Cauchy Reihen

S_n heißt cauchy Reihe wenn:

$\forall_{\varepsilon>0} \exists N\in\mathbb{N}\, \forall n>m>N: |S_n - S_m| < \varepsilon$

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right|$$

Konvergenz $\Leftrightarrow$ Cauchy-Konvergenz

Eine Reihe kann nur konvergieren, wenn die Folge eine Nullfolge ist.

Es reicht jedoch nicht zu überprüfen, ob die Folge eine Nullfolge ist, da die Partialsummen von Nullfolgen auch ins unendliche wachsen können.

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow S_n$ ist divergent.

Bei konvergenten Reihen gelten folgende Rechenregeln:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c\cdot a_k = c\cdot\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ heißt absolut konvergent wenn es konvergent ist.

Das Gleiche gilt auch für Folgen, jedoch ist dort die Konvergenz stärker.

Teleskopsummen

Teleskopsummen eignen sich besonders zur Berechnung von Grenzwerten, da sich die meisten Werte selber auslöschen.

Bsp.: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{0} \underbrace{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{0} \underbrace{\dots}_{0} \underbrace{-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_{0} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

In solchen Fällen werden die Summen als Teleskopsummen bezeichnet.

Eine Teleskopsumme kann mit Hilfe der Polynomdivision berechnet werden, falls es sich um unschöne Brüche wie z.B. $\frac{2}{k\cdot(k+2)}$ handelt.

Dabei berechnet man zuerst die Nullstellen des Nenners. Danach baut man den Term wie folgt auf:

$\frac{2}{k\cdot(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2}$ wobei die Nenner jeweils aus x − 1. Nullstelle usw. erstellt werden.

Zuletzt multipliziert man beide Seiten mit dem Nenner der linken Seite und setzt für k die Nullstellen ein. Danach erhält man A und B und hat einen Term wie z.B. $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$

Das gleiche gilt auch für Teleskopprodukte $\prod_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$