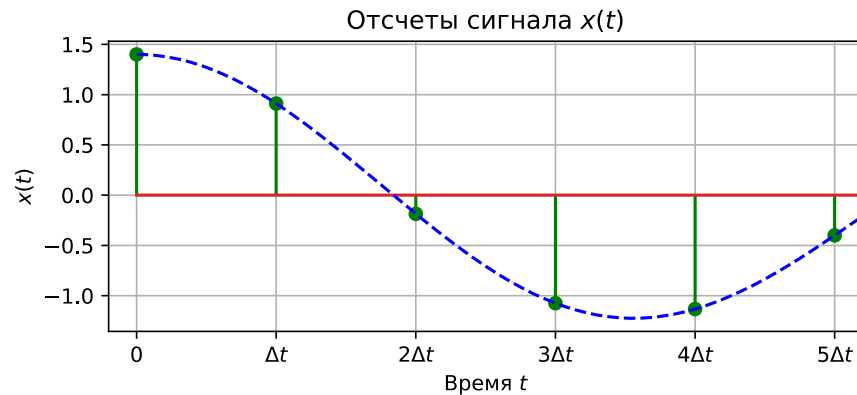


3. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ)

Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов



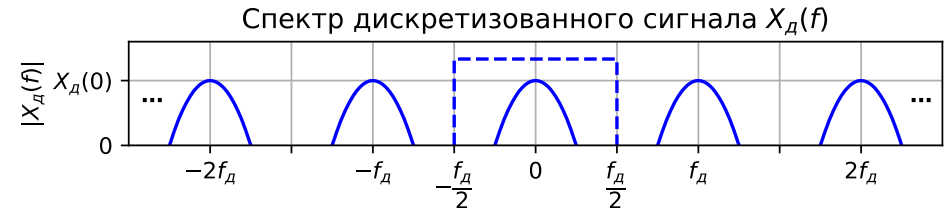
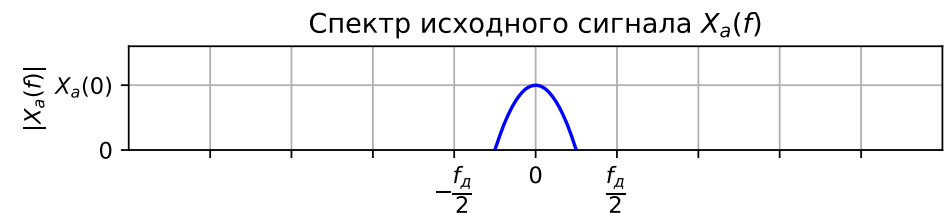
Пусть есть последовательность выборок $x(k\Delta t)$, некоторого аналогового сигнала $x(t)$, где Δt — шаг дискретизации — интервал времени между каждой парой соседних эквидистантных отсчетов, $k \in \mathbb{Z}$ — номер отсчета. $f_d = 1/\Delta t$ — частота дискретизации — величина, обратная шагу дискретизации (размерность $[\text{Гц}] = [\text{с}^{-1}]$). Будем считать, что спектр исходного аналогового сигнала ограничен интервалом $[-f_d/2; f_d/2]$, а соответственно при дискретизации не наблюдается эффект наложения спектров ($f_d > 2f_b$).

Рассмотрим последовательность отсчетов (дискретный сигнал) $x[k]$, которую будем определять через выборки следующим образом

$$x[k] = T x(k\Delta t),$$

где $T = \Delta t$. Как ранее было установлено, при $T = \Delta t$ спектр дискретизованного сигнала $x[k]$ представляет собой периодическое повторение исходного спектра $X_a(f)$ аналогового сигнала $x(t)$ с периодом, равным частоте дискретизации f_d :

$$X_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f - nf_d).$$



Необходимая спектральная информация будет содержаться в полосе $[-f_d/2; f_d/2]$. Теперь оценим спектр исходного сигнала по его выборкам в этой полосе.

