Numerical Optimization, 2020 Fall

Homework 4

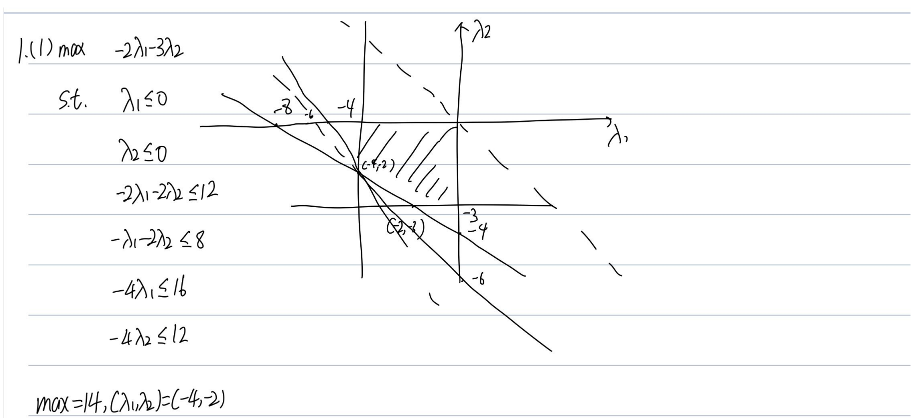
Due on 14:59, Oct. 15, 2020

1. 请按要求写出下列线性规划问题对应的对偶问题.

(1) 请参考 Lecture 5 提供的原-对偶表格法, 写出如下问题对应的对偶问题并使用**图解法**求解. [15pts]

$$\begin{aligned} \min \quad & 12x_1 + 8x_2 + 16x_3 + 12x_4 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 - x_2 - 4x_3 \le -2 \\ & -2x_1 - 2x_2 - 4x_4 \le -3 \\ & x_i \ge 0, \quad i = 1, \cdots, 4. \end{aligned} \tag{1}$$

解:



请使用 Lagrange 方法写出如下问题对应的对偶问题. [10pts]

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \le 0 \\ & 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \ge 3 \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1 \le 0 \\ & x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned} \tag{2}$$

解:

$$
(2)\ L(x,\lambda)=x_1-x_2+\lambda_1(2x_1+3x_2-x_3+x_4)-\lambda_2(3x_1+x_2+4x_3-2x_4-3)+\lambda_3(-x_1-x_2+2x_3+x_4-6)+\mu_1x_1-\mu_2x_2-\mu_3x_3 \quad \lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2,\mu_3\geq 0
$$

$$
=(1+2\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3+\mu_1)x_1+(-1+3\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\mu_2)x_2+(-\lambda_1-4\lambda_2+2\lambda_3-\mu_3)x_3+(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)x_4+3\lambda_2-6\lambda_3
$$

$$
\begin{aligned}
&\max\ 3\lambda_2-6\lambda_3 \\
&\text{s.t.}\begin{cases}
1+2\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3+\mu_1=0\\
-1+3\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\mu_2=0\\
-\lambda_1-4\lambda_2+2\lambda_3-\mu_3=0\\
\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\\
\lambda_1\geq 0\\
\lambda_2\geq 0
\end{cases}
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
&\max\ 3\lambda_2-6\lambda_3 \\
&\text{s.t.}\begin{cases}
1+2\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3\leq 0\\
-1+3\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3\geq 0\\
-\lambda_1-4\lambda_2+2\lambda_3\geq 0\\
\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\\
\lambda_1,\lambda_2\geq 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

2. 考虑如下的两阶段法中第一阶段的辅助问题

$$
\begin{aligned}
\min_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m}} \quad & \sum_{i=1}^{m} y_i \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x}\geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}\geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$ 给定.

(1) 写出问题 (3) 的对偶问题. [15pts]

解:

$$
2.(1)\ \max\ b^T\lambda
$$

$$
\text{s.t.}\ \lambda^T[A\,I]_{m\times(n+m)}\leq\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\}n\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}}\right\}m\end{matrix}
$$

(2) 对于上述问题 (1) 中得到的对偶问题, 请问它有最优解吗? 请给出充分的理由. [15pts]

解：有最优解

因为原问题必有基本可行解 $(0,...0,b_1,.....b_m)_{1*(n+m)}$，且基本可行解存在则存在一个基本可行解为最优解；则根据强对偶定理，原问题可行，则对偶问题可行, 且最优值相等，取得该最优值得 λ^* 即为最优解

3. 如图 1 示. 请解释: 为什么该定理成立? (提示: 利用强对偶定理.) [15pts]

解:

取 $\lambda^*=(C_B^TB^{-1})^T$ 其中 B 为最有基本可行解对应的基

$(\lambda^*)^T\text{b}=(C_B^TB^{-1})\text{b}=C_B^T(B^{-1}\text{b})=C_B^Tx^*$

所以 λ^* 是对偶问题的最优解

4. 如图 2 示. 请解释: 如果初始单纯型表格含有单位阵, 为什么转轴完成后对应的最下方的位置是最优乘子? (注意: 回答需要针对一般的线性规划问题转轴, 不能仅仅解释给出的例子.) [15pts]

解:

定理. 设标准形线性规划问题有最优解 $\boldsymbol{x}^*$，$\boldsymbol{B}$ 是最优基本可行解对应的基，则

$$\boldsymbol{\lambda}^* = (\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1})^{\boldsymbol{T}}$$

是其对偶问题的最优解.

