Clase Probabilidad

- Probabilidad
- Probabilidad condicionada
- Independencia
- Funciones de probabilidad
- Muestra
- Estadísticos

PROBABILIDADES

ESPACIO MUESTRAL (S): ES EL CONJUNTO DE TODOS LOS RESULTADO POSIBLES DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO.

EVENTO: ES TODO SUBCONJUNTO DEL ESPACIO MUESTRAL.

EJEMPLO

Sea el **experimento E**: lanzar un dado.

Evento: que salga número par.

Definimos el evento de la siguiente manera:

A = sale número par = (2, 4, 6)

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. Sea $A=\{E_1,E_2,...,E_n\}$, entonces $P(A)=\sum^{n}_{i=1} P(E_i)$
3. $P(S)=1$ y $P(\emptyset)=0$
4. A la pareja (S,P) se le llama espacio de probabilidades.

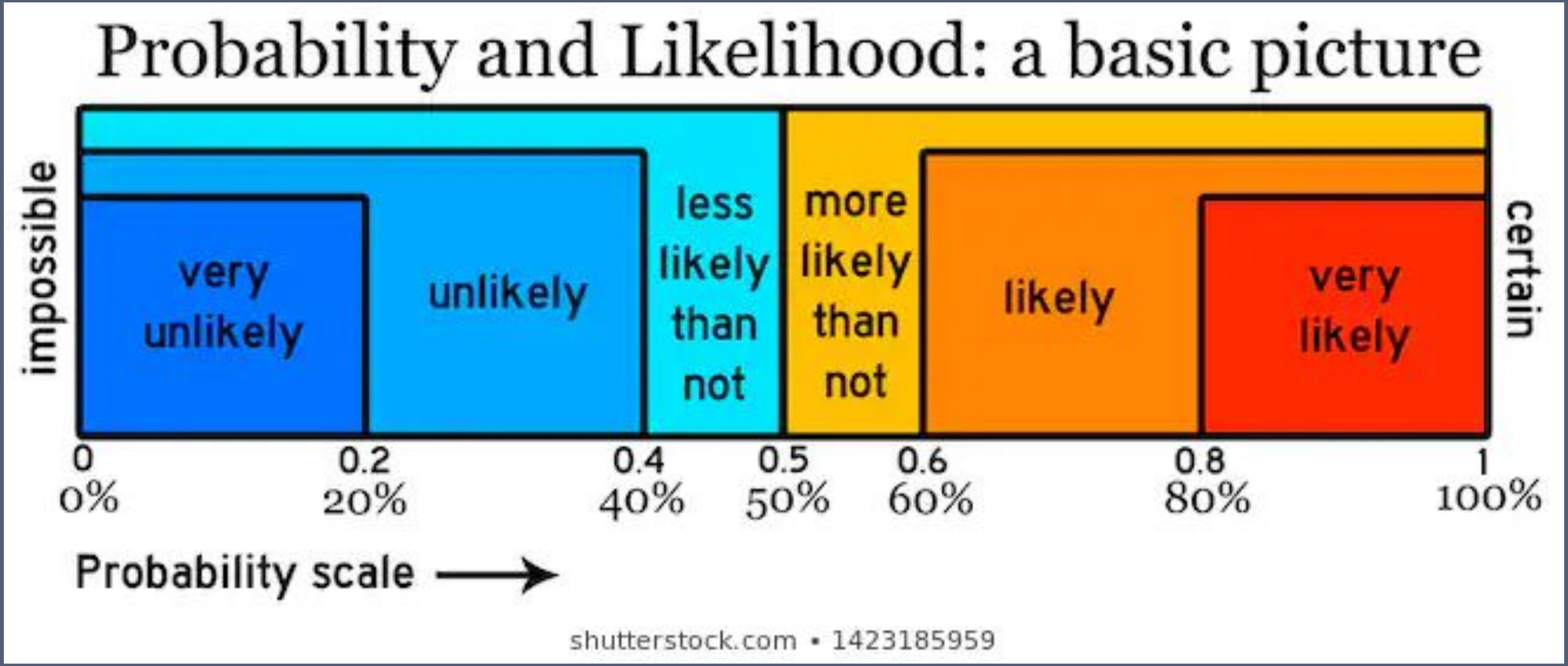
