Métodos Numéricos
Segundo cuatrimestre 2016
Taller 2
Cuadrados Mínimos:
Jugando al doctor

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Introducción

En muchos ámbitos de la medicina se trabaja con estudios que buscan obtener los mejores resultados posibles. Sin embargo, con el fin de evitar procesos invasivos en los pacientes o disminuir los efectos colaterales se hace uso de la tecnología. Ejemplo de esto son las tomografías computadas donde se atraviesa el objeto de estudio con rayos X y según la proporción de la radiación inicial que llega al otro lado se consigue estimar la densidad del objeto atravesado.

Dado que cada envío de un rayo atraviesa una sección, eventualmente gruesa, se realizan diversos disparos con diferentes ángulos para tratar de captar diferentes combinaciones con las diferentes partes del objeto. Como además los instrumentos tienen errores en la medición y la intensidad de los rayos que se envían, es recomendable incluso realizar varias veces el mismo envío para tratar de disminuir los efectos negativos asociados. Dada una cierta granularidad elegida para diagramar la imagen se tomará luego una serie de mediciones con los rayos y se determinará un sistema de ecuaciones. La particularidad de dicho sistema es que no será determinado sino que se busca que sea sobredeterminado. Para resolverlo, y entonces conocer el nivel de densidad en cada parte del objeto en la discretización, se utilizan métodos numéricos al resolver este tipo de sistemas.

Así como en muchas aplicaciones, no siempre es posible contar con datos reales; o bien porque son difíciles de conseguir, o porque son caros de conseguir o, como en este caso, porque no es razonable realizar sucesivas tomografías sobre un individuo por la cantidad de radiación que podría recibir. En este trabajo realizaremos la simulación sobre una imagen obtenida en una tomografía la cual permitirá, además, ver cuán buena es la aproximación realizada por los modelos.

Enunciado

El objetivo de este taller es implementar un programa para reconstruir imágenes de tomografía computada basándose en sucesivas mediciones, el planteo de un sistema de ecuaciones sobredeterminado y luego cuadrados mínimos.

Se deben responder las siguientes preguntas, resolver los ejercicios y completar el código correspondiente.

1. Gráficamente, ¿qué solución encuentra cuadrados mínimos lineales?
2. ¿Cuándo es posible usar ecuaciones normales?
3. ¿Cuándo tiene cuadrados mínimos lineales una solución única?
4. Sea un subespacio $S \subseteq \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$ e y la proyección ortogonal de b sobre S.
   a) Probar que $b - y \in S^{\perp}$.
   b) Usar Pitágoras para verificar que y es el único vector en S tal que
   $$\|b - y\|_2 = \min_{s \in S} \|b - s\|_2$$
5. *a)* Probar que x^* es tal que $\|b - Ax^*\|_2 = \min\{\|b - Aw\|_2 \; : \; w \in \mathbb{R}^n\}$ si y sólo si $b - Ax^* \in Im(A)^{\perp}$.
   b) Usar el item anterior para demostrar que $x \in \mathbb{R}^n$ resuelve el problema de cuadrados mínimos para el sistema $Ax = b$ si y sólo si $A^t Ax = A^t b$ (ecuaciones normales).

6. Completar el código de *resolverEN.m* y *resolverQR.m*.

Evaluación:

- Coloquio con los docentes durante la clase.
- En caso de no asistir a clase, se debe entregar la resolución del taller por escrito hasta el Viernes 21 de octubre.