ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Факультет информационных технологий и программирования

Дисциплина:

«Прикладная математика»

Отчёт по лабораторной работе №4

«Методы решения СЛАУ»

Группа M32001

Выполнили:

Соловьев Роман Сергеевич

Халилов Роман Эдуардович

Преподаватель:

Москаленко Мария Александровна

Санкт-Петербург

2023 г.

Цель работы:

Анализ прямых и итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

Постановка задачи:

Необходимо реализовать методы нахождения решений СЛАУ. Протестировать методы на матрицах с диагональным преобладанием и на матрицах Гилберта. Сравнить методы по эффективности, определить зависимости числа обусловленности и точность решения для матриц с диагональным преобладанием от коэффициента k.

Ход работы:

Весь код, использованный в ходе выполнения работы: [GitHub]

Часть 1 – реализация алгоритмов:

Метод 1: метод Гаусса с выбором ведущего элемента

На каждом шаге итерации выбираем строку с наибольшим по модулю ведущему элементу, чтобы деление остальных строк происходило на наибольшее по модулю число, что в результате уменьшает вычислительную ошибку. Действуя методом Гаусса, приводим матрицу к верхнему треугольному виду, после чего обратным ходом алгоритма находим решение.

Метод 2: метод с использованием LU разложения

Раскладываем матрицу коэффициентов на произведение нижней и верхней треугольных матриц.

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad (i \le j)$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{ij}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) \quad (\text{где } i > j)$$

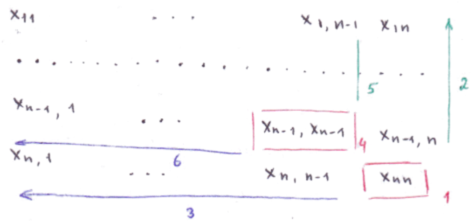
Расчёт коэффициентов для новых матриц

$$x_{ij} = -\frac{1}{u_{ii}} \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_{kj} \quad (i < j)$$

$$x_{ji} = \frac{1}{u_{jj}} \left(1 - \sum_{k=j+1}^{n} u_{jk} x_{kj} \right) \quad (i = j)$$

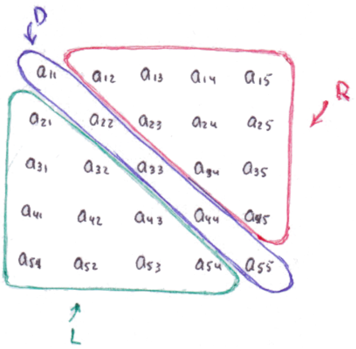
$$x_{ij} = -\sum_{k=j+1}^{n} x_{ik} l_{kj} \quad (i > j)$$

Расчёт решения (в обратном порядке)



Порядок вычисления

Метод 3: метод Якоби
Представляем матрицу коэффициентов как сумму трёх матриц: диагональной и двух треугольных.



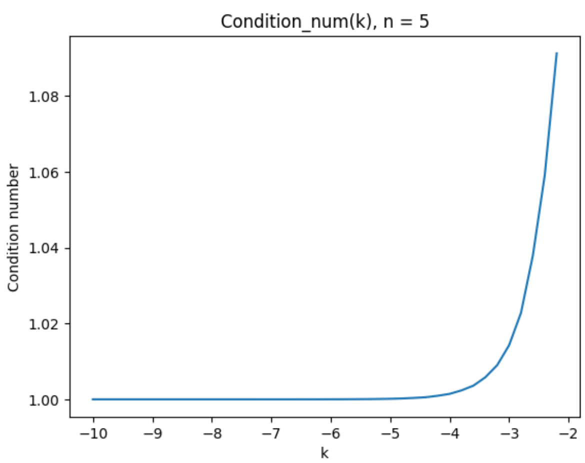
После чего СЛАУ можно представить в следующем виде:

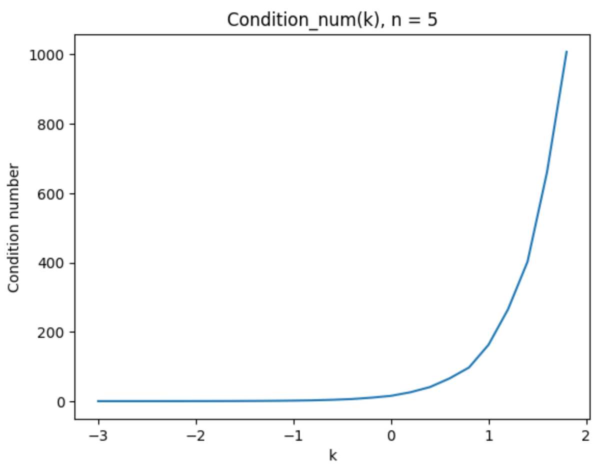
$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+R)\,x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

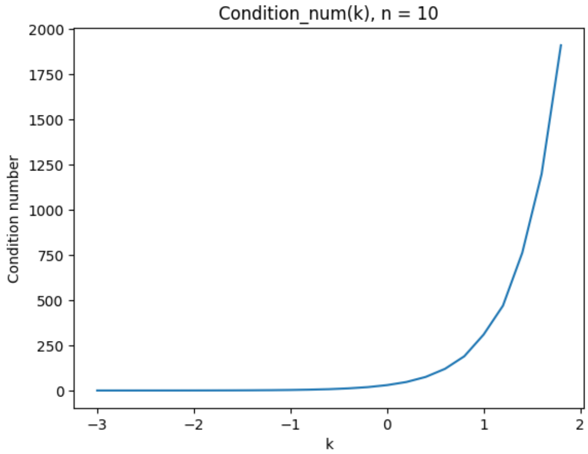
Так выполняем некоторое количество итераций, в итоге либо полученное решение сойдётся к настоящему, либо разойдётся.

Часть 2 – исследование матриц с диагональным преобладанием от k:

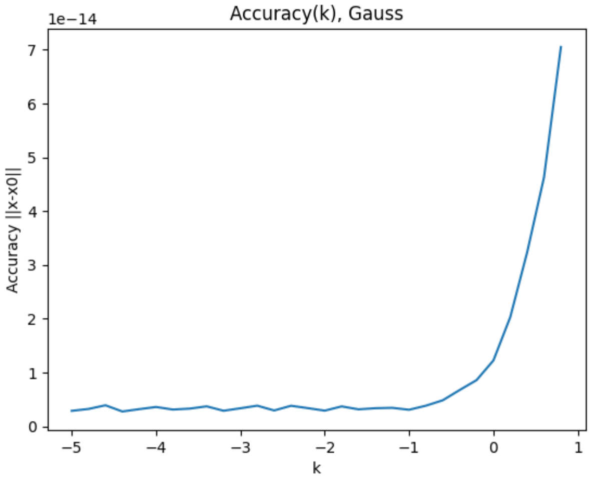
- Число обусловленности от k:

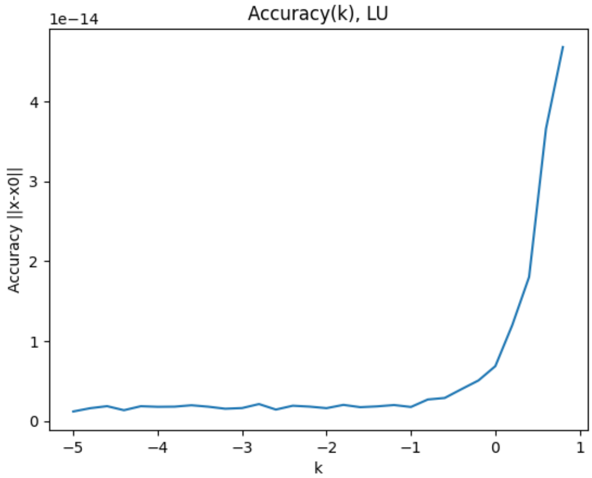


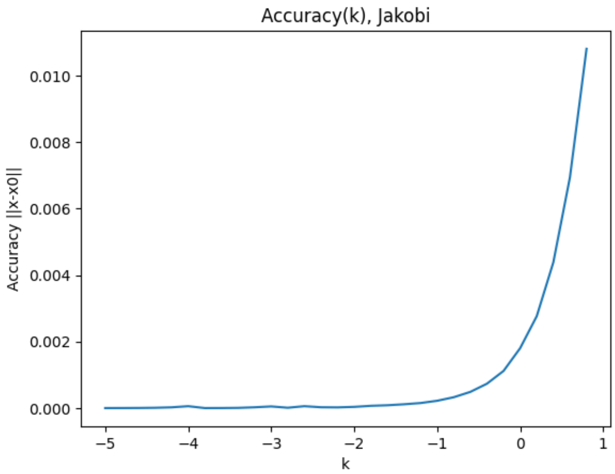


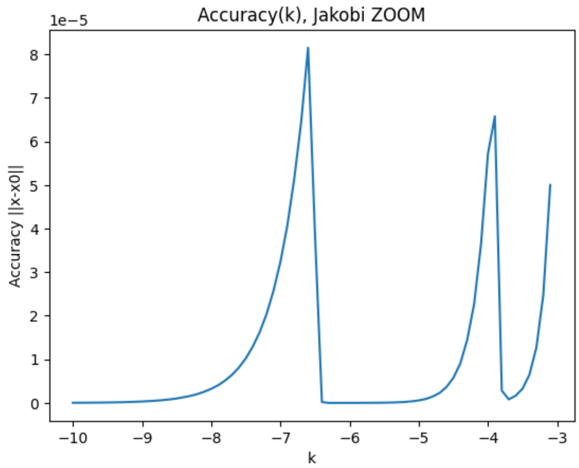


- Точность решения от k:



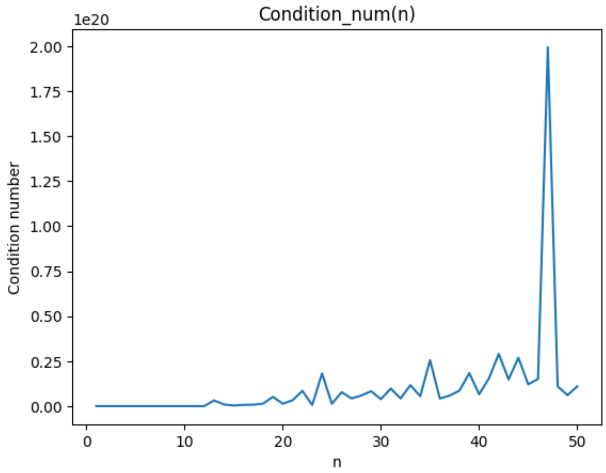


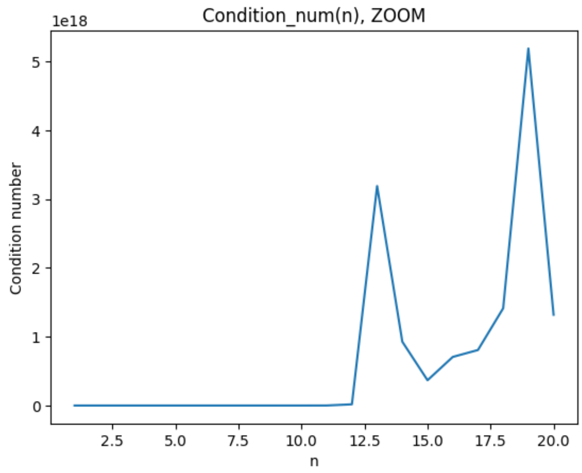


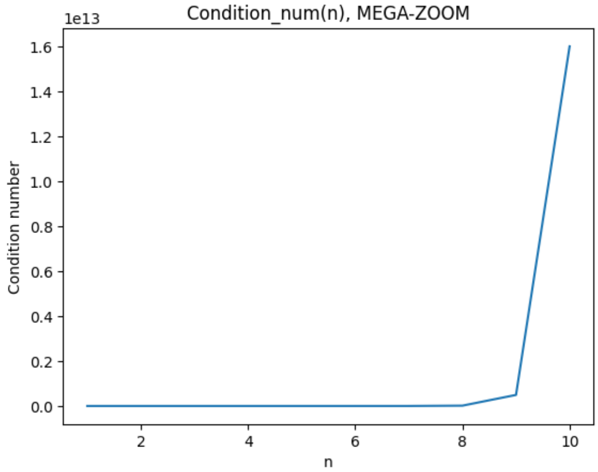


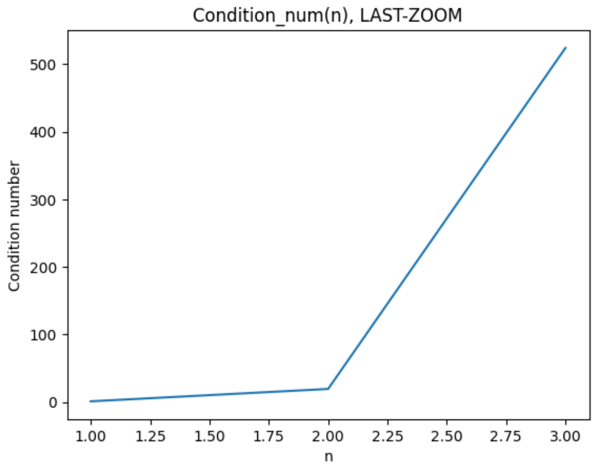
Часть 3 – исследование матриц Гилберта от n:

- Число обусловленности от n:

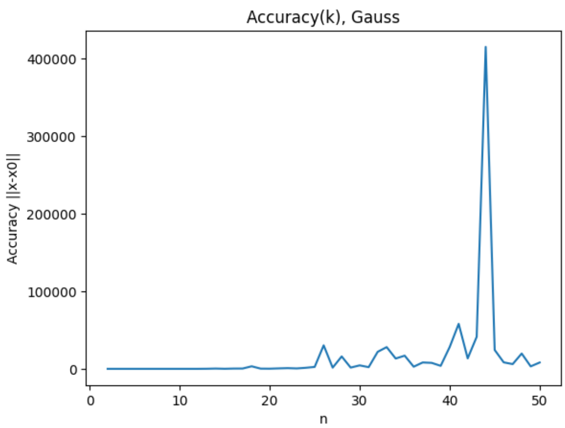


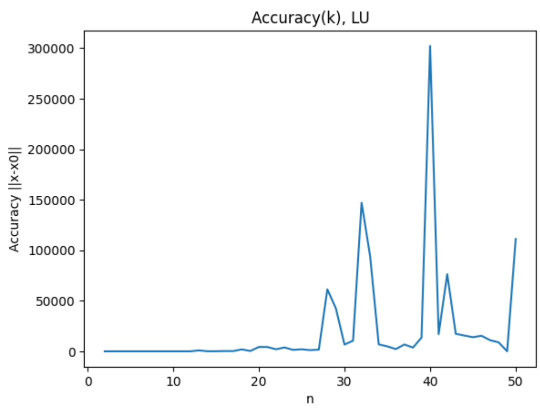


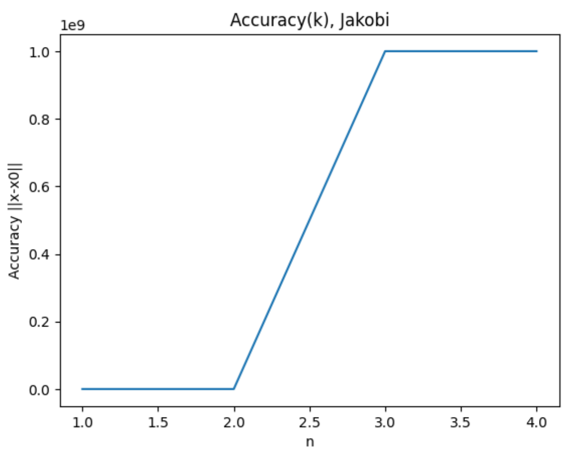


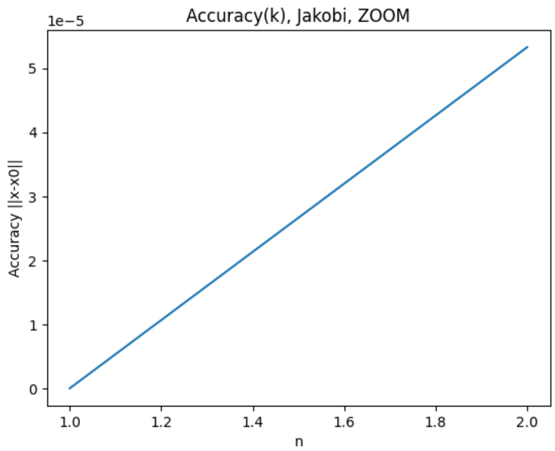


- Точность решения от n:









Вывод по частям 2 и 3:
Число обусловленности для матриц с диагональным преобладанием начинает экспоненциально расти при увеличении k в положительной полуплоскости. Для матриц Гилберта число обусловленности в целом растёт при росте n, но чаще всего пиками. Точность прямых решений для матриц с диагональным преобладанием не выходит за пределы компьютерной погрешности, точность итерационного решения быстро падает при увеличении k. Для матриц Гилберта начинает резко ухудшаться для прямых решений после n = 25, метод Якоби расходится при n ≥ 3.

Часть 4 – сравнение эффективности методов для разных n

- Метод Гаусса:

n	t
10	0:00:00.001986
50	0:00:00.023936
100	0:00:00.080782
1000	0:00:10.053356
10000	0:25:10.601135

- Метод с использованием LU разложения:

n	t
10	0:00:00.006981
50	0:00:00.122670
100	0:00:00.366018
1000	0:00:25.297388
10000	1:34:14.578968

- Метод Якоби:

n	t
10	0:00:00
50	0:00:00.002001
100	0:00:00.007973
1000	0:00:00.402922
10000	0:01:25.079875

Вывод:
Методы прямого вычисления работают дольше итерационного, но дают более точный результат.

Общий вывод по проделанной работе:
В ходе работы были реализованы прямые и итерационный методы решения СЛАУ и произведено их сравнение по эффективности. Также были проведены эксперименты на матрицах с диагональным преобладанием и матрицах Гилберта.