PROBABILIDADES

PROBABILIDAD : ES EL CONJUNTO DE POSIBILIDADES DE QUE UN EVENTO OCURRA O NO EN UN MOMENTO DETERMINADO. ESTAS **POSIBILIDADES SE MIDEN EN UNA ESCALA DEL 0 AL 1.** DONDE 0 INDICA QUE ES IMPOSIBLE QUE OCURRA EL EVENTO Y 1 INDICA QUE OCURRIRÁ CON CERTEZA EL EVENTO.

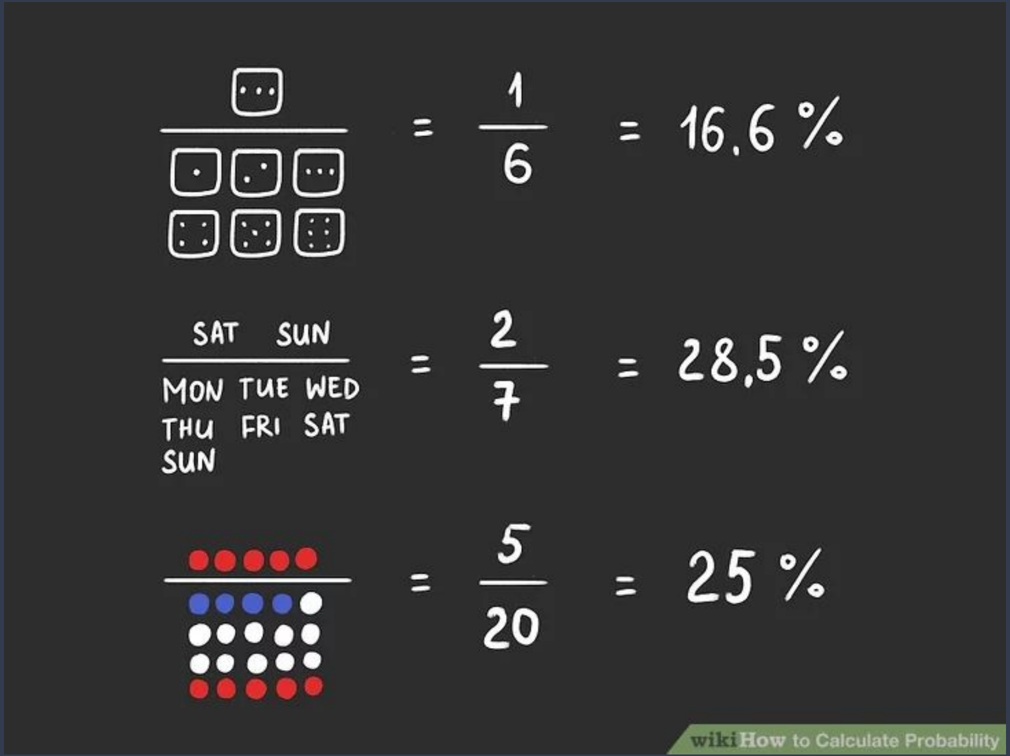
SI TODOS LOS RESULTADOS EN UN **ESPACIO MUESTRAL** S FINITO SON IGUALMENTE PROBABLES, Y E ES UN EVENTO EN ESE ESPACIO MUESTRAL, ENTONCES LA PROBABILIDAD DEL EVENTO E ESTÁ DADA POR LA SIGUIENTE FÓRMULA (DEFINICIÓN CLÁSICA DE LA PROBABILIDAD)

$$P(E) = \frac{\#\, resultados\ favorables}{\#\, total\ de\ posibles\ resultados} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Probability



