

VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

I. Vecteurs de l'espace

1) Notion de vecteur dans l'espace

Définition : Un **vecteur de l'espace** est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Remarque :

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, ...

2) Translation

Définition : Soit \vec{u} un vecteur de l'espace. On appelle **translation** de vecteur \vec{u} la transformation qui au point M associe le point M' , tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Remarque :

Les translations gardent les mêmes propriétés qu'en géométrie plane : conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu, ...

3) Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace

Définition : Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace.

Tout vecteur de la forme $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$, avec α , β et γ réels, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .

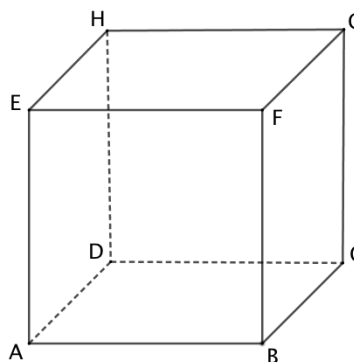
Méthode : Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés

A l'aide du cube ci-contre, représenter les vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} donnés par :

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$$

$$\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$$

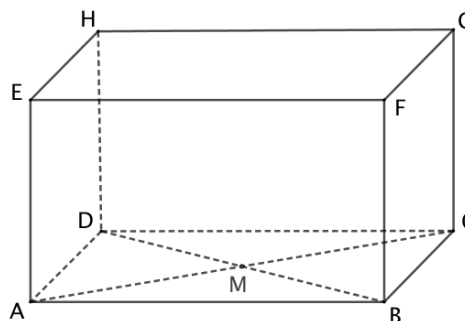
$$\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$$



Méthode : Exprimer un vecteur comme combinaisons linéaires de vecteurs

Dans le parallélépipède ci-contre, M est le centre du rectangle $ABCD$.

Exprimer les vecteurs \overrightarrow{CE} , \overrightarrow{MG} et \overrightarrow{MF} comme combinaisons linéaires des vecteurs \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AE} .



II. Droites de l'espace

1) Vecteurs colinéaires

Définition : Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** signifie qu'ils ont même direction c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

2) Vecteur directeur d'une droite

Définition : On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite d .

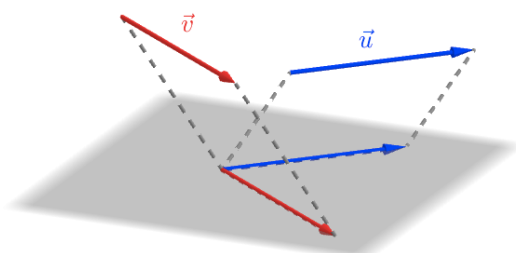
Propriété : Soit A un point de l'espace et \vec{u} un vecteur non nul de l'espace. La **droite** d passant par A et de vecteur directeur \vec{u} est l'ensemble des points M tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires.

Propriété : Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} sont parallèles si et seulement si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

III. Plans de l'espace

1) Direction d'un plan de l'espace

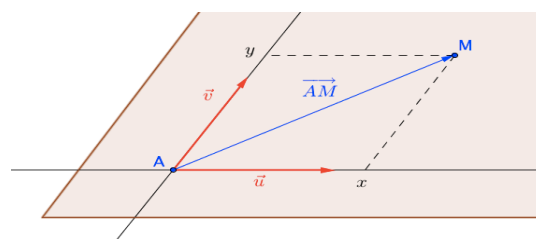
Propriétés : Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan.



2) Caractérisation d'un plan de l'espace

Propriété : Soit un point A et deux vecteurs de l'espace \vec{u} et \vec{v} non colinéaires.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et dirigé par \vec{u} et \vec{v} .



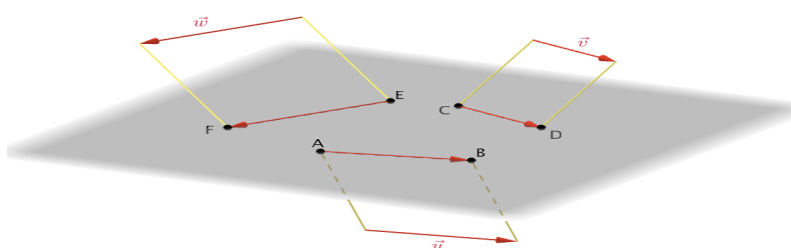
Remarque : Dans ces conditions, le triplet $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan.

Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Propriété : Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Conséquence : Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.

Définition : Trois vecteurs sont **coplanaires** s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.

