

собие может быть использовано студентами и другими лицами, изучающими математическую физику, для самостоятельной работы.

Данное пособие следует рассматривать как введение в практикум по математической физике. Для более глубокого изучения предмета можно обратиться, например, к [1], [3], [9], [11].

Авторы.

Глава I

ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Задачей Штурма — Лиувилля принято называть задачу о нахождении нетривиальных (ненулевых) решений однородного дифференциального уравнения вида

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [\lambda r(x) - q(x)] y = 0$$

при однородных граничных условиях. Функции $p(x)$, $r(x)$ и $q(x)$ известны, λ — параметр.

Те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи Штурма — Лиувилля, называются собственными значениями или собственными числами, а сами нетривиальные решения — собственными функциями задачи. Совокупность собственных значений называется спектром.

1. Найти собственные значения и собственные функции для уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$

если x меняется в промежутке $0 < x < l$ при следующих граничных условиях:

- а) $y|_{x=0} = 0, y|_{x=l} = 0;$
- б) $y|_{x=0} = 0, \frac{dy}{dx}|_{x=l} = 0;$
- в) $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0, y|_{x=l} = 0;$
- г) $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0, \frac{dy}{dx}|_{x=l} = 0;$
- д) $y|_{x=0} = 0, \frac{dy}{dx} + hy|_{x=l} = 0;$
- е) $-\frac{dy}{dx} + hy|_{x=0} = 0, y|_{x=l} = 0;$
- ж) $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0, \frac{dy}{dx} + hy|_{x=l} = 0;$

собие может быть использовано студентами и другими лицами, изучающими математическую физику, для самостоятельной работы.

Данное пособие следует рассматривать как введение в практикум по математической физике. Для более глубокого изучения предмета можно обратиться, например, к [1], [3], [9], [11].

Авторы.

Глава I

ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Задачей Штурма — Лиувилля принято называть задачу о нахождении нетривиальных (ненулевых) решений однородного дифференциального уравнения вида

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [\lambda r(x) - q(x)] y = 0$$

при однородных граничных условиях. Функции $p(x)$, $r(x)$ и $q(x)$ известны, λ — параметр.

Те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи Штурма — Лиувилля, называются собственными значениями или собственными числами, а сами нетривиальные решения — собственными функциями задачи. Совокупность собственных значений называется спектром.

1. Найти собственные значения и собственные функции для уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$

если x меняется в промежутке $0 < x < l$ при следующих граничных условиях:

- а) $y|_{x=0} = 0, y|_{x=l} = 0;$
- б) $y|_{x=0} = 0, \frac{dy}{dx}|_{x=l} = 0;$
- в) $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0, y|_{x=l} = 0;$
- г) $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0, \frac{dy}{dx}|_{x=l} = 0;$
- д) $y|_{x=0} = 0, \frac{dy}{dx} + hy|_{x=l} = 0;$
- е) $-\frac{dy}{dx} + hy|_{x=0} = 0, y|_{x=l} = 0;$
- ж) $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0, \frac{dy}{dx} + hy|_{x=l} = 0;$

$$з) -\frac{dy}{dx} + hy|_{x=0} = 0, \quad \frac{dy}{dx}|_{x=l} = 0;$$

$$и) -\frac{dy}{dx} + hy|_{x=0} = 0, \quad \frac{dy}{dx} + hy|_{x=l} = 0;$$

$$к) y|_{x=0} = y|_{x=l}, \quad \frac{dy}{dx}|_{x=0} = \frac{dy}{dx}|_{x=l}.$$

Ответ:

$$а) \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad y_n = C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n=1, 2, 3, \dots);$$

$$б) \lambda_n = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}, \quad y_n = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \quad (n=0, 1, 2, \dots);$$

$$в) \lambda_n = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}, \quad y_n = C_n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \quad (n=0, 1, 2, \dots);$$

$$г) \lambda_0 = 0, \quad y_0 = C_0 = \text{const},$$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad y_n = C_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (n=1, 2, 3, \dots);$$

$$д) \lambda_n = -\frac{\gamma_n^2}{l^2}, \quad \text{где } \gamma_n \text{ — положительные корни уравнения } \operatorname{tg} \gamma = -\frac{\gamma}{hl}, \quad y_n = C_n \sin \frac{\gamma_n x}{l};$$

е) λ_n совпадают с собственными числами пункта «д»,

$$y_n = C_n \sin \frac{\gamma_n(l-x)}{l};$$

$$ж) \lambda_n = -\frac{\gamma_n^2}{l^2}, \quad \text{где } \gamma_n \text{ — положительные корни уравнения } \operatorname{tg} \gamma = \frac{hl}{\gamma}, \quad y_n = C_n \cos \frac{\gamma_n x}{l};$$

з) λ_n совпадают с собственными числами пункта «ж»,

$$y_n = C_n \cos \frac{\gamma_n(l-x)}{l};$$

и) в этом случае спектр состоит из двух независимых наборов собственных чисел $\lambda_n = \left(\frac{2\gamma_n}{l}\right)^2$, где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{2\gamma}{hl}$, $y_n = C_n \sin \frac{\gamma_n(l-2x)}{l}$

и $\lambda_k = \left(\frac{2\gamma_k}{l}\right)^2$, где γ_k — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \frac{hl}{2\gamma}$, $y_k = D_k \cos \frac{\gamma_k(l-2x)}{l}$;

$$к) \lambda_0 = 0, \quad y_0 = C_0 = \text{const},$$

$$\lambda_n = \frac{4n^2\pi^2}{l^2}, \quad y_n = C_n \cos \frac{2n\pi x}{l} + D_n \sin \frac{2n\pi x}{l} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Здесь C_n и D_n — независимые произвольные постоянные; таким образом, одному собственному числу соответствуют две линейно независимые собственные функции.

2. Найти собственные значения и собственные функции для уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$

если x меняется в промежутке $-l < x < l$ при следующих граничных условиях:

$$а) y|_{x=l} = 0, \quad y|_{x=-l} = 0;$$

$$б) \frac{dy}{dx}|_{x=l} = 0, \quad \frac{dy}{dx}|_{x=-l} = 0;$$

$$в) \frac{dy}{dx} + hy|_{x=l} = 0, \quad -\frac{dy}{dx} + hy|_{x=-l} = 0;$$

$$г) y|_{x=l} = y|_{x=-l}, \quad \frac{dy}{dx}|_{x=l} = \frac{dy}{dx}|_{x=-l}.$$

Ответ:

$$а) \lambda_n = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}, \quad y_n = C_n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad y_k = D_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (k=1, 2, 3, \dots);$$

$$б) \lambda_0 = 0, \quad y_0 = C_0 = \text{const},$$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad y_n = C_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4l^2}, \quad y_k = D_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \quad (k=0, 1, 2, \dots);$$

$$в) \lambda_n = -\frac{\gamma_n^2}{l^2}, \quad \text{где } \gamma_n \text{ — положительные корни уравнения } \operatorname{tg} \gamma = -\frac{\gamma}{hl}, \quad y_n = C_n \sin \frac{\gamma_n x}{l},$$

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{\gamma}{hl}, \quad y_n = C_n \sin \frac{\gamma_n x}{l},$$

$$\lambda_k = -\frac{\gamma_k^2}{l^2}, \quad \text{где } \gamma_k \text{ — положительные корни уравнения } \operatorname{tg} \gamma = \frac{hl}{\gamma}, \quad y_k = D_k \cos \frac{\gamma_k x}{l};$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{hl}{\gamma}, \quad y_k = D_k \cos \frac{\gamma_k x}{l};$$

$$г) \lambda_0 = 0, \quad y_0 = C_0 = \text{const},$$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad y_n = C_n \cos \frac{n\pi x}{l} + D_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

3. Найти собственные значения для уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda r(x) y = 0 \quad (a < x < b)$$

при граничных условиях:

$$а) y|_{x=a} = 0, \quad y|_{x=b} = 0,$$

$$б) \frac{dy}{dx}|_{x=a} = 0, \quad \frac{dy}{dx}|_{x=b} = 0,$$

для следующих частных случаев:

1) $p(x) = x, \quad r(x) = \frac{1}{x};$

2) $p(x) = x^2, \quad r(x) = x^2;$

3) $p(x) = x, \quad r(x) = x.$

Ответ:

1) Для уравнения $\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda \frac{1}{x} y = 0;$

а) $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{\left(\ln \frac{b}{a} \right)^2}, \quad y_n = C_n \sin \frac{n \pi \ln \frac{x}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \quad (n = 1, 2, \dots);$

б) $\lambda_0 = 0, \quad y_0 = C_0 = \text{const},$

$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{\left(\ln \frac{b}{a} \right)^2}, \quad y_n = C_n \cos \frac{n \pi \ln \frac{x}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$

2) Для уравнения $\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda x^2 y = 0;$

а) $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{(b-a)^2}, \quad y_n = \frac{C_n}{x} \sin \frac{n \pi (b-x)}{(b-a)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$

б) $\lambda_0 = 0, \quad y_0 = C_0 = \text{const},$

$\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{(b-a)^2},$ где γ_n — положительные корни уравнения

$\text{tg } \gamma = \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma^2 ab}{(b-a)^2}}, \quad y_n = C_n \frac{1}{x} \left[a \gamma_n \cos \gamma_n \frac{x-a}{b-a} + \right.$
 $\left. + (b-a) \sin \gamma_n \frac{x-a}{b-a} \right].$

3) Для уравнения $\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0;$

а) $\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{b^2}, \quad y_n = C_n R_n(\gamma_n, x),$

где

$R(\gamma, x) = J_0 \left(\gamma \frac{x}{b} \right) Y_0(\gamma) - J_0(\gamma) Y_0 \left(\gamma \frac{x}{b} \right),$

γ_n — положительные корни уравнения $R(\gamma, a) = 0;$

б) $\lambda_0 = 0, \quad y_0 = C_0 = \text{const},$

$\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{b^2}, \quad y_n = C_n Z_n(\gamma_n, x),$

где

$Z(\gamma, x) = J_0 \left(\gamma \frac{x}{b} \right) Y_1(\gamma) - J_1(\gamma) Y_0 \left(\gamma \frac{x}{b} \right),$

γ_n — положительные корни уравнения $\frac{dZ}{dx} \Big|_{x=a} = 0.$

4. Найти собственные числа и собственные функции для уравнения

$y^{IV} - \lambda y = 0,$

если x меняется в промежутке $0 < x < l$ при следующих граничных условиях:

а) $y|_{x=0} = 0, \quad y''|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=l} = 0, \quad y''|_{x=l} = 0;$

б) $y''|_{x=0} = 0, \quad y'''|_{x=0} = 0, \quad y''|_{x=l} = 0, \quad y'''|_{x=l} = 0;$

в) $y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=l} = 0, \quad y'|_{x=l} = 0;$

г) $y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 0, \quad y''|_{x=l} = 0, \quad y'''|_{x=l} = 0;$

д) $y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=l} = 0, \quad y''|_{x=l} = 0;$

е) $y''|_{x=0} = 0, \quad y'''|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=l} = 0, \quad y''|_{x=l} = 0.$

Ответ:

а) $\lambda_n = \frac{n^4 \pi^4}{l^4}, \quad y_n = C_n \sin \frac{n \pi x}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$

б) $\lambda_0 = 0, \quad y_0 = C_0 x + D_0,$

$\lambda_n = \frac{\gamma_n^4}{l^4},$ где γ_n — положительные корни уравнения

$\text{ch } \gamma \cos \gamma = 1,$

$y_n = C_n \left[(\text{ch } \gamma_n - \cos \gamma_n) \left(\text{sh } \frac{\gamma_n x}{l} + \sin \frac{\gamma_n x}{l} \right) - \right.$
 $\left. - (\text{sh } \gamma_n - \sin \gamma_n) \left(\text{ch } \frac{\gamma_n x}{l} + \cos \frac{\gamma_n x}{l} \right) \right];$

в) $\lambda_n = \frac{\gamma_n^4}{l^4},$ где γ_n — положительные корни уравнения

$\text{ch } \gamma \cos \gamma = 1,$

$y_n = C_n \left[(\text{ch } \gamma_n - \cos \gamma_n) \left(\text{sh } \frac{\gamma_n x}{l} - \sin \frac{\gamma_n x}{l} \right) - \right.$
 $\left. - (\text{sh } \gamma_n - \sin \gamma_n) \left(\text{ch } \frac{\gamma_n x}{l} - \cos \frac{\gamma_n x}{l} \right) \right];$

г) $\lambda_n = \frac{\gamma_n^4}{l^4}$, где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{ch} \gamma \cos \gamma = -1$;

$$y_n = C_n \left[(\operatorname{ch} \gamma_n + \cos \gamma_n) \left(\operatorname{sh} \frac{\gamma_n x}{l} - \sin \frac{\gamma_n x}{l} \right) - (\operatorname{sh} \gamma_n + \sin \gamma_n) \left(\operatorname{ch} \frac{\gamma_n x}{l} - \cos \frac{\gamma_n x}{l} \right) \right];$$

д) $\lambda_n = \frac{\gamma_n^4}{l^4}$, где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{th} \gamma$,

$$y_n = C_n \left[(\operatorname{ch} \gamma_n + \cos \gamma_n) \left(\operatorname{sh} \frac{\gamma_n x}{l} - \sin \frac{\gamma_n x}{l} \right) - (\operatorname{sh} \gamma_n + \sin \gamma_n) \left(\operatorname{ch} \frac{\gamma_n x}{l} - \cos \frac{\gamma_n x}{l} \right) \right];$$

е) $\lambda_0 = 0$, $y_0 = C_0(1 - x/l)$; $\lambda_n = \frac{\gamma_n^4}{l^4}$, где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{th} \gamma$,

$$y_n = C_n \left[(\operatorname{ch} \gamma_n + \cos \gamma_n) \left(\operatorname{sh} \frac{\gamma_n x}{l} + \sin \frac{\gamma_n x}{l} \right) - (\operatorname{sh} \gamma_n + \sin \gamma_n) \left(\operatorname{ch} \frac{\gamma_n x}{l} + \cos \frac{\gamma_n x}{l} \right) \right];$$

5. Найти собственные числа и собственные функции для уравнения $y^{IV} - \lambda y = 0$, если x меняется в промежутке $-l < x < l$, при следующих граничных условиях:

а) $y|_{x=l} = 0$, $y''|_{x=l} = 0$, $y|_{x=-l} = 0$, $y''|_{x=-l} = 0$;

б) $y|_{x=l} = 0$, $y'|_{x=l} = 0$, $y|_{x=-l} = 0$, $y'|_{x=-l} = 0$;

в) $y''|_{x=l} = 0$, $y'''|_{x=l} = 0$, $y''|_{x=-l} = 0$, $y'''|_{x=-l} = 0$.

О т в е т:

а) $\lambda_n = \frac{(2n+1)^4 \pi^4}{16l^4}$, $y_n = C_n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$),

$$\lambda_k = \frac{k^4 \pi^4}{l^4}, y_k = D_k \sin \frac{k\pi x}{l} (k = 1, 2, 3, \dots);$$

б) $\lambda_n = \frac{\gamma_n^4}{l^4}$, где γ_n — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{th} \gamma, y_n = C_n \left(\cos \gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n \frac{x}{l} - \operatorname{ch} \gamma_n \cos \frac{\gamma_n x}{l} \right),$$

$$\lambda_k = \frac{\gamma_k^4}{l^4}, \text{ где } \gamma_k \text{ — положительные корни уравнения } \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{th} \gamma, y_k = D_k \left(\sin \gamma_k \operatorname{sh} \gamma_k \frac{x}{l} - \operatorname{sh} \gamma_k \sin \frac{\gamma_k x}{l} \right);$$

в) $\lambda_0 = 0$, $y_0 = C_0 x + D_0$,

$$\lambda_n = \frac{\gamma_n^4}{l^4}, \text{ где } \gamma_n \text{ — положительные корни уравнения } \operatorname{th} \gamma = -\operatorname{tg} \gamma,$$

$$y_n = C_n \left[\cos \gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n \frac{x}{l} + \operatorname{ch} \gamma_n \cos \gamma_n \frac{x}{l} \right],$$

$$\lambda_k = \frac{\gamma_k^4}{l^4}, \text{ где } \gamma_k \text{ — положительные корни уравнения } \operatorname{th} \gamma = \operatorname{tg} \gamma,$$

$$y_k = D_k \left[\sin \gamma_k \operatorname{sh} \gamma_k \frac{x}{l} + \operatorname{sh} \gamma_k \sin \gamma_k \frac{x}{l} \right].$$

6. Решить следующие сингулярные задачи Штурма — Лиувилля для уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda x^2 y = 0, \quad 0 < x < a$$

при условиях:

а) $y|_{x=a} = 0$, $y|_{x=0}$ — ограничено;

б) $\frac{dy}{dx}|_{x=a} = 0$, $y|_{x=0}$ — ограничено;

в) $\frac{dy}{dx} + hy|_{x=a} = 0$, $y|_{x=0}$ — ограничено.

О т в е т:

а) $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$, $y_n = \frac{C_n}{x} \sin \frac{n\pi x}{a}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$);

б) $\lambda_0 = 0$, $y_0 = C_0 = \operatorname{const}$,

$$\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{a^2}, \text{ где } \gamma_n \text{ — положительные корни уравнения } \operatorname{tg} \gamma = \gamma, y_n = \frac{C_n}{x} \sin \frac{\gamma_n x}{a};$$

в) $\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{a^2}$, где γ_n — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\gamma}{1 - ha},$$

$$y_n = \frac{C_n}{x} \sin \frac{\gamma_n x}{a}.$$

7. Решить следующие сингулярные задачи Штурма — Лиувилля для уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < a$$

при условиях:

а) $y|_{x=a} = 0$, $y|_{x=0}$ — ограничено;

б) $\frac{dy}{dx}|_{x=a} = 0$, $y|_{x=0}$ — ограничено;

в) $\frac{dy}{dx} + hy|_{x=a} = 0$, $y|_{x=0}$ — ограничено.

Ответ:

а) $\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{a^2}$, где γ_n — положительные корни уравнения

$$J_0(\gamma) = 0, \quad y_n = C_n J_0 \left(\frac{\gamma_n x}{a} \right);$$

б) $\lambda_0 = 0$, $y_0 = C_0 = \text{const}$, $\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{a^2}$, где γ_n — положительные корни уравнения $J_1(\gamma) = 0$, $y_n = C_n J_0 \left(\frac{\gamma_n x}{a} \right)$;

в) $\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{a^2}$, где γ_n — положительные корни уравнения $\gamma J_1(\gamma) = h a J_0(\gamma)$; $y_n = C_n J_0 \left(\frac{\gamma_n x}{a} \right)$.

8. Решить следующие сингулярные задачи Штурма — Лиувилля для уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [\lambda r(x) - q(x)] y = 0$$

при условиях:

а) $-1 < x < 1$, $p(x) = 1 - x^2$, $r(x) = 1$, $q(x) = 0$, $y|_{x=\pm 1}$ — ограничено;

б) $-1 < x < 1$, $p(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $r(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $q(x) = 0$, $y|_{x=\pm 1}$ — ограничено;

в) $0 < x < \infty$, $p(x) = x$, $r(x) = 1$, $q(x) = -\frac{x}{4}$, $y|_{x=0}$ — ограничено, $y|_{x \rightarrow \infty} = 0$;

г) $-\infty < x < \infty$, $p(x) = 1$, $r(x) = 1$, $q(x) = -x^2$, $y|_{x \rightarrow \pm \infty} = 0$.

Ответ:

а) $\lambda_n = n(n+1)$, $y_n = C_n P_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$),

$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ — n -й полином Лежандра;

б) $\lambda_n = n^2$, $y_n = C_n T_n(x) + D_n U_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$),

$$T_n = (-1)^n 2^n \frac{n!}{(2n)!} \sqrt{1 - x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}} = \cos(n \arccos x),$$

$$U_n(x) = (-1)^{n-1} 2^n n \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}} = \sin(n \arccos x) \text{ — полиномы Чебышева;}$$

в) $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$, $y_n = C_n e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$),

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \text{ — } n\text{-й полином Лагерра;}$$

г) $\lambda_n = 2n + 1$, $y_n = C_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$),

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \text{ — } n\text{-й полином Эрмита.}$$

9. Найти собственные функции для уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

при следующих условиях:

а) $y|_{x=0} = 0$, $y|_{x \rightarrow \infty}$ — ограничено;

б) $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0$, $y|_{x \rightarrow \infty}$ — ограничено;

в) $-\frac{dy}{dx} + hy|_{x=0} = 0$, $y|_{x \rightarrow \infty}$ — ограничено.

Ответ:

а) $\lambda = \nu^2$, $0 < \nu < \infty$, $y_\nu = C(\nu) \sin \nu x$;

б) $\lambda = \nu^2$, $0 \leq \nu < \infty$, $y_\nu = C(\nu) \cos \nu x$;

в) $\lambda = \nu^2$, $0 < \nu < \infty$, $y_\nu = C(\nu) (\nu \cos \nu x + h \sin \nu x)$.

10. Найти собственные функции для уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

при условии $y|_{x \rightarrow \pm \infty}$ — ограничено

Ответ:

$$\lambda = v^2, \quad 0 \leq v < \infty, \quad y_v = C(v) \sin vx + D(v) \cos vx,$$

$C(v), D(v)$ — произвольные функции от v .

11. Найти собственные функции уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda \frac{1}{x} y = 0$$

при следующих условиях:

а) $y|_{x=a} = 0, \quad y|_{x=0}$ — ограничено;

б) $\frac{dy}{dx}|_{x=a} = 0, \quad y|_{x=0}$ — ограничено.

Ответ:

а) $\lambda = v^2, \quad 0 < v < \infty, \quad y_v = C(v) \sin \left(v \ln \frac{x}{a} \right);$

б) $\lambda = v^2, \quad 0 \leq v < \infty, \quad y_v = C(v) \cos \left(v \ln \frac{x}{a} \right).$

12. Найти собственные функции уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0$$

при условиях:

$y|_{x=0}$ — ограничено, $y|_{x=\infty}$ — ограничено.

Ответ:

$$\lambda = v^2, \quad 0 \leq v < \infty, \quad y_v = C(v) J_0(vx).$$

Из приведенных задач видно, что спектр собственных значений может иметь различный характер. Так, совокупность собственных значений в задачах 1—8 образует дискретное множество. В этих случаях говорят, что задача Штурма — Лиувилля имеет дискретный спектр. В задачах 9—12 спектр собственных значений непрерывный.

Собственные функции задач 1—8, имеющих дискретный спектр собственных значений, обладают очень важным свойством — так называемой ортогональностью.

Пусть $a \leq x \leq b$. Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются ортогональными на промежутке $[a, b]$ с весом $r(x)$, если выполняется равенство

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x) r(x) dx = 0.$$

Покажем, что собственные функции задачи Штурма — Лиувилля, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны с весом $r(x)$.

Так как собственные функции являются частными решениями уравнения Штурма — Лиувилля при соответствующем собственном значении параметра λ , то для каждого λ_n и $y_n(x)$ выражение

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] + [\lambda_n r(x) - q(x)] y_n = 0$$

является тождеством. Для другой пары, например λ_m и $y_m(x)$, получим аналогично

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] + [\lambda_m r(x) - q(x)] y_m = 0.$$

Если первое из написанных тождеств умножим на y_m , а второе — на y_n и вычтем одно из другого, то получим

$$(\lambda_n - \lambda_m) r(x) y_n(x) y_m(x) = y_n \frac{d}{dx} \left(p \frac{dy_m}{dx} \right) - y_m \frac{d}{dx} \left(p \frac{dy_n}{dx} \right).$$

Как нетрудно видеть, правая часть последнего равенства представляет собой полную производную. Поэтому

$$(\lambda_n - \lambda_m) r y_n y_m = \frac{d}{dx} \left[p \left(y_n \frac{dy_m}{dx} - y_m \frac{dy_n}{dx} \right) \right].$$

Если $a \leq x \leq b$, то после интегрирования по x от a до b получим

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b r y_n y_m dx = p \left(y_n \frac{dy_m}{dx} - y_m \frac{dy_n}{dx} \right) \Big|_a^b.$$

Если собственные функции при $x=a$ и $x=b$ удовлетворяют одному из условий: $y_k=0$ — условие I рода; $\frac{dy_k}{dx}=0$ — условие II рода; $-\frac{dy_k}{dx} \pm h y_k = 0$ — условие III рода, то правая часть последнего равенства есть нуль. Тогда при $\lambda_m \neq \lambda_n$ (разные собственные числа) выполняется соотношение

$$\int_a^b r(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0.$$

Если, как в задачах 6—8, на одном или обоих концах промежутка заданы условия ограниченности, то ортогональность сохраняется для уравнений, в которых функция $p(x)$ на этих концах обращается в нуль. Для указанных задач 6—8 последнее условие выполняется. Например, в задаче 6 $p(x) = x^2$ обращается в нуль при $x=0$, а в задаче 8 $p(x) = 1 - x^2$ обращается в нуль на обоих концах $x = \pm 1$.

Для так называемых условий периодичности (см. задачи 1, к и 2, г) ортогональность сохранится, если $p(a) = p(b)$.

Для указанных задач (1 и 2) это условие, очевидно, выполнено, так как $p(x) \equiv 1$.

Таким образом, во всех указанных случаях собственные функции образуют системы ортогональных функций с весом, равным $r(x)$. Пусть теперь задана некоторая функция $f(x)$ в промежутке $[a, b]$. Разложим ее в ряд по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$f(x) \sim \sum_{(k)} C_k y_k(x).$$

Ряды такого вида получили название рядов Фурье. Формально коэффициенты ряда Фурье можно найти следующим несложным приемом. Умножим левую и правую части ряда на произведение $y_n(x)r(x)$ и проинтегрируем по x от a до b . После почленного интегрирования ряда в правой части остается только n -й член, так как все остальные члены ряда будут содержать множители $\int_a^b y_n y_k r dx$, равные нулю в силу ортогональности собственных функций:

$$\int_a^b f(x) r(x) y_n(x) dx = C_n \int_a^b y_n^2(x) r(x) dx$$

или

$$C_n = \frac{\int_a^b f(x) r(x) y_n(x) dx}{\int_a^b y_n^2(x) r(x) dx}.$$

Следует подчеркнуть, что указанные операции были проделаны формально. Они будут справедливы не для всякой функции $f(x)$. Этому вопросу посвящена обширная литература (см., например, [10]). Укажем здесь лишь наиболее важные результаты.

1. Если функция $f(x)$ непрерывна и ее ряд Фурье равномерно сходится, то сумма ряда совпадает с функцией $f(x)$.

2. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т. е. является кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной (последнее означает, что она имеет конечное число максимумов и минимумов), то сумма ряда Фурье внутри промежутка разложения равна

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

а на краях

$$S(a) = S(b) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

В этом случае сумма ряда Фурье во всех точках непрерывности функции $f(x)$, кроме, может быть, концов, совпадает со значением этой функции. Сам ряд Фурье может оказаться неравномерно сходящимся.

Собственные функции задач Штурма — Лиувилля с непрерывным спектром собственных значений дают возможность представлять заданные функции в виде интегральных разложений.

Наиболее часто в математической физике встречаются следующие интегральные разложения.

Интеграл Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(v) e^{-ivx} dv \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\text{где } A(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ivx} dx.$$

Для справедливости указанной формулы достаточно, если:

а) $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле в любом конечном промежутке;

б) интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ сходится.

В вещественной форме интеграл Фурье записывается так:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [B(v) \cos vx + C(v) \sin vx] dv,$$

$$\text{где } B(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos vxdx; \quad C(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin vxdx.$$

Для функций, заданных в промежутке $(0, +\infty)$, могут быть получены разложения:

$$1) f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(v) \cos vxdv \quad \text{— косинус-интеграл Фурье,}$$

$$B(v) = \int_0^{\infty} f(x) \cos vxdx;$$

$$2) f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} C(v) \sin vxdv \quad \text{— синус-интеграл Фурье,}$$

$$C(v) = \int_0^{\infty} f(x) \sin vxdx;$$

* $A(v)$ называется интегральным преобразованием Фурье функции $f(x)$.

** $B(v)$ и $C(v)$ называются косинус-преобразованием Фурье и синус-преобразованием Фурье функции $f(x)$ соответственно.

$$3) f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} D(\nu) \frac{\nu \cos \nu x + h \sin \nu x}{\sqrt{\nu^2 + h^2}} d\nu,$$

$$D(\nu) = \int_0^{\infty} f(x) \frac{\nu \cos \nu x + h \sin \nu x}{\sqrt{\nu^2 + h^2}} dx, \quad h \geq 0.$$

Интеграл Ханкеля

$$f(x) = \int_0^{\infty} \nu M(\nu) J_{\mu}(\nu x) d\nu \quad (0 < x < +\infty).$$

$$M(\nu)^* = \int_0^{\infty} x f(x) J_{\mu}(\nu x) dx \quad \left(\mu > -\frac{1}{2}\right).$$

Для справедливости указанной формулы достаточно, если
а) $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле в любом конечном промежутке;

б) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} |f(x)| dx$ сходится.

13. Разложить в ряды Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y|_{x=-l} = y|_{x=l}, \quad y'|_{x=l} = y'|_{x=-l}$$

следующие функции:

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = \begin{cases} 0 & -l \leq x \leq 0; \\ x^2 & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$

Ответ:

а) $x^2 = \frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{l};$

б) $f(x) = \frac{l^2}{6} + \frac{2l^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{l} +$
 $+ \frac{l^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \left(\frac{2}{n^2 \pi^2} - 1 \right) - \frac{2}{n^2 \pi^2} \right] \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n}.$

* $M(\nu)$ называется интегральным преобразованием Ханкеля функции $f(x)$.

14. Разложить в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=l} = 0$$

функцию

$$f(x) = x^2.$$

Ответ:

$$x^2 = \frac{2l^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \left(\frac{2}{n^2 \pi^2} - 1 \right) - \frac{2}{n^2 \pi^2} \right] \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n}.$$

15. Разложить в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$y'' + \lambda y = 0, \quad -y' + hy|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=a} = 0$$

линейную функцию

$$f(x) = 1 + cx.$$

Ответ:

$$1 + cx = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + ca - \left(1 - \frac{c}{h}\right) \cos \gamma_n}{2\gamma_n - \sin 2\gamma_n} \sin \gamma_n \left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{1}{ha}$.

16. Разложить в ряды Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda \frac{1}{x} y = 0, \quad y|_{x=a} = 0, \quad y|_{x=b} = 0$$

следующие функции: а) $f(x) = 1$; б) $f(x) = x$.

Ответ:

а) $1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{x}{a};$

б) $x = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{a - (-1)^n b}{\ln^2 \frac{b}{a} + n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi \ln \frac{x}{a}}{\ln \frac{b}{a}}.$

17. Разложить в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda x^2 y = 0, \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} = 0, \quad y \Big|_{x=0} \text{ — ограничено}$$

функцию $f(x) = x^2$.

Ответ:

$$x^2 = \frac{3a^2}{5} + \frac{4a^3}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \frac{x}{a}}{\gamma_n^2 \sin \gamma_n},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \gamma$.

18. Разложить в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda x^2 y = 0, \quad \frac{dy}{dx} + hy \Big|_{x=a} = 0, \quad y \Big|_{x=0} \text{ — ограничено}$$

функцию $f(x) = c^2 - x^2$.

Ответ:

$$c^2 - x^2 = \frac{2a^2}{(1-ha)x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^2 [h(c^2 - a^2) - 2a] + 6a^2 h}{\gamma_n^3 \left(1 - \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right)} \cos \gamma_n \sin \frac{\gamma_n x}{a},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\gamma}{1-ha}$.

19. Разложить в ряды по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля*

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0, \quad y \Big|_{x=a} = 0, \quad y \Big|_{x=0} \text{ — ограничено}$$

следующие функции:

а) $f(x) = 1$; б) $f(x) = a^2 - x^2$; в) $f(x) = J_0(ax)$.

Ответ:

$$\text{а) } 1 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\gamma_n \frac{x}{a} \right)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)};$$

$$\text{б) } a^2 - x^2 = 8a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\gamma_n \frac{x}{a} \right)}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)};$$

* Ряды по этим функциям носят название рядов Фурье — Бесселя.

$$\text{в) } J_0(ax) = -2J_0(aa) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n J_0 \left(\gamma_n \frac{x}{a} \right)}{(a^2 a^2 - \gamma_n^2) J_1(\gamma_n)}.$$

Здесь γ — положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

20. Разложить в ряд по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля*

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0, \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} = 0, \quad y \Big|_{x=0} \text{ — ограничено}$$

функцию $f(x) = x^2$.

Ответ:

$$x^2 = \frac{a^2}{2} + 4a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\gamma_n \frac{x}{a} \right)}{\gamma_n^2 J_0(\gamma_n)},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $J_1(\gamma) = 0$.

21. Разложить в ряд по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля*

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0, \quad \frac{dy}{dx} + hy \Big|_{x=a} = 0, \quad y \Big|_{x=0} \text{ — ограничено}$$

функцию $f(x) = 1$.

Ответ:

$$1 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\gamma_n) J_0 \left(\gamma_n \frac{x}{a} \right)}{\gamma_n [J_0^2(\gamma_n) + J_1^2(\gamma_n)]},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $haJ_0(\gamma) = \gamma J_1(\gamma)$.

22. Получить интегральные разложения функции $f(x) = e^{-ax}$ ($0 < x < \infty$, $a > 0$) по собственным функциям задач 9.

Ответ:

$$\text{а) } e^{-ax} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\nu \sin \nu x}{\nu^2 + a^2} d\nu;$$

$$\text{б) } e^{-ax} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^2 + a^2} d\nu;$$

$$\text{в) } e^{-ax} = \frac{2(a+h)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\nu \cos \nu x + h \sin \nu x}{(\nu^2 + h^2)(\nu^2 + a^2)} \nu d\nu.$$

* Ряды в задачах 20 и 21 носят общее название рядов Дини.

23. Получить интегральные разложения функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0, & a < x < \infty, \end{cases}$$

по собственным функциям задач 9.

Ответ:

$$a) f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\nu a}{2}}{\nu} \sin \nu x d\nu;$$

$$б) f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \nu a}{\nu} \cos \nu x d\nu;$$

$$в) f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(\nu \cos \frac{\nu a}{2} + h \sin \frac{\nu a}{2} \right) \sin \nu a}{\nu (\nu^2 + h^2)} (\nu \cos \nu x + h \sin \nu x) d\nu.$$

24. Получить интегральное разложение по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0, \quad y|_{x=0} \text{ — ограничено, } y|_{x \rightarrow \infty} \text{ — ограничено}$$

следующих функций:

$$a) f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < a, \\ 0 & x > a; \end{cases}$$

$$б) f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < a, \\ 0 & x > a; \end{cases}$$

$$в) f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

Ответ:

$$a) f(x) = a \int_0^{\infty} J_1(\nu a) J_0(\nu x) d\nu;$$

$$б) f(x) = a \int_0^{\infty} \frac{a^2 \nu^2 J_1(\nu a) + 2a \nu J_0(\nu a) - 4J_1(\nu a)}{\nu^2} J_0(\nu x) d\nu;$$

$$в) \frac{e^{-x}}{x} = \int_0^{\infty} \frac{\nu J_0(\nu x)}{\sqrt{\nu^2 + 1}} d\nu.$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

25. Написать начальные и граничные условия в задаче о колебаниях струны с закрепленными концами ($0 \leq x \leq l$), которая в начальный момент времени $t=0$ оттянута в точке $x=c$ на заданную величину h и отпущена без начальной скорости.

Ответ:

$$u|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h(l-x)}{l-c}, & c \leq x \leq l, \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0;$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0.$$

26. В точке $x=c$ струны ($0 \leq x \leq l$) укреплен сосредоточенный грузик массой m_0 . Написать уравнения, определяющие процесс колебаний при произвольных начальных условиях, предполагая, что концы струны закреплены.

Ответ:

$$u = \begin{cases} u_1, & 0 \leq x \leq c, \\ u_2, & c \leq x \leq l, \end{cases} \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i=1, 2).$$

Граничные условия:

$$u_1|_{x=0} = u_2|_{x=l} = 0, \quad u_1|_{x=c} = u_2|_{x=c}, \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{x=c} = -\frac{m_0}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=c};$$

начальные условия:

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x).$$

27. Получить дифференциальное уравнение продольных колебаний тонкого стержня постоянного сечения S .

Сформулировать начальные и граничные условия задачи о продольных колебаниях стержня для следующих частных случаев:

а) стержень длиной l закреплен на конце $x=0$ и растянут силой F , приложенной к другому концу; в момент $t=0$ действие силы внезапно прекращается;

б) к концу $x=l$ стержня, находящегося в состоянии равновесия, прикладывается в момент $t=0$ растягивающая сила $F(t)$;

в) стержень, закрепленный в точке $x=0$, с грузом массой M_0 на свободном конце $x=l$ совершает продольные колебания при произвольных начальных условиях.

Ответ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}};$$

$$\text{а) } u|_{t=0} = \frac{Fx}{ES}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0;$$

$$\text{б) } u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = -\frac{F(t)}{ES};$$

$$\text{в) } u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x), \quad u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = -\frac{M_0}{ES} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{x=l}.$$

28. Получить дифференциальное уравнение поперечных колебаний тонкого стержня постоянного сечения S .

Сформулировать граничные условия, если конец стержня: а) заделан, б) подперт, в) свободен.

Ответ:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad b^2 = \frac{EJ}{\rho S},$$

где ρ — плотность; J — момент инерции сечения; E — модуль Юнга материала стержня.

На границе:

$$\text{а) } u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

$$\text{б) } u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{в) } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

29. Бесконечный цилиндрический проводник радиуса a , начальная температура которого совпадает с температурой окружающей среды, принимаемой за нуль, нагревается с момента $t=0$ постоянным током, выделяющим в единице объема проводника тепло Q . Дать математическую формулировку задачи теплопроводности, предполагая, что отдача тепла с поверхности проводника происходит: а) по закону Ньютона; б) через тепловую емкость.

Ответ:

Температура $T(r, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \left(\tau = \frac{kt}{c\rho} \right),$$

начальному условию $T|_{\tau=0} = 0$ и граничным условиям

$$\text{а) } \frac{\partial T}{\partial r} + hT|_{r=a} = 0;$$

$$\text{б) } \alpha \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=a} = 0, \quad \alpha = \frac{C_0}{2\pi a^2 c\rho},$$

где C_0 — тепловая емкость на единицу длины.

30. Однородный шар радиуса a в течение длительного времени нагревался источниками тепла, распределенными по его объему с постоянной плотностью. Написать уравнения, определяющие процесс остывания шара после выключения источников, считая, что теплоотдача с поверхности шара в окружающее пространство как во время нагрева, так и при охлаждении происходила по закону Ньютона.

Ответ:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} + hT|_{r=a} = 0,$$

$$T|_{\tau=0} = -\frac{Q}{6k} (a^2 - r^2) + \frac{Qa}{3kh}.$$

31. Две пластинки толщиной a_1 и a_2 , изготовленные из различных материалов и нагретые до температур T_1° и T_2° , в момент $t=0$ вводятся в соприкосновение одна с другой. Написать уравнения, определяющие процесс выравнивания температур, считая, что свободные грани теплоизолированы от окружающего пространства.

Ответ:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{c_1 \rho_1}{k_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad (0 < x < a_1);$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{c_2 \rho_2}{k_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad (a_1 < x < a_1 + a_2).$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad T_1|_{x=a_1} = T_2|_{x=a_1}, \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}|_{x=a_1} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}|_{x=a_1},$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x}|_{x=a_1+a_2} = 0;$$

начальные условия:

$$T_1|_{t=0} = T_1^\circ, \quad T_2|_{t=0} = T_2^\circ.$$

32. Пластика толщиной a нагрета до температуры T_0 . К грани $x=a$ присоединена тепловая емкость C_0 , а грань $x=0$ излучает тепло в окружающую среду по закону Ньютона. Написать уравнение задачи, начальные и граничные условия.

Ответ:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{c\rho}{k} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Граничные условия:

$$-\frac{\partial T}{\partial x} + hT|_{x=0} = 0, \quad -k \frac{\partial T}{\partial x}|_{x=a} = C_0 \frac{\partial T}{\partial t}|_{x=a};$$

начальное условие

$$T|_{t=0} = T_0,$$

где C_0 — тепловая емкость на единицу площади.

33. Сформулировать начальные и граничные условия в задаче распространения колебаний в линии, обладающей самоиндукцией L , емкостью C , сопротивлением R и утечкой G на единицу длины, для следующих частных случаев:

а) в момент $t=0$ на одном конце линии через сосредоточенное сопротивление R_0 включается постоянное напряжение E , а другой конец замкнут на катушку с самоиндукцией L_0 ;

б) в момент $t=0$ на одном конце линии через емкость C_0 включается постоянное напряжение E , а другой конец разомкнут;

в) один конец линии заземлен, а на другом конце, через катушку с самоиндукцией L_0 , включается постоянное напряжение E .

Ответ:

$$\text{а) } u|_{x=0} = E - R_0 I|_{x=0}, \quad u|_{x=l} = L_0 \frac{\partial I}{\partial t}|_{x=l};$$

$$\text{б) } u|_{x=0} = E - \frac{1}{C_0} \int_0^t I|_{x=0} dt, \quad I|_{x=l} = 0;$$

$$\text{в) } u|_{x=0} = E - L_0 \frac{\partial I}{\partial t}|_{x=0}, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad I|_{t=0} = 0.$$

Глава III

МЕТОД СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей главе рассматриваются задачи математической физики, описываемые уравнениями вида

$$\frac{1}{r(x)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x) u \right\} + M_y u = F(x, y) \quad (1)$$

$$(a < x < b, \quad c < y < d),$$

где

$$M_y = A \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B \frac{\partial}{\partial y} + C;$$

$A(y)$, $B(y)$, $C(y)$, $F(x, y)$ — заданные функции своих аргументов.

Граничные и начальные условия, накладываемые на искомую функцию $u(x, y)$, могут быть различными. Если уравнение (1) не имеет особых точек в промежутке $[a, b]$, включая его концы, то искомая функция $u(x, y)$ по переменной x обычно удовлетворяет граничным условиям вида

$$\left. \begin{aligned} \alpha_a \frac{du}{dx} \Big|_{x=a} + \beta_a u \Big|_{x=a} &= f_a(y), \\ \alpha_b \frac{du}{dx} \Big|_{x=b} + \beta_b u \Big|_{x=b} &= f_b(y), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где α_a , β_a , α_b и β_b — постоянные, часть которых может равняться нулю, или

$$u|_{x=a} = u|_{x=b}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b}. \quad (3)$$

Характер условий по второй переменной y определяется на всем промежутке функцией $A(y)$.

В случае, если $A > 0$, эти условия имеют вид граничных условий, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \gamma_c \frac{\partial u}{\partial y} + \delta_c u \Big|_{y=c} &= \varphi_c(x), \\ \gamma_d \frac{\partial u}{\partial y} + \delta_d u \Big|_{y=d} &= \varphi_d(x). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

При $A < 0$ и $A = 0$ переменная y играет роль времени и условия принимают вид

$$u|_{y=c} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=c} = g(x) \quad (5)$$

или

$$u|_{y=c} = f(x). \quad (6)$$

В случае, когда уравнение (1) имеет особенности на одном или обоих концах (сингулярные концы) промежутка (a, b) или промежуток (a, b) бесконечен, то граничное условие, относящееся к такому сингулярному концу или к концу $x = b \rightarrow \infty$, обычно заключается в требовании ограниченности решения на этом конце. На другом конце промежутка, если он не сингулярный, ставится обычное граничное условие.

Для поставленной задачи математической физики собственные функции $X(x)$ по переменной x будут решениями следующей задачи Штурма — Лиувилля:

$$\frac{1}{r(x)} \left\{ \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dX}{dx} \right] - q(x) X \right\} + \lambda X = 0 \quad (7)$$

при условиях

$$\alpha_a X' \big|_{x=a} + \beta_a X \big|_{x=a} = 0, \quad \alpha_b X' \big|_{x=b} + \beta_b X \big|_{x=b} = 0,$$

если искомая функция u удовлетворяет (2), и при условиях

$$X \big|_{x=a} = X \big|_{x=b}, \quad X' \big|_{x=a} = X' \big|_{x=b},$$

если u удовлетворяет (3).

Одним из важнейших методов решения рассматриваемых задач математической физики, имеющих дискретный спектр собственных значений, является метод собственных функций.

Основная идея этого метода заключается в том, что решение представляется в виде ряда по собственным функциям данной задачи

$$u(x, y) = \sum_{(\lambda_n)} Y_n(y) X_n(x)^*. \quad (8)$$

Если уравнение (1) и условия по переменной x однородны, то коэффициенты разложения $Y_n(y)$ в (8) можно найти методом разделения переменных (метод Фурье). Согласно методу Фурье частные решения уравнения (1) разыскиваются в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной

$$u(x, y) = X(x) Y(y).$$

Чтобы $u(x, y)$ удовлетворяло однородным условиям по переменной x , функции $X(x)$ должны быть собственными функциями данной задачи.

* В случае условия (3) функция $X_n(x)$ может иметь вид

$$X_n(x) = C_n X_n^{(1)}(x) + D_n X_n^{(2)}(x),$$

где $X_n^{(1)}$ и $X_n^{(2)}$ — линейно-независимые функции.

Для функции $Y_n(y)$, соответствующей собственной функции $X_n(x)$, после разделения переменных получаем уравнение

$$M_y(Y_n) - \lambda_n Y_n = 0,$$

где λ_n — n -е собственное число.

Общий интеграл последнего уравнения может быть записан в виде

$$Y_n(y) = C_n Y_n^{(1)}(y) + D_n Y_n^{(2)}(y),$$

где $Y_n^{(1)}(y)$ и $Y_n^{(2)}(y)$ — линейно-независимые решения уравнения.

Таким образом, мы получим совокупность частных решений вида

$$u_n(x, y) = Y_n(y) X_n(x).$$

Чтобы удовлетворить условиям по переменной y , составим суперпозицию в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{(\lambda_n)} [C_n Y_n^{(1)}(y) + D_n Y_n^{(2)}(y)] X_n(x)^*. \quad (8')$$

Коэффициенты этого ряда определяем, подставляя (8') в условия по переменной y , что приводит к разложению заданных функций в ряды по собственным функциям.

Задачи математической физики с неоднородными дифференциальными уравнениями и неоднородными граничными условиями могут быть решены методом Фурье, если с помощью того или иного приема они приводятся к однородным. К таким приемам относится, например, нахождение частного решения u^* уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2).

Поэтому, если $u(x, y)$ представить в виде $u(x, y) = u^* + u_1$, то $u_1(x, y)$ есть решение соответствующего однородного уравнения при однородных граничных условиях, т. е. может быть найдено методом Фурье.

В общем случае коэффициенты ряда (8) для неоднородных задач могут быть найдены методом Гринберга (метод конечных интегральных преобразований). Так как собственные функции $X_n(x)$ ортогональны, $Y_n(y)$ может быть представлена в виде

$$Y_n(y) = \frac{\bar{u}_n(y)}{N_n},$$

$$\text{где } \bar{u}_n(y) = \int_a^b u(x, y) X_n(x) r(x) dx; \quad N_n = \int_a^b X_n^2(x) r(x) dx.$$

* Если в операторе $M_y A(y) \equiv 0$, то решение $u(x, y)$ имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{(\lambda_n)} C_n Y_n(y) X_n(x).$$

Для определения $\bar{u}_n(y)$ построим дифференциальное уравнение, умножив все члены уравнения (1), на $r(x)X_n(x)$ и проинтегрировав по x в пределах от a до b . Это уравнение имеет вид

$$M_y(u_n) - \lambda_n u_n = f_n(y),$$

где функции $f_n(y)$ оказываются известными благодаря тому, что $X_n(x)$ есть собственные функции данной задачи.

В случае непрерывного спектра собственных значений искомое решение строится в форме разложения в интеграл по собственным функциям. Неизвестные функции от y в указанном разложении могут быть найдены методом разделения переменных в случае однородных задач, что приводит к разложению заданных функций в интегралы Фурье, Ханкеля, Вебера и т. д.

В случае неоднородных задач применяются методы интегральных преобразований (Фурье, Ханкеля, Вебера и т. д.).

34. Найти собственные частоты:

- а) продольных колебаний стержня длиной l ;
- б) поперечных колебаний струны с закрепленными концами ($0 \leq x \leq l$).

Ответ:

$$а) \omega_n = \frac{2n+1}{2l} \pi v, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$б) \omega_n = \frac{n\pi}{l} v, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

35. Определить собственные частоты радиальных колебаний круглой мембраны радиуса a .

Ответ:

$$\omega_n = \frac{v}{a} \gamma_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где γ_n — положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

36. Струна длиной l закреплена в точках $x=0$ и $x=l$. Найти форму вынужденных колебаний, вызванных силой $A \sin(\omega t + \varphi)$, если она:

- а) сосредоточена в точке $x=c$ струны ($0 < c < l$);
- б) равномерно распределена по длине струны.

Ответ:

$$а) u(x, t) = \frac{Av}{\omega T} \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\sin \frac{\omega l}{v}} \begin{cases} \sin \frac{\omega x}{v} \sin \frac{\omega(l-c)}{v}, & 0 \leq x \leq c; \\ \sin \frac{\omega c}{v} \sin \frac{\omega(l-x)}{v}, & c \leq x \leq l; \end{cases}$$

$$б) u(x, t) = \frac{2Av^2}{\omega^2 T l} \frac{\sin \frac{\omega x}{2V} \sin \frac{\omega(l-x)}{2V}}{\cos \frac{\omega l}{2V}} \sin(\omega t + \varphi).$$

37. Найти форму вынужденных продольных колебаний стержня, конец $x=0$ которого закреплен, а конец $x=l$ находится под действием силы $A \sin(\omega t + \varphi)$.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{Av}{ES\omega} \frac{\sin \frac{\omega x}{v}}{\cos \frac{\omega l}{v}} \sin(\omega t + \varphi).$$

38. Круглая мембрана радиуса a закреплена по контуру. Найти форму вынужденных колебаний, вызванных нагрузкой плотностью $q \sin(\omega t + \varphi)$, если она равномерно распределена:

- а) по всей поверхности мембраны;
- б) по кругу радиуса $b < a$.

Ответ:

$$а) u(r, t) = \frac{q}{\rho \omega^2} \left[\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{v}\right)}{J_0\left(\frac{\omega a}{v}\right)} - 1 \right] \sin(\omega t + \varphi).$$

$$б) u(r, t) = \frac{\pi b q v \sin(\omega t + \varphi)}{2\omega T} \times$$

$$\begin{cases} \frac{J_0\left(\frac{\omega}{v} r\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{v} a\right)} \left[Y_0\left(\frac{\omega}{v} a\right) J_1\left(\frac{\omega}{v} b\right) - J_0\left(\frac{\omega}{v} a\right) Y_1\left(\frac{\omega}{v} b\right) \right] - \frac{2v}{\pi \omega b}, \\ 0 \leq r \leq b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{J_1\left(\frac{\omega}{v} b\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{v} a\right)} \left[J_0\left(\frac{\omega}{v} r\right) Y_0\left(\frac{\omega}{v} a\right) - J_0\left(\frac{\omega}{v} a\right) Y_0\left(\frac{\omega}{v} r\right) \right], & b \leq r \leq a. \end{cases}$$

39. Найти собственные частоты поперечных колебаний стержня длиной l с закрепленными концами.

Ответ:

$$\omega_n = \frac{b}{l^2} \gamma_n^2; \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad b = \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}};$$

γ — положительные корни уравнения $\operatorname{ch} \gamma \cos \gamma = 1$.

40. Найти форму вынужденных колебаний стержня, опертого в точках $x=0$ и $x=l$ и находящегося под действием равномерно распределенной нагрузки плотностью $q \sin \omega t$.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{q}{\rho S \omega^2} \left[\frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{b}} \left(x - \frac{l}{2}\right)}{2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\omega}{b}} \frac{l}{2}} + \frac{\cos \sqrt{\frac{\omega}{b}} \left(x - \frac{l}{2}\right)}{2 \cos \sqrt{\frac{\omega}{b}} \frac{l}{2}} - 1 \right] \sin \omega t.$$

41. Струна, концы которой закреплены в точках $x=0$ и $x=l$, оттянута в начальный момент времени в точке $x=c$ и отпущена без начальной скорости.

Определить смещение $u(x, t)$ любой точки струны, если $u(c, 0) = h$.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l}.$$

42. Найти закон колебаний струны, начальная форма смещения которой изображена на рис. 1, а начальная скорость всех ее точек равна нулю.

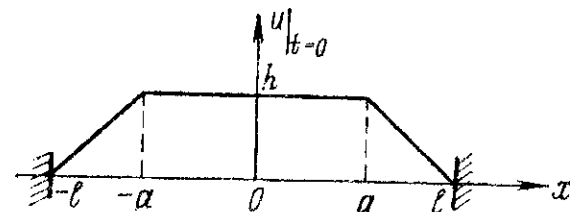


Рис. 1

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{8hl}{(l-a)\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n+1}{2l}\pi a}{(2n+1)^2} \cos \frac{2n+1}{2l}\pi x \cos \frac{2n+1}{2l}\pi vt.$$

43. Дать решение предыдущей задачи при условии, что в начальный момент времени точки струны отклонены по параболе, симметричной относительно центра струны, причем максимальное начальное смещение равно h .

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos \frac{2n+1}{2l}\pi x \cos \frac{2n+1}{2l}\pi vt.$$

44. В начальный момент времени центру струны, закрепленной на концах $x=-l$ и $x=l$, сообщается ударный импульс величиной P . Определить дальнейшие колебания точек струны.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{4Pl}{\pi v M} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n+1}{2l}\pi x}{2n+1} \sin \frac{2n+1}{2l}\pi vt.$$

Указание. Рассмотреть колебания струны при следующих начальных условиях:

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \begin{cases} v_0 = \frac{P}{2\rho\varepsilon} & \text{при } |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{при } \varepsilon < |x| \leq l, \end{cases}$$

и в дальнейшем осуществить предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$. M — масса струны.

45. Изучить колебания струны, закрепленной в точках $x=0$ и $x=l$, вызванные внезапно приложенной нагрузкой, распределенной с постоянной плотностью q по длине струны и остающейся в дальнейшем неизменной. В начальный момент времени струна находилась в покое.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{ql^2}{T} \left[\frac{x}{2l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) - \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n+1}{l}\pi x}{(2n+1)^3} \cos \frac{2n+1}{l}\pi vt \right].$$

46. Струна длиной l с закрепленными концами колеблется под действием равномерно распределенной пульсирующей нагрузки $q \sin \omega t$. Найти форму колебаний струны, считая, что в момент времени $t=0$ она находилась в состоянии покоя.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{2qv^2}{\omega^2 T} \frac{\sin \frac{\omega x}{2v} \sin \frac{\omega(l-x)}{2v}}{\cos \frac{\omega l}{2v}} \sin \omega t + \\ + \frac{4qvl}{\pi^2 \omega T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n+1}{l}\pi vt \sin \frac{2n+1}{l}\pi x}{(2n+1)^2 \left[1 - \frac{(2n+1)^2 \pi^2 v^2}{\omega^2 l^2} \right]}.$$

47. Решить предыдущую задачу в предположении, что пульсирующая нагрузка действует только на участке струны $0 < x < b$.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{2qvl}{\pi^2 \omega T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi vt}{l} - \frac{n\pi v}{\omega l} \sin \omega t}{1 - \left(\frac{n\pi v}{\omega l} \right)^2} \frac{\left(\cos \frac{n\pi a}{l} - \cos \frac{n\pi b}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2}.$$

48. Исследовать колебания струны, вызванные сосредоточенной пульсирующей силой $A \sin \omega t$, приложенной в момент $t=0$ в произвольной точке $x=c$ струны.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{2Av}{\pi \omega T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi ct}{l} - \frac{n\pi v}{\omega l} \sin \omega t}{1 - \left(\frac{n\pi v}{\omega l}\right)^2} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n}.$$

49. Стержень длиной l , закрепленный в точке $x=0$, растянут силой F , приложенной на его другом конце. Исследовать продольные колебания стержня при условии, что в момент времени $t=0$ действие силы внезапно прекращается.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{8Fl}{\pi^2 ES} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x \cos \frac{2n+1}{2l} \pi vt.$$

50. Рассмотреть вертикальные продольные колебания стержня длиной l , подвешенного за конец $x=0$, совершающиеся под действием собственного веса. Начальные условия считать нулевыми.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{gl}{v^2} x \left(1 - \frac{x}{2l}\right) - \frac{16gl^2}{\pi^3 v^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n+1}{2l} \pi vt}{(2n+1)^3} \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x.$$

51. Исследовать продольные колебания стержня, конец $x=0$ которого закреплен, а конец $x=l$ начиная с момента времени $t=0$ движется по закону $u(l, t) = A \sin \omega t$.

Ответ:

$$u(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega x}{v}}{\sin \frac{\omega l}{v}} \sin \omega t + \frac{2\omega l}{\pi^2 v} A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l}}{n^2 - \left(\frac{\omega l}{v\pi}\right)^2}.$$

52. Найти смещение точек закрепленного на конце $x=0$ стержня, совершающего продольные колебания под действием пульсирующей силы $A \sin \omega t$, прикладываемой к его

свободному концу $x=l$. До начала действия силы стержень находится в состоянии покоя.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{Av}{ES\omega} \left\{ \frac{\sin \frac{\omega x}{v}}{\cos \frac{\omega l}{v}} \sin \omega t - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\omega l}{v}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2l} \pi x \sin \frac{2n+1}{2l} \pi vt}{\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\right]^2 - \left(\frac{\omega l}{v}\right)^2} \right\}.$$

53. Грани пластины толщиной $2a$ (рис. 2), нагретой до температуры T_0 , начиная с момента времени $t=0$ поддерживаются при температуре, равной нулю. Найти распределение температуры в пластине.

Ответ:

$$T(x, \tau) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-\left(\frac{2n+1}{2a}\pi\right)^2 \tau} \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x.$$

54. Найти закон выравнивания заданного начального распределения $f(x)$ температуры в пластине, грани которой $x=0$ и $x=a$ не пропускают тепла.

Ответ:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{a} \int_0^a f(\xi) d\xi + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \tau}{a^2}} \cos \frac{n\pi x}{a} \int_0^a f(\xi) \cos \frac{n\pi \xi}{a} d\xi.$$

55. Пластина толщиной $2a$ ($-a \leq x \leq a$) с заданным начальным распределением температуры $T(x, 0) = f(x)$ начиная с момента времени $t=0$ излучает тепло в окружающую среду, температура которой принимается равной нулю. Считая, что излучение подчиняется закону Ньютона, найти распределение температуры в пластине в произвольный момент времени.

Ответ:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\gamma_n x}{a}}{1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}} e^{-\frac{\gamma_n^2 \tau}{a^2}} \int_{-a}^a f(\xi) \cos \frac{\gamma_n \xi}{a} d\xi + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\gamma_k x}{a}}{1 - \frac{\sin 2\gamma_k}{2\gamma_k}} e^{-\frac{\gamma_k^2 \tau}{a^2}} \int_{-a}^a f(\xi) \sin \frac{\gamma_k \xi}{a} d\xi,$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = ah/\gamma$; γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = -(\gamma/ah)$.

56. В пластине толщиной $2a$ ($-a \leq x \leq a$) начиная с момента $t=0$ происходит тепловыделение с постоянной плотностью Q . Найти распределение температуры в пластине при условии, что ее грани поддерживаются при температуре нуль, начальная температура также равна нулю.

Ответ:

$$T(x, \tau) = \frac{Qa^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{16Qa^2}{\pi^3 k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4a^2} \tau} \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x.$$

57. Исследовать процесс нагрева пластинки, через грань $x=0$ которой начиная с момента $t=0$ подается тепловой

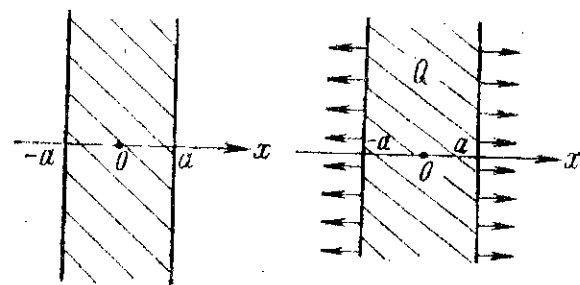


Рис. 2

Рис. 3

поток постоянной плотности q , а грань $x=a$ поддерживается при температуре T_0 . Найти распределение температуры в любой момент времени, считая, что в начальный момент она равна нулю.

Ответ:

$$T(x, \tau) = T_0 + \frac{qa}{k} \left(1 - \frac{x}{a} \right) - \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{q}{k} + (-1)^n \frac{2n+1}{2a} \pi T_0 \right] e^{-\left(\frac{2n+1}{2a} \pi \right)^2 \tau} \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x.$$

58. Через проводник, сечение которого изображено на рис. 3, пропускается, начиная с момента $t=0$, постоянный ток, выделяющий джоулево тепло плотностью Q . Найти распределение температуры в проводнике, считая, что отдача

тепла в окружающую среду происходит по закону Ньютона и начальная температура равна нулю.

Ответ:

$$T(x, \tau) = \frac{2Qa^2}{k} \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2ah} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \tau}}{\gamma_n^3 \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right)} \cos \gamma_n \frac{x}{a} \right].$$

59. В пластине толщиной a на грань $x=a$ подается тепловой поток постоянной плотности q , а грань $x=0$ излучает тепло по закону Ньютона. Найти $T(x, t)$, если начальная температура пластины равна нулю.

Ответ:

$$T(x, \tau) = \frac{qa}{k} \left\{ \frac{1}{ah} + \frac{x}{a} - 2(ah)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_n \left(1 - \frac{x}{a} \right) e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \tau}}{\gamma_n^2 \sin^2 \gamma_n [ah(1+ah) + \gamma_n^2]} \right\},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{ctg} \gamma = \frac{\gamma}{ah}$.

60. Линия без потерь длиной l с параметрами L, C заряжена до постоянного напряжения E и разомкнута на обоих концах. Определить величину тока в каждой точке линии, предполагая, что конец $x=l$ замыкается в момент $t=0$ на катушку самоиндукции L_0 .

Ответ:

$$I(x, t) = \frac{2aE}{Z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \frac{vt}{l} \sin \gamma_n \frac{x}{l}}{\cos \gamma_n [\gamma_n^2 + \alpha(1+\alpha)]},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\alpha}{\gamma}$; $\alpha = \frac{Ll}{L_0}$; $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Z = Lv$.

61. Линия с параметрами L, C, R коротко замкнута на конце $x=l$, а другим концом $x=0$ присоединяется к источнику постоянной э. д. с. E . Найти распределение напряжения вдоль линии, считая начальные условия нулевыми.

Ответ:

$$u(x, t) = E \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{2E}{\pi} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{n\pi v_n t}{l} + \frac{Rl}{2n\pi Z_n} \sin \frac{n\pi v_n t}{l} \right) \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n},$$

где $v_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C l^2}{4n^2 \pi^2 L}}, Z_n = L v_n$.

62. Линия длиной l с параметрами L, C, R присоединена на конце $x=0$ к источнику постоянной э. д. с. E , а на другом конце замкнута на сопротивление R_0 . Найти значение напряжения в линии после внезапного отключения нагрузки R_0 .

Ответ:

$$u(x, t) = E - \frac{8E}{\pi^2(1+\alpha)} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\cos \frac{2n+1}{2l} \pi v_n t - \frac{Rl}{\pi L v_n (2n+1)} \sin \frac{2n+1}{2l} \pi v_n t \right] \frac{(-1)^n \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x}{(2n+1)^2},$$

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C l^2}{(2n+1)^2 L \pi^2}}, \quad \alpha = \frac{R_0}{lR}.$$

63. Решить задачу об остывании однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура $T(x, 0) = 2T_0 \frac{x}{l}$, конец $x=0$ теплоизолирован, а другой конец $x=l$ поддерживается при постоянной температуре T_0 .

Ответ:

$$T(x, \tau) = T_0 - \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{4}{\pi(2n+1)} - (-1)^n \right] e^{-\left(\frac{2n+1}{2l} \pi\right)^2 \tau} \frac{\cos \frac{2n+1}{2l} \pi x}{2n+1}.$$

64. Решить задачу теплопроводности для пластины толщиной a при условии, что грань $x=0$ поддерживается при температуре $T=f(\tau)$, а грань $x=a$ имеет температуру, рав-

ную нулю. Рассмотреть частные случаи: а) $f(\tau) = T_0$; б) $f(\tau) = A\tau$. Начальная температура пластины равна нулю.

Ответ:

$$T(x, \tau) = \frac{2\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{n\pi x}{a} \int_0^{\tau} f(s) e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 (\tau-s)} ds.$$

В частных случаях:

$$\text{а) } T(x, \tau) = T_0 \left[1 - \frac{x}{a} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{a^2} \tau} \right];$$

$$\text{б) } T(x, \tau) = A \left\{ \left(1 - \frac{x}{a}\right) \tau - \frac{xa}{6} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(2 - \frac{x}{a}\right) + \frac{2a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{n^3} e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tau} \right\}.$$

65. Найти распределение температуры в пластине, грань $x=0$ которой излучает тепло в окружающую среду по закону Ньютона, а другая грань $x=a$ поддерживается при температуре T_0 , равной начальной температуре пластины.

Ответ:

$$T(x, \tau) = T_0 \left[\frac{1+hx}{1+ha} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_n}{2\gamma_n - \sin 2\gamma_n} e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{a^2}} \sin \frac{\gamma_n(a-x)}{a} \right],$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{\gamma}{ah}$.

66. Найти напряжение в кабеле ($L=G=0$) длиной l , конец $x=0$ которого подключен к источнику постоянной э. д. с. E , а конец $x=l$ замкнут на омическую нагрузку R_0 .

Ответ:

$$u(x, t) = E \left[\frac{1+\alpha \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{1+\alpha} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \frac{x}{l} e^{-\gamma_n^2 \frac{t}{RCl^2}}}{\sin \gamma_n \cos \gamma_n \left(1 + \alpha + \frac{\gamma_n^2}{a}\right)} \right].$$

Здесь γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{\gamma}{a}$; $\alpha = \frac{Rl}{R_0}$.

67. Кабель сопротивлением R и емкостью C на единицу длины заземлен в точке $x=l$. При $t=0$ в точке $x=0$ к кабелю через сопротивление R_0 приложена постоянная э. д. с. E . Определить потенциал в точке x .

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{ERl}{Rl + R_0} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + 4E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_n e^{-\frac{\gamma_n^2}{RCl^2} t}}{2\gamma_n - \sin 2\gamma_n} \sin \gamma_n \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{R_0 \gamma}{Rl}$.

68. Свободная от искажений ($RC=LG$) линия длиной l заземлена в точке $x=l$. Начальные ток и заряд равны нулю.

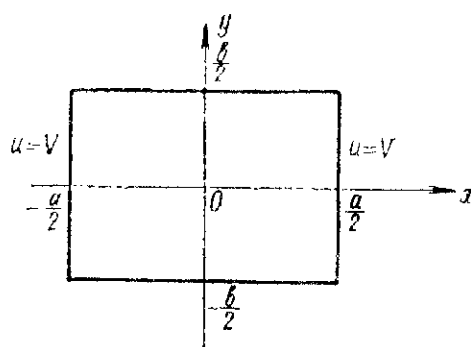


Рис. 4

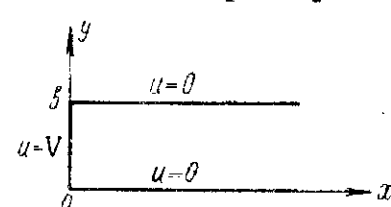


Рис. 5

В момент времени $t=0$ в точке $x=0$ приложена постоянная э. д. с. E . Найти потенциал в точке x .

Ответ:

$$u(x, t) = E \frac{\operatorname{sh} \sqrt{RGL^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\operatorname{sh} \sqrt{RGL^2}} - 2E\pi e^{-\frac{R}{L}t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2\pi^2 + RGL^2} \left(\cos \frac{n\pi x}{l} + \frac{Rl}{Lvn\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \sin \frac{n\pi y}{l},$$

$$\left(v = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right).$$

69. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x, y)$ внутри вытянутой коробки прямоугольного сечения (рис. 4), две противоположные грани которой находятся при потенциале V , а две другие заземлены.

Ответ:

$$u(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{ch} \frac{2n+1}{b} \pi x \cos \frac{2n+1}{b} \pi y}{\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2b} \pi a} \frac{1}{2n+1}.$$

70. Найти распределение электростатического потенциала внутри полубесконечной прямоугольной коробки (рис. 5), вертикальная стенка которой поддерживается при потенциале V , а горизонтальные стенки — при потенциале, равном нулю.

Ответ:

$$u(x, y) = \frac{2V}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{b}}.$$

Указание. Для представления решения в замкнутой форме воспользоваться разложением

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1} \sin(2n+1)y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sin y}{\operatorname{sh} x} \quad (x > 0).$$

71. Найти распределение потенциала электростатического поля между двумя бесконечными параллельными пластинами, одна из которых ($y=0$) находится при потенциале, равном нулю, а на другой поддерживается заданное периодическое распределение потенциала $u|_{y=b}=f(x)$, где f — периодическая функция с заданным периодом $2a$.

Ответ:

$$u(x, y) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \left[\cos \frac{n\pi x}{a} \int_0^{2a} f(\xi) \cos \frac{n\pi \xi}{a} d\xi + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{n\pi x}{a} \int_0^{2a} f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{a} d\xi \right] + \frac{y}{2ab} \int_0^{2a} f(\xi) d\xi.$$

72. Рассчитать плоское электростатическое поле для конструкций электродов, изображенных на рис. 6.

Ответ:

а) $u(x, y) =$

$$\frac{\sqrt{2}V}{a} (x+y) - \frac{4V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2a} [a - \sqrt{2}(y-x)] + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2a} [a + \sqrt{2}(y-x)] \right\} \frac{\sin \frac{n\pi}{2a} [a - \sqrt{2}(y+x)]}{n \operatorname{sh} n\pi};$$

$$б) u(x, y) = V \left\{ \frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a}} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{n} \right\}.$$

73. Найти распределение потенциала электростатического поля в электронно-оптическом устройстве, представленном на рис. 7. Получить выражение для распределения потенциала в плоскости симметрии.

Ответ:

$$u \Big|_{\substack{y=0 \\ x < a}} = V \left[1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} e^{-\frac{2n+1}{2b} \pi a} \operatorname{sh} \frac{2n+1}{2b} \pi x \right];$$

$$u \Big|_{\substack{y=0 \\ x > a}} = \frac{2V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \operatorname{ch} \frac{2n+1}{2b} \pi a e^{-\frac{2n+1}{2b} \pi x}.$$

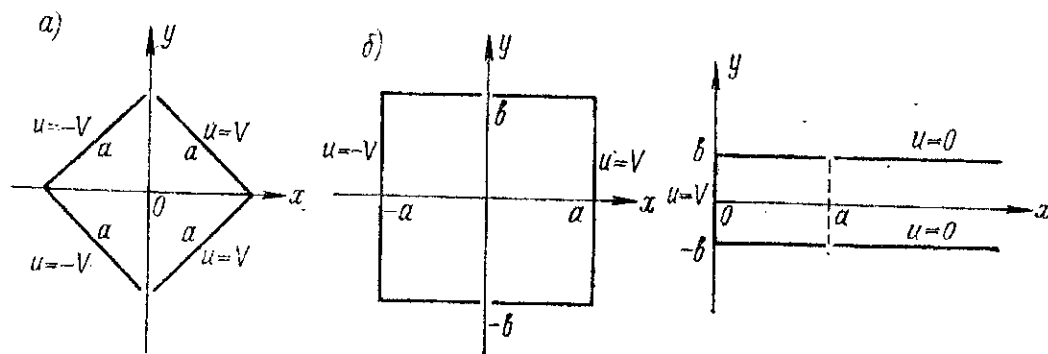


Рис. 6

Рис. 7

74. Найти стационарное распределение температуры $T(x, y)$ в бесконечно длинном брусе прямоугольного сечения (рис. 8), три грани которого находятся при температуре, равной нулю, а на четвертой поддерживается заданное распределение температуры $T(x, b) = f(x)$. Применить полученные общие формулы к частному случаю $f(x) = T_0$.

Ответ:

$$T(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \int_0^a f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{a} d\xi.$$

В частном случае:

$$T(x, y) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{2n+1}{a} \pi y}{\operatorname{sh} \frac{2n+1}{a} \pi b} \frac{\sin \frac{2n+1}{a} \pi x}{2n+1}.$$

75. Прямоугольный брус состоит из двух кусков с различными коэффициентами теплопроводности (рис. 9). Найти распределение температуры в брус, предполагая, что две противоположные грани ($y = \pm b$) находятся при температуре T_0 , а две другие — при температуре нуль.

Ответ:

$$T(x, y) = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \gamma_n \left(\cos \gamma_n - \cos \gamma_n \frac{a_2}{a_1} \right)}{\gamma_n \left[\frac{k_1}{k_2} \sin^2 \frac{\gamma_n a_2}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} \sin^2 \gamma_n \right]} \frac{\operatorname{ch} \frac{\gamma_n y}{a_1}}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_n b}{a_1}} T_n(x);$$

$$T_n(x) = \begin{cases} \sin \frac{\gamma_n x}{a_1} \sin \frac{\gamma_n a_2}{a_1}, & 0 \leq x \leq a_1; \\ \sin \frac{\gamma_n (a_1 + a_2 - x)}{a_1} \sin \gamma_n, & a_1 \leq x \leq a_1 + a_2. \end{cases}$$

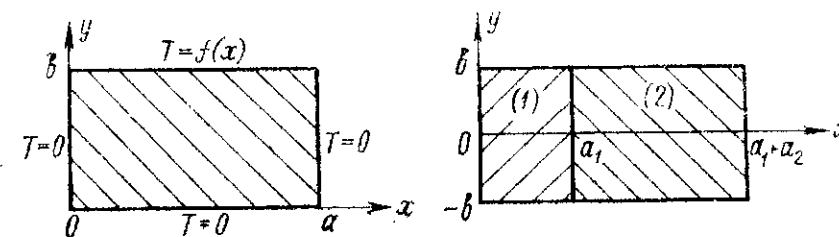


Рис. 8

Рис. 9

Здесь γ_n — последовательные положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} \gamma + \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg} \frac{\gamma a_2}{a_1} = 0,$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты теплопроводности материалов.

76. Найти распределение температуры в брус прямоугольного сечения, две противоположные грани $y = 0$ и $y = b$ которого находятся соответственно при температурах нуль и T_0 , а две другие ($x = \pm a$) излучают тепло по закону Ньютона в окружающую среду с температурой, равной нулю.

Ответ:

$$T(x, y) = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n + \sin \gamma_n \cos \gamma_n} \frac{\operatorname{sh} \gamma_n \frac{y}{a}}{\operatorname{sh} \gamma_n \frac{b}{a}} \cos \gamma_n \frac{x}{a},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \frac{ah}{\gamma}$.

77. Найти форму равновесия прямоугольной мембраны со сторонами $2a$ и $2b$, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки q .

Ответ:

$$u(x, y) = \frac{qa^2}{T} \times \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) + \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2a} \pi y}{\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2a} \pi b} \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x \right]$$

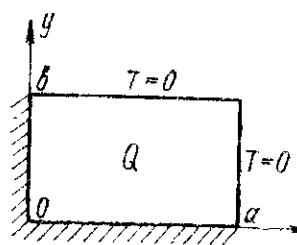


Рис. 10

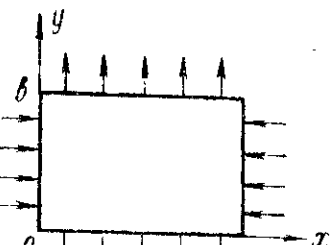


Рис. 11

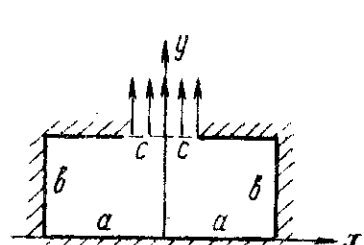


Рис. 12

78. Две грани прямоугольного бруса покрыты тепловой изоляцией, две другие поддерживаются при температуре, равной нулю (рис. 10). Найти стационарное распределение температуры при условии, что в брус выделяется тепло плотностью Q .

Ответ:

$$T(x, y) = \frac{Qa^2}{2k} \times \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2a} \pi y}{\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2a} \pi b} \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x \right]$$

79. Найти стационарное распределение температуры в брус прямоугольного сечения ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$), если грани $x=a$ и $y=b$ поддерживаются при температурах T_1 и T_2 соответственно, а остальные грани — при температуре, равной нулю.

Ответ:

$$T = T_1 \frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{T_1(-1)^n + T_2[1 - (-1)^n]\} \operatorname{sh} n\pi \frac{y}{a} + (-1)^n T_1 \operatorname{sh} n\pi \frac{b-y}{a}}{n \operatorname{sh} n\pi \frac{b}{a}} \sin n\pi \frac{x}{a}$$

80. Найти стационарное распределение температуры в проводнике прямоугольного сечения, нагреваемом постоянным током, выделяющим тепло Q в единице объема, считая, что теплоотдача с поверхности проводника происходит по закону Ньютона.

Ответ:

$$T(x, y) = \frac{Qa^2}{k} \times \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) + \frac{1}{ah} - 2ah \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n \frac{y}{a} \cos \gamma_n \frac{x}{a}}{\gamma_n^3 \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right) \left(\gamma_n \operatorname{sh} \frac{\gamma_n b}{a} + ah \operatorname{ch} \frac{\gamma_n b}{a} \right)} \right]$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = ah/\gamma$.

81. Поток тепла Q втекает через две противоположные грани бруса прямоугольного сечения и вытекает через две другие (рис. 11). Найти стационарное распределение температуры в брус, предполагая, что втекающий и вытекающий потоки распределены по граням с равномерной плотностью.

Ответ:

$$T(x, y) = \frac{Q}{2abk} [y(b-y) - x(a-x)] + \text{const.}$$

82. В брус (рис. 12) происходит выделение тепла плотностью Q . Найти стационарное распределение температуры в предположении, что тепло отводится потоком постоянной плотности через участок $|x| < c$ верхней грани, а остальная часть поверхности покрыта тепловой изоляцией.

Ответ:

$$T(x, y) = -\frac{Q}{k} \left\{ \frac{y^2}{2} + \frac{2a^2b}{\pi^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{a}}{n^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a} \right\} + \text{const.}$$

83. В брус прямоугольного сечения ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) происходит объемное тепловыделение с постоянной плотностью Q . Найти стационарное распределение температуры при следующих граничных условиях (рис. 13):

$$T|_{x=0} = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} + hT|_{x=a} = 0, \quad T|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y}|_{y=b} = \begin{cases} \frac{q}{k}, & 0 < x < c; \\ 0, & c < x < a. \end{cases}$$

Ответ:

$$T = 4T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\gamma_n x}{a}}{2\gamma_n - \sin 2\gamma_n} + \frac{4Qa^2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \gamma_n}{\gamma_n^2 (2\gamma_n - \sin 2\gamma_n)} \sin \frac{\gamma_n x}{a} + 4 \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{qa}{k\gamma_n} \left(1 - \cos \gamma_n \frac{c}{a}\right) \operatorname{sh} \frac{\gamma_n}{a} y - \left[T_0 + \frac{Qa^2}{k\gamma_n^2} (1 - \cos \gamma_n)\right] \operatorname{ch} \frac{\gamma_n}{a} (b-y)}{(2\gamma_n - \sin 2\gamma_n) \operatorname{ch} \frac{\gamma_n b}{a}} \times \\ \times \sin \frac{\gamma_n x}{a},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{\gamma}{ha}$.

84. Дать общее решение задачи об охлаждении шара радиуса a при условии, что начальное распределение температуры шара задано $T(r, 0) = f(r)$, а температура поверхности равна нулю. Рассмотреть частный случай $f(r) = T_0$.

Ответ:

$$T(r, \tau) = \frac{2}{ar} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{a^2} \tau} \sin \frac{n\pi r}{a} \int_0^a f(\rho) \rho \sin \frac{n\pi \rho}{a} d\rho.$$

В частном случае

$$T(r, \tau) = \frac{2aT_0}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{a^2} \tau} \sin \frac{n\pi r}{a}.$$

85. Найти распределение температуры в шаре радиуса a , поверхность которого начиная с момента $t=0$ излучает тепло по закону Ньютона, а начальная температура равна T_0 .

Ответ:

$$T(r, \tau) = \frac{4T_0 ha^2}{r(1-ha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_n}{2\gamma_n - \sin 2\gamma_n} \sin \gamma_n \frac{r}{a} e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \tau},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\gamma}{1-ha}$.

86. Тело, имеющее форму шара радиуса a , длительное время подвергалось нагреву путем объемного тепловыделения плотностью Q . Исследовать процесс выстывания после прекращения нагрева, принимая, что охлаждение происходит

путем излучения с поверхности, и считая температуру воздуха в камере, где производился нагрев, равной T_0 .

Ответ:

$$T(r, \tau) = T_0 + \frac{2Qha^4}{(1-ha)kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_n \sin \gamma_n \frac{r}{a}}{\gamma_n^3 \left(1 - \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}\right)} e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{a^2}},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\gamma}{1-ha}$.

87. Найти распределение температуры в шаре радиуса a , внутри которого начиная с момента $t=0$ происходит выделение тепла плотностью Q . Начальная температура шара равна нулю, а на границе:

- поддерживается постоянная температура T_0 ;
- происходит теплоотдача потоком постоянной плотности q ;
- происходит излучение в окружающую среду по закону Ньютона.

Ответ:

$$a) T(r, \tau) = T_0 + \frac{Q}{6k} (a^2 - r^2) +$$

$$+ \frac{2a}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[T_0 + \frac{Qa^2}{kn^2\pi^2} \right] e^{-\frac{n^2 \pi^2}{a^2} \tau} \sin \frac{n\pi r}{a};$$

$$б) T(r, \tau) = \left(\frac{Q}{k} - \frac{3q}{ka} \right) \tau - \frac{2qa^2}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{a^2}}}{\gamma_n^2 \sin \gamma_n} \sin \gamma_n \frac{r}{a},$$

$$\operatorname{tg} \gamma_n = \gamma_n;$$

$$в) T(r, \tau) = \frac{4Qha^4}{kr(1-ha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_n \left(1 - e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{a^2}}\right)}{\gamma_n^2 (2\gamma_n - \sin 2\gamma_n)} \sin \gamma_n \frac{r}{a}.$$

$$\operatorname{tg} \gamma_n = \frac{\gamma_n}{1-ha}.$$

88. Решить задачу об обтекании шара радиуса a плоскопараллельным потоком идеальной жидкости. Начало сферической системы координат (r, θ, φ) выбрать в центре шара и ось z направить в сторону, противоположную направлению потока.

Ответ:

$$u(r, \theta) = v_{\infty} \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta,$$

где v_{∞} — значение скорости потока вдали от шара.

89. Найти электростатическое поле точечного заряда q , помещенного на расстоянии b от центра проводящего шара радиуса a ($a < b$), находящегося при потенциале $u = 0$.

Ответ:

$$u(r, \theta) = \frac{q}{R} + \frac{\bar{q}}{\bar{R}},$$

где $R = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}$, $\bar{R} = \sqrt{\bar{b}^2 + r^2 - 2\bar{b}r \cos \theta}$,

$$b\bar{b} = a^2, \quad \bar{q} = -q \frac{a}{b}.$$

90. Решить предыдущую задачу, предполагая, что шар изготовлен из диэлектрика проницаемостью ϵ .

Ответ:

внутри шара

$$u(r, \theta) = \frac{q}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(\epsilon+1)n+1} \left(\frac{r}{b} \right)^n P_n(\cos \theta);$$

вне шара

$$u(r, \theta) = \frac{q}{R} - \frac{qa}{br} (\epsilon - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(\epsilon+1)n+1} \left(\frac{a^2}{br} \right)^n P_n(\cos \theta).$$

91. Найти потенциал точечного заряда q , помещенного между проводящими заземленными концентрическими сферами радиусов a и b .

Ответ:

$$u(r, \theta) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}} - \frac{q}{r_0} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[1 - \left(\frac{a}{r_0} \right)^{2n+1} \right] \left(\frac{r_0}{b} \right)^{n+1} \left(\frac{r}{b} \right)^n + \left[1 - \left(\frac{r_0}{b} \right)^{2n+1} \right] \left(\frac{a}{r_0} \right)^n \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n+1}} \times \\ \times P_n(\cos \theta).$$

Заряд помещен в точке с координатами $r = r_0$ и $\theta = 0$.

92. Найти стационарное распределение температуры в шаре радиуса a , часть поверхности которого S_1 имеет постоянную температуру T_0 , а остальная часть S_2 — температуру, равную нулю (рис. 14).

Ответ:

$$T(r, \theta) =$$

$$\frac{T_0}{2} \left\{ 1 - \cos \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)] \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta) \right\}.$$

93. Дать решение предыдущей задачи, предполагая, что в шаре происходит объемное тепловыделение плотностью Q , а тепло отводится через поверхность S_1 нормальным потоком постоянной плотности. Поверхность S_2 не пропускает тепла.

Ответ:

$$T(r, \theta) = \frac{Qa^3}{3k} \left[-\frac{r^2}{2a^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 - \cos \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{n+1}(\cos \alpha) - P_{n-1}(\cos \alpha)}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta) \right] + \text{const.}$$

94. Шар радиуса a нагревается плоскопараллельным потоком тепла плотностью q , падающим на его поверхность, и отдает тепло в окружающую среду в соответствии с законом Ньютона. Найти стационарное распределение температуры в шаре.

Ответ:

$$T(r, \theta) = \frac{qa}{2k} \times \\ \times \left[\frac{1}{2ah} + \frac{r}{a} \frac{\cos \theta}{1 + ah} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1) P_{2n}(0)}{(2n+ah)(2n-1)(2n+2)} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right].$$

Указание. Граничное условие в рассматриваемой задаче имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial r} + hT|_{r=a} = \begin{cases} -\frac{q}{k} \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

95. Два металлических полушария радиуса a , разделенных тонкой изолирующей прокладкой, поддерживаются при потенциалах V (верхнее) и нуль (нижнее). Найти распре-

ление электростатического потенциала в пространстве между полушариями.

Ответ:

$$u(r, \theta) = \frac{V}{2} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{2n+2} P_{2n}(0) \left(\frac{r}{a} \right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta) \right].$$

96. Бесконечный цилиндр радиуса a помещен в плоско-параллельный поток идеальной жидкости. Найти потенциал скоростей, считая, что начало координат выбрано в центре

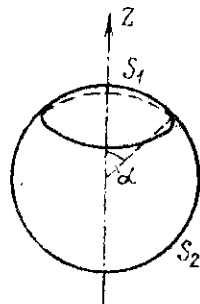


Рис. 14

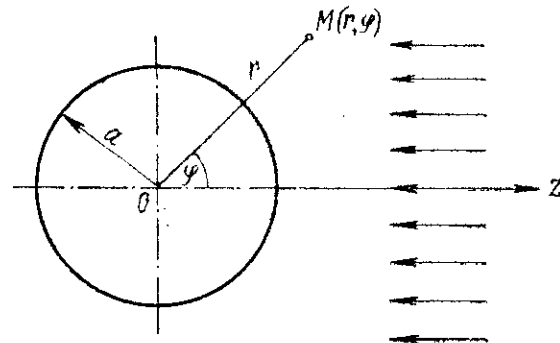


Рис. 15

цилиндра, направление оси x противоположно направлению потока (рис. 15).

Ответ:

$$u(r, \varphi) = v_{\infty} \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi + \text{const},$$

где v_{∞} — значение скорости потока вдали от цилиндра.

97. Найти электростатический потенциал внутри бесконечного цилиндра радиуса a , если на поверхности цилиндра потенциал распределен по закону

$$u(r, \varphi) |_{r=a} = v \cos^2 \varphi.$$

Ответ:

$$u(r, \varphi) = \frac{v}{2} \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \cos 2\varphi \right).$$

98. Найти функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую в круге радиуса a (рис. 16), при следующих граничных условиях:

а) $u|_{r=a} = f(\varphi);$

б) $\frac{\partial u}{\partial r} |_{r=a} = f(\varphi);$

в) $\frac{\partial u}{\partial r} + hu |_{r=a} = f(\varphi).$

Ответ:

а) $u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2) f(\vartheta) d\vartheta}{a^2 - 2ar \cos(\varphi - \vartheta) + r^2};$

б) $u(r, \varphi) = \text{const} - \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \ln \frac{a^2 - 2ar \cos(\varphi - \vartheta) + r^2}{a^2} d\vartheta;$

в) $u(r, \varphi) =$

$$= \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) d\vartheta \int_0^1 \left[\frac{1}{ah} - 2r \frac{rt - a \cos(\varphi - \vartheta)}{a^2 - 2art \cos(\varphi - \vartheta) + r^2 t^2} t^{ah} \right] dt.$$

99. Определить стационарное распределение температуры в брусе, сечение которого представляет собой криволи-

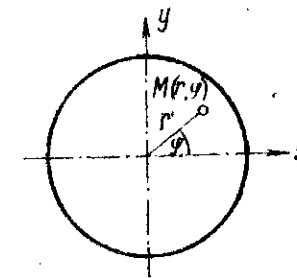


Рис. 16

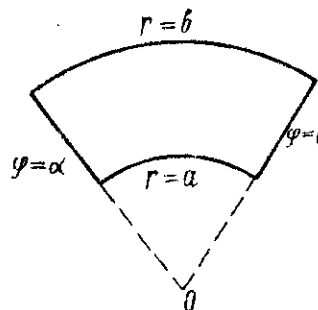


Рис. 17

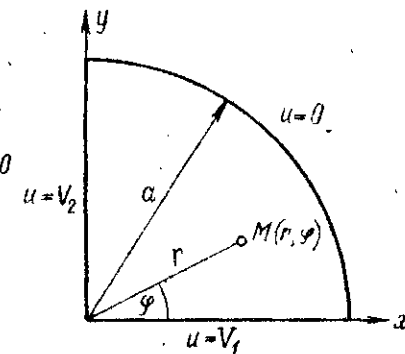


Рис. 18

нейный прямоугольник, две стороны которого образованы дугами концентрических окружностей, а две другие — отрезками радиусов (рис. 17). Одна из изогнутых граней $r=b$ имеет температуру T_0 , остальные поддерживаются при температуре, равной нулю.

Ответ:

$$T(r, \varphi) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2n+1}{a}\pi} - \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{2n+1}{a}\pi}}{\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{2n+1}{a}\pi} - \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2n+1}{a}\pi}} \frac{\sin \frac{2n+1}{a} \pi \varphi}{2n+1}.$$

100. Решить предыдущую задачу в предположении, что при температуре T_0 поддерживается одна из плоских граней $\varphi = \alpha$, остальные грани имеют температуру нуль.

Ответ:

$$T(r, \varphi) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi \ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}}}{2n+1} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi \varphi}{\ln \frac{b}{a}}}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi a}{\ln \frac{b}{a}}}.$$

101. Найти распределение температуры в бруссе, сечение которого есть криволинейный прямоугольник ($a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$), при следующем распределении температуры по контуру сечения:

$$T|_{r=a} = 0, \quad T|_{r=b} = T_0, \quad T|_{\varphi=0} = 0, \quad T|_{\varphi=\alpha} = T_0.$$

Ответ:

$$T(r, \varphi) = T_0 \left\{ \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sh} \frac{n\pi(a-\varphi)}{\ln \frac{b}{a}} + \operatorname{sh} \frac{n\pi\varphi}{\ln \frac{b}{a}}}{n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{\ln \frac{b}{a}}} \sin n\pi \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \right\} =$$

$$= T_0 \left\{ \frac{\varphi}{\alpha} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}] \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} - [1 - (-1)^n \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}] \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}}{n \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \right]} \times \right.$$

$$\left. \times \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \right\}.$$

102. Решить плоскую электростатическую задачу для внутренней области прямоугольного сектора (рис. 18), считая потенциалы дуги и радиусов заданными.

Ответ:

$$u(r, \varphi) = \frac{2V_2}{\pi} \varphi + V_1 \left(1 - \frac{2\varphi}{\pi}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_2(-1)^n - V_1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \sin 2n\varphi.$$

Другая форма решения:

$$u(r, \varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V_2 \operatorname{sh} v\varphi + V_1 \operatorname{sh} v \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{v \operatorname{sh} v \frac{\pi}{2}} \sin \left(v \ln \frac{a}{r}\right) dv.$$

103. Внутри заземленной металлической коробки, сечение которой представляет собой криволинейный прямоугольник ($a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$), помещена заряженная нить с зарядом q на единицу длины. Определить распределение потенциала внутри коробки.

Рассмотреть частные случаи задачи:

а) $a=0$, $b=\infty$ (заряженная нить внутри двугранного угла);

б) $a=0$, $b=\infty$, $\alpha=2\pi$ (нить вблизи края проводящей полуплоскости);

в) $b=\infty$, $\alpha=\pi$, $\varphi_0=\pi/2$ (нить под плоскостью с выступом в форме полуцилиндра).

Ответ:

$$u(r, \varphi) =$$

$$\begin{cases} 4q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{b}{r_0}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r_0}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}} \frac{\sin \frac{n\pi\varphi_0}{\alpha} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}}{n} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} - \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \right], & r \leq r_0; \\ 4q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_0}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} - \left(\frac{a}{r_0}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}} \frac{\sin \frac{n\pi\varphi_0}{\alpha} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}}{n} \left[\left(\frac{b}{r}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} - \left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \right], & r \geq r_0; \end{cases}$$

Здесь r_0, φ_0 — координаты нити.

В частных случаях:

$$\text{а) } u(r, \varphi) = q \ln \frac{1 - 2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi(\varphi_0 + \varphi)}{\alpha} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2\pi}{\alpha}}}{1 - 2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi(\varphi_0 - \varphi)}{\alpha} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2\pi}{\alpha}}};$$

$$\text{б) } u(r, \varphi) = q \ln \frac{1 - 2\sqrt{\frac{r}{r_0}} \cos \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} + \frac{r}{r_0}}{1 - 2\sqrt{\frac{r}{r_0}} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} + \frac{r}{r_0}};$$

$$\text{в) } u(r, \varphi) = q \ln \left[\frac{1 + 2\frac{r}{r_0} \sin \varphi + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2}{1 - 2\frac{r}{r_0} \sin \varphi + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2} \frac{1 - 2\frac{a^2}{r_0 r} \sin \varphi + \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^2}{1 + 2\frac{a^2}{r_0 r} \sin \varphi + \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^2} \right].$$

104. Решить задачу о равновесии полукруглой мембраны радиуса a (рис. 19) под равномерной нагрузкой q .

Ответ:

$$u(r, \varphi) = \frac{qa^2}{2T} \left\{ \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r} \right) \sin \varphi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\varphi - 2 \right) \operatorname{arctg} \frac{2ar \sin \varphi}{a^2 - r^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin 2\varphi \ln \frac{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi}{a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi} \right] - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{a^2} \right\}.$$

105. Поток тепла Q втекает через плоскую часть поверхности бруса полукруглого сечения и вытекает через остальную часть его поверхности (рис. 20). Найти стационарное

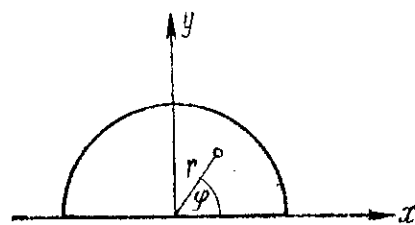


Рис. 19

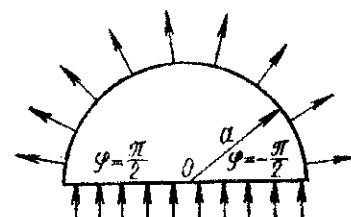


Рис. 20

распределение температуры по сечению бруса, считая, что втекающий и вытекающий потоки распределены с постоянными плотностями.

Ответ:

$$T(r, \varphi) = \text{const} - \\ - \frac{Qr}{\pi ka} \left\{ 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 - \frac{1}{2n} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n-1}}{4n^2 - 1} \cos 2n\varphi \right\}.$$

106. Цилиндр радиуса a нагрет до температуры T_0 и охлаждается с поверхности таким образом, что ее температура начиная с момента $t=0$ поддерживается равной нулю. Найти закон охлаждения цилиндра, считая, что распределение температуры во всех поперечных сечениях одинаково.

Ответ:

$$T(r, \tau) = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\gamma_n \frac{r}{a} \right)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{a^2}},$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

107. Найти стационарное распределение температуры в цилиндре ($0 \leq r \leq a$, $0 \leq z \leq l$), верхний торец которого имеет температуру T_0 , а остальная поверхность — температуру, равную нулю.

Ответ:

$$T(r, z) = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\frac{\gamma_n r}{a} \right)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma_n z}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\gamma_n l}{a}},$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

108. Торцев полубесконечного цилиндра ($0 \leq r \leq a$, $0 \leq z < \infty$) поддерживается при постоянной температуре T_0 , а боковая поверхность находится при температуре, равной нулю. Получить стационарное распределение температуры в цилиндре.

Ответ:

$$T(r, z) = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\gamma_n \frac{r}{a} \right)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} e^{-\frac{\gamma_n}{a} z},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

Другая форма решения

$$T = T_0 \left[1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{I_0(\lambda r)}{I_0(\lambda a)} \frac{\sin \lambda z}{\lambda} d\lambda \right].$$

109. Исследовать осесимметричные колебания круглой мембраны радиуса a , вызванные ударным импульсом P , приложенным в момент времени $t=0$ и распределенным по площади круга радиусом ε .

Ответ:

$$u(r, t) = \frac{2Pv}{\pi \varepsilon T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1 \left(\gamma_n \frac{\varepsilon}{a} \right)}{\gamma_n^2 J_1^2(\gamma_n)} J_0 \left(\gamma_n \frac{r}{a} \right) \sin \frac{\gamma_n v t}{a},$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$; T — натяжение на единицу контура; ρ — поверхностная плотность мембраны.

110. Найти закон выравнивания заданного осесимметричного начального распределения температуры $T(r, 0) = f(r)$ в бесконечном цилиндре радиуса a , боковая поверхность которого не пропускает тепла.

Ответ:

$$T(r, \tau) = \frac{2}{a^2} \left[\int_0^a f(\rho) \rho d\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)}{J_0^2(\gamma_n)} e^{-\frac{\gamma_n^2 \tau}{a^2}} \int_0^a f(\rho) \rho J_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{a}\right) d\rho \right],$$

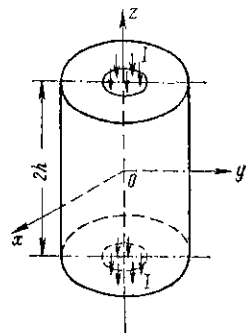


Рис. 21

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $J_1(\gamma) = 0$.

111. Постоянный ток силы I поступает через один торец цилиндрического проводника, изготовленного из материала с проводимостью σ , и отводится с противоположного торца. Определить распределение тока внутри проводника, считая, что подводящие контакты есть диски радиуса $b < a$ (a — радиус цилиндра) и ток по ним распределен с постоянной плотностью (рис. 21).

Ответ: распределение токового потенциала

$$u(r, z) = \frac{Iz}{\pi a^2 \sigma} + \frac{2I}{\pi b \sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma_n z}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_n h}{a}} \frac{J_1\left(\frac{\gamma_n b}{a}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)}{\gamma_n^2 J_0^2(\gamma_n)} + \text{const},$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $J_1(\gamma) = 0$.

112. Бесконечный цилиндр радиуса a , нагретый до начальной температуры T_0 , охлаждается, излучая тепло в окружающую среду по закону Ньютона. Найти закон остывания цилиндра.

Ответ:

$$T(r, \tau) = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\gamma_n) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)}{J_0^2(\gamma_n) + J_1^2(\gamma_n)} \frac{e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{a^2}}}{\gamma_n},$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $h a J_0(\gamma) = \gamma J_1(\gamma)$.

113. Найти стационарное распределение температуры в цилиндре радиуса a и длиной l , торцы которого поддерживаются при нулевой температуре, а температура боковой поверхности равна T_0 .

Ответ:

$$T(r, z) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{2n+1}{l} \pi r\right)}{I_0\left(\frac{2n+1}{l} \pi a\right)} \frac{\sin \frac{2n+1}{l} \pi z}{2n+1}.$$

114. Дать решение предыдущей задачи, считая, что торцы цилиндра не пропускают тепла, а на боковой поверхности поддерживается заданное распределение температуры $T|_{r=a} = f(z)$.

Ответ:

$$T(r, z) = \frac{1}{l} \int_0^l f(\zeta) d\zeta + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{n\pi r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi a}{l}\right)} \cos \frac{n\pi z}{l} \int_0^l f(\zeta) \cos \frac{n\pi \zeta}{l} d\zeta.$$

115. Стенки цилиндрического канала, просверленного в неограниченной пластине толщиной h (рис. 22), поддерживаются при заданной температуре T_0 . Найти стационарное распределение температуры в пластине, если ее грани имеют нулевую температуру.

Ответ:

$$T(r, z) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n+1}{h} \pi z}{2n+1} \frac{K_0\left(\frac{2n+1}{h} \pi r\right)}{K_0\left(\frac{2n+1}{h} \pi a\right)}.$$

116. Решить задачу 113 при условии, что торцы цилиндра охлаждаются путем теплоотдачи по закону Ньютона $\left(-\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}\right)$.

Ответ:

$$T(r, z) = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n - \sin \gamma_n \cos \gamma_n} \frac{I_0\left(\frac{2\gamma_n r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{2\gamma_n a}{l}\right)} \cos \frac{2\gamma_n z}{l},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = hl/2\gamma$.

117. Цилиндр, установленный на теплоизолирующем основании, нагревается сверху равномерно распределенным потоком тепла (рис. 23) и излучает тепло с боковой поверхности в окружающее пространство по закону Ньютона. Найти стационарное распределение температуры в цилиндре, считая, что температура среды равна нулю.

Ответ:

$$T(r, z) = \frac{2qa^2h}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)}{\gamma_n^3 J_0(\gamma_n) \left[1 + \left(\frac{ah}{\gamma_n}\right)^2\right]} \frac{\text{ch} \frac{\gamma_n z}{a}}{\text{sh} \frac{\gamma_n l}{a}},$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $\gamma J_1(\gamma) = ahJ_0(\gamma)$.

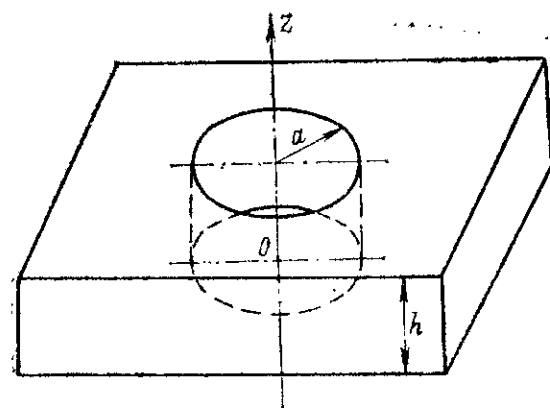


Рис. 22

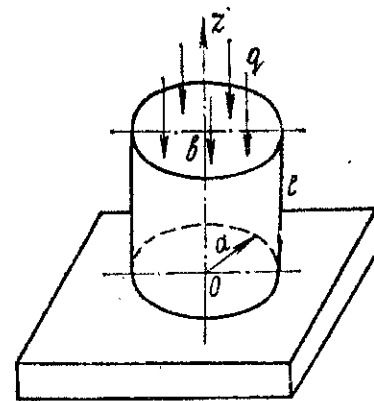


Рис. 23

118. Найти распределение потенциала электростатического поля внутри полого цилиндра радиуса a и высотой l , нижнее основание и боковая поверхность которого находятся при потенциале V , а крышка — при потенциале нуль. Начало координат выбрать на нижнем основании.

Ответ:

$$u(r, z) = V \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} \frac{\text{sh} \frac{\gamma_n z}{a}}{\text{sh} \frac{\gamma_n l}{a}} \right],$$

где γ_n — положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

119. В цилиндрическом проводнике радиуса a начиная с момента $t = 0$ выделяется джоулево тепло плотностью Q . Найти распределение температуры по сечению, считая на-

чальную температуру и температуру поверхности проводника равными нулю.

Ответ:

$$T(r, \tau) = \frac{Qa^2}{4k} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)} e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{a^2}} \right],$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

120. В цилиндре высотой l и радиуса a происходит тепловыделение с постоянной плотностью Q . Найти стационарное распределение температуры, если отвод тепла совершается через часть поверхности верхнего торца, ограниченную кругом $r = b < a$, а остальная поверхность цилиндра не пропускает тепла. Принимается, что поток тепла, вытекающий из цилиндра, равномерно распределен по сечению.

Ответ:

$$T(r, z) = -\frac{Qa^2}{k} \left[\frac{z^2}{2a^2} + \frac{2l}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\gamma_n b}{a}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)}{\gamma_n^2 J_0^2(\gamma_n)} \frac{\text{ch} \frac{\gamma_n z}{a}}{\text{sh} \frac{\gamma_n l}{a}} \right] + \text{const},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $J_1(\gamma) = 0$.

121. Цилиндрический проводник радиуса a длительное время нагревался током, выделявшим тепло плотностью Q . Исследовать процесс охлаждения проводника после выключения тока при условии, что охлаждение проводника с поверхности в течение всего процесса совершалось по закону Ньютона, причем температура среды принята равной нулю.

Ответ:

$$T(r, \tau) = \frac{2Qha^3}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{a^2}}}{\gamma_n^4 J_0(\gamma_n) \left[1 + \left(\frac{ha}{\gamma_n}\right)^2\right]},$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $haJ_0(\gamma) = \gamma J_1(\gamma)$.

122. Круглая мембрана радиуса a находится в состоянии покоя при постоянном натяжении T . В момент времени

$t=0$ к поверхности мембраны приложена равномерно распределенная нагрузка q_0 . Найти колебания мембраны.

Ответ:

$$u(r, t) = \frac{q_0 a^2}{4T} \left[1 - \frac{r^2}{a^2} - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)} \cos \frac{\gamma_n}{a} v t \right],$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

123. Определить осесимметричные колебания круглой мембраны радиуса a , вызванные пульсирующей нагрузкой $q \sin \omega t$, равномерно распределенной по всей площади мембраны и начинающей действовать с момента $t=0$.

Ответ:

$$u(r, t) = \frac{q}{\rho \omega^2} \times \\ \times \left[\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{v}\right)}{J_0\left(\frac{\omega a}{v}\right)} - 1 \right] \sin \omega t + \frac{2vaq}{\omega T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)}{\gamma_n^2 J_1(\gamma_n)} \frac{\sin \frac{\gamma_n v t}{a}}{1 - \left(\frac{v \gamma_n}{\omega a}\right)^2},$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

124. Найти электростатическое поле внутри цилиндра ($0 \leq r \leq a$, $0 \leq z \leq l$), торцы и боковая поверхность которого имеют соответственно потенциалы V_0 , V_l и V .

Ответ:

$$u(r, z) = V_0 \left(1 - \frac{z}{l}\right) + V_l \frac{z}{l} + \\ + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n] V + (-1)^n V_l - V_0}{n} \frac{I_0\left(\frac{n\pi r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi a}{l}\right)} \sin \frac{n\pi z}{l}.$$

Другая форма решения:

$$u(r, z) = V + 2(V_l - V) \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma_n z}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\gamma_n l}{a}} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} + 2(V_0 - V) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma_n (l-z)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\gamma_n l}{a}} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)},$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

125. Найти стационарное распределение температуры в цилиндре радиуса a и высотой h , если температура его нижнего основания 0, верхнего T_0 , а боковая поверхность имеет температуру, равную $\frac{T_0}{h^2} z^2$.

Ответ:

$$T(r, z) = T_0 \frac{z}{h} - \frac{8T_0}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_0\left[\frac{(2n+1)\pi r}{h}\right]}{I_0\left[\frac{(2n+1)\pi a}{h}\right]} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi z}{h}}{(2n+1)^3}.$$

Другая форма решения:

$$T(r, z) = \frac{T_0 z^2}{h^2} + \frac{T_0 (a^2 - r^2)}{2h^2} - \frac{4T_0 a^2}{h^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \gamma_n \frac{h-2z}{2a}}{\operatorname{ch} \gamma_n \frac{h}{2a}} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)},$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

126. Найти распределение температуры $T(r, \tau)$ в цилиндре радиуса a , температура поверхности которого изменяется по закону $T|_{r=a} = f(\tau)$. Начальная температура цилиндра принимается равной нулю. Рассмотреть частные случаи: а) $f(\tau) = A\tau$; б) $f(\tau) = A \sin \omega \tau$; в) $f(\tau) = A\tau e^{-\alpha \tau}$.

Ответ:

$$\text{а) } T(r, \tau) = A \left[\tau - 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \tau}}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) \right];$$

$$\text{б) } T(r, \tau) = A \left\{ \sin \omega \tau + \right. \\ \left. + 2\omega a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^4 + a^4 \omega^2) J_1(\gamma_n)} \left[e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \tau} - \cos \omega \tau - \frac{a^2 \omega}{\gamma_n^2} \sin \omega \tau \right] J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) \right\};$$

$$\text{в) } T(r, \tau) = 2A \left[\tau e^{-\alpha \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)}{(\gamma_n^2 - \alpha a^2) J_1(\gamma_n)} - \right. \\ \left. - a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) \left(e^{-\alpha \tau} - e^{-\frac{\gamma_n^2}{a^2} \tau} \right)}{(\gamma_n^2 - \alpha a^2)^2 J_1(\gamma_n)} \right],$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

127. Получить распределение потенциала в электронно-оптическом устройстве, изображенном на рис. 24.

Ответ:

$$u(r, z) = V \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma_n \frac{l}{a}} \operatorname{sh} \gamma_n \frac{z}{a} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} \right], \quad z < l;$$

$$u(r, z) = 2V \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \gamma_n \frac{l}{a} e^{-\gamma_n \frac{z}{a}} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)}, \quad z > l,$$

где γ_n — положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

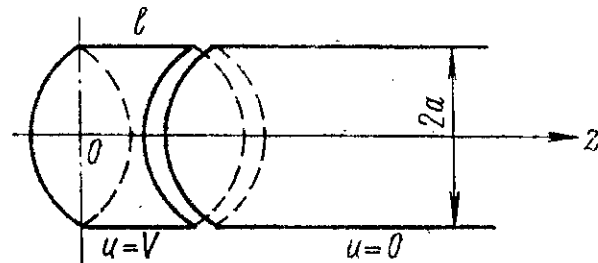


Рис. 24

128. Найти распределение температуры в цилиндре радиуса a , нагреваемом вследствие объемного тепловыделения, считая, что поток тепла с поверхности имеет заданную плотность и начальная температура цилиндра равна нулю.

Ответ:

$$T(r, \tau) = \left(\frac{Q}{k} - \frac{2q}{ka} \right) \tau + \frac{qa}{4k} \left(1 - 2 \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{2qa}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{a^2}}}{\gamma_n^2 J_0(\gamma_n)} J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right),$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $J_1(\gamma) = 0$.

129. Поток тепла Q втекает через торцы цилиндра ($0 \leq r \leq a$, $0 \leq z \leq l$) и вытекает через его боковую поверхность. Найти распределение температуры, считая, что втекающий и вытекающий потоки имеют постоянную плотность.

Ответ:

$$T(r, z) = \frac{Ql}{2\pi a^2 k} \left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{z}{l} - \frac{r^2}{2l^2} \right) + \text{const.}$$

130. Через цилиндрический образец (рис. 25) пропущена тонкая проволока, нагреваемая постоянным током, выделяющим тепло Q на единицу длины. Найти распределение температуры в образце, считая, что температура боковой поверхности цилиндра равняется нулю, а торцы излучают тепло в окружающую среду по закону Ньютона.

Ответ:

$$T(r, z) = \frac{Q}{\pi k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^3 J_1^2(\gamma_n)} \times \left[1 - \frac{ah \operatorname{ch} \gamma_n \frac{z}{a}}{\gamma_n \operatorname{sh} \gamma_n \frac{l}{a} + ah \operatorname{ch} \gamma_n \frac{l}{a}} \right] J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right),$$

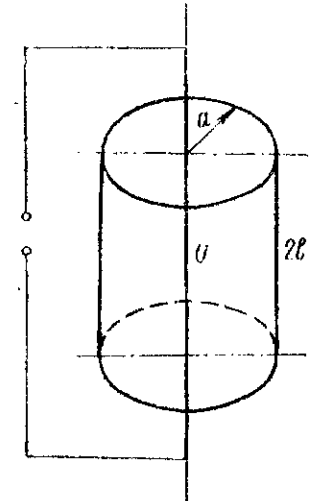


Рис. 25

где γ_n — положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

131. Найти распределение температуры в цилиндре ($0 \leq r \leq a$, $-l \leq z \leq l$), внутри которого происходит тепловыделение, а поверхность излучает тепло в окружающую среду по закону Ньютона.

Ответ:

$$T(r, z) = \frac{2Ql^2}{k} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n^3 \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n} \right)} \left[1 - \frac{\frac{hl}{\gamma_n} I_0\left(\gamma_n \frac{r}{l}\right)}{I_1\left(\gamma_n \frac{a}{l}\right) + \frac{hl}{\gamma_n} I_0\left(\gamma_n \frac{a}{l}\right)} \right] \cos \gamma_n \frac{z}{l},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = hl/\gamma$.

Другая форма решения

$$T(r, z) = \frac{2Qha^3}{k} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\frac{ah}{\gamma_n} \operatorname{ch} \gamma_n \frac{z}{a}}{\operatorname{sh} \gamma_n \frac{l}{a} + \frac{ah}{\gamma_n} \operatorname{ch} \gamma_n \frac{l}{a}} \right] \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)}{\gamma_n^4 \left[1 + \left(\frac{ah}{\gamma_n} \right)^2 \right] J_0(\gamma_n)},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\gamma J_1(\gamma) = ah J_0(\gamma)$.

132. В цилиндрическом проводнике вследствие прохождения постоянного тока начиная с момента $t=0$ выделяется джоулево тепло плотностью Q . Найти распределение температуры по сечению проводника в предположении, что теплоотдача с его поверхности происходит по закону Ньютона, а начальная температура равна нулю.

Ответ:

$$T(r, \tau) = \frac{2Qa^2}{k} \times \left\{ \frac{1}{8} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{1}{4ah} - ah \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{a^2}} J_0 \left(\gamma_n \frac{r}{a} \right)}{\gamma_n^4 \left[1 + \left(\frac{ah}{\gamma_n} \right)^2 \right] J_0(\gamma_n)} \right\},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\gamma J_1(\gamma) = haJ_0(\gamma)$.

133. Исследовать колебания круглой мембраны радиуса a , вызванные нагрузкой, приложенной в момент времени $t=0$ и равномерно распределенной с плотностью $q(t)$ по площади кольца $b < r < c$. Рассмотреть случай $q(t) = q \sin \omega t$.

Ответ:

$$u(r, t) = \frac{2v}{T} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cJ_1 \left(\frac{\gamma_n c}{a} \right) - bJ_1 \left(\frac{\gamma_n b}{a} \right)}{\gamma_n^2 J_1^2(\gamma_n)} J_0 \left(\gamma_n \frac{r}{a} \right) \int_0^t q(\tau) \sin \frac{\gamma_n v(t-\tau)}{a} d\tau,$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$.

В частном случае

$$u(r, t) = \frac{2qv}{\omega T} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\gamma_n vt}{a} - \frac{\gamma_n v}{\omega a} \sin \omega t}{1 - \left(\frac{\gamma_n v}{\omega a} \right)^2} \frac{cJ_1 \left(\frac{\gamma_n c}{a} \right) - bJ_1 \left(\frac{\gamma_n b}{a} \right)}{\gamma_n^2 J_1^2(\gamma_n)} J_0 \left(\gamma_n \frac{r}{a} \right).$$

134. Решить задачу о колебаниях круглой мембраны, возникающих под действием силы $A \sin \omega t$, приложенной в момент времени $t=0$ и равномерно распределенной по окружности радиуса $b < a$ (a — радиус мембраны).

Ответ:

$$u(r, t) = \frac{Av}{\pi \omega a T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\gamma_n vt}{a} - \frac{\gamma_n v}{\omega a} \sin \omega t}{1 - \left(\frac{\gamma_n v}{\omega a} \right)^2} \frac{J_0 \left(\frac{\gamma_n b}{a} \right) J_0 \left(\frac{\gamma_n r}{a} \right)}{\gamma_n J_1^2(\gamma_n)},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $J_0(\gamma_n) = 0$.

135. Найти распределение температуры в трубе ($a \leq r \leq b$), через внутреннюю поверхность которой втекает поток тепла плотностью q , а внешняя находится при температуре нуля. Начальная температура трубы равна нулю.

Ответ:

$$T(r, \tau) = \frac{qa}{k} \times \left\{ \ln \frac{b}{r} - \frac{\pi b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_n) J_1 \left(\gamma_n \frac{a}{b} \right)}{\gamma_n \left[J_0^2(\gamma_n) - J_1^2 \left(\gamma_n \frac{a}{b} \right) \right]} R_{\gamma_n}(r) e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{b^2}} \right\};$$

$$R_{\gamma}(r) = Y_0(\gamma) J_0 \left(\gamma \frac{r}{b} \right) - J_0(\gamma) Y_0 \left(\gamma \frac{r}{b} \right),$$

где γ_n — последовательные корни уравнения $R'_{\gamma}(a) = 0$.

136. Полубесконечная трубка со стенками, образованными коаксиальными цилиндрами радиусов a и b , нагревается с торца и охлаждается с боковой поверхности. Найти стационарное распределение температуры в трубке, считая, что температура торца равна T_0 , а температура боковых стенок поддерживается равной нулю.

Ответ:

$$T(r, z) = \pi T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_0 \left(\gamma_n \frac{r}{a} \right) e^{-\gamma_n \frac{z}{a}}}{1 + \frac{J_0(\gamma_n)}{J_0 \left(\gamma_n \frac{b}{a} \right)}}, \quad (a \leq r \leq b, \quad z \geq 0);$$

$$z_0 \left(\gamma \frac{r}{a} \right) = Y_0(\gamma) J_0 \left(\gamma \frac{r}{a} \right) - J_0(\gamma) Y_0 \left(\gamma \frac{r}{a} \right),$$

где γ_n — корни уравнения $z_0 \left(\gamma \frac{b}{a} \right) = 0$, расположенные в порядке возрастания.

137. Дать решение задачи о распределении температуры в бесконечном стержне для следующих частных случаев задания начального распределения температуры $T|_{t=0}=f(x)$:

а) $f(x) = \begin{cases} T_0 & |x| < x_0, \\ 0 & |x| > x_0; \end{cases}$

б) $f(x) = T_0 e^{-\alpha^2 x^2}$.

Ответ:

а) $T(x, t) = \frac{T_0}{2} \left[\Phi \left(\frac{x_0 + x}{2\sqrt{\tau}} \right) + \Phi \left(\frac{x_0 - x}{2\sqrt{\tau}} \right) \right];$

б) $T(x, \tau) = \frac{T_0}{\sqrt{1 + 4\alpha^2 \tau}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{1 + 4\alpha^2 \tau}}.$

138. Полубесконечное тело, ограниченное плоскостью $x=0$, имеет заданное начальное распределение температуры $T|_{t=0}=f(x)$ ($0 \leq x < \infty$). Найти последующее распределение температуры, считая, что с момента $t=0$ его граница поддерживается при нулевой температуре. Применить полученные формулы к частному случаю $f(x) = T_0$.

Ответ:

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{\tau}}} e^{-s^2} f(x - 2\sqrt{\tau}s) ds - \int_{\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-s^2} f(-x + 2\sqrt{\tau}s) ds \right],$$

в частном случае

$$T(x, \tau) = T_0 \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} \right).$$

139. Найти стационарное распределение температуры $T(x, y)$ в полубесконечном теле, ограниченном плоскостью $y=0$, часть которого ($|x| < a$) находится при заданной температуре T_0 , остальная часть ($|x| > a$) — при температуре, равной нулю (рис. 26).

Ответ:

$$T(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \psi,$$

где ψ — угол, под которым отрезок $-a \leq x \leq +a$, $y=0$ виден из точки $M(x, y)$.

140. Найти стационарное распределение температуры $T(x, y)$ у края пластины ($0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq b$), две грани которой находятся при температуре нуль, а грань $y=b$ — при температуре T_0 .

Ответ:

$$T(x, y) = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{th} \frac{\pi x}{2b} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2b} \right).$$

141. Тепловой поток Q поступает через участок $|x| < a$ плоской границы полубесконечного тела (рис. 27). Найти

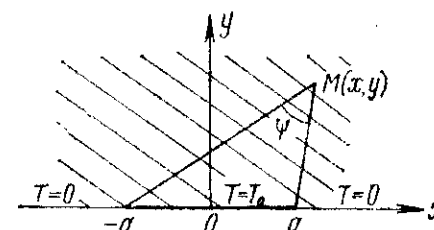


Рис. 26

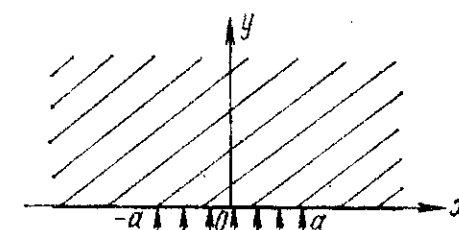


Рис. 27

стационарное распределение температуры в теле, считая поток равномерно распределенным и предполагая, что поверхность тела излучает тепло в окружающую среду по закону Ньютона.

Ответ:

$$T(x, y) = \frac{Q}{\pi a k} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda a}{\lambda (\lambda + h)} e^{-\lambda y} \cos \lambda x d\lambda.$$

142. Решить плоскую стационарную задачу теории теплопроводности для квадранта (рис. 28), одна грань ($y=0$) которого находится при температуре нуль, а другая покрыта тепловой изоляцией, за исключением участка $0 \leq y \leq b$, через который втекает поток тепла заданной постоянной плотности q . Получить распределение теплового потока через грань $y=0$.

Ответ:

$$T(x, y) = \frac{2q}{\pi k} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \lambda b}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \sin \lambda y d\lambda.$$

$$q(x, 0) = \frac{q}{\pi} \ln \left(1 + \frac{b^2}{x^2} \right).$$

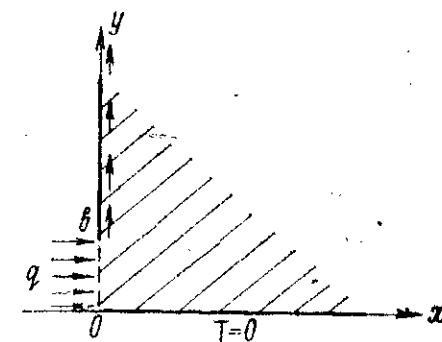


Рис. 28

143. Дать решение плоской электростатической задачи для полупространства ($-\infty < x < +\infty$, $y \geq 0$) при условии, что плоскость $y=0$ находится при заданном распределении потенциала $u|_{y=0} = f(x)$.

Ответ:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - x)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + y \operatorname{tg} \theta) d\theta.$$

144. Найти распределение электростатического потенциала в плоских электронных линзах, изображенных на рис. 29.

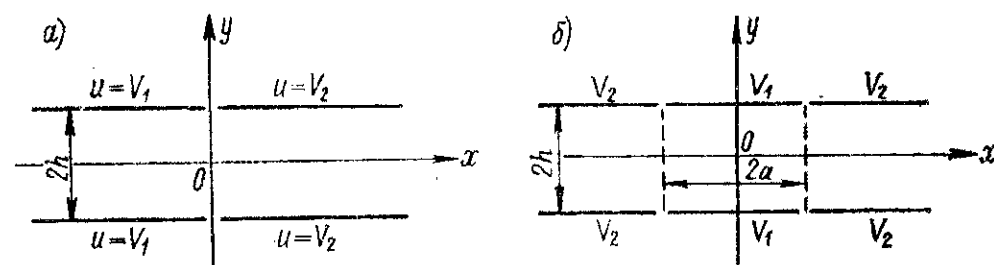


Рис. 29

Ответ:

$$а) u(x, y) = \frac{V_2 + V_1}{2} + \frac{V_2 - V_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda h} \frac{\sin \lambda x}{\lambda} d\lambda;$$

$$б) u(x, y) = V_2 + 2 \frac{V_1 - V_2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda a}{\lambda} \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda h} \cos \lambda x d\lambda.$$

145. Найти распределение потенциала в цилиндрической электронной линзе, изображенной на рис. 30.

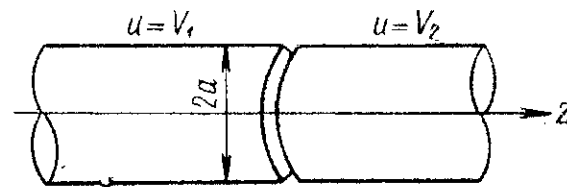


Рис. 30

Ответ:

$$u(r, z) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_2 - V_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{I_0(\lambda r)}{I_0(\lambda a)} \frac{\sin \lambda z}{\lambda} d\lambda.$$

146. Найти стационарное распределение температуры в квадранте ($x \geq 0$, $y \geq 0$), грань $y=0$ которого поддерживается при температуре T_0 , а грань $x=0$ отдает тепло в окружающую среду по закону Ньютона.

Ответ:

$$T(x, y) = T_0 \left[1 - \frac{2h}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x} \sin \lambda y}{\lambda (\lambda + h)} d\lambda \right].$$

147. Найти потенциал бесконечной нити с линейной плотностью заряда q , помещенной на расстоянии b от проводящей заземленной плоскости $y=0$ параллельно этой плоскости.

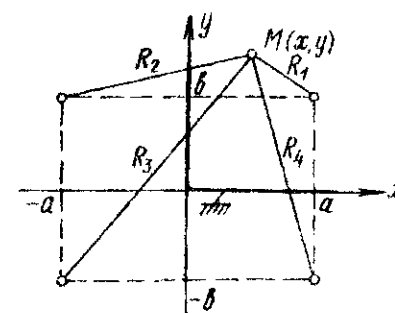


Рис. 31

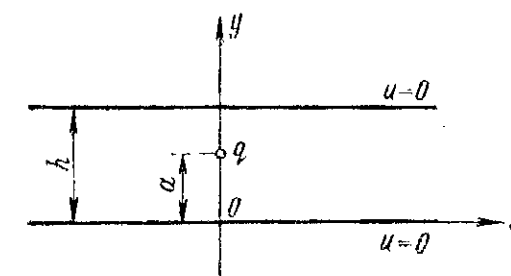


Рис. 32

Ответ:

$$u(x, y) = -2q \ln R_1 + 2q \ln R_2,$$

$$R_1 = \sqrt{x^2 + (y - b)^2}, \quad R_2 = \sqrt{x^2 + (y + b)^2}.$$

148. Найти распределение потенциала внутри заземленного квадранта (рис. 31), если источником поля является заряженная бесконечная нить с плотностью заряда q на единицу длины, проходящая через точку с координатами (a, b) .

Ответ:

$$u(x, y) = -2q \ln \frac{R_1 R_3}{R_2 R_4},$$

$$R_1 = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \quad R_2 = \sqrt{(x + a)^2 + (y - b)^2},$$

$$R_3 = \sqrt{(x + a)^2 + (y + b)^2}, \quad R_4 = \sqrt{(x - a)^2 + (y + b)^2}.$$

149. Тонкая заряженная нить с зарядом q на единицу длины помещена между двумя проводящими плоскостями (рис. 32). Найти распределение электростатического потенциала, а также плотность заряда на плоскостях.

Ответ:

$$u(x, y) = 4q \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \lambda (h-a)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h} \operatorname{sh} \lambda y \cos \lambda x d\lambda, \quad y < a.$$

Соответствующая формула для $y > a$ получается из предыдущего выражения перестановкой букв y и a . Плотность заряда на пластинах

$$\sigma(x) = -\frac{q}{2h} \sin \frac{\pi a}{h} \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi a}{h}} & (y=0); \\ \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi a}{h}} & (y=h). \end{cases}$$

150. Между плоскими границами двух массивных тел, изготовленных из железа с магнитной проницаемостью μ , помещен линейный ток J (рис. 33). Найти магнитное поле в воздушном зазоре.

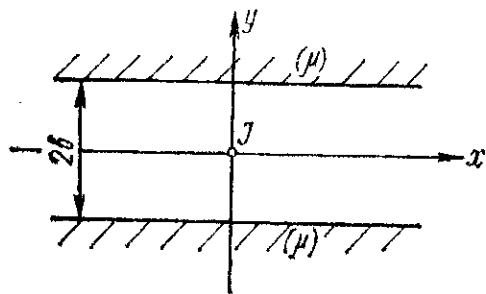


Рис. 33

Ответ:

$$H_x = -\frac{2J}{c} \left\{ \frac{y}{x^2 + y^2} - (\mu - 1) \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda b} \operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b + \mu \operatorname{sh} \lambda b} \cos \lambda x d\lambda \right\},$$

$$H_y = \frac{2J}{c} \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2} + (\mu - 1) \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda b} \operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b + \mu \operatorname{sh} \lambda b} \sin \lambda x d\lambda \right\}.$$

151. Найти потенциал точечного заряда q , помещенного на оси бесконечного проводящего цилиндра радиуса a .

Ответ:

$$u(r, z) = \frac{q}{\sqrt{z^2 + r^2}} - \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(\lambda a)}{I_0(\lambda a)} I_0(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda.$$

Указание.

$$K_0(\lambda a) = \int_0^\infty \frac{\cos \lambda z}{\sqrt{a^2 + z^2}} dz.$$

152. Найти стационарное распределение температуры в полупространстве ($z \geq 0$), на границе которого поддержи-

вается заданное распределение температуры $T|_{z=0} = f(r)$. Рассмотреть частный случай

$$f(r) = \begin{cases} T_0, & r < a; \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Ответ:

$$T(r, z) = \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \int_0^\infty f(\rho) J_0(\lambda \rho) \rho d\rho.$$

В частном случае

$$T(r, z) = T_0 a \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) J_1(\lambda a) d\lambda.$$

153. Решить предыдущую задачу в предположении, что полупространство нагревается тепловым потоком постоянной плотности q , падающим на площадь круга a , а отвод тепла осуществляется путем теплоотдачи с границы тела в окружающую среду по закону Ньютона.

Ответ:

$$T(r, z) = \frac{qa}{k} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda + h} J_1(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda.$$

154. В неограниченную среду, начальная температура которой принимается равной нулю, вставляется цилиндрический стержень радиуса a , нагретый до температуры $f(r)$. Найти распределение температуры $T(r, \tau)$, предполагая тепловые постоянные материалов стержня и среды одинаковыми. Рассмотреть частные случаи:

а) $f(r) = T_0$; б) $f(r) = Ar^2$.

Ответ:

а) $T(r, \tau) = T_0 a \int_0^\infty e^{-\lambda^2 \tau} J_1(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda;$

б) $T(r, \tau) = A a^3 \int_0^\infty \left[J_1(\lambda a) + 2 \frac{\lambda a J_0(\lambda a) - 2 J_1(\lambda a)}{(\lambda a)^2} \right] e^{-\lambda^2 \tau} J_0(\lambda r) d\lambda.$

155. Найти распределение потенциала электростатического поля в пространстве между двумя заземленными плоскими электродами $z = \pm a$, созданного зарядом q , помещенным в точке $r = 0, z = 0$.

Ответ:

$$u(r, z) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + z^2}} - q \int_0^\infty e^{-\lambda a} \frac{\operatorname{ch} \lambda z}{\operatorname{ch} \lambda a} J_0(\lambda r) d\lambda.$$

156. Найти электростатическое поле точечного заряда q , помещенного вблизи плоской границы раздела двух сред с различными диэлектрическими постоянными (рис. 34).

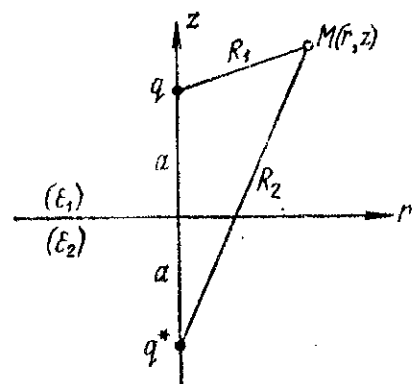


Рис. 34

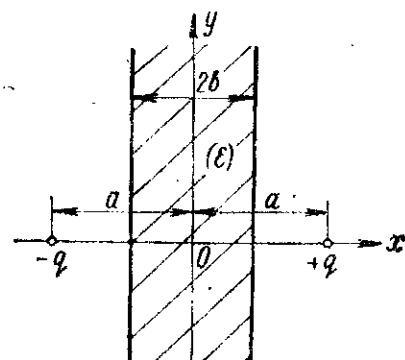


Рис. 35

Ответ:

$$u_1 = \frac{q}{\varepsilon_1} \frac{1}{R_1} + \frac{q^*}{\varepsilon_1} \frac{1}{R_2}, \quad u_2 = \frac{q}{\varepsilon} \frac{1}{R_1},$$

$$q^* = q \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2},$$

$$R_{1,2} = \sqrt{r^2 + (z \mp a)^2}.$$

157. Найти электростатическое поле двух точечных зарядов $+q$ и $-q$, между которыми помещена пластинка из диэлектрика с постоянной ε (рис. 35). Вычислить распределение поля на линии, соединяющей заряды.

Ответ:

$$E_z|_{r=0} = \begin{cases} -2q \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda(a-b)} \operatorname{ch} \lambda z}{\operatorname{sh} \lambda b + \varepsilon \operatorname{ch} \lambda b} d\lambda, & |z| < b; \\ \frac{q}{(|z| - a)^2} + q \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \lambda b - \varepsilon \operatorname{ch} \lambda b}{\operatorname{sh} \lambda b + \varepsilon \operatorname{ch} \lambda b} e^{-\lambda(a-2b+|z|)} \lambda d\lambda, & |z| > b. \end{cases}$$

Глава IV

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Преобразованием Лапласа от функции $f(t)$, заданной в промежутке $(0, \infty)$, называется интеграл

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \quad (1)$$

где p — некоторый комплексный параметр, обеспечивающий существование данного интеграла. Можно показать, что при определенных ограничениях, наложенных на функцию $f(t)$, существует такое число C , что в области $\operatorname{Re} p > C$ преобразование Лапласа (1) является аналитической функцией комплексного переменного p и справедлива теорема обращения Римана — Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{f}(p) e^{pt} dp,$$

где L — прямая, параллельная мнимой оси и лежащая в области $\operatorname{Re} p > C$. Имеют место следующие важные теоремы.

Теорема смещения:

$$\text{если } \bar{F}(p) = \bar{f}(p + \alpha), \text{ то } F(t) = f(t) e^{-\alpha t}.$$

Теорема запаздывания:

$$\text{если } \bar{F}(p) = \bar{f} e^{-\alpha p}, \text{ то } F(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \alpha; \\ f(t - \alpha), & t > \alpha. \end{cases}$$

Теорема подобия:

$$\text{если } \bar{F}(p) = \bar{f}(\alpha p), \text{ то } F(t) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right).$$

Теорема Бореля (о свертке):

$$\text{если } \bar{F} = \bar{f}_1 \bar{f}_2,$$

$$\text{то } F(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau,$$

причем равные интегралы, входящие в последнюю формулу, называются сверткой Лапласа двух функций. В частном случае

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{p} \bar{f}.$$

Теорема о производных:

$$\overline{f^{(n)}} = p^n \overline{f} - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

в частности,

$$\overline{f'} = p \overline{f} - f(0), \quad \overline{f''} = p^2 \overline{f} - p f(0) - f'(0).$$

158. Найти функции по их преобразованиям Лапласа без помощи теоремы обращения Римана — Меллина:

а) $\overline{f} = \frac{p+c}{p^2+ap+b}$; б) $\overline{f} = \frac{p}{(p^2+a^2)^2}$; в) $\overline{f} = \frac{1}{p^4+4}$;

г) $\overline{f} = \frac{\sqrt{p}}{p-1}$; д) $\overline{f} = \frac{1}{\sqrt{a^2 p^2 + 1}}$.

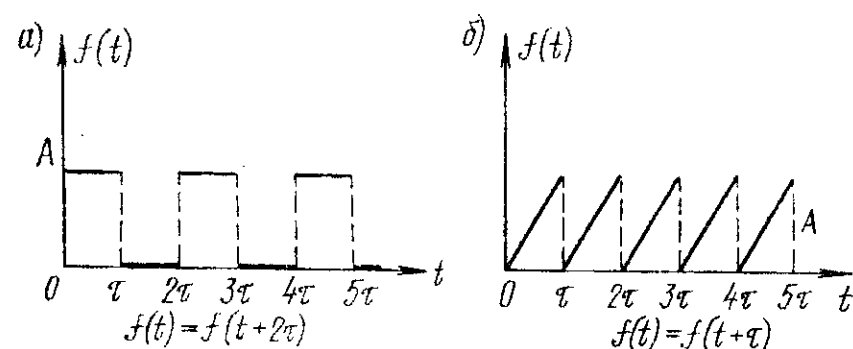


Рис. 36

Ответ:

а) $f(t) = e^{-\frac{a}{2}t} \left(\cos \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} t + \frac{c - \frac{a}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} \sin \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} t \right)$;

б) $f(t) = \frac{t}{2a} \sin at$; в) $f(t) = \frac{1}{4} (\sin t \operatorname{ch} t - \cos t \operatorname{sh} t)$;

г) $f(t) = e^t \Phi(\sqrt{t}) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$; д) $f(t) = \frac{1}{a} J_0\left(\frac{t}{a}\right)$.

159. Найти преобразование Лапласа от следующих функций, заданных графически (рис. 36).

В следующих примерах требуется найти решения дифференциальных уравнений и систем уравнений, удовлетворяющих определенным начальным условиям.

160. $y'' + 3y' + 2y = 4$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Ответ: $y = 2$.

161. $y'' + n^2 y = a \sin(mt + \alpha)$, $m \neq n$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Ответ:

$$y = \frac{a}{n(m^2 - n^2)} [m \cos \alpha \sin nt + n \sin \alpha \cos nt - n \sin(mt + \alpha)].$$

162. $y'' + n^2 y = a \sin(nt + \alpha)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Ответ:

$$y = \frac{a}{2n^2} [\sin nt \cos \alpha - nt \cos(nt + \alpha)].$$

163. $y'' - 4y = e^{2t}$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$.

Ответ:

$$y = y_0 \operatorname{ch} 2t + \left(\frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{8} \right) \operatorname{sh} 2t + \frac{1}{4} t e^{2t}.$$

164. $y''' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Ответ:

$$y = 1 - \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}.$$

165.
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = x \end{cases} \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0.$$

Ответ:

$$x(t) = \frac{1}{3} (x_0 + y_0 + z_0) e^t - \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{2}} \left[(-2x_0 + y_0 + z_0) \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} - (y_0 - z_0) \sqrt{3} \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right].$$

166.
$$\begin{cases} x'' - 8x + \sqrt{6}y' = 0, \\ -\sqrt{6}x' + y'' + 2y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = y(0) = y'(0) = 0.$$

Ответ:

$$x = \frac{1}{2} (3 \operatorname{ch} 2t - \cos 2t), \quad y = \frac{\sqrt{6}}{2} (\operatorname{sh} 2t - \sin 2t).$$

167.
$$\begin{cases} x'' - 4x - y' - 2y + z' - 2z = \sin 2t, \\ 2x' - y'' + 3y + z'' - 4z = 0, \\ x' - 2x - y + z'' - 4z = 0, \end{cases} \quad \text{начальные условия — нулевые.}$$

Ответ:

$$x = -\frac{8}{65} \sin 2t + \frac{3}{20} \operatorname{sh} t + \frac{5}{156} \operatorname{sh} 3t.$$

$$168. \begin{cases} x_n' = -cx_n + cx_{n-1}, & n = 1, 2, \dots \\ x_0' = -cx_0, \\ x_0 = 1, \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$x_n = \frac{1}{n!} (ct)^n e^{-ct}.$$

169. Найти ток в электрической цепи, изображенной на рис. 37, если $I|_{t=0} = 0$ и $q|_{t=0} = 0$, для следующих случаев:

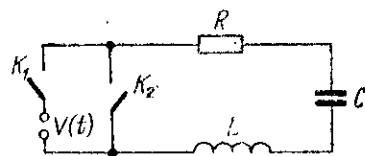


Рис. 37

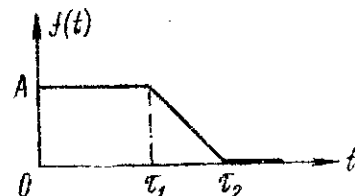


Рис. 38

а) $V(t)$ — произвольная функция времени, ключ K_1 замыкается в момент времени $t=0$. Рассмотреть конкретные частные случаи:

$$V(t) = E = \text{const} \quad \text{и} \quad V(t) = E \sin \omega t;$$

б) $V(t) = E$; в момент времени $t=0$ замыкается ключ K_1 , а в момент $t=T$ — ключ K_2 .

170. Найти движение частицы массой m и зарядом e , находящейся в электрическом поле \vec{E} , параллельном OX , и магнитном поле \vec{H} , параллельном OZ . Частица в момент $t=0$ обладает скоростью (u, v, w) и находится в начале координат.

Ответ:

$$x = \frac{Hv + cE}{Ha} (1 - \cos \alpha t) + \frac{u}{\alpha} \sin \alpha t;$$

$$y = vt - \frac{Hv - cE}{Ha} (\alpha t - \sin \alpha t) - \frac{u}{\alpha} (1 - \cos \alpha t);$$

$$z = wt.$$

Здесь c — скорость света, $\alpha = eH/mc$.

171. Частица массой m и зарядом e вылетает из начала координат со скоростью $(u, 0, 0)$. На нее действует магнитное поле H , параллельное оси OZ , и сопротивление среды kmV , где V — скорость частицы. Показать, что ее координаты в момент времени t равны:

$$x = \frac{ku}{\alpha^2 + k^2} - \frac{ku}{\alpha^2 + k^2} e^{-kt} \cos \alpha t + \frac{\alpha u}{\alpha^2 + k^2} e^{-kt} \sin \alpha t,$$

$$y = -\frac{\alpha u}{\alpha^2 + k^2} + \frac{u}{\alpha^2 + k^2} e^{-kt} (\alpha \cos \alpha t + k \sin \alpha t),$$

$$\alpha = \frac{eH}{mc}.$$

172. Найти закон движения материальной точки под действием силы $f(t)$, заданной графиком (рис. 38).

Ответ:

$$x(t) = \frac{A}{m} \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & 0 < t < \tau_1; \\ \frac{t^2}{2} - \frac{(t - \tau_1)^3}{6(\tau_2 - \tau_1)}, & \tau_1 < t < \tau_2; \\ \frac{t^2}{2} - \frac{1}{6} [(t - \tau_1)^2 + (t - \tau_1)(t - \tau_2) + (t - \tau_2)^2], & t > \tau_2. \end{cases}$$

173. Конец $x=0$ полубесконечной линии, обладающей самоиндукцией L и емкостью C на единицу длины, присоединяется в момент времени $t=0$ к источнику э. д. с. $E = f(t)$. Найти напряжение $u(x, t)$ в каждой точке линии.

Ответ:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{v}; \\ f\left(t - \frac{x}{v}\right), & t > \frac{x}{v}. \end{cases}$$

174. К концу $x=0$ полубесконечной линии без искажений ($RC = LG$) подключается источник э. д. с. $E = f(t)$. Найти напряжение $u(x, t)$ в линии.

Ответ:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{v}; \\ e^{-x\sqrt{RG}} f\left(t - \frac{x}{v}\right), & t > \frac{x}{v}, \end{cases}$$

175. Конденсатор емкостью C_0 , заряженный до потенциала V , разряжается в момент $t=0$ на полубесконечную линию без потерь ($R=G=0$). Найти распределение тока $I(x, t)$ в линии.

Ответ:

$$I(x, t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{x}{v}; \\ \frac{V}{Z} e^{-\alpha(t - \frac{x}{v})}, & t > \frac{x}{v}, \end{cases}$$

где $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ — волновое сопротивление линии, $\alpha = \frac{1}{C_0 Z}$.

176. Вход линии без потерь ($R=G=0$) подключается к источнику постоянной э. д. с. E , а конец $x=l$ замыкается на землю через нагрузку. Найти напряжение на нагрузке, если она представляет собой:

- а) R_0 — сосредоточенное сопротивление;
- б) C_0 — сосредоточенную емкость;
- в) L_0 — сосредоточенную индуктивность.

Ответ:

а) $u|_{x=l} = E \times$

$$\times \begin{cases} 1 - \frac{R_0 e^{-\frac{\mu t}{T}}}{\mu \sqrt{Z^2 - R_0^2}} \left[1 - 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n\pi \sin \frac{n\pi t}{T} - \mu \cos \frac{n\pi t}{T}}{\mu^2 + n^2 \pi^2} \right], & R_0 < Z, \\ 1 - \frac{2R_0 e^{-\frac{\nu t}{T}}}{\sqrt{R_0^2 - Z^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\frac{2n+1}{2} \pi \cos \frac{(2n+1)\pi t}{2T} + \nu \sin \frac{(2n+1)\pi t}{2T}}{\nu^2 + \left(\frac{2n+1}{2} \pi\right)^2}, & R_0 > Z, \end{cases}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \ln \frac{Z + R_0}{Z - R_0}, \quad \nu = \frac{1}{2} \ln \frac{R_0 + Z}{R_0 - Z}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$Z = Lv, \quad T = \frac{l}{v};$$

б) $u|_{x=l} = E \left[1 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{2\gamma_n + \sin 2\gamma_n} \cos \gamma_n \frac{t}{T} \right],$

$$\operatorname{ctg} \gamma_n = \frac{\gamma_n}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{1C}{C_0}.$$

в) $u|_{x=l} = E \left[\frac{1}{1+\beta} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{2\gamma_n - \sin 2\gamma_n} \cos \gamma_n \frac{t}{T} \right],$

$$\operatorname{tg} \gamma_n = -\frac{\gamma_n}{\beta}, \quad \beta = \frac{lL}{L_0}.$$

177. Найти форму колебаний струны ($-l \leq x \leq l$) с сосредоточенным грузиком массой m_0 , укрепленным в ее средней точке. При решении задачи считать, что начальная форма струны соответствует смещению грузика на заданную малую величину h , а начальная скорость точек струны равна нулю.

Ответ:

$$u(x, t) = 2ha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_n \sin \gamma_n \left(1 - \frac{|x|}{l}\right)}{\gamma_n^2 (\gamma_n + \sin \gamma_n \cos \gamma_n)} \cos \frac{\gamma_n v t}{l},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \alpha/\gamma$, $\alpha = m/m_0$, $m = 2\rho l$ — масса струны.

178. Исследовать продольные колебания стержня, конец $x=0$ которого закреплен, а на конце $x=l$ находится сосредоточенный груз массой M_0 , получающий в момент времени $t=0$ заданное смещение δ без сообщения начальной скорости.

Ответ:

$$u(x, t) = 2\delta a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_n \sin \gamma_n \frac{x}{l}}{\gamma_n^2 (\gamma_n + \sin \gamma_n \cos \gamma_n)} \cos \frac{\gamma_n v t}{l},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \alpha/\gamma$, $\alpha = M/M_0$, $M = \rho l S$ — масса стержня.

179. Линия, свободная от искажений, длиной l заряжена до потенциала 1. Конец $x=l$ изолирован, и в момент времени $t=0$ конец $x=0$ заземляется. Определить потенциал в точке x .

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} e^{-\frac{Rt}{L}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi v t}{2l}.$$

180. Кабель сопротивлением R и емкостью C на единицу длины заземлен в точке $x=l$. При $t=0$ в точке $x=0$ к ка-

белю через емкость C_0 приложена постоянная э. д. с. E_0 . Найти потенциал $u(x, t)$.

Ответ:

$$u(x, t) = 2E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n \left(1 - \frac{x}{l}\right) e^{-\frac{\gamma_n^2 t}{RCl^2}}}{\left(1 + \frac{Cl}{C_0}\right) \sin \gamma_n + \gamma_n \cos \gamma_n},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $\gamma \operatorname{tg} \gamma = Cl/C_0$.

181. Получить решение задачи 64 в форме, удобной для малых времен τ и больших толщин a .

Ответ:

$$a) T(x, \tau) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Phi\left(\frac{2a - x + 2na}{2\sqrt{\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{x + 2na}{2\sqrt{\tau}}\right) \right];$$

$$b) T(x, \tau) = A \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\tau + \frac{(x + 2na)^2}{2} \right] \left[1 - \Phi\left(\frac{x + 2na}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] - \right. \\ \left. - (x + 2na) \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\frac{(x + 2na)^2}{4\tau}} - \left[\tau + \frac{(2a - x + 2na)^2}{2} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \Phi\left(\frac{2a - x + 2na}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] + (2a - x + 2na) \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\frac{(2a - x + 2na)^2}{4\tau}} \right\}.$$

182. Грань $x=0$ пластинки поддерживается при температуре T_0 , а к грани $x=a$ присоединена тепловая емкость. Получить выражения для плотностей теплового потока на гранях пластины.

В начальный момент времени температура равна нулю.

Ответ:

$$q|_{x=0} = \frac{2kT_0}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \alpha^2 \gamma_n^2}{1 + \alpha + \alpha^2 \gamma_n^2} e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{a^2}},$$

$$q|_{x=a} = \frac{2akT_0}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(1 + \alpha + \alpha^2 \gamma_n^2) \sin \gamma_n} e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{a^2}},$$

где γ_n — последовательные положительные корни уравнения $\operatorname{ctg} \gamma = \alpha \gamma$; $\alpha = C_0/C\rho a$; C_0 — тепловая емкость на единицу площади.

183. В цилиндрическом проводнике радиуса a начиная с момента времени $t=0$ выделяется тепло плотностью Q . Найти температуру на оси проводника, считая, что отвод тепла с его поверхности совершается через тепловую емкость и начальная температура проводника равна нулю.

Ответ:

$$T|_{r=0} = \frac{Q}{k} \left\{ \frac{\tau}{2\alpha + 1} + \frac{a^2 \alpha (1 + 4\alpha)}{4(2\alpha + 1)^2} + 2a^2 \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{a^2}}}{\gamma_n^2 J_0(\gamma_n) (\alpha^2 \gamma_n^2 + 2\alpha + 1)} \right\},$$

где γ_n — положительные корни уравнения $J_1(\gamma) + \alpha \gamma J_0(\gamma) = 0$; $\alpha = C_0/2\pi a^2 C\rho$; C_0 — тепловая емкость на единицу длины.

184. На холодный цилиндр радиуса a в момент времени $t=0$ надевается нагретая тонкая цилиндрическая оболочка, покрытая снаружи теплоизолирующим слоем (рис. 39). Найти распределение температуры в цилиндре, считая начальную температуру цилиндра и оболочки равной соответственно нулю и T_0 и пренебрегая температурным перепадом по толщине оболочки.

Ответ:

$$T(r, \tau) = T_0 \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{2\alpha}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) e^{-\gamma_n^2 \frac{\tau}{a^2}}}{J_0(\gamma_n) \left(1 + \frac{1}{2\alpha} + \frac{\alpha \gamma_n^2}{2}\right)} \right].$$

Здесь γ_n — положительные корни уравнения $J_1(\gamma) + \alpha \gamma J_0(\gamma) = 0$; $\alpha = C_0/2\pi a^2 C\rho$; C_0 — тепловая емкость оболочки на единицу длины.

185. Плоская граница полубесконечного тела начиная с момента $t=0$ поддерживается при температуре, изменяющейся по заданному закону $T|_{x=0} = f(\tau)$. Найти значение температуры в каждой точке тела, принимая его начальную температуру равной нулю. Рассмотреть частные случаи:

$$a) f(\tau) = T_0; \quad б) f(\tau) = A\tau; \quad в) f(\tau) = \begin{cases} T_0, & 0 \leq \tau < \tau_0, \\ 0, & \tau > \tau_0. \end{cases}$$

Ответ:

$$T(x, \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-u^2} f\left(\tau - \frac{x^2}{4u^2}\right) du, \quad (x > 0).$$

В частных случаях:

$$a) T(x, \tau) = T_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} \right) \right];$$

$$б) T(x, \tau) = A\tau \left\{ \left(1 + \frac{x^2}{2\tau} \right) \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] - \frac{x}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} \right\};$$

$$в) T(x, \tau) = T_0 \begin{cases} 1 - \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} \right), & 0 \leq \tau \leq \tau_0, \\ \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau - \tau_0}} \right) - \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} \right), & \tau \geq \tau_0. \end{cases}$$

186. Решить предыдущую задачу, считая, что на границе вместо температуры задан тепловой поток постоянной плотности q_0 .

Ответ:

$$T(x, \tau) = \frac{q_0}{k} \left\{ \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} - x \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] \right\}.$$

187. Полубесконечное тело, нагретое до начальной температуры T_0 , излучает тепло с плоской границы $x=0$. Найти распределение температуры в теле, считая, что излучение происходит по закону Ньютона.

Ответ:

$$T(x, \tau) = T_0 \left\{ \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} \right) + e^{h(x+\sqrt{\tau})} \left[1 - \Phi \left(h\sqrt{\tau} + \frac{x}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] \right\}.$$

188. Через плоскую границу полубесконечного тела начиная с момента времени $t=0$ осуществляется импульсная подача теплового потока по закону $q=f(\tau)$, где

$$f(\tau) = \begin{cases} q_0, & 0 < \tau < \tau_0, \\ 0, & \tau_0 < \tau < \tau^*, \end{cases} \quad f(\tau + \tau^*) = f(\tau).$$

Найти распределение температуры в теле после большого числа циклов, считая, что начальная температура тела равна нулю, и пренебрегая теплоотдачей с поверхности тела в окружающую среду.

Ответ: для ограниченных x и $\tau \rightarrow \infty$

$$T \approx \frac{2q_0\tau_0}{k\sqrt{\pi\tau^*}} \sqrt{\tau}.$$

189. Два полубесконечных тела из различных материалов, одно из которых нагрето до температуры T_0 , а другое имеет температуру, равную нулю, приводятся в контакт своими плоскими границами начиная с момента $t=0$ (рис. 40). Найти закон выравнивания температур.

Ответ:

$$T(x, t) = \frac{T_0\alpha}{1+\alpha} \left[1 + \frac{1}{\alpha} \Phi \left(\frac{x\sqrt{b_1}}{2\sqrt{t}} \right) \right], \quad x > 0;$$

$$T(x, t) = \frac{T_0\alpha}{1+\alpha} \left[1 - \Phi \left(-\frac{x\sqrt{b_2}}{2\sqrt{t}} \right) \right], \quad x < 0,$$

где $b_i = \frac{c_i\rho_i}{k_i}$ ($i=1, 2$), $\alpha = \sqrt{\frac{c_1\rho_1k_1}{c_2\rho_2k_2}}$.

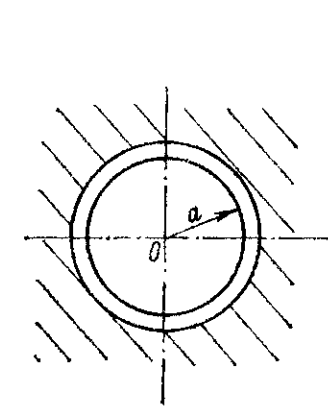


Рис. 39

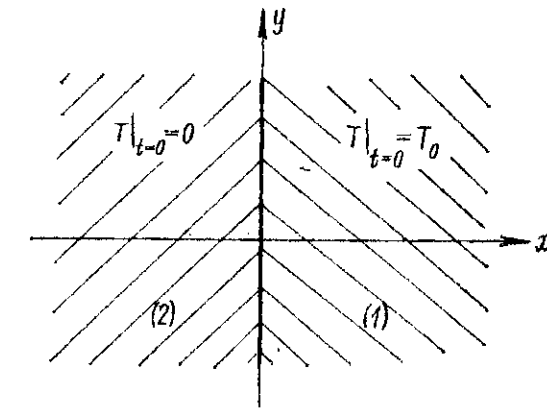


Рис. 40

190. Тело, ограниченное изнутри сферической поверхностью радиуса a , снаружи неограничено. Начальная температура равна нулю, а на его поверхности температура равна T_0 . Найти температуру в момент времени t .

Ответ:

$$T(r, \tau) = \frac{T_0 a}{r} \left[1 - \Phi \left(\frac{r-a}{2\sqrt{\tau}} \right) \right].$$

191. К концу $x=0$ полубесконечного кабеля ($L=0$) подключается в момент времени $t=0$ постоянная э. д. с. E . Найти напряжение в каждой точке линии.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{E}{2} \left\{ e^{-x\sqrt{RG}} \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} - \sqrt{\frac{Gt}{C}} \right) \right] + e^{x\sqrt{RG}} \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} + \sqrt{\frac{Gt}{C}} \right) \right] \right\}.$$

192. Найти распределение температуры внутри тела, имеющего форму двугранного угла ($x > 0, y > 0$), поверхность которого с момента времени $t = 0$ поддерживается при температуре T_0 (начальная температура принимается равной нулю).

Ответ:

$$T(x, y, \tau) = T_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right) \Phi\left(\frac{y}{2\sqrt{\tau}}\right) \right].$$

Указание. Решение искать в форме $T = T_0[1 + u(x, t)v(y, t)]$.

193. Найти распределение температуры внутри октанта ($x > 0, y > 0, z > 0$), грани которого начиная с момента $t = 0$ поддерживаются при постоянной температуре T_0 , а начальная температура равна нулю.

Ответ:

$$T(x, y, z, \tau) = T_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right) \Phi\left(\frac{y}{2\sqrt{\tau}}\right) \Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\tau}}\right) \right].$$

194. Диффузионное вещество распределено в полупространстве с заданной начальной концентрацией

$$C|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} C_0, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Найти плотность потока вещества через границу $x = 0$, на которой начиная с момента $t = 0$ поддерживается концентрация, равная нулю.

Ответ:

$$q|_{x=0} = \frac{\sqrt{DC_0}}{\sqrt{\pi t}} \left(1 - e^{-\frac{a^2}{4Dt}} \right).$$

195. Линия бесконечной длины ($x > 0$) обладает сопротивлением R и емкостью C на единицу длины. Начальные ток и потенциал равны нулю. При $t = 0$ в точке $x = 0$ приложена единичная э. д. с. через импеданс. Найти потенциал в произвольной точке x линии, если импеданс представляет собой:

- а) R_0 — сосредоточенное сопротивление;
- б) C_0 — сосредоточенную емкость.

Ответ:

$$\text{а) } u(x, t) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right) -$$

$$- e^{\frac{Rt}{R_0^2 C} + \frac{Rx}{R_0}} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{Rt}{C}} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right) \right];$$

$$\text{б) } u(x, t) = e^{\frac{Ct}{C_0^2 R} + \frac{Cx}{C_0}} \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{C_0}\sqrt{\frac{Ct}{R}} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right) \right].$$

196. Граница полупространства ($0 \leq x < \infty, -\infty < y < +\infty$) начиная с момента времени $t = 0$ поддерживается при температуре, являющейся заданной функцией координаты $y: T|_{x=0} = f(y)$. Дать решение задачи теплопроводности, считая начальную температуру равной нулю.

Ответ:

$$T(x, y, \tau) = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{x^2 + (y-s)^2} e^{-\frac{x^2 + (y-s)^2}{4\tau}} ds.$$

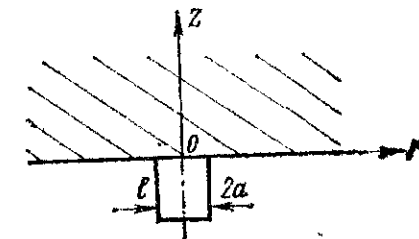


Рис. 41

197. Диффундирующее вещество поступает в полупространство $z > 0$ через отверстие в непроницаемой стенке $z = 0$ из тонкой цилиндрической трубки длиной l , закрытой с другого конца (рис. 41). Определить количество вещества, заключенного в трубке, как функцию времени, считая, что поток вещества в сечении трубки имеет постоянную плотность, а начальное значение концентрации вещества в трубке и полупространстве равно соответственно C_0 (на единицу длины) и нулю.

Ответ:

$$M(t) = \frac{2M_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(1 - \cos \frac{ax}{l}\right) e^{-\frac{Dtx^2}{l^2}}}{1 + \sin^2 x - 2 \sin x \sin \left(1 + \frac{a}{l}\right)x} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx,$$

где a — радиус трубки; M_0 — начальное количество вещества, заключенного в ней ($M_0 = C_0 l$).

198. Решить задачу 176 волновым методом.

Ответ*:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } u|_{x=l} &= \begin{cases} 0, & 0 < t < T, \\ E \left[1 - \left(\frac{Z - R_0}{Z + R_0} \right)^N \right], & (2N - 1)T < t < (2N + 1)T, \\ & N = 1, 2, 3, \dots; \end{cases} \\
 \text{б) } u|_{x=l} &= 2E \begin{cases} 0, & 0 < t < T, \\ 1 - e^{-\alpha \left(\frac{t}{T} - 1 \right)}, & T < t < 3T, \\ -e^{-\alpha \left(\frac{t}{T} - 1 \right)} + \left[1 + 2\alpha \left(\frac{t}{T} - 3 \right) \right] e^{-\alpha \left(\frac{t}{T} - 3 \right)}, & 3T < t < 5T, \\ \dots & \dots \\ \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{\alpha \left[\frac{t}{T} - (2n+1) \right]} L_n(2s) e^{-s} ds & (2N - 1)T < t < (2N + 1)T, \quad N = 1, 2, 3, \dots; \end{cases} \\
 \text{в) } u|_{x=l} &= 2E \begin{cases} 0, & 0 < t < T, \\ e^{-\beta \left(\frac{t}{T} - 1 \right)}, & T < t < 3T, \\ e^{-\beta \left(\frac{t}{T} - 1 \right)} - \left[1 - 2\beta \left(\frac{t}{T} - 3 \right) \right] e^{-\beta \left(\frac{t}{T} - 3 \right)}, & 3T < t < 5T, \\ \dots & \dots \\ \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n e^{-\beta \left[\frac{t}{T} - (2n+1) \right]} L_n \left\{ 2\beta \left[\frac{t}{T} - (2n+1) \right] \right\} & (2N - 1)T < t < (2N + 1)T. \end{cases}
 \end{aligned}$$

199. Исследовать процесс распространения волн вдоль неоднородной линии, состоящей из конечного участка длиной l с волновым сопротивлением Z_1 и бесконечной линии с волновым сопротивлением Z_2 . Получить отраженную и пре-

* В задачах 198, 200, 201 и 204 $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$ — полиномы Лагерра. Преобразования Лапласа от полиномов Лагерра приведены в таблице (приложение II).

ломленную волны, возникающие в месте стыка, считая, что в момент времени $t = 0$ к началу линии подключается э. д. с. $E = f(t)$ (рис. 42).

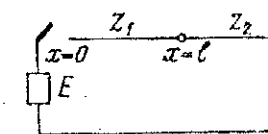


Рис. 42

Ответ:

$$\begin{aligned}
 u_1(x, t) &= \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{x}{v_1}, \\ f\left(t - \frac{x}{v_1}\right), & \frac{x}{v_1} < t < 2T - \frac{x}{v_1}, \\ \dots & \dots \\ \sum_{n=1}^{N-1} \alpha^n \left[f\left(t - 2nT - \frac{x}{v_1}\right) - \alpha f\left(t - 2nT + \frac{x}{v_1}\right) \right], & 2NT - \frac{x}{v_1} < t < 2NT + \frac{x}{v_1}, \\ \alpha^N f\left(t - 2NT - \frac{x}{v_1}\right) + \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n \left[f\left(t - 2nT - \frac{x}{v_1}\right) - \right. & \left. - \alpha f\left(t - 2nT + \frac{x}{v_1}\right) \right], & 2NT + \frac{x}{v_1} < t < 2(N+1)T - \frac{x}{v_1}, \end{cases} \\
 u_2(x, t) &= \begin{cases} 0, & 0 < t < T + \frac{x-l}{v_2}, \\ (1 - \alpha) \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n f\left[t - (2n+1)T - \frac{x-l}{v_2}\right] & \\ (2N-1)T + \frac{x-l}{v_2} < t < (2N+1)T + \frac{x-l}{v_2}. \end{cases} \\
 N = 1, 2, 3, \dots; \quad \alpha = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad T = \frac{l}{v_1};
 \end{aligned}$$

200. Получить выражения для преломленных волн в линии из предыдущей задачи, если $f(t) = E \cos nt$, а в месте стыка ($x = l$) включается:

- а) R_0 — сосредоточенное сопротивление;
- б) C_0 — сосредоточенная емкость;
- в) L_0 — сосредоточенная индуктивность.

Ответ:

$$a) u_2(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < T + \frac{x-l}{v_2}, \\ \frac{EZ_2}{R_0 + Z_2} \left[1 - \left(\frac{Z_1 - Z_2 - R_0}{Z_1 + Z_2 + R_0} \right)^N \right] & (2N-1)T + \frac{x-l}{v_2} < t < (2N+1)T + \frac{x-l}{v_2}, \\ & N=1, 2, 3, \dots; \end{cases}$$

$$б) u_2(x, t) = E(1-\alpha) \begin{cases} 0, & 0 < t < T + \frac{x-l}{v_2}, \\ e^{-\alpha\beta \left(t - T - \frac{x-l}{v_2} \right)} & T + \frac{x-l}{v_2} < t < 3T + \frac{x-l}{v_2}, \\ e^{-\alpha\beta \left(t - T - \frac{x-l}{v_2} \right)} + \alpha \left[1 - \beta(1+\alpha) \times \right. & \\ \times \left. \left(t - 3T - \frac{x-l}{v_2} \right) \right] e^{-\alpha\beta \left(t - 3T - \frac{x-l}{v_2} \right)} & 3T + \frac{x-l}{v_2} < t < 5T + \frac{x-l}{v_2}, \\ \dots & \\ \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n e^{-\alpha\beta \left[t - (2n+1)T - \frac{x-l}{v_2} \right]} \times & \\ \times L_n \left\{ \beta(1+\alpha) \left[t - (2n+1)T - \frac{x-l}{v_2} \right] \right\} & \\ (2N-1)T + \frac{x-l}{v_2} < t < (2N+1)T + \frac{x-l}{v_2}, & \\ & N=1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \beta = \frac{1}{(Z_1 - Z_2)C_0};$$

$$b) \frac{u_2(x, t)}{E(1-\alpha)} = \begin{cases} 0 & 0 < t < T + \frac{x-l}{v_2}, \\ 1 - e^{-\gamma \left(t - T - \frac{x-l}{v_2} \right)} & T + \frac{x-l}{v_2} < t < 3T + \frac{x-l}{v_2}, \\ 1 + \alpha - e^{-\gamma \left(t - T - \frac{x-l}{v_2} \right)} - \left[\alpha + \gamma(1+\alpha) \times \right. & \\ \times \left. \left(t - 3T - \frac{x-l}{v_2} \right) \right] e^{-\gamma \left(t - 3T - \frac{x-l}{v_2} \right)} & 3T + \frac{x-l}{v_2} < t < 5T + \frac{x-l}{v_2}, \\ \dots & \\ \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \int_0^{\gamma \left[t - (2n+1)T - \frac{x-l}{v_2} \right]} L_n[(1+\alpha)s] e^{-s} ds & \\ (2N-1)T + \frac{x-l}{v_2} < t < (2N+1)T + \frac{x-l}{v_2}, & \\ & N=1, 2, 3, \dots; \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad \gamma = \frac{Z_1 + Z_2}{L_0}.$$

201. Решить предыдущую задачу, если место стыка ($x=l$) замыкается на землю через: а) R_0 , б) C_0 , в) L_0 .

Ответ:

$$a) u_2(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < T + \frac{x-l}{v_2}, \\ E \left[1 - \left(\frac{Z_1 R_0 + Z_1 Z_2 - Z_2 R_0}{Z_1 R_0 + Z_1 Z_2 + Z_2 R_0} \right)^N \right] & (2N-1)T + \frac{x-l}{v_2} < t < (2N+1)T + \frac{x-l}{v_2}, \\ & N=1, 2, 3, \dots; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} & 0, & 0 < t < T + \frac{x-l}{v_2}, \\ & 1 - e^{-\gamma \left(t - T - \frac{x-l}{v_2} \right)}, & T + \frac{x-l}{v_2} < t < 3T + \frac{x-l}{v_2}, \\ & 1 + \alpha - e^{-\gamma \left(t - T - \frac{x-l}{v_2} \right)} - \left[\alpha - \gamma (1 - \alpha) \times \right. \\ & \quad \times \left(t - 3T - \frac{x-l}{v_2} \right) \left. \right] e^{-\gamma \left(t - 3T - \frac{x-l}{v_2} \right)}, & 3T + \frac{x-l}{v_2} < t < 5T + \frac{x-l}{v_2}, \\ & \dots \dots \dots \\ & \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{\gamma \left[t - (2n+1)T - \frac{x-l}{v_2} \right]} L_n[(1-\alpha)s] e^{-s} ds & (2N-1)T + \frac{x-l}{v_2} < t < (2N+1)T + \frac{x-l}{v_2}, \\ & \dots \dots \dots & N=1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \right\} \\
 & \text{б) } u_2(x, t) = E(1 - \alpha) \left\{ \begin{aligned} & \alpha = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad \gamma = \frac{Z_1 + Z_2}{C_0 Z_1 Z_2}; \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} & 0, & 0 < t < T + \frac{x-l}{v_2}, \\ & e^{-\alpha\beta \left(t - T - \frac{x-l}{v_2} \right)}, & T + \frac{x-l}{v_2} < t < 3T + \frac{x-l}{v_2}, \\ & e^{-\alpha\beta \left(t - T - \frac{x-l}{v_2} \right)} + \alpha \left[1 + \beta (1 - \alpha) \times \right. \\ & \quad \times \left(t - 3T - \frac{x-l}{v_2} \right) \left. \right] e^{-\alpha\beta \left(t - 3T - \frac{x-l}{v_2} \right)}, & 3T + \frac{x-l}{v_2} < t < 5T + \frac{x-l}{v_2}, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \\
 & \text{в) } u_2(x, t) = E(1 - \alpha) \left\{ \begin{aligned} & \dots \dots \dots \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} & -\alpha\beta \left[t - (2n+1)T - \frac{x-l}{v_2} \right] \\ & \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n e^{\dots} \times \\ & \quad \times L_n \left\{ \beta (\alpha - 1) \left[t - (2n+1)T - \frac{x-l}{v_2} \right] \right\} \\ & (2N-1)T + \frac{x-l}{v_2} < t < (2N+1)T + \frac{x-l}{v_2}, \\ & \dots \dots \dots & N=1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \right\} \\
 & \alpha = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad \beta = \frac{Z_1 Z_2}{L_0 (Z_1 - Z_2)}.
 \end{aligned}$$

202. Исследовать процесс распространения упругих продольных колебаний в полубесконечном стержне, вызванных силой $F(t)$, приложенной в момент $t=0$ к концу стержня $x=0$.

Ответ:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{x}{v}, \\ \frac{v}{ES} \int_0^{t - \frac{x}{v}} F(\tau) d\tau, & \frac{x}{v} < t < \infty. \end{cases}$$

203. Исследовать продольные колебания в стержне длиной l , конец $x=0$ которого закреплен, а на конце $x=l$ на-

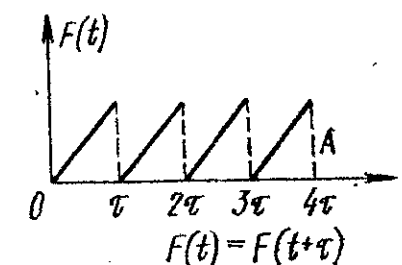


Рис. 43

чина с момента $t=0$ приложена сжимающая сила, изменяющаяся по пилообразному закону (рис. 43). Найти реакцию в заделке, считая, что период τ равен времени пробега волны вдоль стержня.

Ответ:

$$\frac{R|_{x=0}}{2A} = \begin{cases} 0, & 0 < t < T \quad (2n+1)T < t < (2n+3)T, \\ & n = 1, 3, 5, \dots, \\ \frac{t}{T} - k, & kT < t < (k+1)T, \quad k = 1, 2, 5, 6; 9, 10; \dots \end{cases}$$

204. Консольный стержень, заделанный на конце $x=0$, начинает колебаться под влиянием удара по сосредоточенной массе M_0 , укрепленной на конце $x=l$. Найти динамическую реакцию заделанного конца, считая, что в момент удара массе M_0 сообщается скорость v_0 .

Ответ:

$$R|_{x=0} = \frac{2v_0}{v} ES f(t);$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < T; \\ e^{-\alpha(t-T)}, & T < t < 3T; \\ e^{-\alpha(t-T)} + e^{-\alpha(t-3T)} [1 - 2\alpha(t-3T)], & 3T < t < 5T; \\ \dots & \dots \\ \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\alpha[t-(2n+1)T]} L_n \{2\alpha[t-(2n+1)T]\} & (2N-1)T < t < (2N+1)T, \quad N = 1, 2, 3, \dots; \\ T = \frac{l}{v}; \quad \alpha = \frac{ES}{M_0 v}. \end{cases}$$

Глава V

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В следующих задачах предлагается решить интегральные уравнения Вольтерра.

205. $\varphi(x) = -1 - \int_0^x (x-y) \varphi(y) dy.$

Ответ:

$$\varphi(x) = -\cos x.$$

206. $\varphi(x) = -2 \cos x + x + 2 + \int_0^x (y-x) \varphi(y) dy.$

Ответ:

$$\varphi(x) = (1+x) \sin x.$$

207. $\varphi(x) = e^{-x} + \int_0^x \sin(x-y) \varphi(y) dy.$

Ответ:

$$\varphi(x) = x - 1 + 2e^{-x}.$$

208. $\varphi(x) = 5 \sin x + \int_0^x e^{x-y} \varphi(y) dy.$

Ответ:

$$\varphi(x) = e^{2x} - \cos x + 3 \sin x.$$

209. $\int_0^x e^{x-y} \varphi(y) dy = x.$

Ответ:

$$\varphi(x) = 1 - x.$$

210. $\int_0^x J_0(x-y) \varphi(y) dy = \sin x.$

Ответ:

$$\varphi(x) = J_0(x).$$

211.
$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 + \int_0^x (x-y) \psi(y) dy, \\ \psi(x) = x + \int_0^x (x-y) \varphi(y) dy. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2} (e^x + \cos x - \sin x), \\ \psi(x) = \frac{1}{2} (e^x - \cos x + \sin x). \end{cases}$$

212. $\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy = 1.$

Ответ:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x}}.$$

213. $\varphi(x) = \frac{3}{2} e^x - \frac{x e^x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x y \varphi(y) dy.$

Ответ:

$$\varphi(x) = e^x.$$

В следующих задачах найти собственные числа и собственные функции уравнений Фредгольма с вырожденными ядрами.

$$214. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x+y) \varphi(y) dy.$$

Ответ:

$$\lambda_1 = 4\sqrt{3} - 6, \quad \varphi_1(x) = C_1 \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3} \right),$$

$$\lambda_2 = -4\sqrt{3} - 6, \quad \varphi_2(x) = C_2 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

$$215. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 xy \varphi(y) dy.$$

Ответ:

$$\lambda = 3, \quad \varphi(x) = Cx.$$

$$216. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left[3xy + 1 - \frac{3}{2}(x+y) \right] \varphi(y) dy.$$

Ответ:

$$\lambda = 4, \quad \varphi_1 = C_1, \quad \varphi_2 = C_2 \left(x - \frac{1}{2} \right).$$

$$217. \varphi(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \sin y) \varphi(y) dy.$$

Ответ:

$$\lambda_1 = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \pi}, \quad \varphi_1(x) = C_1 \left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$\lambda_2 = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \pi}, \quad \varphi_2(x) = C_2 \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

$$218. \varphi(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x+y)] \varphi(y) dy.$$

Ответ:

$$\lambda_{1,2} = \frac{4}{2 \pm \pi}; \quad \varphi_{1,2}(x) = C_{1,2} (\sin x \pm \cos x).$$

$$219. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 e^{x+y} \varphi(y) dy.$$

Ответ:

$$\lambda = \frac{2}{e^2 - 1}, \quad \varphi(x) = Ce^x.$$

$$220. \varphi(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} y \varphi(y) dy.$$

Ответ:

$$\lambda = \frac{1}{\ln 2}, \quad \varphi(x) = C.$$

221. При каких λ система имеет нетривиальные решения?

$$\begin{cases} \bar{\varphi}(x) = \lambda \int_0^1 (x-y) \psi(y) dy, \\ \psi(x) = \lambda \int_0^1 (y-x) \varphi(y) dy. \end{cases}$$

Ответ:

$$\lambda = \pm 2\sqrt{3}.$$

Решить уравнения:

$$222. \varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xy \varphi(y) dy + \frac{5}{6} x.$$

Ответ:

$$\varphi(x) = x.$$

$$223. \varphi(x) = 3x - 2 + 3 \int_0^1 xy \varphi(y) dy.$$

Ответ:

$$\varphi(x) = Cx - 2;$$

$$224. \varphi(x) = x^2 + 2 \int_0^1 (1 + 3xy) \varphi(y) dy.$$

Ответ:

$$\varphi(x) = x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{12}.$$

$$225. \varphi(x) = \sin x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin y \varphi(y) dy.$$

О т в е т:

$$\varphi(x) = \sin x + \frac{1}{6}(\pi - 2) \cos x.$$

$$226. \varphi(x) = x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) \varphi(y) dy.$$

О т в е т:

$$\varphi(x) = x - \frac{8(\pi-1)}{\pi^2-4} \sin x - 2 \frac{4-2\pi+\pi^2}{\pi^2-4} \cos x.$$

$$227. \varphi(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y) dy}{1+(x-y)^2}.$$

О т в е т:

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xv dv}{e^v-1} = \frac{\pi}{2} \operatorname{cth} \pi x - \frac{1}{2x}.$$

$$228. \varphi(x) = e^{-|x|} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \varphi(y) dy,$$

$$K(x) = \begin{cases} e^x & x < 0, \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

О т в е т:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} e^{-x}, & x \geq 0, \\ \frac{4}{3} e^{\frac{x}{2}}, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$229. \begin{cases} \varphi(x) = \frac{b}{x^2+b^2} - \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(y) dy}{h^2+(x-y)^2}, \\ \psi(x) = \frac{h-b}{x^2+(h-b)^2} - \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y) dy}{h^2+(x-y)^2}. \end{cases} \quad (0 < b < h),$$

О т в е т:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{\pi}{2h} \frac{\sin \frac{\pi b}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi b}{h}}, \\ \psi(x) = \frac{\pi}{2h} \frac{\sin \frac{\pi b}{h}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{h} + \cos \frac{\pi b}{h}}. \end{cases}$$

В следующих задачах требуется свести задачу Штурма — Лиувилля к интегральному уравнению.

$$230. \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

при условиях:

$$a) y|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=l} = 0;$$

$$b) y|_{x=0} = 0, \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=l} = 0;$$

$$в) y|_{x=0} = 0, \quad -\frac{dy}{dx} + hy \Big|_{x=l} = 0;$$

$$г) -\frac{dy}{dx} + hy \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{dy}{dx} + hy \Big|_{x=l} = 0.$$

