

Numerical Optimization, 2020 Fall

Homework 5

Due on 14:59 OCT 27, 2020

请尽量使用提供的 tex 模板, 单纯形法的表格可手绘拍照加入文档.

Production Planning by a Computer Manufacturer

(建议阅读 Bertsimas 教材 “Introduction to Linear Optimization” 的 1.2 节和 5.1 节对应内容)

线性规划建模和求解

公司 Digital Equipment Corporation (DEC) 可以生产 5 种不同的产品 (GP-1, GP-2, GP-3, WS-1, WS-2)。五种产品的生产分别需要两种原件 (disk drives 和 256K boards) 的数量, 以及五种产品的售价如下表:

System	Price	# disk drives	# 256K boards
GP-1	\$60,000	0.3	4
GP-2	\$40,000	1.7	2
GP-3	\$30,000	0	2
WS-1	\$30,000	1.4	2
WS-2	\$15,000	0	1

在实际生产加工中还有以下约束:

1. 五种产品的生产总数不超过 7000;
2. disk drives 原材料的供应量在 3000 个到 7000 个之间;
3. 256K boards 原材料的供应量在 8000 个到 16000 个之间;
4. GP-1 的最大需求不超过 1800 个, GP-3 最大需求不超过 300 个, GP-1,2,3 的总需求不超过 3800 个, WS-1,2 的最大总需求不超过 3200 个; GP-2 的最小需求不低于 500 个, WS-1 的最小需求不低于 500 个, WS-3 的最小需求不低于 400 个。

由于原材料 disk drives 和 256K boards 的总供给量限制, DEC 公司给出了对应的解决方案:

- 对于 disk drives 的供给不足提出了 constrained mode: 仅 GP-2 需要一个 disk drive, WS-1 需要一个 disk drive, 其他产品的生产均不需要 disk drive;

- 对于 256K boards 的供给不足提出了 alternative mode: GP-1 的生产可以用 2 块 alternative boards 来替换 4 块 256K boards, alternative boards 的供给量为 4000 块。其他产品不能使用 alternative boards。

因此, 基于 constrained mode 和 alternative mode, 我们共有四种可选择的生产方案: (方案一): alternative mode & constrained mode, (方案二): alternative mode & unconstrained mode, (方案三): not use alternative mode & constrained mode, (方案四): not use alternative mode & unconstrained mode。

注: 为表述方便, 数量和价格均以“千”为单位。设变量 x_1, \dots, x_5 表示五种产品的生产数量 (千个), 则 $1000x_i$ 应为整数。这里我们忽略整数约束, 因为近似地可以截断解的小数点后三位, 带来的误差忽略不计。

问题一:

- 若 DEC 公司使用方案一, 写出在满足约束下最大化收益的线性规划问题。(该模型中公司以保守起见, 即, 假设 disk drive 的供给量为 3000 个, 256K boards 的供给量为 8000 个。) [20pts]
- 用 AMPL (CPLEX solver) 求解上述线性规划问题, 给出问题最优解及相应目标函数值。(注: 将程序代码及运行结果截图附在下方) [20pts]

灵敏度分析

DEC 公司为了从四种方案中做出选择, 分别求解了四种方案下对应问题的最优解:

Alt. boards	Mode	Revenue	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
no	constr.	145	0	2.5	0	0.5	2
yes	constr.	248	1.8	2	0	1	2
no	unconstr.	133	0.272	1.304	0.3	0.5	2.7
yes	unconstr.	213	1.8	1.035	0.3	0.5	2.7

Table 5.1: Optimal solutions to the four variants of the production planning problem. Revenue is in millions of dollars and the quantities x_i are in thousands.

上述表格中易见, alternative mode 会带来明显收益, 公司应选择该模式。而对于是否选择 constrained mode 则没那么显然。此外我们上述考虑的线性规划对于 disk drives 和 256K boards 的供应量的估计是比较保守的。因此, 下面我们考虑在问题一解的基础上, 增加 disk drives 和 256K boards 的供应量的灵敏度分析问题。

问题二:

- 用线上的单纯形表法求解器求解问题一中线性规划问题, 附上第一张和最后一张单纯形表的截图。 [20pts]
(可以选择以下网站: https://www.mathstools.com/section/main/simplex_online_calculator 或 <http://simplex.tode.cz/en/> (需要 vpn))
- 根据上一问中的单纯形表, 分析当 disk drives 和 256K boards 数量的取值在什么范围内, 当前问题的解仍为最优解。并分析对应的目标函数值将如何变化。 [20pts]
- 用 AMPL (CPLEX solver) 做灵敏度分析检验上一问的结论 (disk drives 和 256K boards 数量的取值范围), 给出程序执行结果截图。 [20pts]
(Hint: 查看语句 “option cplex_options ‘sensitivity’;”)