Введение в решение СЛАУ

Нормы векторов и матриц. Число обусловленности матрицы СЛАУ

к.ф.-м.н. Уткин Павел Сергеевич [1]
e-mail: utkin@icad.org.ru, pavel_utk@mail.ru
(926) 2766560

Данная лекция доступна по адресу
http://mipt.ru/education/chair/computational_mathematics/study/materials/compmath/lectures/

11 октября 2014, МФТИ, Долгопрудный

[1] Конспект Ивана Цыбулина, email: tsybulin@crec.mipt.ru

Задачи вычислительной линейной алгебры

- Решение систем линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

- Вычисление определителей и обратных матриц

$$\det \mathbf{A}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

- Вычисление собственных и сингулярных чисел и векторов

$$\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma},\ \mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathsf{T}} = \mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathsf{T}} = \mathbf{E}$$

На практике разные вычислительные задачи приводят к необходимости решать линейные системы уравнений.

Задача решения системы

Найти решение системы из n линейных уравнений с n неизвестными

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = f_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = f_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = f_n
\end{cases},
$$

для краткости записанной в матричной форме

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}.$$

Существование и единственность решения этой системы гарантируется при $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Метод Крамера

Известен явный способ получения решения системы линейных уравнений — это метод Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ — определитель матрицы $\mathbf{A}$, а Δ_i — определитель матрицы, полученной из $\mathbf{A}$ заменой i-го столбца на вектор $\mathbf{f}$.
Однако, вычислять определитель по формуле

$$\Delta = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} (-1)^{P(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}$$

оказывается весьма затратно. Сложность вычисления решения методом Крамера составляет $\mathcal{O}(n \cdot n!)$. Практически этот метод применим лишь при небольших размерностях системы $n \lesssim 10$.

Прямы и итерационные методы решения СЛАУ

Методы решения систем алгебраических уравнений можно разделить на два класса:

- *Прямые методы*. Данные методы позволяют получить точное решение задачи (без учета ошибок округления) за *конечное* число арифметических действий.
- *Итерационные методы* или *методы последовательных приближений*. Позволяют вычислять последовательность векторов $\mathbf{x}^{(n)}$, которая при $n \to \infty$ сходится к решению задачи. На практике используют некоторое конечное приближение в зависимости от допустимого уровня погрешности.

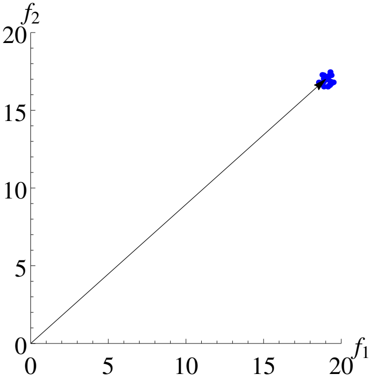
Влияние неустранимых погрешностей

Пусть решается система

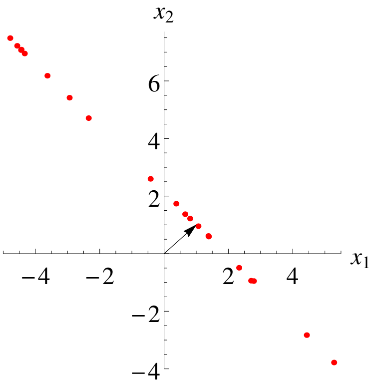
$$\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19. \\ 17. \end{pmatrix},$$

причем матрица известна точно, а правая часть получена округлением до целого (погрешность не более 3%). Посмотрим, на какую точность можно рассчитывать при решении системы.
Отметим, что определитель матрицы $\det \mathbf{A} = 10 \cdot 8 - 9^2 = -1 \neq 0$. С точки зрения линейной алгебры, проблем при решении данной системы не должно быть.

Решение при возмущениях правой части



$\rightarrow$



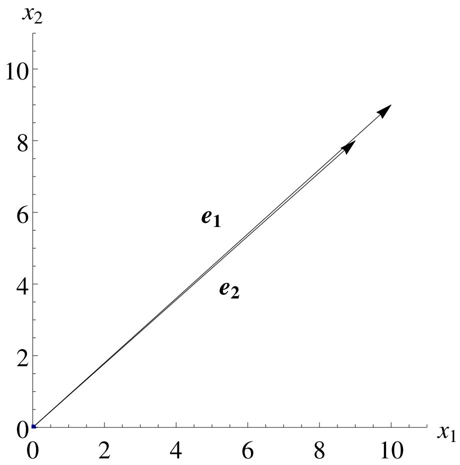
$$\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19. \\ 17. \end{pmatrix}$$

Геометрическая интерпретация

Фактически, при решении системы

$$\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19. \\ 17. \end{pmatrix}$$

мы пытаемся разложить вектор $\mathbf{f} = (19, 17)^\mathsf{T}$ по базису из векторов $\mathbf{e}_1 = (10, 9)^\mathsf{T}$ и $\mathbf{e}_2 = (9, 8)^\mathsf{T}$



Плохо обусловленные системы

Задача оказалась *плохо обусловленной*. Сравнительно небольшие возмущения системы уравнений привели к существенным отклонениям в решении.

Обусловленность задачи не связана с конкретным численным методом, это неустранимая ошибка. Существуют способы снижения погрешности, вызванной плохой обусловленностью:

- Каким-то образом перейти к хорошо обусловленной эквивалентной системе.
- Повысить точность определения коэффициентов СЛАУ и правой части.

Плохо обусловленные системы являются обобщением понятия вырожденных систем. Системы «близкие» к вырожденным скорее всего будут плохо обусловлены.

Нормы векторов

В вычислительной математике широко распространены следующие нормы:

- максимальная или бесконечная норма (иногда используется название норма Чебышёва)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$$

- ℓ_1 норма (на западе используются также названия «Манхэттеновская норма» и «норма такси»)

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_i |x_i|$$

- евклидова норма

$$\|\mathbf{x}\|_e = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \equiv \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

Норма матрицы

Норма матрицы должна удовлетворять стандартным аксиомам нормы:

- $\|\mathbf{A}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{0}$
- $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\|\mathbf{A}\|, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|.$

Определение 6.1

Матричная норма $\|\mathbf{A}\|$ называется *согласованной* с векторной нормой $\|\mathbf{x}\|$, если выполняется соотношение

$$\|\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|, \quad \text{где } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Определение 6.2

Матричная норма $\|\mathbf{A}\|$ называется *подчиненной* векторной норме $\|\mathbf{x}\|$, если

$$\|\mathbf{A}\| \equiv \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

Свойства нормы

Определение 6.3

Матричная норма $\|\mathbf{A}\|$ называется *субмультипликативной*, если

$$\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{B}\|$$

Если норма $\|\mathbf{A}\|$ подчинена какой-то векторной норме $\|\mathbf{x}\|$, то она субмультипликативна:

$$\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{ABx}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\mathbf{Bx}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{ABx}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \sup_{\mathbf{Bx}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{ABx}\|}{\|\mathbf{Bx}\|} \sup_{\mathbf{Bx}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Bx}\|}{\|\mathbf{x}\|} \boxed{\leqslant}$$

Последние два супремума взяты по части множества ненулевых векторов. От увеличения множества они не уменьшатся:

$$\boxed{\leqslant} \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ay}\|}{\|\mathbf{y}\|} \sup_{\mathbf{z}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Bz}\|}{\|\mathbf{z}\|} = \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{B}\|$$

Свойства нормы

Если норма $\|\mathbf{A}\|$ подчинена какой-то векторной норме $\|\mathbf{x}\|$, то она с ней согласована:

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \Rightarrow \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

Кроме этого, из-за компактности множества $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$, точная верхняя грань достигается на некотором векторе $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, то есть для него справедливо

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}_0\|$$

Максимальная норма

С одной стороны для любого $\mathbf{x}$,

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty = \max_i \left|\sum_j a_{ij}x_j\right| \leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_i |x_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty \cdot \max_i \sum_j |a_{ij}|,$$

то есть величина $\max\limits_i \sum_j |a_{ij}|$ — какая-то (возможно, не точная) верхняя грань отношения $\frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$.

Пусть i_0 — номер строки матрицы, в которой сумма модулей элементов максимальна:

$$\max_i \sum_j |a_{ij}| = \sum_j |a_{i_0 j}|$$

С другой стороны, на векторе $\mathbf{x}_0 = (\operatorname{sgn} a_{i_0 1}, \operatorname{sgn} a_{i_0 2}, \ldots, \operatorname{sgn} a_{i_0 n})^{\mathsf{T}}$

$$\frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\|_\infty}{\|\mathbf{x}_0\|_\infty} \geq \left|\sum_j a_{i_0 j} \operatorname{sgn} a_{i_0 j}\right| = \sum_j |a_{i_0 j}| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Максимальная норма

Следовательно, величина $\max_i \sum_j |a_{ij}|$ не только является верхней гранью отношения $\frac{\|\mathbf{Ax}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$, но и достигается при некотором $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Значит, она является точной верхней гранью:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty \equiv \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Утверждение 6.1

Матричная норма, подчиненная максимальной векторной норме имеет вид

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|,$$

и достигается на векторе $\mathbf{x}_0$, составленном из знаков строки матрицы $\mathbf{A}$ с максимальной суммой модулей элементов:

$$\|\mathbf{Ax}_0\|_\infty = \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \|\mathbf{x}_0\|_\infty$$

ℓ_1 норма

С одной стороны для любого $\mathbf{x}$,

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1 = \sum_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leqslant \sum_{i,j} |a_{ij}||x_j| = \sum_j |x_j| \sum_i |a_{ij}| \leqslant \|\mathbf{x}\|_1 \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

то есть величина $\max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$ — верхняя грань отношения $\dfrac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1}$.

Пусть j_0 — номер столбца матрицы, в котором сумма модулей элементов максимальна:

$$\max_j \sum_i |a_{ij}| = \sum_i |a_{ij_0}|$$

На векторе $\mathbf{x}_0 = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}$ (1 на j_0-м месте)

$$\frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\|_1}{\|\mathbf{x}_0\|_1} = \sum_i \left| \sum_j a_{ij} \delta_{jj_0} \right| = \sum_i |a_{ij_0}| = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

ℓ_1 норма

Аналогично случаю максимальной нормы, мы показали, что величина $\max_j \sum_i |a_{ij}|$ является точной верхней гранью отношения $\frac{\|\mathbf{Ax}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1}$:

$$\|\mathbf{A}\|_1 \equiv \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \|\mathbf{A}^\mathsf{T}\|_\infty$$

Утверждение 6.2

Матричная норма, подчиненная ℓ_1 векторной норме имеет вид

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \|\mathbf{A}^\mathsf{T}\|_\infty,$$

и достигается на векторе $\mathbf{x}_0$ — j_0-м столбце единичной матрицы:

$$\|\mathbf{Ax}_0\|_1 = \|\mathbf{A}\|_1 \cdot \|\mathbf{x}_0\|_1$$

Евклидова норма

Воспользуемся связью между евклидовой нормой вектора и скалярным произведением:

$$\|\mathbf{x}\|_e^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

а также тем свойством, что ортогональные матрицы $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\mathsf{T}$ сохраняют скалярное произведение:

$$(\mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{U}\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Представим матрицу $\mathbf{A}$ в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T}, \quad \text{где } \mathbf{U}\mathbf{U}^\mathsf{T} = \mathbf{V}\mathbf{V}^\mathsf{T} = \mathbf{E}$$
$$\boldsymbol{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

то есть осуществим ее сингулярное разложение.