О т в е т:

$$y = \lambda \int_0^l G(x, \xi) y(\xi) d\xi,$$

где функция $G(x, \xi)$ определяется формулами:

$$a) G(x, \xi) = \begin{cases} \xi \left(1 - \frac{x}{l}\right), & \xi \leq x, \\ x \left(1 - \frac{\xi}{l}\right), & \xi \geq x; \end{cases}$$

$$б) G(x, \xi) = \begin{cases} \xi, & \xi \leq x, \\ x, & \xi \geq x; \end{cases}$$

$$в) G(x, \xi) = \begin{cases} \xi \left(1 - \frac{hx}{1+hl}\right), & \xi \leq x, \\ x \left(1 - \frac{h\xi}{1+hl}\right), & \xi \geq x; \end{cases}$$

$$\text{г) } G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{[1 + h(l-x)](1 + \xi h)}{h(2 + hl)}, & \xi \leq x, \\ \frac{[1 + h(l-\xi)](1 + xh)}{h(2 + hl)}, & \xi \geq x. \end{cases}$$

$$231. \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \frac{\lambda}{x} y = 0, \quad y|_{x=a} = 0, \quad y|_{x=b} = 0.$$

О т в е т:

$$y = \lambda \int_a^b G(x, \xi) \frac{1}{\xi} y(\xi) d\xi, \quad G(x, \xi) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\ln \frac{x}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \right) \ln \frac{\xi}{a}, & \xi \leq x, \\ \left(1 - \frac{\ln \frac{\xi}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \right) \ln \frac{x}{a}, & \xi \geq x. \end{cases}$$

$$232. \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) + \lambda x^2 y = 0, \quad y|_{x=0} \text{ — ограничено, } y|_{x=a} = 0.$$

О т в е т:

$$y(x) = \lambda \int_0^a G(x, \xi) \xi^2 y(\xi) d\xi, \\ G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{a}, & \xi \leq x, \\ \frac{1}{\xi} - \frac{1}{a}, & \xi \geq x. \end{cases}$$

$$233. \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0, \quad y|_{x=0} \text{ — ограничено, } y|_{x=a} = 0.$$

О т в е т:

$$y = \lambda \int_0^a G(x, \xi) \xi y(\xi) d\xi, \\ G(x, \xi) = \begin{cases} -\ln \frac{x}{a}, & \xi \leq x, \\ -\ln \frac{\xi}{a}, & \xi \geq x. \end{cases}$$

$$234. \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x} \right) y = 0, \quad y|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=a} = 0, \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

О т в е т:

$$y = \lambda \int_0^a G(x, \xi) \xi y(\xi) d\xi, \\ G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \left[\left(\frac{\xi}{x} \right)^n - \left(\frac{\xi x}{a^2} \right)^n \right], & \xi \leq x, \\ \frac{1}{2n} \left[\left(\frac{x}{\xi} \right)^n - \left(\frac{\xi x}{a^2} \right)^n \right], & \xi \geq x. \end{cases}$$

235. Найти собственные числа и собственные функции интегральных уравнений вида $y(x) = \lambda \int_0^1 k(x, t) y(t) dt$, если:

$$\text{а) } k(x, t) = \begin{cases} (1-x)t, & t < x, \\ (1-t)x, & t > x; \end{cases}$$

$$\text{б) } k(x, t) = \begin{cases} (2-x)(t+1), & t < x, \\ (2-t)(x+1), & t > x; \end{cases}$$

$$\text{в) } k(x, t) = \begin{cases} -x(1+t), & t < x, \\ -t(1+x), & t > x; \end{cases}$$

$$\text{г) } k(x, t) = \begin{cases} e^{-x} \operatorname{sh} t, & t < x, \\ e^{-t} \operatorname{sh} x, & t > x; \end{cases}$$

О т в е т:

$$\text{а) } \lambda_n = n^2 \pi^2, \quad y_n(x) = C_n \sin n\pi x \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

$$\text{б) } \lambda_n = 4\gamma_n^2, \quad \text{где } \gamma_n \text{ — положительные корни уравнения } \operatorname{tg} \gamma = -2\gamma, \quad y_n = C_n \sin \gamma_n (1 - 2x);$$

$$\lambda_k = 4\gamma_k^2, \quad \text{где } \gamma_k \text{ — положительные корни уравнения } \operatorname{tg} \gamma = 1/2\gamma, \quad y_k = D_k \cos \gamma_k (1 - 2x);$$

$$\text{в) } \lambda_0 = 1, \quad y_0 = e^x;$$

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad y_n = C_n (\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x) \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$\text{г) } \lambda_n = \gamma_n^2 + 1, \quad \text{где } \gamma_n \text{ — положительные корни уравнения } \operatorname{tg} \gamma = -\gamma, \quad y_n = C_n \sin \gamma_n x.$$

236. Найти собственные числа и собственные функции интегральных уравнений вида $y(x) = \lambda \int_0^\pi k(x, t) y(t) dt$, если:

$$a) k(x, t) = \begin{cases} \cos t \sin x, & t < x; \\ \cos x \sin t, & t > x; \end{cases}$$

$$б) k(x, t) = \begin{cases} \sin t \cos x, & t < x; \\ \sin x \cos t, & t > x; \end{cases}$$

$$в) k(x, t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right), & t < x; \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right), & t > x. \end{cases}$$

О т в е т:

$$a) \lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad y_n = C_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \\ (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$б) \lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 1, \quad y_n = C_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \\ (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$в) \lambda_n = \frac{4\gamma_n^2}{\pi^2} - 1, \text{ где } \gamma_n \text{ — положительные корни уравнения } \operatorname{tg} \gamma = -\frac{2\gamma}{\pi}, \quad y_n = C_n \sin \frac{\gamma_n(\pi - 2x)}{\pi};$$

$$\lambda_k = \frac{4\gamma_k^2}{\pi^2} - 1, \text{ где } \gamma_k \text{ — положительные корни уравнения } \operatorname{tg} \gamma = \frac{\pi}{2\gamma}, \quad y_k = D_k \cos \frac{\gamma_k(\pi - 2x)}{\pi}.$$

Глава VI

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Среди линий, соединяющих точки A и B , найти ту, которая дает экстремум функционалам:

$$237. J[y(x)] = \int_{A(0,0)}^{B(1,0)} (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx.$$

О т в е т: $y=0$.

$$238. J[y(x)] = \int_{A(0,-1)}^{B(\frac{\pi}{4},0)} (4y^2 - y'^2 + 8y) dx.$$

О т в е т: $y = \sin 2x - 1$.

$$239. J[y(x)] = \int_{A(0,1)}^{B(1,2)} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx.$$

О т в е т: $(x-2)^2 + y^2 = 5$.

$$240. J[y(x)] = \int_{A(0,0)}^{B(1,1)} \frac{1+y^2}{y'^2} dx.$$

О т в е т: $y = \operatorname{sh}[x \ln(1+\sqrt{2})]$.

241. Для функционала $J[y(x)] = \int_a^b F(x, y) dx$, заданного на $y \in C[a, b]$, $F \in C_2[a, b]^*$, установить достаточные условия экстремумов.

Указание. Рассмотреть полное приращение функционала.

242. Показать, что функционал $J[y(x)] = \int_0^1 y'^2 dx$, заданный на $y \in C_1[a, b]$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ (условия Коши), не имеет экстремума.

Решить следующие вариационные задачи и исследовать характер экстремумов по полному приращению функционала.

$$243. J[y(x)] = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 5.$$

О т в е т: $y = -\frac{4}{x} + 7$ (min).

$$244. J[y(x)] = \int_1^2 (xy'^2 - y) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

О т в е т: $y = \frac{3 \ln x}{2 \ln 2} - \frac{x-1}{2}$ (min).

* Пространство $C[a, b]$ состоит из всех непрерывных на $[a, b]$ функций. Близость между двумя функциями $y(x)$ и $z(x)$ определяется расстоянием $\rho(y, z) = \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - z(x)|$. Пространство $C_n[a, b]$ состоит из всех функций на $[a, b]$, имеющих непрерывные производные до порядка n включительно, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Расстояние между функциями $y(x)$ и $z(x)$ определено формулой

$$\rho(y, z) = \sum_{k=0}^n \max_{a \leq x \leq b} |y^{(k)}(x) - z^{(k)}(x)|.$$

$$245. J[y(x)] = \int_0^1 (12xy + yy' + y'^2) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 4.$$

ОТВЕТ: $y = x^3 + 2x + 1$ (min).

$$246. J[y(x)] = \int_1^2 (xy'^4 - 2yy'^3) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

ОТВЕТ: $y = x - 1$ (min).

$$247. J[y(x)] = \int_{-1}^1 (x^2 y'^2 + 12y^2) dx, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$$

ОТВЕТ: $y = x^3$ (min).

$$248. J[y(x)] = \int_0^2 (xy' + y'^2) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(2) = 0.$$

ОТВЕТ: $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ (min).

$$249. J[y(x)] = \int_{-1}^1 x^{\frac{2}{3}} y'^2 dx, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$$

ОТВЕТ: $y = \sqrt[3]{x}$ (min).

$$250. J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x}) dx, \quad y(0) = -\frac{1}{3},$$

$$y(1) = -\frac{1}{3} e^2.$$

ОТВЕТ: $y = -\frac{1}{3} e^{2x}$ (min).

$$251. J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 + y'^2 + 6y \sin 2x) dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

ОТВЕТ: $y = \frac{8 \operatorname{sh} x}{5 \operatorname{sh} \frac{\pi}{4}} - \frac{3}{5} \sin 2x$ (min).

$$252. J[y(x)] = \int_0^1 \frac{dx}{y'}, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

ОТВЕТ: $y = x$ (min).

$$253. J[y(x)] = \int_0^1 [x^2 + y^2 + yy'] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

ОТВЕТ: $y = 0$ (min).

$$254. J[y(x)] = \int_0^1 y'^3 e^x dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

ОТВЕТ: $y = \frac{1 - e^{-\frac{x}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}}}$ (min).

$$255. J[y(x)] = \int_1^2 y'^3 x^3 dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

ОТВЕТ: $y = \sqrt{\frac{2}{x}} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2} - 1} \right)$ (min).

$$256. J[y(x)] = \int_0^1 y'^3 e^{-2x} dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

ОТВЕТ: $y = \frac{e^x + e - 2}{e - 1}$ (min).

$$257. J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

ОТВЕТ: $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}$ (min).

$$258. J[y(x)] = \int_1^3 (12xy + y'^2) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(3) = 26.$$

ОТВЕТ: $y = x^3 - 1$ (min).

$$259. J[y(x)] = \int_0^2 [y^2 + y'^2 - 2xy] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 3.$$

ОТВЕТ: $y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2} + x$ (min).

Найти функцию, для которой может достигаться экстремум функционала.

$$260. J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2 + y) dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

не задано.

Ответ:

$$y = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x - 1).$$

$$261. I[y(x)] = \int_0^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) \text{ — не задано.}$$

Ответ:

$$y = \pm \sqrt{4 - (x-2)^2}.$$

$$262. I[y(x)] = \int_0^1 (xy' + y'^2) dx, \quad y(0) \text{ — не задано, } y(1) = 1.$$

Ответ:

$$y = \frac{5-x^2}{4}.$$

$$263. I[y(x)] = \int_0^\pi (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) dx, \quad y(0) \text{ — не задано, } y(\pi) = 0.$$

Ответ:

$$y = \frac{1}{2} \left[\sin x + \frac{\operatorname{sh}(\pi - x)}{\operatorname{ch} \pi} \right].$$

$$264. I[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx, \quad y(0), \quad y(1) \text{ — не заданы.}$$

Ответ:

$$y = \frac{1}{2} \left[xe^x + \frac{\operatorname{ch}(1-x) - 2e \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1} \right].$$

$$265. I[y(x)] = \int_0^1 \left[y^2 + y'^2 + \frac{2y}{\operatorname{ch} x} \right] dx, \quad y(0), \quad y(1) \text{ — не заданы.}$$

Ответ:

$$y = x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \left[\ln \frac{\operatorname{ch} 1}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1} \right].$$

$$266. I[y(x)] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y'^2 + yy' + y \right) dx, \text{ если значения } y \text{ на}$$

концах интервала не заданы.

Ответ:

$$y = \frac{1}{2} (x^2 - 3x + 3).$$

Найти экстремали функционалов:

$$267. I[y] = \int_{x_0}^{x_1} (16y^2 - y''^2 + x^2) dx.$$

Ответ:

$$y = C_1 \operatorname{ch} 2x + C_2 \operatorname{sh} 2x + C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x.$$

$$268. I[y] = \int_{x_0}^{x_1} (2xy + y'''^2) dx.$$

Ответ:

$$y = \frac{x^7}{7!} + C_1 x^5 + C_2 x^4 + C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_5 x + C_6.$$

$$269. I[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2y \sin x) dx.$$

Ответ:

$$y = (C_1 + C_2 x) \sin x + (C_3 + C_4 x) \cos x - \frac{x^2 \sin x}{8}.$$

$$270. I[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y'''^2 + y^2 - 2yx^3) dx.$$

Ответ:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) e^{\frac{x}{2}} + \\ + \left(C_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) e^{-\frac{x}{2}} + x^3.$$

Найти функции, на которых могут достигаться экстремумы функционалов:

$$271. I[y] = \int_0^1 (y'')^2 dx \text{ при условиях:}$$

$$a) y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = \alpha, \quad y'(1) = \beta;$$

$$b) y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(0), \quad y'(1) \text{ — не заданы.}$$

Ответ:

$$a) y = x(x-1)[(\alpha + \beta)x - \alpha];$$

$$b) y = 0.$$

$$272. I[y] = \int_0^1 [(y'')^2 + 4y'^2] dx, \quad y(0), \quad y'(0) \text{ — не заданы,} \\ y(1) = y'(1) = 0.$$

Ответ:

$$y = 0.$$

$$273. I[y] = \int_0^1 [(y'')^2 - y'^2 - 2y] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \\ y'(0), \quad y'(1) \text{ — не заданы.}$$

Ответ:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{\sin x + \sin(1-x)}{\sin 1}.$$

$$274. I[y] = \int_0^1 [(y'')^2 - 2xy] dx, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{120}, \\ y'(1) \text{ — не задано.}$$

Ответ:

$$y = \frac{x^5}{120} + \frac{x^2 - x^3}{24}.$$

Найти экстремали функционалов:

$$275. I[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z) dx.$$

Ответ:

$$y = C_1x + C_2, \quad z = C_3x + C_4.$$

$$276. I[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2) dx.$$

Ответ:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \left(\cos x - \frac{x}{2} \sin x \right) + \\ + C_4 \left(\sin x + \frac{x}{2} \cos x \right),$$

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x(C_4 \cos x + C_3 \sin x).$$

Найти функции, дающие экстремум функционалам:

$$277. I[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2) dx, \quad y(0) = z(0) = 0, \\ y(1) = z(1) = 1.$$

Ответ:

$$y = z = x.$$

$$278. I[y, z] = \int_0^1 [y'^2 - xy' - z'^2] dx, \quad y(0) \text{ — не задано,} \\ z(0) = 0, \quad y(1) = z(1) = 1.$$

Ответ:

$$y = \frac{x^2 + 3}{4}, \quad z = x.$$

Найти геодезические линии:

279. Сферы радиуса R .

Ответ: дуги больших кругов.

280. Круглого цилиндра $r = R$.

Ответ: винтовые линии $z = A\varphi + B$, лежащие на цилиндре $r = R$.

281. Параболоида вращения $r^2 = 2z$.

Ответ:

$$\varphi = C_1 - \operatorname{arctg} Cu + C \ln \frac{u+1}{u-1}, \quad u = \sqrt{\frac{2z+1}{2z-C^2}}.$$

282. Кругового конуса $r = z$.

Ответ:

$$C = z \sin \frac{C_1 - \varphi}{\sqrt{2}}.$$

Найти экстремали следующих изопериметрических задач:

$$283. I[y(x)] = \int_{-a}^a y dx, \quad y(a) = y(-a) = 0, \\ \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx = l (\text{const}), \quad l > 2a.$$

Ответ: дуга окружности $(y + \sqrt{\lambda^2 - a^2})^2 + x^2 = \lambda^2$,
 $\lambda \sin \frac{l}{2\lambda} = a, \quad \lambda > \frac{l}{2\pi}.$

$$284. I[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \int_0^1 y^2 dx = 2.$$

Ответ:

$$y = \pm 2 \sin n\pi x \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

285. $I[y(x)] = \int_0^\pi y'^2 dx$, $y(0) = y(\pi) = 0$ при условиях:

а) $\int_0^\pi y^2 dx = 1$; б) $\int_0^\pi y dx = 1$.

Ответ:

а) $y = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$ ($k = 1, 2, 3 \dots$); б) $y = \frac{6x}{\pi^3} (\pi - x)$.

286. $I[y(x)] = \int_0^\pi (y'')^2 dx$, $y(0) = y(\pi) = 0$ при условиях:

а) $\int_0^\pi y^2 dx = 1$; б) $\int_0^\pi y'^2 dx = 1$.

Ответ:

а) $y = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$; б) $y = \pm \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$.

287. Один конец тяжелой цепи длиной l закреплен, а второй скользит по вертикальному стержню, отстоящему от вертикали, проходящей через закрепленный конец цепи, на расстоянии $a < l$. Найти форму цепи.

Указание. В состоянии равновесия центр тяжести цепи занимает наинизшее положение.

Ответ:

$$y = \frac{a}{\eta_0} \left\{ \operatorname{ch} \eta_0 \left(1 - \frac{x}{a} \right) - \operatorname{ch} \eta_0 \right\},$$

где η_0 — положительный корень уравнения $\operatorname{sh} \eta = \frac{l}{a} \eta$.

Написать уравнение Эйлера для задачи об экстремуме функционала:

288. $I[z(x, y)] = \iint_{(D)} z \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$.

Ответ:

$$2z\Delta z + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

289. $I[u(x, y, z)] = \iiint_{(D)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz$.

Ответ:

$$\Delta u = 0.$$

290. Написать уравнение Эйлера для задачи на экстремум функционала

$$J[z(x, y)] = \iint_{(D)} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x, y) \right] dx dy$$

при условии $z|_S = \varphi(x, y)$. Получить естественное граничное условие и показать, что функция, удовлетворяющая уравнению Эйлера и одному из написанных условий, дает $J[z]$ минимум.

Указание. Рассмотреть полное приращение ΔJ .

Ответ: уравнение Эйлера $\Delta z = f(x, y)$; естественное граничное условие $\frac{\partial z}{\partial n} \Big|_S = 0$, где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали к S .

291. Написать уравнение Эйлера и естественное граничное условие для функционала

$$J[u(x_1, x_2, x_3)] = \iiint_D \left(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} + 2uf \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Ответ: уравнение Эйлера $\sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} = f$;

естественное граничное условие

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\widehat{nx_k}) \Big|_S = 0.$$

292. Показать, что функция, удовлетворяющая уравнению Эйлера задачи 291, условию $u|_S = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ или естественному граничному условию, сообщает $J[u]$ минимум, если симметричная матрица $a_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ такова, что при любых $x_1, x_2, x_3 \in D$ и любых ξ_1, ξ_2, ξ_3 будет $\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} \xi_i \xi_k \geq 0$ ($a_{ik} = a_{ki}$).

Указание. Рассмотреть полное приращение функционала.

293. Написать уравнение минимальной поверхности. Минимальной поверхностью называется поверхность $z = z(x, y)$, натянутая на заданный (в пространстве) контур L , и имеющая наименьшую площадь. Предполагается, что для контура L $z|_l = \varphi(x, y)$, где l — проекция L на плоскость xOy .

* D — плоская или трехмерная область с гладкой границей S .

Ответ:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

294. Доказать, что функция, удовлетворяющая уравнению задачи 293, дает поверхность с наименьшей площадью.

Указание. Рассмотреть полное приращение функционала

$$J[z] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

и воспользоваться неравенством

$$\sqrt{1 + 2xr + r^2} - 1 - rx \geq 0 \quad \text{при} \quad |x| \leq 1, r \geq 0.$$

295. Получить уравнение, которому удовлетворяет $z(x, y)$ (задача 293), если контур, на который натянута поверхность, мало отличается от плоского.

Указание. Ввести малый параметр ε следующим образом:

$$z|_l = Ax + By + C + \varepsilon \psi(x, y), \\ z = Ax + By + C + \varepsilon v(x, y), \quad A, B, C = \text{const},$$

и линеаризировать уравнение Эйлера.

Ответ:

$$(1 + B^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1 + A^2) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2AB \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$v|_l = \psi.$$

296. Найти уравнение минимальных поверхностей, для которых

$$z(x, y) = A(x) + B(y).$$

Ответ:

$$z = C \ln \frac{\cos \lambda y}{\cos \lambda x},$$

где $\lambda = \text{const}$.

При $\lambda = 0$ $z = ax + by + d$ есть уравнение плоскости.

Получить методом Рунге приближенное решение следующих задач:

$$297. y'' + y + x = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Ответ:

$$y = \frac{71}{369} x(1-x) + \frac{7}{41} x^2(1-x).$$

$$298. (xy')' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Ответ:

$$y = x + x(1-x) \left(\frac{85}{26} - \frac{35}{13} x \right).$$

$$299. \Delta u = -2, \quad u|_{x=\pm a} = 0, \quad u|_{y=\pm b} = 0.$$

Ответ:

$$u = \frac{5}{4(a^2 + b^2)} (a^2 - x^2)(b^2 - y^2).$$

Найти собственные частоты колебаний:

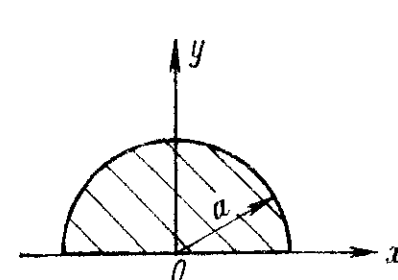


Рис. 44

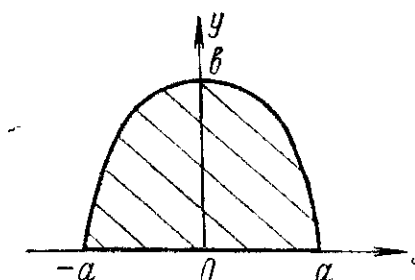


Рис. 45

300. Однородной струны длиной $2a$ с закрепленными в точках a и $-a$ концами.

Ответ:

$$\omega \approx 1,57 \frac{v}{a}.$$

301. Однородной мембраны, имеющей форму:

а) полукруга (рис. 44) $x^2 + y^2 = a^2, y > 0$.

Ответ:

$$\omega \approx 4,1 \frac{v}{a};$$

б) параболического сегмента (рис. 45) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b} = 1, y > 0$.

Ответ:

$$\omega = \frac{v}{a} \sqrt{\frac{99}{8} \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{4}{9} \right)}, \quad \text{при } a = b \quad \omega \approx 4,2 \frac{v}{a};$$

в) косинусоиды $y = b \cos \frac{\pi x}{2a}$ (рис. 46), $y > 0$.

Ответ:

$$\omega = \frac{v}{a} \sqrt{\frac{99}{8} \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{5\pi^2}{99} \right)}, \quad \text{при } a = b \quad \omega \approx 4,3 \frac{v}{a}.$$

302. Получить методом Ритца приближенные значения первых двух собственных чисел задач Штурма — Лиувилля и сравнить с точными значениями:

а) $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad y|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=1} = 0;$

б) $\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \lambda xy = 0, \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=1} = 0.$

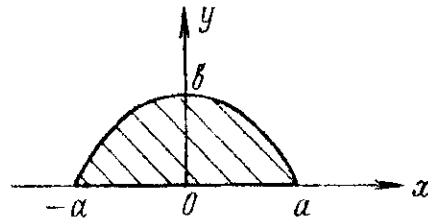


Рис. 46

ЛИТЕРАТУРА

1. Будах Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Задачи по уравнениям математической физики. ГИТТЛ, 1956.
2. Гришберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. АН СССР, 1948.
3. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. Ч. 3, ГИТТЛ, 1951.
4. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. Гостехиздат, 1935.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными. «Мир», 1964.
6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1—2, Гостехиздат, 1951.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.
8. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, 1963.
9. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. ГИТТЛ, 1955.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2 и 4, ГИТТЛ, 1954.
11. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. ГИТТЛ, 1954.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. «Наука», 1966.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Таблица некоторых рядов Фурье

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{n} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{a} \right), \quad 0 < x \leq a.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{n} = \frac{\pi x}{2a}, \quad 0 \leq x < a.$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < x \leq a.$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq x < a.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi x}{a}}{n^2} = \pi^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{4a^2} \right), \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos \frac{n\pi x}{a}}{n^2} = \pi^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{x^2}{4a^2} \right), \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$7. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{x}{a} \right), \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$8. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2 x}{8a}, \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{n^3} = \pi^3 \left(\frac{x}{6a} - \frac{x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{12a^3} \right), \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{n^3} = \frac{\pi^3 x}{12a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$11. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3 x}{16a} \left(1 - \frac{x}{2a} \right), \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin nx}{n^2 - a^2} = \frac{\pi \sin ax}{2 \sin a\pi}, \quad 0 \leq x < \pi.$$

$$14. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin (2n+1)x}{(2n+1)^2 - a^2} = \frac{\pi \sin ax}{4a \cos \frac{\pi a}{2}}, \quad |x| \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$15. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n+1)x}{(2n+1)[(2n+1)^2 - a^2]} = \frac{\pi \sin \frac{\sigma x}{2} \sin \frac{\alpha}{2} (\pi - x)}{2a \cos \frac{\pi a}{2}},$$

$$|x| \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cos n\varphi = -\frac{1}{2} \ln (1 - 2x \cos \varphi + x^2), \quad |x| < 1.$$

$$17. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \sin (2n+1)\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x \sin \varphi}{1 - x^2}, \quad |x| \leq 1.$$

$$18. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \cos (2n+1)\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x \cos \varphi}{1 - x^2}, \quad |x| \leq 1.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \cos (2n-1)\varphi = \frac{1}{4} \ln \frac{1 - \frac{2x \cos \varphi}{1 - x^2}}{1 - \frac{2x \cos \varphi}{1 - x^2}}, \quad |x| < 1.$$

Таблица преобразований Лапласа

$f(t)$	$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$	$f(t)$	$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$
1	$\frac{1}{p}$	sh at	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
t^{ν}	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \quad \nu > -1$	ch at	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$I_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 - a^2}}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$L_n(t)$	$\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^n$