

Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Якушевич Артём Юрьевич

Содержание

1	Цель работы	7
2	Теоретическая справка	8
2.1	Уравнение свободных колебаний	8
3	Задание	9
3.1	1. Построить решение уравнения гармонического осциллятора без затухания.	9
3.2	2. Записать уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с затуханием, построить его решение. Построить фазовый портрет гармонических колебаний с затуханием.	9
3.3	3. Записать уравнение колебаний гармонического осциллятора, если на систему действует внешняя сила, построить его решение. Построить фазовый портрет колебаний с действием внешней силы.	9
4	Выполнение лабораторной работы	10
5	Стандартные библиотеки	11
6	Первый случай (рис. 6.1)	12
7	Запишем правую часть уравнения (рис. 7.1)	13
8	Далее запишем вектор-функцию $f(t, x)$ для решения системы дифференциальных уравнений $x' = y(t, x)$ (рис. 8.1)	14
9	Так выглядит вектор начальных условий $x(t_0) = x_0$ $x' = y(t, x)$ (рис. 9.1)	15
10	Интервал, на котором будет решаться задача (рис. 10.1)	16
11	Решаем дифференциальные уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ на интервале t с правой частью,	17
12	записываем y_1 y_2 (рис. 12.1)	18
13	Для второго случая (рис. 13.1)	19
14	Запишем правую часть уравнения (рис. 14.1)	20

15	далее запишем вектор-функцию $f(t, x)$ для решения системы дифференциальных уравнений $x' = y(t, x)$ (рис. 15.1)	21
16	Так выглядит вектор начальных условий $x(t_0) = x_0$ (рис. 16.1)	22
17	Так выглядит интервал, на котором будет решаться задача (рис. 17.1)	23
18	Решаем дифференциальные уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ на интервале t с правой частью,	24
19	Переписываем отдельно u_1 и u_2 (рис. 19.1)	25
20	И наконец третий случай (рис. 20.1)	26
21	Запишем правую часть уравнения (рис. 21.1)	27
22	Так выглядим вектор-функция $f(t, x)$ для решения системы дифференциальных уравнений $x' = y(t, x)$ (рис. 22.1)	28
23	Вектор начальных условий $x(t_0) = x_0$ (рис. 23.1)	29
24	Интервал, на котором будет решаться задача (рис. 24.1)	30
25	Решаем дифференциальные уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ на интервале t с правой частью, заданной y и записываем решение в матрицу x (рис. 25.1)	31
26	Переписываем отдельно u_{u1} и u_{u2} (рис. 26.1)	32
26.1	Графики	32
26.2	Ответы на вопросы	34
26.2.1	Запишите простейшую модель гармонических колебаний .	34
26.2.2	Дайте определение осциллятора	34
26.2.3	Запишите модель математического маятника	34
26.2.4	Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка	35
26.2.5	Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?	35
27	Выводы	37

List of Tables

List of Figures

6.1	Первый случай	12
7.1	Уравнение	13
8.1	Вектор-функция	14
9.1	вектор начальных условий	15
10.1	Интервал	16
11.1	дифференциальные уравнения	17
12.1	y_1 y_2	18
13.1	Второй случай	19
14.1	правая часть уравнения	20
15.1	вектор-функция	21
16.1	Вектор начальных условий	22
17.1	Интервал	23
18.1	Решение диф уравнения и матрица	24
19.1	u_1 и u_2	25
20.1	третий случай	26
21.1	Правая часть уравнения	27
22.1	Вектор-функция	28
23.1	Вектор-функция	29
24.1	Интервал	30
25.1	Дифференциальные уравнения	31
26.1	u_{11} и u_{12}	32
26.2	Первый случай	33
26.3	Второй случай	33

26.4 Третий случай	34
------------------------------	----

1 Цель работы

Рассмотреть фазовый портрет гармонического осциллятора и решить уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

На интервале $t \in [0; 45]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0.9, y_0 = 0.9$

2 Теоретическая справка

2.1 Уравнение свободных колебаний

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w_0^2x = f(t)$$

w — частота

γ — затухание

3 Задание

3.1 1. Построить решение уравнения гармонического осциллятора без затухания.

3.2 2. Записать уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с затуханием, построить его решение. Построить фазовый портрет гармонических колебаний с затуханием.

3.3 3. Записать уравнение колебаний гармонического осциллятора, если на систему действует внешняя сила, построить его решение. Построить фазовый портрет колебаний с действием внешней силы.

4 Выполнение лабораторной работы

5 Стандартные библиотеки

```
import math import numpy as np from scipy.integrate import odeint import  
matplotlib.pyplot as plt
```

6 Первый случай (рис. 6.1)

Первый случай

Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы
 $\ddot{x} + 2.7x = 0$

```
In [110]: w = math.sqrt(2.7);  
          g = 0.00;
```

Figure 6.1: Первый случай

7 Запишем правую часть уравнения (рис. 7.1)



Figure 7.1: Уравнение

8 Далее запишем вектор-функцию $f(t, x)$ для решения системы дифференциальных уравнений $x' = y(t, x)$ (рис. 8.1)

Вектор-функция $f(t, x)$ для решения системы дифференциальных уравнений $x' = y(t, x)$

```
In [112]: def y(x, t):  
          dx1 = x[1]  
          dx2 = - w*w*x[0] - 2*g*x[1] - f(t)  
          return dx1, dx2
```

Figure 8.1: Вектор-функция

9 Так выглядит вектор начальных условий $x(t_0) = x_0$ $x' = y(t, x)$ (рис. 9.1)

Вектор начальных условий $x(t_0) = x_0$

```
In [113]: x0 = np.array([0.7, 0.7])
```

Figure 9.1: вектор начальных условий

10 Интервал, на котором будет решаться задача (рис. 10.1)

Интервал, на котором будет решаться задача

```
In [114]: t = np.arange(0, 47, 0.05)
```

Figure 10.1: Интервал

11 Решаем дифференциальные уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ на интервале t с правой частью,

заданной y и записываем решение в матрицу x (рис. 11.1)

```
Решаем дифференциальные уравнения с начальным условием  $x(t_0) = x_0$  на интервале  $t$  с
правой частью, заданной  $y$  и записываем решение в матрицу  $x$ 

In [115]: x = odeint(y, x0, t)

In [116]: x
Out[116]: array([[ 0.7, 0.7],
 [ 0.73259946, 0.60324513],
 [ 0.76025666, 0.50242062],
 ...,
 [ 0.41660016, -1.15948495],
 [ 0.35728587, -1.21175166],
 [ 0.29556127, -1.25584364]])
```

Figure 11.1: дифференциальные уравнения

12 записываем y1 y2 (рис. 12.1)

`y1 = x[:,0]`

```
In [117]: y1 = x[:,0]
```

```
In [118]: y2 = x[:,1]
```

```
In [119]: plt.plot(y1,y2)  
plt.grid(axis='both')
```

Figure 12.1: y1 y2

`plt.plot(y1,y2) plt.grid(axis='both')`

13 Для второго случая (рис. 13.1)

Второй случай

Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы
 $\ddot{x} + 2.7\dot{x} + 2.7x = 0$

```
In [120]: w2 = math.sqrt(2.7);  
          g2 = 1.35;
```

Figure 13.1: Второй случай

14 Запишем правую часть уравнения (рис. 14.1)

```
def f2(tt):  
    f2 = 0  
    return f2
```

Figure 14.1: правая часть уравнения

15 далее запишем вектор-функцию $f(t, x)$ для решения системы дифференциальных уравнений $x' = y(t, x)$ (рис. 15.1)

```
: def y22(xx, tt):  
    dxx1 = xx[1]  
    dxx2 = - w2*w2*xx[0] - 2*g2*xx[1] - f2(tt)  
    return dxx1, dxx2
```

Figure 15.1: вектор-функция

16 Так выглядит вектор начальных условий $x(t_0) = x_0$ (рис. 16.1)

```
23]: xx0 = np.array([0.7, 0.7])
```

Figure 16.1: Вектор начальных условий

17 Так выглядит интервал, на котором будет решаться задача (рис. 17.1)

```
] : tt = np.arange(0, 47, 0.05)
```

Figure 17.1: Интервал

18 Решаем дифференциальные уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ на интервале t с правой частью,

заданной y и записываем решение в матрицу x (рис. 18.1)

```
]: xx = odeint(y22, xx0, tt)
```

Figure 18.1: Решение диф уравнения и матрица

19 Переписываем отдельно yy1 и yy2 (рис. 19.1)

```
127]: yy1 = xx[:,0]
128]: yy2 = xx[:,1]
129]: plt.plot(yy1,yy2)
      plt.grid(axis='both')
```

Figure 19.1: yy1 и yy2

20 И наконец третий случай (рис. 20.1)

```
l30]: w3 = math.sqrt(0.7);  
      g3 = 8.50;
```

Figure 20.1: третий случай

21 Запишем правую часть уравнения (рис. 21.1)

```
: def f3(ttt):  
    f3 = 0.7*np.sin(7*ttt)  
    return f3
```

Figure 21.1: Правая часть уравнения

**22 Так выглядим вектор-функция $f(t, x)$
для решения системы
дифференциальных уравнений $x' =$
 $y(t, x)$ (рис. 22.1)**

```
: def y33(xxx, ttt):  
    dxxx1 = xxx[1]  
    dxxx2 = - w3*w3*xxx[0] - 2*g3*xxx[1] - f3(ttt)  
    return dxxx1, dxxx2
```

Figure 22.1: Вектор-функция

23 Вектор начальных условий $x(t_0) = x_0$ (рис. 23.1)

```
: xxx0 = np.array([0.7, 0.7])
```

Figure 23.1: Вектор-функция

24 Интервал, на котором будет решаться задача (рис. 24.1)

```
]: ttt = np.arange(0, 47, 0.05)
```

Figure 24.1: Интервал

25 Решаем дифференциальные уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ на интервале t с правой частью, заданной y и записываем решение в матрицу x (рис. 25.1)

```
35]: xxx = odeint(y33, xxx0, ttt)
```

