DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

- Concepto
- Autovalores
- Autovectores
- Criterios de Diagonalización
- Potencia Enésima

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

$A \cdot X = \lambda \cdot X$

AUTOVALORES

DEFINICIÓN

Dada una matriz A cualquiera, si algún vector, $X \in R^n$, $X \neq \mathbf{0}$ (vector no nulo) cumple que, $A \cdot X = \lambda \cdot X$ donde $\lambda \in R$, es un número real, se dice que λ es un "**autovalor**" de A , o valor propio de A.
Fijarse que el vector resultante solo cambia su longitud. Esto no ocurre con todos los vectores.

MATRIZ EQUIVALENTE

Dos matrices son equivalentes, si una se obtiene de la otra por operaciones elementales de fila o columna.
Dada una matriz cualquiera y todas sus equivalentes, poseen los mismos autovalores.

MATRIZ ASOCIADA A UN AUTOVALOR

Si, $A \cdot X = \lambda \cdot X$, trasponiendo al primero miembro queda que, $A \cdot X - \lambda \cdot X = 0$, con $0 \in R^n$, su vector nulo. Sacando factor común el vector X queda que, $(A - \lambda \cdot I) \cdot X = 0$, con I la matriz identidad.
La matriz resultante de, $A - \lambda \cdot I = A_\lambda$ se llama matriz asociada a cada autovalor λ y tenemos que, $A_\lambda \cdot X = 0$

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

AUTOVALORES

POLINOMIO CARACTERÍSTICO

Es el polinomio, en función de λ, que se obtiene al calcular el determinante de A_λ, es decir, $P(\lambda) = \det(A_\lambda)$, o lo que es lo mismo que $P(\lambda) = | A - \lambda \cdot I |$

Por tanto, los autovalores de A son las raíces del polinomio característico $P(\lambda)$, es decir $| A - \lambda \cdot I | = 0$

CÁLCULO DE LOS AUTOVALORES

Todos los autovalores λ se obtienen al igualar el polinomio característico a cero, es decir, $P(\lambda)$

Ejemplos: 1º) $P(\lambda) = (3-\lambda)(4-\lambda) = 0, \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4$; 2º) $P(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-6) = 0, \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 6$.

MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA Y GEOMÉTRICA

Algebraica: Se expresa por m_λ = número de veces que λ se repite como raíz del polinomio característico.

Geométrica: Se expresa por $mg_\lambda = n - rg(A_\lambda)$. Es decir, el orden de la matriz A_λ menos su rango.

Para cualquier autovalor, siempre cumple que, $1 \leq mg_\lambda \leq m_\lambda$

Si la multiplicidad algebraica de un autovalor $m\lambda = 1$, implica que la geométrica $mg\lambda = 1$.

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

$A \cdot X = \lambda \cdot X$

AUTOVECTORES

DEFINICIÓN

Si algún vector, $\boldsymbol{X} \in R^n$, cumple que, $f(\boldsymbol{X}) = \lambda \cdot \boldsymbol{X}$, con $\lambda \in R$, se dice que $\boldsymbol{X}$ es un **autovector** de A , o vector propio de A, asociado al autovalor λ.

Los autovectores asociados a cada autovalor λ, forman un subespacio vectorial de R^n

MATRIZ DIAGONALIZABLE

A es una matriz diagonalizable, si existe una matriz diagonal D equivalente a A

Si D es la matriz diagonal equivalente, D contiene todos los autovalores λ_i en su diagonal principal y da igual la posición que ocupen.

Si colocamos los autovalores por orden de su valor, de menor a mayor, la matriz diagonal es única.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

$A \cdot X = \lambda \cdot X$

AUTOVECTORES

CÁLCULO DE AUTOVECTORES PARA CADA AUTOVALOR

Para cada autovalor, es encontrar los vectores, que cumplan, $M_\lambda \cdot \boldsymbol{X} = 0$.
Para ello, para cada autovalor, se resuelve el sistema homogéneo que representa y se obtienen las infinitas soluciones parametrizadas que tiene en cada caso.

MATRIZ DE PASO

Dada una matriz cualquiera A, nuestro objetivo es calcular, una matriz diagonal D equivalente a A.
Si D existe, las dos matrices están relacionadas por una tercera matriz P, llamada **matriz de paso**.
P se construye con los autovectores calculados, escritos como columnas de la matriz, usando tantos autovectores diferentes para cada autovalor λ, como diga su multiplicidad geométrica, mg_λ

P es una matriz que permite relacionar las matrices A y D con una simple ecuación matricial.
Para una matriz A, hay infinitas matrices de paso P.
Nos interesa encontrar una que sea los más simple posible, es decir cuyos elementos sean lo más pequeños que se pueda sin que todos sean cero y tenga el mayor número de ceros posibles.

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

CRITERIOS DE DIAGONALIZACIÓN Y POTENCIA ENÉSIMA

CRITERIOS DE DIAGONALIZACIÓN

Una matriz cuadrada $n \times n$ A *es* ***diagonalizable*** *si existen una matriz diagonal* D *y otra matriz* P *con* $|P| \neq 0$ *tales que*

$$A = PDP^{-1}$$

Para que sea diagonalizable, todos los autovalores deben ser reales, es decir, todo $\lambda \in R$:

a) Es diagonalizable, si las multiplicidades algebraicas valen uno, $m_\lambda = 1$, para todos sus autovalores λ.
b) Es diagonalizable, si solo para los autovalores con $m_\lambda > 1$ coinciden ambas multiplicidades $m_\lambda = mg_\lambda$
c) Es diagonalizable, si la matriz es simétrica

POTENCIA ENÉSIMA

Si A es una matriz cuadrada diagonalizable D con matriz de paso P, como $A = P \cdot D \cdot P^{-1} \Rightarrow A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

$A^n = A \cdot A \cdots A = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdots (P \cdot D \cdot P^{-1}) = P \cdot D \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot D \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdots (P^{-1} \cdot P) \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdots D \cdot P^{-1} = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$