Umordnung von Reihen

Beim umordnen von Reihen muss aufgepasst werden, da z.B. das Assoziativgesetz (Klammergesetz) nicht immer angewendet werden darf.

Sollte die Reihe absolut konvergent sein, so dürfen die Summanden beliebig umsortiert und geklammert werden.

Das Cauchy-Produkt

Seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergent, so ist

1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ $\qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist absolut konvergent.

Potenzreihen

$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $x; a_n \in \mathbb{R}$ heißt reelle Potenzreihe.

Wenn $x, a_n \in \mathbb{C}$ heißt die Potenzreihe komplexe.

Jede Potenzreihe konvergiert für $x=0$. gegen a_0.

Sollte $a_n = 1$ sein so ist wenn $|x| < 1$ die Reihe konvergent.

Jede Potenzreihe konvergiert für: (Quotientenkriterium / Wurzelkriterium)

$$|x| < R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

divergiert für:

$$|x| > R$$

Sollten die Potenzreihen um einen bestimmten Entwicklungspunkt x_0 verschoben werden $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

so gilt: $|x - x_0| < R \Rightarrow$ konvergent, $|x - x_0| > R \Rightarrow$ divergent

R heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Sollte ~~[illegible]~~ $|x - x_0| = R$ sein so muss der Fall für $\pm x$ besonders betrachtet werden.

Sollte $r = 0$ sein so ist $R = \infty$ und die komplette Reihe konvergiert.

$r: \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Sollte r divergent sein, so ist die Reihe nur für x bzw $x = x_0$ konvergent.

Also: 1. Konvergenz nur für $x=0$ bzw. $x = x_0$

2. Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$

3. Konvergenz für $|x - x_0| < R$ und Divergenz für $|x - x_0| > R$

Existiert kein Grenzwert, so kann der limes durch den limsup ersetzt werden.