

# Fonctions de plusieurs variables

## Introduction

Considérons une unité de production qui fabrique 2 produits,  $A$  en quantité  $x$  et  $B$  en quantité  $y$ .

Le produit  $A$  demande  $n_A$  heures de travail par unité produite , le produit  $B$   $n_B$ .

Les quantités  $n_A$  et  $n_B$  sont fixés, en revanche on peut décider des quantités produites  $x$  et  $y$ . Le nombre d'heures de travail nécessaire est fonction de  $x$  et  $y$  à la fois : à tout **couple** de nombres positifs  $(x, y)$  on associe un nombre: la quantité de travail  $T = n_A \times x + n_B \times y$ .

On note  $IR^2$  l'ensemble de tous les couples  $(x, y)$  formés de 2 réels  $x, y$

Ici les quantités ne pouvant être que positives, on dit que la quantité de travail **T est une fonction des 2 variables**  $(x, y)$ , **définie sur le domaine de définition :**

$$IR \times IR : \rightarrow IR$$

$$(x, y) : \rightarrow T(x, y) = n_A \times x + n_B \times y$$

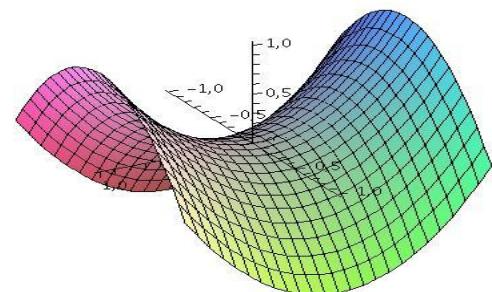
$T(x, y)$  est un nombre réel qui dépend de  $x$  et  $y$

**Exemple de fonctions de deux variables :**

a) La fonction dite **selle de cheval** (ou fonction hyperbolique) :

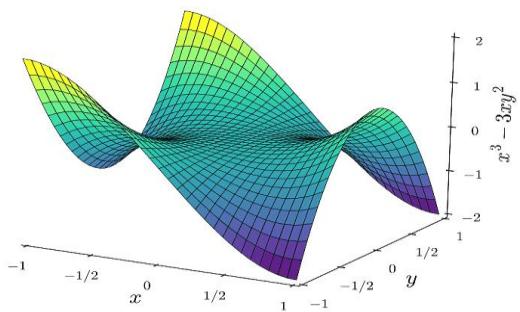
$$f(x, y) = x^2 - y^2,$$

Cette fonction est souvent utilisée pour illustrer des concepts en optimisation, en raison de sa forme de courbure mixte (courbée vers le haut dans une direction et vers le bas dans l'autre).

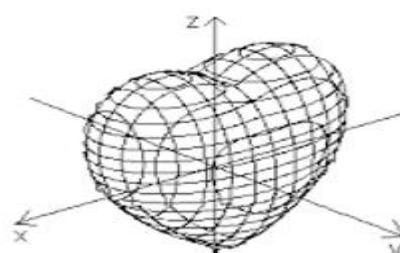
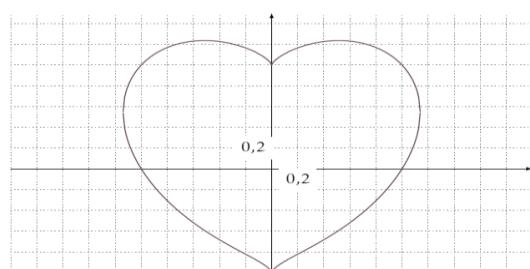


b) La fonction dite **selle de singe** (ou fonction hyperbolique) : l'expression classique pour la **fonction selle de singe** est donnée par :

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2$$



c) Le cœur d'Eugène Beutel (1909) : Ce cœur a pour équation cartésienne :  $(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2y^3$

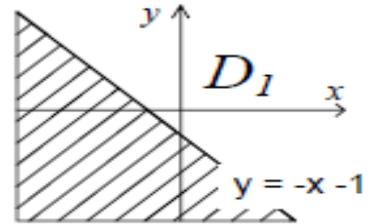


## Domaine de définition

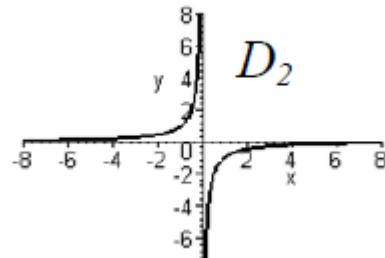
C'est l'ensemble des couples  $(x, y)$  pour lesquels la fonction  $f(x, y)$  est définie. Il s'agit d'un sous ensemble de  $\mathbb{R}^2$ , on pourra le représenter dans un plan, muni d'un repère. On porte  $x$  et  $y$  sur les axes.

