Numerical Optimization, 2020 Fall

Homework 3

Due on 14:59 OCT 10, 2020

请尽量使用提供的 tex 模板，单纯形法的表格可手绘拍照加入文档.

1 单纯形法

以下均考虑非退化线性规划问题即可。

(i) 考虑一线性规划问题的规范型如下:

以(p,q)元转轴后，新规范形的系数

Pivot, 意味着以此消元

$$\begin{array}{lllll} 1\cdot x_1 & & & +y_{1q}x_q+\ldots+y_{1n}x_n & =\bar{b}_1\\ & 1\cdot x_p & & +\boxed{y_{pq}}x_q+\ldots+y_{pn}x_n & =\bar{b}_p \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 1\cdot x_m & +y_{mq}x_q+\ldots+y_{mn}x_n & =\bar{b}_m \end{array}$$

Pivot后，意味此列出基

记进基变量的下标为 q，转轴前分量 j 对应的 reduced cost 为 r_j，转轴后对应的 reduced cost 为 r'_j。试证明 reduced cost 的更新公式为 $r'_j = r_j - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} r_q$(参考 Lecture 3 中 17 页)。 [20pts]

(ii) 单纯形表中右下角的-f 对应当前基本可行解的目标函数值的相反数。试证明，经过一次转轴后更新的-f 对应更新后基本可行解对应的目标函数值的相反数 (参考 Lecture 3 中 20 页)。 [20pts]

Simplex Method in Tableau Format

单纯形表(tableau)：**BFS**对应规范形的表格＋

既约费用系数和**BFS**目标值的相反数

	x_1	$\cdots$	x_p	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	$\cdots$	x_q	$\cdots$	x_n	$B^{-1}b$
	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	$\cdots$	y_{1q}	$\cdots$	y_{1n}	$\bar{b}_1$
		$\ddots$				$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$y_{p,m+1}$	$y_{p,m+2}$	$\cdots$	y_{pq}	$\cdots$	y_{pn}	$\bar{b}_p$
				$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$y_{m,m+1}$	$y_{m,m+2}$	$\cdots$	y_{mq}	$\cdots$	y_{mn}	$\bar{b}_m$
r^{T}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	r_{m+1}	r_{m+2}	$\cdots$	r_q	$\cdots$	r_n	$\boxed{-f}$

单纯形表可以提供计算需要的所有信息！

why?

2 修正单纯形法

2.1 证明题

试证明 Lecture 4 中 20 页 λ 的更新公式为: $\hat{\lambda}^T = \lambda^T + \frac{r_q}{y_{pq}}\boldsymbol{u}_p$。 [20pts]

2.2 计算题

试用两阶段法求解如下线性规划问题 (详见 Lecture 4 第 13 页), 给出各个步骤的单纯形表。 [40pts]

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{minimize} & \boldsymbol{x_1 - x_2} \\
\textbf{subject to} & \boldsymbol{-x_1 + 2x_2 + x_3 = 2} \\
 & \boldsymbol{-4x_1 + 4x_2 - x_3 = 4} \\
 & \boldsymbol{-5x_1 + 6x_2 = 6} \\
 & \boldsymbol{x_1 - x_3 = 0} \\
 & \boldsymbol{x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0}
\end{array}
$$