LES SUITES

II. Limite finie ou infinie d'une suite

1) Limite infinie

Exemple :

La suite (u_n) définie sur ℕ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.
En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définitions : - On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]a\,;\,+\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty\,;\,b[$, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$.
Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.

Voici un algorithme écrit en langage naturel :

Langage naturel

```
Définir fonction seuil(A)

n ← 0
u ← 2

Tant que u < A
      n ← n + 1
      u ← 4u
Fin Tant que

Afficher n
```

En appliquant cet algorithme avec A = 100, on obtient en sortie n = 3.
A partir du terme u_3, les termes de la suite dépassent 100.

En langage calculatrice et Python, cela donne :

TI

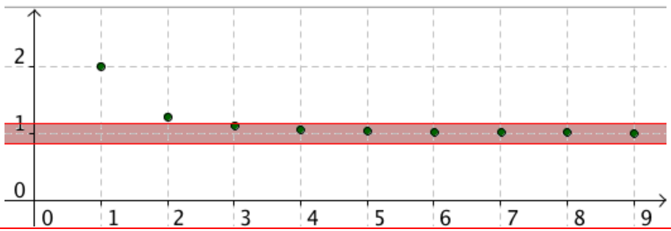
```
PROGRAM:SEUIL
:Input A
:0→N
:2→U
:While U<A
:N+1→N
:4*U→U
:End
:Disp N
```

Python

```python
def seuil(a):
    n=0
    u=2
    while u<a:
        n=n+1
        u=4*u
    return(n)
```

2) Limite finie

Exemple : La suite (u_n) définie sur ℕ* par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ a pour limite 1.
En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang.
Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.



Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

Une telle suite est dite **convergente**.

Définition : Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Remarque :
Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.
Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs –1 et 1. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

3) Limites des suites usuelles

Propriétés :
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

III. Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$						

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + n = ?$

2) Limite d'un produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$				

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)(n^2 + 3) =$

3) Limite d'un quotient

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$						

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^2-3} =$

Remarque :
Tous ces résultats sont intuitifs. On retrouve par exemple, un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs.
Il est important cependant de reconnaître les formes indéterminées pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques afin de lever l'indétermination ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.
Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

"$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$" et "$\frac{0}{0}$".

Déterminer les limites suivantes :

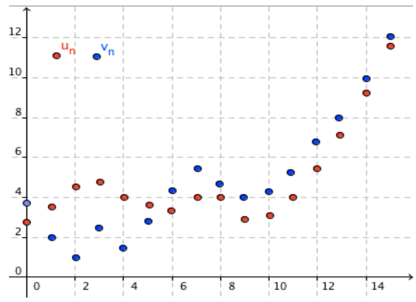
a) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 5n + 1$ b) $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 3\sqrt{n}$ c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$ d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n^2+n}{n+3}$

IV. Limites et comparaison

1) Théorèmes de comparaison

Théorème 1 :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur ℕ.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Par abus de langage, on pourrait dire que la suite (u_n) pousse la suite (v_n) vers $+\infty$ à partir d'un certain rang.



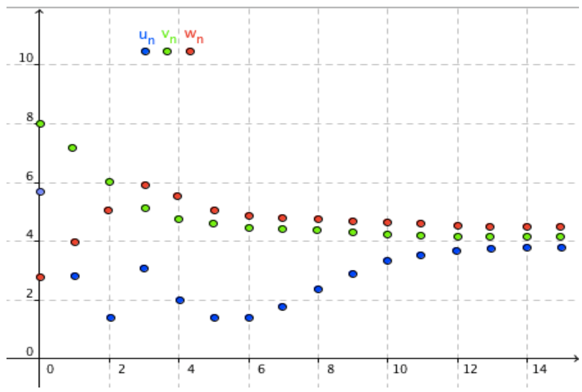
Théorème 2 :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur ℕ.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Méthode : Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + (-1)^n$

2) Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes :
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur ℕ.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$.

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites (u_n) et (w_n) (les gendarmes) se resserrent autour de la suite (v_n) à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite.
Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich**.



Méthode : Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{\sin n}{n}$

V. Suites majorées, minorées, bornées

1) Définitions :

Définitions : - La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in ℕ$, $u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in ℕ$, $u_n \geq m$.
- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :
- Les suites de terme général $\cos n$ ou $(-1)^n$ sont bornées car minorées par -1 et majorées par 1.
- La suite de terme général n^2 est minorée par 0.

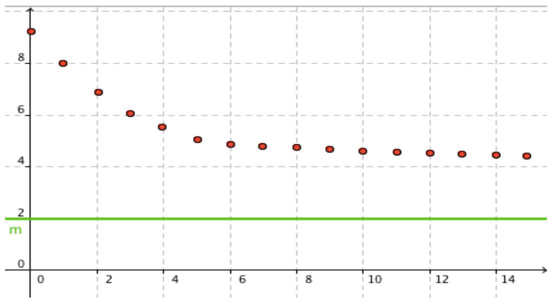
Méthode : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.
Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

2) Convergence des suites monotones

Propriété : Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est majorée par L.

Théorème de convergence monotone :
- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

Remarque :
Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.
Dans l'exemple ci-dessous, la suite décroissante est minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2.



Méthode : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Corollaire :
1) Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
2) Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

VI. Comportement à l'infini d'une suite géométrique

1) Rappel

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé la **raison** de la suite.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = -3u_n$ et $u_0 = 5$ est une suite géométrique de raison et de premier terme

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple : Pour la suite précédente, on a, pour tout n : $u_n =$

2) Limites

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$				

Démonstration au programme dans le cas $q > 1$:

Exemple :
La suite de terme général -5×4^n a pour limite car $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n =$

Méthode : Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus sur ce compte.

On note (u_n) la somme épargnée à l'année n.
On a alors : $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 300$ et $u_0 = 5000$.
1) Calculer u_1 et u_2.
2) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 10000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
3) Exprimer v_n en fonction de n.
4) En déduire u_n en fonction de n. Puis calculer u_{10}.
5) Étudier les variations de (u_n).

3) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Méthode : Déterminer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n}{3}$ $\quad b)\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 3^n$ $\quad c)\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$