# 2. Дискретизация взятием отсчетов.



## 2. Дискретизация сигналов взятием отсчетов.

### П1. Спектр дискретизованного сигнала

Рассмотрим способы описания дискретизованного сигнала, т.е. дискретного сигнала, получаемого из аналогового с помощью операции дискретизации.

***1) Функция дискретного времени.***

Это описание дискретного сигнала в виде последовательности отсчетов $x[k]$ в заданные моменты времени $k\Delta t$, $n \in Z$, где $\Delta t$ — шаг дискретизации:

$$x[k] = \mathrm{T}x(k\Delta t),\ \mathrm{T} \in \{1;\ \Delta t\}$$

где $\mathrm{T}$ — константа с размерностью времени, равная единице или $\Delta t$. Выбор этой константы, как будет показано далее, влияет на связь между спектрами дискретизованного и исходного сигнала.

***2) Функция непрерывного времени (континуальная запись).***

$$x_{\text{д}}(t) = \mathrm{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t)$$

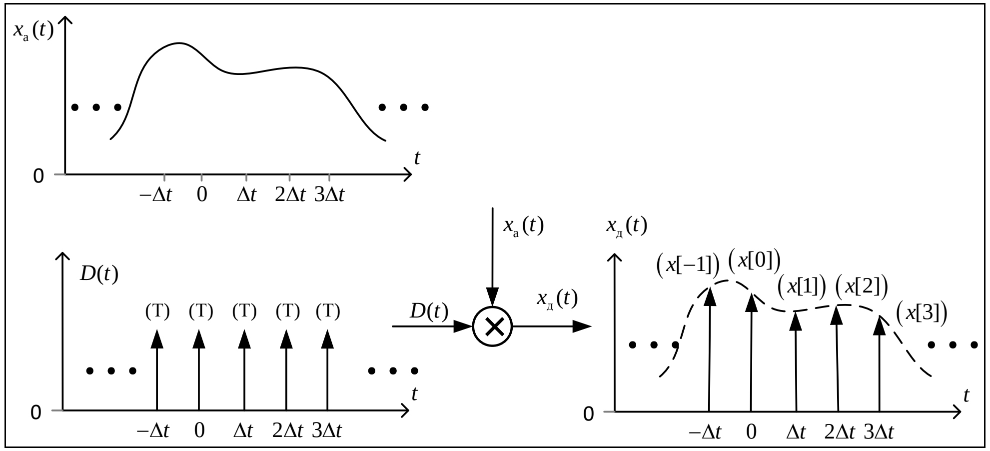
В этой записи дискретизованный сигнал представляется как результат умножения исходного аналогового сигнала $x(t)$ на идеальную функцию дискретизации, представляющую собой периодическую последовательность дельта-функций Дирака с площадями $\mathrm{T}$

$$D(t) = \mathrm{T}\delta(t - k\Delta t).$$

В таком случае дискретизованный сигнал описывается последовательностью дельта-функций с площадями (весами) $x[k] = \mathrm{T}x(k\Delta t)$:

$$x_{\text{д}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{T}x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t).$$

$$x_{\text{д}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t)$$



Определим спектр дискретизованного сигнала $X_д(f)$, зная спектр исходного аналогового сигнала до дискретизации $X(f)$. Воспользуемся континуальной формой записи дискретизованного сигнала

$$x_д(t) = \mathrm{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t - n\Delta t) = D(t)x(t)$$

$$D(t) = \mathrm{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$

Ряд Фурье для идеальной функции дискретизации

$$D(t) = \frac{\mathrm{T}}{\Delta t}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm\frac{2\pi}{\Delta t}t),$$

где коэффициенты Фурье $C_m = \dfrac{\mathrm{T}}{\Delta t}$ одинаковые для всех номеров *m*.