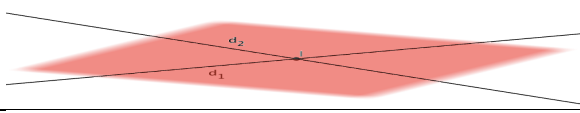
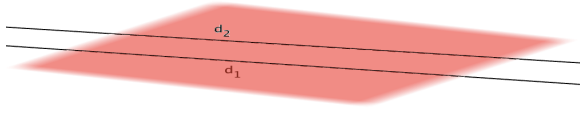
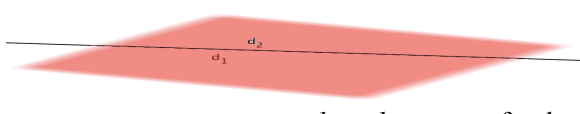


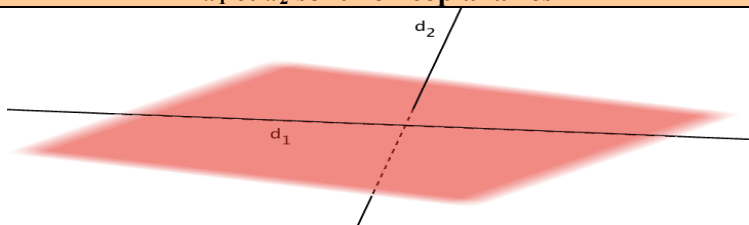
Propriété : Trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de l'espace sont coplanaires, s'il existe un couple de réels $(x ; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$.

IV. Positions relatives de droites et de plans de l'espace

1) Positions relatives de deux droites

Propriété : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.

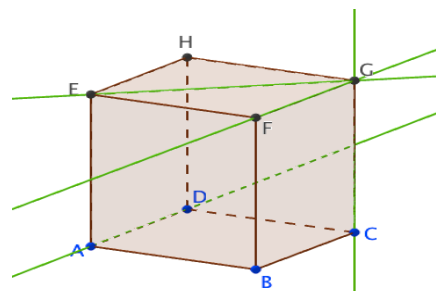
d_1 et d_2 sont coplanaires	
d_1 et d_2 sont sécantes	
d_1 et d_2 sont parallèles	 d_1 et d_2 sont strictement parallèles
	 d_1 et d_2 sont confondus

d_1 et d_2 sont non coplanaires


Exemple :

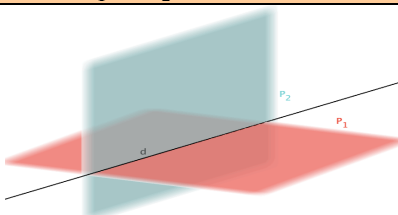
ABCDEFGH est un cube.

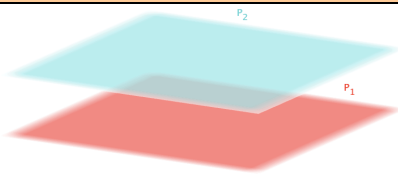
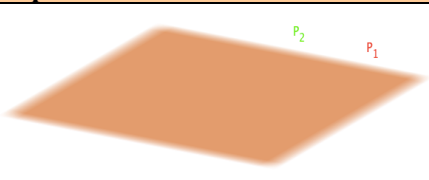
- Les droites (EG) et (FG)
- Les droites (AD) et (CG).



2) Positions relatives de deux plans

Propriété : Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

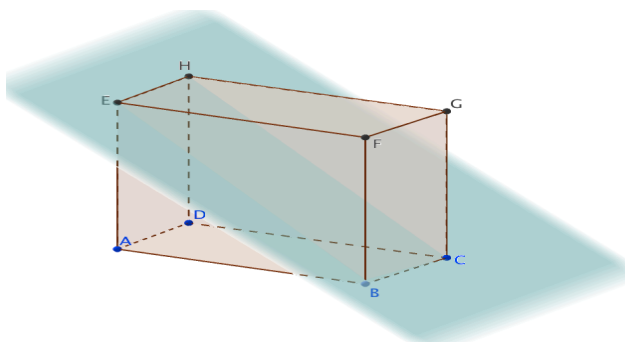
P_1 et P_2 sont sécants
 P_1 et P_2 sont sécants suivant la droite d

P_1 et P_2 sont parallèles
 P_1 et P_2 sont strictement parallèles
 P_1 et P_2 sont confondus

Exemple :

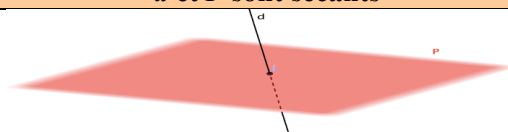
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

- Les plans (BCG) et (BCE) sont
- Les plans (ABC) et (EFG) sont



3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

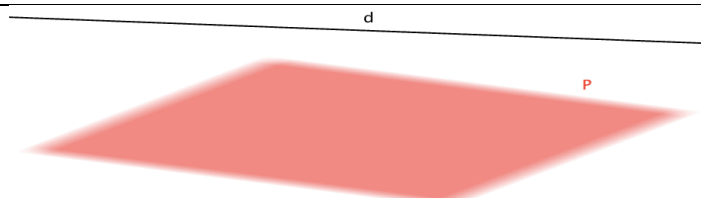
Propriété : Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

d et P sont sécants

d et P sont sécants en un point I

d et P sont parallèles

d est incluse dans P

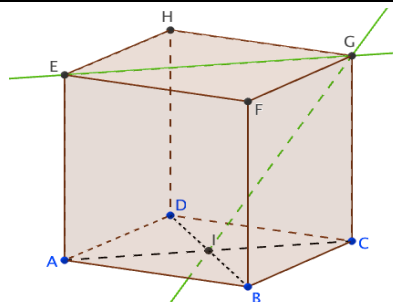


d et P sont strictement parallèles

Exemple :

