Fluxo Máximo (1)

Zenilton Patrocínio

Rede de Fluxo

Uma rede de fluxo é um grafo direcionado e ponderado $G = (V, E)$ em que se associa a cada aresta $e \in E$ um valor de capacidade $u(e) > 0$.

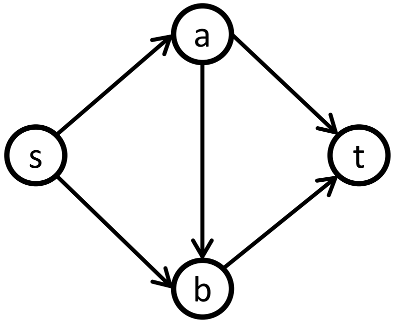
Existem dois vértices especiais em uma rede de fluxo:

- **Vértice s**: "*source*" (ou fonte) que representa a origem fluxo; e
- **Vértice t**: "*terminal*" (ou sumidouro) que representa o destino do fluxo.

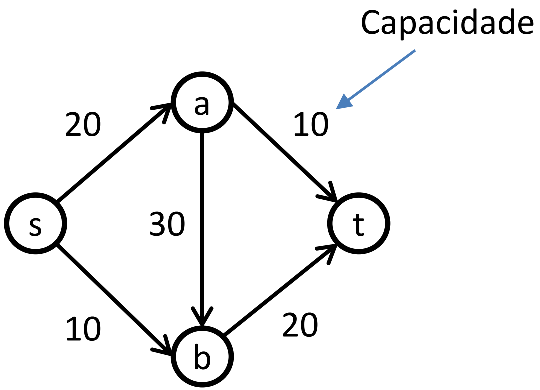
Os demais nós da rede são denominados nós internos.

Assume-se que não há arestas entrando em **s** nem saindo de **t**, que todo vértice possui pelo menos uma aresta incidente a ele e que as capacidades são inteiras.

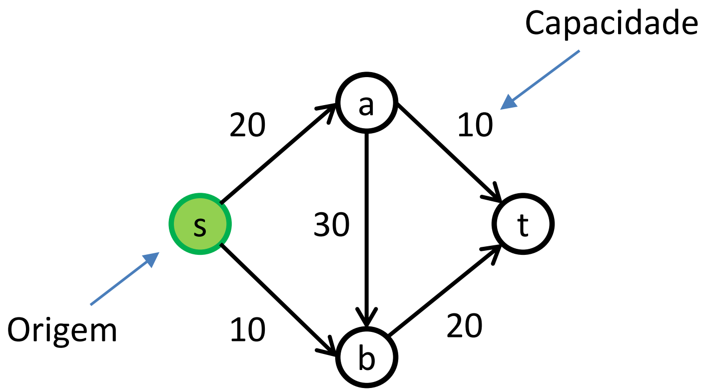
Rede de Fluxo – Exemplo



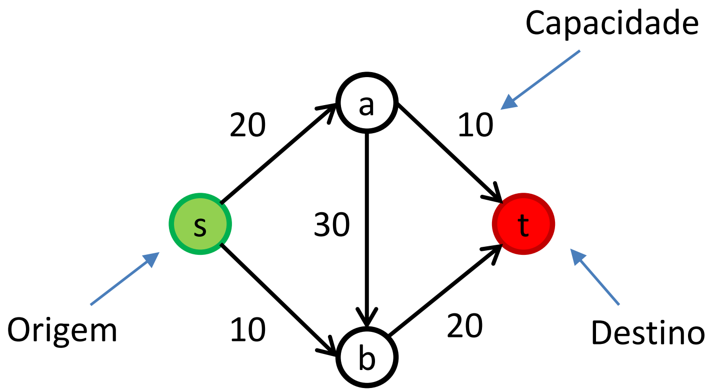
Rede de Fluxo – Exemplo



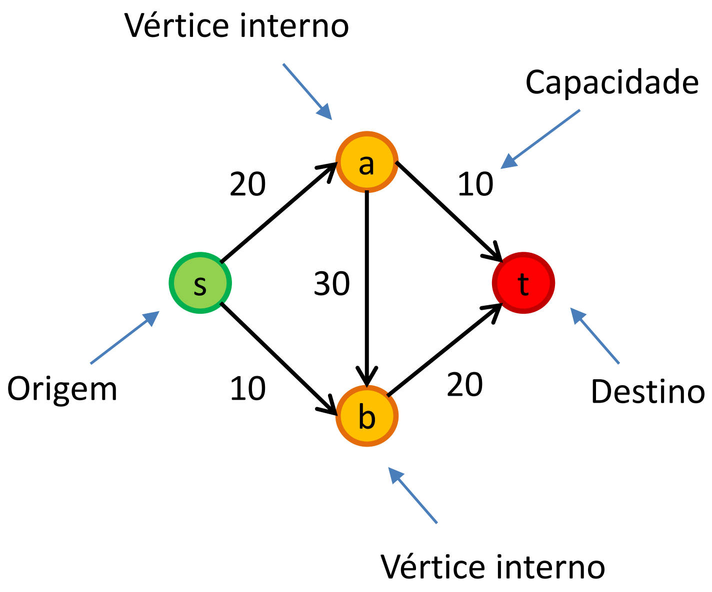
Rede de Fluxo – Exemplo



Rede de Fluxo – Exemplo



Rede de Fluxo – Exemplo



Fluxo

Um fluxo f de **s** a **t** em uma rede é uma função que associa a cada aresta $e \in E$ um número real não negativo $f(e)$ satisfazendo às seguintes condições:

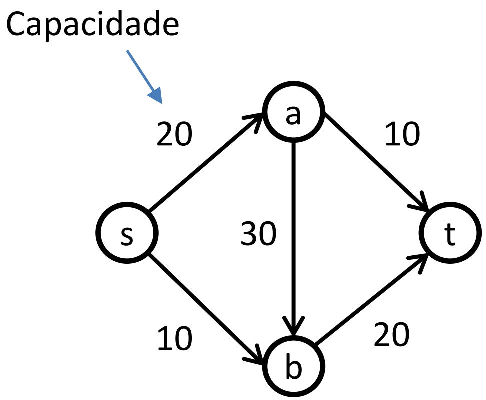
- **Condição de capacidade**: Para toda aresta $e \in E$, seu valor de fluxo é não negativo e não pode exercer sua capacidade, isto é,

$$0 \leq f(e) \leq u(e)$$

- **Condição de conservação**: Para todo vértice interno v, a soma dos fluxos das arestas que entram em v é igual ao total de fluxo das arestas que saem de v, isto é,

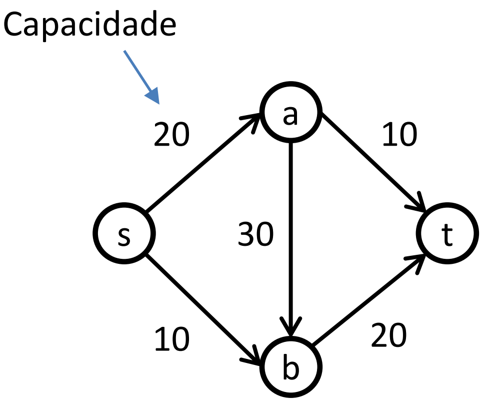
$$\sum_{e \in \Gamma^-(v)} f(e) = \sum_{e \in \Gamma^+(v)} f(e)$$

Fluxo – Exemplo

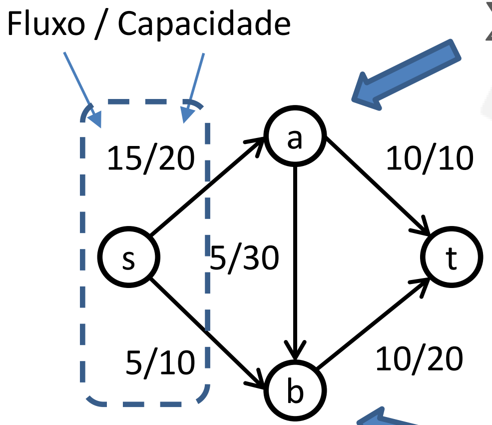


Rede de Fluxo

Fluxo – Exemplo



Rede de Fluxo



Fluxo = 20

Fluxo Viável

$$\sum_{e \in \Gamma^-(a)} f(e) = \sum_{e \in \Gamma^+(a)} f(e)$$

Valor total do fluxo

=

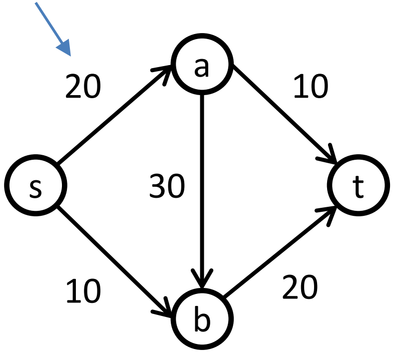
Fluxo que sai da origem

$$\sum_{e \in \Gamma^-(b)} f(e) = \sum_{e \in \Gamma^+(b)} f(e)$$

Fluxo – Exemplo

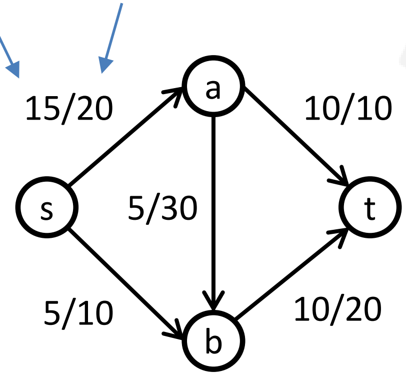
$$\sum_{e\in\Gamma^-(a)} f(e) \neq \sum_{e\in\Gamma^+(a)} f(e)$$