### Exemples :

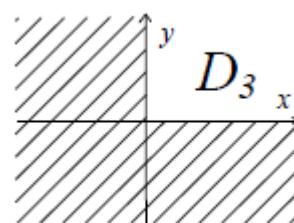
1) la fonction  $f(x, y) = \sqrt{x + y + 1}$  est définie sur l'ensemble  $D_f$  des couples  $(x, y)$  tels que  $x + y + 1 > 0$ . Ce domaine est délimité par la droite d'équation  $x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -x - 1$



2) La fonction  $f(x, y) = \frac{1}{1+xy}$  est définie sur l'ensemble  $D_f$  des couples  $(x, y)$  tels que  $x + y + 1 \neq 0$ , c'est-à-dire  $\mathbb{R}^2$  privé de l'hyperbole d'équation  $y = -\frac{1}{x}$



3) La fonction  $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$  est définie sur l'ensemble  $D_f$  des  $(x, y)$  tels que  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ , c'est à dire  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$



### Exercices :

#### Exercice n°1

Considérons la fonction  $f(x, y) = \frac{1}{x^2-y^2}$

a) Déterminer le domaine de définition de  $f(x, y)$ .

b) Représenter graphiquement le domaine de définition.

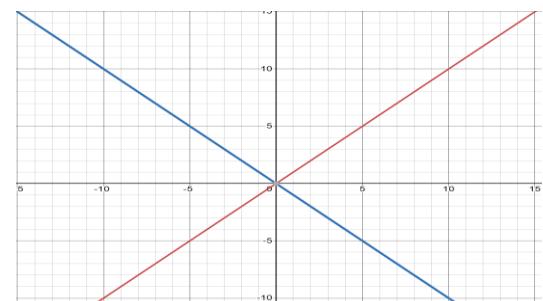
#### Solution :

La fonction  $f(x, y) = \frac{1}{x^2-y^2}$  est définie sur l'ensemble  $D_f$  des couples  $(x, y)$  tels que  $x^2 - y^2 \neq 0$

$$x^2 - y^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq y^2 \Leftrightarrow x \neq y \text{ ou } x \neq -y$$

$x = y$  est la première bissectrice (droite rouge)

$x = -y$  est la deuxième bissectrice (droite bleue)



Le domaine de définition est le plan privé des droites  $y = x$  et  $y = -x$ .

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y \text{ ou } x \neq -y\}$$

## Exercice n°2

Considérons la fonction  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

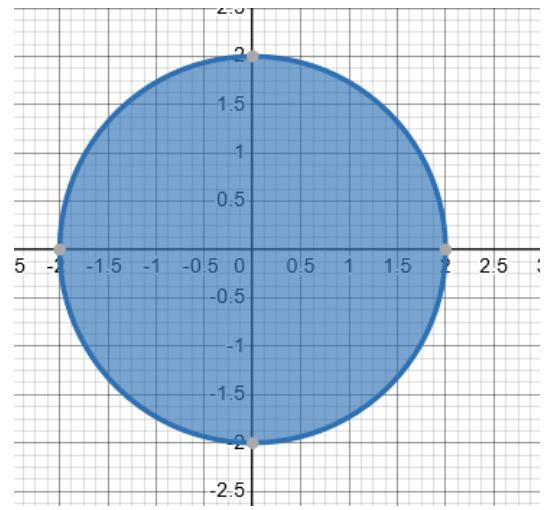
- Déterminer le domaine de définition de  $f(x, y)$ .
- Représenter graphiquement le domaine de définition.

**Solution :**

La fonction  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  est définie sur l'ensemble  $D_f$  des couples  $(x, y)$  tels que  $4 - x^2 - y^2 \geq 0$

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2^2$$

Le domaine est le disque de centre  $O(0,0)$  et de rayon  $R = 2$ .



## Exercice n°3

Considérons la fonction  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

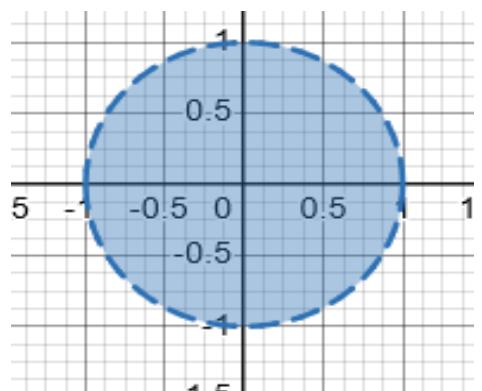
- Déterminer le domaine de définition de  $f(x, y)$ .
- Représenter graphiquement le domaine de définition.

**Solution :**

La fonction  $\ln(x^2 + y^2 - 1)$  est définie sur l'ensemble  $D_f$  des couples  $(x, y)$  tels que  $x^2 + y^2 - 1 > 0$

$$x^2 + y^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 1^2$$

Le domaine est le plan privé du disque de centre  $O(0,0)$  et de rayon  $R = 1$ .



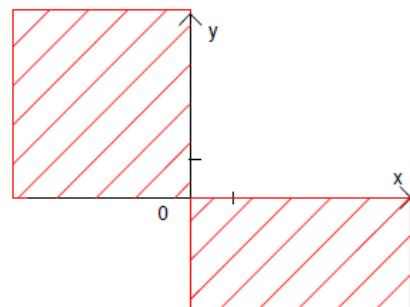
## Exercice n°4

Considérons la fonction  $f(x, y) = \sqrt{xy}$

- Déterminer le domaine de définition de  $f(x, y)$ .
- Représenter graphiquement le domaine de définition.

**Solution :**

La fonction  $f(x, y) = \sqrt{xy}$  est définie sur l'ensemble  $D_f$  des couples  $(x, y)$  tels que  $xy \geq 0$



$$xy \geq 0 \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont de même signe} \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ ou } x \leq 0 \text{ et } y \leq 0$$

Le domaine est constitué des deux quarts du plan représentés par les parties non hachurées ci-contre.

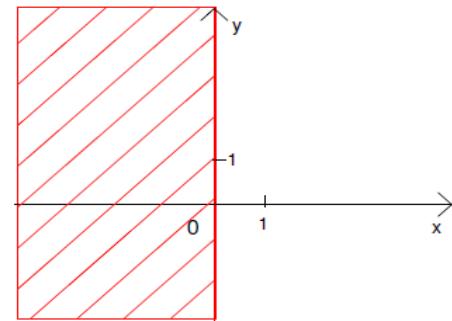
## Exercice n°5

Considérons la fonction  $f(x, y) = x^y = e^{y \ln(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition de  $f(x, y)$ .

**Solution :**

La fonction  $f(x, y) = x^y = e^{y \ln(x)}$  est définie sur l'ensemble  $D_f$  des couples  $(x, y)$  tels que  $x > 0$



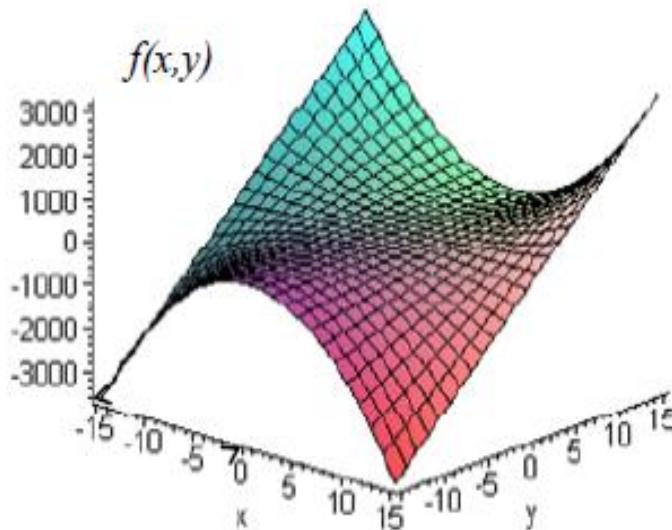
Le domaine est le demi-plan limité par la droite d'équation

$$x = 0.$$

### Dérivées partielles

#### 4.1. Dérivées partielles premières

Considérons la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$ , par :  $f(x, y) = x^2(y - 1)$



On essaie de préciser la variation de  $f$  par rapport à  $x$  d'une part, par rapport à  $y$  d'autre part.

