PEC00025A_221_P2

May 25, 2022

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC)

1 PEC00025: Introduction to Vibration Theory

1.1 Test P2 (2022/1): Discrete and continuous mdof systems

NAME: Gabriel Orso Garcia **CARD:** 00275506

Instruções

1. Entregar a resolução da prova em arquivo único, com no máximo 10Mb, até às 24h de hoje, 25 de maio de 2022.
2. Recomenda-se verificar atentamente se todas as folhas da resolução foram incluídas no arquivo gerado, pois não serão aceitas entregas posteriores.
3. Na primeira folha do arquivo deve constar claramente o NOME e o cartão de MATRÍCULA.
4. A consulta ao material de estudo e o uso do computador para cálculos são LIVRES.
5. A prova deve ser realizada INDIVIDUALMENTE, sem recorrer ao auxílio de colegas ou outras pessoas! Caso se verifique o descumprimento desta regra, todos os envolvidos na fraude terão a nota da prova zerada.

1.2 Questão 1

Um cabo com comportamento elástico linear é disposto horizontalmente. O cabo tem comprimento total $L = 6$m, rigidez axial $EA = 4000$kN e duas massas $m = 20$kg fixadas nos terços. O cabo tem uma protensão inicial $T_0 = 20$kN. O amortecimento do sistema é $\zeta = 0.01$ (razão do crítico). A rigidez à flexão bem como a massa do cabo são desprezáveis. A aceleração da gravidade no local é $g = 9.81\text{m/s}^2$. Os dois graus de liberdade considerados são os deslocamentos verticais das duas massas, $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

Admitindo-se uma condição de pequenos deslocamentos, calcule os modos de vibração e as respectivas frequências naturais de vibração livre do sistema.

Para resolver esse problema, podemos calcular a matriz de flexibilidade do sistema, aplicando uma carga unitária em cada um dos graus de liberdade e medindo os deslocamentos nos outros.

Começando por aplicar uma carga unitária negativa em u_2 e fazendo-se o diagrama de corpo livre do bloco pendurado em u_2 (desconsiderando o peso próprio), temos:

$$\sum F_y = (20kN + \Delta T_1)sin(\alpha_1) + (20kN + \Delta T_2)sin(\alpha_2) - 1 = 0$$

onde α_1 é o ângulo do cabo no lado direito do bloco, e ΔT_1 é seu alongamento no lado direito. Os sub-índices 2 correspondem ao lado esquerdo.

Podemos calcular os ângulos (considerando o regime de pequenos deslocamentos) como:

$$\alpha_1 = arctan(\frac{u_2}{L/3}) \therefore sin(\alpha_1) = \frac{3u_2}{L}$$
$$\alpha_2 = arctan(\frac{u_2}{2L/3}) \therefore sin(\alpha_2) = \frac{3u_2}{2L}$$

Ainda considerando a condição de pequenos deslocamentos e dada a magnitude da protensão dos cabos, consideraremos que o acréscimo de tensão gerado pela deformação no cabo é nulo:

$$\Delta T_1 = \Delta T_2 = 0$$

Assim:

$$\sum F_y = 20kN * 3 * \frac{u_2}{L} + 20kN * \frac{3}{2}\frac{u_2}{L} - 1kN = 0$$

Dai obtemos:

$$u_2 = 6,667cm$$

Por semelhança de triângulos:

$$u_1 = \frac{u_2}{2} = 3,334cm$$

Como o sistema é simétrico, a aplicação de uma força unitária em u_1 levaria a:

$$u_1 = 6,667cm$$
$$u_2 = \frac{u_1}{2} = 3,334cm$$

Assim, podemos montar a matriz de flexibilidade do sistema:

A matriz de rigidez pode ser calculada invertendo-se a matriz de flexibilidade:

