Krümmungseigenschaften

$f''(x) > 0$ heißt konvex oder linksgekrümmt.

$f''(x) < 0$ heißt konkav oder rechtsgekrümmt

$f''(x) = 0$ heißt Wendepunkt, genau genommen heißt x Wendepunkt

Die 2. Ableitung gibt daher an, ob sich der Graph nach links oder rechts krümmt.

Die Taylorreihe

Die Taylorreihe ist definiert als $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Dabei heißt x_0 Entwicklungspunkt.

Die Reihe konvergiert gegen $|x - x_0| < r$ mit $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Konvergenz

Da beliebig hohe Ableitungen betrachtet werden, muss jede Ableitung auch wieder differenzierbar und stetig sein.

Die Taylorreihe konvergiert für Punkte $x \in [a,b]$ innerhalb des Konvergenzradius gegen $f(x)$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = 0$$

Die Taylorreihe ist gleich der Potenzreihe. Beide konvergieren gegen die gleichen Werte.

Ein Vorteil der Taylorreihe ist, dass bessere Näherungswerte gefunden werden können.

Anwendung

Durch Abbruch der Taylorreihe kann man sich einer Funktion durch Polynome annähern.

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n}_{f_m(x)} + R_{m+1}(x) \qquad R_{m+1}(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n$$

Bsp. für $m=1$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + R_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + R_1(x)$$

als Näherung $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ und somit die Tangentengleichung in x_0

Konvergenzgeschwindigkeit

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f_m(x)$ die aus der Taylorreihe gewonnene Entwicklung bis zur m-ten Potenz, also

$f_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ dann gilt: $f(x) = f_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(\bar{x})}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$ mit $\bar{x} \in [x, x_0]$

Um den Fehler zu berechnen gilt:

$$|R_{m+1}(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\max_{\bar{x}\in[x_0,x]} |f^{(m+1)}(\bar{x})|}{(m+1)!} \cdot |x-x_0|^{m+1}$$