Континуальная запись дискретного сигнала $x[k]$ в данном случае

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t).$$

Вычислим его спектр (преобразование Фурье)

3. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Занятие 22 сентября 2022. МФТИ

$$\begin{aligned} X_d(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_d(t) \exp(-j2\pi f t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi f t) dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi f t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t), \end{aligned}$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала определяется через его отсчёты по формуле

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t). \quad (0.1)$$

Эта формула определяет прямое дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Учитывая, что (0.1) представляет собой ряд Фурье для периодической функции $X_d(f)^1$, получаем, что отсчётные значения дискретного сигнала соответствуют коэффициентам Фурье в этом ряде:

$$x[k] = c_{-k} = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df. \quad (0.2)$$

В итоге получаем пару формул (0.1) и (0.2), определяющих прямое и обратное дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). ДВПФ в свою очередь показывает, каким является спектр дискретного сигнала $x[k]$, который на отрезке оси частот $[-f_d/2; f_d/2]$ в отсутствие наложения совпадает со спектром исходного аналогового сигнала. При этом важно

¹ Напоминание. Для $2l$ - периодической функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на интервале $(-l; l)$ ряд Фурье по системе функций

$$\phi_m(x) = \exp(jm \frac{\pi}{l} x), \quad m \in Z: \quad f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(jm \frac{\pi}{l} x), \quad \text{где}$$

$$\text{коэффициенты Фурье } c_m = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp(-jm \frac{\pi}{l} x) dx$$

помнить, что в данном случае выборки аналогового сигнала связаны с дискретной последовательностью как $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$.

Различные формы записи ДВПФ

Итак, мы установили, что пара дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ) имеет вид

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t),$$

$$x[k] = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df.$$

Введем нормированные частоты $\nu = f / f_d = f \Delta t$. Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi \nu k),$$

$$x[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \exp(j2\pi \nu k) d\nu.$$

Если принять $2\pi f = \omega$, а частоту дискретизации взять в рад/с $\omega_d = 2\pi / \Delta t$, то

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\omega k \Delta t),$$

$$x[k] = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega.$$

Приняв $\theta = 2\pi \nu$ (нормированный угол в радианах), получаем

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\theta k),$$

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) \exp(j\theta k) d\theta.$$

3. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Занятие 22 сентября 2022. МФТИ

Частотная переменная	Размерность	Период поворота спектра	
f	Гц	$f_d = 1 / \Delta t$	$[-f_d / 2; f_d / 2]$
$\omega = 2\pi f$	рад/с	$\omega_d = 2\pi / \Delta t$	$[-\omega_d / 2; \omega_d / 2]$
$\nu = f / f_d$	безразмерная	1	$[-0,5; 0,5]$
$\theta = 2\pi f / f_d$	рад	2π	$[-\pi; \pi]$

Пример.

Рассмотрим в качестве примера последовательность единичных импульсов $x[k] = \mathbf{1}[k+1] + \mathbf{1}[k] + \mathbf{1}[k-1]$, где $\mathbf{1}[k]$ — единичный импульс, определяемый как

$$\mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

ДВПФ такой последовательности

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=-1}^1 x[k] e^{-j2\pi\nu k} = x[-1] e^{j2\pi\nu} + x[0] e^0 + x[1] e^{-j2\pi\nu} = \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu)$$

Свойства ДВПФ

1) Линейность

Если $x[k] \leftrightarrow X(\nu)$ и $y[k] \leftrightarrow Y(\nu)$, то $\alpha x[k] + \beta y[k] \leftrightarrow \alpha X(\nu) + \beta Y(\nu)$, где α, β — фиксированные числа.

Это свойство следует непосредственно из соответствующих свойств интеграла и суммы.

2) Теорема запаздывания

Если

$$x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu), \text{ то } x[k-l] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu) \exp(-j2\pi\nu l).$$

где $x[k-l]$ — это сигнал, запаздывающий по времени относительно сигнала $x[k]$ на l отсчетов в случае $l > 0$ и опережающий сигнал $x[k]$ на $-l$ отсчетов в случае $l < 0$.

