

Ordenação Topológica

Zenilton Patrocínio

Ordenação Topológica

Uma ordenação topológica de um grafo acíclico direcionado $G = (V, E)$ é uma ordenação linear de todos os seus vértices, tal que para toda aresta $(v, w) \in E$, o vértice v aparece antes do vértice w na ordenação.

Em outras palavras, é uma ordenação linear de vértices na qual cada vértice precede todos os demais vértices que formam seu fecho transitivo direto.

Cada grafo acíclico direcionado possui uma ou mais ordenações topológicas.

Caso um grafo possua ciclos ou seja não direcionado, é impossível estabelecer uma ordenação topológica, pois não é possível estabelecer uma relação de precedência entre os vértices.

Histórico

Algoritmos de ordenação topológica começaram a ser estudados na década de 60, no contexto das técnicas de gerência de projetos como PERT e CPM.

O PERT (*Program Evaluation and Review Technique*) prevê o cálculo da duração de atividades complexas a partir da média ponderada de três durações possíveis dessas atividades.

O CPM (*Critical Path Method*) é capaz de identificar o caminho crítico em uma sequência de atividades, isto é, quais atividades de uma sequência não podem sofrer alteração de duração sem que isso reflita na duração final de um projeto.

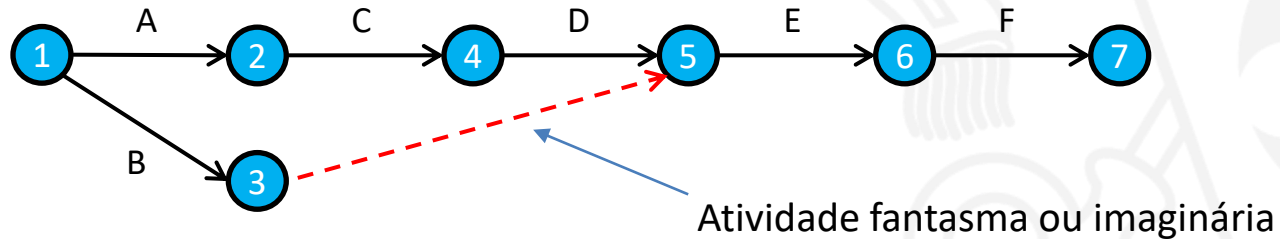
Exemplo 1

Um exemplo simples do encadeamento de atividades é relacionado na tabela abaixo, para a fabricação de uma estante.

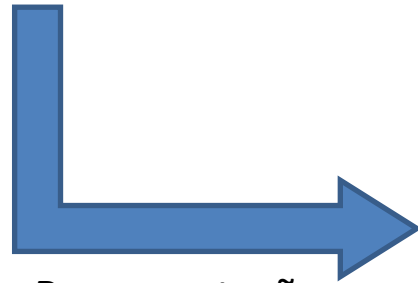
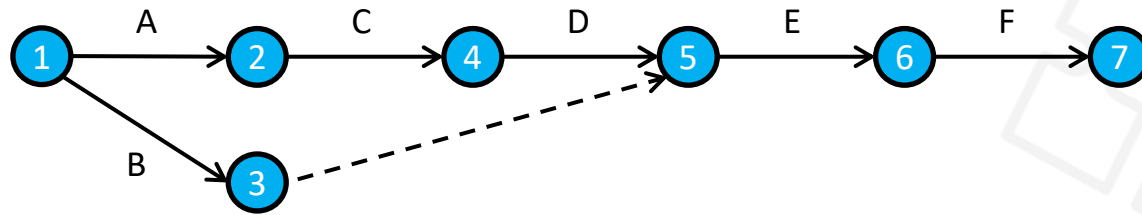
Atividade	Descrição	Duração	Anterior	Posterior
A	Comprar tábuas	1 dia	—	C
B	Comprar parafusos	1 dia	—	E
C	Cortar tábuas	2 dias	A	D
D	Pintar tábuas	1 dia	B	E
E	Montar as tábuas com parafusos	1 dia	B / D	F
F	Transportar a estante	1 dia	E	—

Exemplo 1

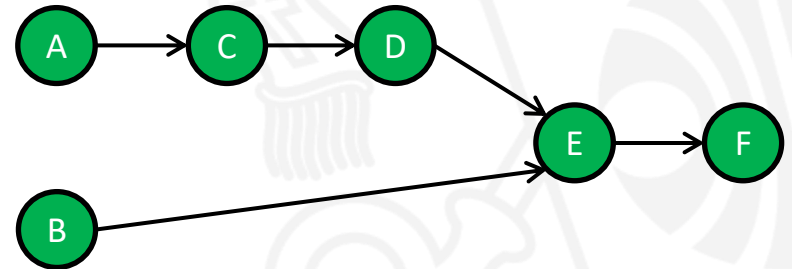
Atividade	Descrição	Duração	Anterior	Posterior
A	Comprar tábuas	1 dia	—	C
B	Comprar parafusos	1 dia	—	E
C	Cortar tábuas	2 dias	A	D
D	Pintar tábuas	1 dia	B	E
E	Montar as tábuas com parafusos	1 dia	B / D	F
F	Transportar a estante	1 dia	E	—



