Numerical Optimization, 2020 Fall

Homework 2

Due on 14:59, Sep 24, 2020

1 线性规划标准型

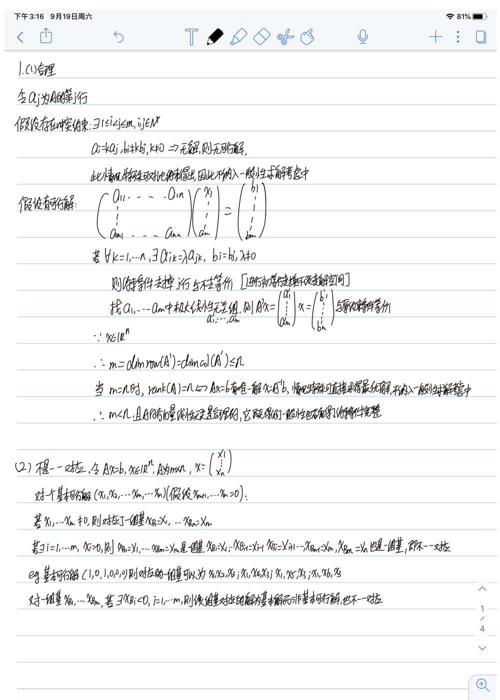
考虑如下为标准型的线性规划:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ 给定.

(1) 上述标准型 (1) 中关于 $\boldsymbol{A}$ 满秩 (full rank) 的假设是否合理? 请给出你判断的理由. [10pts]

(2) 在标准型里, 一个基本可行解 (basic feasible solutions) 是否与一组基 (basis) 一一对应? [15pts]



1.(1)合理

令 a_j 为A的第j行

假设存在冲突约束: $\exists 1\le i<j\le m, i,j\in N^*$

$a_i = k a_j, b_i \ne k b_j, k\ne 0 \Rightarrow$ 无解,则无可行解,

此情况特殊可对比约束得出,因此不纳入一般性求解考虑中

假设有可行解: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

若 $\forall k=1,\dots n, \exists a_{ik} = \lambda a_{jk}, b_i = b_j, \lambda \ne 0$

则约束条件去掉j行与不去等价 [进行初等行变换不改变解空间]

找 $a_1, \dots a_m$ 中极大线性无关组 $a_1', \dots, a_m'$, 则 $A'x = \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_m' \end{pmatrix}$ 与原约束条件等价

$\because x \in \mathbb{R}^n$

$\therefore m = \dim row(A') = \dim col(A') \le n$

当 $m=n$ 时, $rank(A)=n \Leftrightarrow Ax=b$ 有唯一解 $x=A^{-1}b$, 情况特殊可直接求得最优解,不纳入一般性求解考虑中

$\therefore m<n$, 且A的行向量线性无关是合理的,它既保留了一般性也合理了约束条件完整

(2) 不是一一对应, 令 $Ax=b, x\in\mathbb{R}^n$, A为 $m\times n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

对一个基本可行解 $(x_1, x_2, \dots x_m, \dots x_n)$ (假设 $x_{m+1}, \dots x_n = 0$):

若 $x_1, \dots x_m \ne 0$, 则对应了一组基 $x_{B_1}=x_1, \dots x_{B_m}=x_m$

若 $\exists i=1,\dots m, x_i=0$, 则 $x_{B_1}=x_1, \dots x_{B_m}=x_m$ 是一组基, $x_{B_1}=x_1, \dots x_{B_{i-1}}=x_{i-1}, x_{B_i}=x_{i+1}, \dots, x_{B_{m-1}}=x_m, x_{B_m}=x_n$ 也是一组基,即不一一对应

eg. 基本可行解 $(1,0,1,0,0,0)$ 则对应的一组基可以为 x_1,x_2,x_3; x_1,x_4,x_3; x_1,x_5,x_3; x_1,x_6,x_3

对一组基 $x_{B_1}, \dots x_{B_m}$, 若 $\exists x_{B_i}<0, i=1,\dots m$, 则该组基对应的解为基本解而非基本可行解,也不一一对应

2 基本解和基本可行解

考虑如下线性规划问题 (具体地, 请参考 Lecture 2 中 37 页的例 3)

$$
\begin{aligned}
\min\ & -2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + \frac{8}{3}x_2 \le 4, \\
& x_1 + x_2 \le 2, \\
& 2x_1 \le 3, \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

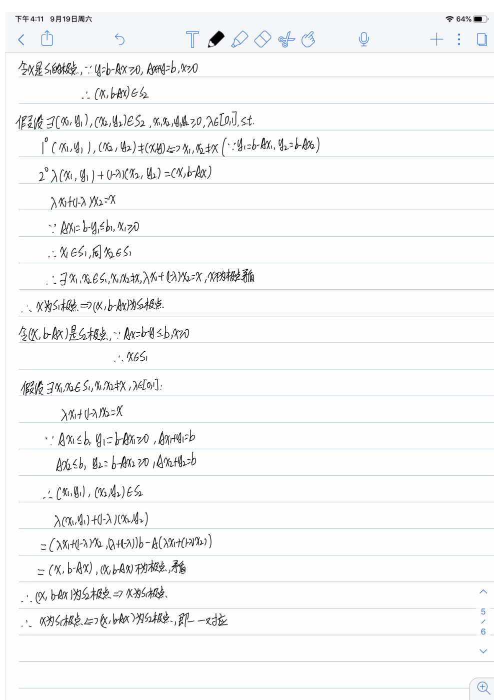
请回答此问题中有多少个基本解 (basic solutions), 有多少个基本可行解? 请分别写出相应的解. [25pts]

