Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Якушевич Артём Юрьевич

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Рассмотреть фазовый портрет гармонического осциллятора и решить уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

На интервале $t \in [0; 45]$(шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0.9, y_0 = 0.9$

2 Теоретическая справка

2.1 Уравнение свободных колебаний

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w_0^2 x = f(t)$$

w — частота

γ — затухание

3 Задание

3.1 1. Построить решение уравнения гармонического осциллятора без затухания.

3.2 2. Записать уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с затуханием, построить его решение. Построить фазовый портрет гармонических колебаний с затуханием.

3.3 3. Записать уравнение колебаний гармонического осциллятора, если на систему действует внешняя сила, построить его решение. Построить фазовый портрет колебаний с действием внешней силы.

4 Выполнение лабораторной работы

5 Стандартные библиотеки

import math import numpy as np from scipy.integrate import odeint import matplotlib.pyplot as plt

6 Первый случай (рис. 6.1)

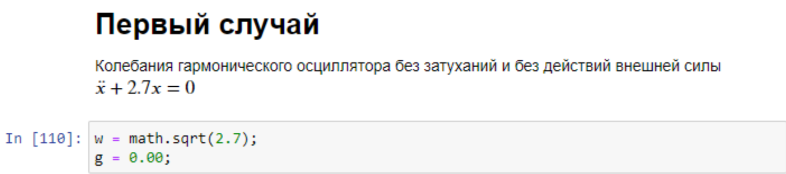


Figure 6.1: Первый случай

7 Запишем правую часть уравнения (рис. 7.1)

Figure 7.1: Уравнение

8 Далее запишем вектор-функцию f(t, x) для решения системы дифференциальных уравнений x’ = y(t, x)(рис. 8.1)

Вектор-функция f(t, x) для решения системы дифференциальных уравнений x' = y(t, x)

```
In [112]: def y(x, t):
              dx1 = x[1]
              dx2 = - w*w*x[0] - 2*g*x[1] - f(t)
              return dx1, dx2
```

Figure 8.1: Вектор-функция

9 Так выглядит вектор начальных условий x(t0) = x0 x’ = y(t, x)(рис. 9.1)

Вектор начальных условий x(t0) = x0

```
In [113]: x0 = np.array([0.7,0.7])
```

Figure 9.1: вектор начальных условий

10 Интервал, на котором будет решаться задача (рис. 10.1)

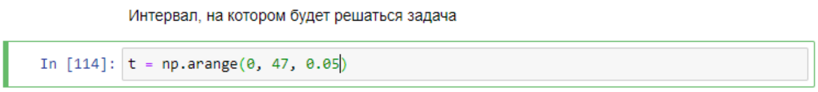


Figure 10.1: Интервал

11 Решаем дифференциальные уравнения с начальным условием x(t0) = x0 на интервале t с правой частью,

заданной y и записываем решение в матрицу x (рис. 11.1)

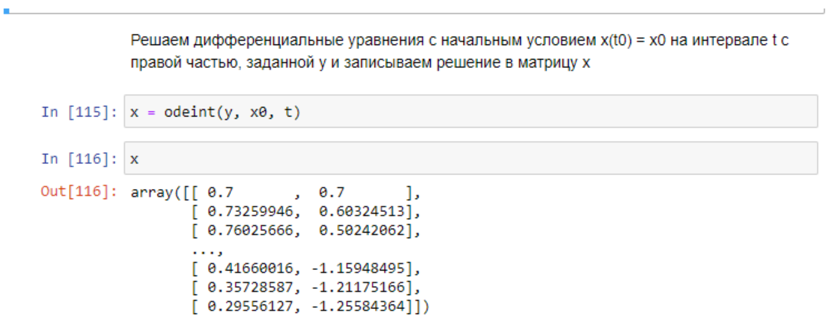


Figure 11.1: дифференциальные уравнения

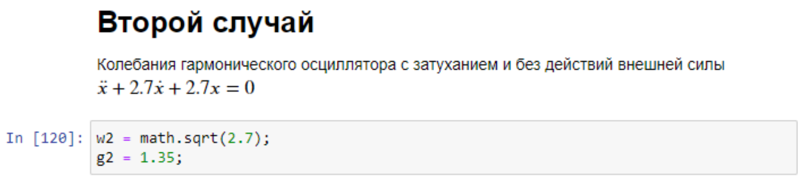
12 записываем y1 y2 (рис. 12.1)

y1 = x[:,0]