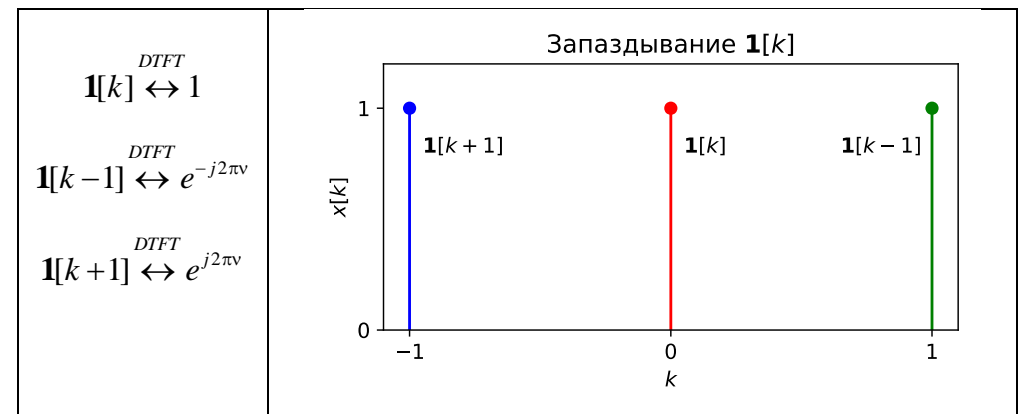
Докажем свойство. Для этого возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \exp(-j2\pi\nu l) \exp(j2\pi\nu k) d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \exp(j2\pi\nu(k-l)) d\nu = x[k-l].$$

Стоит отметить, что $|X(\nu)|$ для запаздывающего и исходного сигнала одинаков.

Пример

$$\mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$



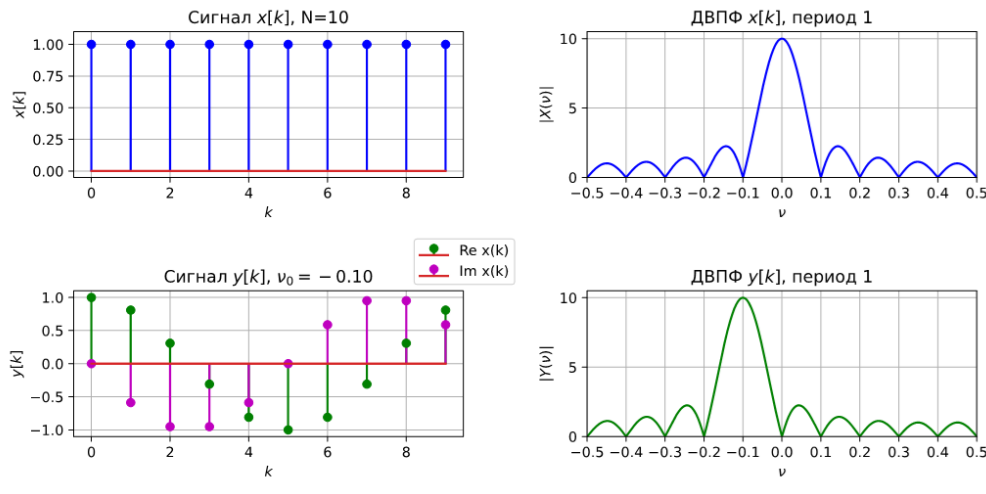
3. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Занятие 22 сентября 2022. МФТИ

3) Теорема сдвига

Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)$, то $x[k]\exp(j2\pi\nu_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu - \nu_0)$

Умножение сигнала на комплексную экспоненту вида $\exp(j2\pi\nu_0 k)$, $\nu_0 \in R$ приводит к сдвигу спектральной функции вдоль оси частот на ν_0 вправо в случае $\nu_0 > 0$ и на $-\nu_0$ влево в случае $\nu_0 < 0$.

Пример.



$$y[k] = x[k]\exp(j2\pi\nu_0 k), \text{ где } x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m].$$

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\nu k) = \frac{1 - \exp(-j2\pi\nu N)}{1 - \exp(-j2\pi\nu)} = \\ &= \frac{2j e^{-j\pi\nu N}}{2j e^{-j\pi\nu}} \frac{(e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N})}{(e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu})} = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu). \end{aligned}$$

$$|X(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|.$$

$$Y(\nu) = X(\nu - \nu_0) = \frac{\sin(N\pi(\nu - \nu_0))}{\sin(\pi(\nu - \nu_0))} \exp(-j(N-1)\pi(\nu - \nu_0)).$$

4) Равенство Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)Y^*(\nu) d\nu$$

Пример.