Figure 25.1: Дифференциальные уравнения

26 Переписываем отдельно ууу1 и ууу2 (рис. 26.1)

```
[137]: ууу1 = xxx[:,0]
[138]: ууу2 = xxx[:,1]
[139]: plt.plot(ууу1,ууу2)
      plt.grid(axis='both')
```

Figure 26.1: ууу1 и ууу2

26.1 Графики

График первого случая. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы (рис. 26.2)

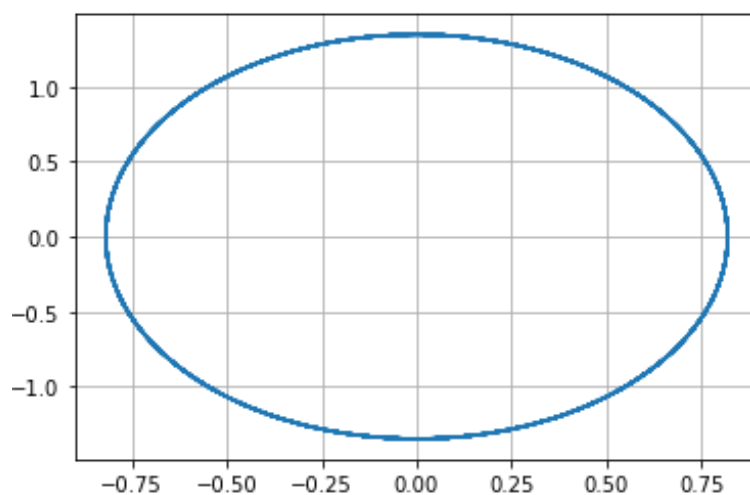


Figure 26.2: Первый случай

График второго случая. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы (рис. 26.3)

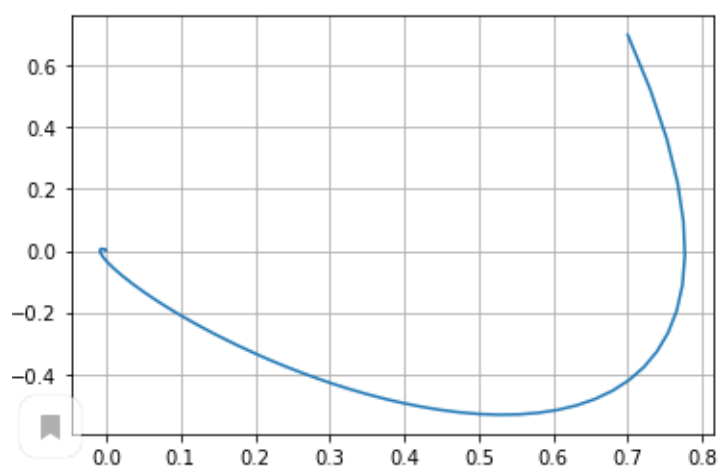


Figure 26.3: Второй случай

График третьего случая. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы (рис. 26.4)

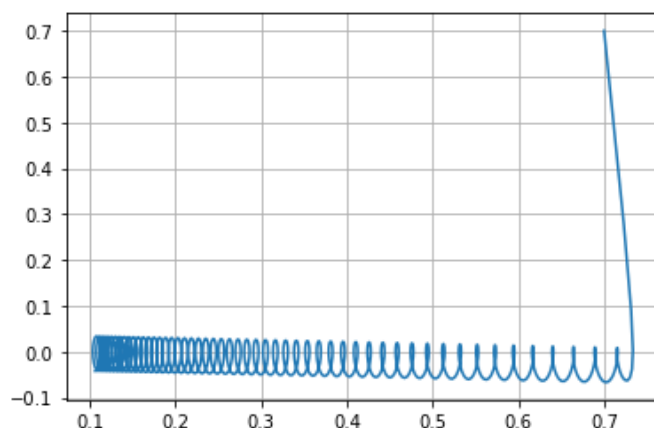


Figure 26.4: Третий случай

26.2 Ответы на вопросы

26.2.1 Запишите простейшую модель гармонических колебаний

Простейшим видом колебательного процесса являются простые гармонические колебания, которые описываются уравнением $x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$.

26.2.2 Дайте определение осциллятора

Осциллятор — система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени.

26.2.3 Запишите модель математического маятника

Уравнение динамики принимает вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0$$

В случае малых колебаний полагают $\sin\alpha \approx \alpha$. В результате возникает линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\alpha = 0$$

или

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0$$

26.2.4 Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Пусть у нас есть дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\ddot{x} + w_0^2 x = f(t)$$

Для перехода к системе уравнений первого порядка сделаем замену (это метод Ранге-Кутты):

$$y = \dot{x}$$

Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \dot{x} \\ \dot{y} = -w_0^2 x \end{cases}$$

26.2.5 Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Фазовый портрет — то, как величины, описывающие состояние системы (= динамические переменные), зависят друг от друга. Фазовая траектория — кривая в фазовом пространстве, составленная из точек, представляющих состояние динамической системы в последовательные моменты времени в течение всего

времени эволюции.

27 Выводы

Я промоделировал фазовый портрет гармонического осциллятора и решил уравнения гармонического осциллятора для 3х случаев: колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы, колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы, колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы.