Reelle Zahlen

Die axiomatische Beschreibung

Ein Axiom ist eine Aussage, die ohne Beweis als wahr angenommen wird. Aussagen, die auf Grundlage der Axiome bewiesen werden, werden Theoreme genannt.

Beim Beschreiben eines mathematischen Modells muss darauf geachtet werden, dass nur wiederspruchsfreie Axiome gewählt werden. $1 < 0$

$1 \geq 0$ ↯

Es müssen ausreichend viele Axiome definiert werden, damit z.B. das Modell der natürlichen Zahlen nicht als ein Modell der reellen Zahlen angesehen wird.

Zudem sollen keine überflüssigen Axiome definiert werden.

Körperaxiome

Die Körperaxiome definieren Addition und Multiplikation.

Addition:

Assoziativgesetz: $x + (y + z) = (x + y) + z$

Kommutativgesetz: $x + y = y + x$

Existenz der Null: $0 + x = x$

Existenz des Negativen: $x + (-x) = 0$

Multiplikation:

Assoziativgesetz: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Kommutativgesetz: $x \cdot y = y \cdot x$

Existenz der Eins: $1 \cdot x = x$

Existenz des Inversen: $x \cdot x^{-1} = 1$

Distributivgesetz: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Anordnungsaxiome

Die Anordnungsaxiome beschreiben die lineare Ordnung der reellen Zahlen.

Trichotomie der Positivität: $\forall x \in \mathbb{R}: 0 < x \,\dot\vee\, 0 = x \,\dot\vee\, 0 < -x$

Abgeschlossenheit bezüglich Addition: $\forall a,b \in \mathbb{R}: 0 < a \wedge 0 < b \Rightarrow 0 < a + b$

Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation: $\forall a,b \in \mathbb{R}: 0 < a \wedge 0 < b \Rightarrow 0 < ab$

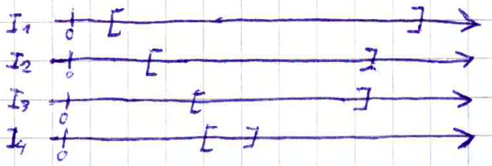
Kleiner-Relation: $x < y :\Leftrightarrow 0 < y - x$

~~[illegible]~~

Vollständigkeitsaxiom

Bei den rationalen Zahlen gibt es Lücken wie z.B. bei $\sqrt{2}$. Diese Lücken werden mit Hilfe der reellen Zahlen gestopft.

Allgemeines Intervallschachtelungsprinzip



Zu jeder allgemeinen Intervallschachtelung $I_1, I_2, I_3, I_4, \ldots$ existiert eine reelle Zahl, die in allen Intervallen liegt und damit von allen Intervallen approximiert wird.

Das Archimedische Axiom

Um zu beschreiben, dass die reellen Zahlen die kleinstmögliche Erweiterungen sind, um die Lücken der rationalen Zahlen zu füllen, müssen unendlich kleine und große Zahlen ausgeschlossen werden.

$\forall x > 0, y > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : nx \geq y$