Предположим, что имеется конечная последовательность $x[k] = \{1; 1; 1\}$. $k=0$

Тогда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = 3$. При этом

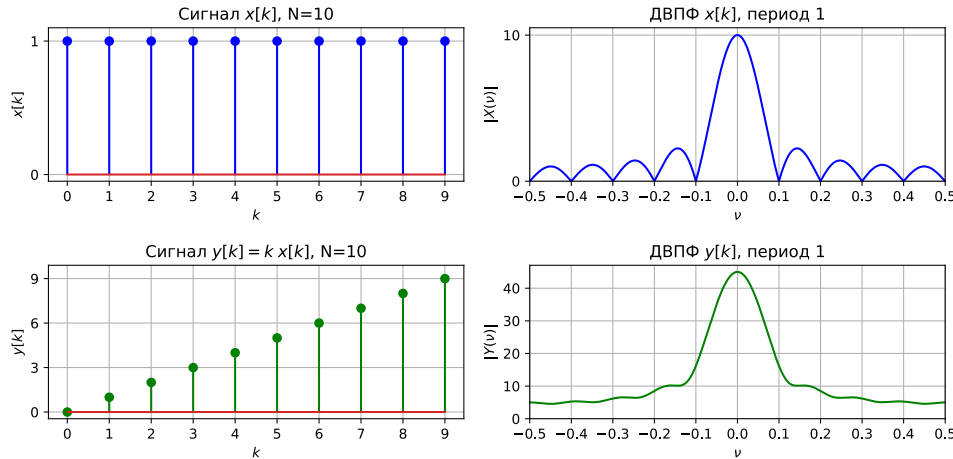
$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j2\pi\nu k} = x[-1]e^{j2\pi\nu} + x[0]e^0 + x[1]e^{-j2\pi\nu} = \\ &= \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu). \end{aligned}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} |1 + 2\cos(2\pi\nu)|^2 d\nu = 3.$$

3. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Занятие 22 сентября 2022. МФТИ

5) Умножение на k и дифференцирование по частоте

Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)$, то $y[k] = kx[k] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{j}{2\pi} \frac{dX(\nu)}{d\nu}$.



6) Изменение масштаба

Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)$, то $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu L)$.

Для того, чтобы доказать свойство, вычислим ДВПФ для последовательности в левой части.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \exp(-j2\pi\nu k) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \exp(-j2\pi(\nu L)m) = X(\nu L). \end{aligned}$$

Пример

Рассмотрим последовательность из 10 единичных импульсов.

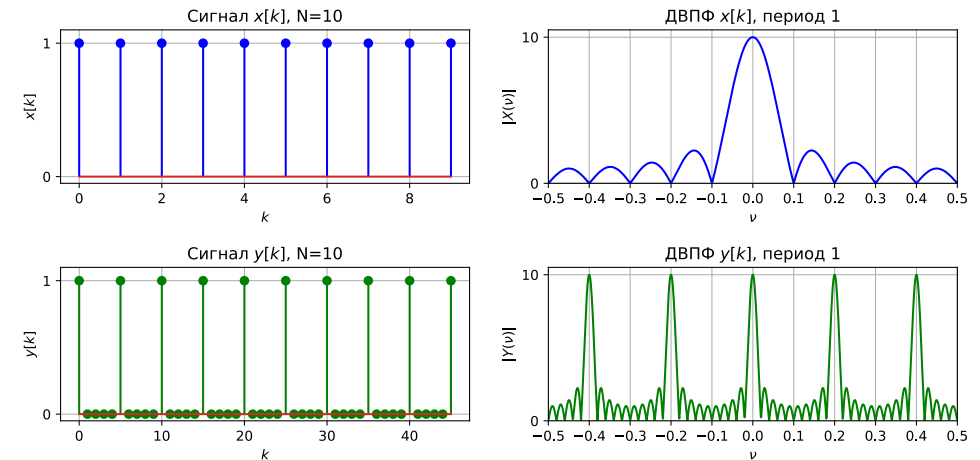
$$x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k - m].$$

