数值分析, 2020 Fall

Homework 3

Due on 23.59, Oct 23, 2020

1

解：

本题见 Natural Cubic Splines.py。

该程序实现输入起始点 x0，间距 h，插入点的个数 N，以及对应 fx, 然后输出图像

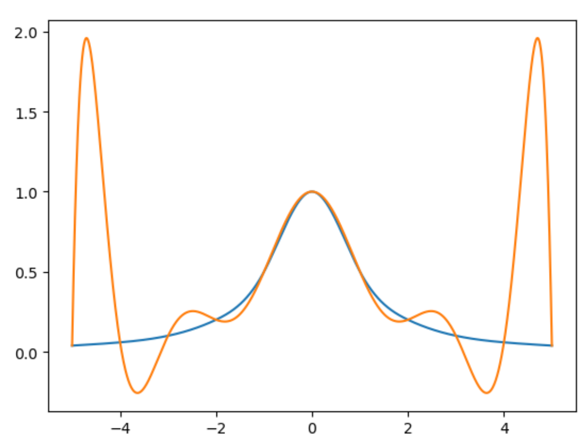
实现代码的思路：首先根据 fx 可以求得 R，然后根据自然样条函数形式求出 A，算出 c=A^-1R^T，最后根据公式将 b，d 求出, a=fx,b,c,d 均有了，即可实现 gx=fx[i]+b[i]*(x-x[i])+c[i]*(x-x[i])**2+d[i]*(x-x[i])**3

2

解：

本题见 HW3function1.py。

该程序实现规定了题 1 中的插值点及其函数值，然后与 HW2 中的曲线一并输出，其中蓝色为三次样条曲线，黄色为多项式拟合的曲线



3

解:

原曲线值为 219795/742586+3*atan(5)/2 约等于 2.35608707，由程序 ffunction.py 实现, 这里的实现是直接对原函数求二次微分后平方再积分

样条曲线值为 2.21614603300076，由程序 sfunction.py 实现，因为是分段函数，而积分满足加性，所以分别对以 1 为间距的每一段二次微分平方求积分，然后加和得出最终值

牛顿法插值多项式值为 3337302560233/1662254594=2007.696398, 由 pfunction 实现，pfunction 中附的是 matlab 的代码, 这里因为由函数式，也就暴力二次微分平方积分求解

分析：任意函数的三次样条曲线首先在原函数上是光滑的且具有一致收敛性，并且根据 ppt 中的公式可以得出其二次微分平方再积分的值一定小于等于原函数进行该操作，从本题求解出的值也可看出这一点

而等距插值多项式由数学家龙格证明在 $|x|>3.63$ 时随着插值多项式次数的增加多项式并不收敛，因此从上图中也已经看到，当 x 取大于 4 时拟合出的曲线已经完全偏离，由于本题我们计算的是该函数二次微分平方再积分，二次微分体现的是增长速率，再平方是表示只看变化程度，然后积分，通过求 4 附近的积分值也能够看出在 4 附近积分值远大于 3.63 的部分，这也印证了在 $|x|>3.63$ 后该多项式随着次数增长并不收敛与 fx