

# Numerical Optimization, 2020 Fall

## Homework 2

Due on 14:59, Sep 24, 2020

### 1 线性规划标准型

考虑如下为标准型的线性规划:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  和  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  给定.

- (1) 上述标准型 (1) 中关于  $\mathbf{A}$  满秩 (full rank) 的假设是否合理? 请给出你判断的理由. [10pts]
- (2) 在标准型里, 一个基本可行解 (basic feasible solutions) 是否与一组基 (basis) 一一对应? [15pts]

### 2 基本解和基本可行解

考虑如下线性规划问题 (具体地, 请参考 Lecture 2 中 37 页的例 3)

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + \frac{8}{3}x_2 \leq 4, \\ & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & 2x_1 \leq 3, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

请回答此问题中有多少个基本解 (basic solutions), 有多少个基本可行解? 请分别写出相应的解. [25pts]

### 3 极点

1. 证明如下两个集合的极点一一对应. [12pts]

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \\ S_2 &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}. \end{aligned} \tag{3}$$

2. 如图 1 所示, 请回答

- (1) 集合  $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1\}$  有极点吗? [3pts]
- (2) 它的标准型是什么? [5pts]
- (3) 它的标准型有极点吗? 若有, 则给出一个极点, 并解释为什么是极点. [5pts]

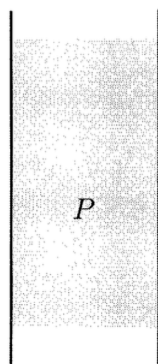


图 1: 集合 P

## 4 AMPL 实现

考虑如下 Haverly pooling 问题, 如图 2 示, 请使用 AMPL 实现并求解.

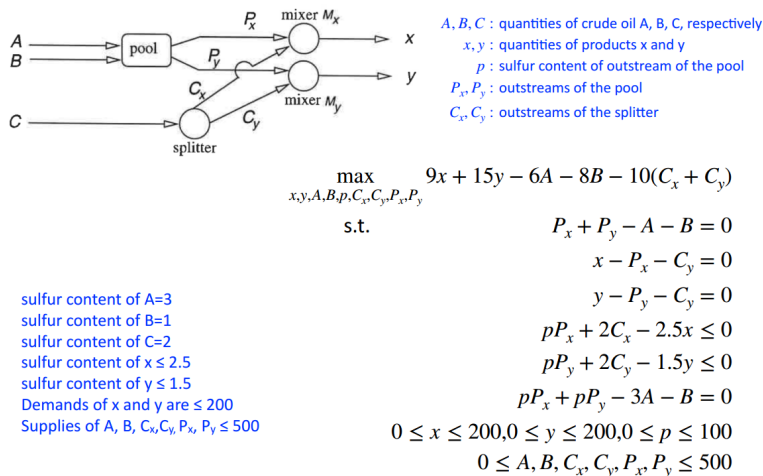


图 2: Example: Haverly Pooling Problem.

(注意: 使用 AMPL solver 或者 NEOS solver 均可. 另外, 请在提交的作业中注明使用的求解器类型, 把求解结果呈现出来 (截图附在 PDF 文件即可), 并把源代码一起提交. 提交的作业请打包为.zip 文件, 包含你的 PDF 以及源码.) [25pts]