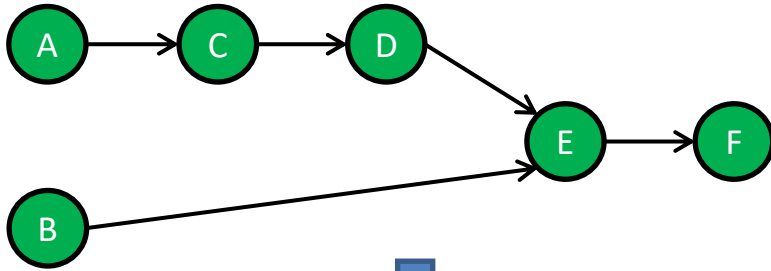
Exemplo 1



Representação
alternativa



Exemplo 1



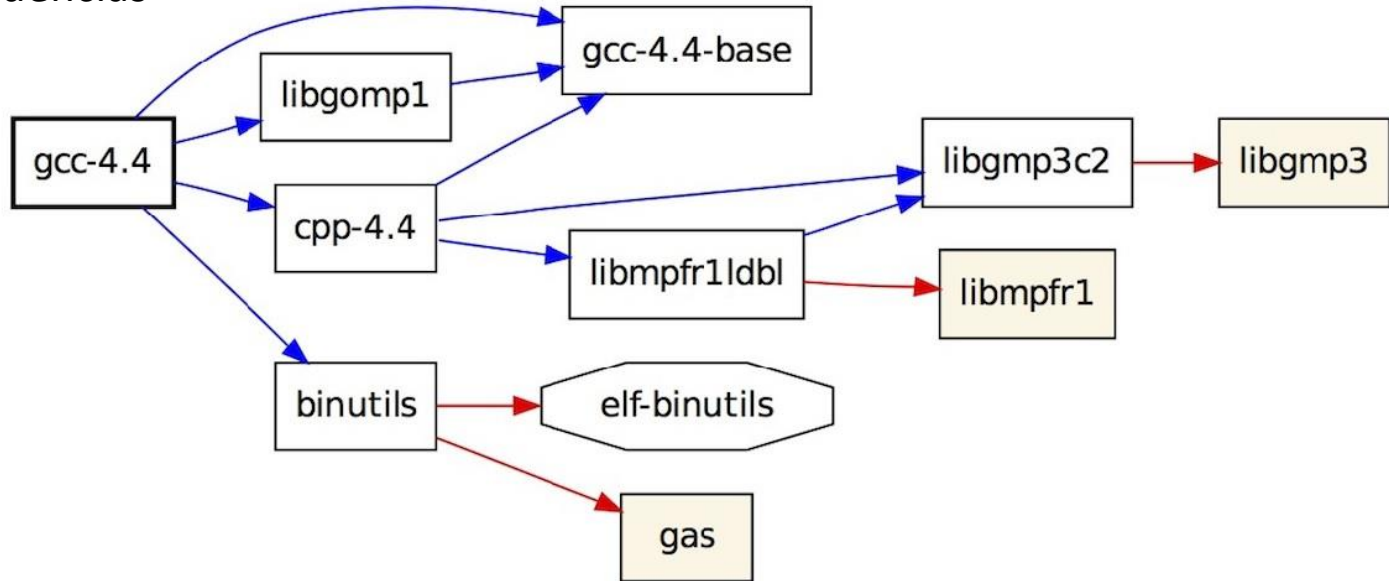
Contra-exemplo → A D C E B F

Ordenação
Topológica

A C D B E F
A C B D E F
A B C D E F
B A C D E F

Exemplo 2

Grafo de dependências
do GCC

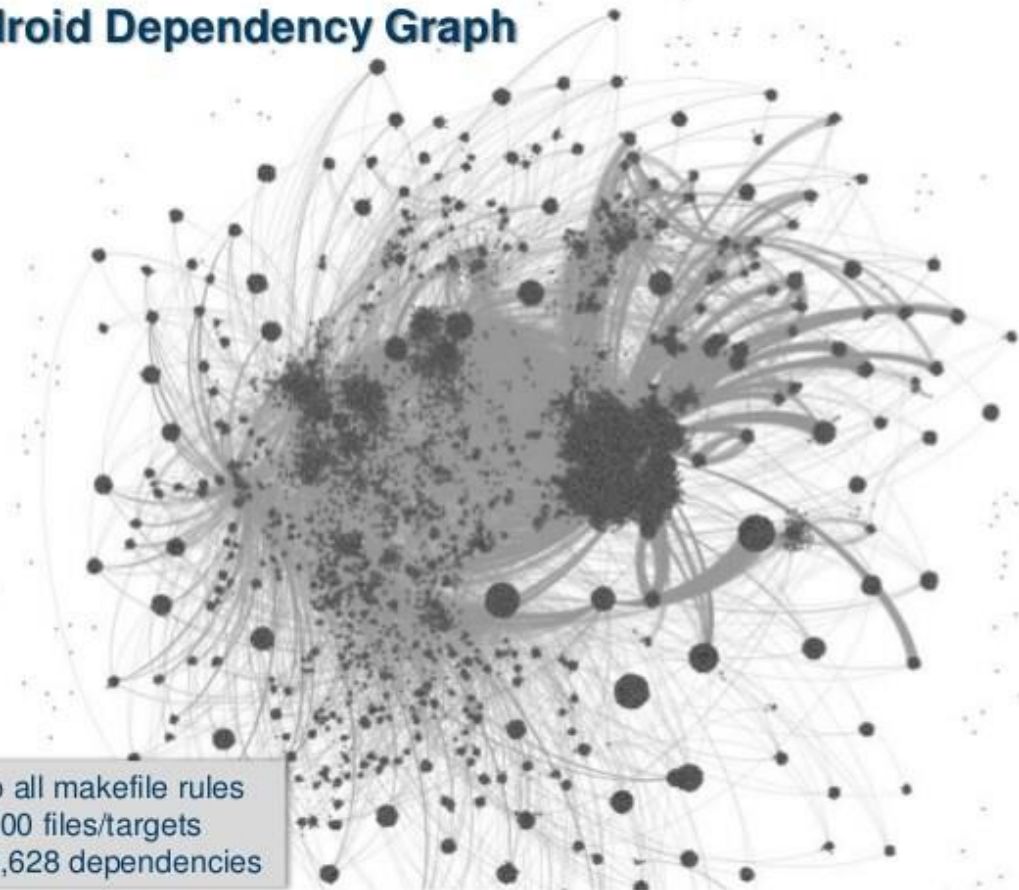


Exemplo 2

Grafo de dependências
para o *Android*

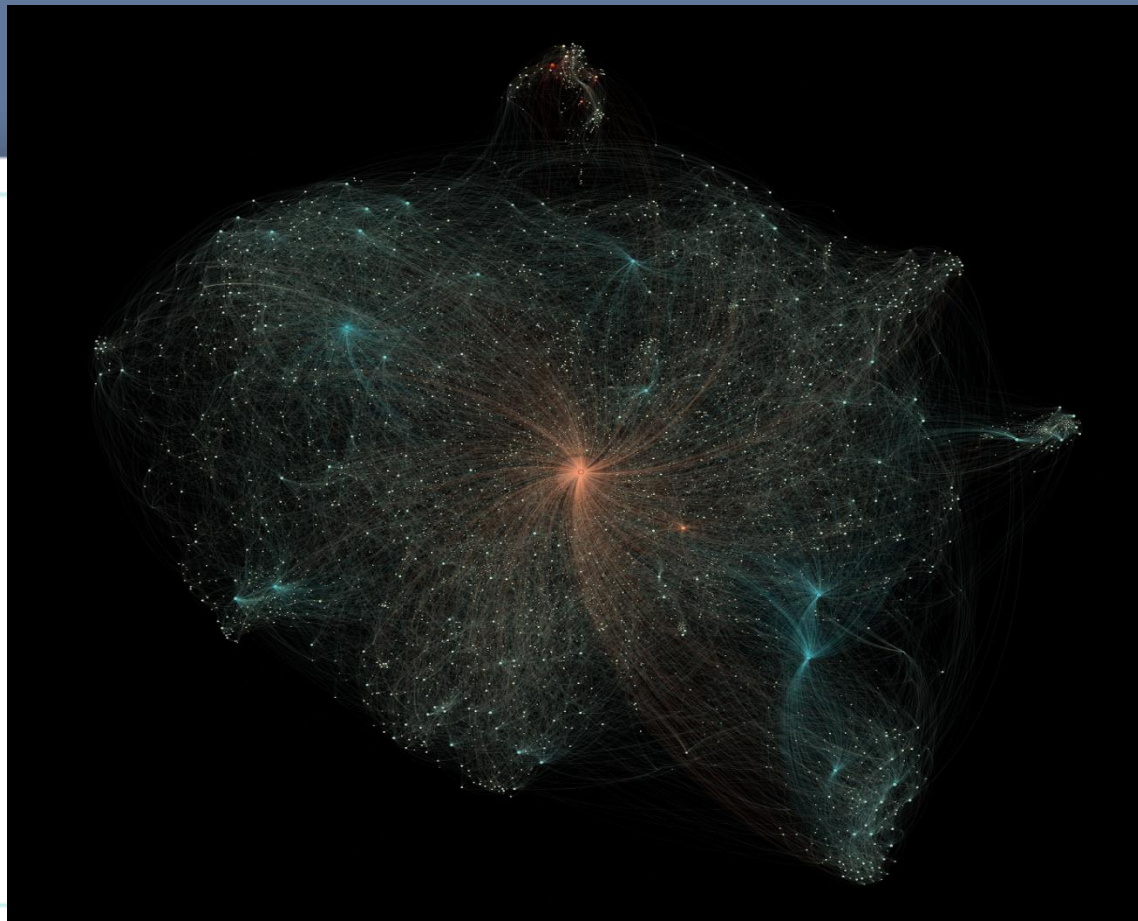
Android Dependency Graph

- Dump all makefile rules
- 100,000 files/targets
- 1,990,628 dependencies



Exemplo 2

Grafo de dependências de
pacotes no *Ubuntu*



Numeração Topológica

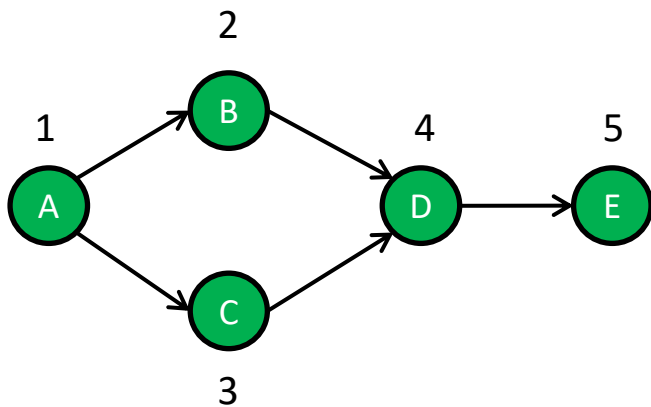
Uma numeração topológica dos vértices de um grafo $G = (V, E)$ é uma função que representa a atribuição de um número inteiro $ord(v)$ para cada vértice v tal que $ord(v) < ord(w)$ para toda aresta $(v, w) \in E(G)$.

Se dois vértices não são adjacentes, não há mal algum em se permitir que eles recebam o mesmo número.

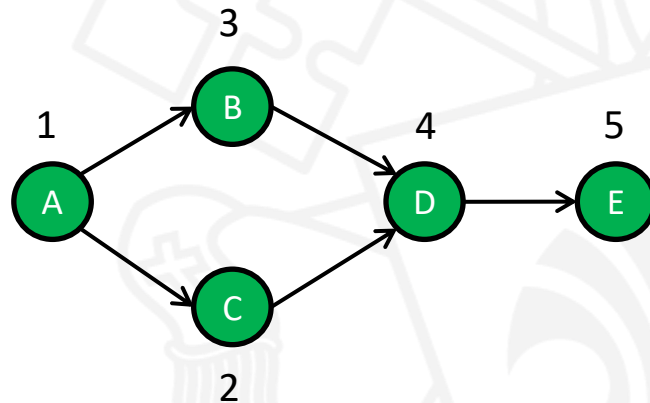
Geralmente vértices diferentes recebem números diferentes no intervalo de 1 a n (ou de 0 a $n - 1$), em que n é o número de vértices do grafo.

Apenas grafos acíclicos direcionados possuem uma numeração topológica, contudo ela pode não ser única.

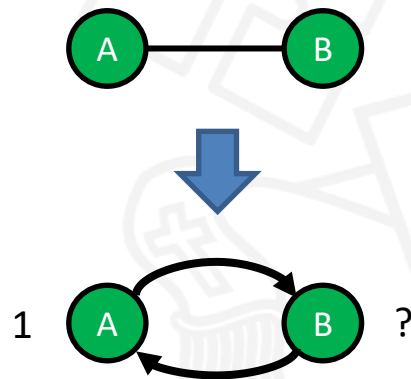
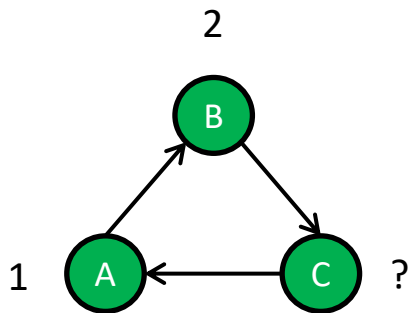
Numeração Topológica – Exemplos



OU



Numeração Topológica – Contra-Exemplos



Método de Kahn

Método de Kahn

O método proposto por Kahn em 1962 que determina a cada instante o vértice que não possui arcos de entrada (isto é, com grau de entrada igual 0) e o insere na solução.

A cada vértice inserido na solução, o método remove todas as arestas do grafo saindo dele.

Ele também é capaz de detectar a existência de ciclos no grafo.

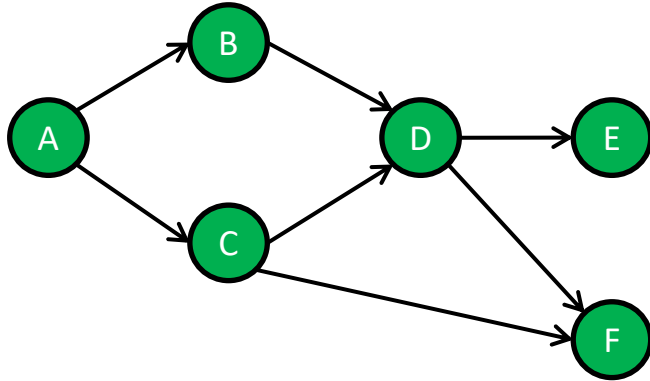
Para controlar os passos, usa-se uma fila dos vértices de grau de entrada 0.

Para se melhorar a eficiência, armazena-se (e atualiza-se) o grau de entrada de cada vértice (ao invés de remover as arestas).