图 1: Lecture 5 第 11 页给出的定理.

4. 为方便描述，将初始的一组基的序号定为 $1,\cdots,m$，此假定不失一般性

	$x_1 \cdots$	$x_p \cdots$	x_m	$x_{m+1} \cdots$	$x_q \cdots$	x_n	$B^{-1}b$
	$1 \cdots$	$0 \cdots$	0	$y_{1m+1} \cdots$	$y_{1q} \cdots$	y_{1n}	$\bar{b}_1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$y_{pm+1} \cdots$	$y_{pq} \cdots$	y_{pn}	$\vdots$
	$0 \cdots$	$0 \cdots$	1	$y_{mm+1} \cdots$	$1 \cdots$	y_{mn}	$\bar{b}_m$
r^T	$0 \cdots$	$0 \cdots$	0	$r_{m+1} \cdots$	$r_{2m} \cdots$	r_n	$-f$

对该表进行转轴直至取得最优解且保证 $x_1,\cdots x_m$ 不为基变量，不失一般性规定 $x_{m+1},\cdots x_{2m}$ 为基变量

重新将该表最后一行赋为初始表的最后一行

	$x_1 \cdots$	$x_p \cdots$	x_m	$x_{m+1} \cdots$	$x_{2m} \cdots$	x_n	$B^{-1}b$
				$1 \cdots$	$0 \cdots$	y_{1n}	$\bar{b}_1$
		B^{-1}		$\vdots$	$\vdots$	y_{pn}	$\vdots$
				$0 \cdots$	$1 \cdots$	y_{mn}	$\bar{b}_m$
r^T	$0 \cdots$	$0 \cdots$	0	$r_{m+1} \cdots$	$r_{2m} \cdots$	r_n	$(-f_0)/f$

$\underbrace{0 \cdots 0 \cdots 0}_{\lambda^T}$

为了使最后一行满足最优解表的最后一行，即 $r_{m+1},\cdots r_{2m}=0$

因此 $\lambda^T=(0,\cdots,0)-(r_{m+1}\cdots r_{2m})B^{-1}$

又 $\because$ 初始 $r_{m+1}=c_{m+1},\cdots r_{2m}=c_{2m}$

$\therefore \lambda^T=-c_B^TB^{-1}$，$\lambda^*=-\lambda$

2

5. 证明: 线性规划问题求解等价于求解一个线性可行性问题.(提示: 请参考 Lecture 5 第 14 页.) [15pts]

解:

5. 原问题 $\min c^Tx$　　对偶问题 $\max b^Ty$　　$\max b^Ty$

$Ax=b$　　$A^Ty\le c \Rightarrow$　　$A^Ty+s=c$

$x\ge 0$　　$s\ge 0$

"$\Rightarrow$" 若原问题存在最优解，则根据强对偶定理可得 $b^Ty=c^Tx$ 在 $x=x^*$(最优解)处成立，同时 $y=y^*$

$\therefore$ 新问题 $Ax=b$

$A^Ty+s=c$

$b^Ty=c^Tx$

$x\ge 0, s\ge 0$ 有解 $x=x^*, y=y^*, s=c-A^Ty^*$

"$\Leftarrow$" 若新问题可行，则可行解满足 $b^Ty^*=c^Tx^*$，由强对偶定理可知 x^*, y^* 即为原问题及其对偶问题最优解

因此求原问题是否存在最优解等价于求新问题是否可行

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$B^{-1}b$
	2	$\boxed{2}$	1	1	0	4
	1	2	2	0	1	6
r^{T}	-1	-4	-3	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$B^{-1}b$
	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
	-1	0	$\boxed{1}$	-1	1	2
r^{T}	3	0	-1	2	0	8

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$B^{-1}b$
	$\frac{3}{2}$	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	1
	-1	0	1	-1	1	2
r^{T}	2	0	0	1	1	10

why?

原问题
最优解

$x_1^* = 0$
$x_2^* = 1$
$x_3^* = 2$

对偶问题
最优解

$\lambda_1^* = -1$
$\lambda_2^* = -1$

数值最优化 线性规划 ShanghaiTech-SIST-CS 13

图 2: Lecture 5 第 13 页给出的单纯型表示例.