Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Федотов Дмитрий Константинович

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при начальных условиях. Найти стационарное состояние системы

2 Выполнение лабораторной работы

2.1 Теоретическое введение

2.1.1 Модель хищник-жертва

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник-жертва» — модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях: 1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории) 2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса (по экспоненциальному закону), при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает 3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными 4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается 5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = ax(t) + bx(t)y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -cy(t) - dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены -bxy и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в это состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$

Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей x(0), y(0). Колебания совершаются в противофазе.

При малом изменении модели (прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу.

Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

2.2 Условия моего варианта

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -0.48x(t) + 0.031x(t)y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0.68y(t) - 0.031x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв и графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 3, y_0 = 18$. Найдите стационарное состояние системы.

2.3 Решение на Python

1. Зададим начальные коэффиценты и напишем вектор-функцию для решения дифференциального уравнения (рис. 2.1)

```
a = 0.48 # коэффициент естественной смертности хищников
b = 0.68 # коэффициент естественного прироста жертв
c = 0.031 # коэффициент увеличения числа хищников
d = 0.031 # коэффициент смертности жертв
```

```
def syst2(x, t):
    dx0 = -a*x[0] + c*x[0]*x[1]
    dx1 = b*x[1] - d*x[0]*x[1]
    return dx0, dx1
```

Figure 2.1: Начальные коэффиценты вектор-функция для решения дифференциального уравнения

2. Зададим интервал и шаг, на котором будем решать задачу, интервал - [0; 200], шаг -0.01 (рис. 2.2)

```
x0 = [3, 18] # начальное значение x и y (популяция хищников и популяция жертв)
```

```
t = np.arange(0, 200, 0.1)
```

Figure 2.2: Интервал и шаг

3. Создадим массивы для хищников и для жертв (рис. 2.3)

```
y2 = y[:,1] # хищники
y1 = y[:,0] # жертвы
```

Figure 2.3: Массив хищников и жертв

4. Построение графика колебаний изменения числа популяции хищников и жертв (рис. 2.4)

```
plt.plot(t,y1, label='хищники')
plt.plot(t,y2, label='жертвы')
plt.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7658989130>
```

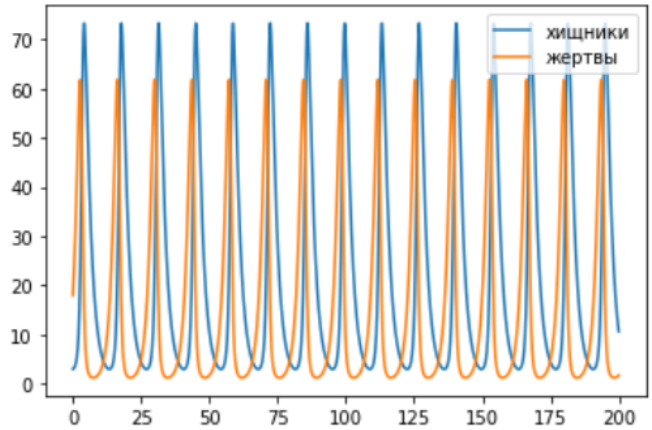

Figure 2.4: График колебаний изменения числа популяции хищников и жертв

5. Построение графика зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв (рис. 2.5)

```
plt.plot(y1,y2)
plt.plot(3,18, 'ro', label='начальное состояние')
plt.plot(b/d,a/c, 'go', label='стационарное состояние')
plt.legend()
plt.grid(axis='both')
```

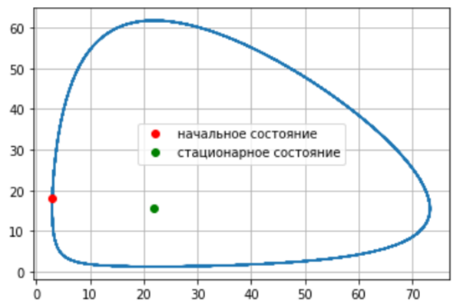

Figure 2.5: Зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями y=18, x=3

3 Выводы

1. Построил график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при начальных условиях.
2. Нашел стационарное состояние системы