Numerical Optimization, 2020 Fall
Homework 1

Due on 14:59 Sep 15, 2020

请尽量使用提供的 tex 模板, 画图部分可手绘拍照加入文档.

1 优化问题的应用

给出目前业界线性规划的一个应用场景. 介绍模型 (变量、约束、目标). 一般的规模是多大?

解：通过从事电子行业的亲戚了解到，工厂加工零件会受到设备生产速率，设备费用，设备可运行时间；产品工序；原料费，市场价格等多方面的影响。以下列例题作为精简的模型进行讨论。

某厂生产三种产品 I，II，III。每种产品要经过 A,B 两道工序加工。设该厂有两种规格的设备能完成 A 工序，它们以 A_1、A_2 表示；有三种规格的设备能完成 B 工序，它们以 B_1、B_2、B_3 表示。产品 I 可在 A,B 任何一种规格设备上加工。产品 II 可在任何规格的 A 设备上加工，但完成 B 工序时，只能在 B_1 设备上加工；产品 III 只能在 A_2 与 B_2 设备上加工。已知在各种机床设备的单件工时，原材料费，产品销售价格，各种设备有效台时以及满负荷操作时机床设备的费用如下表，求安排最优的生产计划，使该厂利润最大。

设备	产品			设备有效台时	满负荷时的设备费用/元
	I	II	III		
A_1	5	10		6000	300
A_2	7	9	12	10000	300
B_1	6	8		4000	250
B_2	4		11	7000	783
B_3	7			4000	200
原料费/(元/件)	0.25	0.35	0.5		
单价/(元/件)	1.25	2.00	2.80		

本模型的变量为：各个产品通过不同机器完成不同工序的数量对产品 I，设以 A_1，A_2 完成 A 工序的产品数量为 X_1，X_2；以 B_1，B_2，B_3 完成 B 工序的产品数量为 X_3，X_4，X_5 对产品 II，设以 A_1，A_2 完成 A 工序的产品数量为 X_61，X_7；以 B_1 完成 B 工序的产品数量为 X_8 对产品 III，设以 A_2 完成 A 工序的产品数量为 X_9；以 B_2 完成 B 工序的产品数量同 A 工序均为实际生产产品 III 的数量，因此也设为 X_9。

本模型的目标为：maximize 销售额-生产费用，转化为等式即为 (用最小化表述)

min z=(1.25-0.25)(X_1+X_2)+(2-0.35)X_8+(2.8-0.5)X_9-(300/6000)(5X_1 + 10X_6)-(321/10000)(7X_2 + 9X_7 + 12X_9)-(250/4000)(6X31 + 8X_8) -(783/7000)(4X_4 + 11X_9)-(200/4000)7X_5

本模型的约束条件为:
1 同一产品在不同工序生产数量的总和相等
2 设备有效生产时有限
3 不同机器不同步骤生产的数量要大于等于 0

回到实际制造业也是如此，只是把工序，设备的数量增加了；一般来说一天工厂的生产规模（以电容为例）在大约 1000 卷左右

2 将下述问题建模成线性规划问题

一个原油精练场有 8 百万桶原油 A 和 5 百万桶原油 B 用以安排下个月的生产. 可用这些资源来生产售价为 38 元/桶的汽油, 或者生产售价为 33 元/桶的民用燃料油. 有三种生产过程可供选择, 各自的生产参数如下: 除成本外, 所有的量均以桶为单位. 例如, 对于第一个过程而言, 利用 3 桶原油 A 和 5 桶原油 B 可以生产

	过程 1	过程 2	过程 3
输入原油 A	3	1	5
输入原油 B	5	1	3
输出汽油	4	1	3
输出燃烧油	3	1	4
成本 (单位：元)	51	11	40

4 桶汽油和 3 桶民用燃料油, 成本为 51 元. 表格中的成本指总的成本 (即原油成本和生产过程的成本). 将此问题建模成线性规划, 其能使管理者极大化下个月的净利润.

解：此题为整数规划。由于最优化情况下不一定将原油 A 和 B 均投入到生产中，因此输入不同过程的原油总和应使用不等式表示。

设完成过程 1 的次数为 X_1(单位：百万次), 完成过程 2 的次数为 X_2(单位：百万次), 完成过程 3 的次数为 X_3(单位：百万次), 其中完成一次过程为输入表中所需最低限度的原油，以过程 1 为例即为输入 3 桶 A 和 5 桶 B。

目标函数：min z=51X_1+11X_2+40X_3-(4*38+3*33)X_1-(38+33)X_2-(3*38+4*33)X_3=-200X_1-60X_2-206X_3(单位：百万元)

约束条件:

$$s.t.\begin{cases} 3X_1+X_2+5X_3\leq 800 \\ 5X_1+X_2+3X_3\leq 500 \\ X_1,X_2,X_3,X_4\ X_5,X_6\geq 0 \\ X_1,X_2,X_3,X_4\ X_5,X_6\in Z \end{cases}$$

3　线性规划的等价转换

(i) 考虑如下线性回归问题. 令 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ 为样本点和对应标签, a 和 b 为线性模型的参数. 线性回归模型可表示为 $y_i = ax_i + b,\ i = 1, \cdots, n$. 用 L_∞ 范数作为该线性模型的损失函数, 则对应的数学规划问题可建模为:

$$\min_{a,b} \max_i |y_i - (ax_i + b)|. \tag{1}$$

将(1)改写成等价的线性规划模型.

解：目标函数：min z

$$s.t. \begin{cases} y_1 - (ax_1 + b) \le z \\ -y_1 + (ax_1 + b) \le z \\ \vdots \\ y_n - (ax_n + b) \le z \\ -y_n + (ax_n + b) \le z \end{cases}$$

(ii) 极小化如下绝对值和问题:

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & |x_1| + |x_2| \\ s.t. \quad & x_1 + 3x_2 \ge 5 \\ & 2x_1 + x_2 \ge 5. \end{aligned} \tag{2}$$

(a) 引入新变量 $x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-$, 将问题(2)转换为线性规划问题.

(b) 分析为何只有当互补条件 (即 $x_1^+x_1^- = 0, x_2^+x_2^- = 0$) 成立时, 问题取得最优解.

(c) 图解法求解问题(2).

解：

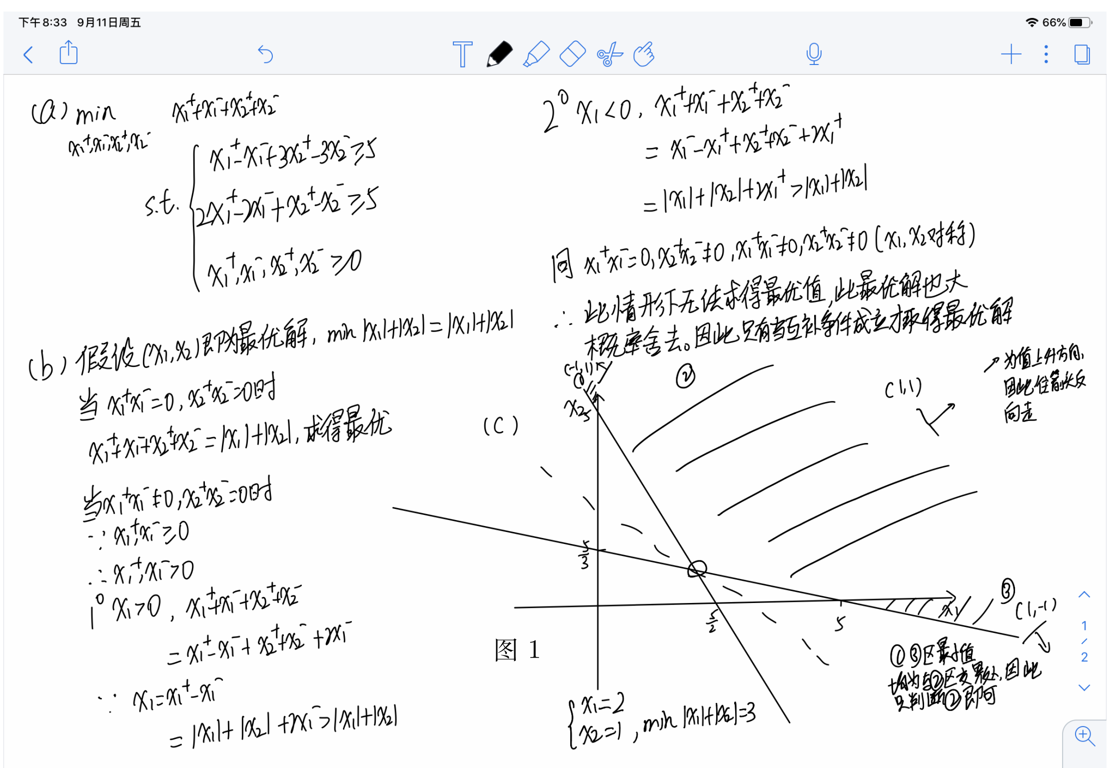

图 1