Vektorräume

Ein Vektorraum über K oder K-Vektorraum bei dem K ein beliebiger Körper und V eine nicht leere Menge mit den Abbildungen $\oplus: V \times V \to V$ und $\odot: K \times V \to V$ ist, benötigt folgende Axiome:

1. $(V, \oplus)$ ist eine kommutative Gruppe   Es muss $x \oplus y = y \oplus x$ gelten.
2. $\forall \lambda, \mu \in K, x \in V: \lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda \mu) \odot x$ $\lambda\mu$ ist die Multiplikation aus dem Körper.
3. $\forall x \in V: 1 \odot x = x$ 1 ist das neutrale Element aus V
4. $\forall \lambda \in K, \forall x, y \in V: \lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$
5. $\forall \lambda, \mu \in K, x \in V: (\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$ Das $\oplus$ kommt, da 2 Elemente aus V addiert werden.

Wenn $K = \mathbb{R}$ heißt V reeller Vektorraum.

Wenn $K = \mathbb{C}$ heißt V komplexer Vektorraum.

Die Elemente aus V heißen Vektoren.

Die Elemente aus K heißen Skalare.

Jeder Körper ist ein Vektorraum über sich selbst.

Untervektorräume

Ein Untervektorraum $U \subseteq V$ ~~gilt ist~~ besitzt folgende Eigenschaften: $\forall x, y \in U, \lambda \in K$

$U \neq \emptyset$

$x \oplus y \in U$

$\cancel{x}\ \lambda \odot y \in U$

Alle anderen Vektorraumaxiome leiten sich von V ab.

Der Nullvektor vom V, sowie die inversen Elemente $x^{-1} \in U$ für jedes $x \in U$ sind enthalten in U.

$\{0\}$ und V sind Untervektorräume von V.

Wenn $U_1 \subseteq V$ und $U_2 \subseteq V$ dann ist $U_1 \cap U_2 \subseteq V$ (Schnittmengen sind Untervektorräume)

$U_1 + U_2 := \{v \in V \mid \exists u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 : v = u_1 + u_2\}$ ist ein Untervektorraum. (Summe)

Wenn $W = U_1 \oplus U_2$ und $W = U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt, so ist W eine direkte Summe.