Таким образом,

$$x_д(t) = \frac{\mathrm{T}}{\Delta t}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t)\exp(jm\frac{2\pi}{\Delta t}t).$$

### *Эффект наложения*

Если спектр аналогового сигнала до дискретизации не был ограничен интервалом $\left[-\dfrac{f_д}{2}, \dfrac{f_д}{2}\right]$, то возникает ***эффект наложения*** (англ. aliasing). В таком случае спектр аналогового и дискретизованного на этом интервале не совпадают. Частично устранить этот эффект можно применением фильтра нижних частот с частотой среза $f_c = f_д/2$, при этом информация о высокочастотных спектральных компонентах $|f| > f_c$ не сохраняется.

Тогда по теореме смещения для преобразования Фурье:

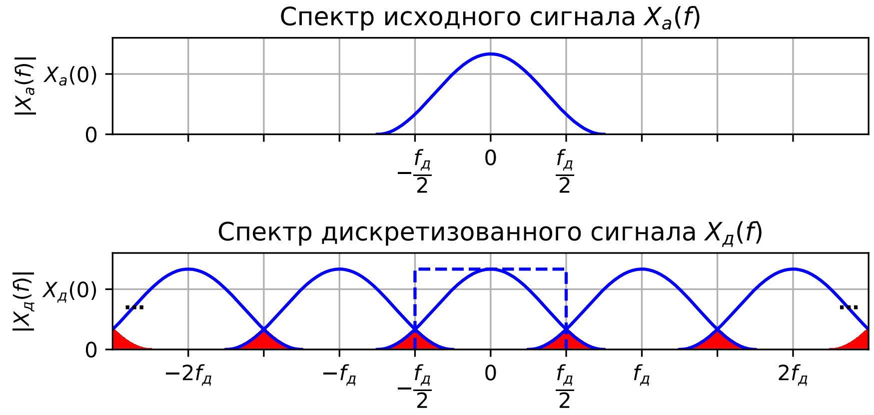
$$X_д(f) = \frac{\mathrm{T}}{\Delta t}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_д).$$

При непосредственном взятии отсчетов $x[k] = x(k\Delta t)$ константа $\mathrm{T} = 1$, и спектр перед периодическим повторением масштабируется.

При $\mathrm{T} = \Delta t$ (когда $x[k] = \Delta t\, x(k\Delta t)$) дискретизация аналогового сигнала $x(t)$ по времени с шагом $\Delta t$ приводит к периодическому повторению его спектра с периодом (по частоте), равным частоте дискретизации $f_д = 1/\Delta t$

$$X_д(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_д).$$

Заметим, что при этом интервал $\left[-\dfrac{f_д}{2}, \dfrac{f_д}{2}\right]$ является одним периодом функции $X_д(f)$. Если спектр аналогового сигнала лежит в этом интервале, то он периодически повторяется без наложения



## П2. Теорема Котельникова во временной области.

***Теорема отсчетов для сигнала с финитным спектром (Котельников 1933 г., Шеннон 1949 г.).*** Если сигнал $x(t)$ имеет спектр, ограниченный интервалом $[-f_в, f_в]$, и не содержит гармонических компонент на частотах $\pm f_в$ [1], то он представим с помощью своих дискретных отсчетов $x(k\Delta t)$, взятых с шагом $\Delta t = \dfrac{1}{2 f_в}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin(2\pi f_в (t - k\Delta t))}{2\pi f_в (t - k\Delta t)}.$$

Приведем две различные интерпретации этой теоремы.

