Fluxo Máximo (2)

Zenilton Patrocínio

Método de Ford-Fulkerson – Análise

Complexidade do método de Ford-Fulkerson

No máximo f repetições

1. <u>para</u> toda aresta $e \in E(G)$ <u>faça</u> $f(e) \leftarrow 0$; // Inicializar fluxo
2. Construir a rede residual G'(f) // Construir rede residual inicial $\rightarrow O(m)$
3. <u>enquanto</u> existir algum caminho aumentante P em G'(f) <u>efetuar</u> $\rightarrow O(m)$
   a. $\Delta = \min \{ u_r(e) \mid e \in P \}$; // Determinar "gargalo" de P $\rightarrow O(m)$
   b. <u>para</u> cada aresta $(v, w) \in P$ <u>faça</u>
      i. <u>se</u> (v, w) for aresta direta <u>então</u> $\rightarrow O(1)$
         $f(v, w) \leftarrow f(v, w) + \Delta$ // Aumentar fluxo $\rightarrow O(1)$ $\rightarrow O(m)$
      ii. <u>senão</u>
         $f(w, v) \leftarrow f(w, v) - \Delta$ // Reduzir fluxo $\rightarrow O(1)$
   c. Atualizar a rede residual G'(f) // Construir nova rede residual $\rightarrow O(m)$

$O(m\,f)$

Método de Ford-Fulkerson – Análise

Complexidade do método de Ford-Fulkerson

1. para toda are
2. Construir a
3. enquanto e
   a. Δ = mi
   b. para ca
      i. se
      ii. se
      $f(w, v) \leftarrow f(w, v) - \Delta$ // Reduzir fluxo
   c. Atualizar a rede residual G'(f) // Construir nova rede residual

Com capacidades inteiras é O(*m f*),
sendo *m* = |E(G)|, *f* = fluxo máximo

→ O(m)

→ O(m)

→ O(m)

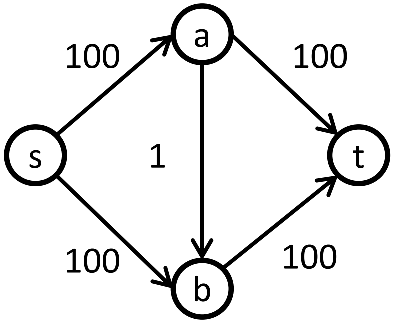
→ O(m)

→ O(1)

→ O(m)

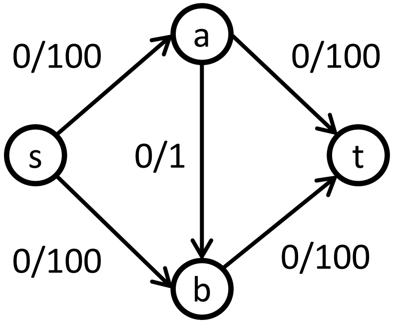
O(*m f*)

Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo



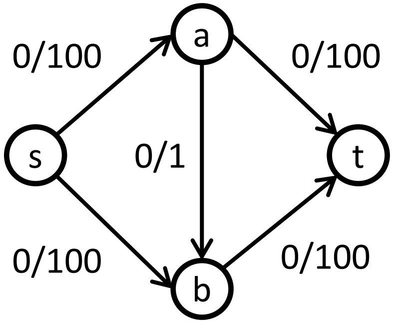
Rede de Fluxo

Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo

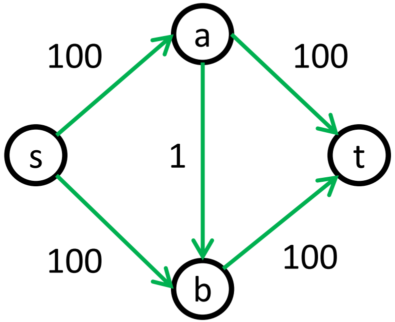


Fluxo Viável

Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo

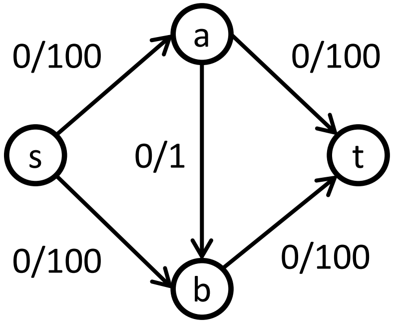


Fluxo Viável

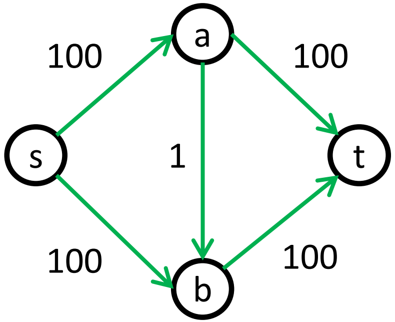


Rede Residual

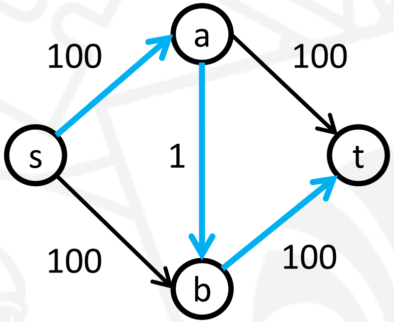
Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo



Fluxo Viável

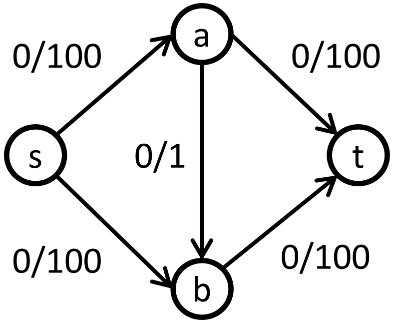


Rede Residual

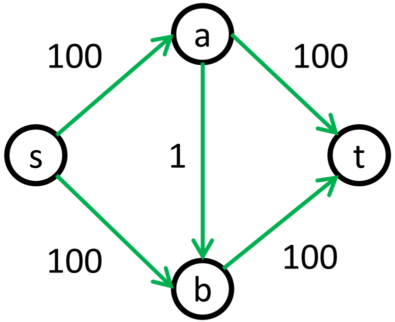


Caminho Aumentante

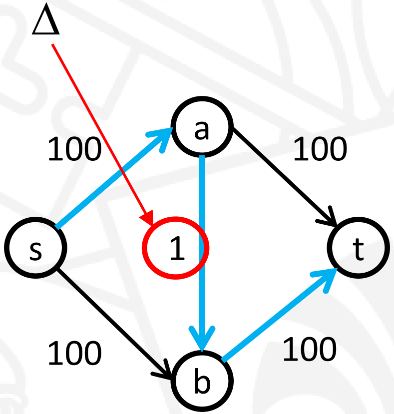
Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo



Fluxo Viável

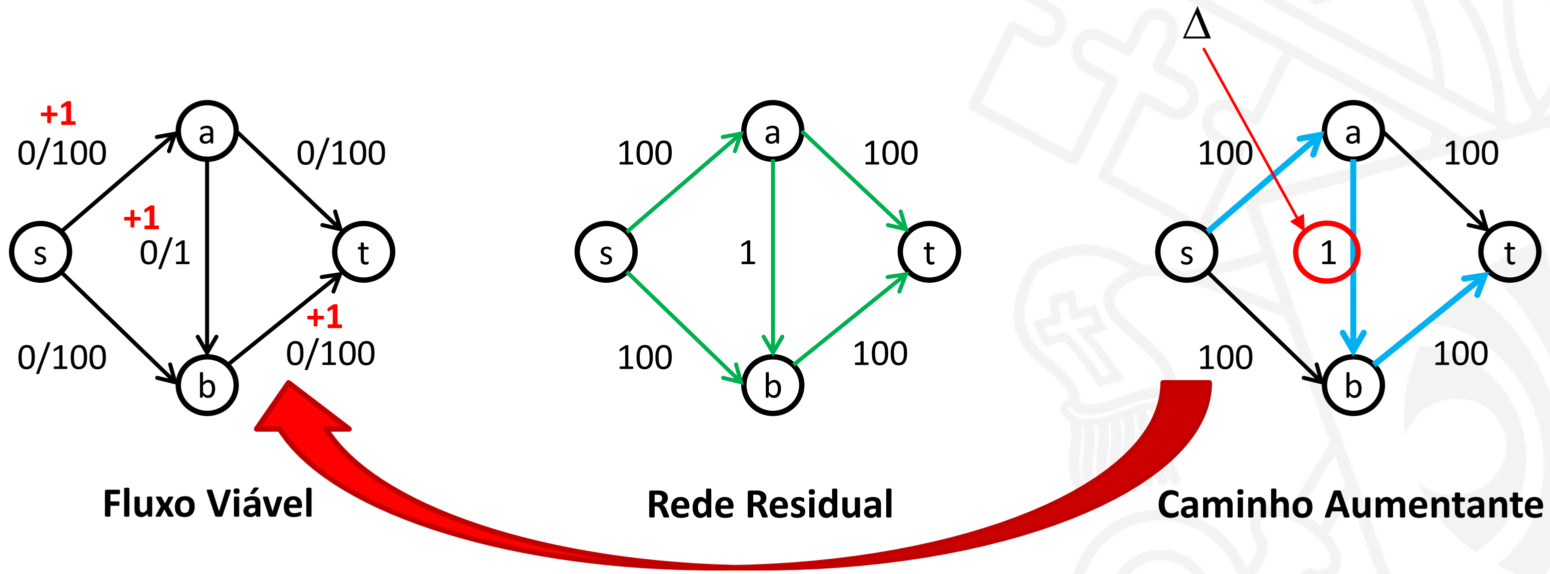


Rede Residual

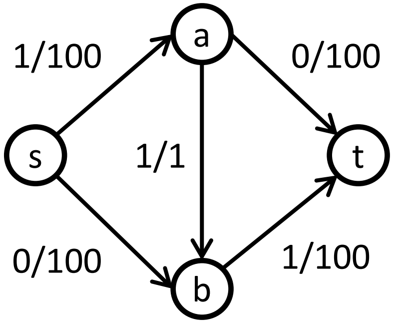


Caminho Aumentante

Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo

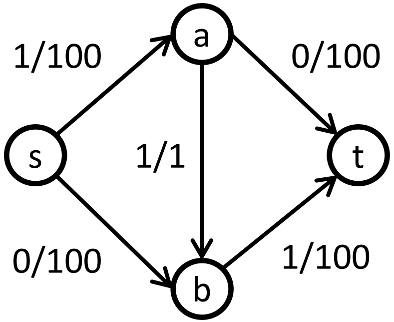


Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo

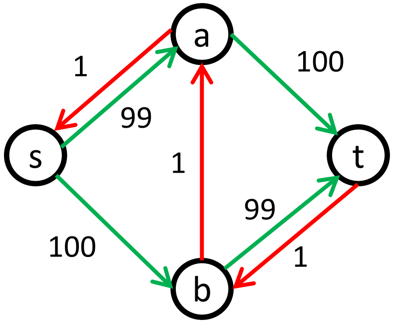


Fluxo Viável

Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo

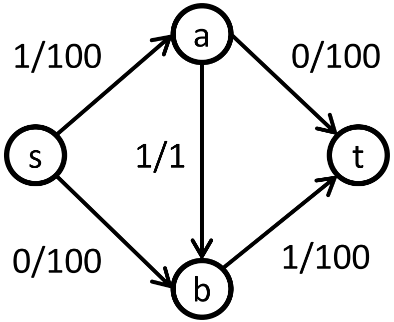


Fluxo Viável

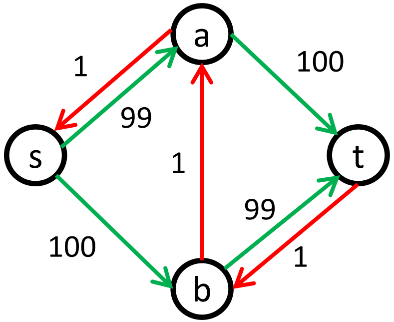


Rede Residual

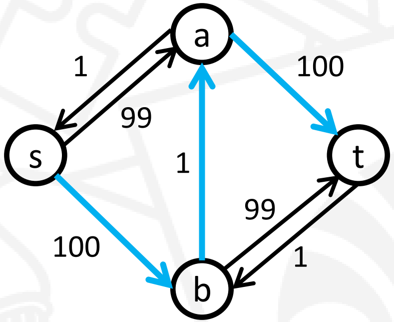
Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo



Fluxo Viável

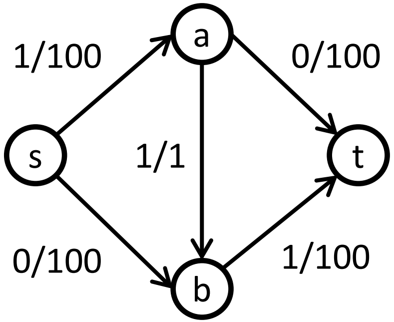


Rede Residual

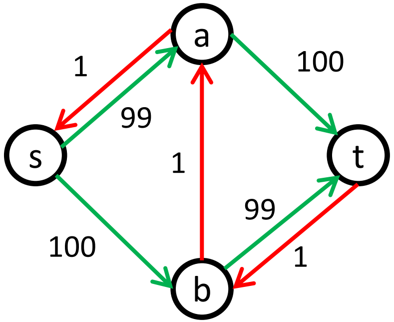


Caminho Aumentante

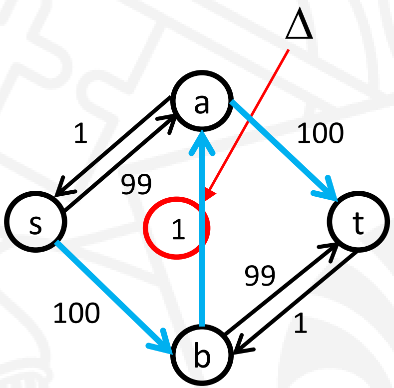
Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo



Fluxo Viável

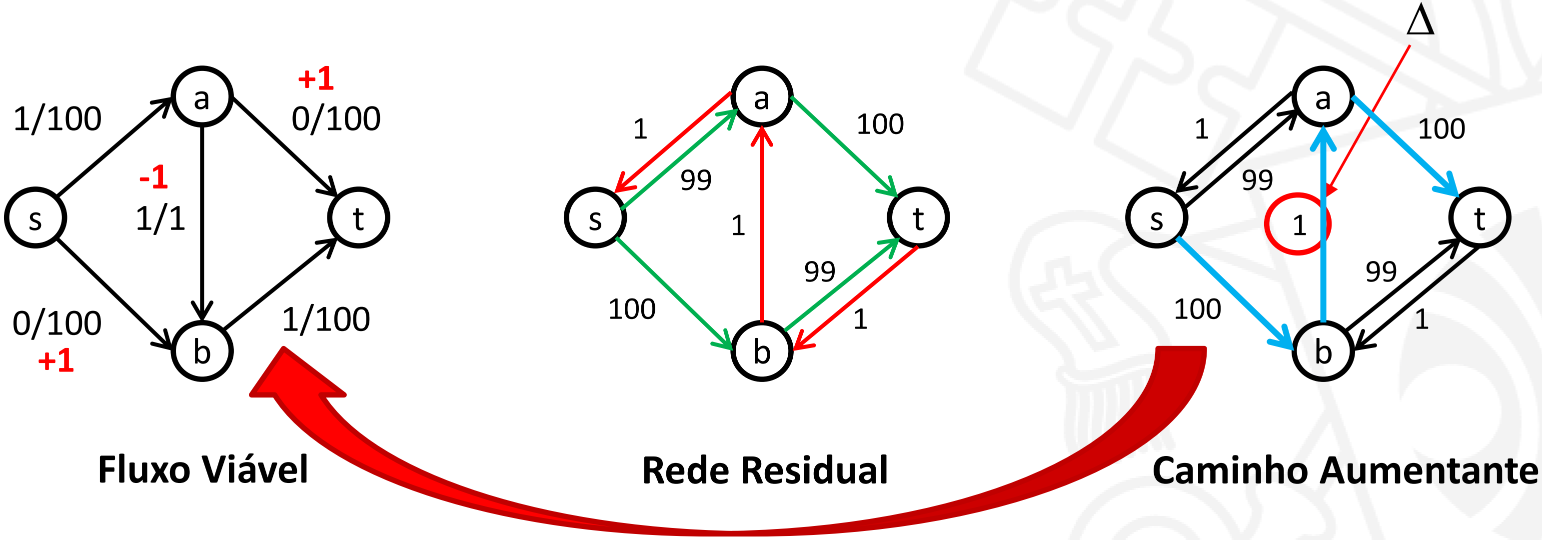


Rede Residual



Caminho Aumentante

Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo

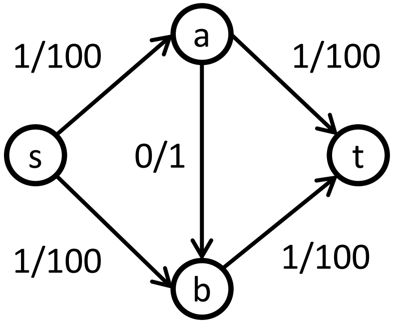


Fluxo Viável

Rede Residual

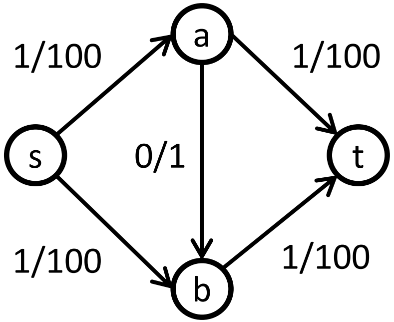
Caminho Aumentante

Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo

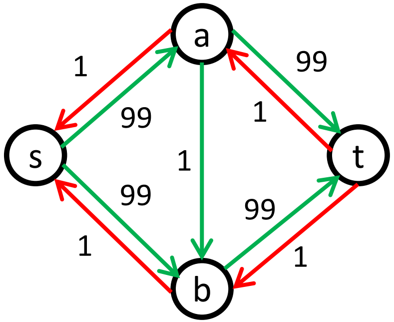


Fluxo Viável

Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo

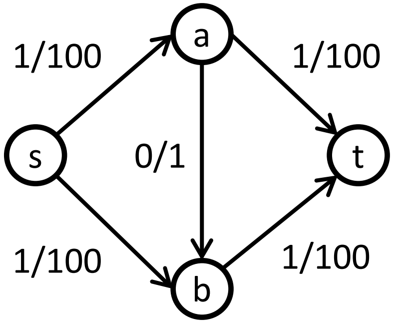


Fluxo Viável

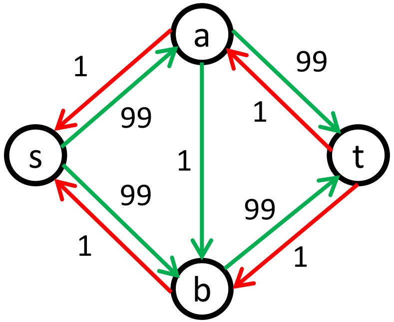


Rede Residual

Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo



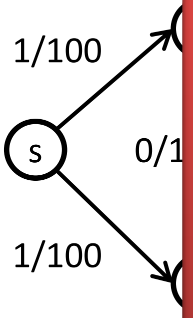
Fluxo Viável



Rede Residual

...

Problema com Ford-Fulkerson – Exemplo



No pior caso, o número de iterações pode ser O(*f*) em que *f* representa o valor do fluxo máximo !

ALGORITMO PSEUDOPOLINOMIAL

Fluxo Viável

Rede Residual

Método de Edmonds-Karp

Método de Edmonds-Karp

Esse método foi publicado independentemente por Dinitz (ou Dinic), em 1970, e por Edmonds e Karp, em 1972.

Na verdade, pode ser visto como uma implementação eficiente do método de Ford-Fulkerson.

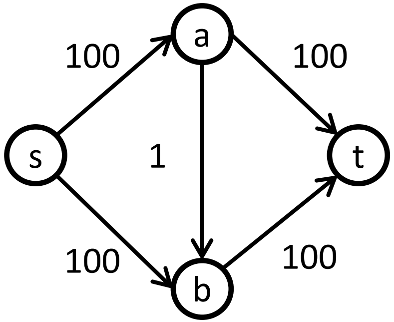
A cada iteração, seleciona-se o caminho de aumento de fluxo na rede residual que seja mais curto (utilizando menor número de arestas).

O caminho mais curto pode encontrado utilizando uma busca em largura.

Método de Edmonds-Karp – Algoritmo

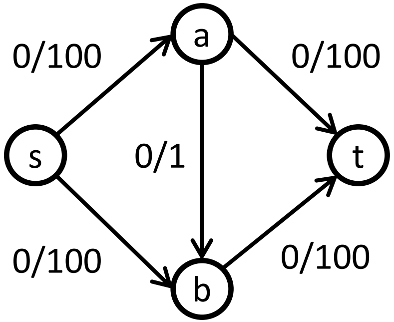
1. <u>para</u> toda aresta $e \in E(G)$ <u>faça</u> $f(e) \leftarrow 0$; // Inicializar fluxo
2. Construir a rede residual G'(f) // Construir rede residual inicial
3. <u>enquanto</u> existir algum caminho aumentante P em G'(f) <u>efetuar</u>
   a. Seja P o caminho aumentante em G'(f) com menor número de arestas
   b. $\Delta = \min \{ u_r(e) \mid e \in P \}$;
   c. <u>para</u> cada aresta $(v, w) \in P$ <u>faça</u>
      i. <u>se</u> (v, w) for aresta direta <u>então</u> $f(v, w) \leftarrow f(v, w) + \Delta$
      ii. <u>senão</u> $f(w, v) \leftarrow f(w, v) - \Delta$
   d. Atualizar a rede residual G'(f) // Construir nova rede residual

