Numerical Optimization, 2020 Fall
Homework 5

Due on 14:59 OCT 27, 2020
请尽量使用提供的 tex 模板, 单纯形法的表格可手绘拍照加入文档.

Production Planning by a Computer Manufacturer

(建议阅读 Bertsimas 教材 “Introduction to Linear Optimization” 的 1.2 节和 5.1 节对应内容)

线性规划建模和求解

公司 Digital Equipment Corperation (DEC) 可以生产 5 种不同的产品 (GP-1, GP-2, GP-3, WS-1, WS-2)。五种产品的生产分别需要两种原件 (disk drives 和 256K boards) 的数量, 以及五种产品的售价如下表:

System	Price	# disk drives	# 256K boards
GP-1	\$60,000	0.3	4
GP-2	\$40,000	1.7	2
GP-3	\$30,000	0	2
WS-1	\$30,000	1.4	2
WS-2	\$15,000	0	1

在实际生产加工中还有以下约束:

1. 五种产品的生产总数不超过 7000;
2. disk drives 原材料的供应量在 3000 个到 7000 个之间;
3. 256K boards 原材料的供应量在 8000 个到 16000 个之间;
4. GP-1 的最大需求不超过 1800 个, GP-3 最大需求不超过 300 个, GP-1,2,3 的总需求不超过 3800 个, WS-1,2 的最大总需求不超过 3200 个; GP-2 的最小需求不低于 500 个, WS-1 的最小需求不低于 500 个, WS-3 的最小需求不低于 400 个。

由于原材料 disk drives 和 256K boards 的总供给量限制, DEC 公司给出了对应的解决方案:

- 对于 disk drives 的供给不足提出了 constrained mode: 仅 GP-2 需要一个 disk drive, WS-1 需要一个 disk drive, 其他产品的生产均不需要 disk drive;

- 对于 256K boards 的供给不足提出了 alternative mode: GP-1 的生产可以用 2 块 alternative boards 来替换 4 块 256K boards, alternative boards 的供给量为 4000 块。其他产品不能使用 alternative boards。

因此, 基于 constrained mode 和 alternative mode, 我们共有四种可选择的生产方案: (方案一):alternative mode & constrained mode, (方案二):alternative mode & unconstrained mode, (方案三): not use alternative mode & constrained mode, (方案四):not use alternative mode & unconstrained mode。

注: 为表述方便, 数量和价格均以“千”为单位。设变量 $x_1, \cdots, x_5$ 表示五种产品的生产数量 (千个), 则 $1000x_i$ 应为整数。这里我们忽略整数约束, 因为近似地可以截断解的小数点后三位, 带来的误差忽略不计。

问题一:

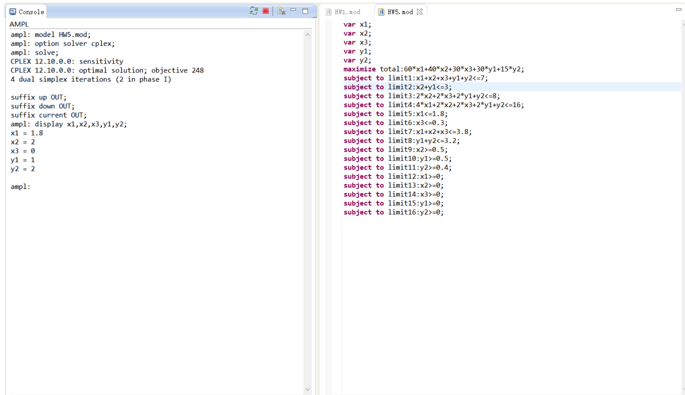
(i) 若 DEC 公司使用方案一, 写出在满足约束下最大化收益的线性规划问题。(该模型中公司以保守起见, 即, 假设 disk drive 的供给量为 3000 个, 256K boards 的供给量为 8000 个.) [20pts]

解: 设生产 GP-1,GP-2,GP-3,WS-1,WS-2 的数量分别为 x_1,x_2,x_3,y_1,y_2, 单位 (千个), 则该问题写为线性规划问题:

$$\begin{aligned}
\max\ & 60x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 30y_1 + 15y_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 \le 7 \\
& 0.3x_1 + 1.7x_2 + 1.4y_1 \le 3 \\
& 2x_2 + 2x_3 + 2y_1 + 1y_2 \le 8 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2y_1 + 1y_2 \le 16 \\
& x_1 \le 1.8 \\
& x_3 \le 0.3 \\
& x_1 + x_1 + x + 3 \le 3.8 \\
& y_1 + y_2 \le 3.2 \\
& x_2 \ge 0.5 \\
& y_1 \ge 0.5 \\
& y_2 \ge 0.4 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, y_1 \ge \mathbf{0}, y_2 \ge 0
\end{aligned} \tag{1}$$

(ii) 用 AMPL (CPLEX solver) 求解上述线性规划问题, 给出问题最优解及相应目标函数值。(注: 将程序代码及运行结果截图附在下方) [20pts]

解：最优值为 =248,x_1=1.8,x_2=2,x_3=0,y_1=1,y_2=2, 单位均为千



灵敏度分析

DEC 公司为了从四种方案中做出选择, 分别求解了四种方案下对应问题的最优解:

Alt. boards	**Mode**	**Revenue**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
no	constr.	145	0	2.5	0	0.5	2
yes	constr.	248	1.8	2	0	1	2
no	unconstr.	133	0.272	1.304	0.3	0.5	2.7
yes	unconstr.	213	1.8	1.035	0.3	0.5	2.7

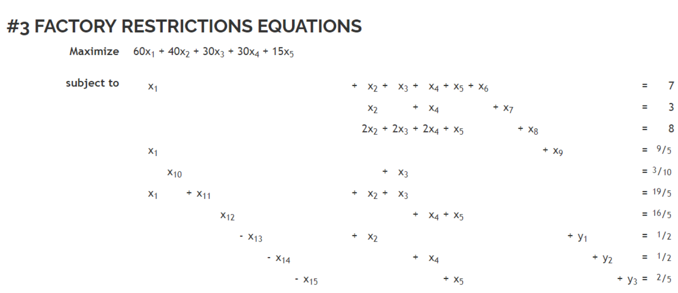
Table 5.1: Optimal solutions to the four variants of the production planning problem. Revenue is in millions of dollars and the quantities x_i are in thousands.

上述表格中易见, alternative mode 会带来明显收益, 公司应选择该模式. 而对于是否选择 constrained mode 则没那么显然. 此外我们上述考虑的线性规划对于 disk drives 和 256K boards 的供应量的估计是比较保守的. 因此, 下面我们考虑在问题一解的基础上, 增加 disk drives 和 256K boards 的供应量的灵敏度分析问题.

问题二:

(i) 用线上的单纯形表法求解器求解问题一中线性规划问题, 附上第一张和最后一张单纯形表的截图. [20pts] (可以选择以下网站:https://www.mathstools.com/section/main/simplex_online_calculator 或 http://simplex.tode.cz/en/ (需要 vpn))

解:



#4 SIMPLEX TABLE 1

	x_1	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2	y_3	b	t
x_{10}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3/10	-
x_{11}	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19/5	19/5
x_{12}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	16/5	-
x_{16}	4	0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	16	8
x_6	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	7	7
x_7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	3	3
x_8	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	1	0	0	1	0	0	0	0	8	4
x_9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	9/5	-
y_1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1/2	1/2
y_2	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1/2	-
y_3	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2/5	-
z	-60	0	0	0	0	0	0	0	-40	-30	-30	-15	0	0	0	0	0	0	0	0	
z'	0	0	0	0	1	1	1	0	-1	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-7/5	