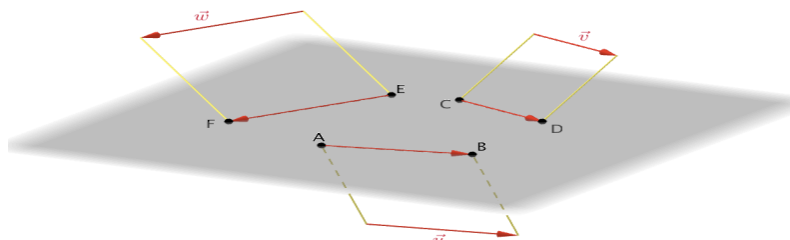
ABCDEFGH est un cube.

- La droite (GI) et le plan (ABC) sont
- La droite (EG) est inc
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont

**V. Bases et repères de l'espace**

1) Vecteurs coplanaires et bases de l'espace

Définition : Trois vecteurs sont **coplanaires** s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.



Propriété : Trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de l'espace sont coplanaires, s'il existe un couple de réels $(x ; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$.

Propriété : Soit \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires.

Pour tout vecteur \vec{u} , il existe un unique triplet $(x ; y ; z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Démonstration :

- **Existence :** Soit \overrightarrow{AB} un représentant de \vec{u} .

Soit P le plan de repère $(A ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Si B appartient à P alors \overrightarrow{AB} se décompose suivant les vecteurs \vec{i} et \vec{j} .

Supposons que B n'appartient pas à P .

Soit d la droite passant par B de vecteur directeur \vec{k} .

Comme \vec{k} n'est pas colinéaire avec \vec{i} et \vec{j} , la droite d coupe le plan P en un point C .

On peut écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

\overrightarrow{AC} appartient au plan P donc il existe un couple $(x ; y)$ tel que $\overrightarrow{AC} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

\overrightarrow{CB} est colinéaire avec \vec{k} donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{CB} = z\vec{k}$.

Il existe donc un triplet $(x ; y ; z)$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

- **Unicité :** On suppose que l'on ait les deux écritures distinctes :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

$$\text{Alors } (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}.$$

Supposons que l'une au moins des trois différences n'est pas nulle, par exemple : $z - z' \neq 0$.

Donc $\vec{k} = \frac{x' - x}{z - z'} \vec{i} + \frac{y' - y}{z - z'} \vec{j}$ et dans ce cas, les vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} seraient coplanaires. Ce qui est exclu.

Les trois différences $x' - x$, $y' - y$ et $z' - z$ sont donc nulles.

Définition : Soit \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

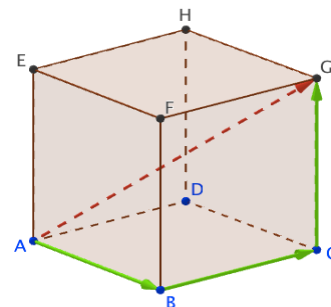
On appelle **base de l'espace** le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Méthode : Reconnaître une base de l'espace

ABCDEFGH est un cube.

1) Reconnaître une base de l'espace.

2) Décomposer le vecteurs \overrightarrow{AG} dans cette base.



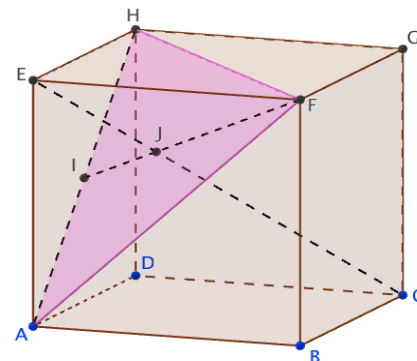
Méthode : Démontrer l'alignement par décomposition de vecteurs dans une base

ABCDEFGH est un cube.

Soit I le milieu de $[AH]$ et J le point de $[FI]$ tel que :

$$\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{FI}$$

Démontrer que les points E , J et C sont alignés.



2) Repère de l'espace

Définition : Soit \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} trois vecteurs non coplanaires. O est un point de l'espace.
On appelle **repère de l'espace** le quadruplet $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Remarques : - O est appelé l'origine du repère.

- La décomposition $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du point M .

- De même, la décomposition $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur \vec{u} .

Méthode : Lire des coordonnées dans l'espace

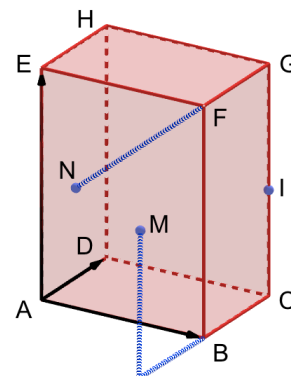
Soit un parallélépipède $ABCDEFGH$.

I est le milieu de $[CG]$.

M et N sont définis par : $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}$

1) Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de tous les points de la figure.

2) Placer le point $K(1 ; 3 ; -1)$.



VI. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété : L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit une droite d passant par un point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On a : $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que
$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Démonstration :

Méthode : Utiliser la représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les points $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.