Método de Edmonds-Karp – Exemplo



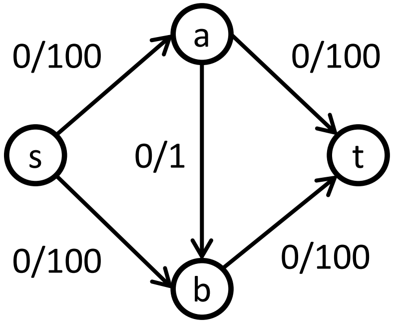
Rede de Fluxo

Método de Edmonds-Karp – Exemplo

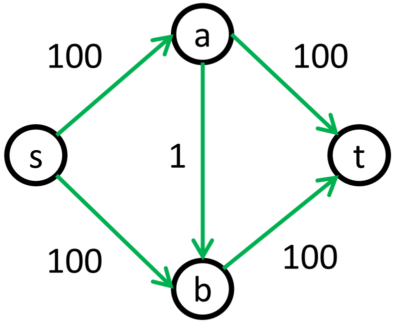


Fluxo Viável

Método de Edmonds-Karp – Exemplo

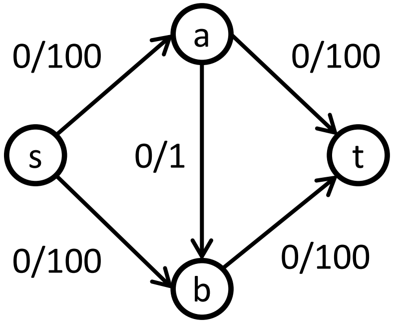


Fluxo Viável

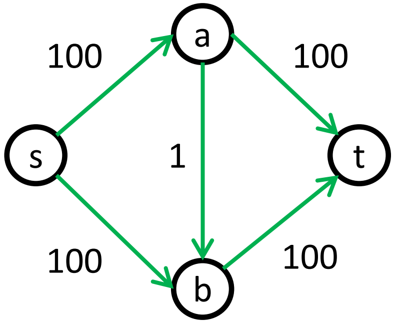


Rede Residual

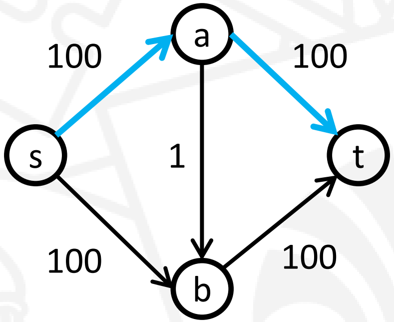
Método de Edmonds-Karp – Exemplo



Fluxo Viável

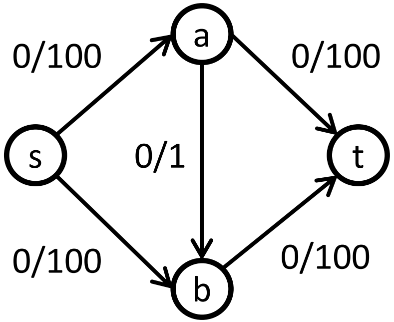


Rede Residual

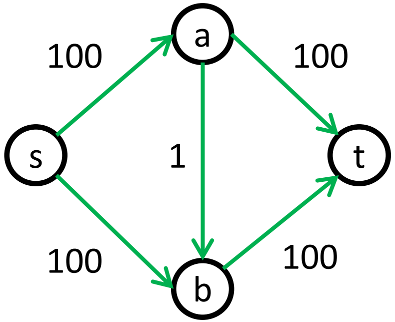


Caminho Aumentante

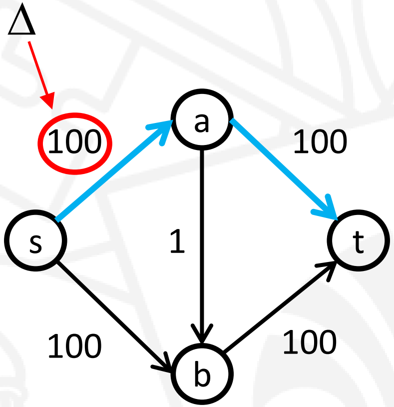
Método de Edmonds-Karp – Exemplo



Fluxo Viável

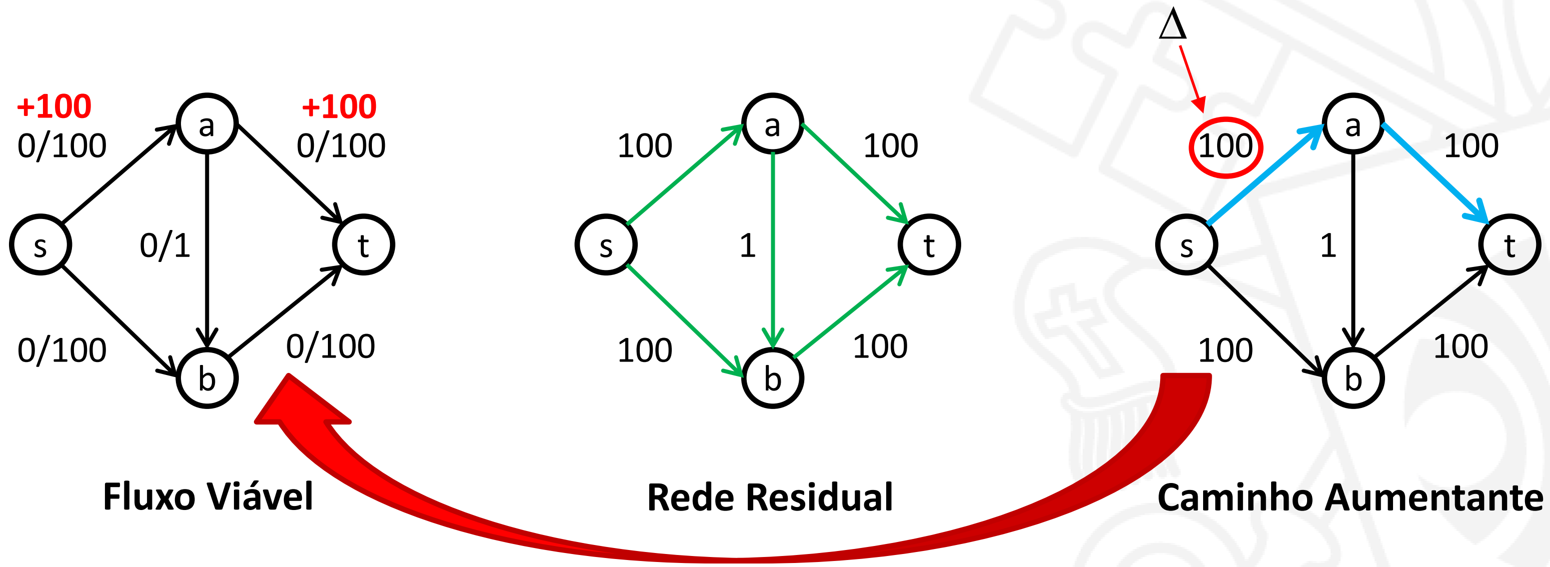


Rede Residual

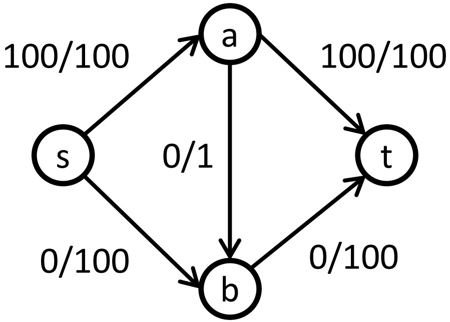


Caminho Aumentante

Método de Edmonds-Karp – Exemplo

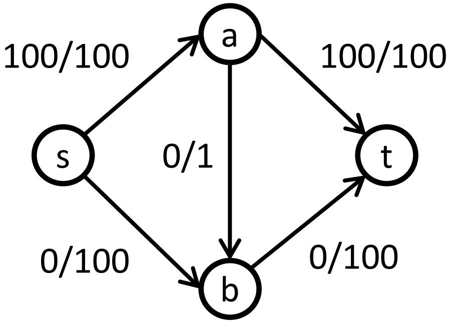


Método de Edmonds-Karp – Exemplo

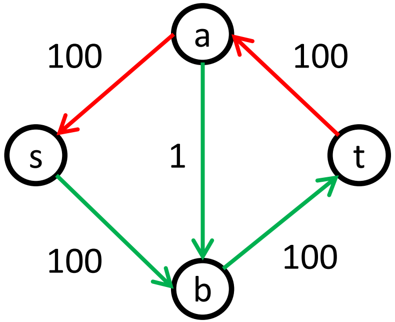


Fluxo Viável

Método de Edmonds-Karp – Exemplo

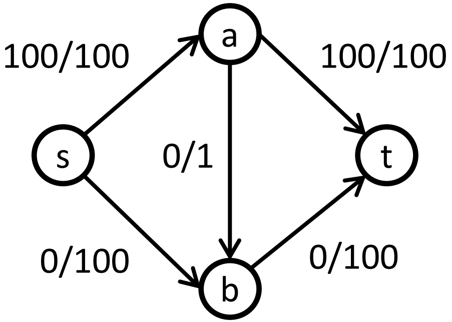


Fluxo Viável

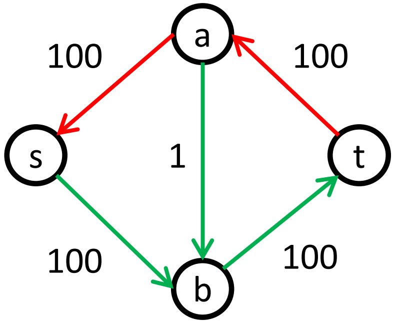


Rede Residual

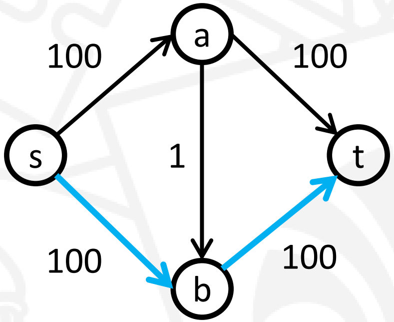
Método de Edmonds-Karp – Exemplo



Fluxo Viável

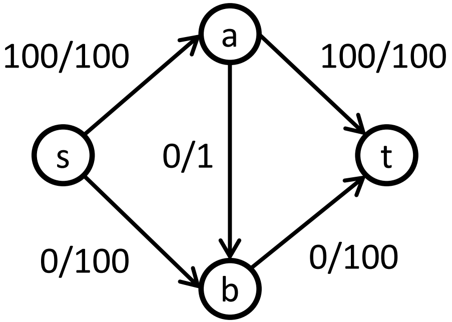


Rede Residual

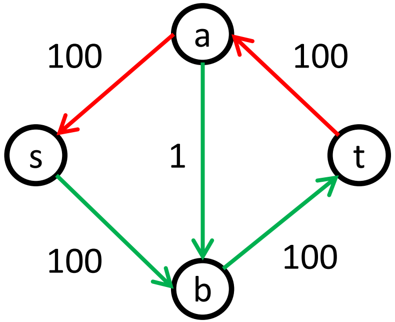


Caminho Aumentante

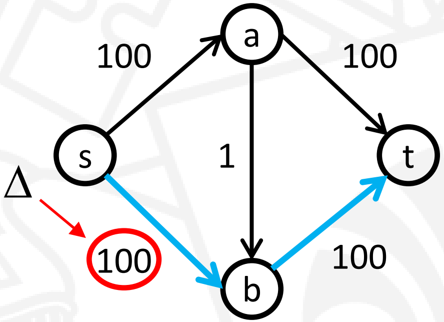
Método de Edmonds-Karp – Exemplo



Fluxo Viável

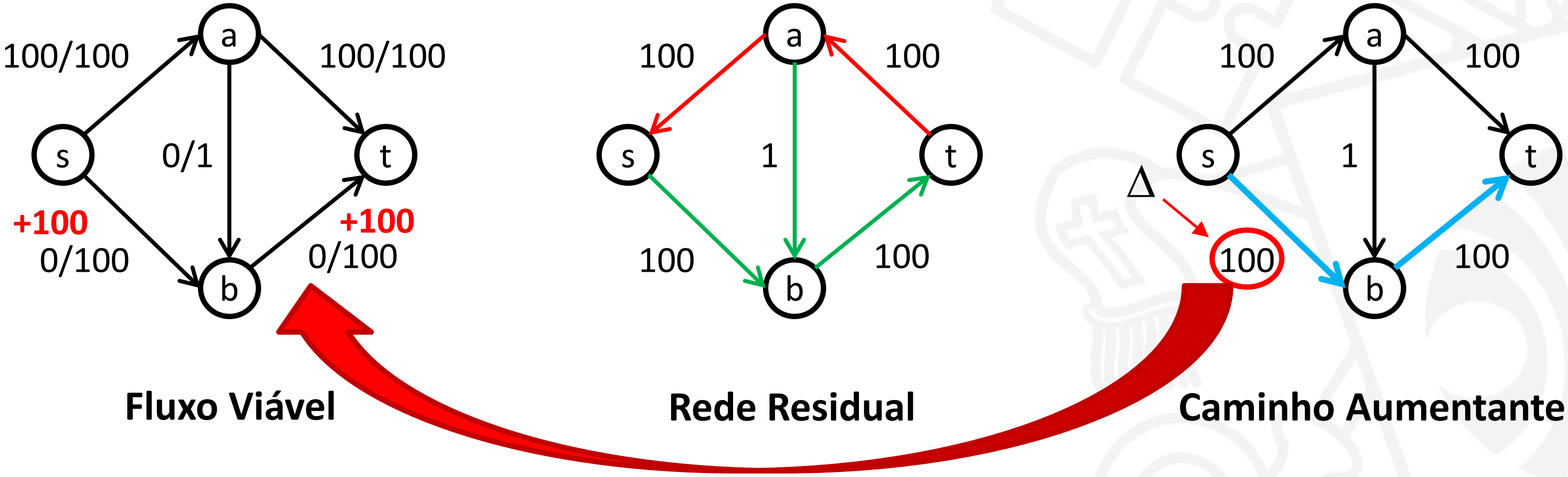


Rede Residual

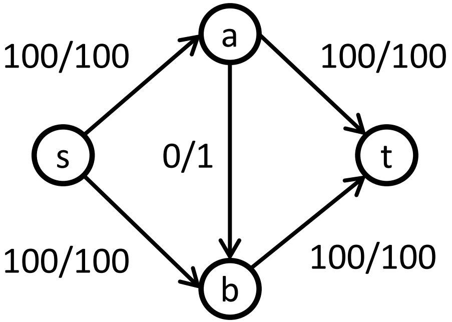


Caminho Aumentante

Método de Edmonds-Karp – Exemplo

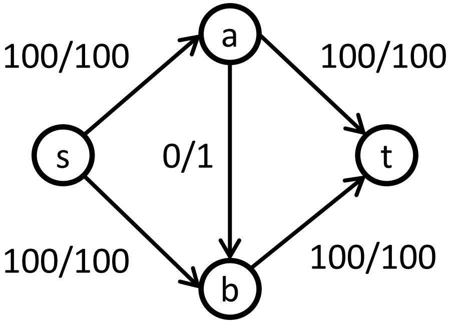


Método de Edmonds-Karp – Exemplo

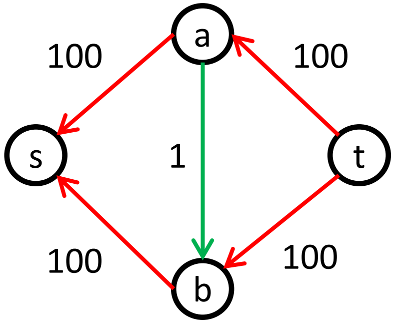


Fluxo Viável

Método de Edmonds-Karp – Exemplo

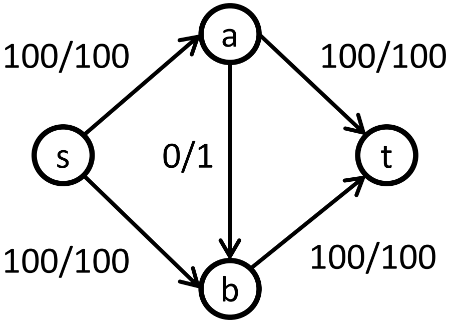


Fluxo Viável

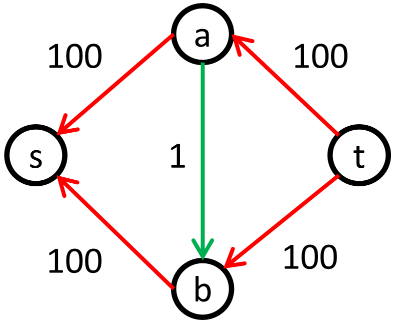


Rede Residual

Método de Edmonds-Karp – Exemplo



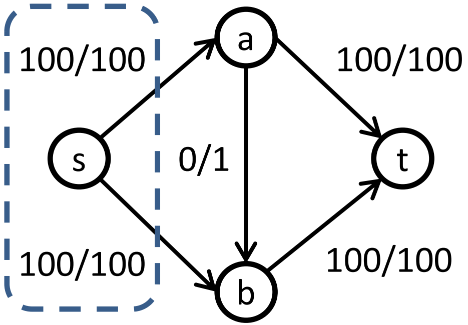
Fluxo Viável



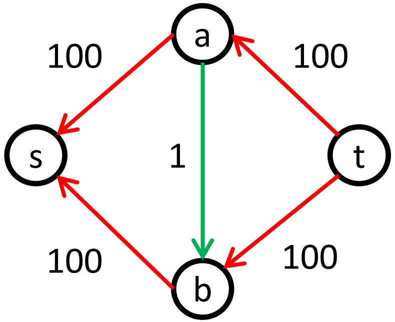
Rede Residual

Não existe caminho aumentante

Método de Edmonds-Karp – Exemplo