解：基本解 9 个:($\frac{4}{5}$,$\frac{6}{5}$)、($\frac{3}{2}$,$\frac{15}{16}$)、(0,$\frac{3}{2}$)、(4,0)、($\frac{3}{2}$,$\frac{1}{2}$)、(0,2)、(3,0)、($\frac{3}{2}$,0)、(0,0)
基本可行解：($\frac{4}{5}$,$\frac{6}{5}$、(0,$\frac{3}{2}$)、($\frac{3}{2}$,$\frac{1}{2}$)(最优解之一)、(3/2,0)、(0,0)

3 极点

1. 证明如下两个集合的极点一一对应. [12pts]

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\}, \\
S_2 &= \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}\}.
\end{aligned} \tag{3}
$$


下午4:11 9月19日周六
令x是S_1的极点,∵ $y=b-Ax\ge0$, $Ax+y=b$, $x\ge0$
∴ $(x, b-Ax)\in S_2$
假设 $\exists(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in S_2$, $x_1,x_2,y_1,y_2\ge0$, $\lambda\in[0,1]$, s.t.
1° $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\ne(x,y) \Leftrightarrow x_1,x_2\ne x$ (∵ $y_1=b-Ax_1$, $y_2=b-Ax_2$)
2° $\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2)=(x,b-Ax)$
$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=x$
∵ $Ax_1=b-y_1\le b_1$, $x_1\ge0$
∴ $x_1\in S_1$, 同 $x_2\in S_1$
∴ $\exists x_1,x_2\in S_1$, $x_1,x_2\ne x$, $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=x$, x不为极点矛盾
∴ x为S_1极点 ⇒ $(x,b-Ax)$为S_2极点.
令$(x,b-Ax)$是S_2极点,∵ $Ax=b-y\le b$, $x\ge0$
∴ $x\in S_1$
假设 $\exists x_1,x_2\in S_1$, $x_1,x_2\ne x$, $\lambda\in[0,1]$:
$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=x$
∵ $Ax_1\le b$, $y_1=b-Ax_1\ge0$, $Ax_1+y_1=b$
$Ax_2\le b$, $y_2=b-Ax_2\ge0$, $Ax_2+y_2=b$
∴ $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in S_2$
$\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2)$
$=(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, (\lambda+(1-\lambda))b-A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2))$
$=(x,b-Ax)$, $(x,b-Ax)$不为极点,矛盾
∴ $(x,b-Ax)$为S_2极点 ⇒ x为S_1极点.
∴ x为S_1极点 ⇔ $(x,b-Ax)$为S_2极点,即一一对应

2. 如图 1 所示, 请回答

   (1) 集合 $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1\}$ 有极点吗? [3pts]
   解：没有

   (2) 它的标准型是什么? [5pts]
   解：$Q = \{(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + y = 1, \boldsymbol{x_1} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}\}$

   (3) 它的标准型有极点吗? 若有, 则给出一个极点, 并解释为什么是极点. [5pts]
   解：有极点：(x_1,y,u,v)=(1,0,0,0),(0,1,0,0), 因为极点和基本可行解等价，上述解满足 n=4 个线性无关的等式约束：x_1+y=0,$x_1 = 0, u = 0, v = 0, y >= 0$;$x_1$+y=0,y=0,u=0,v=0,$x_1$>=0，且满足剩余的约束条件，是基本可行解，因此也是极点

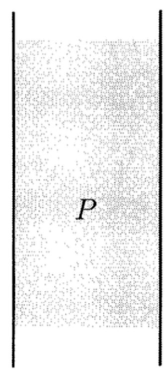


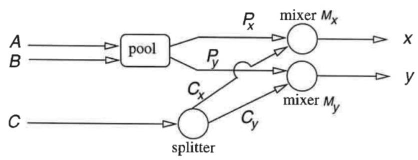
图 1: 集合 P

4 AMPL 实现

考虑如下 Haverly pooling 问题, 如图 2 示, 请使用 AMPL 实现并求解.

(注意: 使用 AMPL solver 或者 NEOS solver 均可. 另外, 请在提交的作业中注明使用的求解器类型, 把求解结果呈现出来 (截图附在 PDF 文件即可), 并把源代码一起提交. 提交的作业请打包为.zip 文件, 包含你的 PDF 以及源码.) [25pts]

使用求解器为：baron(非线性规划求解器)



A, B, C : quantities of crude oil A, B, C, respectively
x, y : quantities of products x and y
p : sulfur content of outstream of the pool
P_x, P_y : outstreams of the pool
C_x, C_y : outstreams of the splitter

$$\max_{x,y,A,B,p,C_x,C_y,P_x,P_y} \quad 9x + 15y - 6A - 8B - 10(C_x + C_y)$$

s.t.

$$P_x + P_y - A - B = 0$$
$$x - P_x - C_y = 0$$
$$y - P_y - C_y = 0$$
$$pP_x + 2C_x - 2.5x \leq 0$$
$$pP_y + 2C_y - 1.5y \leq 0$$
$$pP_x + pP_y - 3A - B = 0$$
$$0 \leq x \leq 200, 0 \leq y \leq 200, 0 \leq p \leq 100$$
$$0 \leq A, B, C_x, C_y, P_x, P_y \leq 500$$

sulfur content of A=3
sulfur content of B=1
sulfur content of C=2
sulfur content of x ≤ 2.5
sulfur content of y ≤ 1.5
Demands of x and y are ≤ 200
Supplies of A, B, C_x, C_y, P_x, P_y ≤ 500

图 2: Example: Haverly Pooling Problem.