Par exemple au point  $(3, 5)$ ,

- on fixe  $y = 5$  et on considère la **fonction d' $x$  uniquement** :

$$f(x, 5) = x^2(5 - 1) = 4x^2.$$

Cette fonction de  $x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , sa dérivée est  $x \rightarrow 8x$

Cette dérivée est appelée **dérivée partielle de  $f(x, y)$  par rapport à  $x$**  et sera notée  $\frac{\partial f(x, 5)}{\partial x}$

$$\frac{\partial f(x, 5)}{\partial x} = 8x$$

- on fixe  $x = 3$ , et on considère la **fonction d' $y$  uniquement**

$$f(3, y) = 3^2 \times (y - 1) = 9(y - 1)$$

Cette fonction de  $y$  est dérivable, sa dérivée est  $y \rightarrow 9y - 9$ .

Cette dérivée est appelée **dérivée partielle de  $f(x, y)$  par rapport à  $y$**  et sera notée  $\frac{\partial f(3, y)}{\partial y}$ .

$$\frac{\partial f(3, y)}{\partial y} = 9y - 9$$

## De façon générale, en un point ( $a, b$ )

La dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x$ , à  $y$  constant, au point  $(a, b)$ , est la dérivée de la fonction de  $x$  uniquement :  $x \rightarrow f(x, b)$ . C'est donc, si cette limite existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a}, \text{ on la note } \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$$

La dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $y$ , à  $x$  constant, au point  $(a, b)$ , est la dérivée de la fonction de  $y$  uniquement :  $y \rightarrow f(a, y)$ . C'est donc, si cette limite existe :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b} \text{ on la note } \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}$$

## Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1

### 4.2.1. Dérivées partielles secondes

Si une fonction admet des dérivées partielles sur tout un ensemble  $D$  de  $IR^2$ , les fonctions  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$  y sont-elles mêmes des fonctions de 2 variables, définies sur  $D$ . Il se peut qu'elles aussi aient des dérivées partielles. Celles-ci sont appelées dérivées partielles secondes.

**Exemple :** considérons la fonction de 2 variables  $f(x, y) = x^2 - xy^3$ .

Elle admet des dérivées partielles sur tout  $IR^2$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \end{aligned}$$

Ces fonctions ont elles-mêmes des dérivées partielles sur tout  $IR^2$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} =$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} =$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2 y \partial y} =$$

On remarque que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2 y \partial y} =$$

Ceci est une propriété générale sous certaines hypothèses.

### Interprétation du signe des dérivées partielles dans le contexte économique

Si  $f(x, y)$  représente la production par une entreprise de deux biens X et Y en quantités  $x$  et  $y$ , alors :

- Si  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0$ , cela signifie que le profit augmente avec  $x$ , donc l'entreprise devrait produire plus de  $x$ .
- $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ , cela indique que le profit augmente avec  $y$ , donc l'entreprise devrait produire davantage de  $y$ .

## Exemple : Optimisation de la production de deux biens

Une entreprise produit deux biens,  $x$  et  $y$ . La fonction de profit de l'entreprise dépend des quantités produites de chaque bien et est donnée par  $P(x, y) = 100x + 80y - 5x^2 - 2y^2 - 3xy$

- $P(x, y)$  est le profit total en milliers d'euros,
- $x$  est la quantité produite du bien 1 (en centaines d'unités),
- $y$  est la quantité produite du bien 2 (en centaines d'unités),
- les termes en  $x^2$ ,  $y^2$ , et  $xy$  représentent les coûts croissants liés à l'augmentation de la production de chaque bien.

### Calcul des dérivées partielles

Dérivée partielle de  $P$  par rapport à  $x$  :  $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 100 - 10x - 3y$

Dérivée partielle de  $P$  par rapport à  $y$  :  $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 80 - 4y - 3x$

### Étape 2 : Interprétation des dérivées partielles

Les dérivées partielles nous indiquent comment le profit change lorsque l'on augmente la production de l'un des biens, tout en gardant l'autre constant.

- $\frac{\partial P}{\partial x}$  : Cette dérivée partielle mesure la variation du profit lorsque la production du bien  $x$  augmente d'une unité (en centaines d'unités), tandis que  $y$  reste fixe.
  - Si  $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ , cela signifie que l'augmentation de la production du bien  $x$  entraînera une hausse du profit global, et il serait donc avantageux pour l'entreprise de produire davantage de  $x$ .
  - Si  $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$ , cela signifie que l'augmentation de la production de  $x$  entraîne une baisse du profit, ce qui suggère que l'entreprise devrait réduire la production de  $x$ .
- $\frac{\partial P}{\partial y}$  : Cette dérivée partielle représente l'impact de l'augmentation de la production de  $y$  sur le profit, avec  $x$  constant.
  - Si  $\frac{\partial P}{\partial y} > 0$ , l'augmentation de la production de  $y$  fait croître le profit, et il est donc bénéfique de produire plus de  $y$
  - Si  $\frac{\partial P}{\partial y} < 0$ , l'augmentation de  $y$  diminue le profit, donc l'entreprise aurait intérêt à produire moins de  $y$ .