Fluxo Viável



Rede Residual

Não existe caminho aumentante

Fluxo máximo = 200

Método de Dinic

Rede de Níveis

Dada uma rede residual $G'(f)$, uma rede em níveis G_L é um grafo direcionado ponderado que:

- Possui os mesmos vértices que $G'(f)$, isto é, $V(G_L) = V(G')$;
- Para toda aresta $e = (v, w) \in E(G')$ com capacidade igual a $u_r(e)$, G_L contém a aresta (v, w) com a mesma capacidade se $\text{dist}(w) = \text{dist}(v) + 1$, em que $\text{dist}(v)$ representa a menor distância geodésica entre a fonte e o vértice v (em número de arestas).

Um fluxo de bloqueio (ou blocante) f_b representa um fluxo em G_L que se mantidas apenas as arestas que possuem capacidade maior que f_b não exista mais um caminho aumentante em G_L.

Método de Dinic

Esse método foi publicado independentemente por Dinitz (ou Dinic), em 1970.

Semelhante ao método de Edmonds-Karp, se o caminho aumentante escolhido for o mais curto, então os tamanho de caminhos são não decrescentes e o método termina mesmo que as capacidades não sejam inteiras.

A cada iteração, determina-se o fluxo de bloqueio na rede de níveis.

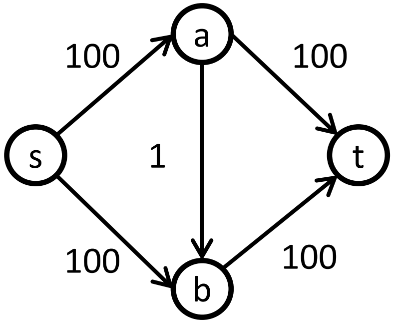
Pode-se mostrar que o número de níveis de um fluxo de bloqueio aumenta de pelo menos uma unidade a cada iteração (logo existem $|V| - 1$ fluxos de bloqueio, no máximo).

Um fluxo de bloqueio pode ser encontrado em $O(|V| \times |E|)$.

Método de Dinic – Algoritmo

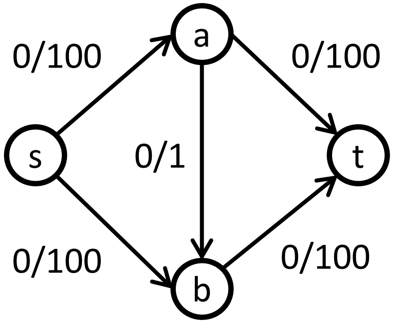
1. <u>para</u> toda aresta $e \in E(G)$ <u>faça</u> $f(e) \leftarrow 0$; // Inicializar fluxo
2. Construir a rede residual $G'(f)$ // Construir rede residual inicial
3. Construir a rede em níveis G_L a partir de $G'(f)$ // Construir rede em níveis inicial
4. <u>enquanto</u> $dist(t) < \infty$ <u>efetuar</u>
   a. Determinar um fluxo de bloqueio f_b em G_L
   b. Atualizar o fluxo f usando f_b
   c. Atualizar a rede residual $G'(f)$ // Construir nova rede residual
   d. Construir a rede em níveis G_L a partir de $G'(f)$ // Construir nova rede em níveis

