Лабораторная работа 2

Математическое моделирование

Якушевич Артём Юрьевич

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Рассмотреть один из примеров построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска.

2 Задание

2.1 1. Запись уравнения, описывающего движение катера, с начальными условиями для двух случаев

2.2 2. Построение траектории движения катера и лодки для двух случаев

2.3 3. Нахождение точки пересечения траектории катера и лодки

3 Выполнение лабораторной работы

3.0.1 Рассуждения и вывод дифференциальных уравнений

3.0.2 1. Принимаем за $t_0 = 0, x_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_0 = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

3.0.3 2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0(\theta = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны (рис. 3.1)

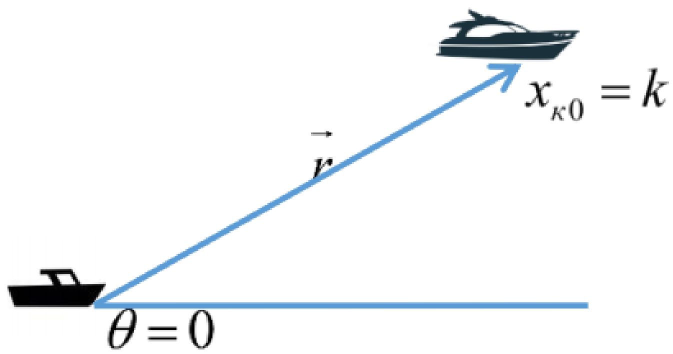

Figure 3.1: Положение катера и лодки в начальный момент времени

3.0.4 3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ, только в этом случае траектория катера

пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров. ### 4. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{2v}$ (во втором случае $\frac{x+k}{2v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения: $\frac{x}{v} = \frac{k-x}{2v}$ в первом случае или $\frac{x}{v} = \frac{k+x}{2v}$ во втором. Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{k}{3}$ и $x_2 = k$, задачу будем решать для двух случаев. ### 5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ - тангенциальная скорость. (рис. 3.2)

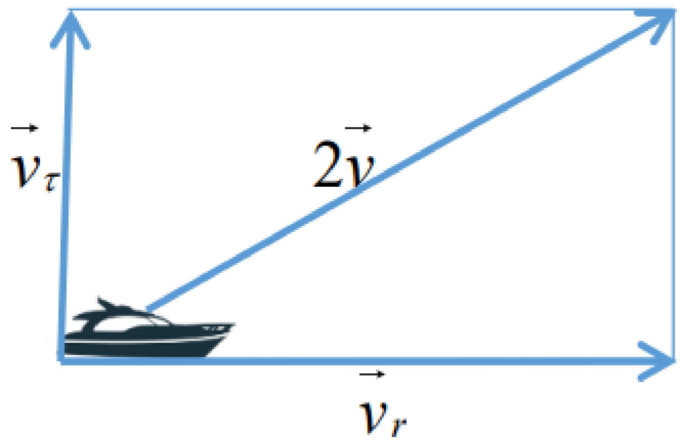

Figure 3.2: Разложение скорости катера

Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$. Нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ на радиус r, $v_\tau = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. Из рисунка видно: $v_\tau = \sqrt{4v^2 - v^2} = \sqrt{3}v$ (учитывая, что радиальная скорость равна v). Тогда получаем $r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{3}v$. ### 6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v \\ r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{3}v \end{cases}$ с начальными условиями $\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2 \end{cases}$. Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{r}{\sqrt{3}}$ Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, вы получите траекторию движения катера в полярных координатах.

3.1 Построение траектории движения катера и лодки для двух случаев и точки пересечения

Задам расстояние своего варинта k=17.4 и константу $fi = \frac{3\pi}{4}$. (рис. 3.3)

```
In [29]: import math
         import numpy as np
         from scipy.integrate import odeint
         import matplotlib.pyplot as plt

In [30]: k=17.4

In [31]: fi=3*math.pi/4
```

Figure 3.3: Константа

Следующие строки описывают движение катера охранников. (рис. 3.4)

Движение катера охранников

```
In [32]: def dr(r, tetha):
             dr = r/math.sqrt(23.01)
             return dr
```

Figure 3.4: Движение катера охранников

Для первого случая зададим r0 и решим дифференциальное уравнение. (рис. 3.5)

Первый момент

```
In [33]: r0=k/5.9

In [34]: tetha = np.arange(0, 2*math.pi, 0.01)

In [35]: r = odeint(dr,r0,tetha)
```

Figure 3.5: Первый случая

Для второго момента зададим r0_2 и решим дифференциальное уравнение.(рис. 3.6)

Второй момент ¶

```
In [10]: r0_2 = k/3.9

In [11]: tetha_2 = np.arange(-math.pi, 2*math.pi, 0.01)

In [12]: r_2 = odeint(dr,r0_2,tetha_2)

In [ ]:
```

Figure 3.6: Второй случая

Следующие строки описывают движение лодки браконьеров и перевод декартовые координаты в полярные. (рис. 3.7)

Движение лодки браконьеров

```
In [13]: def f2(t):
             xt=math.tan(fi)*t
             return xt

In [14]: t = np.arange(0, 20, 1)

In [20]: r2 = np.sqrt(t*t + f2(t)*f2(t))

In [21]: tetha2 = (np.tan(f2(t)/t))**-1
```

Figure 3.7: Движение лодки браконьеров и полярные коорлинаты

Далее строим график. Движение охраны и браконьеров для первого случая. (рис. 3.8)

Движение катера охраны с первой скоростью

```
In [17]: plt.polar(tetha, r, 'g')# движение охраны
         plt.polar(tetha2,r2, 'b')# движение браконьеров

Out[17]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x244da97c880>]
```

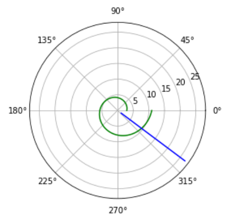

Figure 3.8: График для первого случая

А этот - движение охраны и браконьеров для второго случая. (рис. 3.9)

Движение катера охраны со второй скоростью

```
In [18]: plt.polar(tetha_2, r_2, 'g')# движение охраны
         plt.polar(tetha2,r2, 'b')# движение браконьеров

Out[18]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x244daa53790>]
```

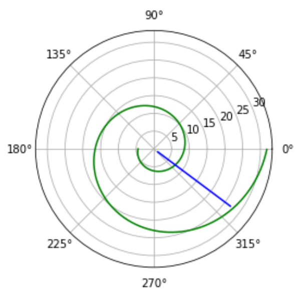

Figure 3.9: График для второго случая

4 Выводы

Я научился решать задачу о погоне на примере построения математической модели на языке Python а также взаимодействовать с проэктом Jupyter.