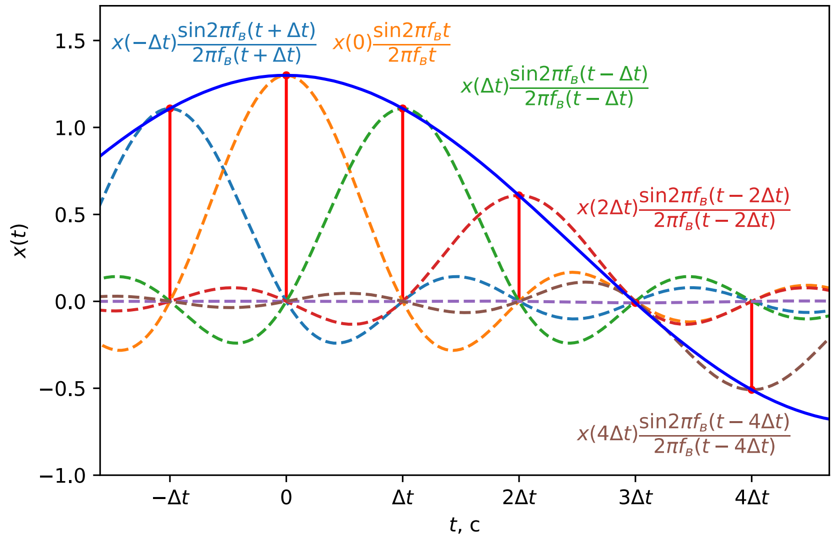
1) Если сигнал $x(t)$ дискретизован с частотой $f_д$, а его спектр ограничен интервалом $\left[-\dfrac{f_д}{2}, \dfrac{f_д}{2}\right]$, его можно представить с помощью дискретных отсчетов $x(k\Delta t)$. Частота $f_д / 2$, равная половине частоты дискретизации, называется частотой Найквиста.

2) Отсчеты $x(k\Delta t)$ являются коэффициентами Фурье разложения сигнала $x(t)$ по базису из функций отсчетов:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin(2\pi f_в (t - k\Delta t))}{2\pi f_в (t - k\Delta t)},\ \Delta t = \frac{1}{2 f_в}.$$

[1] Без этой оговорки теорема Котельникова не выполняется, например, для случая дискретизации сигнала $x(t) = \sin(2\pi f_в t)$ с шагом $\Delta t = \dfrac{1}{2 f_в}$.

В пространстве сигналов из $L_2(-\infty, \infty)$ с спектром, ограниченным интервалом $\left[-\dfrac{f_д}{2}, \dfrac{f_д}{2}\right]$, система функций $\{\varphi_k(t)\}_{k \in Z}$ полна и ортогональна.




Для сигнала $x(t)$ с финитным спектром $X(f)$ запишем представление по функциям отсчетов:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{\sin(2\pi f_в (t - k\Delta t))}{2\pi f_в (t - k\Delta t)},$$

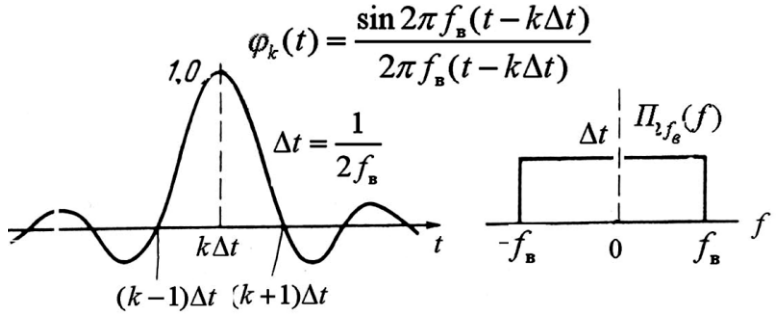
где

$$c_k = \frac{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_k)}{(\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_k)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin(2\pi f_в (t - k\Delta t))}{2\pi f_в (t - k\Delta t)} dt$$

есть коэффициенты Фурье и $\Delta t = 1/2f_в$. Спектр функции отсчётов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) e^{-j2\pi ft} dt = \Pi_{2f_В}(f) \exp(-j2\pi f k\Delta t)$$

имеет фазовый множитель из-за сдвига по времени на $k\Delta t$. **Модуль этого спектра $\Pi_{2f_В}(f)$ является прямоугольной функцией с единичной площадью (доказать самостоятельно)**




С учётом обобщённого равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df$$

выражение для коэффициента $c_k$ можем записать в виде

$$c_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \Pi_{2f_в}(f) e^{j2\pi f k\Delta t} df.$$

