (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	3	5	5	4	∞
2							
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

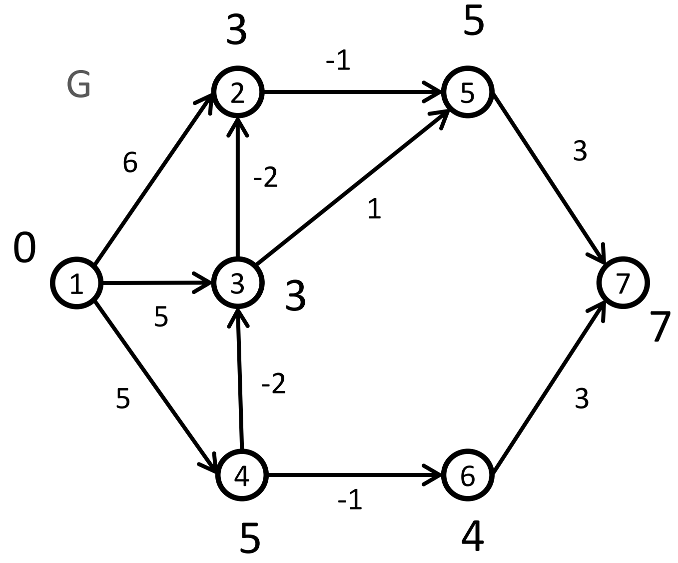


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ ~~(2,5)~~ ~~(3,2)~~ ~~(3,5)~~ ~~(4,3)~~ ~~(4,6)~~ ~~(5,7)~~ (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	3	5	5	4	8
2							
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

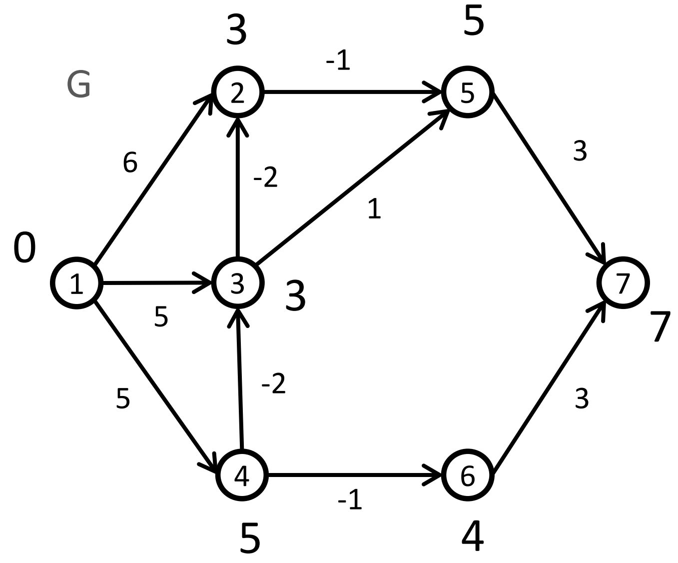


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ ~~(2,5)~~ ~~(3,2)~~ ~~(3,5)~~ ~~(4,3)~~ ~~(4,6)~~ ~~(5,7)~~ ~~(6,7)~~

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	3	5	5	4	7
2							
3							
4							

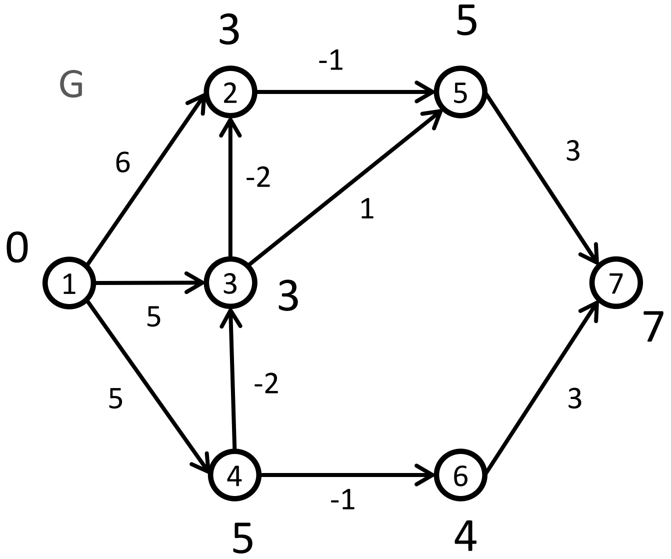
Método de Bellman-Ford – Exemplo



Lista de arestas:
(1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	3	5	5	4	7
2	0	3	3	5	5	4	7
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

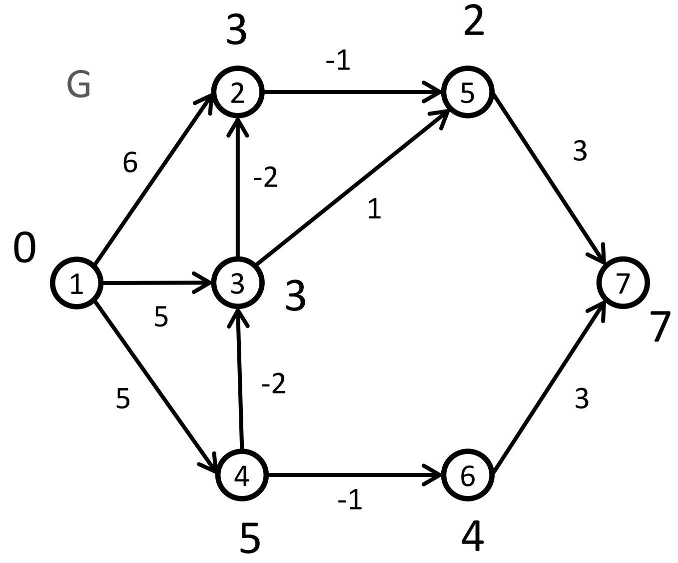


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ (2,5) (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	3	5	5	4	7
2	0	3	3	5	5	4	7
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

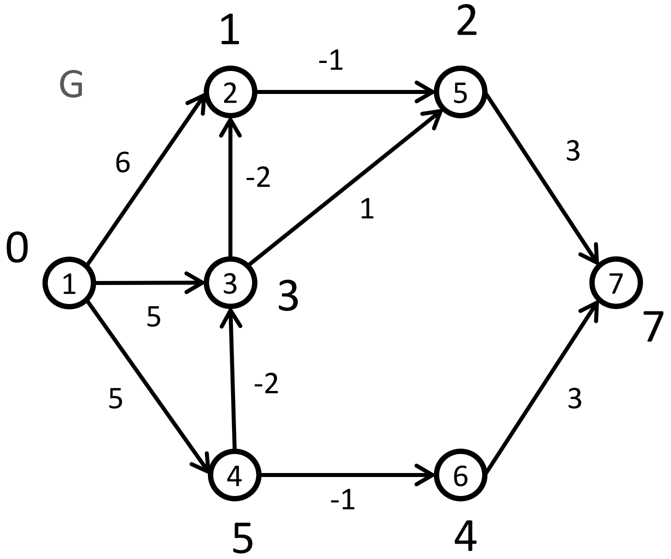


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ ~~(2,5)~~ (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	3	5	5	4	7
2	0	3	3	5	2	4	7
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

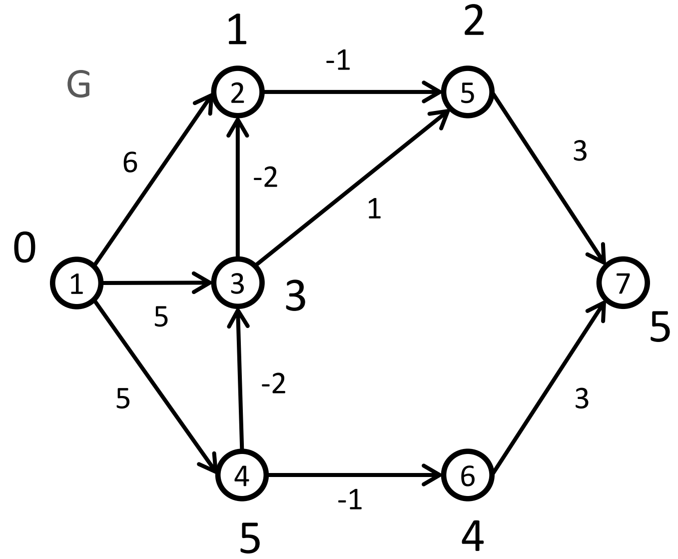


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ ~~(2,5)~~ ~~(3,2)~~ ~~(3,5)~~ ~~(4,3)~~ ~~(4,6)~~ (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	3	5	5	4	7
2	0	1	3	5	2	4	7
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

