SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Ecuación matricial asociada y regla de Cramer
- Clasificación por el teorema de Rouché-Fröbenius
- Sistemas homogéneos
- Sistemas con un parámetro

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ECUACIÓN MATRICIAL ASOCIADA

Consideremos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Expresión matricial del sistema
Si definimos las siguientes matrices

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}, B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

el sistema se puede escribir matricialmente en la forma

$$AX = B.$$

Si $B = 0$ el sistema se llama homogéneo. Todo sistema homogéneo es compatible, porque $X = 0$ es una solución.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ECUACIÓN MATRICIAL ASOCIADA

Todo sistema de ecuaciones lineales se puede escribir como ecuación matricial $A \cdot X = B$
Por ejemplo, si tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnicatas (x,y,z), entonces lo podemos reescribir como:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\cdot x + a_{12}\cdot y + a_{13}\cdot z = b_1 \\ a_{21}\cdot x + a_{22}\cdot y + a_{23}\cdot z = b_2 \\ a_{31}\cdot x + a_{32}\cdot y + a_{33}\cdot z = b_3 \end{array}\right\} \qquad A\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot X\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Matriz principal

$$A^*\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Matriz ampliada

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

CLASIFICACIÓN POR EL TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Dado un sistema de m ecuaciones y n variables obtenemos una ecuación matricial $A \cdot X = B$ donde A es la matriz principal y A^* es la matriz ampliada.

El teorema clasifica los SEL respecto al número de soluciones con el siguiente enunciado

Si, $rg(A) < rg(A^*)$ el Sistema es Incompatible, SI, y significa que no tiene ninguna solución.
Si, $rg(A) = rg(A^*) = \mathbf{r}$, Sistema Compatible, SC
si, $\mathbf{r} = n$, determinado, SCD, única sol.
si, $\mathbf{r} < n$, indeterminado, SCI, infinitas sol.

Siempre se cumple que, $rg(A) \leq rg(A^*) \leq n$, luego si, $rg(A) = n$, implica que, $rg(A^*) = n$.

n :Número total de Variables de sistema.
m :Número total de Ecuaciones del sistema.
r :Número de Ecuaciones independientes del sistema, se le llama "Rango del sistema".
m - r :Número de Ecuaciones dependientes del sistema, son las que tenemos que eliminar.

-Si el Sistema es Incompatible, ya no hay que perder el tiempo intentándolo resolver.
-Si el Sistema es Compatible y Determinado, se aplica la regla de cramer para resolverlo.
-Si el Sistema es Compatible e Indeterminado, se aplica el método por parámetros.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

SISTEMAS LINEALES HOMOGENEOS

Son aquellos sistemas lineales en los que todos los términos independientes son cero.

Sistema Homogéneo		Ecuación matricial asociada a un S.H.
$\left.\begin{array}{l} a_{11}\cdot x + a_{12}\cdot y + a_{13}\cdot z = 0 \\ a_{21}\cdot x + a_{22}\cdot y + a_{23}\cdot z = 0 \\ a_{31}\cdot x + a_{32}\cdot y + a_{33}\cdot z = 0 \end{array}\right\}$	=>	$\overset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}} \cdot \overset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Todo sistema homogéneo se puede escribir como ecuación matricial, $A \cdot X = 0$.

Siempre se cumple que $rg(A) = rg(A^*) = r$, es decir siempre son compatibles y tienen como mínimo una solución segura que es, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Para clasificarlas basta con calcular el $rg(A) = r$ con lo que si :
si $|A| \neq 0$, $r = n$, y el S. H. es determinado, (S.C.D.) con solución única: $x=0$, $y=0$, $z=0$
si $|A| = 0$, $r < n$, y el S. H. es indeterminado, (S.C.I.) y se resuelve por parámetros.