Figure 12.1: y1 y2

plt.plot(y1,y2) plt.grid(axis='both')

13 Для второго случая (рис. 13.1)



Второй случай

Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы
$\ddot{x} + 2.7\dot{x} + 2.7x = 0$

In [120]:
```
w2 = math.sqrt(2.7);
g2 = 1.35;
```

Figure 13.1: Второй случай

14 Запишем правую часть уравнения (рис. 14.1)

```
def f2(tt):
    f2 = 0
    return f2
```

Figure 14.1: правая часть уравнения

15 далее запишем вектор-функцию f(t, x) для решения системы дифференциальных уравнений x’ = y(t, x) (рис. 15.1)

```
def y22(xx, tt):
    dxx1 = xx[1]
    dxx2 = - w2*w2*xx[0] - 2*g2*xx[1] - f2(tt)
    return dxx1, dxx2
```

Figure 15.1: вектор-функция

16 Так выглядит вектор начальных условий x(t0) = x0 (рис. 16.1)

```
xx0 = np.array([0.7, 0.7])
```

Figure 16.1: Вектор начальных условий

17 Так выглядит интервал, на котором будет решаться задача (рис. 17.1)

```
]: tt = np.arange(0, 47, 0.05)
```

Figure 17.1: Интервал

18 Решаем дифференциальные уравнения с начальным условием x(t0) = x0 на интервале t с правой частью,

заданной y и записываем решение в матрицу x (рис. 18.1)

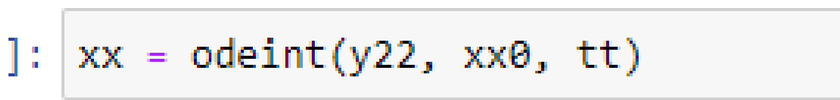


Figure 18.1: Решение диф уравнения и матрица

19 Переписываем отдельно yy1 и yy2 (рис. 19.1)

```
127]: yy1 = xx[:,0]

128]: yy2 = xx[:,1]

129]: plt.plot(yy1,yy2)
      plt.grid(axis='both')
```

Figure 19.1: yy1 и yy2

20 И наконец третий случай (рис. 20.1)

```
[30]: w3 = math.sqrt(0.7);
      g3 = 8.50;
```

Figure 20.1: третий случай

21 Запишем правуб часть уравнения (рис. 21.1)

```
def f3(ttt):
    f3 = 0.7*np.sin(7*ttt)
    return f3
```

Figure 21.1: Правая часть уравнения

22 Так выглядим вектор-функция f(t, x) для решения системы дифференциальных уравнений x' = y(t, x) (рис. 22.1)

```
def y33(xxx, ttt):
    dxxx1 = xxx[1]
    dxxx2 = - w3*w3*xxx[0] - 2*g3*xxx[1] - f3(ttt)
    return dxxx1, dxxx2
```

Figure 22.1: Вектор-функция

23 Вектор начальных условий x(t0) = x0 (рис. 23.1)

```
: xxx0 = np.array([0.7, 0.7])
```

Figure 23.1: Вектор-функция

24 Интервал, на котором будет решаться задача (рис. 24.1)

```
]: ttt = np.arange(0, 47, 0.05)
```

Figure 24.1: Интервал

25 Решаем дифференциальные уравнения с начальным условием x(t0) = x0 на интервале t с правой частью, заданной y и записываем решение в матрицу x (рис. 25.1)

```
35]: xxx = odeint(y33, xxx0, ttt)
```

Figure 25.1: Дифференциальные уравнения

26 Переписываем отдельно yyy1 и yyy2 (рис. 26.1)

```
[137]: yyy1 = xxx[:,0]

[138]: yyy2 = xxx[:,1]

[139]: plt.plot(yyy1,yyy2)
       plt.grid(axis='both')
```

Figure 26.1: yyy1 и yyy2

26.1 Графики

График первого случая. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы (рис. 26.2)