Probabilidad

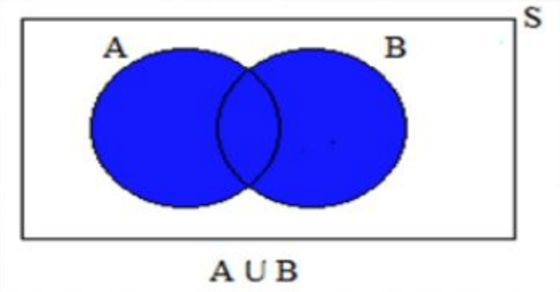


PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

5. Regla de la adición

Eventos no excluyente

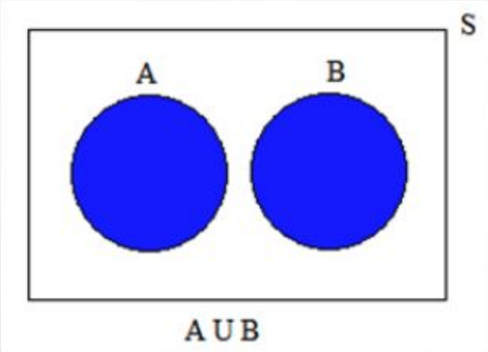
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Eventos excluyente

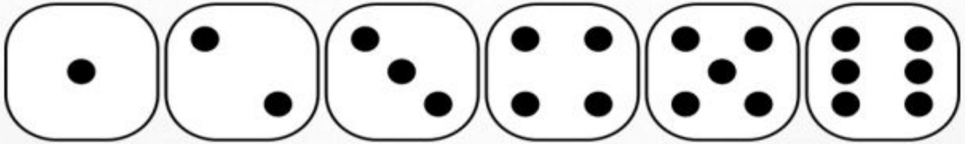
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cap B = \emptyset)$$



PROBABILIDAD

Ejemplo: lanzamiento de un dado.



Probabilidad de E_i: $P(E_i = \frac{1}{6})$

Probabilidad de que salga par: $A = \{2,4,6\}$, luego

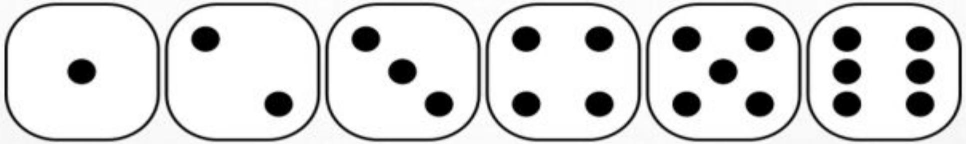
$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Probabilidad de que salga mayor que 3: $\mathrm{B} = \{4,5,6\}$, luego

$$P(B) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

PROBABILIDAD

Ejemplo: lanzamiento de un dado.



PROBABILIDAD DE QUE SALGA PAR O MAYOR QUE 3

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$A = \{2,4,6\} \quad B = \{4,5,6\} \rightarrow A \cap B = \{4,6\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Probabilidad Condicional

SE CLASIFICA UN GRUPO DE 100 EJECUTIVOS, DE ACUERDO A SU PESO Y A SI SUFREN O NO DE HIPERTENSIÓN. LA TABLA MUESTRA EL NÚMERO DE EJECUTIVOS EN CADA CATEGORÍA.

	Insuficiente	Normal	Sobrepeso	Total
Hipertenso	2	8	10	20
Normal	20	45	15	80
Total	22	53	25	100

- Si se elige un ejecutivo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga hipertensión?
- Si se elige a una persona al azar, y se descubre que tiene sobrepeso, ¿cuál es la probabilidad de que tenga hipertensión?¿Es la misma que antes?