#14 SIMPLEX TABLE 11

	x_1	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	b
x_{10}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3/10
x_{13}	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	3/2
x_{12}	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	-1	-1	1/5
x_{16}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	-4	4/5
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	1	-1	-1	1/5
x_{14}	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	1	1/2
x_{15}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	0	-2	1	0	8/5
x_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9/5
x_2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1	2
x_4	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	0	1	1
x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	-2	1	0	2
z	0	0	10	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	15	50	248

吐槽一句。。这个求解器的第一张单纯型表方程的顺序是调整过的，和原问题不一致，害的我算了半天一直算出来不对。。

(ii) 根据上一问中的单纯形表, 分析当 disk drives 和 256K boards 数量的取值在什么范围内, 当前问题的解仍为最优解. 并分析对应的目标函数值将如何变化. [20pts]

(2) 首先对此表格作简要的分析：1° 由于原问题为max问题，因此对应的非基变量的 $r<0$ $[f=f_0+\sum r_i x_i$ 当 $r<0$ 时为max $x=0]$

而看最优解表最后一行均大于等于零，所以该表最后一行为 $\boxed{-r_1 \; - \; - \; - \; - \; - \cdots - r_n \;|\; f}$

2° 由于原始问题的约束均为不等式，化为标准型后初始表自然含有单位阵，基为

$(x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{16}, x_6, x_7, x_8, x_9, y_1, y_2, y_3)$，该单位阵在最优解表为 B^{-1}，且因目标函数中对应 c_i 均 $=0$，

所以满足 $r_{B^{-1}} = -\lambda^T$（由HW4已证得）

1° disk drives 数量的调整对应的是原单纯形表中 b_6 的变动

令 $b_6 \to b_6+\sigma$，考虑最优解对应基变量不发生改变

$r = c^T - c_B^T B^{-1} A$（无变动）

$\overline{x_B} = B^{-1}(b+\sigma e_6)$ $\quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to i$

$= B^{-1}b + \sigma B^{-1} e_6$

$= x_B + \sigma g \geq 0$ 其中 g 为 B^{-1} 第6列 $\to x_7$

$\forall j=1,\cdots m,\ x_{B(j)} + \sigma g_j \geq 0 \begin{cases} \sigma \geq -\dfrac{x_{B(j)}}{g_j} & g_j > 0 \\ \sigma \leq -\dfrac{x_{B(j)}}{g(j)} & g_j < 0 \end{cases}$ $\quad g_j = 0 \Leftrightarrow \overline{x_j} = x_j$ 不考虑

$\Downarrow$

$\max\limits_{\{j \mid g_j > 0\}} \left(-\dfrac{x_{B(j)}}{g_j}\right) \leq \sigma \leq \min\limits_{\{j \mid g_j < 0\}} \left(-\dfrac{x_{B(j)}}{g_j}\right)$

值：$-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, -1, 1$

$\therefore -0.2 \leq \sigma \leq 0.8$

$\because$ 在题中要求 $b_6 \in [3,7] \Rightarrow \sigma \geq 0$

$\therefore \sigma \in [0, 0.8]$ 此时最优解对应基变量不改变

$\overline{f} = c^T x$

$= c_B^T \overline{x_B}$

$= c_B^T (x_B + \sigma g)$

$= c_B^T x_B + \sigma c_B^T B^{-1} e_6$

$= f + \sigma \lambda_{B^{-1}(6)} \to x_7$，由于最优值表对应最后一行为 $-r$，所以 $\lambda_{B^{-1}(6)} = -r_{B^{-1}(6)} = 0$

$= f$（即 f 不随 σ 改变（σ 在定义域内））

2° 256K boards数量的调整对应的是原单纯形表中 b_7 的变动，同时由于约束 $2x_2+2x_3+2y_1+y_1 \le k$，$4x_1+2x_2+2x_3+2y_1+2y_2 \le k+8$ 是联动的，因此原单纯形表中 b_4 也会变动，变动幅度与 b_7 一致，