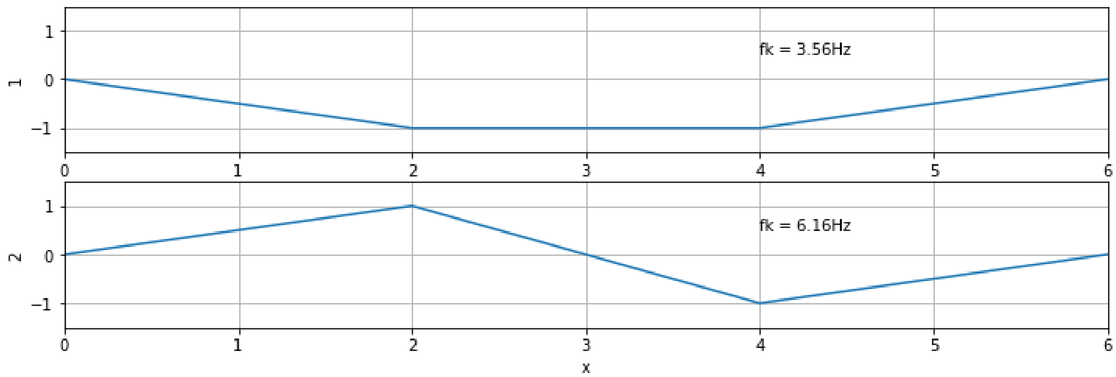
```
[[ 20000. -10000.]
 [-10000.  20000.]]
```

Matriz de massa concentrada do sistema:

```
[[20.  0.]
 [ 0. 20.]]
```

Os modos e frequências naturais de vibração são calculados com auxílio do numpy:

```
Frequência natural do primeiro modo de vibração: 3.56 Hz
Frequência natural do segundo  modo de vibração: 6.16 Hz
```



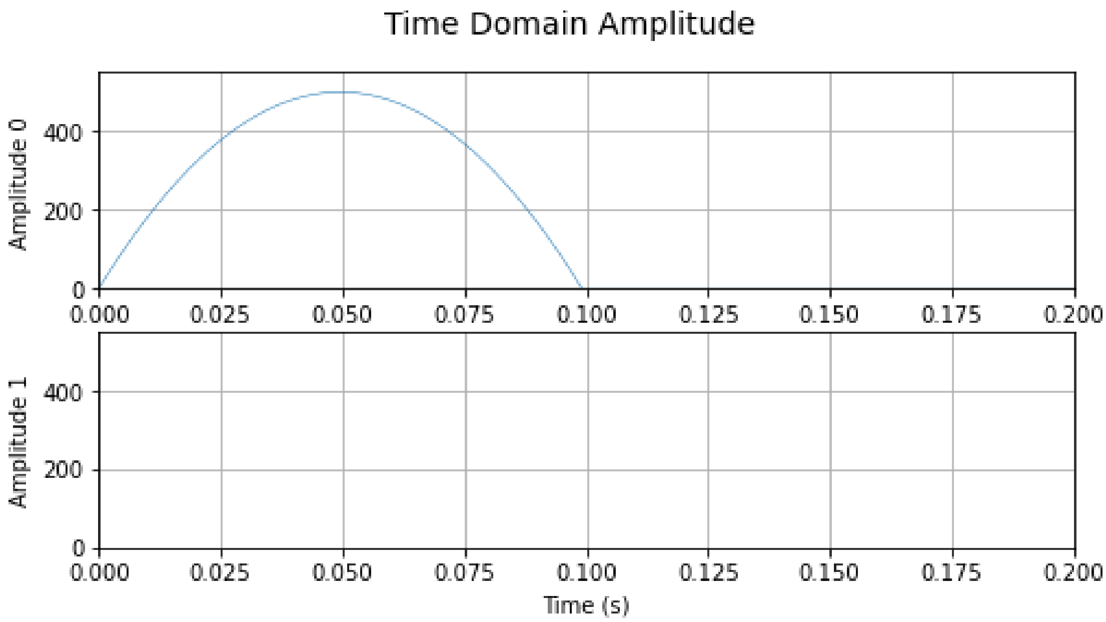
1.3 Questão 2

No grau de liberdade $u_1(t)$ do problema anterior é aplicada uma carga transiente, $F_1(t)$, dada pela função abaixo, com amplitude $F_0 = 500\text{N}$ e duração $T_\text{d} = 0.1\text{s}$. A variável τ representa o tempo adimensionalizado por T_d.

