Stetigkeit verketteter Funktionen

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ in x_0 stetig sind, dann ist auch:

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ stetig in x_0

$\lambda \cdot f(x)$ stetig in x_0

$f(x) \cdot g(x)$ stetig in x_0

$\frac{f(x)}{g(x)}$ stetig in x_0, solange $g(x_0) \neq 0$

$f(g(x))$ stetig in x_0, wenn sie auf jedem Punkt der Definitionsmenge stetig sind.

Weitere Stetigkeitsuntersuchungen

Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig in x_0, wenn für $x = x_0 + h$ gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Stetigkeit der Funktionen cos(x) und sin(x)

$\cos(x)$ ist $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ stetig

$\sin(x)$ ist $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ stetig

$\exp(x)$ ist $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ stetig

Jede Potenzreihe ist im Inneren ihres Konvergenzradius stetig.

Beim Vertauschen von Grenzprozessen muss aufgepasst werden, da z.B. bei $\lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \frac{n}{n+m} = 0$ rauskommt, jedoch bei $\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+m} = 1$

Unstetigkeit

Es gibt mehrere Arten der Unstetigkeit:

1. Sprungstellen $\quad l\text{-}\lim_{x \to x_0} f(x) \neq r\text{-}\lim_{x \to x_0} f(x)$
2. Unendlichkeitsstellen (nicht beschränkt) $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) > R$
3. Oszillationsstellen ~~Eine~~ Bei $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pendeln die ~~Linien~~ Funktionswerte gegen 0 immer schneller $x=0$ ist kein Grenzwert.
4. Singuläre Definitionen $\quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \neq 1 \\ 4 & \text{für } x = 1 \end{cases}$
5. Definitionslücken $\quad f(x) = \frac{x}{x}$ für $x \neq 0$

Definitionslücken können zu stetigen Funktionen ergänzt werden, wenn man als Funktionswert den Grenzwert hinzufügt.

Es gibt auch nirgends stetige Funktionen.