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\nu k) = \frac{1 - \exp(-j2\pi\nu N)}{1 - \exp(-j2\pi\nu)} = \\ &= \frac{e^{-j\pi\nu N}}{e^{-j\pi\nu}} \frac{(e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N})}{(e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu})} = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu). \end{aligned}$$

$$|X(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|.$$

Между каждой парой отсчетов добавим $L-1$ нулевой отсчет. Тогда модуль ДВПФ получившейся последовательности

$$|X_L(\nu)| = \left| \frac{\sin(10\pi\nu L)}{\sin(\pi\nu L)} \right|.$$



3. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Занятие 22 сентября 2022. МФТИ

7) Теорема о свертке во временной области.

Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$ и $y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(v)$, то $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[k-m] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)Y(v)$.

В левой части стоит дискретная свертка сигналов, в правой — произведение спектров.

8) Теорема о свертке в частотной области

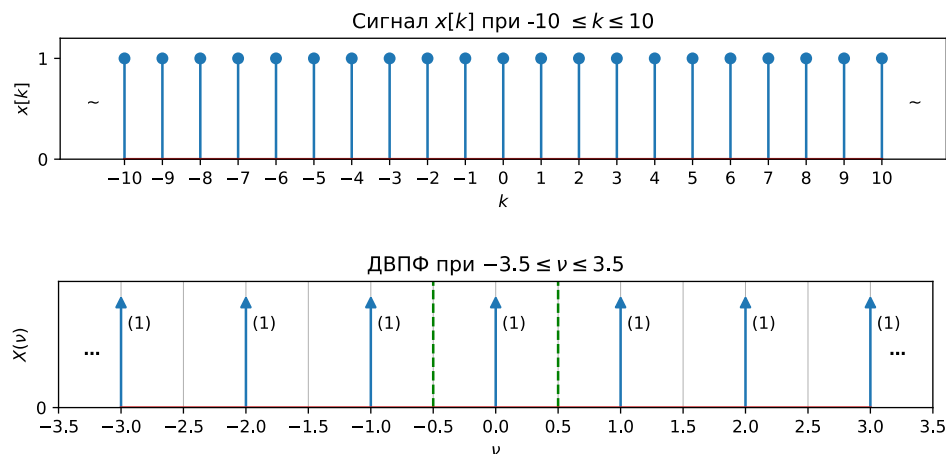
Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$ и $y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(v)$, то $x[k]y[k] \xleftrightarrow{DTFT} \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{v})Y(v-\tilde{v})d\tilde{v}$.

В левой части стоит произведение сигналов, в правой — циклическая свертка спектров.

9) ДВПФ периодических последовательностей

а) последовательность единичных импульсов с периодом 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n)$$



Вычислим ДВПФ для последовательности $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]$.

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi vk) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \right) \exp(-j2\pi vk) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \exp(-j2\pi vk).$$

$$X(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi vm).$$

Заметим, что $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi vm)$ — это ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности δ -функций с периодом 1

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m} \exp(-j2\pi vm),$$

где коэффициенты Фурье

$$C_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(v) \exp(j2\pi vm) dv = e^0 = 1. \text{ Тогда получаем, что}$$

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n).$$

3. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Занятие 22 сентября 2022. МФТИ

б) Периодическая последовательность единичных импульсов с периодом L .

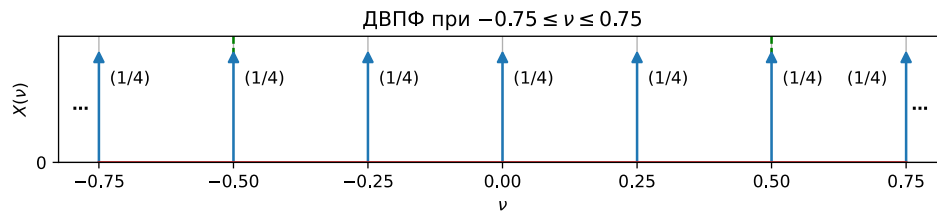
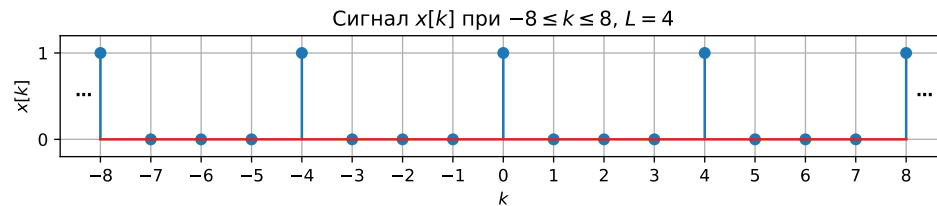
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{L}\right)$$