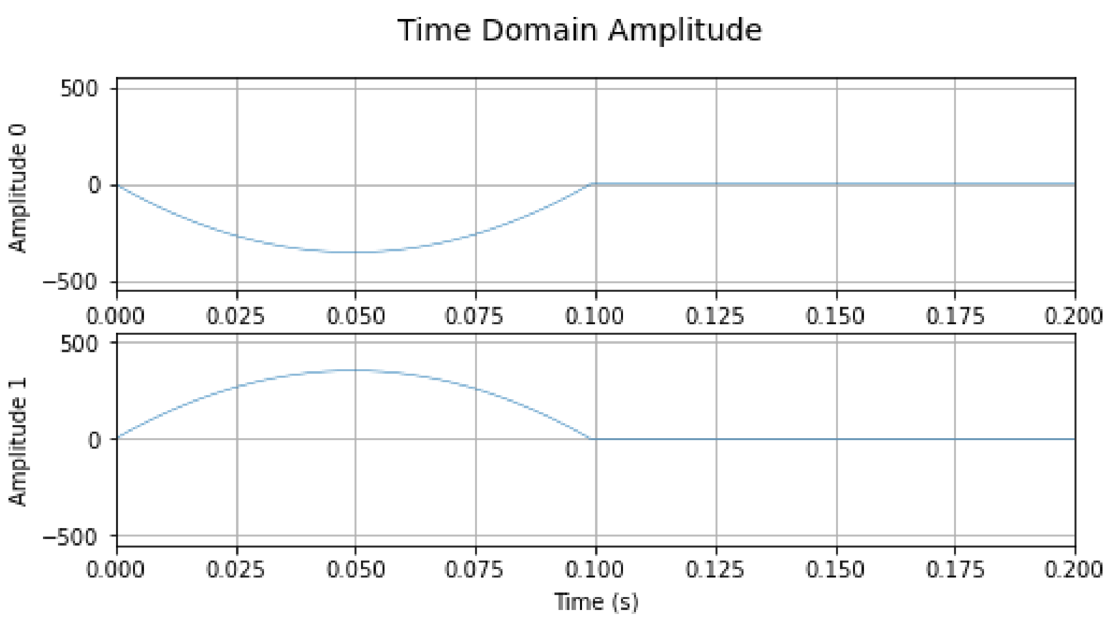
Desconsiderando a parcela estática da resposta (devida ao peso próprio), e considerando todos os modos de vibração, apresente o deslocamento $u_1(t)$ como uma função do tempo. Indique a amplitude e o instante no tempo em que o máximo deslocamento é atingido.

Para resolver essa questão, utilizaremos a MRPy e a integral de Duhamel, modelando a carga através de um vetor:

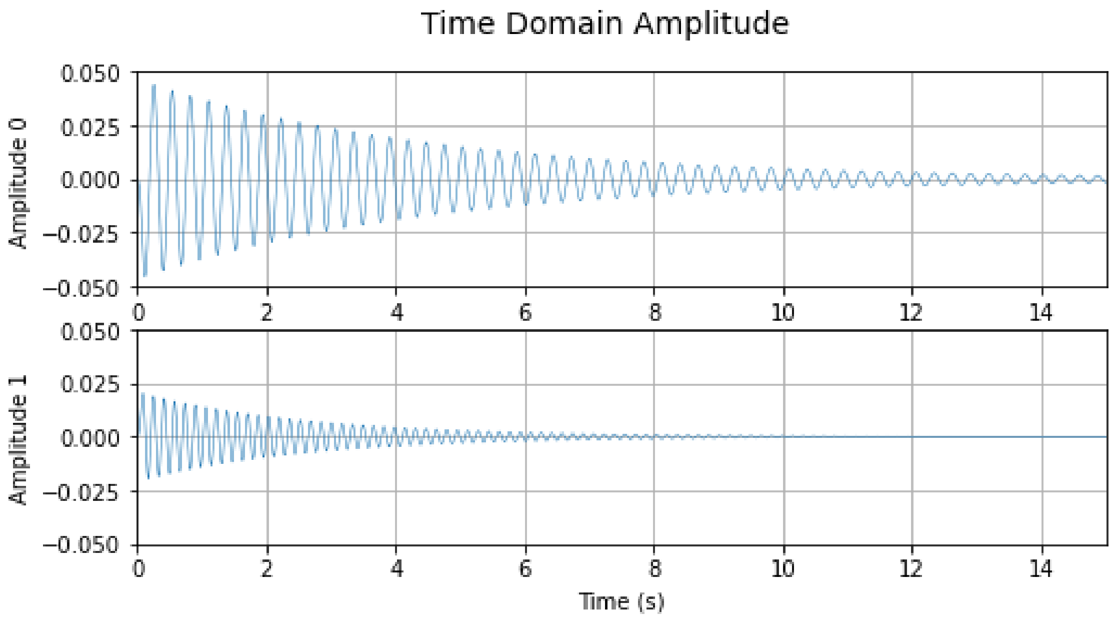
```
Cargas aplicadas em cada grau de liberdade:
```



Definição do Carregamento Modal:

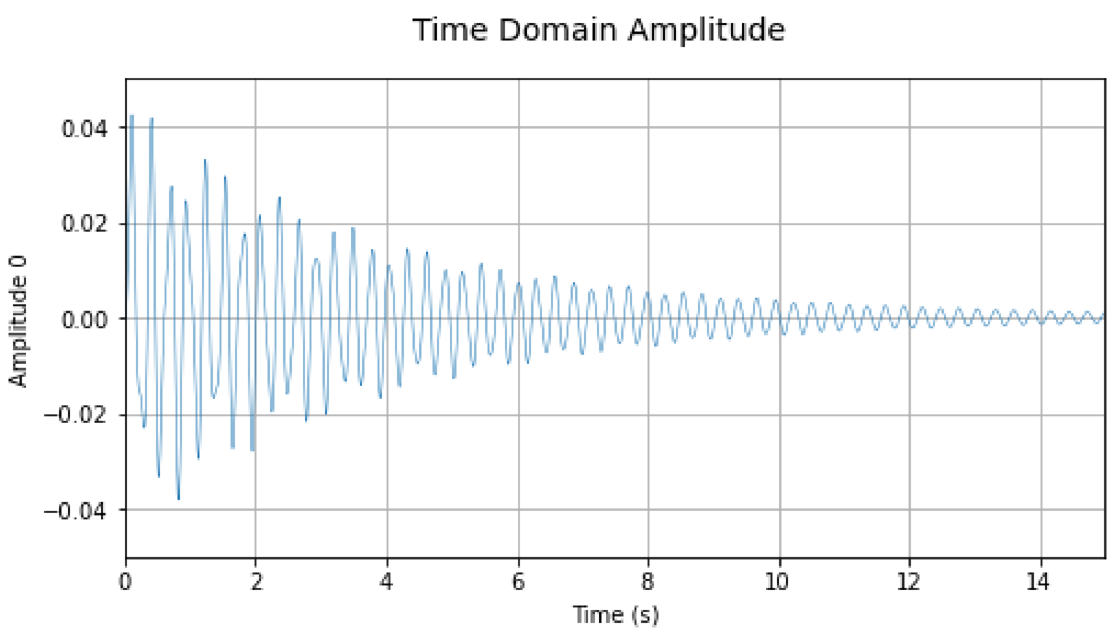


Deslocamentos Modais:

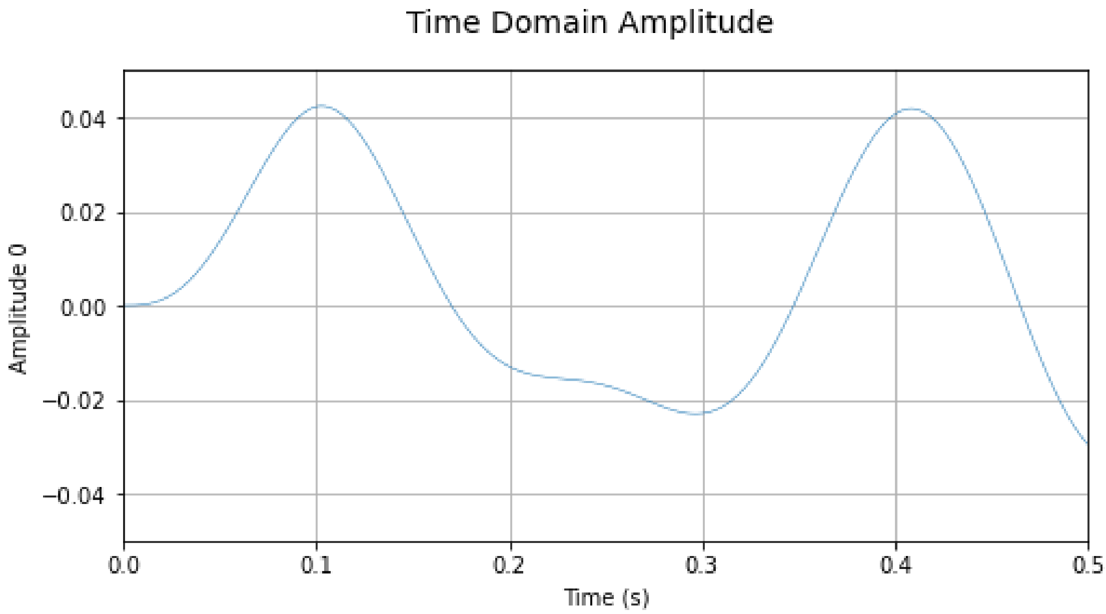


Deslocamentos do grau de liberdade u_1:

```
Deslocamento máximo: 42.41 mm
Instante de tempo: 0.10 s
```



