MATRICES Y DETERMINANTES

MATRICES Y DETERMINANTES

MATRICES

- Concepto. Definición y Tipos.
- Operaciones con Matrices.
- Matriz Inversa

DETERMINANTES

- Concepto.
- Propiedades.
- Determinantes de orden n y matriz regular
- Rango de una matriz

MATRICES. DEFINICIÓN. TIPOS

Concepto y Definición

Una matriz $n \times m$ es una tabla de números ordenados en n filas y m columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- **Dimensión**: *n x m* es la dimensión de la matriz.
  (Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y los elementos correspondientes son iguales)
- **Orden:** Si la cantidad de filas es igual a la cantidad de columnas, hablamos de orden de la matriz.

El elemento de la fila i y la columna j se denota a_{ij} o A_{ij}.

Tipos de Matrices

- Matriz cuadrada n=m , rectangular n≠m
- Matriz fila n=1 , columna m=1
- Matriz escalonada, si todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal = 0.
- Matriz nula, si todos los elementos = 0. Es única para cada dimensión
- Matrices Cuadradas:

  Matriz triangular, si todos los elemento por encima o debajo de la diagonal principal son = 0.
  Matriz diagonal, si todos los elemento por encima y debajo de la diagonal principal son = 0.
  Matriz escalar, es diagonal con todos los elementos de la diagonal principal iguales.
  Matriz identidad, I, es escalar con todos los elementos de la diagonal principal iguales a uno.

OPERACIONES CON MATRICES

SUMA

Es la matriz obtenida sumando sus elementos correspondientes. $(a_{fc}) + (b_{fc}) = (a_{fc}+b_{fc})$.
Sólo se pueden sumar las matrices de igual dimensión

DIFERENCIA

Se obtiene sumando la primera con la opuesta de la segunda,
$A + (-B) = A - B$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$-B = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

PRODUCTO POR UN ESCALAR

Se multiplica k por todos los elementos $A(a_{fc})$, luego,
$k \cdot A=(k \cdot a_{fc})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$kA = \begin{pmatrix} k \cdot a & k \cdot b \\ k \cdot c & k \cdot d \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRANSPUESTA

Se obtiene al intercambiar cada fila por su columna correspondiente.

$$A \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad A^T \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

transpuesta

1ª) $(A^T)^T = A$ 2ª) $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$
3ª) $(A+B)^T = A^T+B^T$ 4ª) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

MATRIZ SIMÉTRICA

La matriz A es simétrica si $A = A^t$ y es antisimétrica si $A = - A^t$

$$\begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$$

simétrica antisimétrica

PRODUCTO DE MATRICES

Dos matrices se pueden multiplicar si el núm. de cols de A = filas de B

$$A_{mxn} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h1} & \cdots & a_{hn} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot B_{nxp} \begin{pmatrix} \cdot & b_{1k} & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & b_{nk} & \cdot \end{pmatrix} = D_{mxp} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & d_{hk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Cada elemento d_{hk} se btienen a partir de la fila h de A y la col. k de B, con la siguiente expresión,
$d_{hk} = a_{h1} \cdot b_{1k} + \cdots + a_{hn} \cdot b_{nk}$

MATRIZ INVERSA

- No existe la división de matrices, pero si se puede definir la inversa A^{-1}, no confundir con el exponente numérico -1, en matrices es un símbolo. Solo para matrices cuadradas.

- Diremos que B es inversa de A si se cumple que $A \cdot B = I$ y entonces B se representa por A^{-1}.

- Las tres matrices A, B, I, solo pueden ser cuadradas y tendrán el mismo orden.

- Una matriz y su inversa cumplen la propiedad conmutativa del producto, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

DETERMINANTES

El determinante es un número que se le asigna a una matriz cuadrada

El determinante de A se denota $\det(A)$ o $|A|$.

- $n = 1$

Si $A = (a_{11})$, entonces $|A| = a_{11}$.

- $n = 2$

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

- $n = 3$

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

DETERMINANTES

MENORES PRINCIPALES

El de orden 1, es el primer elemento de la matriz A_n
El de orden 2 se obtiene añadiendo al 1º los elementos de la 2ª fila y 2ª columna de forma que quede cuadrado y asi sucesivamente. Solo hay n

$$A_4 \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

MENOR COMPLEMENTARIO

Es cualquier determinante que se puede construir eliminando la fila y col. de un elemento a_{fc} cualquiera. Diremos que M_{fc} es el menor complementario de a_{fc}

$$A \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad a_{22} = e \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} \quad a_{23} = f \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

ADJUNTO

Se calcula a partir del menor complementario M_{fc} del elemento a_{fc} de la siguiente forma, $A_{fc} = (-1)^{f+c} \cdot M_{fc}$
Diremos que A_{fc} es el adjunto de a_{fc}.

$$A \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad a_{23} = f \quad A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

MATRIZ ADJUNTA

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A^* \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Es la matriz que se obtiene sustituyendo cada elemento de la matriz por su adjunto.
La adjunta de A se representa por Adj(A) ó A*

DETERMINANTES

MATRIZ INVERSA POR DETERMINANTES

Si A es una matriz de orden n se cumple que,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj } A)^t \qquad A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = 1/|A| \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

y solo existe si $|A| \neq 0$.

MATRIZ REGULAR Y SINGULAR

Una matriz es regular si existe su inversa. Si el determinante de A es distinto de cero, es regular.
Una matriz es singular si su determinante es igual a cero, es decir NO es inversible.

DETERMINANTE DE ORDEN N (Desarrollo por elementos de una fila o columna)

Si desarrollamos por una fila cualquiera tendremos que, $|A_n| = a_{f1} \cdot A_{f1} + a_{f2} \cdot A_{f2} + \cdots + a_{fn} \cdot A_{fn}$
Si desarrollamos por una col. cualquiera tendremos que, $|A_n| = a_{1c} \cdot A_{1c} + a_{2c} \cdot A_{2c} + \cdots + a_{nc} \cdot A_{nc}$

DETERMINANTES

RANGO DE UNA MATRIZ

Dada una matriz A, se llaman submatrices de A a las matrices que se obtienen a partir de A eliminando filas o columnas.

Se llaman menores de orden m de A a los determinantes de las submatrices cuadradas $m \times m$ de A.

Definición 1 *Decimos que A tiene rango r si existe un menor de orden r no nulo y todos los menores de orden mayor que r son nulos.*

Propiedades de las operaciones:

$A + B = B + A$

$A(B + C) = AB + AC$

$(B + C)A = BA + CA$

$AI = A$, $IA = A$

En general $AB \neq BA$.

$(A + B)^t = A^t + B^t$

$(\lambda A)^t = \lambda A^t$

$(AB)^t = B^t A^t$

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Si A y B son invertibles AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Si A es invertible A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$, $\left(A^t\right)^t = A$

Propiedades de los determinantes

$|AB| = |A||B|$

$|A^t| = |A|$

$|A|^{-1} = 1/|A|$.

$|\lambda A| = \lambda^n |A|$.