Método de Dinic – Exemplo



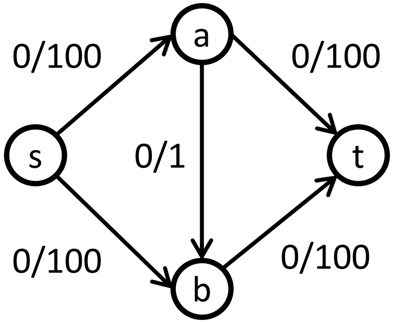
Rede de Fluxo

Método de Dinic – Exemplo

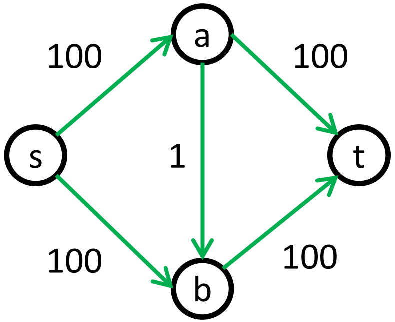


Fluxo Viável

Método de Dinic – Exemplo

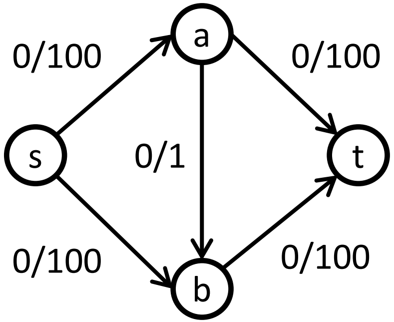


Fluxo Viável

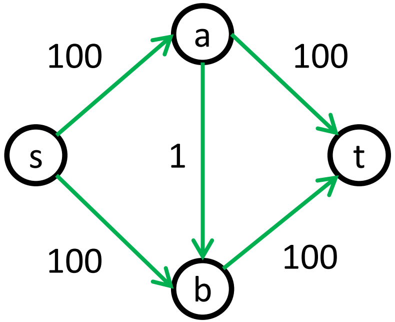


Rede Residual

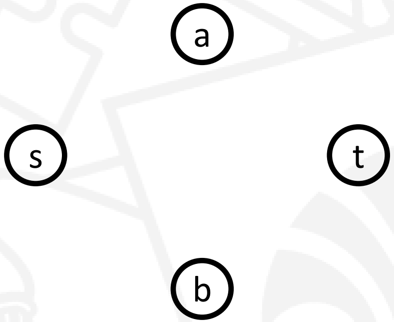
Método de Dinic – Exemplo



Fluxo Viável

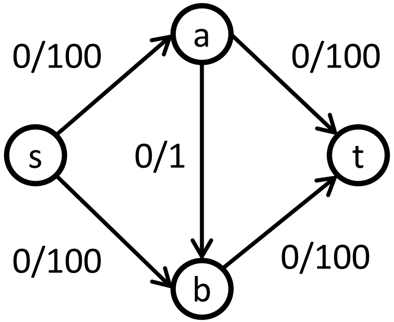


Rede Residual

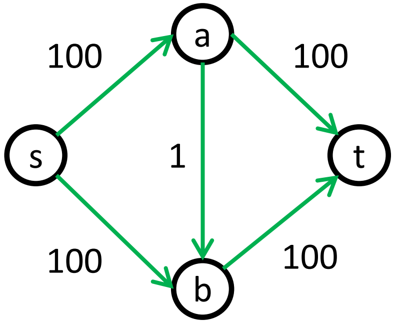


Rede em Níveis

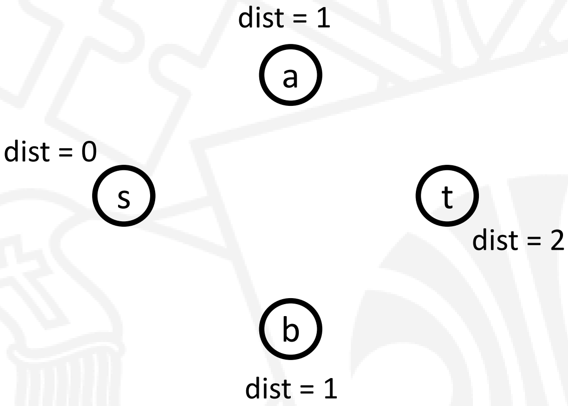
Método de Dinic – Exemplo



Fluxo Viável

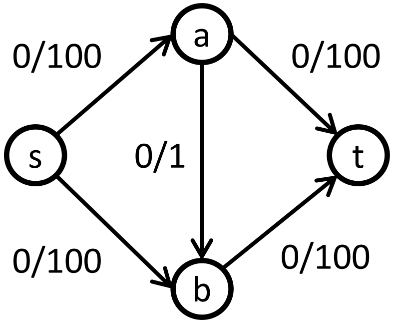


Rede Residual

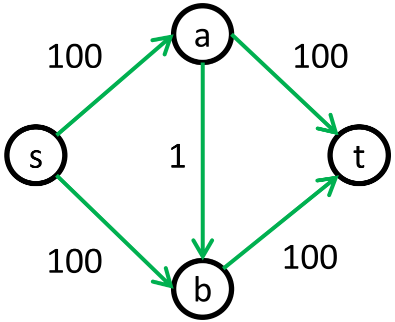


Rede em Níveis

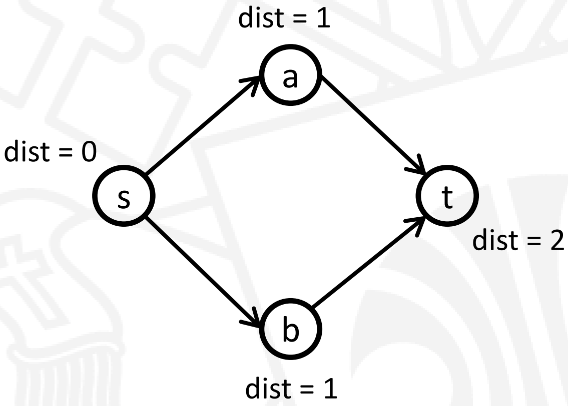
Método de Dinic – Exemplo



Fluxo Viável

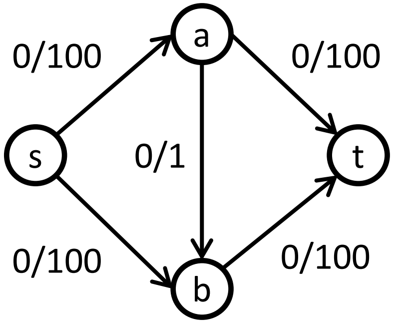


Rede Residual

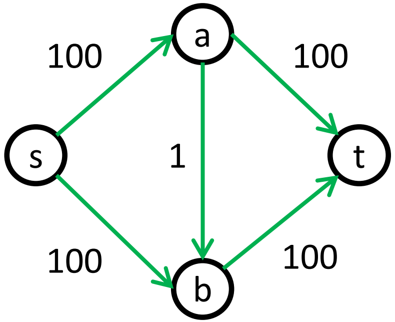


Rede em Níveis

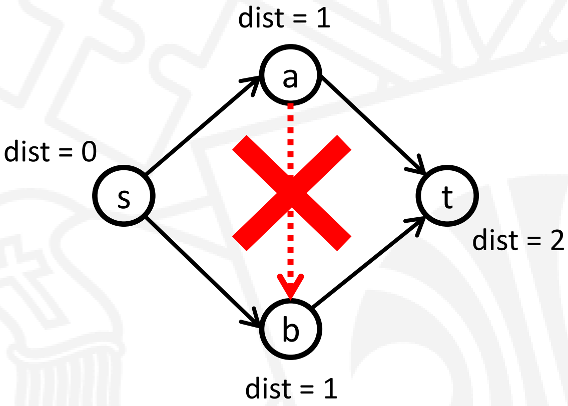
Método de Dinic – Exemplo



Fluxo Viável

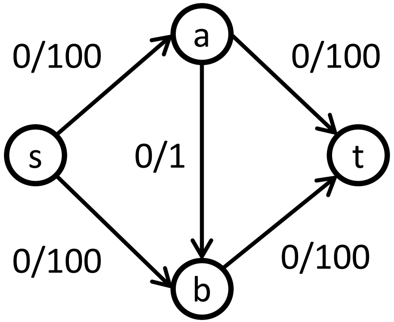


Rede Residual

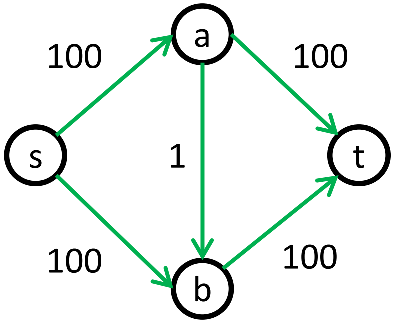


Rede em Níveis

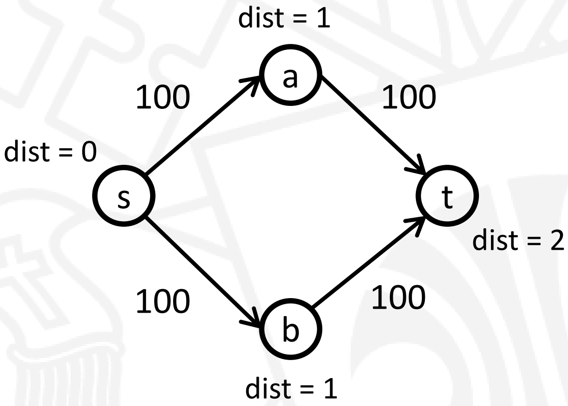
Método de Dinic – Exemplo



Fluxo Viável

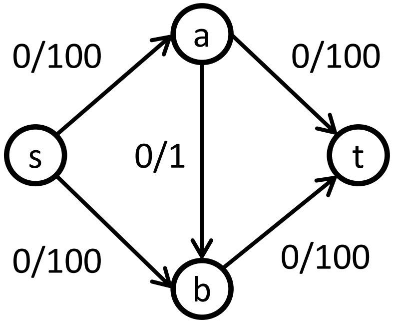


Rede Residual

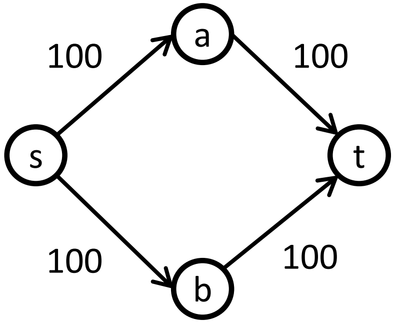


Rede em Níveis

Método de Dinic – Exemplo

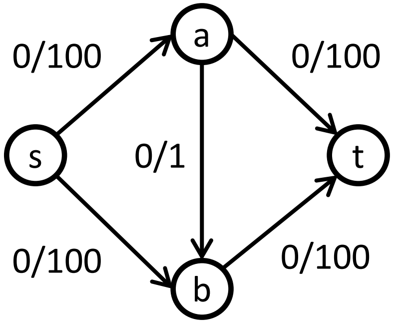


Fluxo Viável

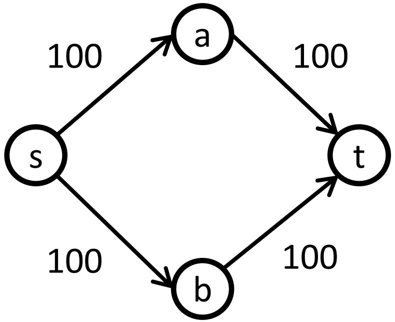


Rede em Níveis

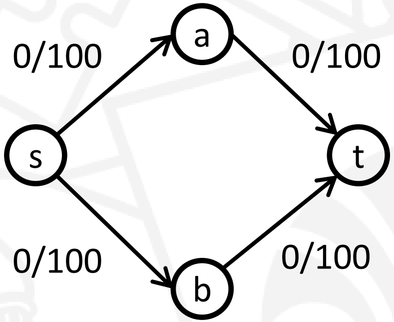
Método de Dinic – Exemplo



Fluxo Viável

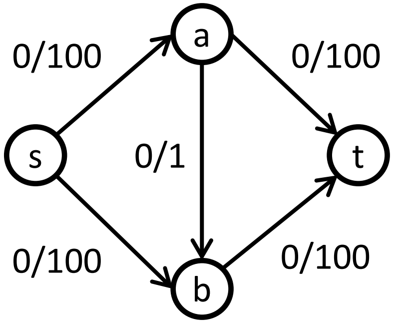


Rede em Níveis

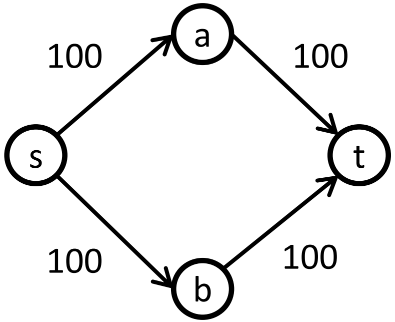


Fluxo de Bloqueio

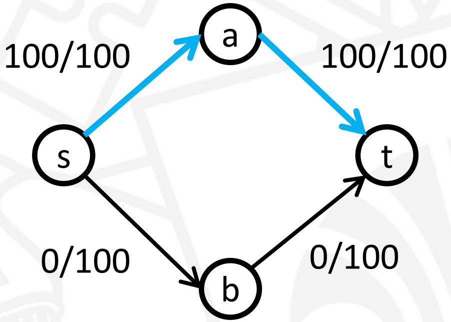
Método de Dinic – Exemplo



Fluxo Viável

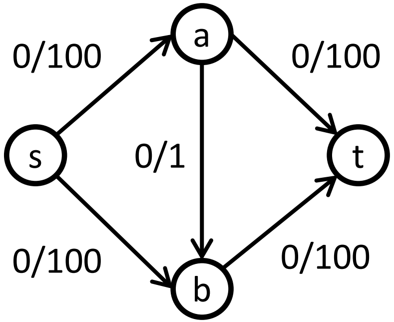


Rede em Níveis

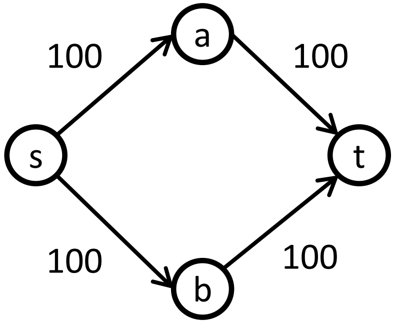


Fluxo de Bloqueio

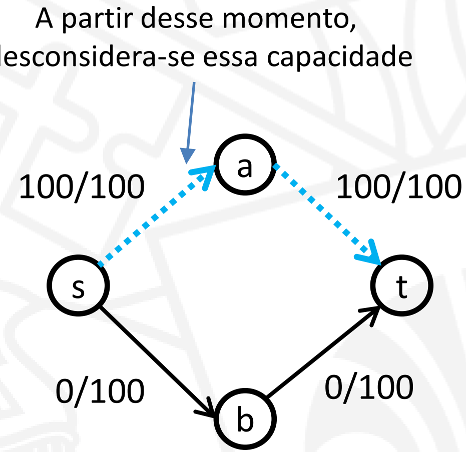
Método de Dinic – Exemplo



Fluxo Viável

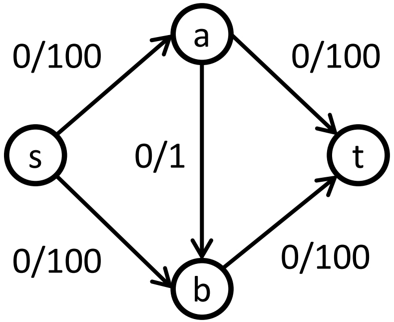


Rede em Níveis

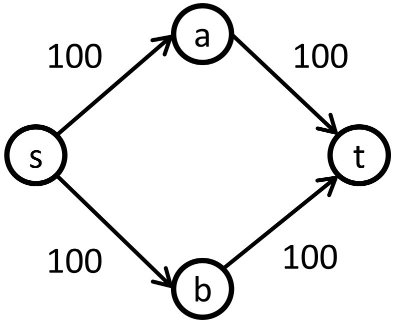


Fluxo de Bloqueio

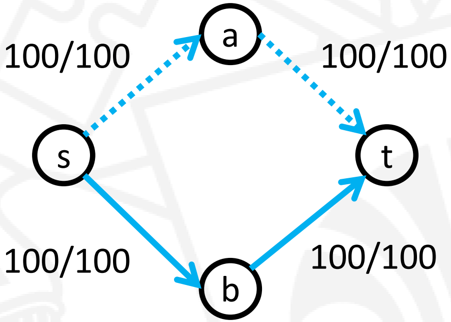
Método de Dinic – Exemplo



Fluxo Viável

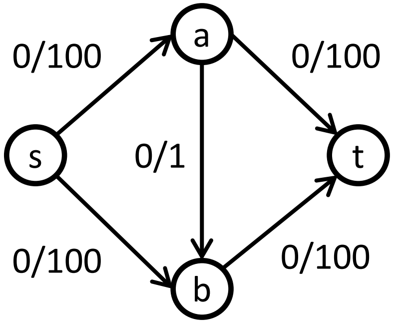


Rede em Níveis

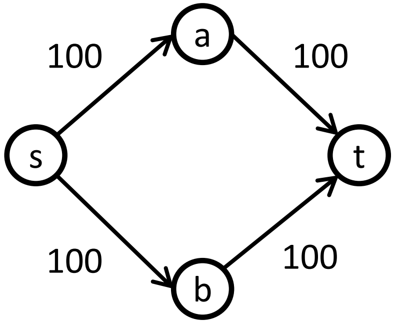


Fluxo de Bloqueio

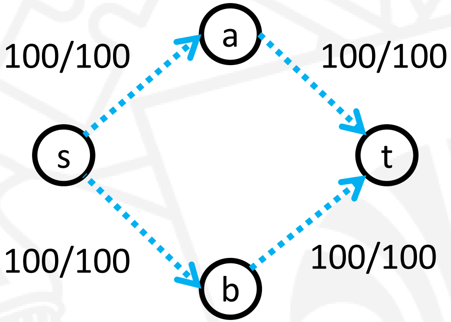
Método de Dinic – Exemplo



Fluxo Viável



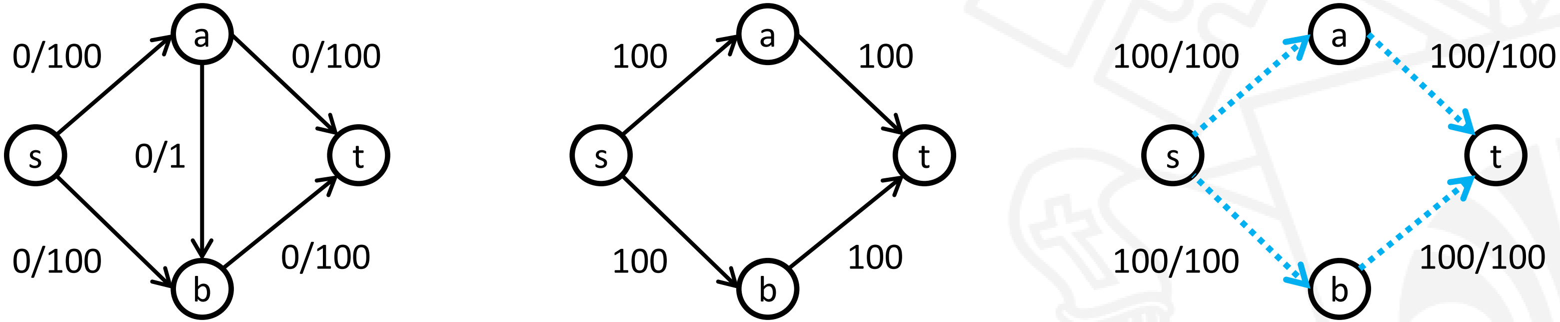
Rede em Níveis



Fluxo de Bloqueio

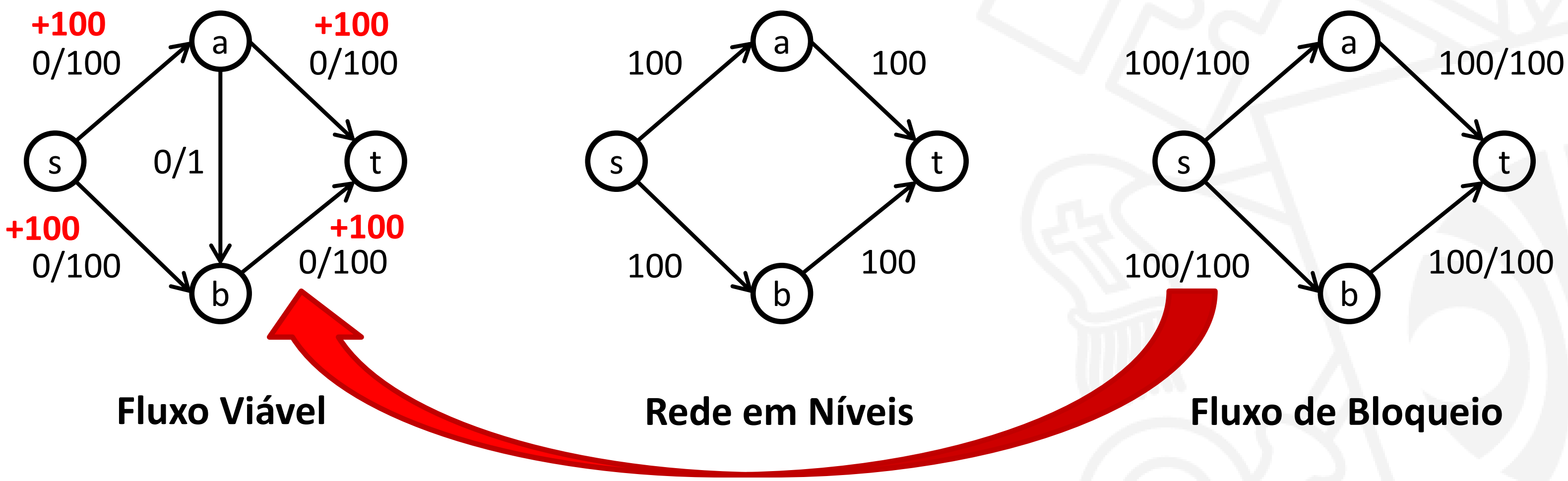
Método de Dinic – Exemplo

A partir desse momento, não há caminho aumentante

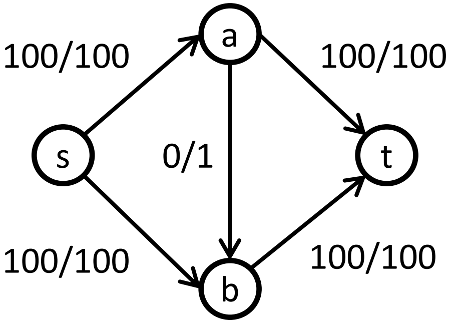


Fluxo Viável **Rede em Níveis** **Fluxo de Bloqueio**

Método de Dinic – Exemplo

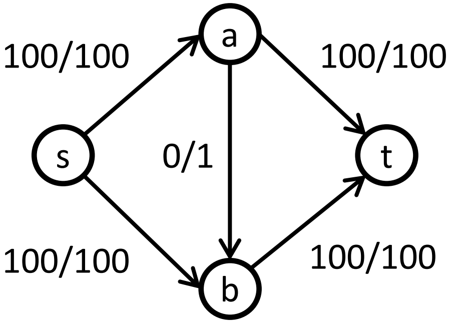


Método de Dinic – Exemplo

