Métodos Numéricos
11 de noviembre de 2016
Taller

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Introducción.

Superman está volando sobre Metrópolis a su encuentro con Batman para la batalla final. Consciente de la debilidad de su oponente, Batman ha diseminado rocas de kriptonita por toda la ciudad. En la figura se muestra un modelo del recorrido de Superman hasta la posición de Batman. Debido a la velocidad que alcanza Superman, este recorrido se realiza en línea recta. Los círculos verdes muestran las ubicaciones de la kriptonita.

Figure 1: Modelo

Sean $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^3$ las ubicaciones de la kriptonita, y sea $h : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ la función de trayectoria de Superman, expresada como una trayectoria paramétrica en función del tiempo. Asumimos que la trayectoria es una recta, es decir $h(t) = at + b$, con $a, b \in \mathbb{R}^3$ (ver modelo en la figura). En el instante $t \in [0, 1]$, Superman estará en la posición $h(t)$, y su nivel de aturdimiento está dado por:

$$A(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|h(t) - y_i\|_2}$$

Es decir, cada roca de kriptonita aporta al nivel de aturdimiento una cantidad que es inversamente proporcional a la distancia de Superman a la roca. Si en algún instante $t \in [0, 1]$ el nivel de aturdimiento $A(t)$ es mayor o igual que un cierto valor crítico C, Superman quedará extremadamente debilitado por el efecto de la kriptonita y fallará en su objetivo de poder enfrentar a su enemigo.

Enunciado

El objetivo del Taller es implementar y comparar métodos numéricos para hallar algún instante de tiempo donde se alcance un nivel de aturdimiento crítico C de modo de poder determinar si Superman tiene éxito en llegar a la batalla.

Para ello se debe:

1. Plantear una ecuación no lineal $f(x) = 0$ tal que una raíz de la misma indique que el nivel de aturdimiento ha alcanzado un nivel crítico C.
2. *Newton-Raphson*
   (a) Calcular explícitamente la derivada de f y plantear la iteración de Newton-Raphson para hallar una raíz de f. Completar la implementación `NewtonRaphson.m`.
   (b) Considerar los siguientes valores: $y_1 = (2, 3, 0), y_2 = (2, 0.5, 0), a = (3, 1, 0), b = (1, 1, 0)$. Mostrar gráficamente que Newton-Raphson cumple las condiciones del teorema de punto fijo en algún intervalo cercano a la raíz, con lo cual puede asegurarse la convergencia del método en dicho intervalo.
3. Mostrar otras dos funciones de punto fijo (diferentes a Newton-Raphson) tal que la raíz de la ecuación no lineal del item 1 sea punto fijo de dichas funciones.
4. Comparar las velocidades de convergencia de los métodos de Bisección y Newton-Raphson. Para ello, sean $\{x_k^{(M)}\}_{k=0,\ldots}$ la suceción de puntos del método M convergentes a la raíz r de f, donde M es Newton-Raphson o bisección. Graficar y mostrar los valores del error $e_k^M = |r - x_k^{(M)}|$.
5. (Opcional) Implementar los métodos de la Secante y Regula Falsi y compararlos con los anteriores en cuanto a velocidad de convergencia.
6. (Opcional) Se desea calcular el valor $\xi = \sqrt[5]{8}$, el cual es desconocido. Proponer 3 iteraciones $g_i(x)$ de punto fijo tal que $g_i(\xi) = \xi$, para $i = 1, 2, 3$. Para alguna de las iteraciones propuestas, demostrar la convergencia en algún invervalo conveniente.

Evaluación

- Coloquio con los docentes durante la clase.
- En caso de no asistir a clase, se debe entregar la resolución por escrito hasta el Viernes 25 de Noviembre, incluidos los Ejercicios Opcionales.