令 $b_7 \to b_7+\sigma$，$b_4 \to b_4+\sigma$，考虑最优解对应基变量不发生改变

$r = C^T - C_B^T B^{-1} A$ (无变动)

$$\overline{x_B} = B^{-1}(b + \sigma(e_7+e_4)) \qquad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to i$$

$$= B^{-1}b + \sigma B^{-1}e_7 + \sigma B^{-1}e_4$$

$$= x_B + \sigma(g+h)$$ 其中 g 为 B^{-1} 第7列 $\to x_8$，h 为 B^{-1} 第4列 $\to x_6$

$$\forall j=1,\cdots,m,\ x_{B(j)} + \sigma(g+h) \ge 0 \quad \begin{cases} \sigma \ge -\dfrac{x_{B(j)}}{g_j+h_j} & g_j+h_j > 0 \\ \sigma \le -\dfrac{x_{B(j)}}{g_j+h_j} & g_j+h_j < 0 \end{cases}$$

$g_j+h_j \Leftarrow \overline{x_j} = x_j$ 不考虑

$$\Downarrow$$

$$\max_{\{j \mid g_j+h_j>0\}} \left(-\frac{x_{B(j)}}{g_j+h_j}\right) \le \sigma \le \min_{\{j \mid g_j+h_j<0\}} \left(-\frac{x_{B(j)}}{g_j+h_j}\right)$$

值：$\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{8}{5}, -2$

$\therefore -1.6 \le \sigma \le 0.2$

$\because$ 在题中要求 $b_7 \in [8,16] \Rightarrow \sigma \ge 0$

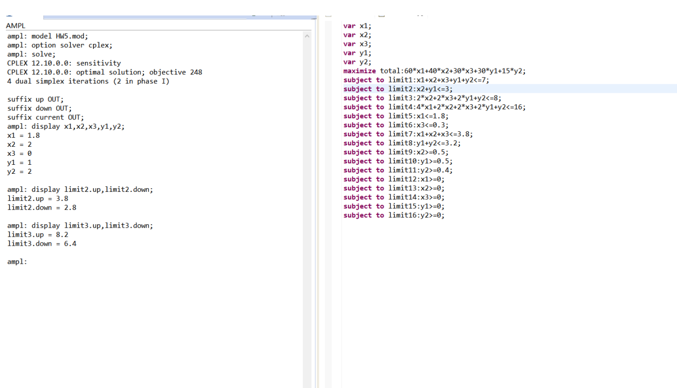
$\therefore \sigma \in [0, 0.2]$ 此时最优解对应基变量不改变

$$\bar{f} = c^T x$$
$$= C_B^T \overline{x_B}$$
$$= C_B^T(x_B + \sigma(g+h))$$
$$= C_B^T x_B + \sigma C_B^T B^{-1}(e_7+e_4)$$
$$= f + \sigma(\lambda_{B(7)}^{\nearrow x_8} + \lambda_{B(4)}^{\nearrow x_6})$$ 由于最优值表对应最后一行为 $-r$，所以 $\lambda_{B(7)} = -r_{B(7)} = 15$，$\lambda_{B(4)} = -r_{B(4)} = 0$

$= f + 15\sigma \quad \sigma \in [0, 0.2]$，也就是 f 会随着 σ 增加而增加 (在取值域内)

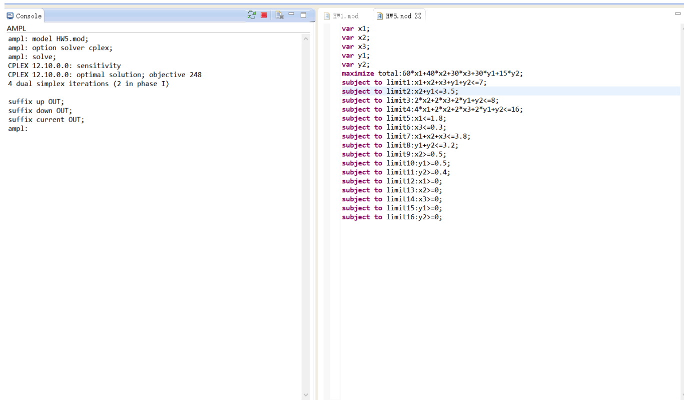
(iii) 用 AMPL (CPLEX solver) 做灵敏度分析检验上一问的结论 (disk drives 和 256K boards 数量的取值范围)，给出程序执行结果截图. [20pts]

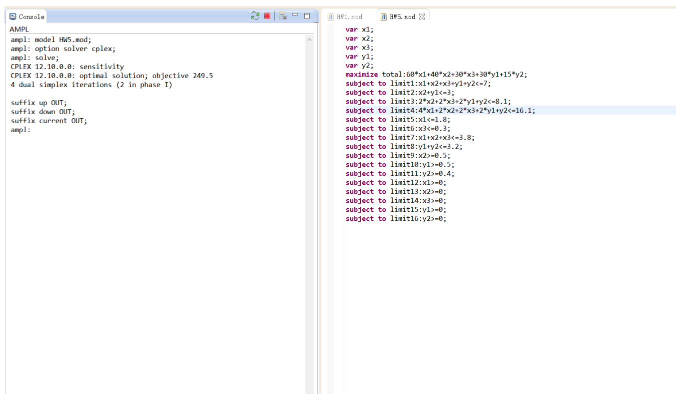
(Hint: 查看语句 “option cplex_options ‘sensitivity’;”)



```
AMPL
ampl: model HW5.mod;
ampl: option solver cplex;
ampl: solve;
CPLEX 12.10.0.0: sensitivity
CPLEX 12.10.0.0: optimal solution; objective 248
4 dual simplex iterations (2 in phase I)

suffix up OUT;
suffix down OUT;
suffix current OUT;
ampl: display x1,x2,x3,y1,y2;
x1 = 1.8
x2 = 2
x3 = 0
y1 = 1
y2 = 2

ampl: display limit2.up,limit2.down;
limit2.up = 3.8
limit2.down = 2.8

ampl: display limit3.up,limit3.down;
limit3.up = 8.2
limit3.down = 6.4

ampl:
```

```
var x1;
var x2;
var x3;
var y1;
var y2;
maximize total:60*x1+40*x2+30*x3+30*y1+15*y2;
subject to limit1:x1+x2+x3+y1+y2<=7;
subject to limit2:x2+y1<=3;
subject to limit3:2*x2+2*x3+2*y1+y2<=8;
subject to limit4:4*x1+2*x2+2*x3+2*y1+y2<=16;
subject to limit5:x1<=1.8;
subject to limit6:x3<=0.3;
subject to limit7:x1+x2+x3<=3.8;
subject to limit8:y1+y2<=3.2;
subject to limit9:x2>=0.5;
subject to limit10:y1>=0.5;
subject to limit11:y2>=0.4;
subject to limit12:x1>=0;
subject to limit13:x2>=0;
subject to limit14:x3>=0;
subject to limit15:y1>=0;
subject to limit16:y2>=0;
```





从第一张图中可以看到 b_6 的上下界与不考虑大于等于 3 和大于等于 8 时求出的范围完全相同，对 b_7 和 b_4 而言两者上下界应该相同，从表中可以看出 b_4 实则为基变量，仅一项对敏感性产生影响，但实际求得的值非极值，所以不是上下界，因此两者的上下解可直接参考仅考虑 b_7 变动的上下界，则可以看出 b_7 的上下界与不考虑大于等于 8 和大于等于 16 时求出的范围完全相同

图二是改变了 b_6->b_6+0.5, 则原函数的值为 248 不变，同时计算 $f^{'}$=f=248 相同

图三是改变了 b_5->b_5+0.1, 则原函数的值由 248 变为 249.5，同时计算 $f^{'}$=f+0.1*15=249.5 相同