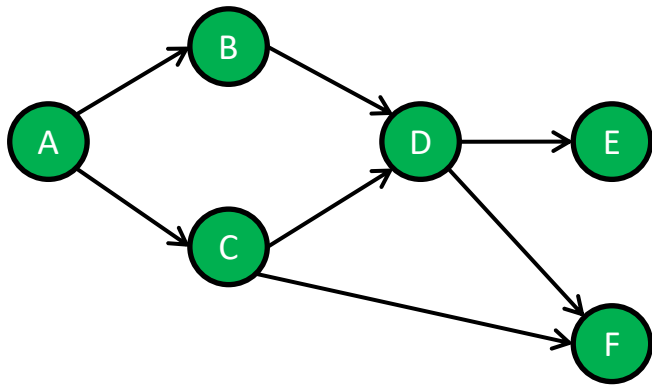
Método de Kahn – Algoritmo

1. para todo vértice v faça $M[v] \leftarrow d^-(v)$; // Inicializar mapa de graus de entrada
2. $Fila \leftarrow \emptyset$; $Ordena_Top \leftarrow \emptyset$; // Inicializar fila e resultado
3. para todo vértice v tal que $d^-(v) = 0$ faça $Fila.Insere(v)$;
4. enquanto not $Fila.Vazia()$ efetuar
 - a. $v \leftarrow Fila.Remove()$; // Remover 1º elemento da fila
 - b. $Ordena_Top.InsereNoFim(v)$; // Inserir elemento no resultado
 - c. para todo vértice $w \in \Gamma^+(v)$ faça // Para toda a vizinhança de v
 - i. $M[w] \leftarrow M[w] - 1$; // Reduzir uma unidade no grau de w
 - ii. se $M[w] = 0$ então $Fila.Insere(w)$;
5. Se todos os vértices forem processados, SUCESSO; caso contrário, existe um CICLO

Método de Kahn – Exemplo

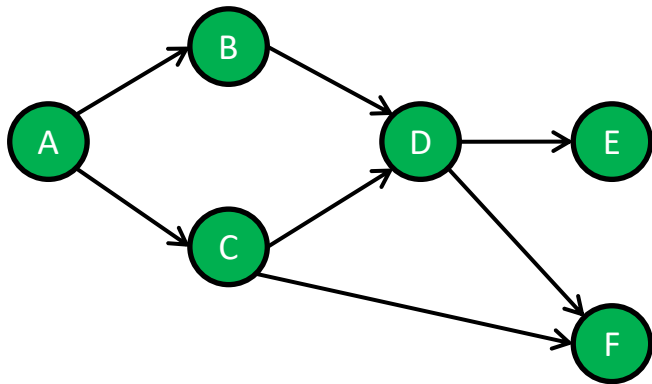


Método de Kahn – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
M	0	1	1	2	1	2

Método de Kahn – Exemplo

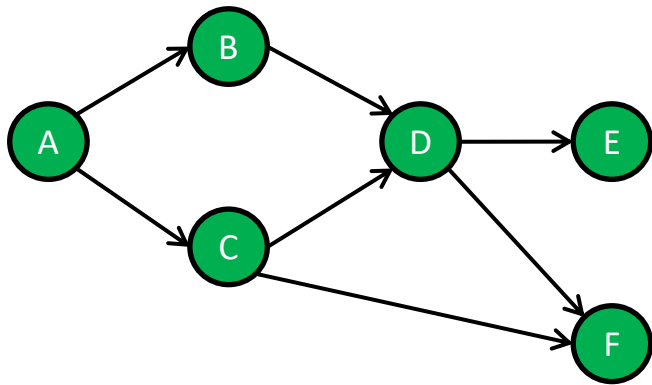


	A	B	C	D	E	F
M	0	1	1	2	1	2

Fila:

Ordena_Top:

Método de Kahn – Exemplo

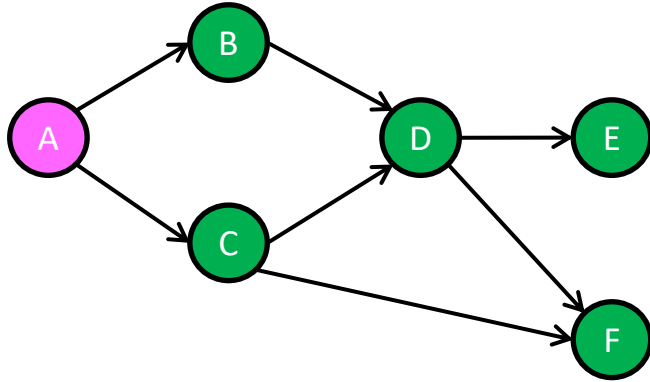


	A	B	C	D	E	F
M	0	1	1	2	1	2

Fila: A

Ordena_Top:

Método de Kahn – Exemplo

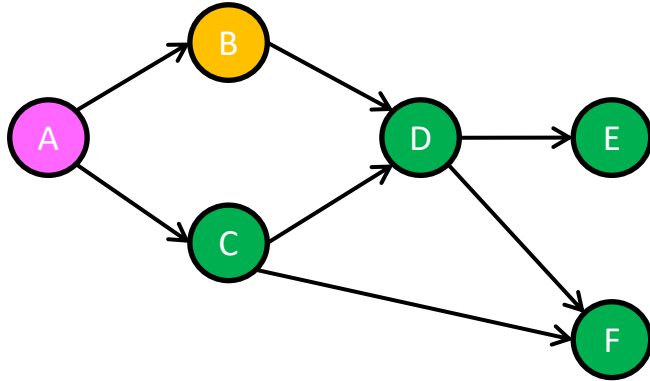


	A	B	C	D	E	F
M	0	1	1	2	1	2

Fila: ~~A~~

Ordena_Top: A

Método de Kahn – Exemplo

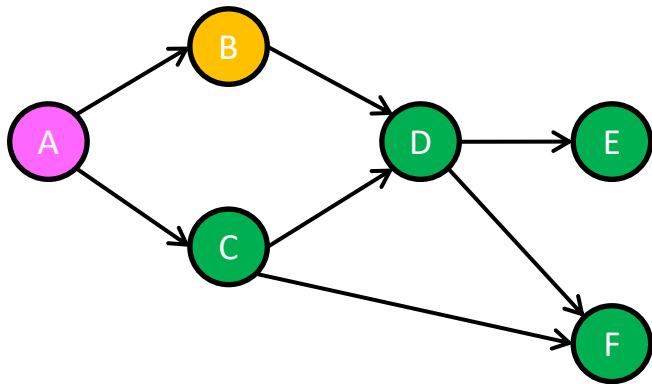


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	1	2	1	2

Fila: ~~A~~

Ordena_Top: A

Método de Kahn – Exemplo

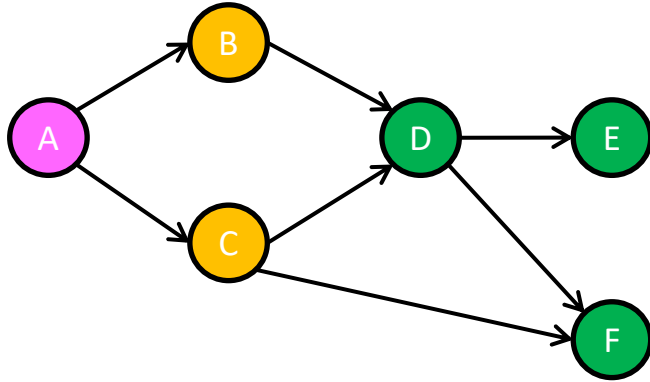


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	1	2	1	2

Fila: ~~A~~ B

Ordena_Top: A

Método de Kahn – Exemplo

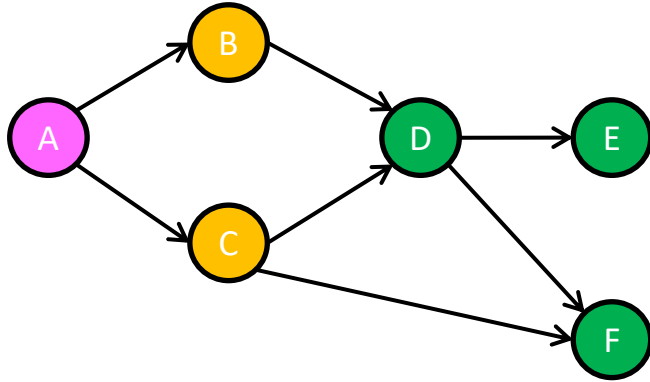


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	2	1	2

Fila: ~~A~~ B

Ordena_Top: A

Método de Kahn – Exemplo

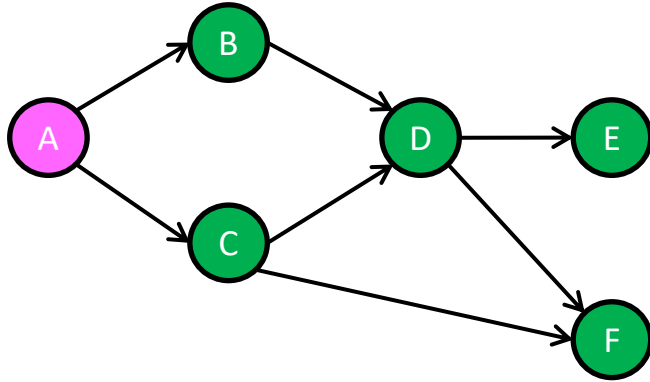


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	2	1	2

Fila: ~~A~~ B C

Ordena_Top: A

Método de Kahn – Exemplo

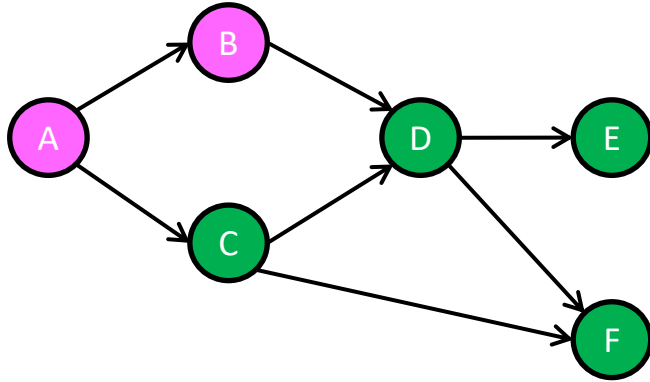


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	2	1	2

Fila: ~~A~~ B C

Ordena_Top: A

Método de Kahn – Exemplo

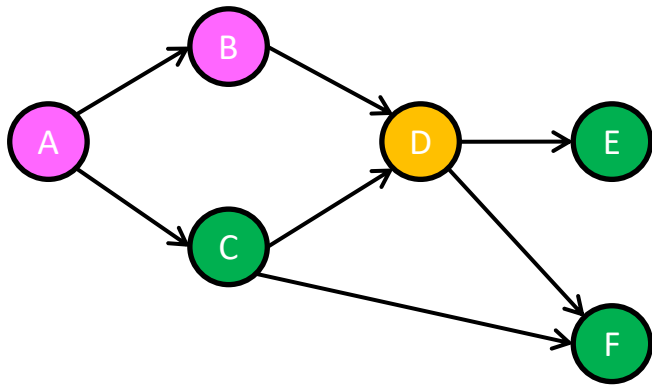


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	2	1	2

Fila: ~~A~~ ~~B~~ C

Ordena_Top: A B

Método de Kahn – Exemplo

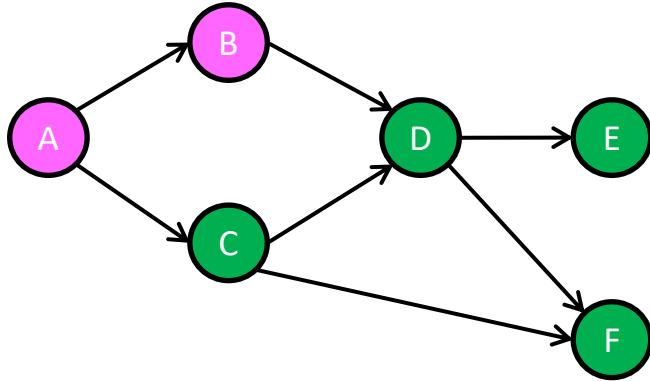


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	1	1	2

Fila: ~~A~~ ~~B~~ C

Ordena_Top: A B

Método de Kahn – Exemplo

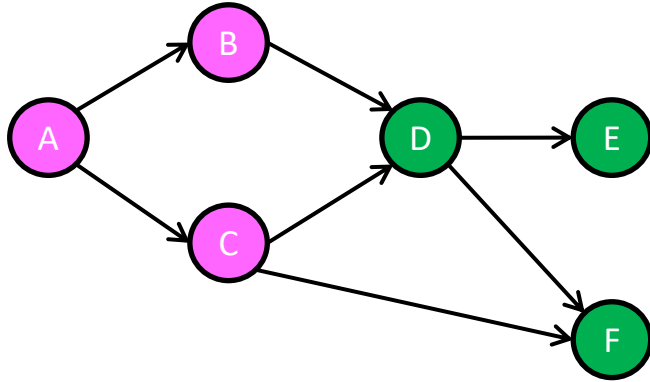


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	1	1	2

Fila: ~~A~~ ~~B~~ C

Ordena_Top: A B

Método de Kahn – Exemplo

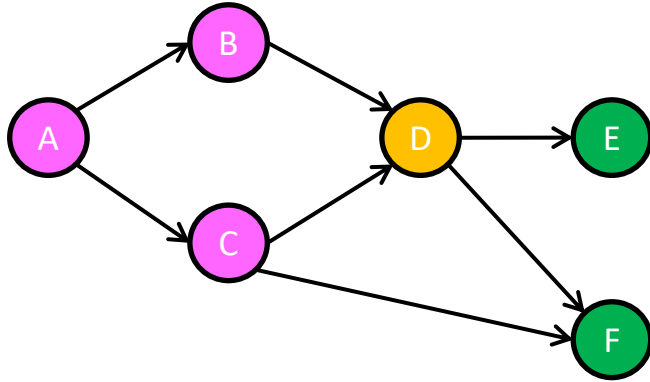


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	1	1	2

Fila: ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~

Ordena_Top: A B C

Método de Kahn – Exemplo

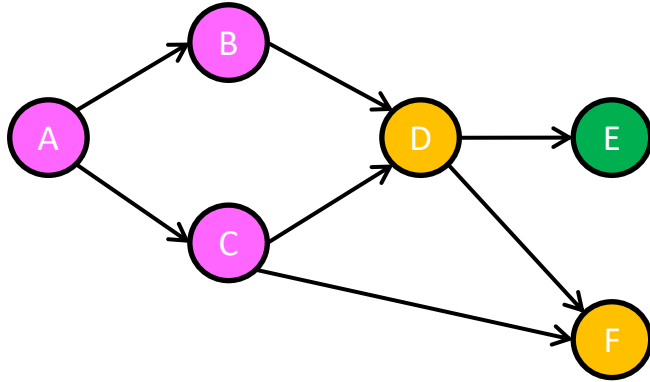


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	0	1	2

Fila: ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~

Ordena_Top: A B C

Método de Kahn – Exemplo

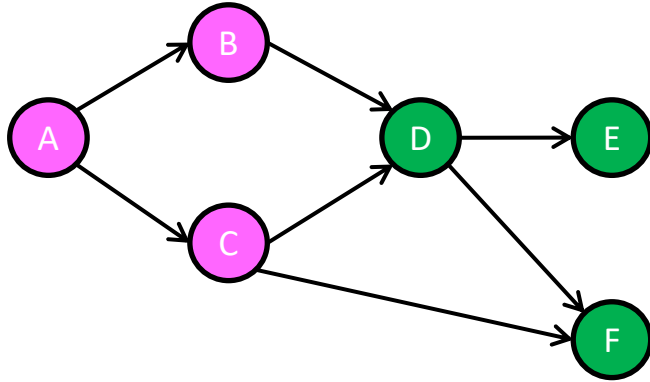


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	0	1	1

Fila: ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~ D

Ordena_Top: A B C

Método de Kahn – Exemplo

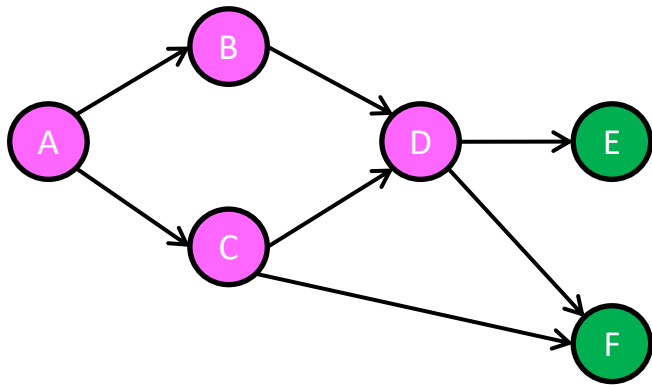


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	0	1	1

Fila: ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~ D

Ordena_Top: A B C

Método de Kahn – Exemplo

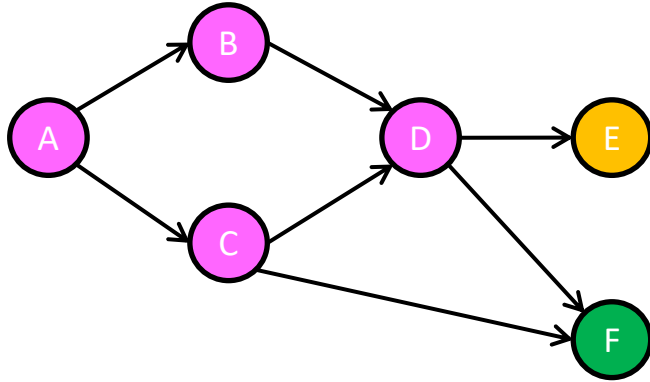


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	0	1	1

Fila: ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~ ~~D~~

Ordena_Top: A B C D

Método de Kahn – Exemplo

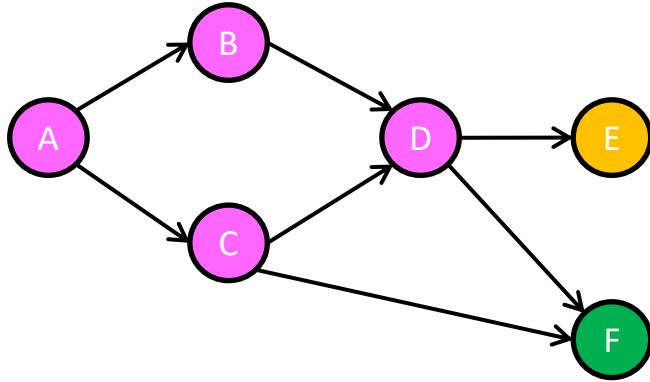


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	0	0	1

Fila: ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~ ~~D~~

Ordena_Top: A B C D

Método de Kahn – Exemplo

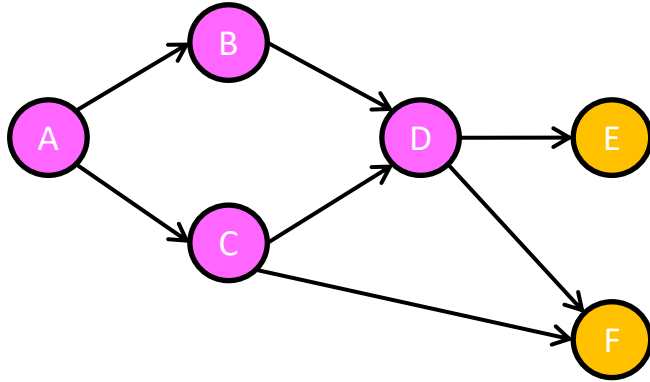


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	0	0	1

Fila: ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~ ~~D~~ E

Ordena_Top: A B C D

Método de Kahn – Exemplo

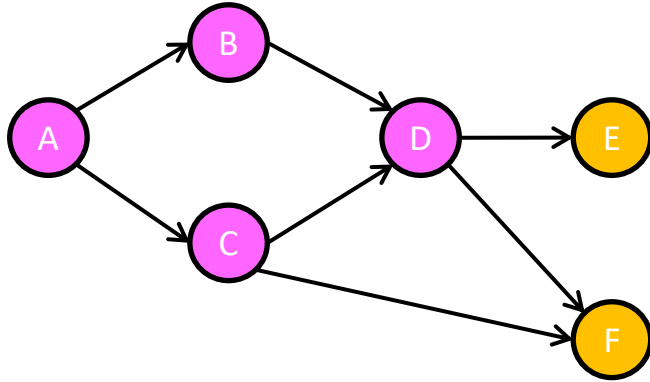


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	0	0	0

Fila: ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~ ~~D~~ E

Ordena_Top: A B C D

Método de Kahn – Exemplo

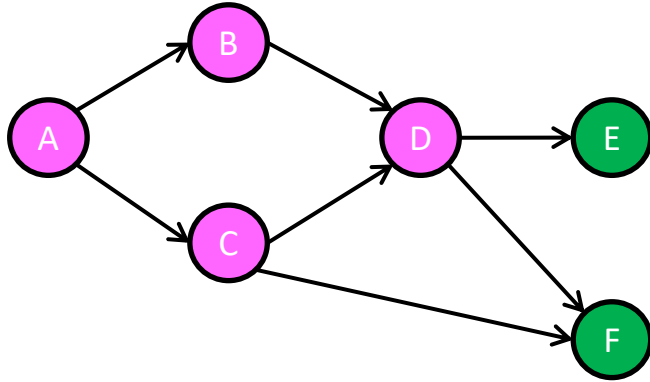


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	0	0	0

Fila: ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~ ~~D~~ E F

Ordena_Top: A B C D

Método de Kahn – Exemplo

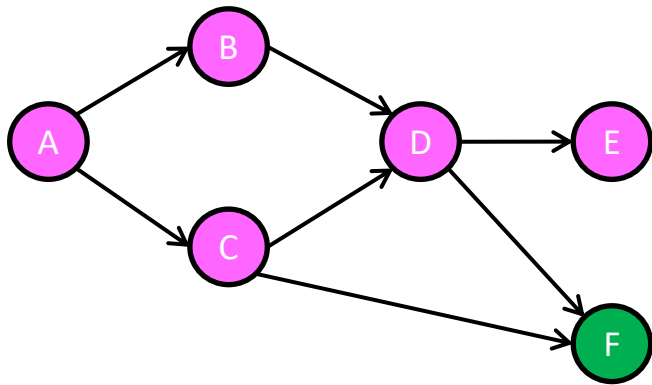


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	0	0	0

Fila: ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~ ~~D~~ E F

Ordena_Top: A B C D

Método de Kahn – Exemplo

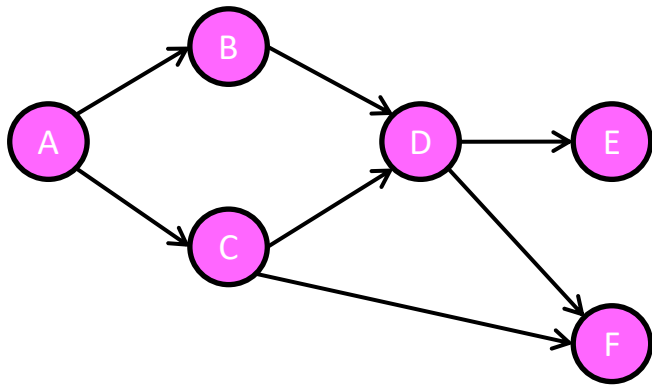


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	0	0	0

Fila: ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~ ~~D~~ ~~E~~ F

Ordena_Top: A B C D E

Método de Kahn – Exemplo

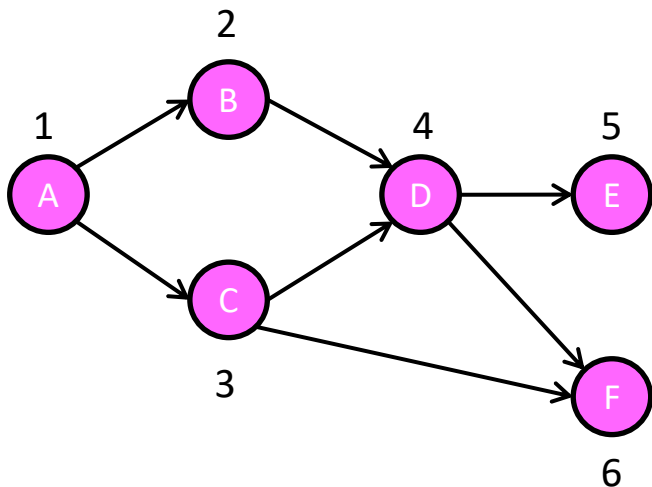


	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	0	0	0

Fila: ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~ ~~D~~ ~~E~~ ~~F~~

Ordena_Top: A B C D E F

Método de Kahn – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
M	0	0	0	0	0	0

Fila: ~~A~~ ~~B~~ ~~C~~ ~~D~~ ~~E~~ ~~F~~

Ordена_Top: A B C D E F



Numeração topológica corresponde a
ordem de inserção no resultado

Método por Busca em Profundidade



Método por Busca em Profundidade

Um algoritmo alternativo para ordenação topológica é baseado na busca em profundidade, descrito pela primeira vez por Tarjan em 1976.

O algoritmo percorre cada vértices do grafo, em ordem arbitrária, iniciando uma busca em profundidade que termina quando :

- atinge qualquer vértice que já tenha sido visitado desde o início da ordenação topológica, ou
- alcança um vértice que possui grau de saída igual a zero.

Cada vértice v é inserido no resultado somente após considerar todos os outros que dependem de v (isto é, todos os descendentes de v na busca).

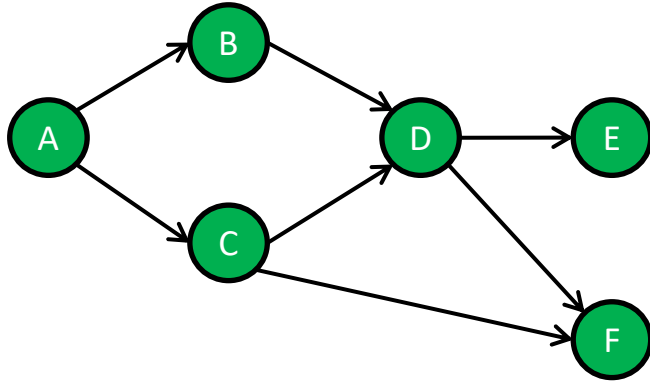
Método por Busca em Profundidade – Algoritmo

1. para todo vértice v faça $\text{Marca}[v] \leftarrow 0$; // Inicializar vértices como desmarcados
2. $\text{Ordena_Top} \leftarrow \emptyset$; // Inicializar resultado
3. enquanto existir algum vértice v tal que $\text{Marca}[v] = 0$ efetuar **Visita**(v);

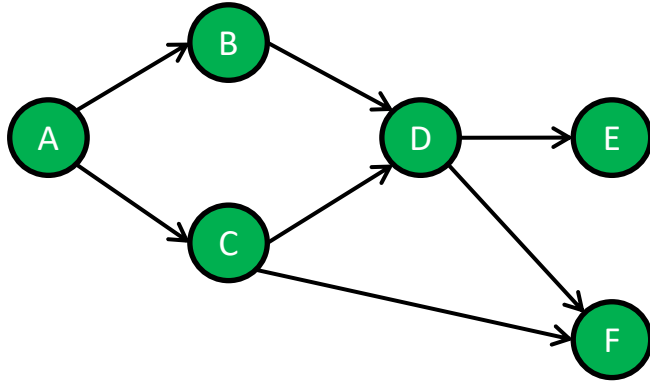
Visita(v)

1. se $\text{Marca}[v] \neq 2$ então // Se v não for marcado permanentemente
 - a. se $\text{Marca}[v] = 1$ então CICLO; // Se v tiver marca temporária
 - b. $\text{Marca}[v] \leftarrow 1$; // Colocar marca temporária em v
 - c. para todo vértice $w \in \Gamma^+(v)$ faça **Visita**(w); // Visitar toda a vizinhança de v
 - d. $\text{Marca}[v] \leftarrow 2$; // Colocar marca permanente em v
 - e. $\text{Ordena_Top}.\text{InsereNoInicio}(v)$; // Inserir elemento no resultado

Método por Busca em Profundidade – Exemplo

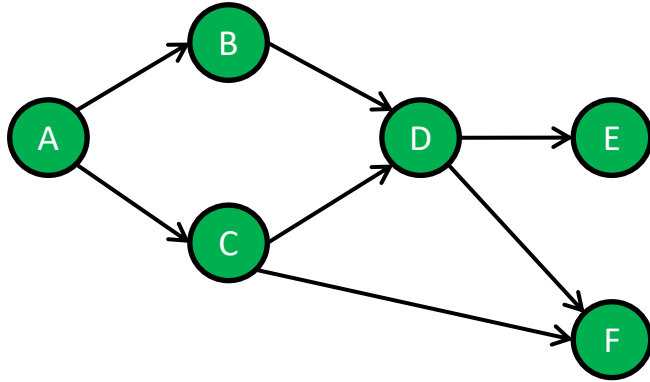


Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	0	0	0	0	0	0

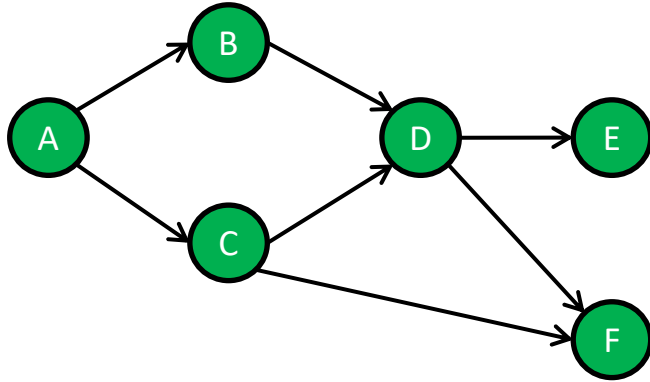
Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	0	0	0	0	0	0

Ordena_Top:

Método por Busca em Profundidade – Exemplo

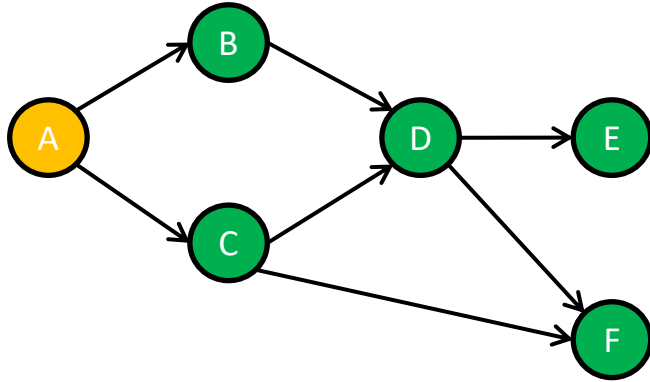


	A	B	C	D	E	F
Marca	0	0	0	0	0	0

Ordena_Top:

Visita(A):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo

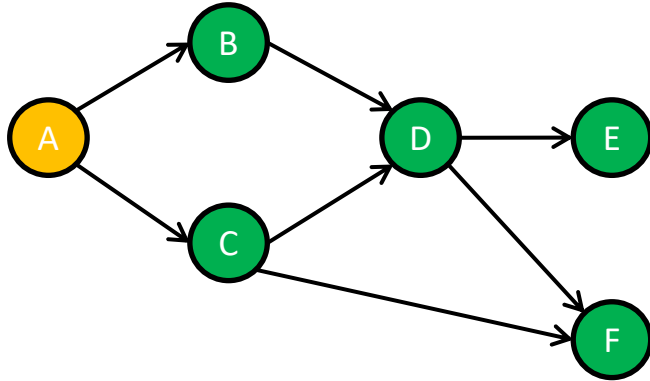


	A	B	C	D	E	F
Marca	1	0	0	0	0	0

Ordena_Top:

Visita(A):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



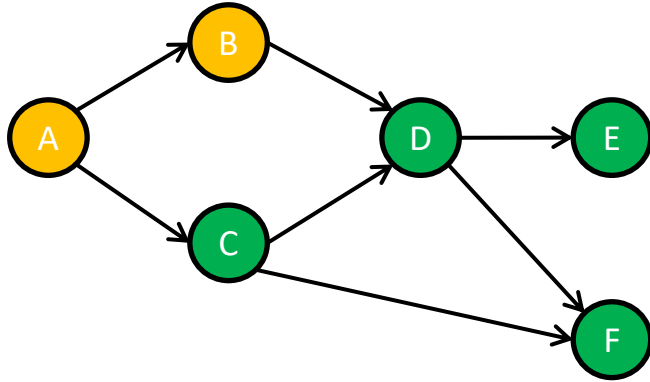
	A	B	C	D	E	F
Marca	1	0	0	0	0	0

Ordena_Top:

Visita(A):

Visita(B):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



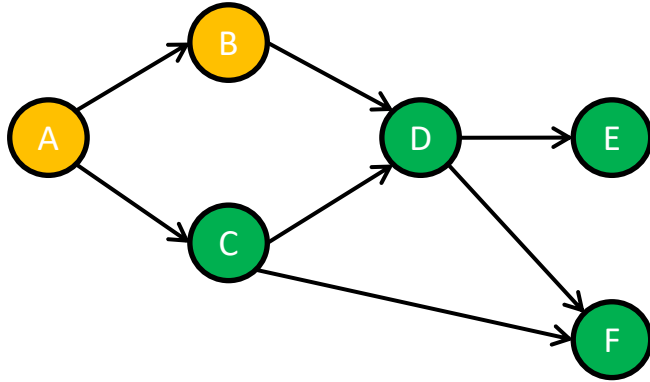
	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	0	0	0

Ordena_Top:

Visita(A):

Visita(B):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	0	0	0

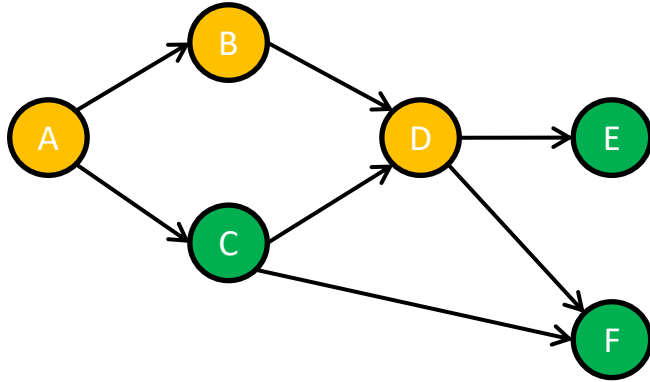
Ordena_Top:

Visita(A):

Visita(B):

Visita(D):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	0	0

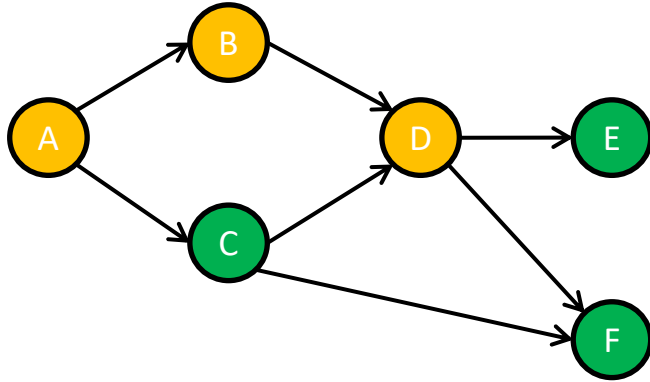
Ordena_Top:

Visita(A):

Visita(B):

Visita(D):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	0	0

Ordena_Top:

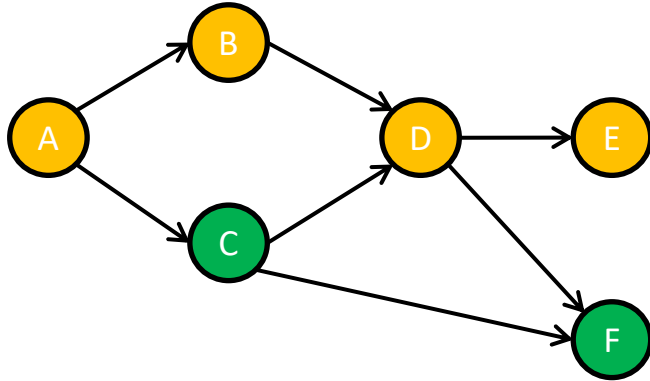
Visita(A):

Visita(B):

Visita(D):

Visita(E):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	1	0

Ordena_Top:

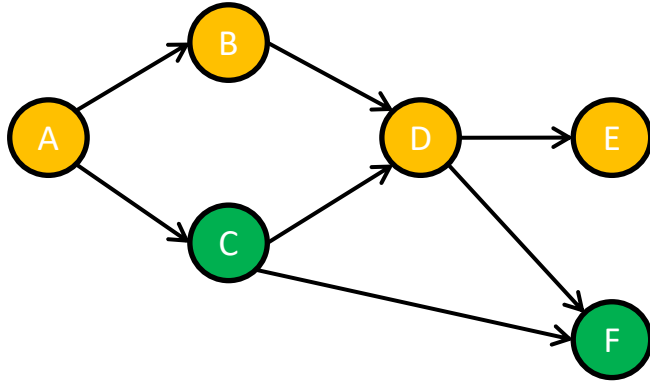
Visita(A):

Visita(B):

Visita(D):

Visita(E):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	1	0

Ordena_Top:

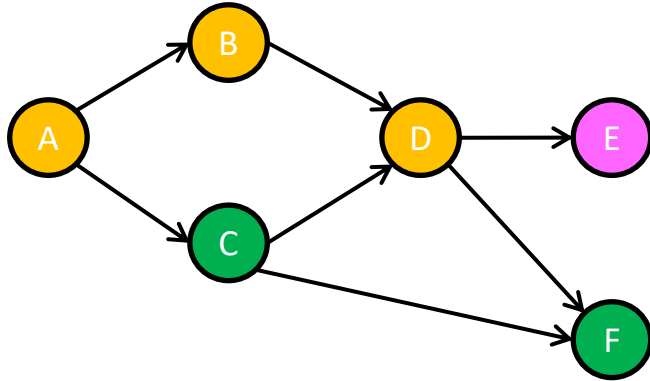
Visita(A):

Visita(B):

Visita(D):

Visita(E):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	2	0

Ordena_Top:

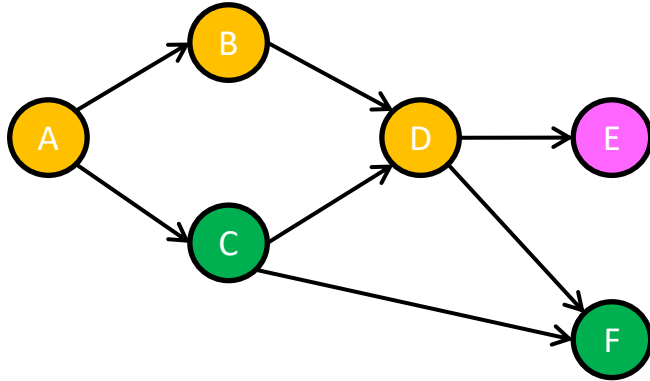
Visita(A):

Visita(B):

Visita(D):

Visita(E):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	2	0

Ordena_Top: E

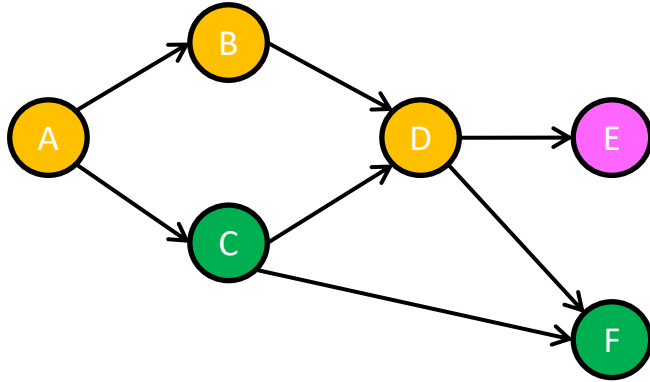
Visita(A):

Visita(B):

Visita(D):

Visita(E):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	2	0

Ordena_Top: E

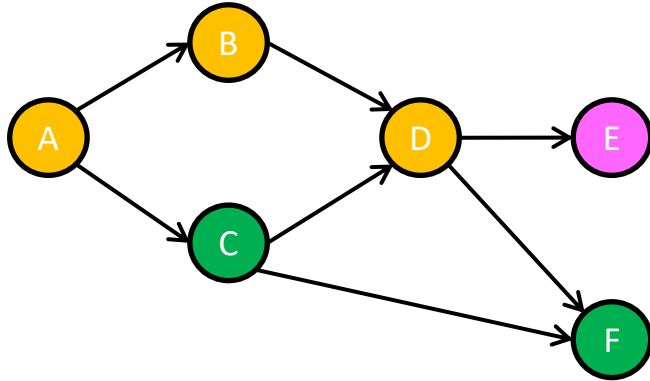
Visita(A):

Visita(B):

Visita(D):

~~**Visita(E):**~~

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	2	0

Ordena_Top: E

Visita(A):

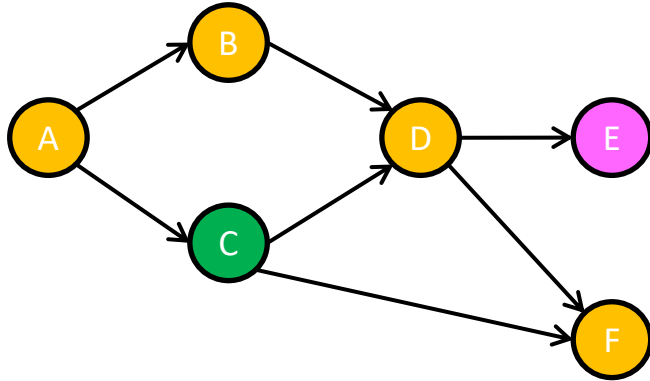
Visita(B):

Visita(D):

~~**Visita(E):**~~

Visita(F):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	2	1

Ordena_Top: E

Visita(A):