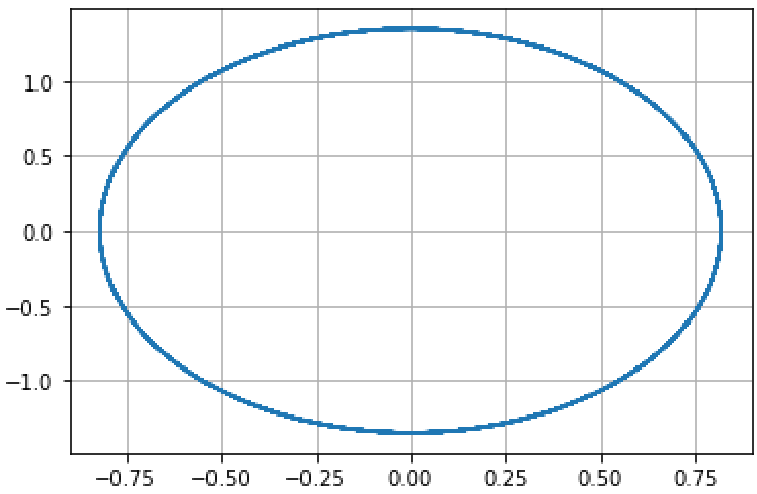


Figure 26.2: Первый случай

График второго случая. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы (рис. 26.3)

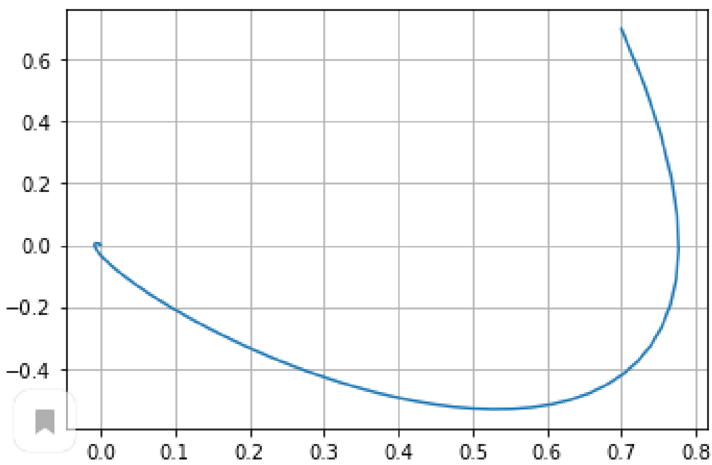


Figure 26.3: Второй случай

График третьего случая. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы (рис. 26.4)

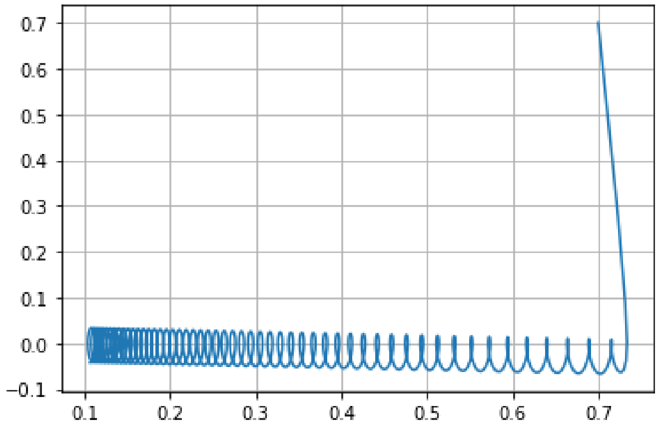


Figure 26.4: Третий случай

26.2 Ответы на вопросы

26.2.1 Запишите простейшую модель гармонических колебаний

Простейшим видом колебательного процесса являются простые гармонические колебания, которые описываются уравнением $x = x_m cos(\omega t + \varphi 0)$.

26.2.2 Дайте определение осциллятора

Осциллятор — система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени.

26.2.3 Запишите модель математического маятника

Уравнение динамики принимает вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L} sin\alpha = 0$$

В случае малых колебаний полагают $sin\alpha \approx \alpha$. В результате возникает линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\alpha = 0$$

или

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0$$

26.2.4 Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Пусть у нас есть дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\ddot{x} + w_0^2 x = f(t)$$

Для перехода к системе уравнений первого порядка сделаем замену (это метод Ранге-Кутты):

$$y = \dot{x}$$

Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \dot{x} \\ \dot{y} = -w_0^2 x \end{cases}$$

26.2.5 Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Фазовый портрет — то, как величины, описывающие состояние системы (= динамические переменные), зависят друг от друга. Фазовая траектория — кривая в фазовом пространстве, составленная из точек, представляющих состояние динамической системы в последовательные моменты времени в течение всего времени эволюции.

27 Выводы

Я промоделировал фазовый портрет гармонического осциллятора и решил уравнения гармонического осциллятора для 3х случаев: колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы, колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы, колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы.