Der Fixpunktsatz

Sei eine Funktion $f(x)$ gegeben und ein Wert $x \in \mathbb{R}$ so heißt $x = f(x)$ Fixpunkt.

Sei $f: [a,b] \to [a,b]$ Lipschitz-stetig mit $0 \leq L < 1$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y| \quad \forall x,y \in [a,b]$$

dann hat f genau einen Fixpunkt.

Liefert die Iteration $x_{n+1} = f(x_n)$ mit dem Startwert $x_0 \in [a,b]$ eine gegen den Fixpunkt konvergierende Folge.

$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$ heißt a-posteriori Abschätzung

$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot |x_1 - x_0|$ heißt a-priori Abschätzung

Eigenschaften der Funktionen sin(x) und cos(x)

Der Wert der ersten und einzigen Nullstelle von $\cos(x)$ im Intervall $[0,2]$ ist $x^* = \frac{\pi}{2}$

$\pi := 2 \cdot \min(\mathrm{Re}(\exp(ix)) = 0)$

$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$\exp(i \cdot \frac{\pi}{2}) = \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{0} + i \cdot \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{1} = i$

$\tan(x) := f(x) \overset{0}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ heißt Tangens.

$\cot(x) := f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ heißt Cotangens.

Umkehrfunktionen

$f^{-1}(\sin(x)) = x = \arcsin(\sin(x))$

$f^{-1}(\cos(x)) = x = \arccos(\cos(x))$

$f^{-1}(\tan(x)) = x = \arctan(\tan(x))$

$f^{-1}(\cot(x)) = x = \mathrm{arccot}(\cot(x))$

Alle Umkehrfunktionen von stetigen Funktionen sind auch wieder stetig.

Die Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktion von $\exp(x)$ heißt Logarithmusfunktion.

$\exp(\ln(x)) = x = \ln(\exp(x))$

Rechenregeln:

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$

$\ln(a) - \ln(b) = \ln(\frac{a}{b})$

$b \cdot \ln(a) = \ln(a^b)$