Найдем ДВПФ для последовательности $x[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL]$.

Воспользовавшись свойством δ -функции $\delta(av - b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(v - \frac{b}{a}\right)$,

получаем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{L}\right)$$



Используя свойство об изменении масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} X(vL),$$

из

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - m] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - n)$$

получаем

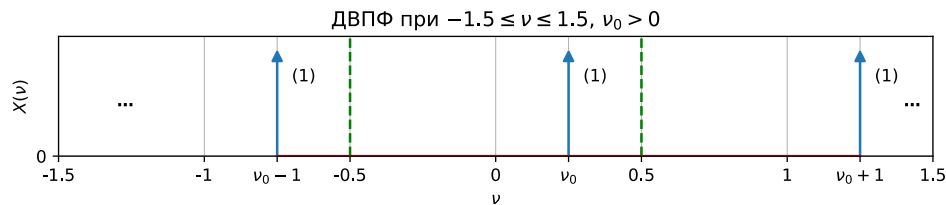
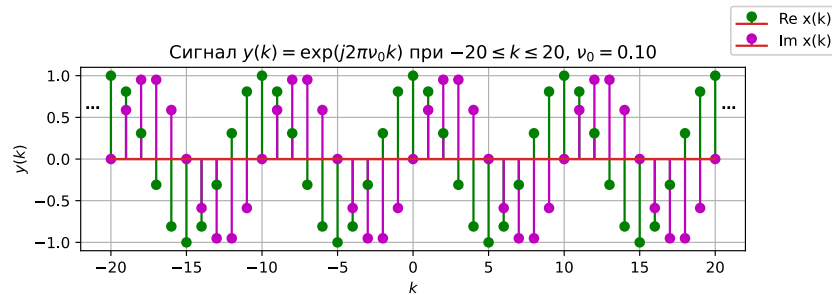
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(vL - n)$$

3. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Занятие 22 сентября 2022. МФТИ

в) Гармонические сигналы

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), -\infty < k < +\infty \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

$$y[k] = \exp(j2\pi\nu_0 k)$$



Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)$, то $x[k] \exp(j2\pi\nu_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu - \nu_0)$. (теорема

смещения для ДВПФ). При этом $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$. Получаем, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \exp(j2\pi\nu_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

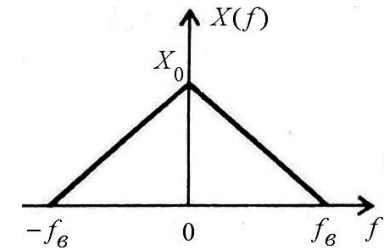
$$\exp(j2\pi\nu_0 k), -\infty < k < +\infty \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Гармонический сигнал $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$, $f_0 = 500$ кГц дискретизован с частотой $f_d = 2$ МГц. Изобразить как функцию нормированной частоты $\nu = f / f_d$ в диапазоне $|\nu| \leq 2$

- модуль спектра исходного сигнала;
- модуль спектра дискретизованного сигнала;
- модуль спектра последовательности $z[k] = x[k] \cdot 2 \cos(k\pi/2)$.

2. Сигнал $x(t)$ имеет финитный спектр треугольного вида. Определить коэффициенты ряда Котельникова этого сигнала, полагая, что $\Delta t = \frac{1}{2f_s}$.



3. Найти и изобразить по модулю ДВПФ 16 - точечных последовательностей

$$x[k] = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}[k-m] \text{ и } y[k] = x[k] \cos(2\pi k/16).$$

4. Сформулировать и доказать теорему о свертке последовательностей для ДВПФ.