ALGEBRA LINEAL

MATRICES Y DETERMINANTES

1. Sean las matrices

A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ **C =** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calcular:

(a) $2\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$
(b) $2\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$
(c) $2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} - 3\boldsymbol{AB}^2 + \boldsymbol{ACB}$
(d) $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{AC} - \boldsymbol{BA} - \boldsymbol{BC}$

2. Sean las matrices

A = $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcular:

(a) $\boldsymbol{A}^t$
(b) $\boldsymbol{B}^t$
(c) $\boldsymbol{2A}^t$
(d) $(\boldsymbol{2A})^t$
(e) $\boldsymbol{A}^t + \boldsymbol{B}^t$
(f) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^t$

3. Sea la matriz **A**= $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcular:

(a) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^t$
(b) $\boldsymbol{A}^t \cdot \boldsymbol{A}$

4. Sea la matriz **A**= $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcular:

(a) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^t$
(b) $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^t$
(c) $\boldsymbol{B}^t \cdot \boldsymbol{A}$
(d) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^t$
(e) $\boldsymbol{A}^t \cdot \boldsymbol{A}$
(f) $(\boldsymbol{A}^t \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$

5. Demuéstrese la siguiente afirmación: Dada las matrices regulares del mismo orden A,B,C si (AB=AC) entonces B=C

6. Para cada una de las siguientes matrices, comprobar los siguientes resultados :

(a) Si **A**= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

(b) Si **A**= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(c) Si **A**= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -6 & -6 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. Para cada una de las siguientes matrices, comprobar los siguientes resultados

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ = -7

(b) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$= 0

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ = 0

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ = 216

(e) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$= -106

8. Sean A, B y C matrices cuadradas de orden 3, tales que $|A| = 3$, $|B| = 2$, $|C| = 0$

Calcular a) $|5A|$ b) $\left|\frac{1}{2}B\right|$ c) $|A^t B^{-1}|$ d) $|ABA^{-1}B|$

9. Hállese el rango de cada una de las siguientes matrices

a) **A**= $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) **B**= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) **C=** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

d) **D** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

e) **E** = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Estúdiese cada uno de los siguientes sistemas lineales. Determinar si es compatible o no.

a) $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = a \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = b \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 5x_2 = b \end{cases}$$

c) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) $$\begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Discutir según los valores k el sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \\ kx + 5y - 4z = -1 \end{cases}$$

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

1. Para cada una de las siguientes matrices, averigüe si es diagonalizable

   a) **A**= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   b) **B**= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Dada las siguientes matrices, calcúlense sus autovalores y autovectores, la matriz diagonal semejante y la relación entre la matriz A y su matriz diagonal semejante, en caso de que sea posible.

   a) **A**= $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

   b) **A**= $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

   c) **A**= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   d) **A**= $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Dada la siguiente matriz, dependiendo de un parámetro a

   A= $\begin{pmatrix} -2 & a \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

   a) Determinar el valor de a para que $\lambda = 1$ sea autovalor de A
   b) Para los valores de a calculados en el apartado anterior, diagonalizar A
   c) Para el valores de $\boldsymbol{a}$ calculados en el apartado a) ¿Cómo se calcularía A^{245} ?

4. Dada la siguiente matriz, dependiendo de un parámetro a

   A= $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Determinar el valor de a para que $\lambda = 1$ sea autovalor de A
   b) Para los valores de a calculados en el apartado anterior, diagonalizar A

5. Dada la siguiente matriz, dependiendo de un parámetro a

   A= $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

   a) Determinar el valor de a para que $\lambda = 3$ sea autovalor de A
   b) Para el valor de a calculado en el apartado anterior, estudiar si A es diagonalizable y diagonalizarla si es posible. ¿cómo se calcularía A^{200} ?

FORMAS CUADRÁTICAS Y ESTUDIO DEL SIGNO

1. Exprese la siguiente forma cuadrática en forma matricial:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 4{x_3}^2 + x_1 x_2 + 4\, x_1 x_3$$

2. Exprese en forma matricial la siguiente forma cuadrática:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 - 2{x_2}^2 + 3\, x_1 x_3 - 2\, x_3 x_3$$

3. Obténgase la expresión polinómica de la forma cuadrática:

$$Q(x) = (x_1\ x_2\ \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

4. Obténgase la expresión matricial de la forma cuadrática:

$$Q(x) = {x_2}^2 - 5{x_3}^2 - x_1 x_2 + 4\, x_2 x_3$$

5. Para la siguiente forma cuadrática, a) exprésela en forma matricial y b) encuentre una expresión diagonal

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xz + z^2$$

6. Sea la forma cuadrática.

$$Q\ (x, y, z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   a) Expresar la forma polinómica
   b) Encuentre una expresión diagonal

7. Estudie el signo de la forma cuadrática:

$$\boldsymbol{Q(x_1, x_2, x_3) = -{x_1}^2 - 2{x_2}^2 + 2x_2 x_3 - 2{x_3}^2}$$

8. Estudie el signo de la forma cuadrática:

$$\boldsymbol{Q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + 2x_1 x_2}$$

9. Estudie el signo de la forma cuadrática:

$$\boldsymbol{Q(x_1, x_2, x_3) = -{x_1}^2 + 2x_2 x_3 - {x_3}^2}$$

10. Estudie el signo de la forma cuadrática:

$$\boldsymbol{Q(x_1, x_2, x_3) = 3{x_1}^2 - 4x_1 x_2 + 7{x_2}^2}$$

Ejercicios de Aplicación

1.

Hay dos ciudades, A y B. La ciudad A tiene 50 millones de habitantes y la B 43 millones de habitantes.

Cada año, el 18% de la población de la ciudad A se pasa a B, y además el 25% de la población de B se pasa a A.

Sin tener en cuenta nacimientos y muertes de la población ¿Cuál será la población de cada ciudad luego de 10 años? ¿Y cuál será la población de cada ciudad pasado mucho tiempo?

2.

En una zona geográfica existen tres empresas de telefonía móvil que controlan todo el mercado. Inicialmente las cuota de mercado se reparte en partes iguales entre las tres empresas. El mercado se estima en 12 millones de usuarios.

Dado que en este mercado no existen más empresas, el total de los usuarios se reparten entre estas tres empresas.

Cada mes hay una masa de usuarios que se cambia de compañía y abandona su empresa.

Se sabe que cada mes la empresa A, pierde un 40% de sus usuarios (los cuales van en parte iguales a B y a C, es decir en un 20% a cada uno). También se sabe que cada mes B, retiene el 75% de sus clientes cada mes y el 25% que pierde se van a A (15%) y a C (10%). Por último, la empresa C, pierde cada mes un 20% de sus clientes que se van a A y a B en partes iguales.

Según estimaciones, el porcentaje de cambio entre las empresas se mantiene constante con el tiempo y además al no ser significativa la cantidad de nuevos clientes que se incorporan al sistema, se dejarán fuera de análisis.

¿Cuál será la cuota de mercado de cada empresa en el año 5? ¿cuántos usuarios conservará cada una?