Numerical Optimization, 2020 Fall

Homework 4

Due on 14:59, Oct. 15, 2020

1. 请按要求写出下列线性规划问题对应的对偶问题.

(1) 请参考 Lecture 5 提供的原-对偶表格法, 写出如下问题对应的对偶问题并使用**图解法**求解. [15pts]

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 12x_1 + 8x_2 + 16x_3 + 12x_4 \\
\text{s.t.} \quad & -2x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -2 \\
& -2x_1 - 2x_2 - 4x_4 \leq -3 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, \cdots, 4.
\end{aligned} \tag{1}
$$

(2) 请使用 Lagrange 方法写出如下问题对应的对偶问题. [10pts]

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 0 \\
& 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 3 \\
& -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\
& x_1 \leq 0 \\
& x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

2. 考虑如下的两阶段法中第一阶段的辅助问题

$$
\begin{aligned}
\min_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m}} \quad & \sum_{i=1}^{m} y_i \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{3}
$$

其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ 给定.

(1) 写出问题 (3) 的对偶问题. [15pts]

(2) 对于上述问题 (1) 中得到的对偶问题, 请问它有最优解吗? 请给出充分的理由. [15pts]

3. 如图 1 示. 请解释: 为什么该定理成立? (提示: 利用强对偶定理.) [15pts]

4. 如图 2 示. 请解释: 如果初始单纯型表格含有单位阵, 为什么转轴完成后对应的最下方的位置是最优乘子? (注意: 回答需要针对一般的线性规划问题转轴, 不能仅仅解释给出的例子.) [15pts]

5. 证明: 线性规划问题求解等价于求解一个线性可行性问题.(提示: 请参考 Lecture 5 第 14 页.) [15pts]

定理. 设标准形线性规划问题有最优解 $\boldsymbol{x}^*$，$\boldsymbol{B}$ 是最优基本可行解对应的基，则

$$\boldsymbol{\lambda}^* = (\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{-1})^T$$

是其对偶问题的最优解.

图 1: Lecture 5 第 11 页给出的定理.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$B^{-1}b$
	2	$\boxed{2}$	1	1	0	4
	1	2	2	0	1	6
r^{T}	-1	-4	-3	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$B^{-1}b$
	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
	-1	0	$\boxed{1}$	-1	1	2
r^{T}	3	0	-1	2	0	8

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$B^{-1}b$
	$\frac{3}{2}$	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	1
	-1	0	1	-1	1	2
r^{T}	2	0	0	1	1	10

why?

原问题
最优解

$x_1^* = 0$
$x_2^* = 1$
$x_3^* = 2$

对偶问题
最优解

$\lambda_1^* = -1$
$\lambda_2^* = -1$

数值最优化 线性规划 ShanghaiTech-SIST-CS 13

图 2: Lecture 5 第 13 页给出的单纯型表示例.