Ableitungsregeln

Faktorregel: Sei $g(x)$ differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$ so ist die Ableitung von $f(x) = c \cdot g(x)$ $\quad f'(x) = c \cdot g'(x)$

Summenregel: Sei $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x)$ differenzierbar, so ist $g(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ abgeleitet $g'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)$

Produktregel: Sei $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ so ist die Ableitung $f'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$

Quotientenregel: Sei $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, dann ist die Ableitung $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$

Kettenregel: Sei $f(x) = g(v(x))$, dann ist die Ableitung $f'(x) = v'(x) \cdot g'(v(x))$

Ableitung der Umkehrfunktion: Sei $y = f(x)$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(x)$ und der Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ so ist:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Lokale Extrema

Es existiert eine Stelle x_0 in $f(x)$, so dass

$f(x) \geq f(x_0)$ so heißt x_0 lokales minimum $\quad$ alt. $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$

$f(x) \leq f(x_0)$ so heißt x_0 lokales maximum $\quad$ alt. $f(x_0 + h) \leq f(x)$

Ist f differenzierbar und x_0 ein lokales Extrema so ist $f'(x_0) = 0$

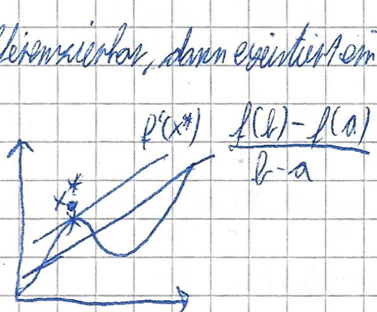
Der Mittelwertsatz

Ist f auf $[a,b]$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und auf (a,b) differenzierbar, so existiert ein $x^* \in (a,b)$ mit $f'(x^*) = 0$

Also muss eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall $[a,b]$ ein lokales Extremum haben oder konstant sein.

Mittelwertsatz: Sei $f \in C[a,b]$ und in (a,b) differenzierbar, dann existiert ein $x^* \in (a,b)$ mit

$$f'(x^*) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Dabei beschreibt $f'(x)$ die parallele Tangente von $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Eine stetige funktion mit beschränkter Ableitung sind Lipschitz stetig und dadurch gleichmäßig stetig.

Sollte $f: [a,b]$ in (a,b) differenzierbar sein, so ist diese Konstant, wenn $f'(x) = 0 \; \forall x \in (a,b)$

Sollte $f: [a,b]$ und $g: [a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar sein, und $f'(x) = g'(x)$ so gilt $f(x) = g(x) + c$