Konvergenzkriterien

Eine positive Folge, zu der eine ebenfalls ~~po~~ positive kleinere divergente Folge gefunden werden kann, divergiert auch.

Bsp.: $1 + \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\geq 1 \cdot \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \ldots > 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ldots \Rightarrow$ divergent

Eine Folge ist konvergent, wenn eine andere betragsmäßig größere Folge konvergiert.

Bsp.: $1 + \underbrace{\tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2}}_{< 2 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{5^2} + \ldots < 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots = 2 \Rightarrow$ konvergent

Den Grenzwert zu berechnen ist in dem Fall schwieriger.

Das Majoranten- und Minorantenkriterium

$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Majorantenkriterium: Sollte $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergieren, konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
   b_n heißt dabei konvergente Majorante.
2. Minorantenkriterium: Sollte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergieren, divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
   a_n heißt dabei divergente Minorante.

Cauchy-Kondensationskriterium

Das Cauchy-Kondensationskriterium hilft einem, falls die Konvergenz einer Reihe nicht mit anderen Kriterien nachgewiesen werden kann.

Dabei muss vorausgesetzt sein, dass a_n eine Nullfolge ist, monoton fallend und $a_n \geq 0$ gilt.

Das Kriterium besagt, dass die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Leftrightarrow$ zu der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ ist.

Wurzelkriterium

Wenn eine Folge mit $0 \leq a_n$ existiert, dann gilt:

$r := \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$

$r < 1$: Die ~~Folge~~ Reihe ist absolut konvergent

$r > 1$: Die Reihe ist divergent

$r = 1$: Keine Aussage möglich

Das ganze basiert auf dem Aufbau einer geometrischen Reihe. $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$

c^n ist dabei die konvergente Majorante

Sollte $a_n < 0$ sein so fügt man in der Definition von r noch ein Betragszeichen um a_n ein.