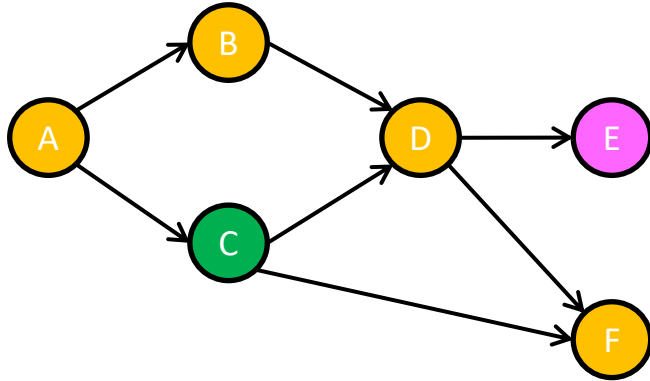
Visita(B):

Visita(D):

~~**Visita(E):**~~

Visita(F):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	2	1

Ordena_Top: E

Visita(A):

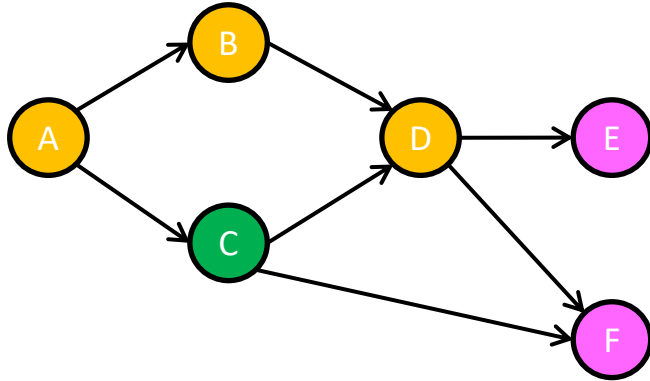
Visita(B):

Visita(D):

~~**Visita(E):**~~

Visita(F):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	2	2

Ordena_Top: E

Visita(A):

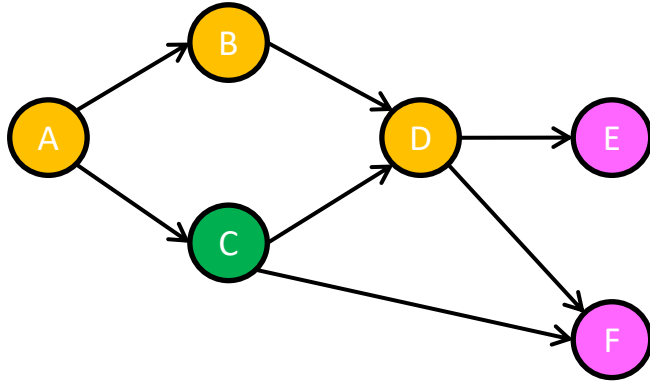
Visita(B):

Visita(D):

~~**Visita(E):**~~

Visita(F):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	2	2

Ordena_Top: F E

Visita(A):

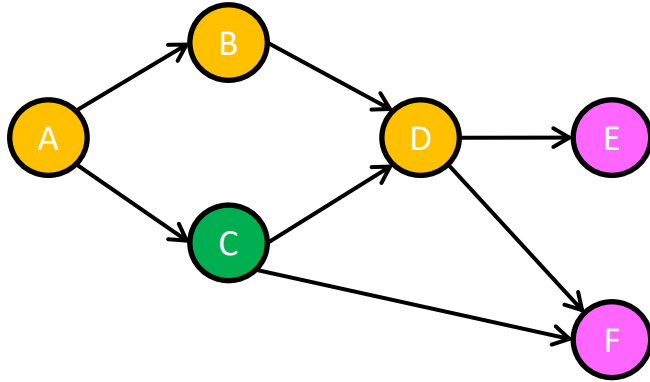
Visita(B):

Visita(D):

~~**Visita(E):**~~

Visita(F):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	1	2	2

Ordena_Top: F E

Visita(A):

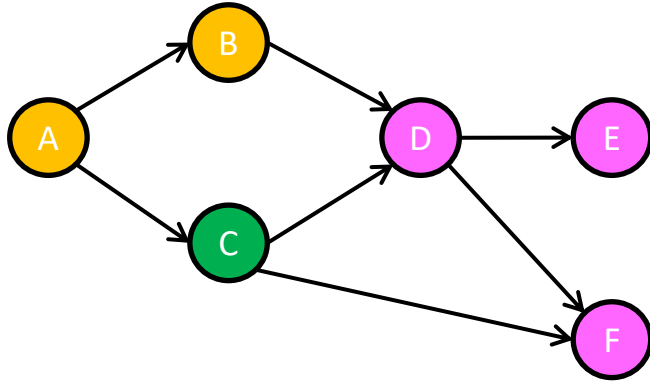
Visita(B):

Visita(D):

~~**Visita(E):**~~

~~**Visita(F):**~~

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	2	2	2

Ordena_Top: F E

Visita(A):

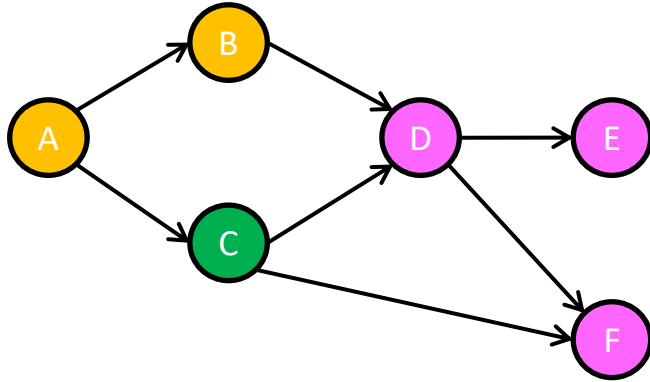
Visita(B):

Visita(D):

~~**Visita(E):**~~

~~**Visita(F):**~~

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	2	2	2

Ordena_Top: D F E

Visita(A):

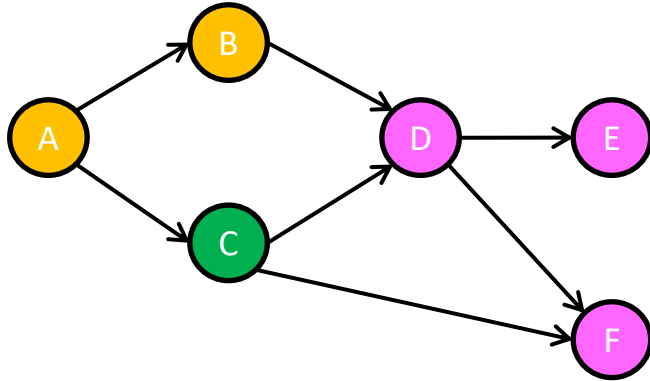
Visita(B):

Visita(D):

~~**Visita(E):**~~

~~**Visita(F):**~~

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	1	0	2	2	2

Ordena_Top: D F E

Visita(A):

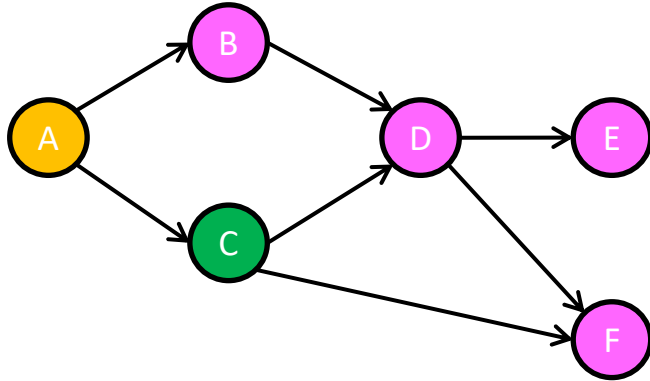
Visita(B):

~~**Visita(D):**~~

~~**Visita(E):**~~

~~**Visita(F):**~~

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	2	0	2	2	2

Ordena_Top: D F E

Visita(A):

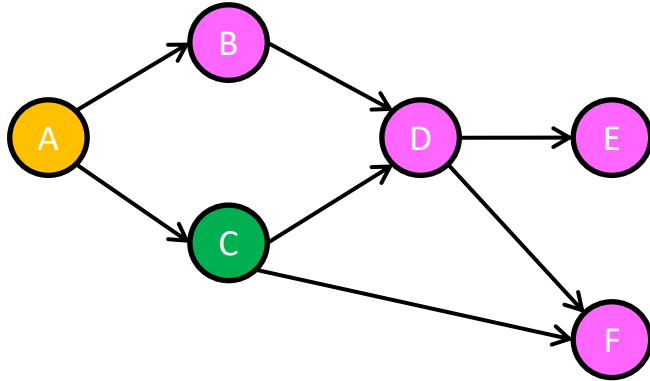
Visita(B):

~~**Visita(D):**~~

~~**Visita(E):**~~

~~**Visita(F):**~~

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	2	0	2	2	2

Ordena_Top: B D F E

Visita(A):

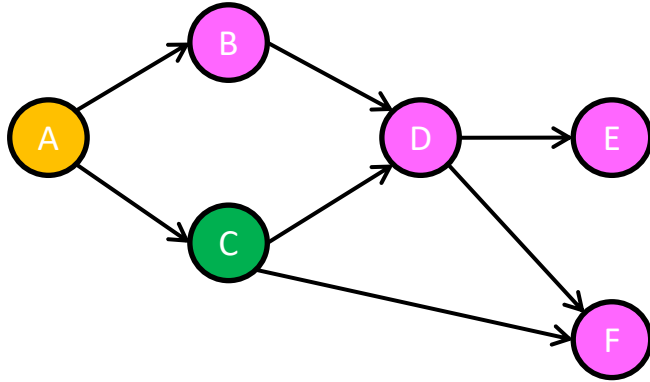
Visita(B):

~~Visita(D):~~

~~Visita(E):~~

~~Visita(F):~~

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	2	0	2	2	2

Ordena_Top: B D F E

Visita(A):