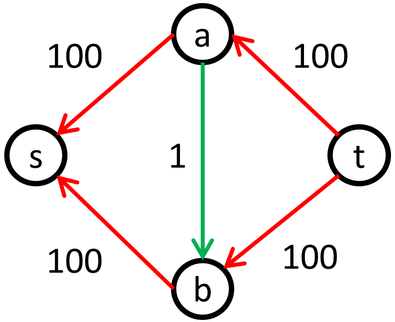


Fluxo Viável

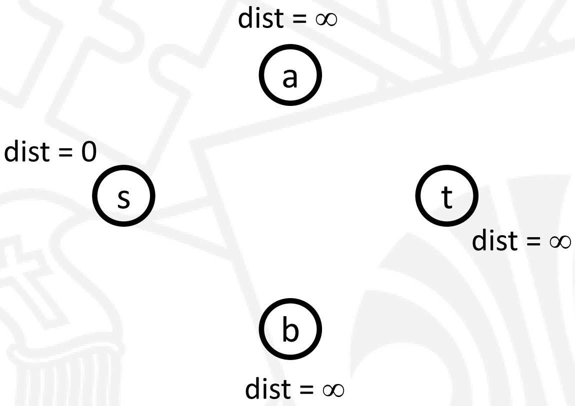
Método de Dinic – Exemplo



Fluxo Viável

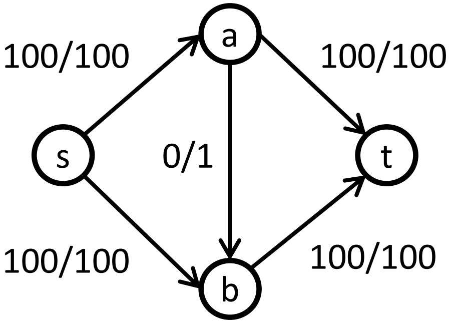


Rede Residual

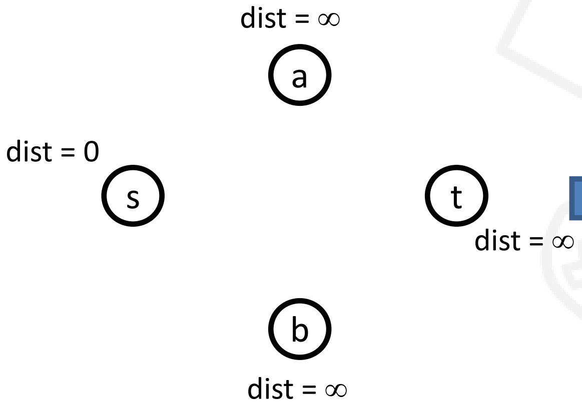


Rede em Níveis

Método de Dinic – Exemplo



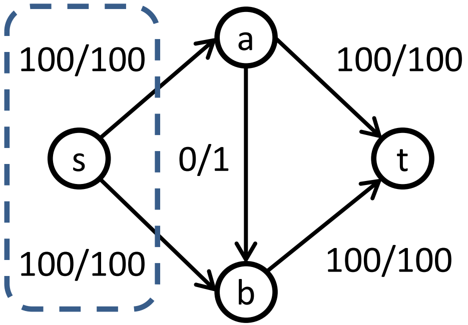
Fluxo Viável



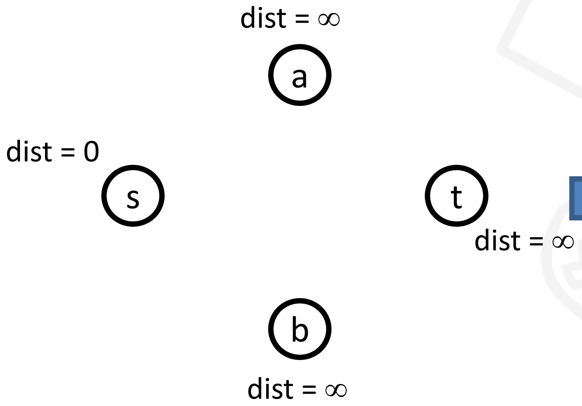
Rede em Níveis

Não existe caminho aumentante (nem fluxo de bloqueio)

Método de Dinic – Exemplo



Fluxo Viável



Rede em Níveis

Não existe caminho aumentante (nem fluxo de bloqueio)

Fluxo máximo = 200

Fluxo Máximo - Comparação

Algoritmo pseudopolinomial

Método	Tempo
Ford-Fulkerson	$O(m\ f)$

m = # de arestas
f = fluxo máximo

Fluxo Máximo - Comparação

Método	Tempo
Ford-Fulkerson	$O(m\ f)$
Edmonds-Karp	$O(n\ m^2)$

m = # de arestas
f = fluxo máximo
n = # de vértices

Algoritmo pseudopolinomial

Número máximo de caminhos aumentante é $O(n\ m)$ e cada caminho pode ser encontrado em $O(m)$

Fluxo Máximo - Comparação

Método	Tempo
Ford-Fulkerson	$O(m\ f)$
Edmonds-Karp	$O(n\ m^2)$
Dinic	$O(n^2\ m)$

m = # de arestas
f = fluxo máximo
n = # de vértices

Algoritmo pseudopolinomial

Número máximo de caminhos aumentante é $O(n\ m)$ e cada caminho pode ser encontrado em $O(m)$

Número máximo de fluxos de bloqueio é $n - 1$ e cada fluxo de bloqueio pode ser encontrado em $O(n\ m)$