Uniwersytet Gdański
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Magia algebry liniowej

Autor:
Tomasz Kopka

Wkrocz w świat liczb...

11 grudnia 2014

Spis treści

1 Liczby zespolone

1.1 Wstęp

1.1.1 Definicja

Liczby zespolone

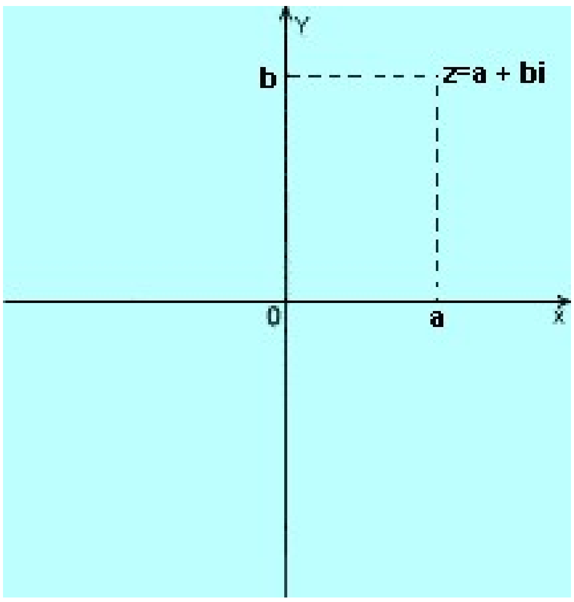
– liczby będące elementami rozszerzenia ciała liczb rzeczywistych o jednostkę urojoną i, tj. pierwiastek wielomianu $x^2 + 1$ (innymi słowy, jednostka urojona spełnia równanie $i^2 = -1$). Każda liczba zespolona z może być zapisana w postaci $z = a+bi$, gdzie a, b są pewnymi liczbami rzeczywistymi, nazywanymi odpowiednio częścią rzeczywistą oraz częścią liczby z. [1]

1.1.2 Postacie zapisu

Postać algebraiczna

Każdą liczbę zespoloną z można zapisać w postaci

$$z = a + bi \tag{1}$$



Rysunek 1: Wykres $a + ib = z$

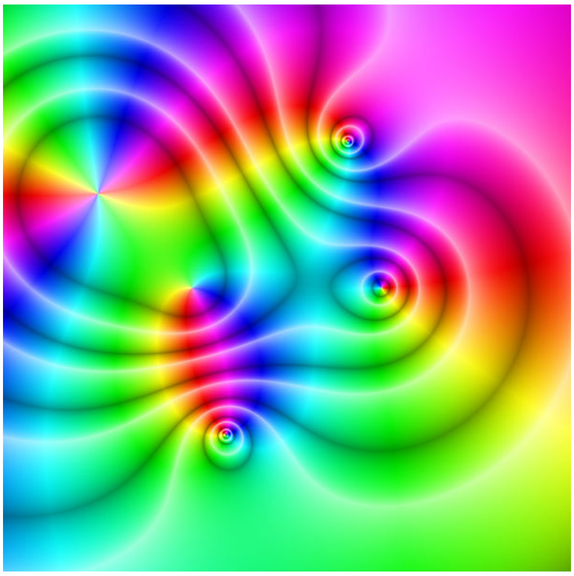
, gdzie a i b są pewnymi liczbami rzeczywistymi oraz i jest tzw. jednostką urojoną, tj. i jest jednym z dwóch elementów zbioru liczb zespolonych, spełniającym warunek $i^2 = -1$ (drugim elementem jest $-i$). Spotyka się czasami zapis $i = \sqrt{-1}$, który nie jest formalnie poprawny ze względu na fakt, że również $(-i)^2 = -1$, jest on jednak uznawany za pewien skrót myślowy i powszechnie akceptowany.

Postać $z = a + bi$ nazywana jest postacią algebraiczną (albo kanoniczną) liczby zespolonej z.
Dla liczby $z = a + bi$ definiuje się jej

część rzeczywistą (łac. pars realis) jako re $z = a$ (inne oznaczenia: $\Re z$, Re z),
część urojoną (łac. pars imaginaria) jako im $z = b$ (inne oznaczenia: $\Im z$, Im z).

Przykładowo liczba $7 - 5i$ jest liczbą zespoloną, której część rzeczywista wynosi 7, a część urojona -5. Liczby rzeczywiste są utożsamiane z liczbami zespolonymi o części urojonej równej 0.

Liczby postaci $z = 0 + bi$ nazywa się liczbami urojonymi.



Rysunek 2: Wykres

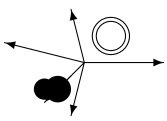
$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x - 2 - i)^2}{(x^2 + 2 + 2i)} \tag{2}$$

1.2 Zadania:

Zadanie 1.

Udowodnij następujące własnosci dzia'n w zbiorze liczb zespolonych:

a) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,
b) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$,
c) $\forall z \in \mathbb{C} : z + 0 = z$, gdzie $0 \overset{df}{=} (0, 0)$,
d) $\forall z \in \mathbb{C} : z - z = 0$,



2 Macierze

2.1 Wstęp

2.1.1 Definicja

Macierze

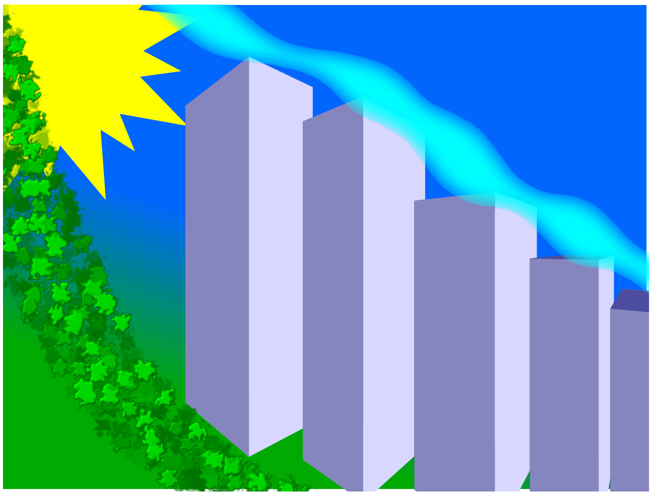
Macierz – w matematyce układ liczb, symboli lub wyrażeń zapisanych w postaci prostokątnej tablicy. Choć słowo „macierz” oznacza najczęściej macierz dwuwskaźnikową, to możliwe jest rozpatrywanie macierzy wielowskaźnikowych (zob. notacja wielowskaźnikowa). Macierze jednowskaźnikowe nazywa się często wektorami wierszowymi lub kolumnowymi, co wynika z zastosowań macierzy w algebrze liniowej. W informatyce macierze modeluje się zwykle za pomocą (najczęściej dwuwymiarowych) tablic. [2]

2.2 Wzory

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3}$$

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \tag{4}$$



Bibliografia

[1] mgr Tomasz Zabawa. Matematyka - liczby zespolone. http://wms.mat.agh.edu.pl/~zrr/zespolone/index.htm.

[2] Grzegorz Banaszak and Wojciech Gajda. *Elementy algebry liniowej*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1 edition, 2002.