$$P(H) = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

$$P(H|S)$$

Conditional probability

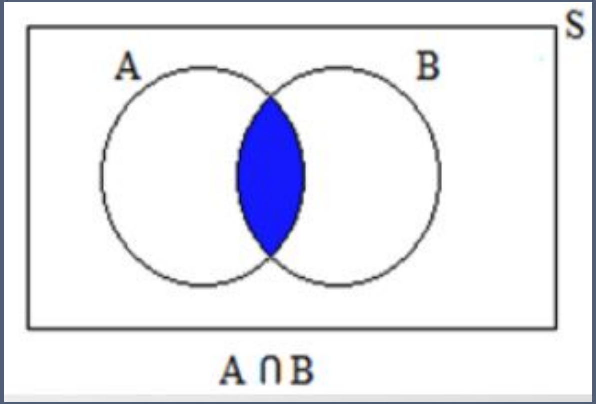
- La probabilidad condicional, (o probabilidad condicionada) es la probabilidad de que ocurra un evento, dado que otro evento ha ocurrido.

Probability of event A occured and event B occured

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probability of event A given B has occured

Probability of event B



Probabilidad Condicionada

- Si cuando está nublado, llueve con una probabilidad del 0.8, y la probabilidad de que llueva y haya un día nublado es del 0.05, cuál es la probabilidad de que haya un día nublado.

Probability of event A occured and event B occured

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probability of event A given B has occured

Probability of event B

Independencia

Dos eventos son independientes si el hecho de que uno pase no afecta a la probabilidad de otro

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

$$P(A \mid B) = P(A).$$

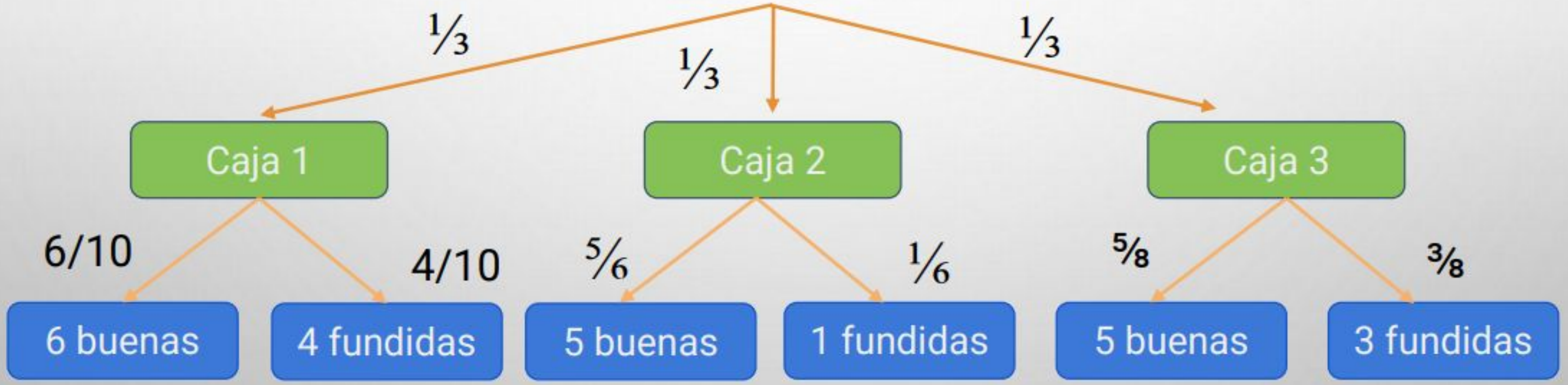
Ejemplo: Lanzamos una moneda 2 veces.

- Evento A: Lanzamiento 1 es cara
- Evento B: Lanzamiento 2 es cara
- Evento C: Los 2 lanzamientos son cara

PROBABILIDAD TOTAL

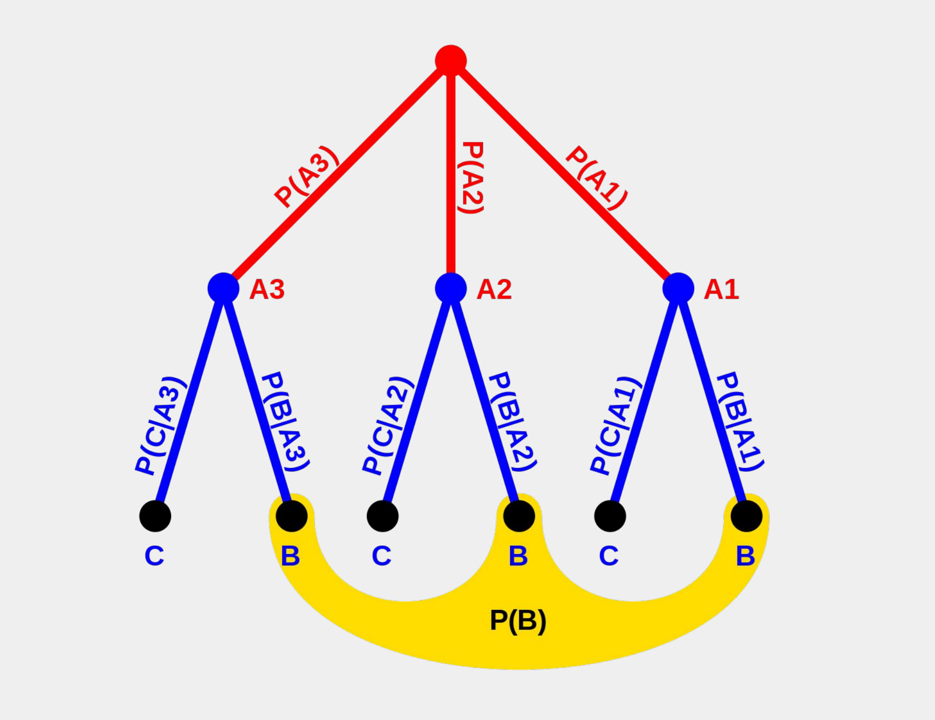
Ejemplo

SE DISPONE DE TRES CAJAS CON BOMBILLAS. LA PRIMERA CONTIENE 10 BOMBILLAS, DE LAS CUALES HAY CUATRO FUNDIDAS; EN LA SEGUNDA HAY SEIS BOMBILLAS, ESTANDO UNA DE ELLAS FUNDIDA, Y LA TERCERA CAJA HAY TRES BOMBILLAS FUNDIDAS DE UN TOTAL DE OCHO. ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE AL TOMAR UNA BOMBILLA AL AZAR DE UNA CUALQUIERA DE LAS CAJAS, ESTÉ FUNDIDA?



$$P(fundida) = \left(\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}\right)$$

Probabilidad Condicionada



Probabilidad Condicionada

Ley de la probabilidad total:

$$\Pr(A) = \sum_n \Pr(A \mid B_n) \Pr(B_n),$$

Ejercicio de probabilidad condicionada: Sabemos que en Barcelona llueve con probabilidad 0.3 en invierno y otoño, con probabilidad 0.1 verano, 0.2 primavera. ¿Cuál es la probabilidad de llover?

Probabilidad Condicionada

For all kind of events:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

Law of total probability:

$$\Pr(A) = \sum_n \Pr(A \mid B_n) \Pr(B_n),$$

For independent events:

$$P(A \mid B) = P(A).$$

Bayes Theorem:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) P(B)}{P(A)}$$

Probabilidad Condicionada

- La probabilidad de que llueva es del 0.1
- La probabilidad de que llueva si está nublado es del 0.4
- La probabilidad de estar nublado es del 0.2
- ¿Cual es la probabilidad de que esté nublado sabiendo que llueve?