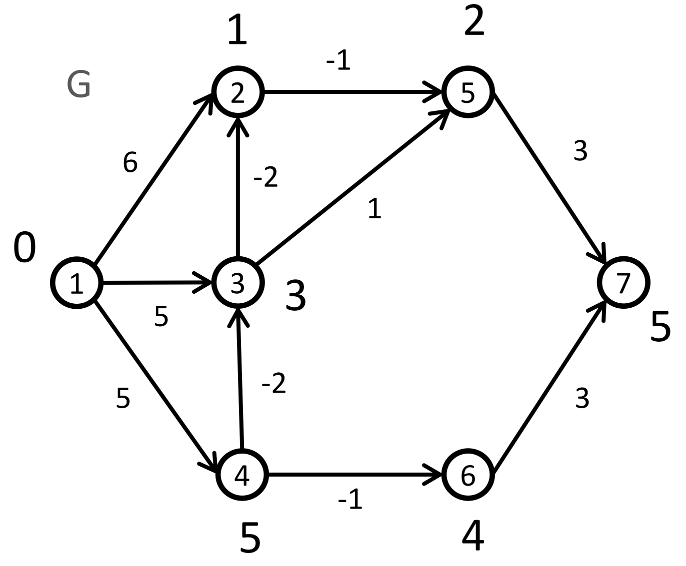


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ ~~(2,5)~~ ~~(3,2)~~ ~~(3,5)~~ ~~(4,3)~~ ~~(4,6)~~ ~~(5,7)~~ ~~(6,7)~~

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	3	5	5	4	7
2	0	1	3	5	2	4	5
3							
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

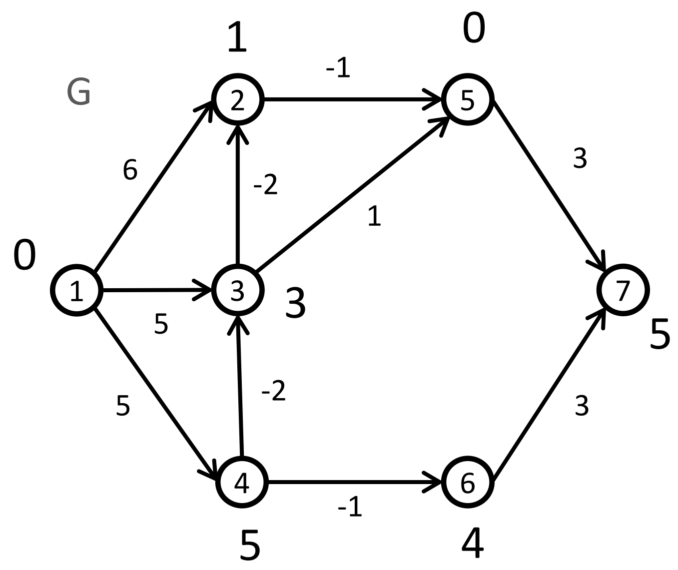


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ (2,5) (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	3	5	5	4	7
2	0	1	3	5	2	4	5
3	0	1	3	5	2	4	5
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

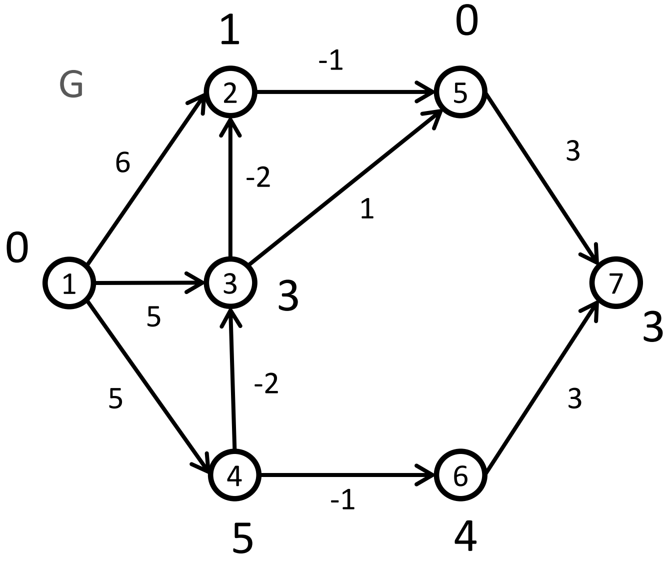


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ ~~(2,5)~~ ~~(3,2)~~ ~~(3,5)~~ ~~(4,3)~~ ~~(4,6)~~ (5,7) (6,7)

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	3	5	5	4	7
2	0	1	3	5	2	4	5
3	0	1	3	5	0	4	5
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo

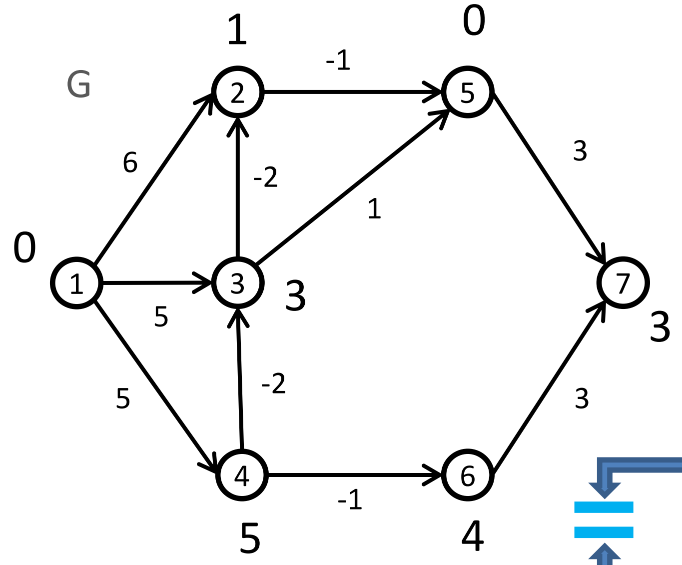


Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ ~~(2,5)~~ ~~(3,2)~~ ~~(3,5)~~ ~~(4,3)~~ ~~(4,6)~~ ~~(5,7)~~ ~~(6,7)~~

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	3	5	5	4	7
2	0	1	3	5	2	4	5
3	0	1	3	5	0	4	3
4							

Método de Bellman-Ford – Exemplo



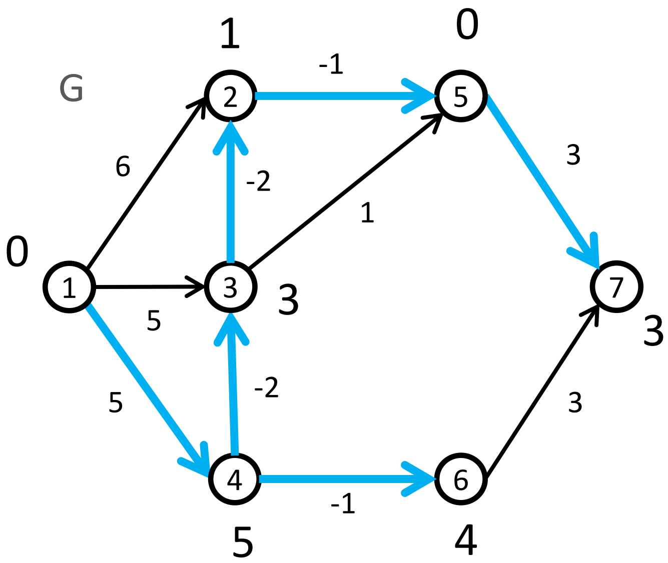
Lista de arestas:

~~(1,2)~~ ~~(1,3)~~ ~~(1,4)~~ ~~(2,5)~~ ~~(3,2)~~ ~~(3,5)~~ ~~(4,3)~~ ~~(4,6)~~ ~~(5,7)~~ ~~(6,7)~~

i	1	2	3	4	5	6	7
–	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	3	3	5	5	4	7
2	0	1	3	5	2	4	5
3	0	1	3	5	0	4	3
4	0	1	3	5	0	4	3

=

Método de Bellman-Ford – Exemplo



	1	2	3	4	5	6	7
dist	0	1	3	5	0	4	3
pred	∅	3	4	1	2	4	5