Произведение под интегралом при $-f_в < f < f_в$

$$X(f)\Pi_{2f_в}(f) = X(f)\frac{1}{2f_в} = X(f)\Delta t,$$

Поэтому $c_k = x(k\Delta t)$. Отсюда вывод:

*если сигнал имеет спектр, ограниченный интервалом $[-f_в, f_в]$ и шаг дискретизации $\Delta t = 1/2f_в$, то коэффициенты Фурье $c_k$ разложения сигнала по функциям отсчётов $\varphi_k(t)$ являются выборками сигнала $x(k\Delta t)$ и для $x(t)$ имеет место представление рядом Котельникова:*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_в(t-k\Delta t)}{2\pi f_в(t-k\Delta t)}.$$

***Алгоритм передачи непрерывного сигнала с помощью его отсчетов.***

- Взять отсчеты $x(k\Delta t)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Передать величины этих отсчетов.
- На приемном конце сформировать короткие импульсы с площадями $\Delta t x(k\Delta t)$.
- Восстановить сообщение с помощью фильтра нижних частот с полосой пропускания $[-f_в, f_в]$, подавая на вход сформированные короткие импульсы

***Недостатки подхода.***

- Спектры реальных сигналов ограничены по частоте приближено.
- Невозможно измерить отсчеты сигнала за бесконечно малый промежуток времени.
- Реальные фильтры восстановления отличаются от идеального фильтра нижних частот.
- Короткие импульсы отличны от дельта-функций.

**П3. Теорема отсчетов в частотной области**

Реально все сигналы наблюдаются в течение конечного интервала времени, например, $[-T,\ T]$. Поэтому можно считать, что $x(t)$ является финитной функцией. Спектр такого сигнала имеет бесконечную протяжённость и записывается в виде

$$X(f) = \int_{-T}^{T} x(t)e^{-j2\pi f t}dt.$$

Для периодического продолжения $x(t)$ с периодом $2T$ (без наложения) справедливо представление рядом Фурье:

$$x_{\text{п}}(t) = \sum_n c_n \exp(j2\pi n\Delta f t),$$

Где $\Delta f = 1/2T$ и коэффициенты Фурье $c_n = (1/2T)\int_{-T}^{T} x(t)\exp(-j2\pi n\Delta f t)dt = \Delta f X(n\Delta f).$

Для спектральной функции можем записать

$$X(f) = \int_{-T}^{T}\left[\sum_n \Delta f X(n\Delta f)\ \exp(j2\pi n\Delta f t)\right]\exp(-j2\pi f t)dt =$$

$$= \Delta f \sum_n X(n\Delta f) \int_{-T}^{T} \exp\big(j2\pi(n\Delta f - f)t\big)dt.$$

Интеграл в этом выражении легко находится

$$\int_{-T}^{T} \exp\big(j2\pi(n\Delta f - f)t\big)dt =$$

$$\frac{1}{j2\pi(n\Delta f - f)}\exp\big(j2\pi(n\Delta f - f)t\big)\Big|_{-T}^{T} =$$

$$= \frac{2\sin 2\pi T(n\Delta f - f)}{2\pi(n\Delta f - f)}.$$

Для $X(f)$ окончательно получаем

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta f)\frac{\sin 2\pi T(f - n\Delta f)}{2\pi T(f - n\Delta f)};\ \Delta f = 1/2T.$$

Это интерполяционная формула Котельникова (теорема отсчётов) в частотной области. Функция $X(f)$ на любой частоте $f$ однозначно представляется последовательностью своих отсчётов, взятых через равные интервалы $\Delta f = 1/2T$.

Дискретизация спектральной функции с шагом $\Delta f = 1/2T$ приводит к периодическому повторению сигнала по оси времени с периодом $2T$. При этом эффекта наложения отдельных периодов друг на друга не будет, поскольку шаг дискретизации по частоте выбран в соответствии с теоремой отсчётов в спектральной области. Выделив один из периодов, например, при $t \in [-T,\ T]$, можно точно восстановить спектральную функцию $X(f)$, взяв преобразование Фурье для $x(t)$.