Probability mass function

La función de probabilidad es la función que nos indica la probabilidad de una variable aleatoria en un valor dado

$$\sum_{x \in A} f_X(x) = 1$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{if } x = 1 \\ 1/3 & \text{if } x = 2 \\ 1/3 & \text{if } x = 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1.$$

Esperanza de una variable aleatoria

Esperanza:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, p_i \, .$$

En matemática, concretamente en la rama de estadística, la **esperanza** (denominada asimismo **valor esperado**, **media poblacional** o **media**) de una variable aleatoria X, es el número $\mathbb{E}[X]$ o $\mathrm{E}[X]$ que formaliza la idea de *valor medio* de un fenómeno aleatorio. Es un concepto análogo a la media aritmética de un conjunto de datos.

Theoretical Statistics

Ejemplo (6):

En el ejemplo del lanzamiento de dos dados, calcular la esperanza matemática de la variable aleatoria *X="suma de puntos"*

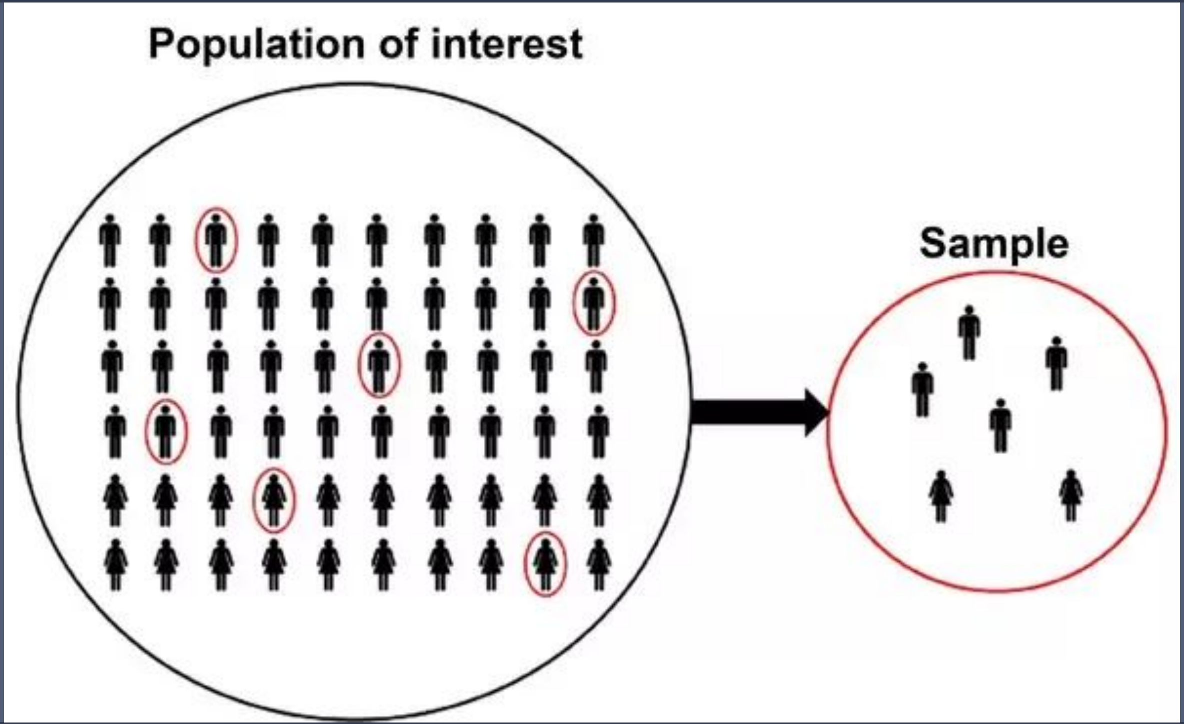
Solución:

Sabemos que: $\mu = E(X) = \sum_{i=2}^{12} P(i) \cdot i$

$$E(x) = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \ldots + \frac{6}{36} \cdot 7 + \ldots + \frac{1}{36} \cdot 12 = 7$$

Esto significa que al lanzar dos dados el promedio resultante tiende a 7.

Sample (muestra)



Sample Statistics

Mean

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Variance (sample)

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Standard deviation (sample)

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2},$$

N-1 => Bessels correction (se puede omitir)