Евклидова норма

Подставим сингулярное разложение

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}$$

в определение подчиненной евклидовой нормы (для удобства возведем в квадрат):

$$\|\mathbf{A}\|_e^2 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{Ax}, \mathbf{Ax})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sup_{\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}\mathbf{x})}{(\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{x})} = \sup_{\mathbf{z}\neq\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{\Sigma z}, \mathbf{\Sigma z})}{(\mathbf{z}, \mathbf{z})}.$$

Евклидова норма матрицы равна евклидовой норме диагональной матрицы из ее сингулярных чисел $\mathbf{\Sigma}$.
Максимальное значение отношения $\frac{(\mathbf{\Sigma z},\mathbf{\Sigma z})}{(\mathbf{z},\mathbf{z})}$ равно $\sigma^2_{\max}$ и достигается на векторе $\mathbf{z}_0 = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$, где единица стоит на j_0 месте, где j_0 — номер максимального сингулярного числа матрицы $\mathbf{A}$.

Евклидова норма

Утверждение 6.3

Евклидова норма матрицы $\mathbf{A}$ равна ее максимальному сингулярному числу

$$\|\mathbf{A}\|_e = \sigma_{\max}(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})},$$

и достигается на соответствующем правом сингулярном векторе

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{V}\mathbf{z}_0 = \mathbf{v}_{j_0}, \qquad \mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{v}_{j_0} = \lambda_{\max}\mathbf{v}_{j_0}$$

где j_0 — номер максимального сингулярного числа, $\mathbf{v}_{j_0}$ — j_0-й столбец матрицы $\mathbf{V}$.

Для симметричных матриц $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$ сингулярные числа совпадают с модулями собственных чисел, а сингулярные вектора совпадают с собственными векторами.

Число обусловленности

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f},$$

а также систему, получающуюся из нее возмущением правой части на вектор $\delta\mathbf{f}$ (это не δ умноженное на $\mathbf{f}$, а вектор возмущения):

$$\mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{f} + \delta\mathbf{f}.$$

В силу линейности,

$$\delta\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}' - \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{f}.$$

Оценим относительную погрешность решения в некоторой норме

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \frac{\|\delta\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}.$$

Считаем, что матричная норма согласована с векторной, и мы можем оценить $\|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{f}\|$ сверху произведением норм $\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\delta\mathbf{f}\|$.

Число обусловленности

Мы получили связь между относительной погрешностью решения и относительной погрешностью правой части системы уравнений:

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \frac{\|\delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}.$$

Величина

$$\nu(\mathbf{A}, \mathbf{f}) = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}\|}$$

называется *числом обусловленности системы при заданной правой части* и показывает, во сколько раз может возрасти относительная погрешность решения по сравнению с погрешностью правой части при решении системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$.
Отметим, что $\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{f}\|$, и число ν всегда не меньше единицы.

Число обусловленности

При выводе оценки

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \nu(\mathbf{A}, \mathbf{f})\frac{\|\delta\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}, \qquad \nu(\mathbf{A}, \mathbf{f}) = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

неравенство возникло из оценки

$$\|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{f}\| \leqslant \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\delta\mathbf{f}\|,$$

которое для подчиненных норм является точным. То есть, можно предъявить такой вектор $\delta\mathbf{f}$, что для него неравенство превратится в равенство, а оценка

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \nu(\mathbf{A}, \mathbf{f})\frac{\|\delta\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}$$

станет равенством

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \nu(\mathbf{A}, \mathbf{f})\frac{\|\delta\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}.$$

Число обусловленности

С одной стороны, число обусловленности $\nu(\mathbf{A}, \mathbf{f})$ не может быть меньше единицы (опять-таки, можно предъявить $\mathbf{f}$, на котором $\nu(\mathbf{A}, \mathbf{f}) = 1$), но может ли оно для заданной матрицы $\mathbf{A}$ принимать сколь угодно большие значения?
Найдем универсальную, не зависящую от $\mathbf{f}$ оценку сверху числа обусловленности:

$$\nu(\mathbf{A}, \mathbf{f}) \leq \sup_{\mathbf{f} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}\|} = \|\mathbf{A}^{-1}\| \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\|.$$

Данная оценка достигается, когда $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$.

Число обусловленности матрицы

Число $\mu(\mathbf{A}) \equiv \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$ называется *числом обусловленности матрицы* и дает универсальную оценку относительной погрешности решения системы с матрицей $\mathbf{A}$:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \mu(\mathbf{A}) \frac{\|\delta\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}$$

какой бы ни была правая часть $\mathbf{f}$.
Можно показать, что если возмущается не только правая часть $\mathbf{f}$, но и сама матрица $\mathbf{A}$, то при условии $\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\delta\mathbf{A}\| < 1$ верно

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \frac{\mu(\mathbf{A})}{1 - \mu(\mathbf{A})\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}} \left(\frac{\|\delta\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} + \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right)$$

Доказательство можно найти в *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике, 2006, стр. 37.

Евклидова норма

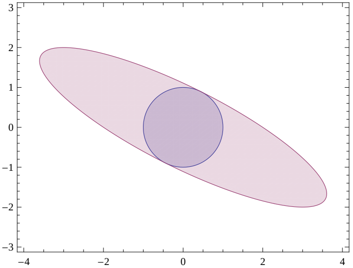
Число обусловленности $\mu(\mathbf{A})$ зависит от выбранной матричной нормы. Например, для евклидовой нормы $\sigma_{\max}(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{\min}(\mathbf{A})}$ и число обусловленности матрицы в евклидовой норме принимает вид

$$\mu_e(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{A})}{\sigma_{\min}(\mathbf{A})}.$$

Геометрически, $\mu_e(\mathbf{A})$ показывает насколько неравномерно преобразование $\mathbf{A}$ растягивает пространство по своим главным направлениям.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mu(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{A})}{\sigma_{\min}(\mathbf{A})} = \frac{4}{1} = 4$$



Бесконечная и ℓ_1 нормы

Поскольку бесконечная и ℓ_1 матричные нормы связаны соотношением

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \|\mathbf{A}^\mathsf{T}\|_1,$$

аналогично оказываются связанными числа обусловленности

$$\mu_\infty(\mathbf{A}) = \mu_1(\mathbf{A}^\mathsf{T})$$

Трудность практической оценки числа обусловленности заключается в оценке нормы $\|\mathbf{A}^{-1}\|$. Введем важное понятие *диагонального преобладания*:

Определение 6.4

Обозначим $d_i = |a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$. Говорят, что матрица имеет строгое диагональное преобладание, если для каждой строки

$$d_i > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Бесконечная норма

Теорема (Varah, 1974)

Если матрица $\mathbf{A}$ имеет строгое диагональное преобладание, то

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty < \frac{1}{\min\limits_i d_i} = \frac{1}{\min\limits_i |a_{ii}| - \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|}$$

Подставляя эту оценку в определение $\mu_\infty(\mathbf{A})$, получаем

$$\mu_\infty(\mathbf{A}) < \frac{\max\limits_i |a_{ii}| + \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|}{\min\limits_i |a_{ii}| - \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|}.$$

Аналогичная оценка для $\mu_1(\mathbf{A})$ получается при наличии у матрицы диагонального преобладания по столбцам.

Оценка для конкретной задачи

Вернемся к системе

$$\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19. \\ 17. \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$$

и посчитаем ее числа обусловленности в разных нормах:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \|\mathbf{A}\|_1 = 19, \qquad \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = \|\mathbf{A}^{-1}\|_1 = 19,$$

$$\mu_1(\mathbf{A}) = \mu_\infty(\mathbf{A}) = 19 \cdot 19 = 361.$$

Матрица симметрична, значит

$$\mu_e(\mathbf{A}) = \left| \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A})}{\lambda_{\min}(\mathbf{A})} \right| = \frac{\sqrt{82} + 9}{\sqrt{82} - 9} \approx 326.$$

Таким образом, погрешность в 3% в правой части решения приводит примерно к $\sim 1000\%$ ошибки в решении.

Список использованных источников

1. *В.И. Косарев.* 12 лекций по вычислительной математике, 2-е издание, Москва, Изд-во МФТИ, 2000, 224 с.
2. *И.Б. Петров, А.И. Лобанов.* Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие, Москва, БИНОМ, Лаборатория знаний, 2006, 523 с.
3. *J.M. Varah.* A lower bound for the smallest singular value of a matrix // Linear Algebra and its Applications, V. 11, N. 1, 1975, Pp. 3-5.