Aproximando o gráfico na região inicial:



1.4 Questão 3

Todos os elementos do pórtico elástico linear tem rigidez à flexão $EI = 6.5\text{kNm}^2$ e massa por unidade de comprimento $\mu = 20\text{kg/m}$. Viga e colunas tem o mesmo comprimento $L = 4\text{m}$. O amortecimento do sistema é $\zeta = 0.01$ (razão do crítico). A aceleração da gravidade no local é $g = 9.81\text{m/s}^2$.

Proponha funções adequadas para representar uma geometria deformada que aproxime o primeiro modo de vibração e estime a frequência fundamental de vibração livre através do quociente de Rayleigh. Lembre que as energias totais serão computadas somando-se a contribuição dos três elementos estruturais. *(Sugere-se o uso do software Ftool para o cálculo da energia interna de deformação.)*

Será feita aqui uma solução por aproximação.

- Pilares: Assumi para eles uma função de forma do tipo:

$$\varphi_p(x) = \frac{cos(\frac{x\pi}{3.5}) - 1}{1.90}$$

- Viga: função do tipo:

$$\varphi_v(x) = sin(\frac{x\pi}{2})$$

As funções foram escolhidas "no olho", pela deformada informada acima - sempre observando para que os deslocamentos nos nós superiores do pórtico sejam iguais a 1.

Assim, podemos calcular T_{ref} como:

$$T_{ref} = \frac{1}{2} \int_0^L (2\varphi_p(x)^2 + \varphi_v(x)^2) \mu dx$$

```
Energia cinética de referência: 59.80 J
```

Aplicando-se uma força de $1kN$ no topo do pórtico no Ftool, obtemos um deslocamento igual a $0,5909mm$.

Isso nos permite calcular a força necessária para um deslocamento unitário:

$$F = \frac{1000N * 1m}{0.0005909m} = 1692333N$$

E a energia potencial elástica através do trabalho das forças externas:

$$V = \frac{1692333N * 1m}{2} = 846166.5J$$

Assim, temos:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{V}{T_{ref}}} = \sqrt{\frac{846166.5}{59.80}} = 118.95rad/s$$

$$f = \frac{\omega_k}{2\pi} = 18.93Hz$$

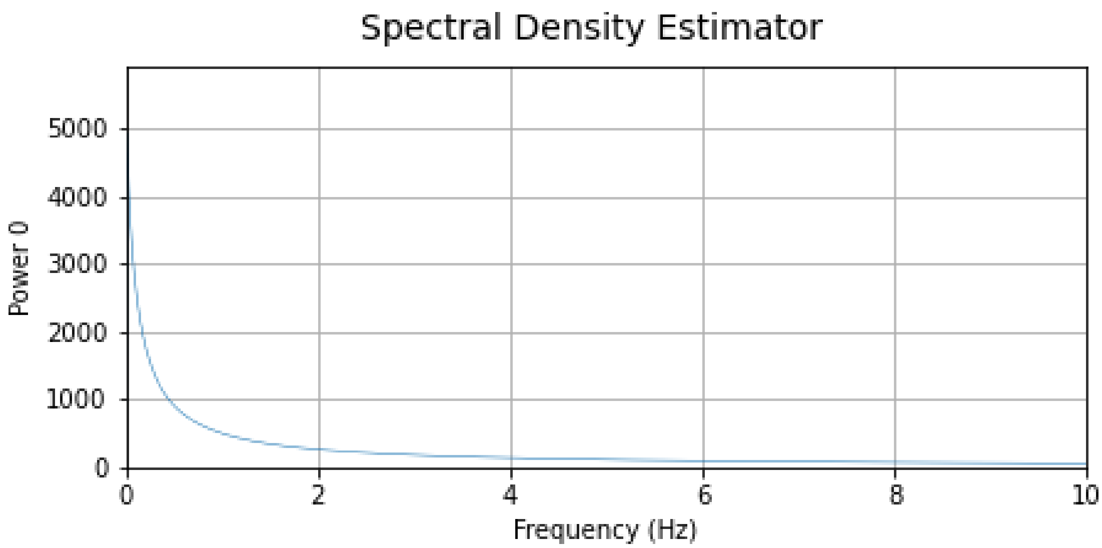
1.5 Questão 4

O topo do pórtico é submetido a uma força horizontal estocástica, $F(t)$, com densidade espectral $S_F(f)$, ilustrada abaixo. A força tem média zero e valor r.m.s. $\sigma_F = 50$N. A banda de frequências excitada é definida por $r = 10$ (eixo das frequências em hertz).

Estime o valor r.m.s. e o valor de pico do deslocamento horizontal $u(t)$ na extremidade esquerda da viga. Calcule a correspondente *força estática equivalente*.

Definindo o periodograma da carga através de uma função do python. Nesse caso, a função foi definida no intervalo de 0 a 10 Hz.

```
Valor r.m.s da força 50.0
```



Levando em conta apenas o primeiro modo de vibração da estrutura temos:

$$S_u(f) = |H(f)|^2 S_f(f)$$

$$S_u(f) = \frac{1}{\omega_n^4}[\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}] * \frac{50^2}{2ln(10)f}$$

sendo:

$$\beta = \frac{f}{f_n}$$

Para fazer essa operação a função $S_u(f)$ foi definida na HP Prime conforme acima,e a integral abaixo calculada:

$$\sigma_u^2 = \int_{0.1}^{10} S_u(f)df = 1.3365 * 10^{-5}$$

Valor r.m.s da resposta em deslocamento:

$$\sigma_u = \sqrt{1.3365 * 10^{-5}} = 3.656 * 10^{-3}m = 3.656mm$$

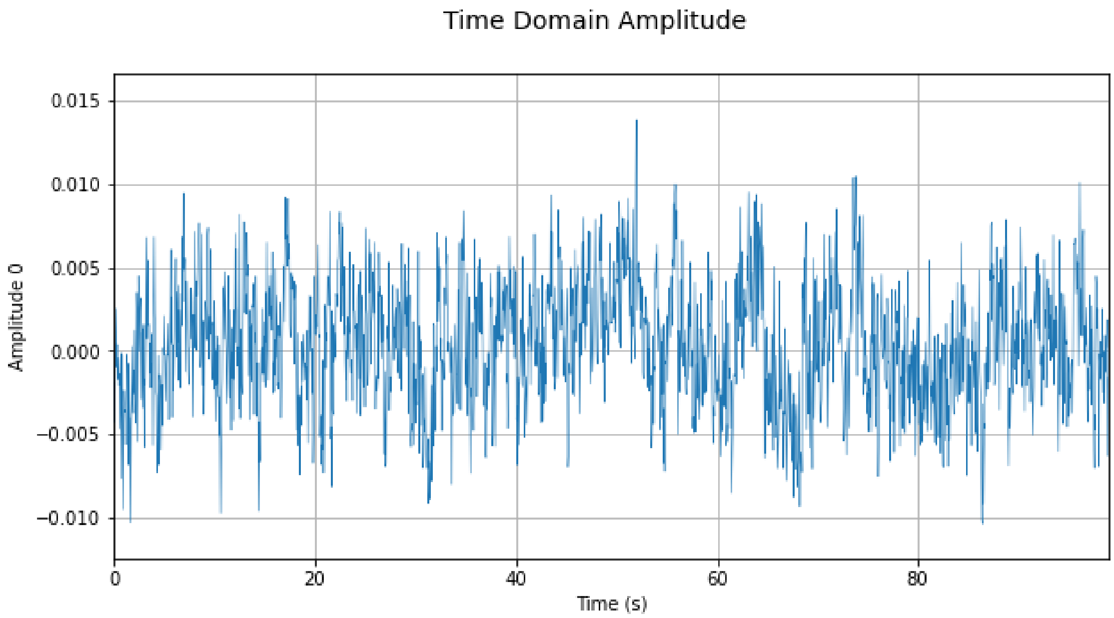
Para calcular o valor de pico, utilizarei a MRPy, gerando um gráfico de resposta do sistema a partir do espectro de resposta S_u:

Além disso, vou utilizar a MRPy para conferir a resposta do valor r.m.s do deslocamento:

```
Valor r.m.s da resposta em deslocamento: 3.668 mm
```

Gráfico da resposta do sistema em deslocamento:

```
Deslocamento máximo: 13.85mm
```



Esse valor pode variar de acordo com a série simulada pela MRPy, mas não se afasta muito do valor apresentado acima.

A força estática equivalente pode ser calculada através do coeficiente de mola encontrado na questão 3.

```
Força estática equivalente: 23446.03N
```