Stetigkeit auf Intervallen

Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f(x)$ ist beschränkt.

Jede Funktion mit einem Intervall $[a,b]$ die stetig ist, nimmt dort ein Minimum und Maximum an. $\forall x, x_1, x_2 \in [a,b] \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

Dabei ist $f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

$f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$

Eine Funktion heißt gleichmäßig stetig, wenn beim ε-δ-Kriterium das δ unabhängig vom x_0 ist.

Jede gleichmäßig stetige Funktion ist auch stetig und jede stetige Funktion $f:[a,b]$ ist gleichmäßig stetig.

Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion f heißt lokal Lipschitz-stetig in x_0, wenn ein $L \geq 0$ und ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0|$

L heißt Lipschitz-Konstante.

Berechnung: Man formt $|f(x) - f(x_0)|$ um, bis man ein $|x - x_0|$ stehen hat. Daraufhin setzt man für den anderen Term den betragsmäßig höchsten Wert im Intervall ein, so dass

$|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0| < L \cdot \delta < \varepsilon$

Sollte $L > 0$ sein, so heißt $f:[a,b]$ Lipschitz-stetig.

Ist eine Funktion Lipschitz-stetig, so ist diese auch gleichmäßig stetig und deshalb stetig.

Der Zwischenwertsatz

Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = c$ und $f(b) = d \Rightarrow \forall y \in [\min(c,d), \max(c,d)]$

$\exists x^* \in [a,b]$ mit $f(x^*) = y$

Wenn $f(a) \cdot f(b) < 0$ dann ist $f(x^*) = 0$ das nennt man Nullstellensatz.