

Unter- und überbestimmte Gleichungssysteme

Es gibt 3 unterschiedliche Lösungsfälle in einem LGS:

1. Es existiert eine eindeutige Lösung.
2. Es existiert keine Lösung. (überbestimmtes LGS)
3. Es existieren unendlich viele Lösungen. (unterbestimmtes LGS)

Der erste nicht Null Eintrag in einer Matrixzeile wird Pivot Element genannt. Eine Spalte in der ein Pivot Element (P) vorkommt heißt Pivot-Spalte.

Sollte man die Stufenform bzw. reduzierte Stufenform erhalten, erhält man immer eine eindeutige Lösung.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} P & 0 & 0 & x \\ 0 & P & 0 & x \\ 0 & 0 & P & x \end{array} \right)$$

Sollte bei der erweiterten Matrix die letzte Spalte eine Pivot Spalte sein, hat das LGS keine Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} P & 0 & 0 & x \\ 0 & P & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & P \end{array} \right) \quad \text{Die Gleichung ist unlösbar, da } 0x + 0y + 0z \neq 1 \quad 0 \neq 1$$

Erhält man in der reduzierten Stufenform weniger Pivot Spalten als das Gleichungssystem Unbekannte hat, erhält man unendlich viele Lösungen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} P & x & x & x \\ 0 & P & x & x \end{array} \right) \quad \text{Dabei ist eine Variable ein "freier Parameter", der einen beliebigen Wert annehmen kann.}$$

Im Vektor Schreibweise wird dann z.B.

$$\begin{aligned} 7x + 0y - 15z &= 8 \\ 0x + 7y - 8z &= 2 \end{aligned} \quad \text{als} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{geschrieben, wobei die Zeile } z = 0 + z \cdot 1$$

hinzugefügt wird, da es sonst keine gültige Lösung ist.