Spezielle Potenzreihen

Aus einer Funktion der Form $f(x)=\frac{a}{b+cx}$ soll deren Potenzreihe, x_0 und der Konvergenzradius ermittelt werden. Dabei hilft einem die geometrische Reihe, da:

$g(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ für $|x|<1$ => Konvergenz

$g(x)=\frac{1}{1-(x-x_0)}=\sum_{n=0}^{\infty}(x-x_0)^n$ für $|x-x_0|<1$ => Konvergenz

$g(x)=\frac{1}{1-c(x-x_0)}=\sum_{n=0}^{\infty} c^n\cdot(x-x_0)^n$ für $|x-x_0|<\frac{1}{|c|}$ => Konvergenz.

Um einer dieser Formen zu erreichen muss umgeformt werden.

Die exponentielle Funktion

$\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ heißt exponentielle Funktion. Sie konvergiert für jedes $x\in\mathbb{R}/\mathbb{C}$

$\exp(1)=e$

Es gilt $\forall a,b\in\mathbb{R}$: $\exp(a+b)=\exp(a)\cdot\exp(b)$

Es gilt $\forall n\in\mathbb{N}_0$: $\exp(n)=e^n$

Es gilt $\forall x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}_0$: $\exp(nx)=\exp(x)^n$

Es gilt: $\exp\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{e}=e^{\frac{1}{n}}$

Der Cosinus ist definiert als Realteil der exponentiellen Funktion $\exp(ix)$

$Re(\exp(ix))=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=:\cos(x)$ (enthält nur gerade Potenzen) $\Rightarrow \cos(x)=\cos(-x)$

Der Sinus ist definiert als Imaginärteil der exponentiellen Funktion $\exp(ix)$

$Im(\exp(ix))=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=:\sin(x)$ (enthält nur ungerade Potenzen) $\Rightarrow \sin(-x)=-\sin(x)$

Dadurch gilt $e^{ix}=\cos(x)+i\cdot\sin(x)$

Beide Reihen konvergieren absolut.

Additionstheoreme:

$\sin(u+v)=\sin(u)\cos(v)+\sin(v)\cos(u)$

$\cos(u+v)=\cos(u)\cos(v)-\sin(u)\sin(v)$

$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$