Особые точки. Фазовая плоскость

Часто оказывается недостаточно простого утверждения об устойчивости или неустойчивости решения дифференциального уравнения, а требуется более тонкое изучение поведения системы с течением времени. При этом не требуется (или оказывается просто невозможным) отыскивать общее решение уравнения. Часть теории дифференциальных уравнений, посвященную этой проблеме, принято называть качественной теорией дифференциальных уравнений.

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений:

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n), i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Для системы (1) пространство переменных $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ есть *фазовое пространство*. В частности, если $n = 2$, то фазовое пространство называют *фазовой плоскостью*. Положение в этом пространстве, которое занимает при фиксированном t точка $(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ - *фазовая точка*. Кривые в $\mathbb{R}^n$, которые описывают фазовые точки при изменении параметра t называются *фазовыми траекториями*. Под *направлением* на фазовой траектории подразумевают направление движения фазовой точки $(x_1, \ldots, x_n)$ по траектории в сторону возрастания t. Картина, которую образуют фазовые траектории на плоскости $O_{x_1 \ldots x_n}$ с указанным на них направлением движения, носит название *фазового портрета*.

В системе (1), при условии, что правые части $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывны и обладают непрерывными частными производными $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}, i, k = 1, \ldots, n.$ в своей области определения, возможны три типа фазовых траекторий: точка, замкнутая и незамкнутая кривая. Точкам соответствует положения равновесия системы. Замкнутая кривая изображает периодическое решение, а незамкнутая - непериодическое.

При $n = 2$ обратимся к случаю, когда (1) есть линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

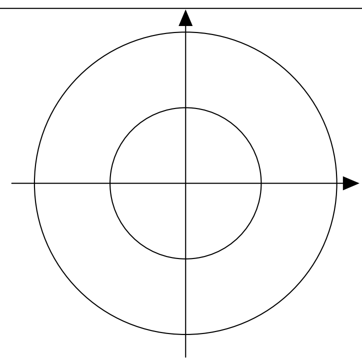
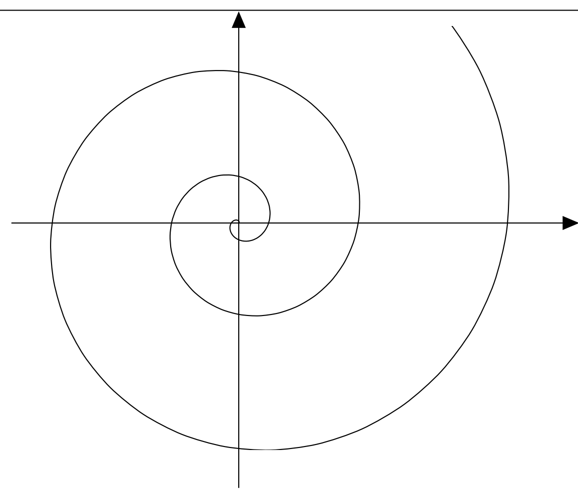
$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \frac{dy}{dt} = cx + dy. \tag{2}$$

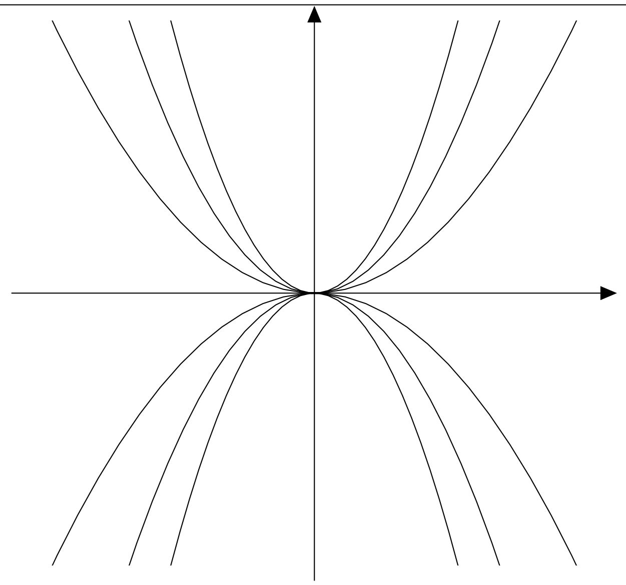
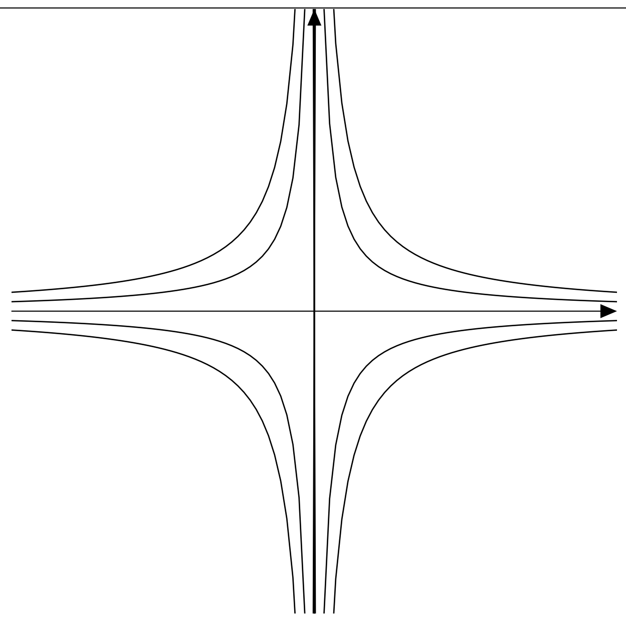
(2) Основная задача качественного исследования системы (2) состоит в том, чтобы выяснить качественную картину его фазового пространства. Характер поведения фазовых траекторий системы (2) на фазовой плоскости определяют корни и характеристического уравнения:

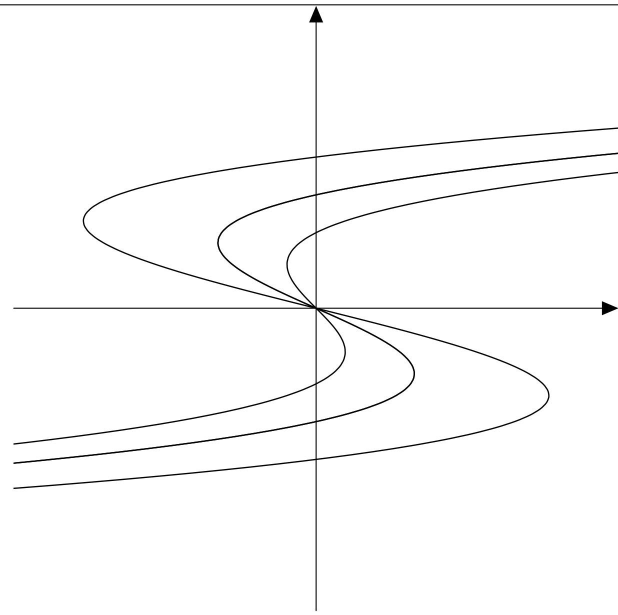
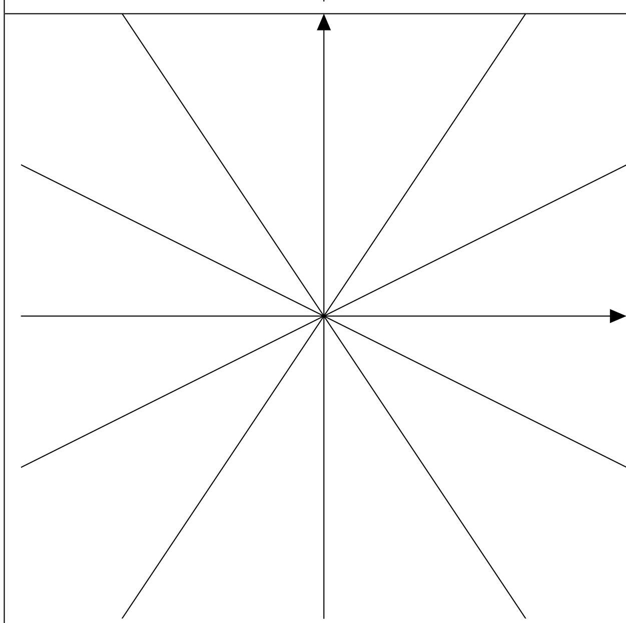
$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Эти корни могут быть либо действительными, причем простыми или кратными, либо комплексно сопряженными. Возможны только рассматриваемые ниже случаи расположения фазовых траекторий системы в окрестности точки покоя. В таблице приведена их классификация.

Классификация точек покоя.

$\lambda_{1,2} = \pm\beta i$		Центр
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha \neq 0$		Фокус

$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$		Узел
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$		Седло

$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$		Вырожденный узел
		Дикритический узел. Только в случае системы вида $\begin{cases} x' = ax \\ y' = ay \end{cases}$

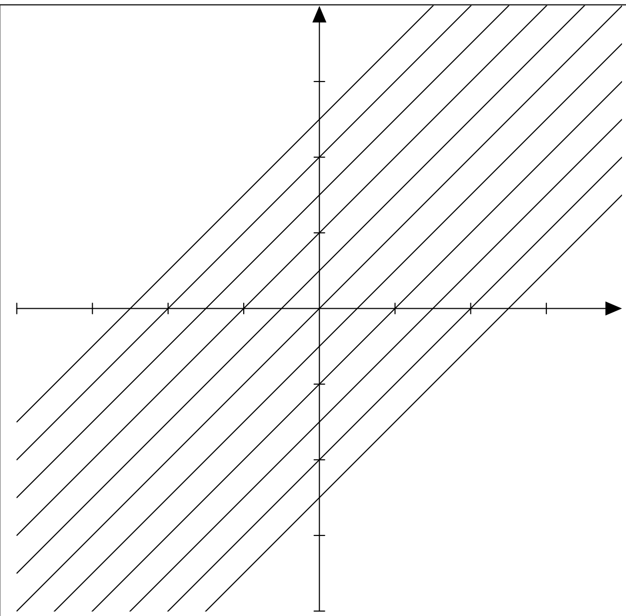
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$		В этом случае система имеет вид $\frac{dy}{dx} = k$. Траектории - прямые $y = kx + c$
$\lambda_{1,2} = 0$		Вся фазовая плоскость

Схема построения фазового портрета

1. Определить точки покоя системы.
2. Выписать характеристическое уравнение (3) и найти корни λ_1 и λ_2 - собственные значения матрицы системы.
3. По таблице определить тип точки покоя.
4. Начертить фазовый портрет.
а) Если точка покоя является узлом или седлом, то следует найти собственные вектора матрицы и начертить определяемые этими векторами прямые на фазовой плоскости. В случае узла фазовые траектории касаются той прямой, которая отвечает меньшему по абсолютной величине собственному значению.
б) Если точка покоя является фокусом, то нужно определить направление закручивания траекторий. Для этого достаточно построить в какой-либо точке (x, y) вектор скорости (x', y'), определяемый по формулам (2).
в) В оставшихся случаях вид траекторий можно определить, непосредственно решая данную систему. Для этого ее нужно записать в виде $\frac{dy}{dx} = \frac{cx+dy}{ax+by}$.

5. Определить направление движения по фазовым траекториям и изобразить его стрелками на фазовом портрете. Оно определяется устойчивостью (к) или неустойчивостью (от) исследуемого положения равновесия. В случае седла сначала нужно показать направления движения по прямым, определяемым собственными векторами, учитывая, что движение по прямой, соответствующей отрицательному собственному значению, происходит к точке покоя, а по прямой, соответствующей положительному собственному значению, - от нее. По всем остальным фазовым траекториям движение происходит согласно указанным уже направлениям. В случае центра направления движения можно определить, построив в произвольной точке плоскости вектор скорости.