## Der Binomialkoeffizient

Ein ~~Als~~ Binomialkoeffizient oder eine Binomialzahl wird durch $\binom{n}{k}$ bezeichnet. Dabei beschreibt $n$ eine Menge mit $n$ Elementen z.B. $A = \{a, b, c, d\}$ $n = 4$. $k$ beschreibt die Anzahl der Elemente in der Teilmenge z.B. $k = 1 \Rightarrow \{a\}, \{b\}, \ldots$ oder bei $k = 2 \Rightarrow \{a, b\}, \{a, c\}, \ldots$

Das Ergebnis ist dabei die Anzahl der möglichen Teilmengen.

$\binom{n}{0} = 1$ (leere Menge)

$\binom{n}{n} = 1$ (gesamte Menge)

$\binom{n}{1} = n$ (jedes Element einzeln)

Sollte $n = 4$ auf 5 erhöht werden, berechnet man den Binomialkoeffizient mit folgender Formel:

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ z.B. $\binom{5}{2} = \binom{4}{2} + \binom{4}{1}$ oder $\binom{8}{5} = \binom{7}{5} + \binom{7}{4}$

Lösen von $\binom{5}{2}$:

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{2} + \binom{4}{1} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} = \binom{2}{2} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} = 1 + 2 + 3 + 4 = \underline{\underline{10}}$$

Lösen von $\binom{8}{5}$:

$$\binom{8}{5} = \binom{7}{5} + \binom{7}{4} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{6}{4} + \binom{6}{3} = \binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$$

$$= 1 + 3\binom{5}{4} + 3\binom{5}{3} + \binom{5}{2} = 1 + 3\left(\binom{4}{4} + \binom{4}{3}\right) + 3\left(\binom{4}{3} + \binom{4}{2}\right) + \left(\binom{4}{2} + \binom{4}{1}\right)$$

$$= 8 + 6\binom{4}{3} + 4\binom{4}{2} = 8 + 6\left(\binom{3}{3} + \binom{3}{2}\right) + 4\left(\binom{3}{2} + \binom{3}{1}\right)$$

$$= 26 + 10\binom{3}{2} = 26 + 10\left(\binom{2}{2} + \binom{2}{1}\right) = 26 + 10 + 20$$

$$= \underline{56}$$

Also umso größer $n$ und $k$ umso umfangreicher wird das Lösen.

### Fakultät

Als $x$ Fakultät bezeichnet man Zahlen auf denen ein "!" folgt z.B. $x!$.

$$n! := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n & n > 0 \end{cases}$$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & k > n \\ \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} & k \leq n \end{cases}$$

Lösen von $\binom{8}{5}$:

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{(8-5)! \cdot k!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = \frac{6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = \frac{336}{6} = \underline{\underline{56}}$$

Jede k-Elementige Teilmenge hat die gleiche Anzahl von Elementen wie die n-k Elementige Teilmenge.

Beispiel:

$$\binom{8}{8-5} = \binom{8}{3} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3} = \frac{6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = \frac{336}{6} = \underline{\underline{56}}$$

Zudem ist der Binomialkoeffizient immer eine ganze Zahl.

<u>Der binomische Lehrsatz</u>

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Dabei können für a, b, n alle beliebigen Zahlen eingesetzt werden, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Erste binomische Formel.

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Ergibt die Summe aller Teilmengen. $a^{n-k}$ und $b^k$ fallen weg, da $1^x = 1$ ergibt.

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{n} \binom{n}{k}$$

Für gerade und ungerade k gibt es gleich viele Teilmengen.