Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Якушевич Артём Юрьевич

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Построить простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник-жертва» — модель Лотки-Вольтерры.

Найти стационарное состояние системы

2 Задание

2.1 Построить график зависимости численности хищников от численности жертв и графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8, y_0 = 30$.

2.2 Найти стационарное состояние системы.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Теоретическое введение

Модель взаимодействия Лотки-Вольтерры двух видов типа «хищник-жертва». Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях: 1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории) 2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса (по экспоненциальному закону), при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает 3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными 4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается 5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = ax(t) + bx(t)y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -cy(t) - dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (положение равновесия, не зависящее от времени решения). Если начальное состояние будет другим, то это приведет к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в начальное состояние. Стационарное состояние системы будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$

Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

3.2 Начальные условия

1. Зададим коэффициенты (рис. 3.1)

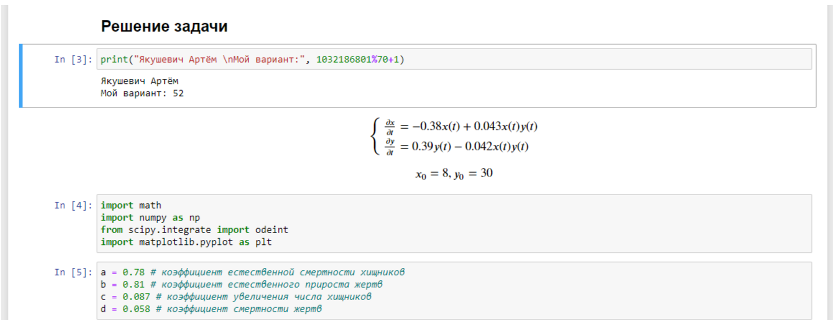

Figure 3.1: Коэффициенты

3.3 Составление систем дифференциальных уравнений и их решения (рис. 3.2)

```
In [4]: def syst2(x, t):
            dx0 = -a*x[0] + c*x[0]*x[1]
            dx1 = b*x[1] - d*x[0]*x[1]
            return dx0, dx1
```

Figure 3.2: Вектор-функция для решения уравнений, начальные значения x и y

3.4 Запишем массив хищников и жертв (рис. 3.3):

```
In [8]: y2 = y[:,1] # массив хищников
        y1 = y[:,0] # массив жертв
```

Figure 3.3: массив хищников и жертв

3.5 Графики

Зависимость изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями (рис. 3.4)

```
In [9]: plt.plot(t,y1, label='хищники')
        plt.plot(t,y2, label='жертвы')
        plt.legend()

Out[9]: <matplotlib.legend.Legend at 0x23da479f250>
```

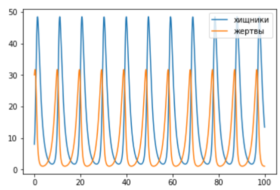

Figure 3.4: Зависимость x от y и стационарное состояние

Зависимость численности хщиников и жертв от времени с начальными данными (рис. 3.5)

```
In [10]: plt.plot(y1,y2) #построение графика зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв
         plt.plot(8,30, 'ro', label='начальное состояние')
         plt.plot(b/d,a/c, 'go', label='стационарное состояние')
         plt.legend()
         plt.grid(axis='both')
```

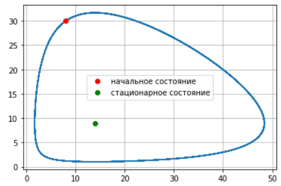

Figure 3.5: Зависимость x(t) и y(t)

4 Выводы

Научился строить простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник-жертва» — модель Лотки-Вольтерры.

Построил график зависимости x от y и графики функций $x(t), y(t)$

Нашёл стационарное состояние системы