### Étape 3 : Interprétation économique

L'analyse des signes de  $\frac{\partial P}{\partial x}$  et  $\frac{\partial P}{\partial y}$  pour différentes valeurs de  $x$  et  $y$  aide l'entreprise à identifier la combinaison optimale de production pour maximiser son profit.

- **À court terme** : Si, par exemple, à une certaine combinaison de  $x$  et  $y$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$  et  $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$ , l'entreprise pourrait choisir d'augmenter la production de  $x$  et de réduire celle de  $y$  pour atteindre un meilleur profit.
- **À long terme** : L'entreprise peut utiliser ces informations pour ajuster graduellement sa production, cherchant le point où les deux dérivées partielles sont nulles ( $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$  et  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ ), ce qui correspond au maximum du profit.

## Définition : dérivées partielles secondes

On pose, si ces dérivées partielles existent :

- $\frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x,y)$  est la dérivée partielle, par rapport à  $x$  de  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$
- $\frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x,y)$  est la dérivée partielle, par rapport à  $y$  de  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$
- $\frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y)$  est la dérivée partielle, par rapport à  $x$  de  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$
- $\frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y)$  est la dérivée partielle, par rapport à  $y$  de  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$

**Propriété :**

Si  $\frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right)$  sont définies et continues en un point  $(a,b)$  alors  $\frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \right)$

**Exercices d'entraînement :**

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre un des fonctions suivantes :

a)  $f(x,y) = x^2 - y^2$  :  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$  et  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y$

b)  $f(x,y) = x^2 - xy^3$  :  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x - y^3$  et  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -3xy^2$

c)  $f(x,y) = 5x^3y^2 + 2x^2y^3 - x^2y^2 + 6xy - 7x + 5y - 1$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 15x^2y^2 + 4xy^3 - 2xy^2 + 6y - 7$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 10x^3y + 6x^2y^2 - 2x^2y + 6x + 5$$

d)  $f(x,y) = -x^4y^4 - x^3y^4 - x^3y^3 + 6x^2y - 7xy^2 + xy - x + 2y + 1$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -4x^3y^4 - 3y^2y^4 - 3x^2y^3 + 12xy - 7y^2 + y - 1$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -4x^4y^3 - 4y^2y^3 - 3x^3y^2 + 6y^2 - 14xy + x + 2$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre un des fonctions suivantes :

a)  $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x \times x - 1 \times (x^2 - y^2)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-2y \times x - 0 \times (x^2 - y^2)}{x^2} = \frac{-2xy}{x^2} = \frac{-2y}{x}$$

b)  $f(x,y) = \frac{x^2y - y^2}{xy}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2xy \times xy - y \times (x^2y - y^2)}{(xy)^2} = \frac{2x^2y^2 - x^2y^2 + y^3}{x^2y^2} = \frac{x^2y^2 + y^3}{x^2y^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{(x^2 - 2y) \times xy - x(x^2y - y^2)}{(xy)^2}$$

c)  $f(x,y) = \sqrt{x+y-1}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+y-1}} ; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x+y-1}}$$

d)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{y};$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}y - 0 \times \sqrt{x}}{y^2} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{0 \times y - 1 \times \sqrt{x}}{y^2}\end{aligned}$$

2) Calculer les dérivées partielles d'ordre deux des fonctions suivantes :

a)  $f(x, y) = 3x^2y^4;$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 6xy^4; & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= 12x^2y^3 \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial(6xy^4)}{\partial x} = 6y^4; & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial(12x^2y^3)}{\partial y} = 36x^2y^2 \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial f(6xy^4)}{\partial y} = 24xy^3 \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial f(12x^2y^3)}{\partial x} = 24xy^3\end{aligned}$$

b)  $f(x, y) = -x^2y + 3xy + 8xy^2 - 1;$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= -2xy + 3y + 8y^2; & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= -x^2 + 3x + 16xy \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= -2y; & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= 16x \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial f(-2xy+3y+8y^2)}{\partial y} = -2x + 3 + 16y; \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial f(-x^2+3x+16xy)}{\partial x} = -2x + 3 + 16y\end{aligned}$$

c)  $f(x, y) = e^{x^2+y^2-2y};$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 2xe^{x^2+y^2-2y}; & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= (2y-2)e^{x^2+y^2-2y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= 2e^{x^2+y^2-2y} + 2x \times 2xe^{x^2+y^2-2y} = 2e^{x^2+y^2-2y} + 4x^22e^{x^2+y^2-2y} \\ &= (4x^2+2)2e^{x^2+y^2-2y}\end{aligned}$$

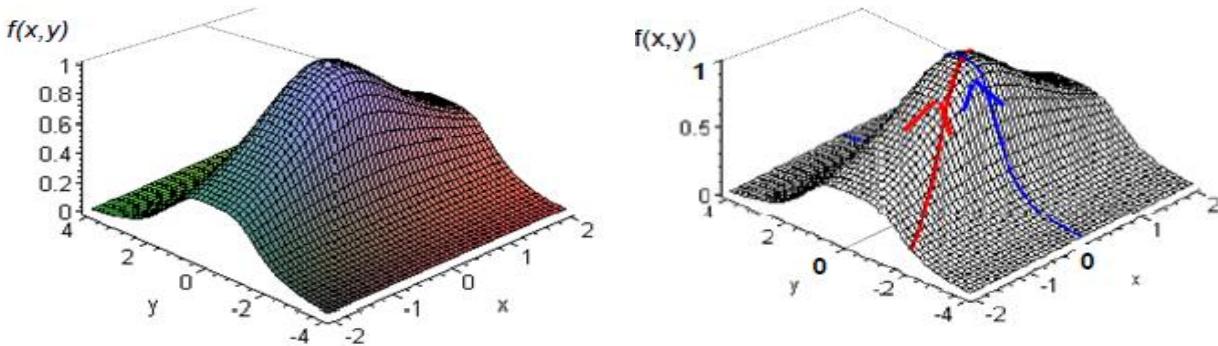
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2e^{x^2+y^2-2y} + (2y-2)^2 e^{x^2+y^2-2y}$$

d)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1);$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+1}; \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{2(x^2+y^2+1)-2x \times 2x}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2}; \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{2(x^2+y^2+1)-2y \times 2y}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{2x^2-2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2}; \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2x}{x^2+y^2+1} \right) = \frac{0 \times (x^2+y^2+1)-2y \times 2x}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2y}{x^2+y^2+1} \right) = \frac{0 \times (x^2+y^2+1)-2x \times 2y}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2}\end{aligned}$$

## Notion de limite et de continuité

Considérons la fonction suivante,  $f(x, y) = \frac{\ln(1+x^2+y^4)}{x^2+y^4}$ . Elle est définie sur tout  $\mathbb{R}^2$  sauf pour  $(0, 0)$ . Pourtant, sur le graphique, il semble qu'à mesure que  $(x, y)$  s'approche de  $(0, 0)$ ,  $f(x, y)$  s'approche de 1.



La notion de limite est plus délicate que pour deux variables. Ici,  $(x, y)$  peut approcher  $(0, 0)$  de différentes façons. Par exemple, on a tracé  $f(x, y)$  pour les  $(x, y)$  où  $x$  vaut toujours 0 (courbe bleue), et pour ceux pour lesquels  $x = y$  (courbe rouge).

On approche ainsi de  $(0, 0)$  par des chemins différents, on constate que quel que soit le chemin que l'on prend pour s'approcher de 0,  $f(x, y)$  s'approche toujours de 1. On dit que  $f$  a pour limite 1 en  $(0, 0)$ .

### Définition de la notion de limite :

Une formulation intuitive de la notion de limite est la suivante :

on écrit que  $f(x, y)$  a pour limite  $L$  en  $(a, b)$ , et on le note  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ , lorsque  $f(x, y)$

approche  $L$  avec toute précision, aussi fine soit-elle, dès que  $(x, y)$  est assez proche de  $(a, b)$ .

### Définition de la notion de la continuité :

On dit qu'une fonction  $f$  de 2 variables est continue en  $(a, b)$  si :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

### Propriétés : ces propriétés sont ici admises.

- Les polynômes de « n » variables sont continus sur  $\mathbb{R}^n$ ,
- Les fonctions rationnelles (c'est-à-dire les quotients de polynômes) de « n » variables sont continues sur tout leur domaine de définition.
- Toute composée de fonctions continues est continue.

**Définition :** Soit  $f$  une fonction numérique de deux variables, définie sur une partie de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $(x_0, y_0)$  un point de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $B_0$  un voisinage de  $(x_0, y_0)$ .

- On dit que  $f$  admet un minimum local en  $(x_0, y_0)$  si  $\forall (x, y) \in B_0, f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$
- On dit que  $f$  admet un maximum local en  $(x_0, y_0)$  si  $\forall (x, y) \in B_0, f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$
- On dit que  $f$  admet un extremum local en  $(x_0, y_0)$  lorsque  $f$  admet soit un minimum soit un maximum local en ce point.

**Définition :** Soit  $f$  une fonction de classe  $C_1$  sur  $B_0$ . On dit que  $(x_0, y_0)$  est un point critique de  $f$  si :

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

## Exemple : Optimisation de la production de deux biens

La fonction de profit d'une entreprise dépend des quantités produites  $x$  et  $y$  de chaque bien est donnée par:

$$P(x, y) = -x^2 - y^2 - xy + 25x + 20y$$

Les dérivées partielles :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = -2x - y + 25 = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -2y - x + 20 = 0$$

Les points critiques (candidats pour être optimum) sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + 25 = 0 \\ -2y - x + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 25 \\ x + 2y = 20 \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$ , il existe donc une solution unique

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 1 \\ 20 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{50 - 20}{3} = \frac{30}{3} = 10$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 25 \\ 1 & 20 \end{vmatrix}}{3} = \frac{40 - 25}{3} = \frac{5}{3} = 5$$

L'unique point critique (unique candidat à l'optimum) est le point  $A(10, 5)$

# Optimisation des fonctions de plusieurs variables

## Méthode de substitution

**Introduction :** Dans la théorie micro-économique du consommateur, on cherche souvent à maximiser la fonction d'utilité  $U(x, y)$ , sous la contrainte budgétaire  $xP_x + yP_y = R$ .

**Hypothèses :**

- Un consommateur choisit entre deux biens  $X$  et  $Y$ .
- La fonction d'utilité est  $U(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ .
- Le consommateur a un revenu  $R$  et fait face à des prix  $P_x$  pour le bien  $X$  et  $P_y$  pour le bien  $Y$ .

**Problème d'optimisation :** Le consommateur veut maximiser son utilité sous la contrainte de revenu. Cela peut s'écrire comme :

$$\text{Maximiser } U(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \text{ sous la contrainte budgétaire : } xP_x + yP_y = R$$

### Étape 1 : Expression de la contrainte

Nous devons d'abord exprimer  $y$  en fonction de  $x$  à partir de la contrainte budgétaire :

$$yP_y = R - xP_x \Rightarrow y = \frac{R - xP_x}{P_y}$$

### Étape 2 : Substitution dans la fonction d'utilité

Substituons cette expression de  $y$  dans la fonction d'utilité :  $U(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

Cette expression est maintenant uniquement en fonction de  $x$ , nous la notons

$$g(x) = U\left(x, \frac{R - xP_x}{P_y}\right) = x^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{R - xP_x}{P_y}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}(R - xP_x)^{\frac{1}{2}}}{P_y} = \sqrt{\frac{x(R - xP_x)}{P_y}}$$

### Étape 3 : Maximisation de la fonction d'utilité

Pour maximiser  $U$ , nous prenons la dérivée de cette fonction par rapport à  $x$  et la mettons égale à zéro pour trouver le point critique. Cela donne :

$$g'(x) = \frac{\partial \left( \sqrt{\frac{x(R - xP_x)}{P_y}} \right)}{\partial x} = \frac{R - xP_x}{2\sqrt{P_y}\sqrt{x(R - xP_x)}}$$

### Étape 4 : Résolution du système

En résolvant cette équation, nous trouvons les quantités optimales de  $x^*$  et  $y^*$  qui maximisent l'utilité, données par les conditions de tangence et la contrainte budgétaire.

On trouve que :  $x^* = \frac{R}{2P_x}$  et  $y^* = \frac{R}{2P_y}$

**Interprétation :** les solutions  $x^*$  et  $y^*$  montrent que la quantité optimale de chaque bien dépend :

- des préférences du consommateur,
- des prix des biens  $P_x$  et  $P_y$ ,
- et du revenu disponible  $R$ .

**Exemple numérique :** Prenons un exemple numérique pour illustrer l'optimisation de l'utilité avec la méthode de substitution.

Le consommateur dispose d'un revenu de  $R = 100$  euros.

Le prix du bien  $X$  est  $P_x = 2$  euros, et celui du bien  $Y$  est  $P_y = 4$  euros.

### Étape 1 : Contrainte budgétaire

La contrainte budgétaire s'écrit :  $2x + 4y = 100$

Nous devons exprimer  $y$  en fonction de  $x$  :  $2x + 4y = 100 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 25$

### Étape 2 : Substitution dans la fonction d'utilité

Substituons cette expression de  $y$  dans la fonction d'utilité :

$$U(x; -\frac{1}{2}x + 25) = x^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}x + 25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \sqrt{-\frac{1}{2}x + 25}$$

### Étape 3 : Maximisation de la fonction d'utilité

Prenons la dérivée de cette fonction par rapport à  $x$  :

$$\text{On pose } g(x) = \sqrt{x} \sqrt{-\frac{1}{2}x + 25}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{-\frac{1}{2}x + 25} + \sqrt{x} \left( \frac{-1}{4} \left( -\frac{1}{2}x + 25 \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \\ g'(x) &= \frac{\sqrt{-\frac{1}{2}x + 25}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{-\frac{1}{2}x + 25}} \end{aligned}$$

$$\text{Le dénominateur commun est : } 4\sqrt{x} \sqrt{-\frac{1}{2}x + 25}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } g'(x) &= \frac{\sqrt{-\frac{1}{2}x + 25}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{-\frac{1}{2}x + 25}} \\ &= \frac{2\left(-\frac{1}{2}x + 25\right) - x}{4\sqrt{x}\sqrt{-\frac{1}{2}x + 25}} = \frac{-x + 50 - x}{4\sqrt{x}\sqrt{-\frac{1}{2}x + 25}} \\ &= \frac{-2x + 50}{4\sqrt{x}\sqrt{-\frac{1}{2}x + 25}} \end{aligned}$$

$$\text{Point critique : } g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 50 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{50}{2} = 25 \text{ et } y = -\frac{1}{2} \times 25 + 25 = 12,5$$

Avec la formule précédente, on a :

$$x^* = \frac{R}{2P_x} = \frac{100}{2 \times 2} = 25$$

$$y^* = \frac{R}{2P_y} = \frac{100}{2 \times 4} = 12,5$$

### Exercice d'entraînement :

Soit  $f$ , la fonction définie par  $f(x ; y) = \frac{1}{3}x^3 + y$  et soit la contrainte  $x + y - 1 = 0$

On se propose dans cet exercice d'optimiser la fonction  $f(x)$  sous la contrainte  $x + y - 1 = 0$

#### **Étape 1 : Expression de la contrainte**

1) exprimer  $y$  en fonction de  $x$  :

$$y = -x + 1$$

#### **Étape 2 : Substitution dans la fonction $f$**

2) Substituons cette expression de  $y$  dans la fonction  $f$  :

$$f(x ; y) = f(x ; -x + 1) = \frac{1}{3}x^3 + (-x + 1) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$$

3) Donner l'expression de la fonction  $h(x) = f(x ; -x + 1)$

**On pose**

$$h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$$

#### **Étape 3 : Optimisation de la fonction d'utilité**

4) Déterminer les coordonnées des points critiques de la fonction  $h(x)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

5) Etudier la convexité de la fonction  $h$  au voisinage des points critiques

$$h''(x) = 2x$$

La fonction  $h$  est convexe si et seulement si  $h''(x) = 2x > 0 \Leftrightarrow h$  est convexe sur  $]0, +\infty[$

La fonction  $h$  est concave si et seulement si  $h''(x) = 2x < 0 \Leftrightarrow h$  est convexe sur  $]-\infty ; 0[$

6) En déduire la nature des points critiques

On a :

$$h''(1) = 2 > 0, \text{ la fonction est convexe au voisinage du point } A(1, \frac{1}{3}). h(1) = \frac{1}{3} \times 1^3 - 1 + 1 = \frac{1}{3}$$

Le point A réalise donc un minimum de la fonction  $h$

$$h''(-1) = -2 < 0, \text{ la fonction est concave au voisinage du point } B(-1, -\frac{1}{3}).$$

$$h(-1) = \frac{1}{3} \times (-1)^3 - 1 + 1 = -\frac{1}{3}$$

Le point B réalise donc un maximum de la fonction  $h$

7) Donner les extrema de la fonction  $f$  sous la contrainte  $x + y - 1 = 0$

Le point A réalise donc un minimum de la fonction  $f$

Le point B réalise donc un maximum de la fonction  $f$