Capacidade

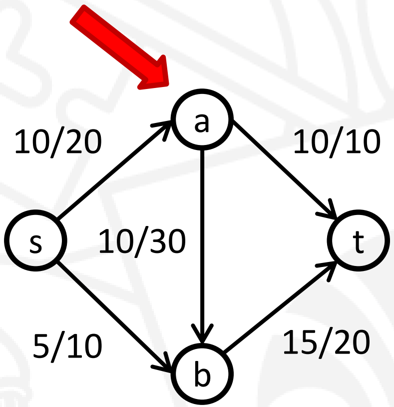


Rede de Fluxo

Fluxo / Capacidade



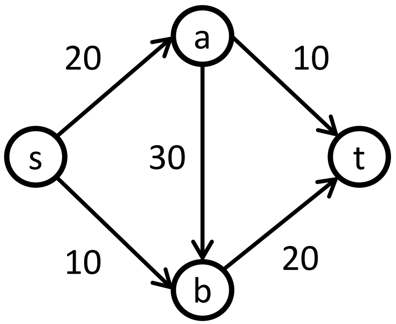
Fluxo Viável



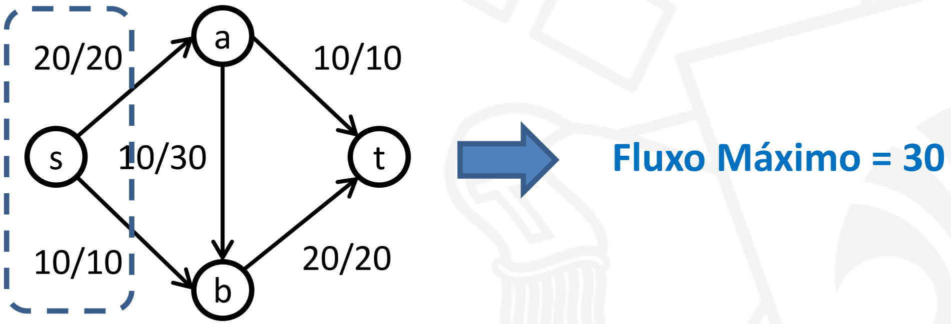
Fluxo Inviável

Fluxo Máximo

Dada uma rede, o problema de fluxo máximo consiste em determinar o maior valor de fluxo viável entre a fonte **s** e o sumidouro **t**.



Rede de Fluxo



Fluxo Máximo

Método de Ford-Fulkerson

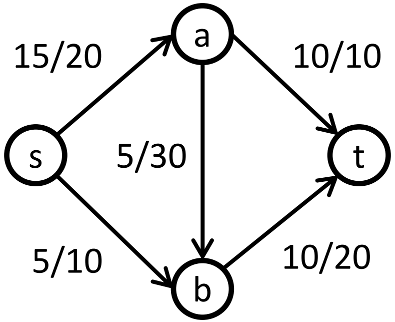
Rede Residual

Dado um fluxo f em uma rede G = (V, E), a rede residual G'(f) é um grafo direcionado ponderado que:

- Possui os mesmos vértices que G, isto é, V(G') = V(G);
- Para toda aresta $e = (v, w) \in E$ tal que $f(e) < u(e)$, G'(f) contém a aresta direta (v, w) com capacidade (residual) igual a $u_r(e) = u(e) – f(e)$;
- Para toda aresta $e = (v, w) \in E$ tal que $f(e) > 0$, G'(f) contém a aresta reversa (w, v) com capacidade (residual) igual a $u_r(e) = f(e)$.

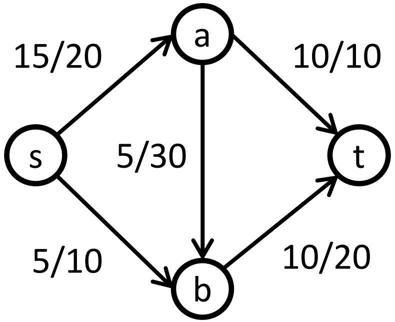
Um caminho na rede residual saindo da fonte **s** até o sumidouro **t** é chamado de caminho aumentante (ou caminho de aumento de fluxo).

Rede Residual – Exemplo

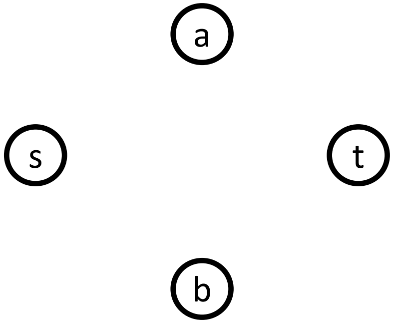


Fluxo Viável

Rede Residual – Exemplo

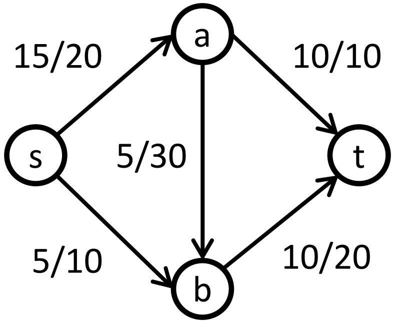


Fluxo Viável

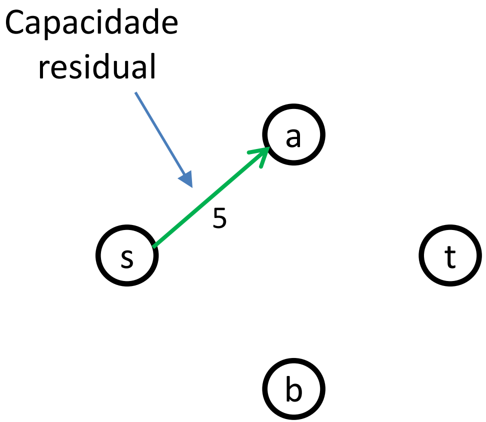


Rede Residual

Rede Residual – Exemplo

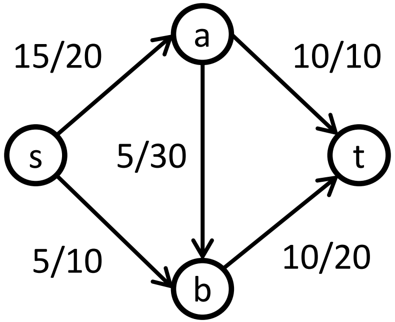


Fluxo Viável

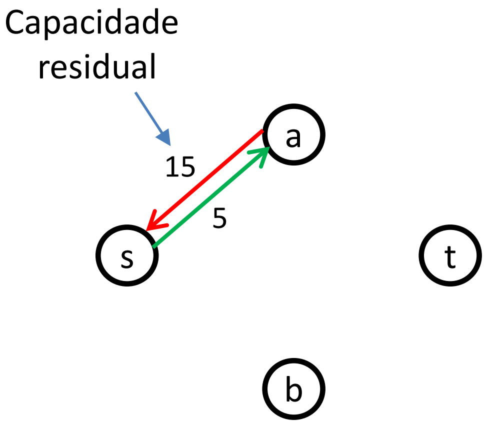


Rede Residual

Rede Residual – Exemplo

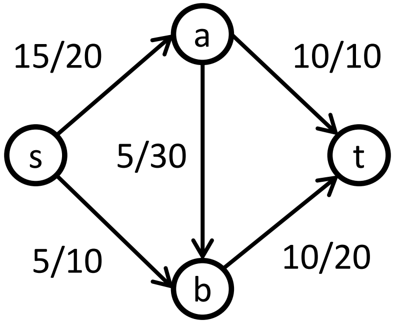


Fluxo Viável

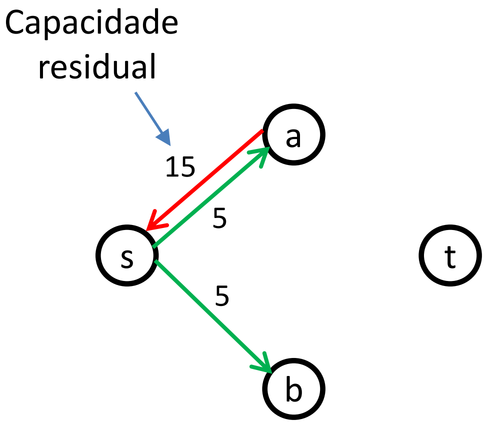


Rede Residual

Rede Residual – Exemplo

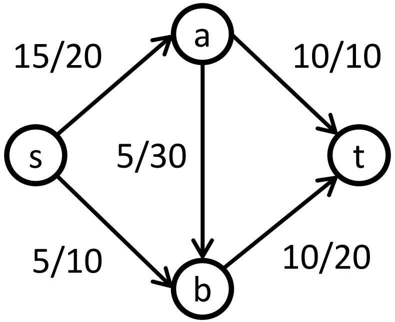


Fluxo Viável

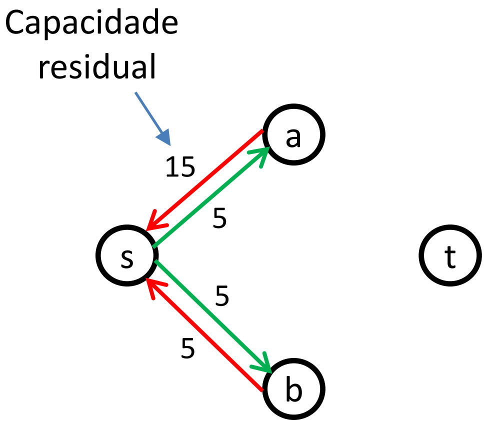


Rede Residual

Rede Residual – Exemplo

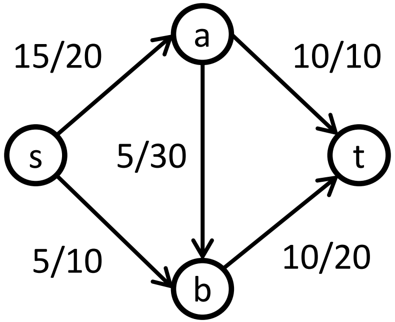


Fluxo Viável

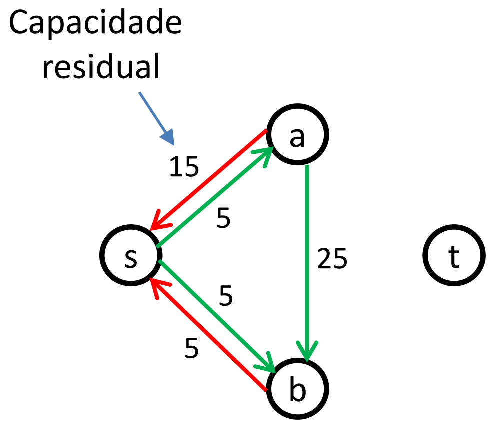


Rede Residual

Rede Residual – Exemplo

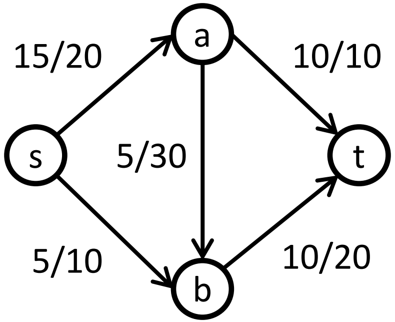


Fluxo Viável

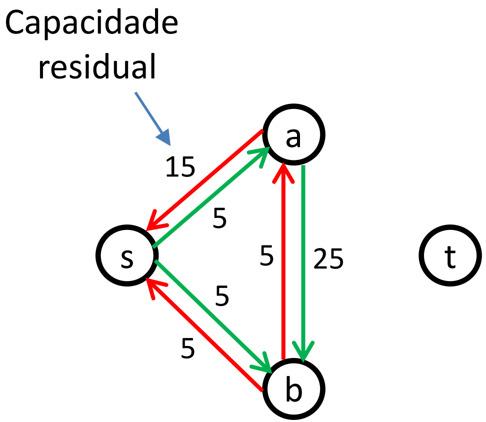


Rede Residual

Rede Residual – Exemplo

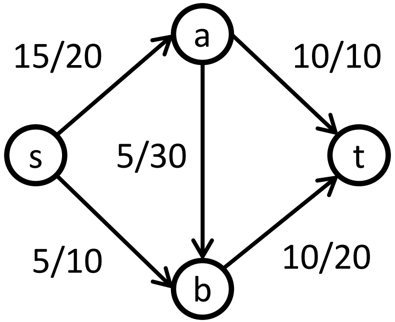


Fluxo Viável

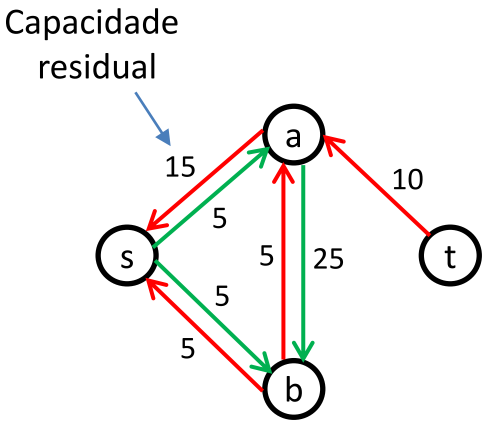


Rede Residual

Rede Residual – Exemplo

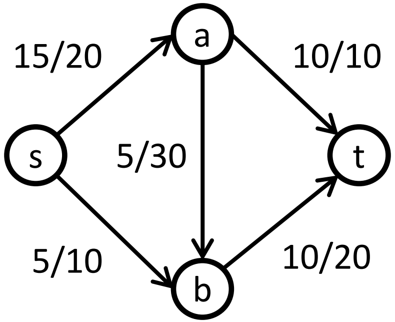


Fluxo Viável

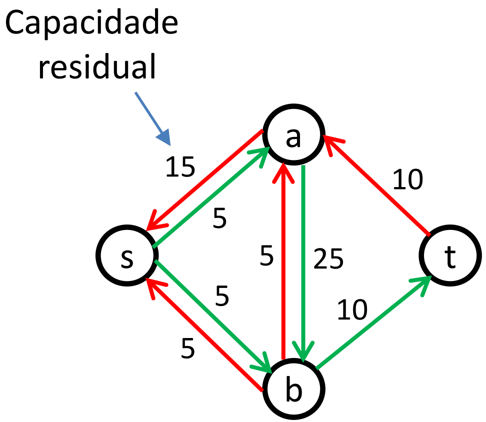


Rede Residual

Rede Residual – Exemplo

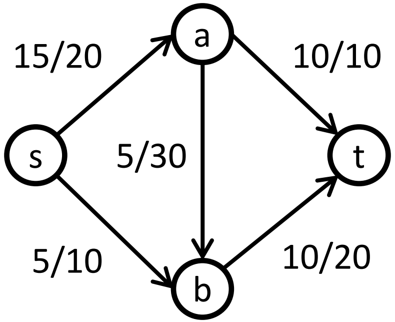


Fluxo Viável

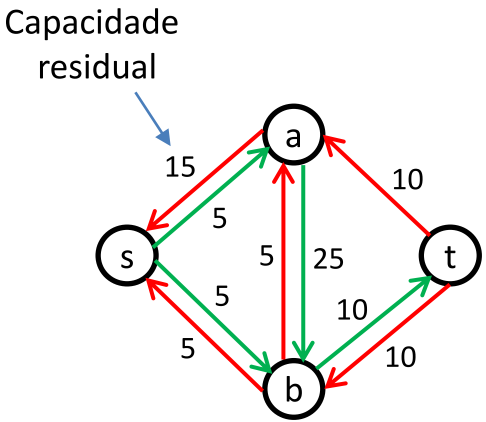


Rede Residual

Rede Residual – Exemplo

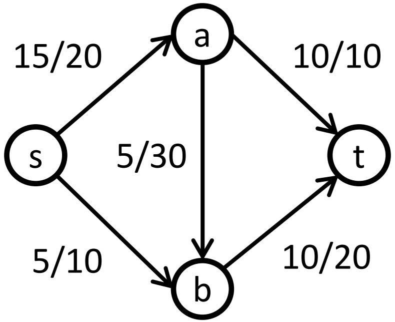


Fluxo Viável



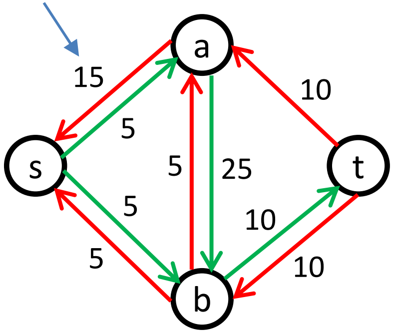
Rede Residual

Rede Residual – Exemplo

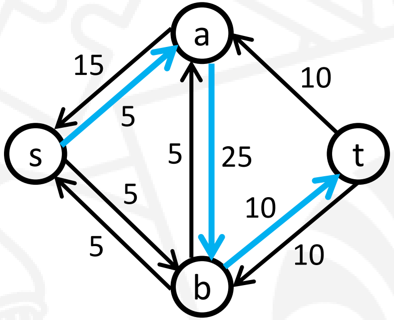


Fluxo Viável

Capacidade residual

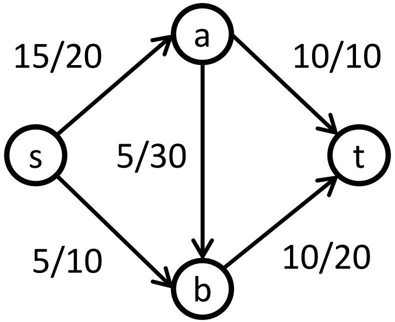


Rede Residual



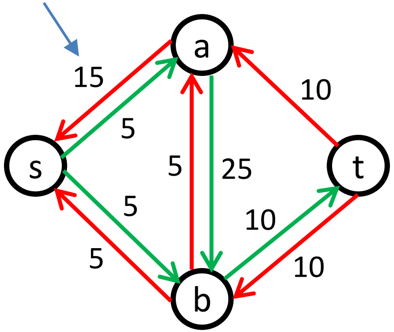
Caminho Aumentante

Rede Residual – Exemplo



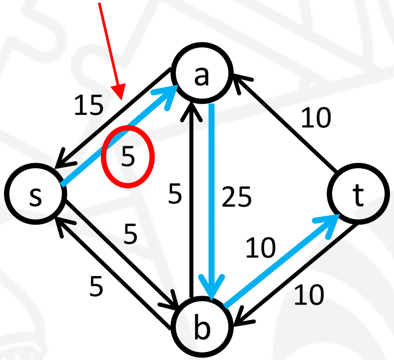
Fluxo Viável

Capacidade residual



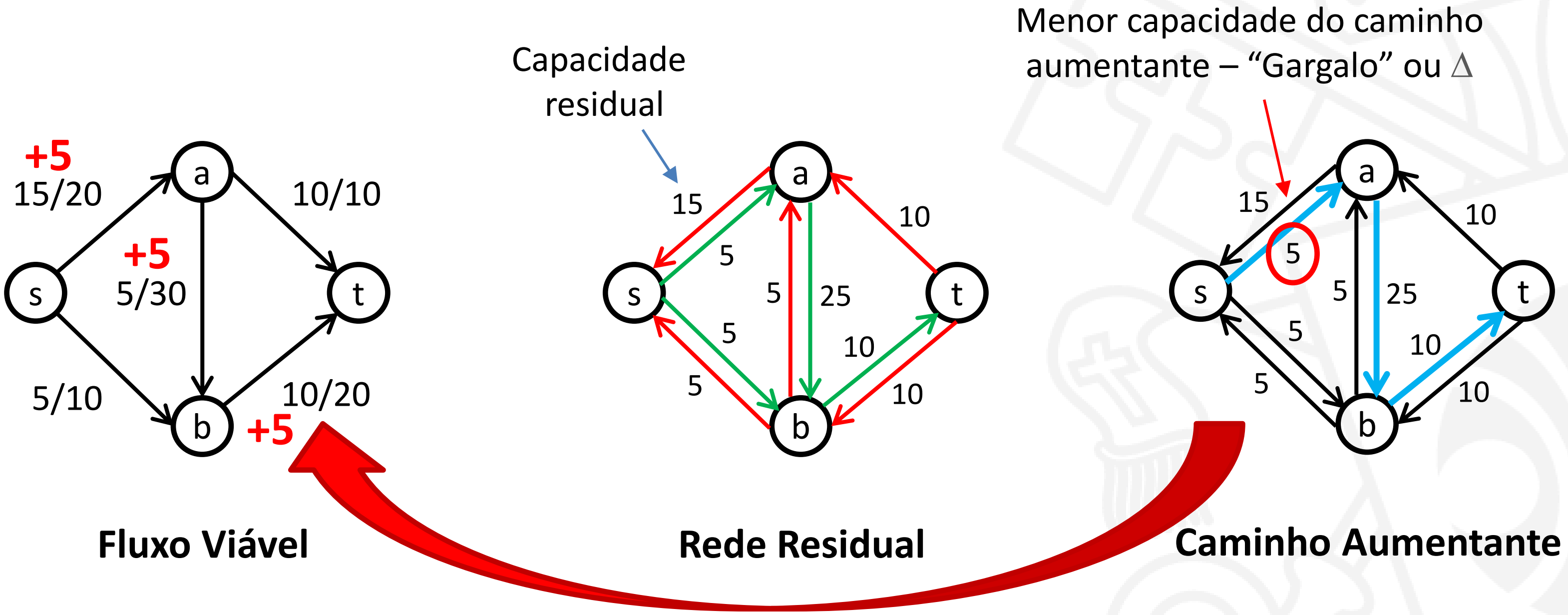
Rede Residual

Menor capacidade do caminho aumentante – "Gargalo" ou Δ



Caminho Aumentante

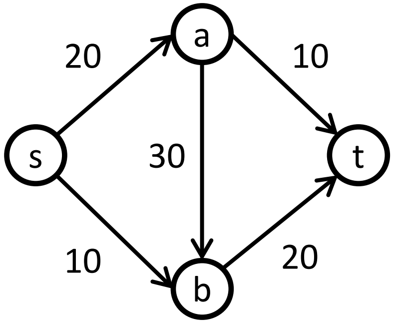
Rede Residual – Exemplo



Método Ford-Fulkerson – Algoritmo

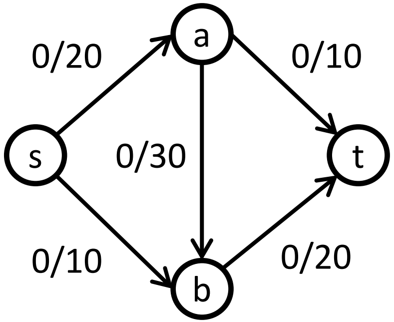
1. <u>para</u> toda aresta $e \in E(G)$ <u>faça</u> $f(e) \leftarrow 0$; // Inicializar fluxo
2. Construir a rede residual G'(f) // Construir rede residual inicial
3. <u>enquanto</u> existir algum caminho aumentante P em G'(f) <u>efetuar</u>
   a. $\Delta = \min \{ u_r(e) \mid e \in P \}$; // Determinar "gargalo" de P
   b. <u>para</u> cada aresta $(v, w) \in P$ <u>faça</u>
      i. <u>se</u> (v, w) for aresta direta <u>então</u>
         $f(v, w) \leftarrow f(v, w) + \Delta$ // Aumentar fluxo
      ii. <u>senão</u>
         $f(w, v) \leftarrow f(w, v) - \Delta$ // Reduzir fluxo
   c. Atualizar a rede residual G'(f) // Construir nova rede residual

Método Ford-Fulkerson – Exemplo



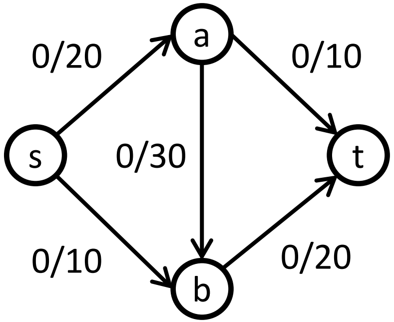
Rede de Fluxo

Método Ford-Fulkerson – Exemplo

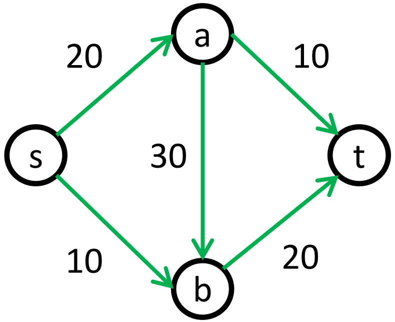


Fluxo Viável

Método Ford-Fulkerson – Exemplo

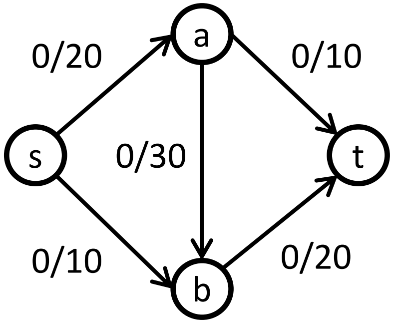


Fluxo Viável

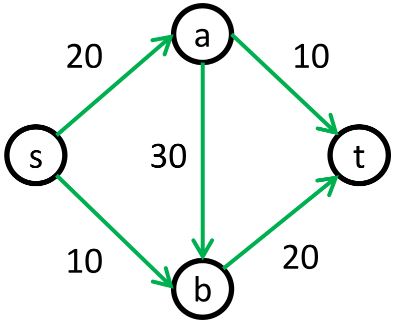


Rede Residual

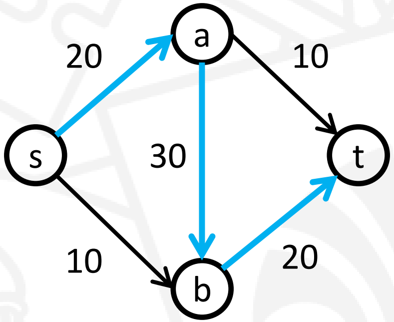
Método Ford-Fulkerson – Exemplo



Fluxo Viável

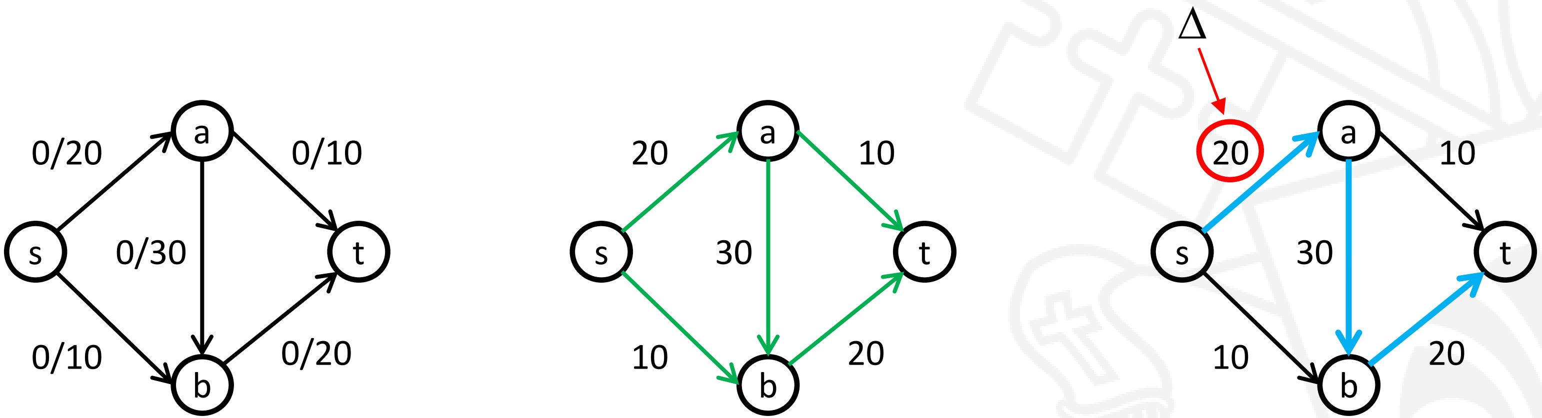


Rede Residual



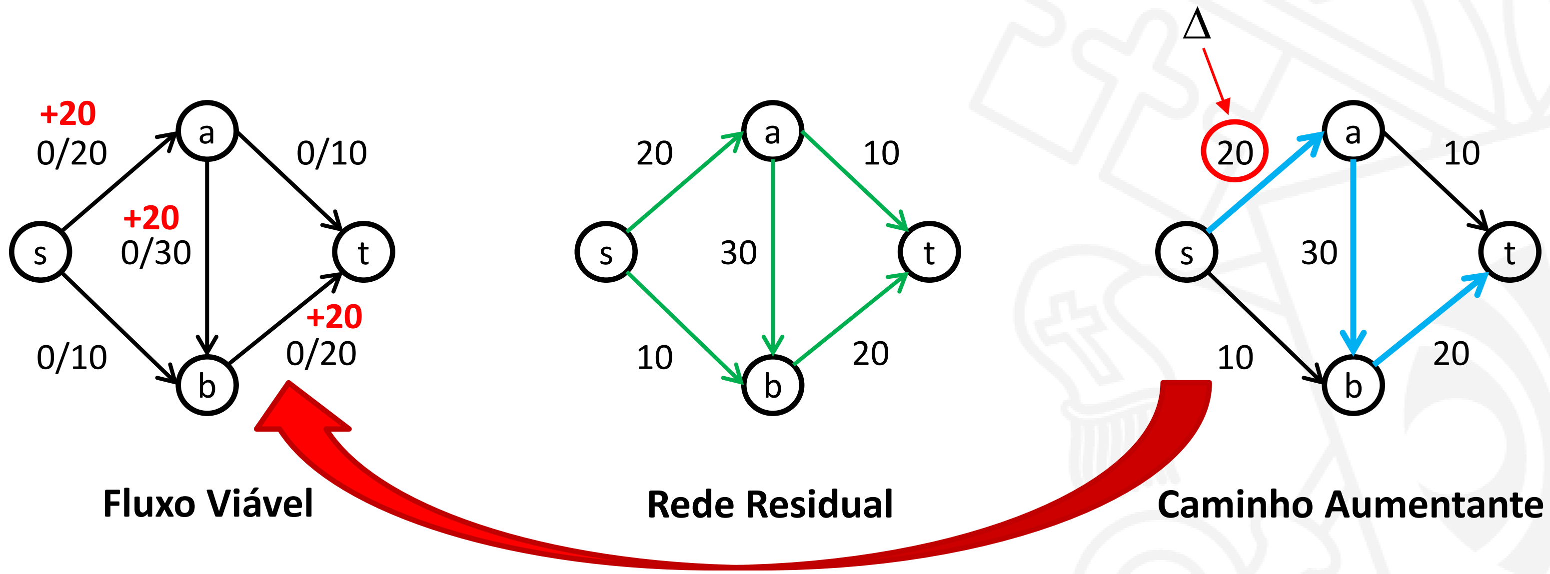
Caminho Aumentante

Método Ford-Fulkerson – Exemplo

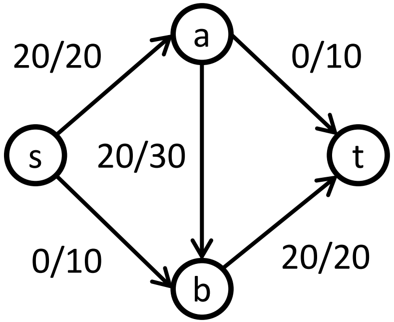


Fluxo Viável **Rede Residual** **Caminho Aumentante**

Método Ford-Fulkerson – Exemplo

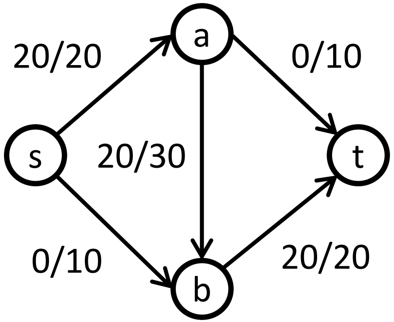


Método Ford-Fulkerson – Exemplo

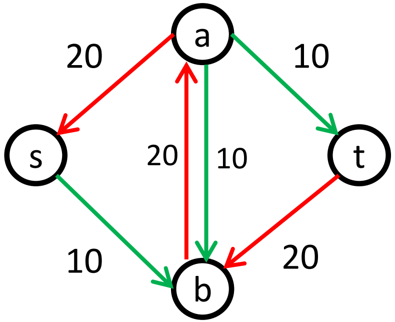


Fluxo Viável

Método Ford-Fulkerson – Exemplo

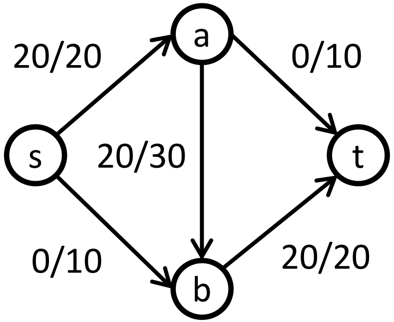


Fluxo Viável

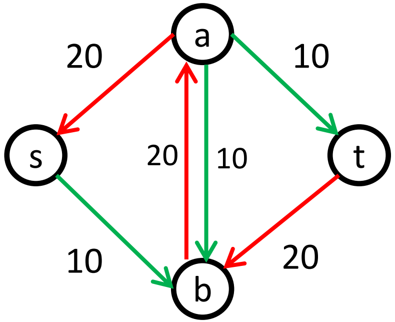


Rede Residual

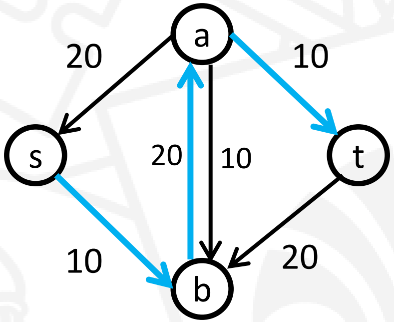
Método Ford-Fulkerson – Exemplo



Fluxo Viável

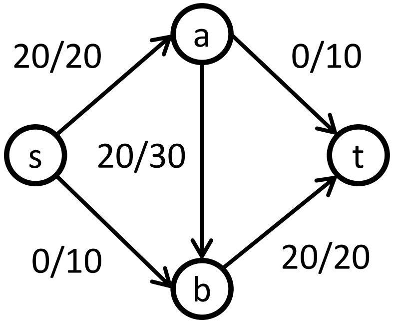


Rede Residual

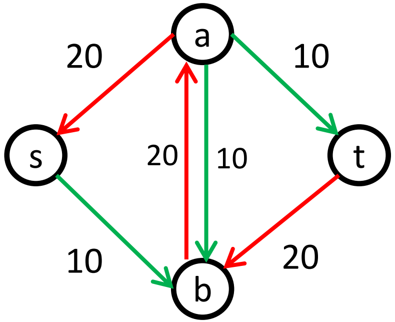


Caminho Aumentante

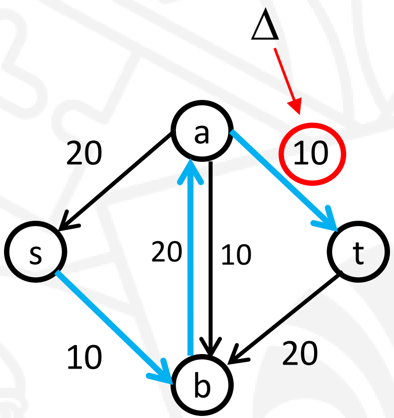
Método Ford-Fulkerson – Exemplo



Fluxo Viável

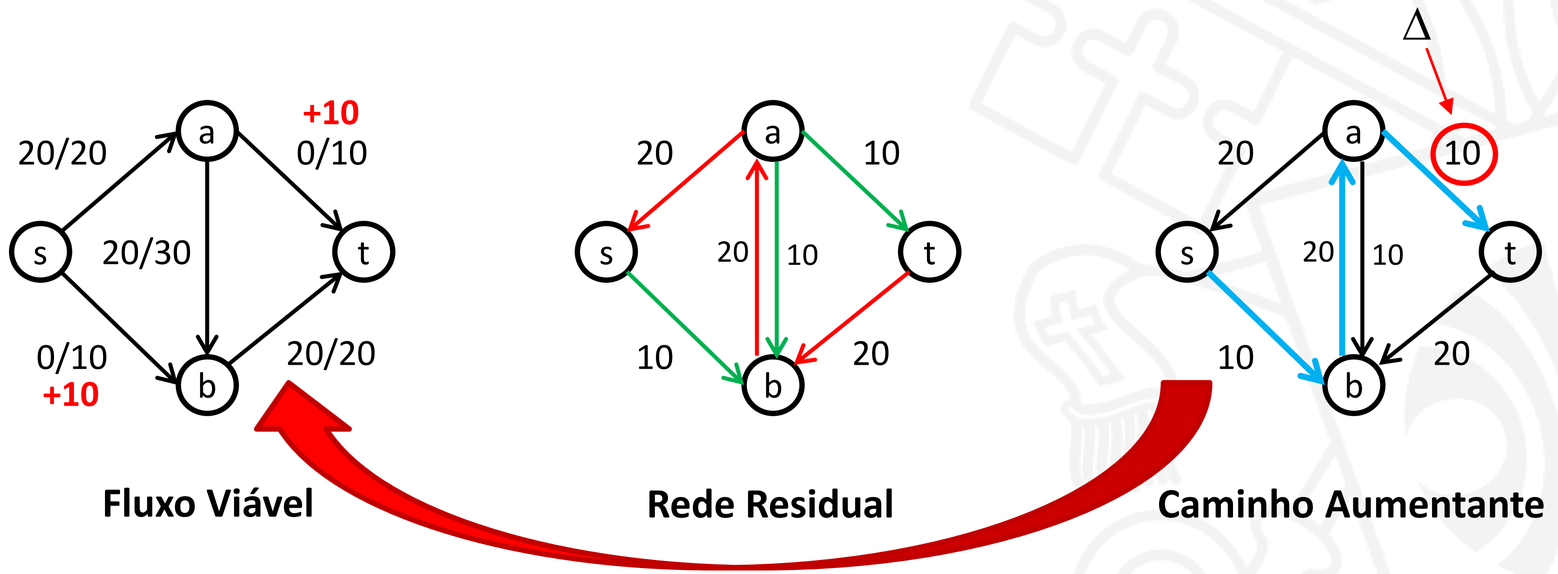


Rede Residual

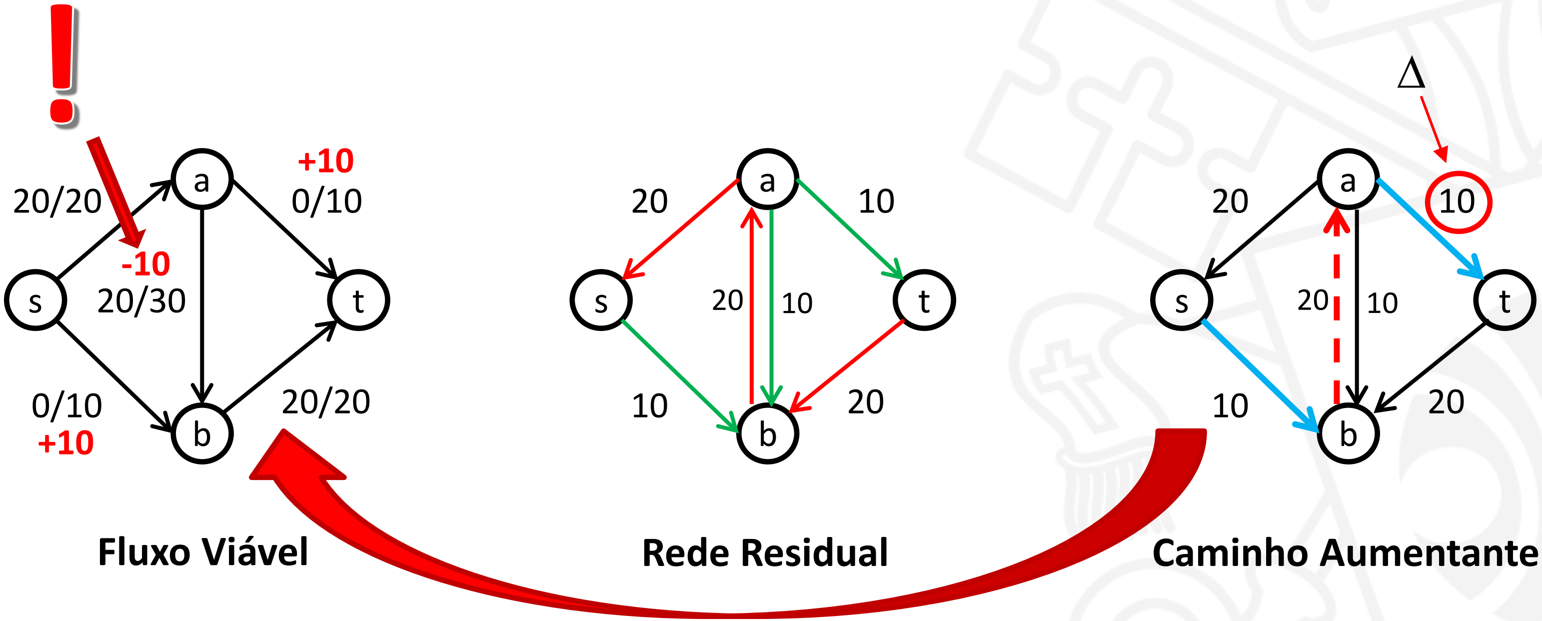


Caminho Aumentante

Método Ford-Fulkerson – Exemplo



Método Ford-Fulkerson – Exemplo

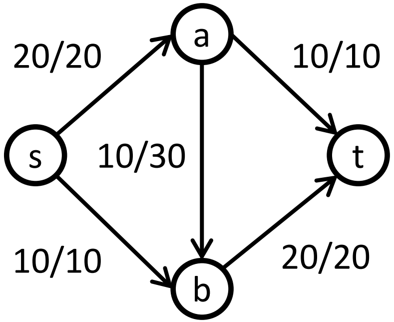


Fluxo Viável

Rede Residual

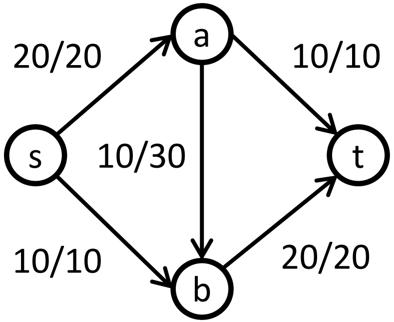
Caminho Aumentante

Método Ford-Fulkerson – Exemplo

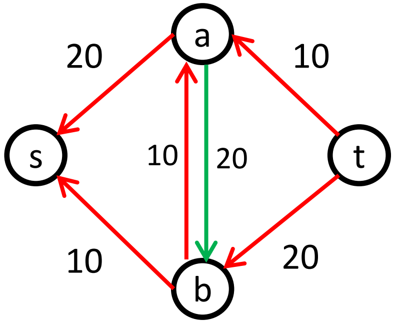


Fluxo Viável

Método Ford-Fulkerson – Exemplo

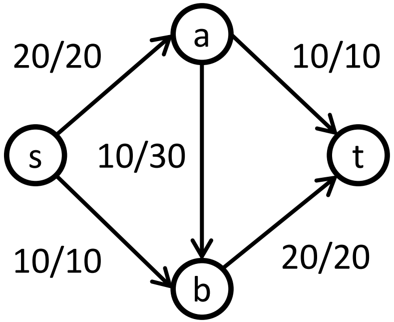


Fluxo Viável

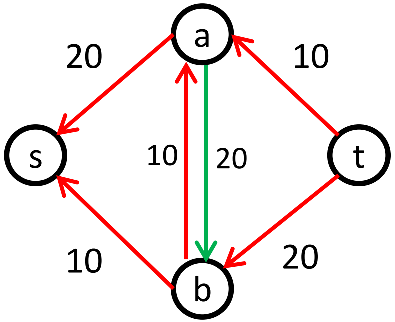


Rede Residual

Método Ford-Fulkerson – Exemplo



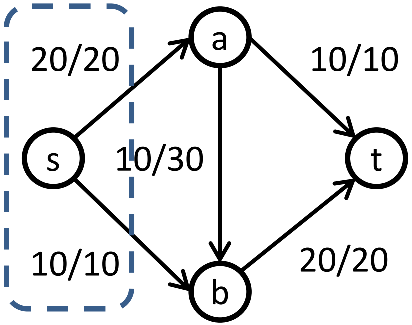
Fluxo Viável



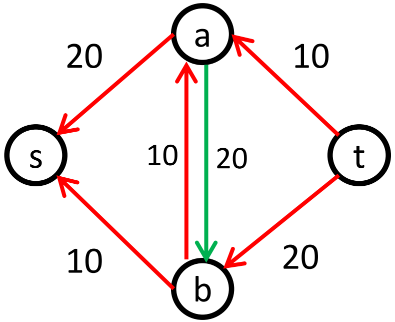
Rede Residual

Não existe caminho aumentante

Método Ford-Fulkerson – Exemplo



Fluxo Viável



Rede Residual

Não existe caminho aumentante

Fluxo máximo = 30

Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo

Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo

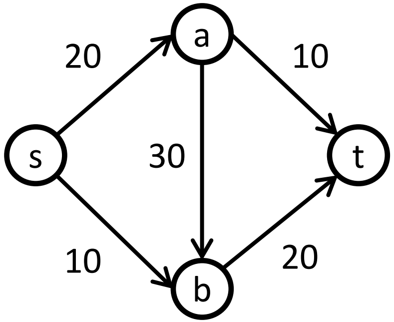
Dada uma rede $G = (V, E)$ e um subconjunto $S \subset V$, tal que a fonte **s** $\in S$ e o sumidouro **t** $\notin S$.

O corte(S) – chamado de corte **s**-**t** da rede de fluxo – contém as arestas (v, w) em que vértice $v \in S$ e o vértice $w \notin S$.

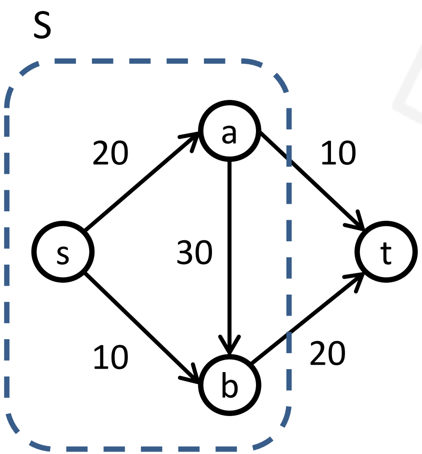
A capacidade do corte(S) é dada pela soma das capacidades de suas arestas.

TEOREMA: Em qualquer rede de fluxo, o valor do fluxo máximo entre a fonte **s** e o sumidouro **t** é igual à capacidade do corte **s**-**t** mínimo da rede.

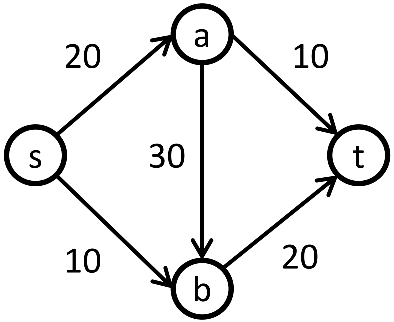
Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo



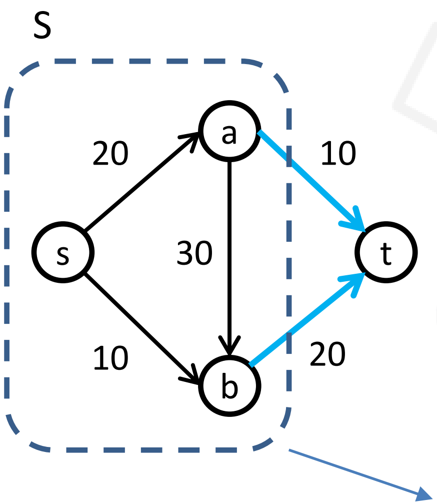
Rede de Fluxo



Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo

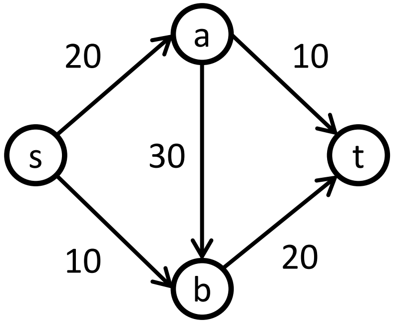


Rede de Fluxo

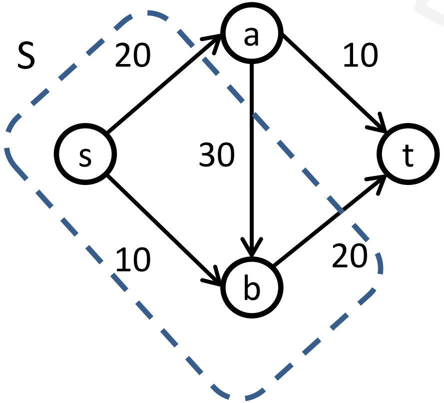


Capacidade corte(S) = 30

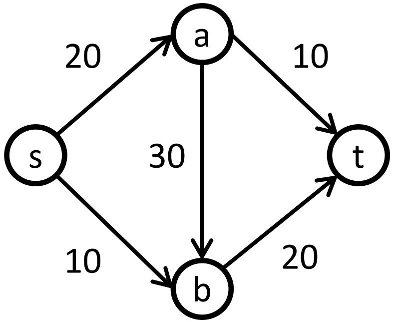
Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo



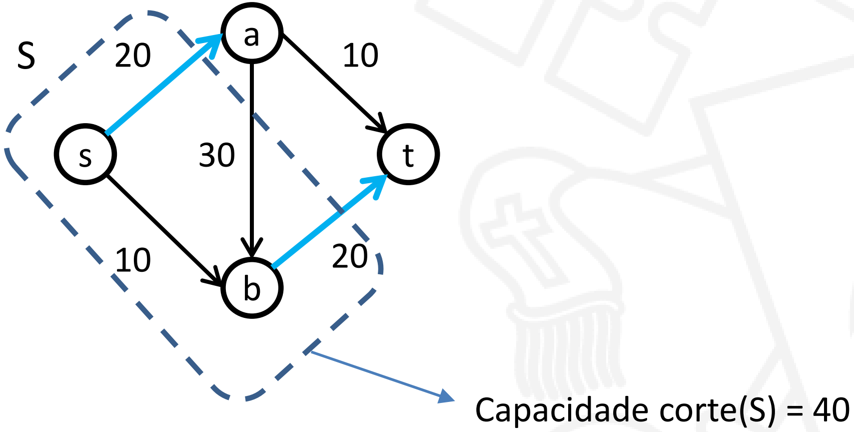
Rede de Fluxo



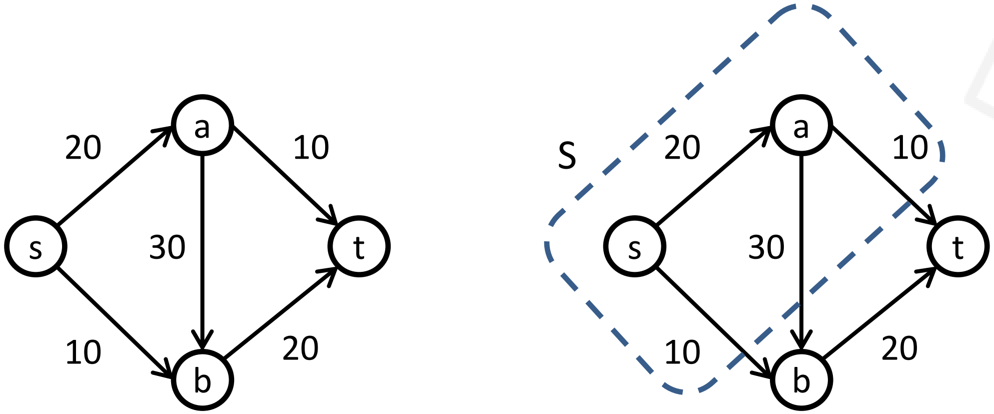
Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo



Rede de Fluxo

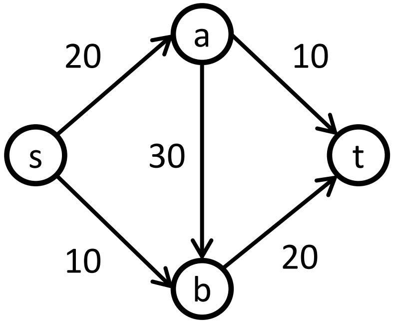


Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo

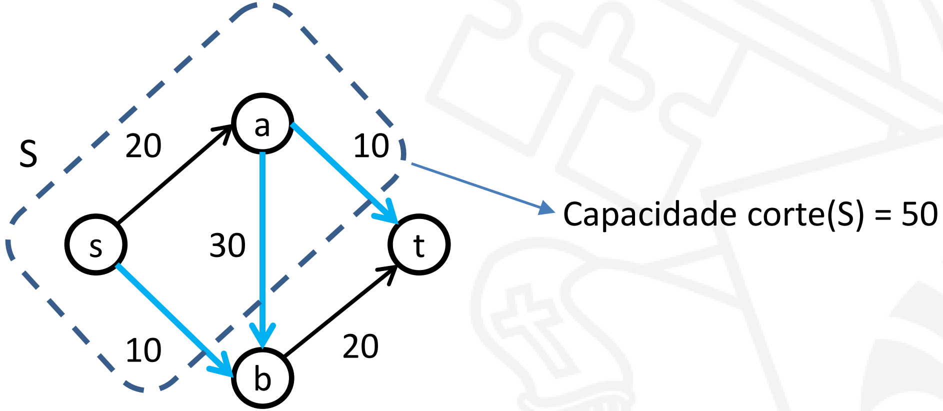


Rede de Fluxo

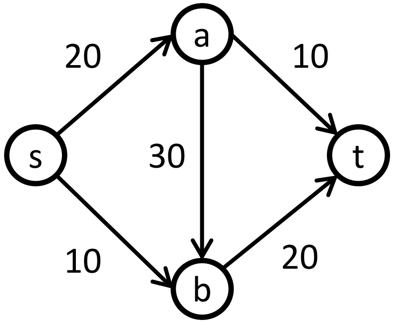
Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo



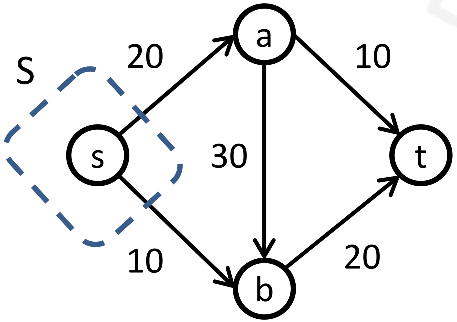
Rede de Fluxo



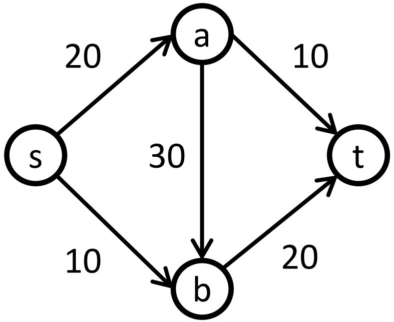
Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo



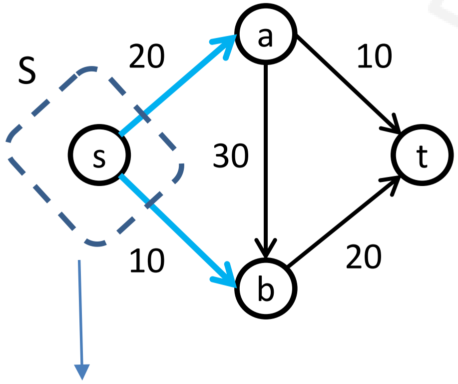
Rede de Fluxo



Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo

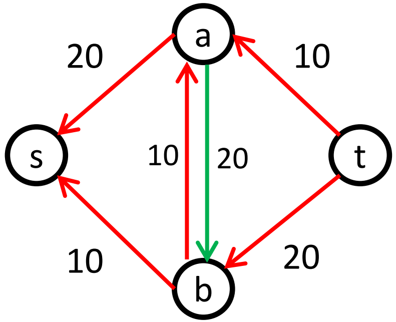


Rede de Fluxo



Capacidade corte(S) = 30

Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo

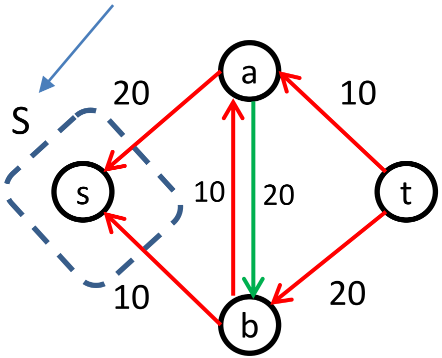


Rede Residual

Fluxo máximo = 30

Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo

Na solução ótima, S é o conjunto dos elementos alcançáveis a partir da fonte **s**

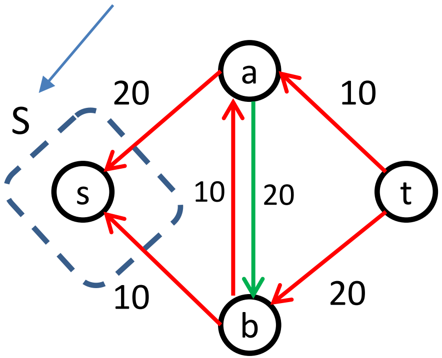


Rede Residual

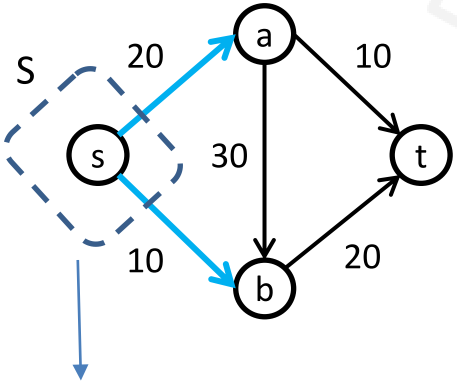
Fluxo máximo = 30

Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo

Na solução ótima, S é o conjunto dos elementos alcançáveis a partir da fonte **s**



Rede Residual



Capacidade corte(S) = 30

Fluxo máximo = 30