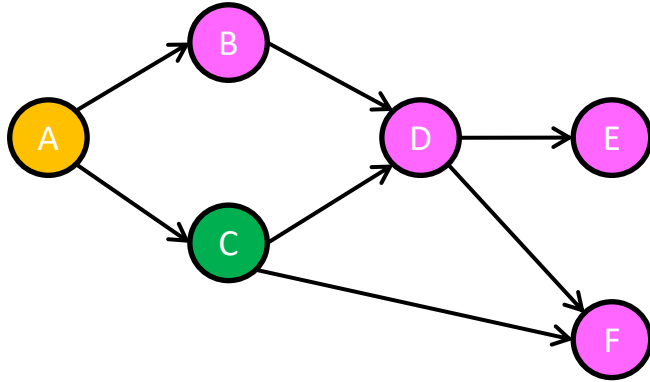
~~**Visita(B):**~~

~~**Visita(D):**~~

~~**Visita(E):**~~

~~**Visita(F):**~~

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	2	0	2	2	2

Ordena_Top: B D F E

Visita(A):

~~Visita(B):~~

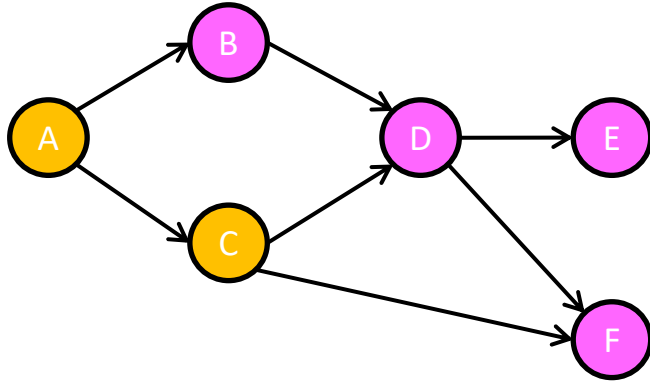
~~Visita(D):~~

~~Visita(E):~~

~~Visita(F):~~

Visita(C):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	2	1	2	2	2

Ordena_Top: B D F E

Visita(A):

~~Visita(B):~~

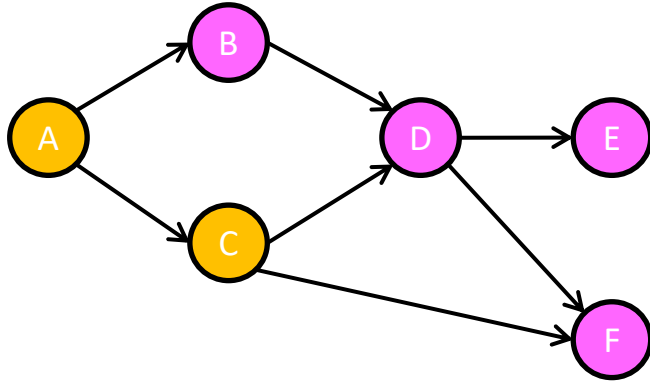
~~Visita(D):~~

~~Visita(E):~~

~~Visita(F):~~

Visita(C):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	2	1	2	2	2

Ordena_Top: B D F E

Visita(A):

~~Visita(B):~~

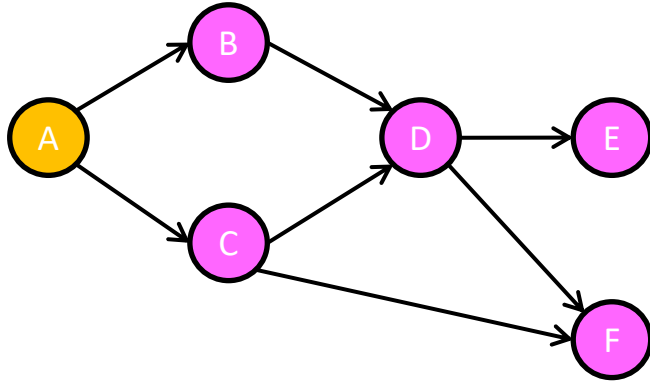
~~Visita(D):~~

~~Visita(E):~~

~~Visita(F):~~

Visita(C):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	2	2	2	2	2

Ordena_Top: B D F E

Visita(A):

~~Visita(B):~~

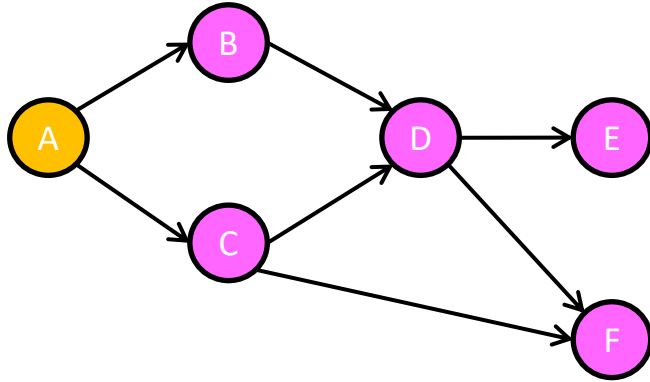
~~Visita(D):~~

~~Visita(E):~~

~~Visita(F):~~

Visita(C):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	2	2	2	2	2

Ordena_Top: C B D F E

Visita(A):

~~Visita(B):~~

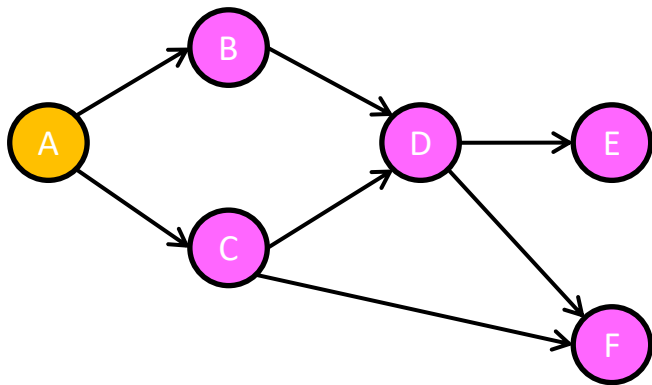
~~Visita(D):~~

~~Visita(E):~~

~~Visita(F):~~

Visita(C):

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	1	2	2	2	2	2

Ordena_Top: C B D F E

Visita(A):

~~**Visita(B):**~~

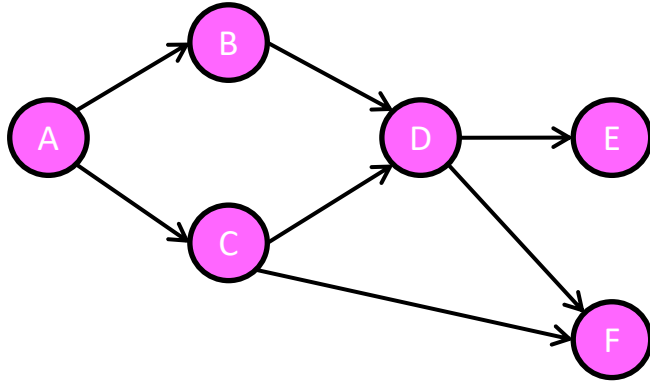
~~**Visita(D):**~~

~~**Visita(E):**~~

~~**Visita(F):**~~

~~**Visita(C):**~~

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	2	2	2	2	2	2

Ordena_Top: C B D F E

Visita(A):

~~**Visita(B):**~~

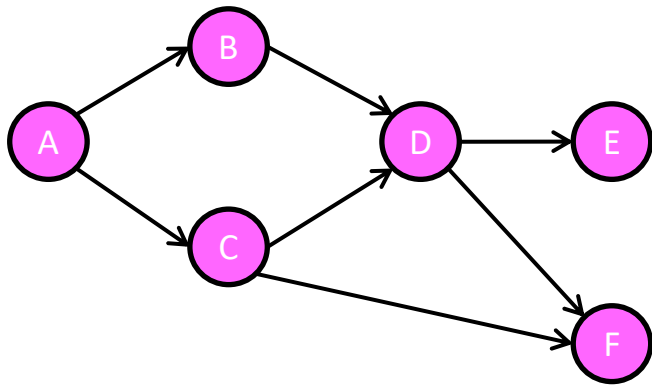
~~**Visita(D):**~~

~~**Visita(E):**~~

~~**Visita(F):**~~

~~**Visita(C):**~~

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	2	2	2	2	2	2

Ordena_Top: A C B D F E

Visita(A):

~~**Visita(B):**~~

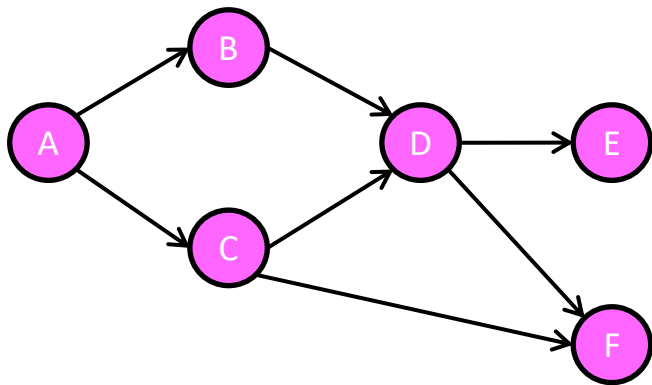
~~**Visita(D):**~~

~~**Visita(E):**~~

~~**Visita(F):**~~

~~**Visita(C):**~~

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	2	2	2	2	2	2

Ordena_Top: A C B D F E

~~Visita(A):~~

~~Visita(B):~~

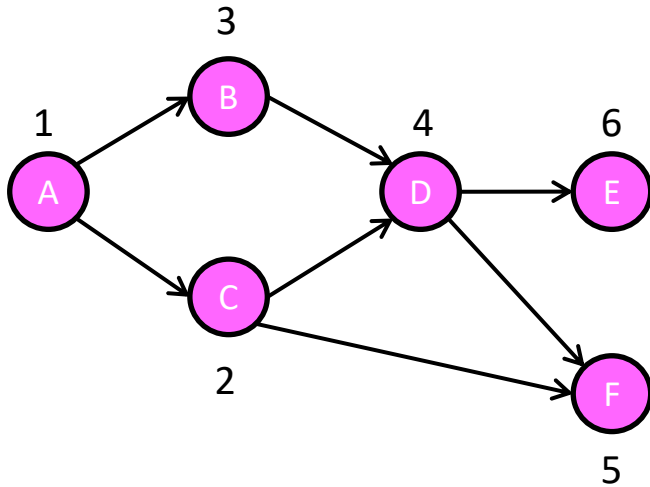
~~Visita(D):~~

~~Visita(E):~~

~~Visita(F):~~

~~Visita(C):~~

Método por Busca em Profundidade – Exemplo



	A	B	C	D	E	F
Marca	2	2	2	2	2	2

Ordena_Top: A C B D F E



Numeração topológica corresponde a ordem reversa de inserção no resultado

