ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Факультет информационных технологий и программирования

Дисциплина:

«Прикладная математика»

Отчёт по лабораторной работе №1

«Численное дифференцирование и интегрирование»

Группа M32001

Выполнили:

Соловьев Роман Сергеевич

Халилов Роман Эдуардович

Преподаватель:

Москаленко Мария Александровна

Санкт-Петербург

2023 г.

Цель работы:
Анализ численных методов нахождения производных и интегралов

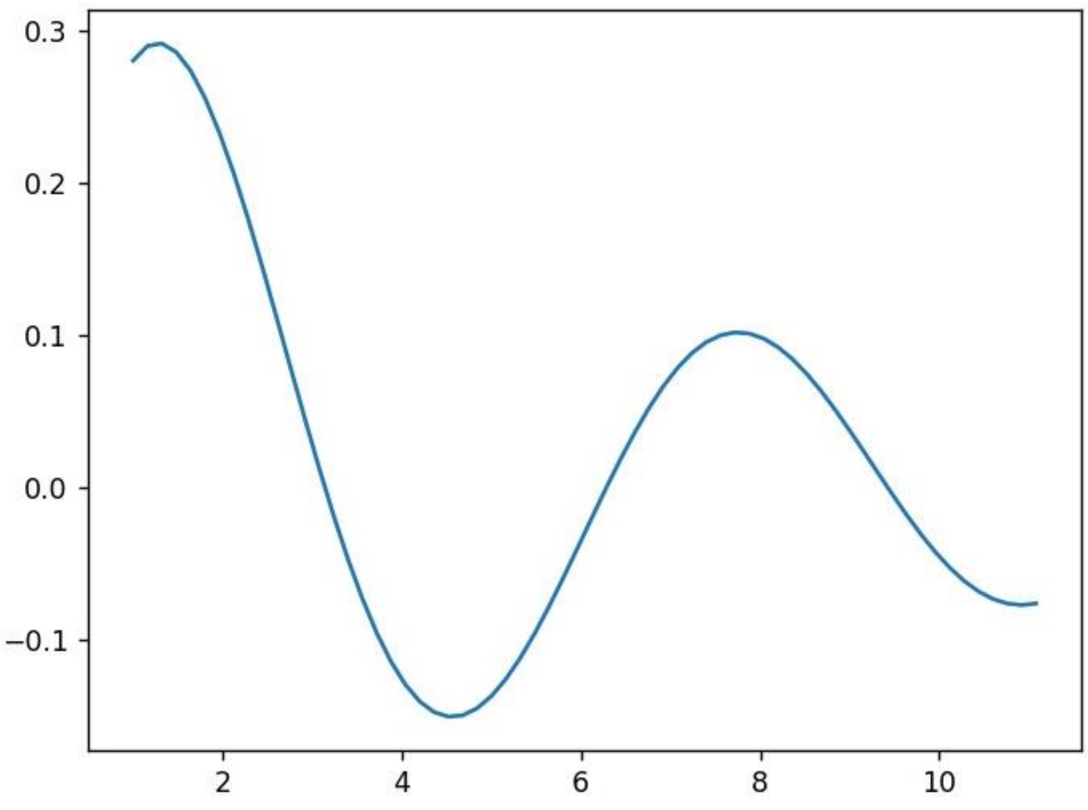
Постановка задачи:
Необходимо реализовать методы нахождения производной (метод правой разностной производной, метод левой разностной производной, метод центральной разностной производной) и методы нахождения определённого интеграла (метод с использованием формулы треугольников, метод с использованием формулы трапеций, метод с использованием формулы Симпсона), произвести анализ работы данных методов на двух функциях, используя разные значения шага функции, сравнить результаты с данными, полученными аналитически, найти среднеквадратичное отклонение численных значений от истинных.

Ход работы:
Весь код, использованный в ходе выполнения работы: GitHub

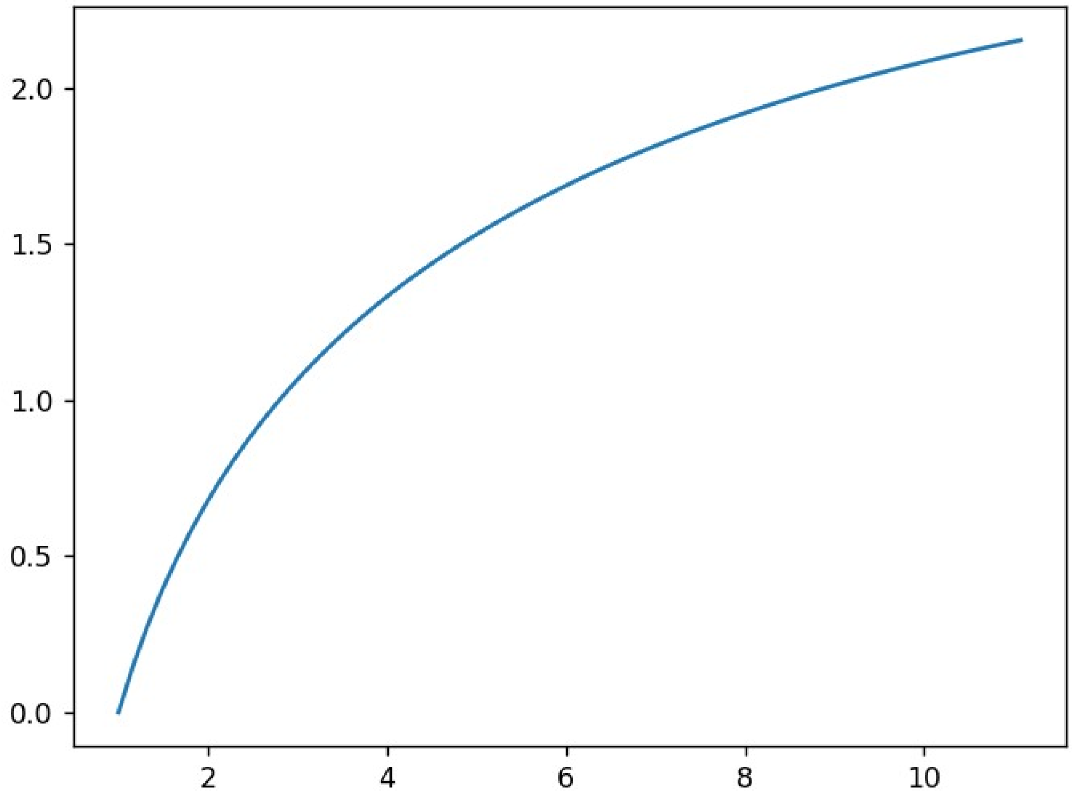
Часть 1 – дифференцирование:

Для исследования методов численного нахождения производных используем две следующие функции на отрезке [1, 11]:

1. $f_1(x) = \sin(x)/(x+2)$,
   аналитическая производная: $f_1' = ((x+2)*\cos(x)-\sin(x))/(x^2+4x+4)$

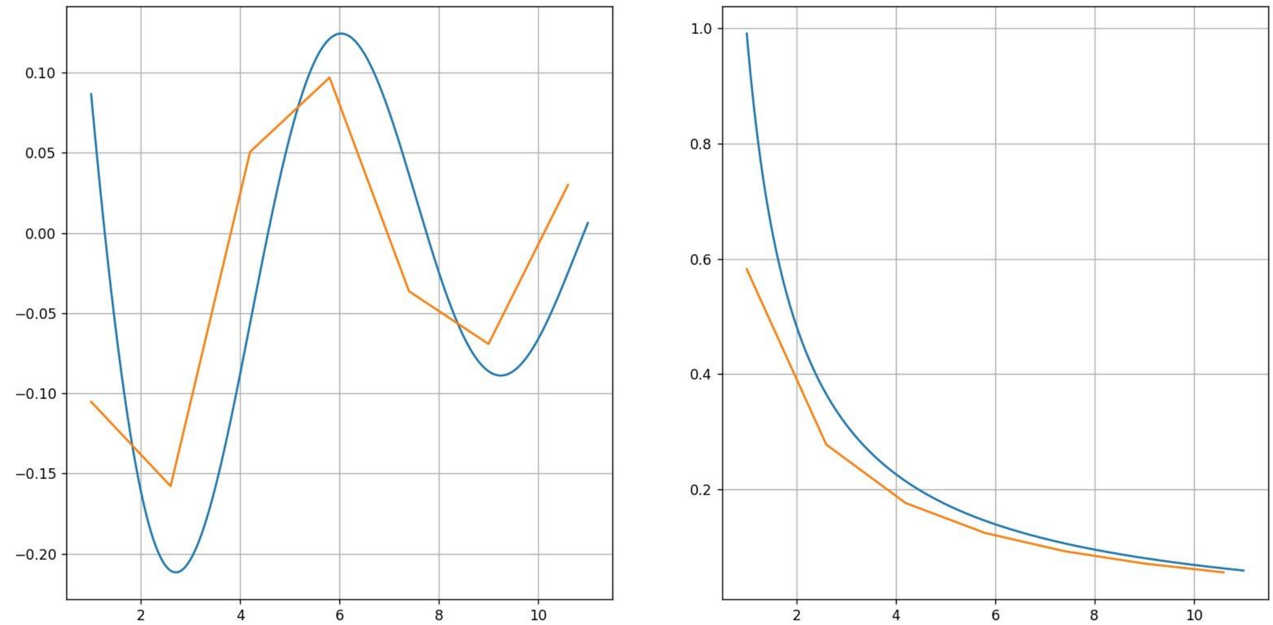


2. $f_2(x) = \log(x)*\exp(-x/100)$
   аналитическая производная: $f_2' = (100-x*\log(x))*\exp(-x/100)/(100x)$

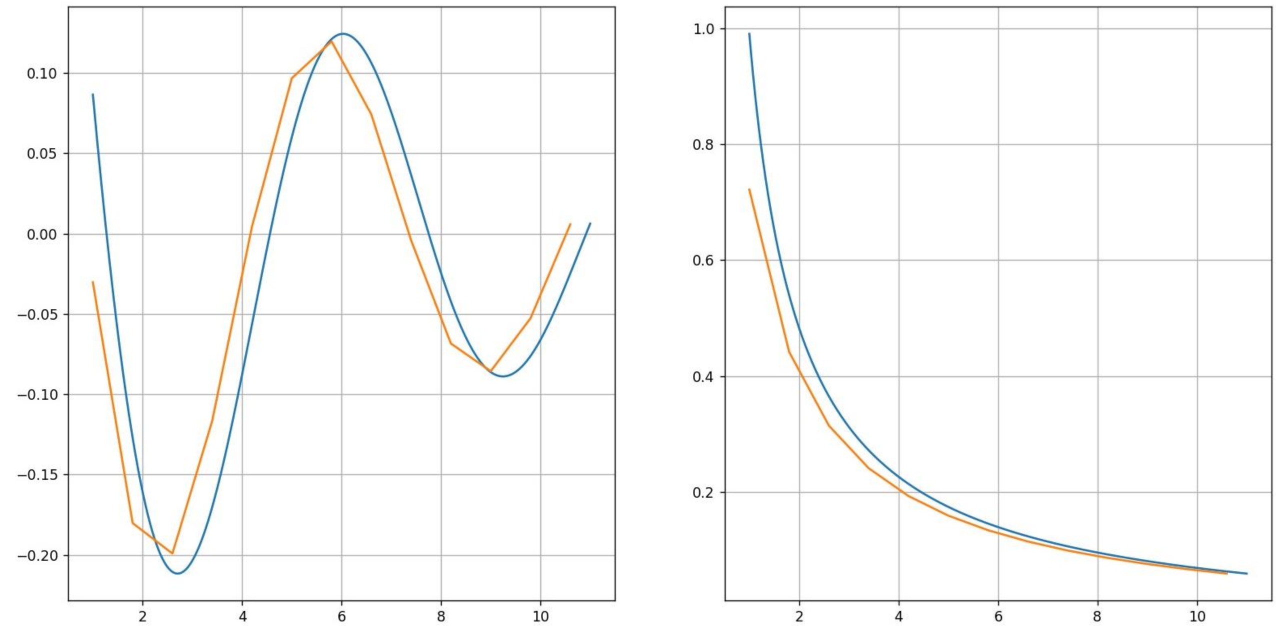


Метод 1: метод правой разностной производной

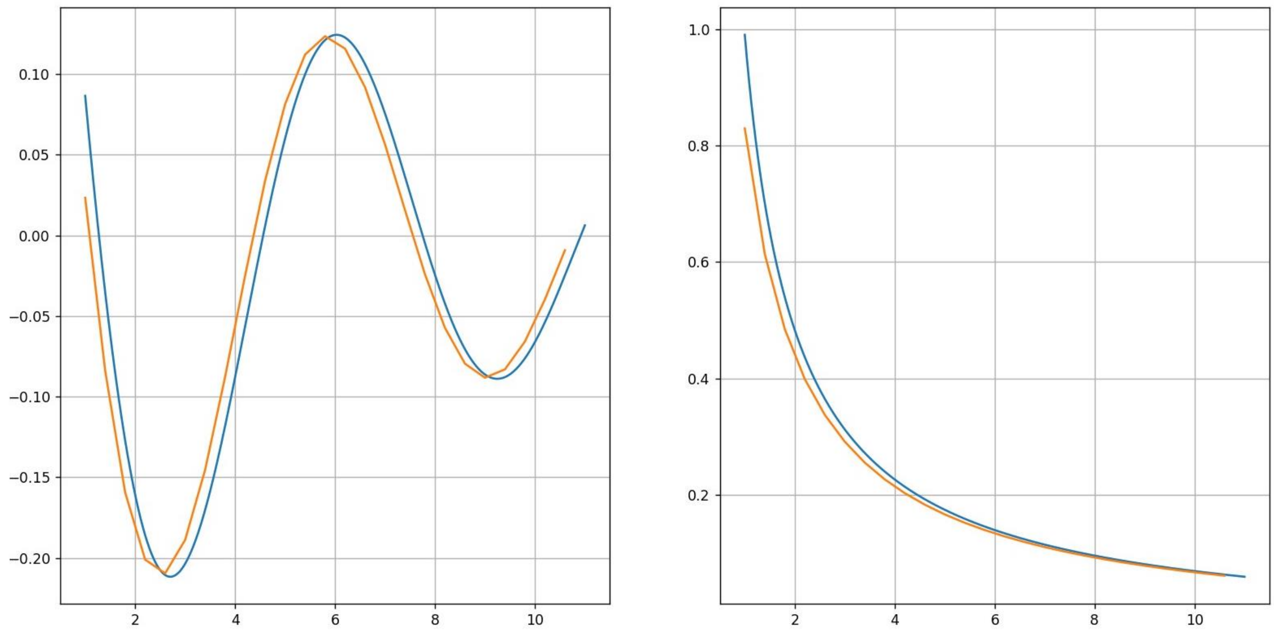
Производная в точке x_0 представляется как разность значений функции в двух точках – x_0 и x_0+h, делённую на расстояние между ними h. При стремлении расстояния между точками к нулю, формула, используемая в данном методе, будет являться одним из эквивалентных определений производной.



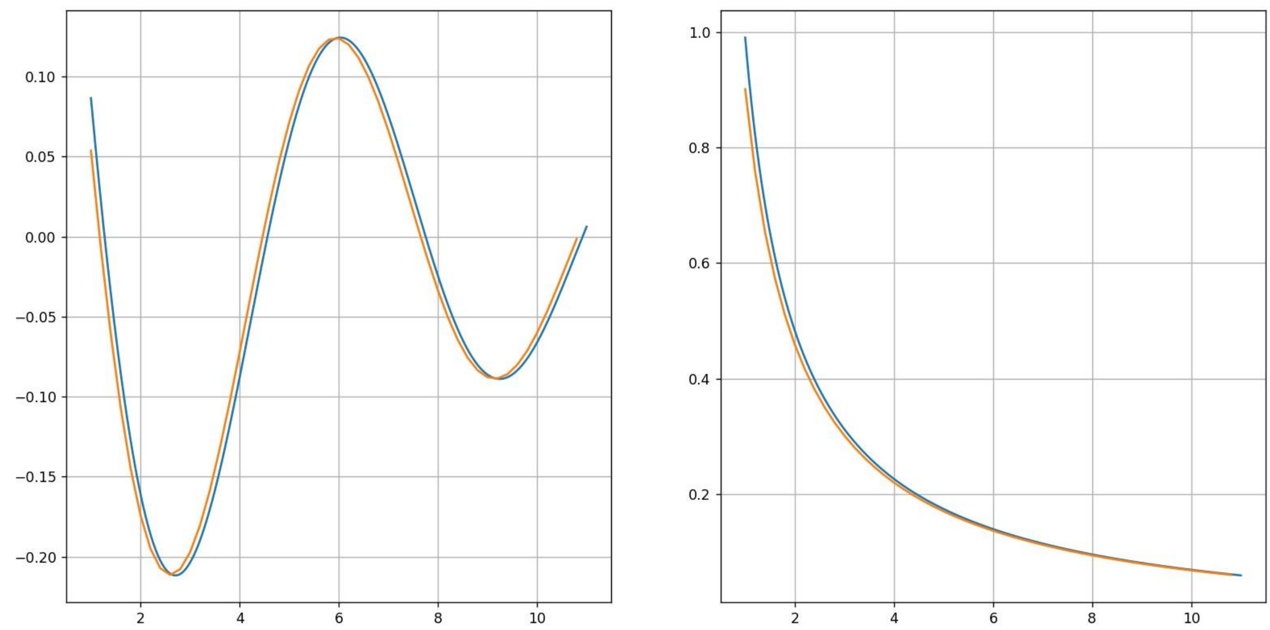
Для h = 1.6, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная



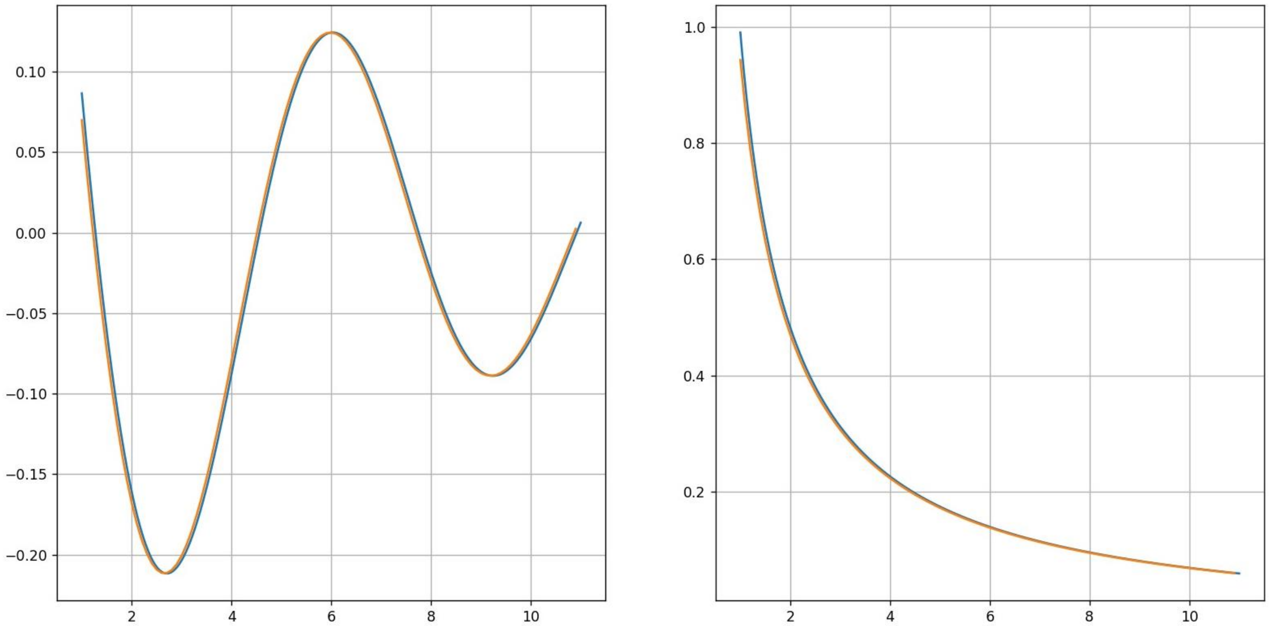
Для h = 0.8, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная



Для h = 0.4, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная



Для h = 0.2, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная

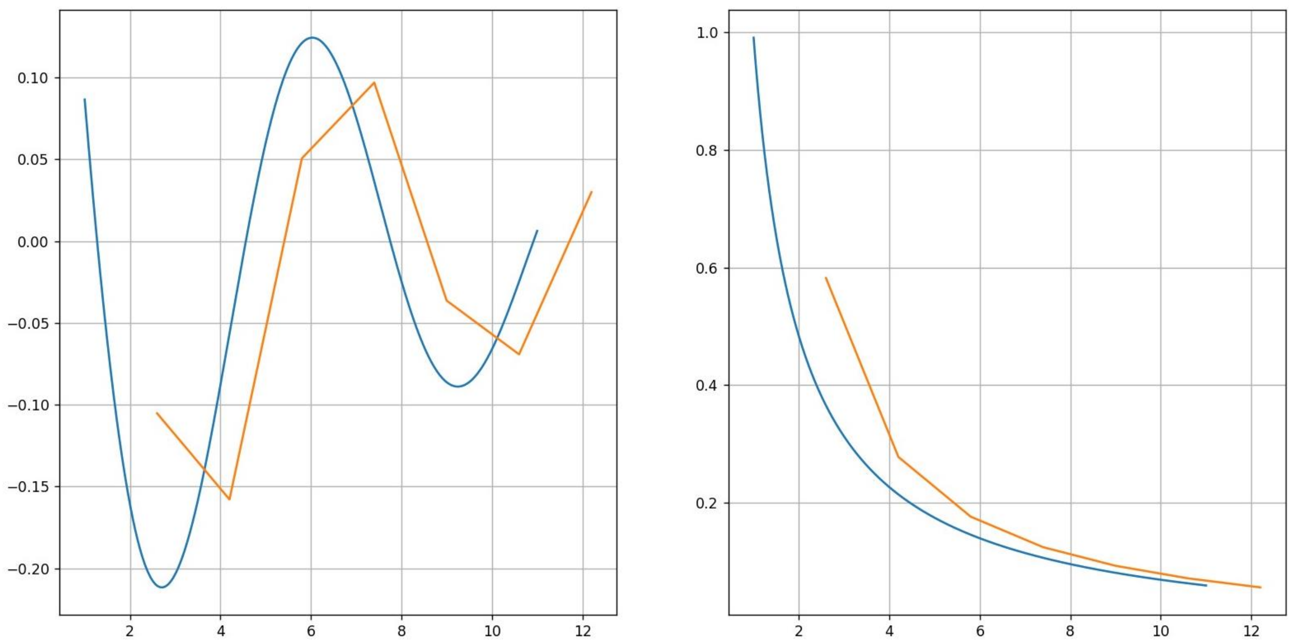


Для h = 0.1, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная

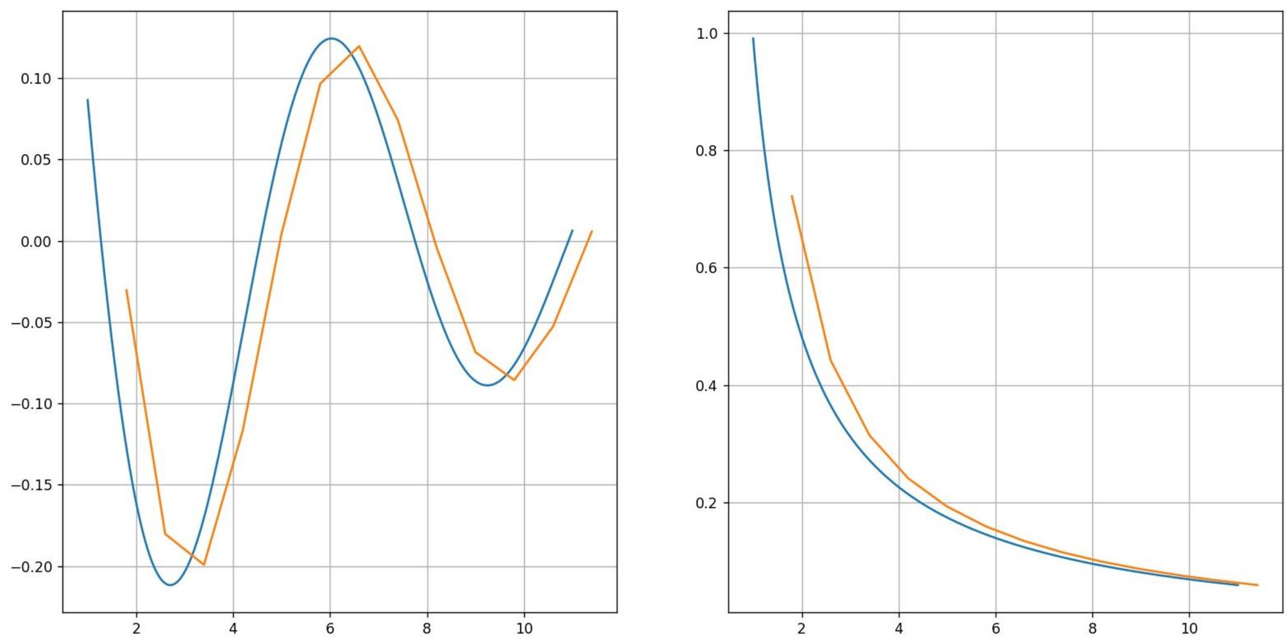
Вывод: Метод правой разностной производной линейно повышает точность вычислений при уменьшении шага дискретизации, при этом график численной производной опережает график аналитической производной.

Метод 2: метод левой разностной производной

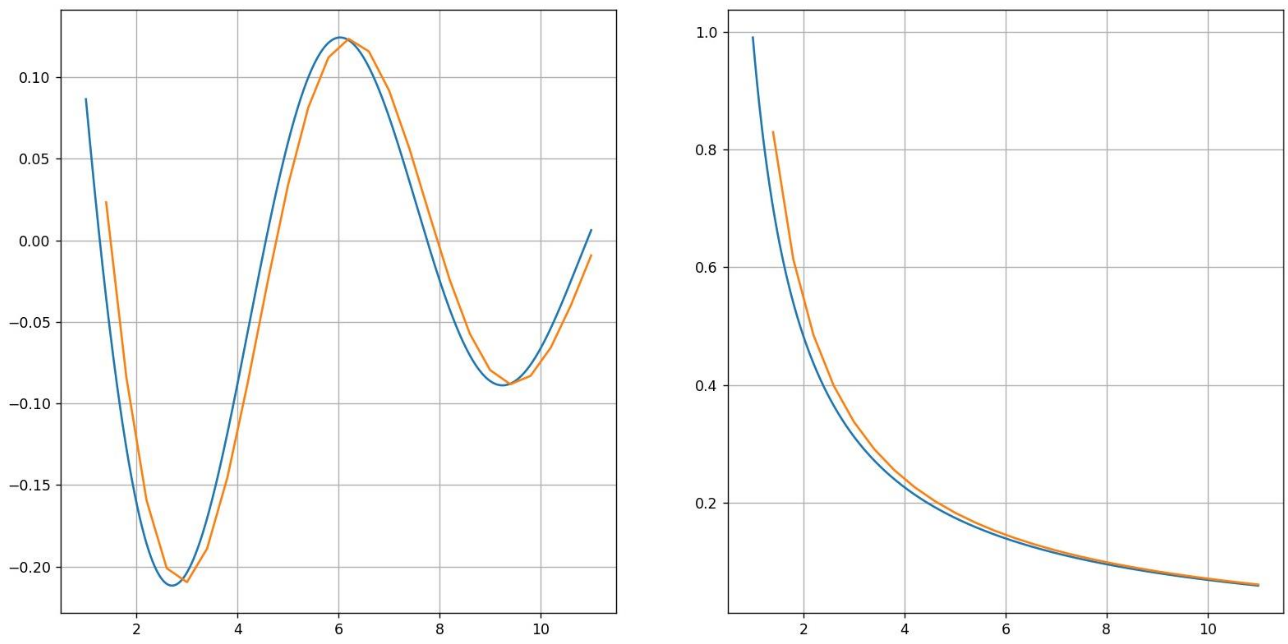
Производная в точке x_0 представляется как разность значений функции в двух точках – x_0 и x_0-h, делённую на расстояние между ними h. При стремлении расстояния между точками к нулю, формула, используемая в данном методе, будет являться одним из эквивалентных определений производной со смещением на h.



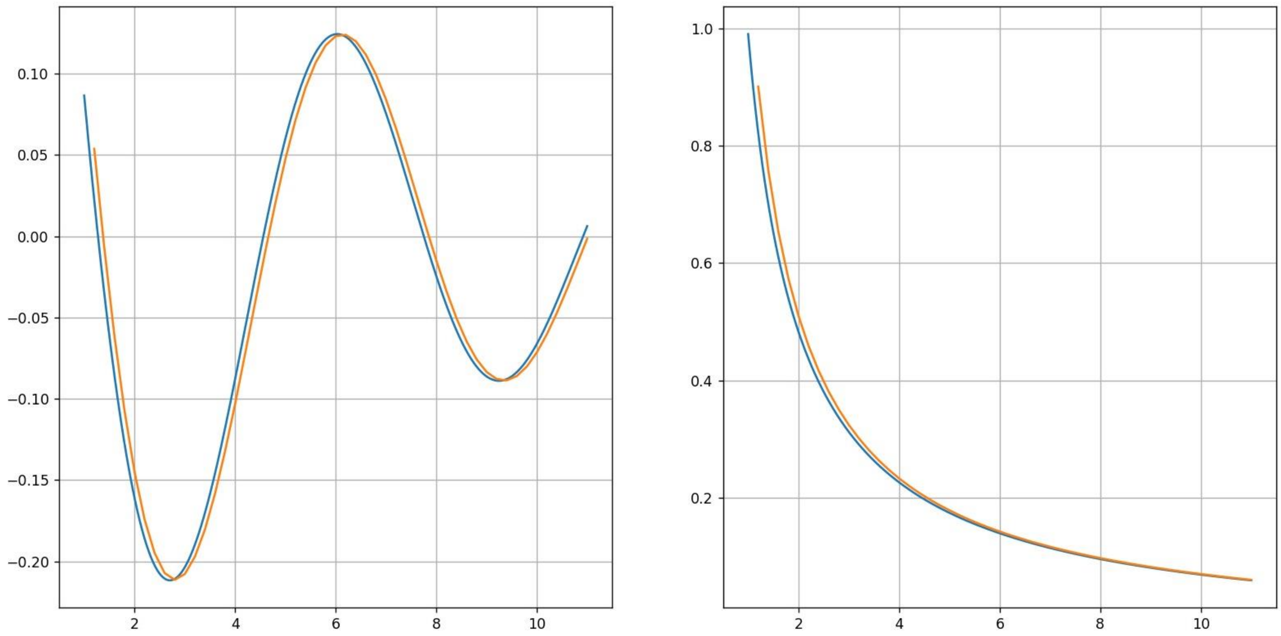
Для h = 1.6, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная



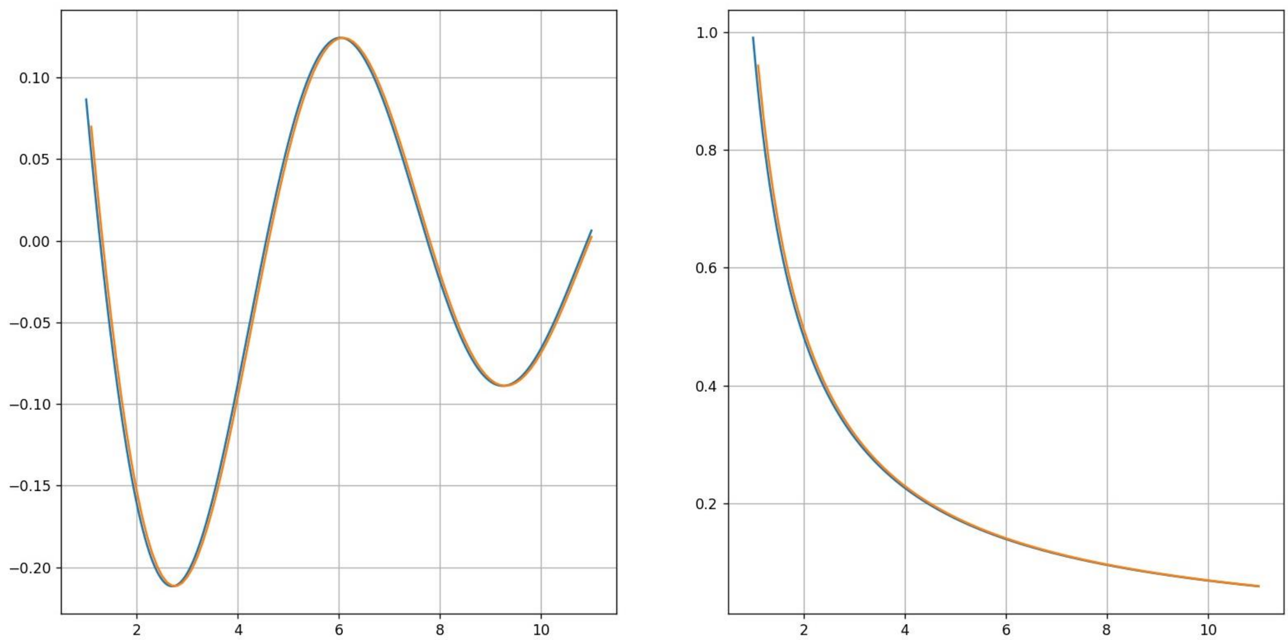
Для h = 0.8, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная



Для h = 0.4, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная



Для h = 0.2, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная

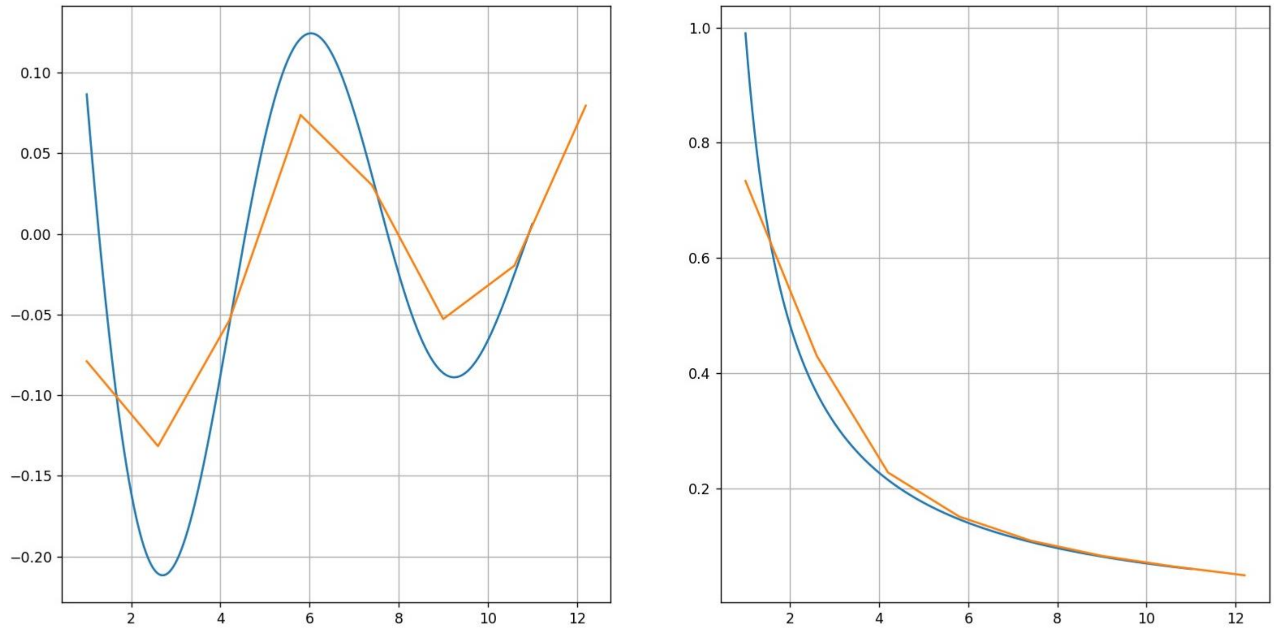


Для h = 0.1, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная

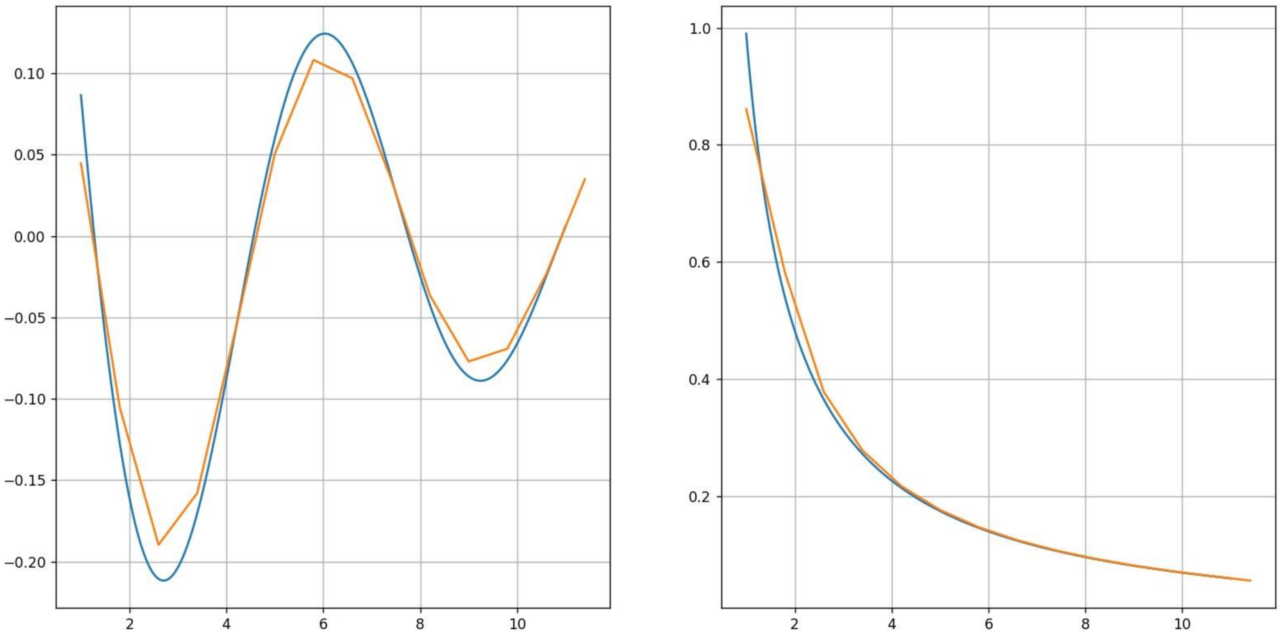
Вывод: Метод левой разностной производной линейно повышает точность вычислений при уменьшении шага дискретизации, при этом график численной производной отстаёт от графика аналитической производной.

Метод 3: метод центральной разностной производной

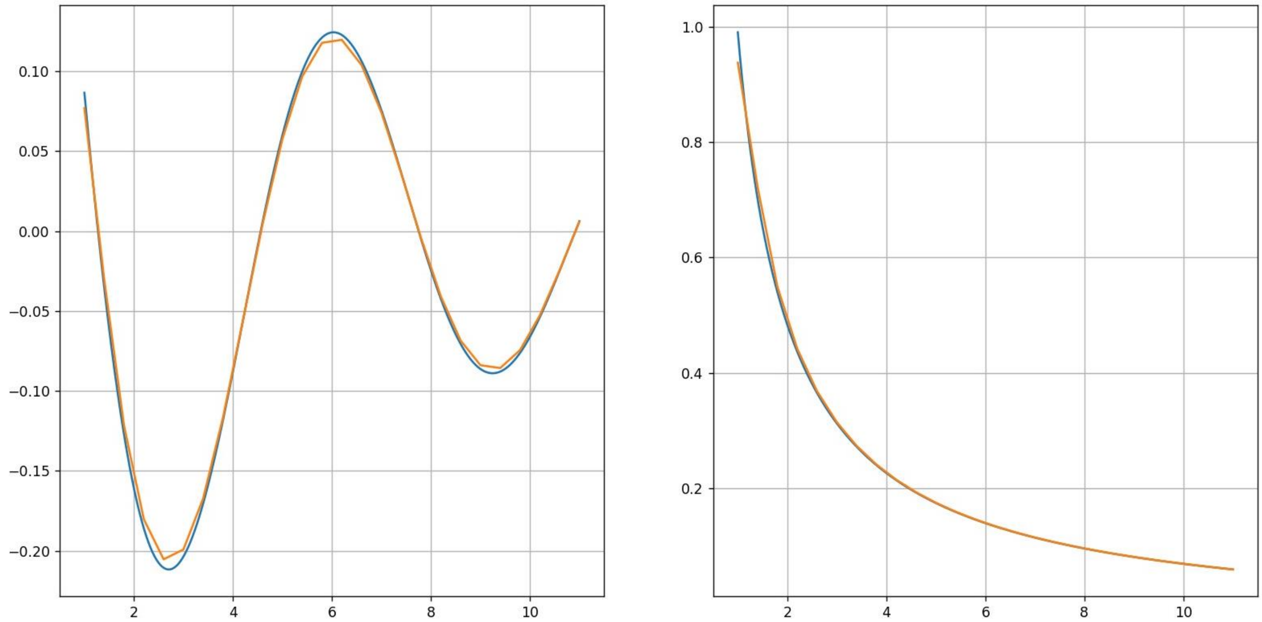
Производная в точке x_0 представляется как разность значений функции в двух точках – x_0-h и x_0+h, делённую на расстояние между ними 2h. При стремлении расстояния между точками к нулю точность метода будет повышаться со скоростью $O(h^2)$



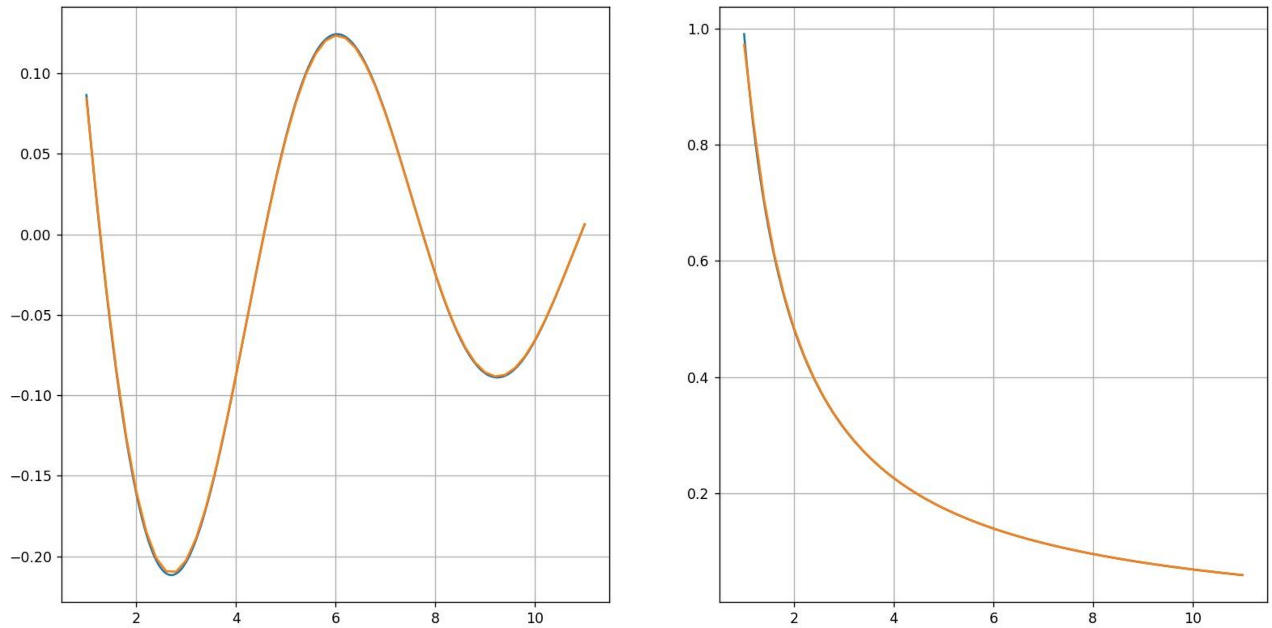
Для h = 1.6, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная



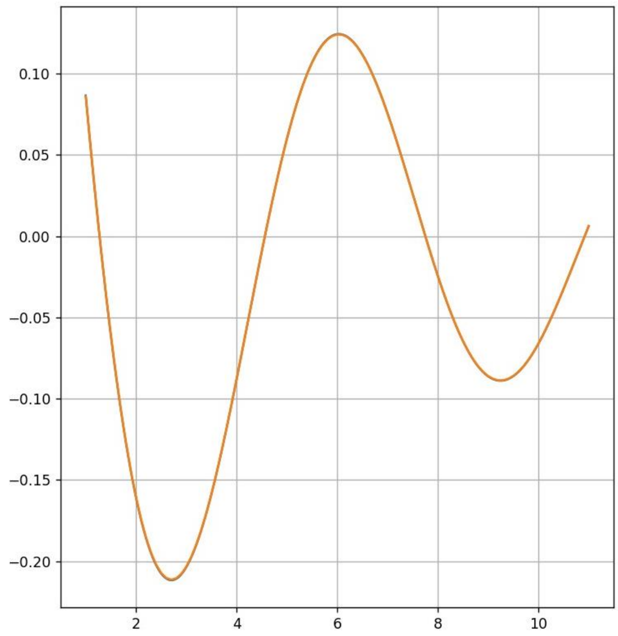
Для h = 0.8, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная

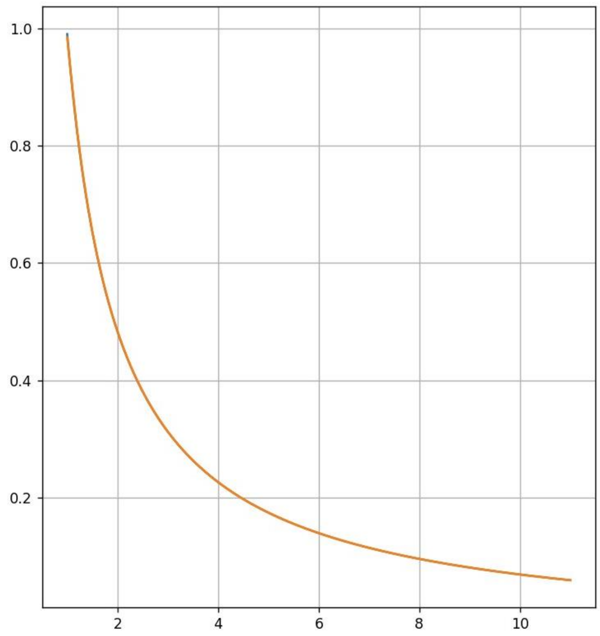


Для h = 0.4, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная



Для h = 0.2, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная

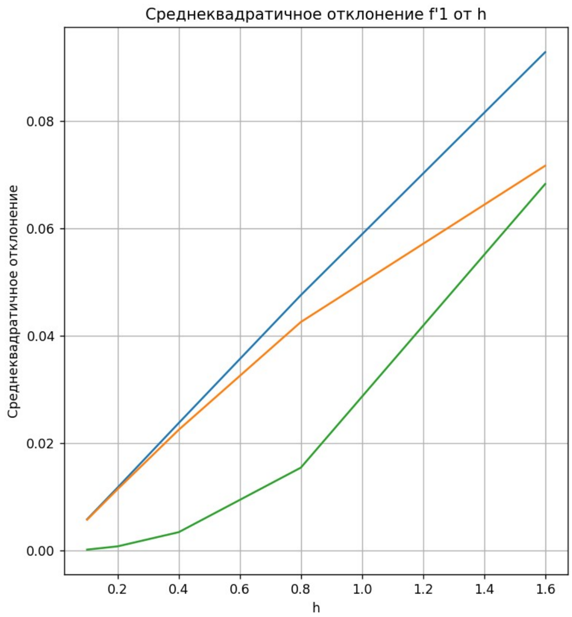


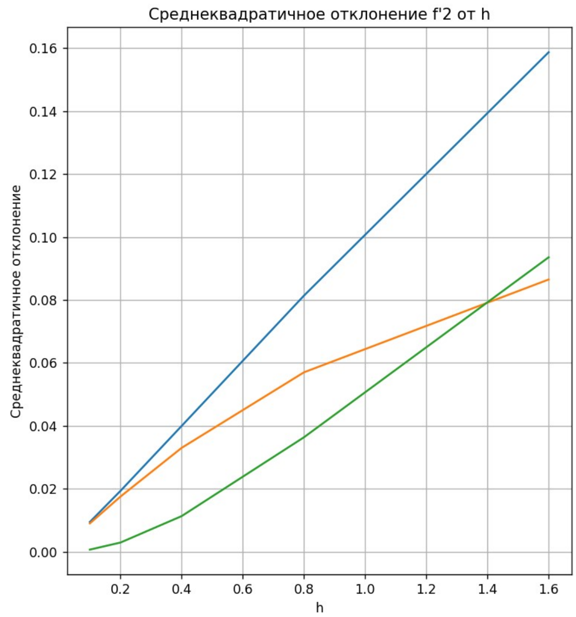


Для h = 0.1, синий график – аналитическая производная, оранжевый график – численная производная

Вывод: Метод центральной разностной производной эффективнее повышает точность вычислений при уменьшении шага дискретизации относительно двух предыдущих методов.

Среднеквадратичные отклонения:
Для h: [1.6, 0.8, 0.4, 0.2, 0.1]:
Правая разностная производная первой функции:
[0.0928, 0.0476, 0.0237, 0.0118, 0.0058]
Левая разностная производная первой функции:
[0.0716, 0.0425, 0.0225, 0.0114, 0.0058]
Центральная разностная производная первой функции:
[0.0682, 0.0154, 0.0034, 0.0008, 0.0002]
Правая разностная производная второй функции:
[0.1588, 0.0814, 0.0400, 0.0193, 0.0095]
Левая разностная производная второй функции:
[0.0865, 0.05703, 0.03301, 0.0175, 0.00901]
Центральная разностная производная второй функции:
[0.0936, 0.0364, 0.0113, 0.0029, 0.0007]





Вывод:
Вычислив среднеквадратичные отклонения численных методов от аналитических данных, подтверждаем то, что точность первых двух методов линейно зависит от шага дискретизации, а третий метод зависит от него квадратично, при этом работает с меньшей погрешностью при малом шаге дискретизации.

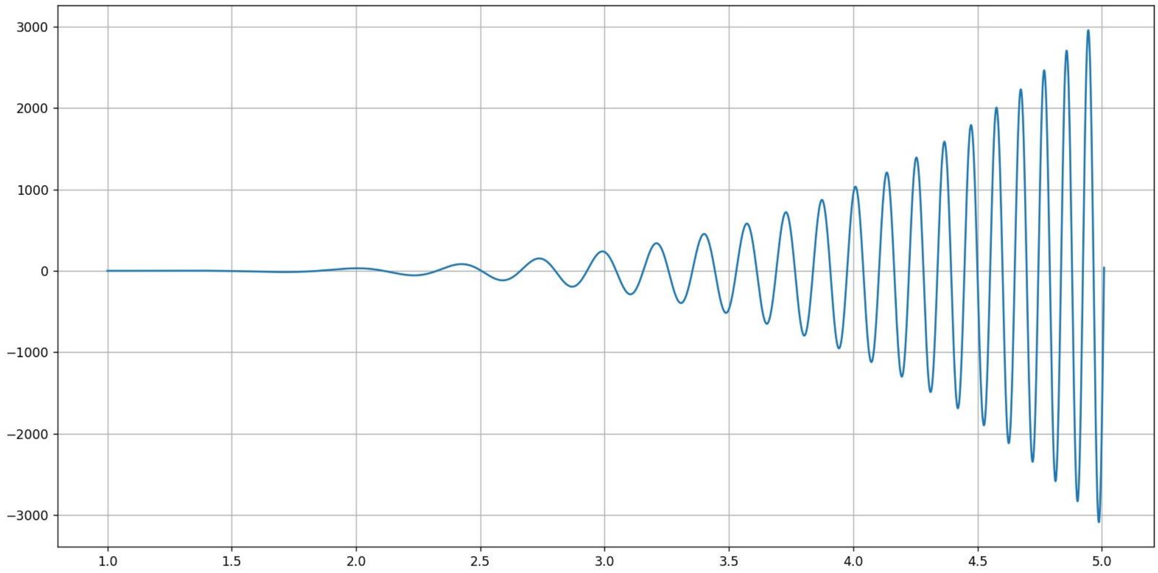
Часть 2 – интегрирование:
Теория:
Метод 1: формула прямоугольников (левых/правых/средних)
Функция разбивается на отрезки длины шага дискретизации h и интеграл вычисляется как сумма площадей прямоугольников шириной отрезка h и высотой, равной самому левому/правому/среднему значению функции на данном отрезке.
Метод 2: формула трапеций
Функция разбивается на отрезки длины шага дискретизации h и интеграл вычисляется как сумма площадей прямоугольных трапеций с основаниями, равными самым левому/правому значениям функции на данном отрезке.
Метод 3: формула Симпсона
Функция разбивается на отрезки длины шага дискретизации h и интеграл вычисляется как сумма площадей прямоугольных трапеций с основаниями, равными самым левому/правому значениям функции на данном отрезке, при этом боковая сторона трапеции приближается параболой, проходящей через точки $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $(x_{i-1/2}, f(x_{i-1/2}))$, $(x_i, f(x_i))$

Исследование:

Для исследования методов численного нахождения интеграла используем две следующие функции на отрезке [1, 5]:

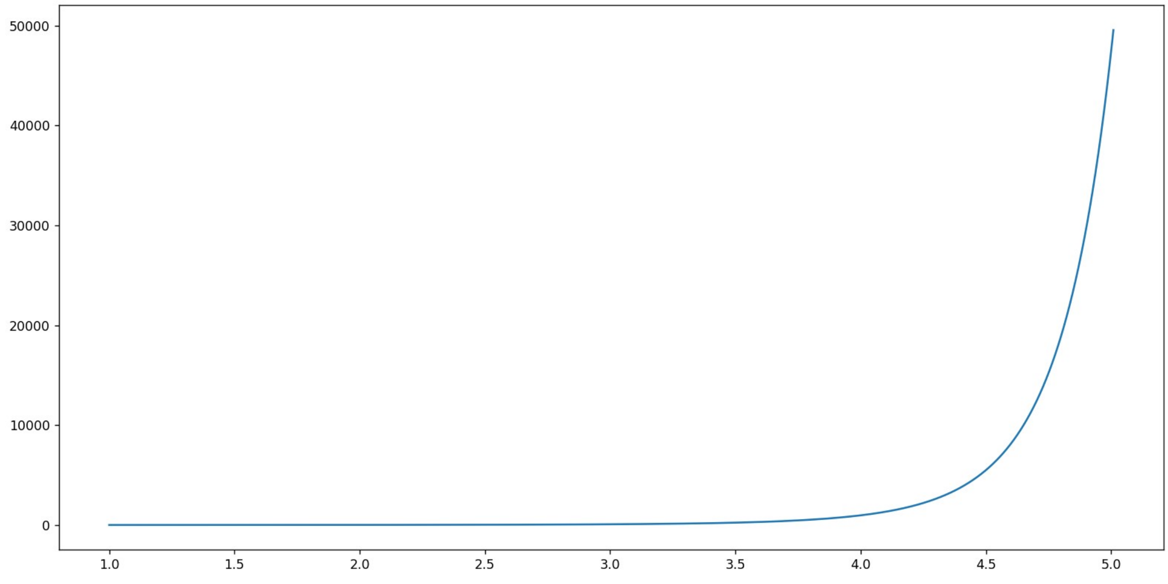
1. $f_3(x) = \sin(x^3) * x^5$,

при этом интеграл, вычисленный аналитически примерно равен −33.1272



2. $f_4(x) = e^{\sqrt{sinh(x)}} * \frac{cosh(x)}{\sqrt{sinh(x)}}$,

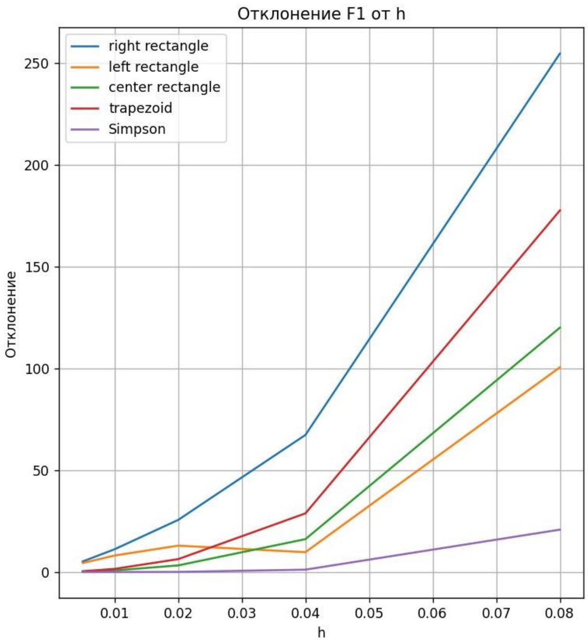
при этом интеграл, вычисленный аналитически примерно равен 11011.9781

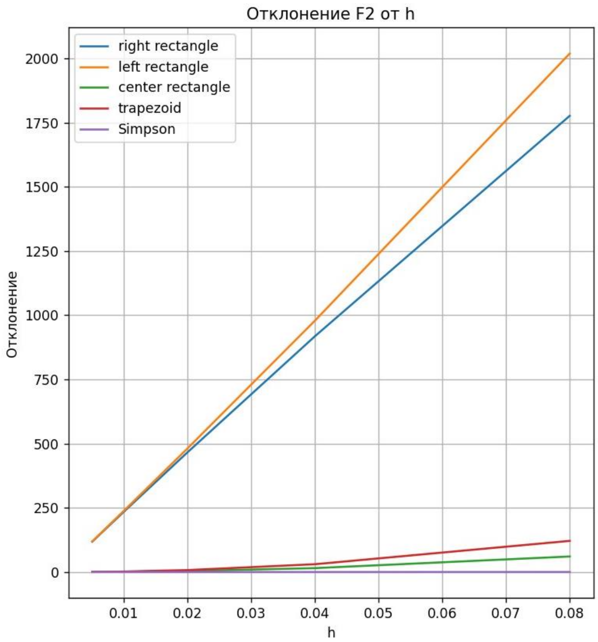


Вычисленные интегралы:

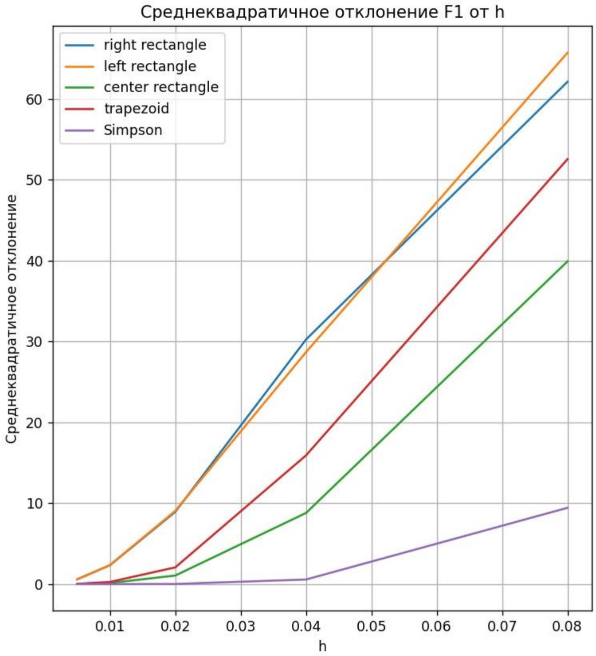
	h	Аналитический интеграл	Формула правых прямоугольников	Формула левых прямоугольников	Формула центральных прямоугольников	Формула трапеций	Формула Симпсона
f_3	0.08	-33.127	221.448	67.370	-153.097	144.409	-53.928
	0.04	-33.127	34.175	-42.863	-49.267	-4.344	-34.292
	0.02	-33.127	-7.546	-46.065	-36.376	-26.805	-33.186
	0.01	-33.127	-21.961	-41.221	-33.901	-31.591	-33.131
	0.005	-33.127	-27.931	-37.561	-33.318	-32.746	-33.127
f_4	0.08	11011.978	9235.078	13031.467	10951.475	11133.272	11012.074
	0.04	11011.978	10093.276	11991.471	10996.789	11042.374	11011.984
	0.02	11011.978	10545.033	11494.130	11008.177	11019.581	11011.978
	0.01	11011.978	10776.605	11251.154	11011.028	11013.879	11011.978
	0.005	11011.978	10893.816	11131.091	11011.740	11012.453	11011.978

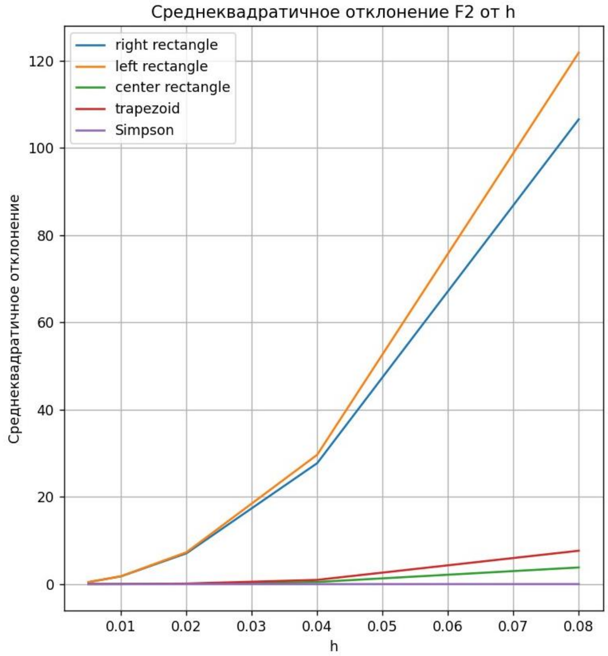
Отклонение результатов:





Среднеквадратичные отклонения:





Вывод:

Вычислив среднеквадратичные отклонения численных методов от аналитических данных, подтверждаем то, что точность первых двух методов значительно быстрее теряют точность при росте шага дискретизации на слабо осциллирующих функциях, при этом остальные три метода отличаются друг от друга незначительно. На быстро осциллирующих функциях высокой точностью обладает только метод с применением формулы Симпсона, когда остальные методы уступают в точности более чем в 3 раза.

Общий вывод по проделанной работе:

В ходе работы были реализованы методы численного дифференцирования и интегрирования, применены на различных функциях. Полученные данные были сравнены с полученными аналитически, подтверждая теоретические расчёты точностей методов.