arithmetische Folge

$a_n = cn + a_0$

geometrische Folge

$a_n = c^n \cdot a_0$

/ Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} kc + a_0 = (n+1)\cdot a_0 + c\boxed{\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

/ Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

ε-Umgebung

$|a_n - a| < \varepsilon$

konv. = 1 Grenzwert

div. = kein Grenzwert

konv. gegen 0 = Nullfolge

unbeschränkt = div.

Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k}$ E in M, E in TM $\quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{n} = 1$

$\binom{n}{1} = n$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Grenzwert finden

+ ausklammern

teilen durch h. Potenz (Nenner)

$\lim a_n + b_n = a + b$

$\lim c \cdot a_n = c \cdot a$

$\lim a_n \cdot b_n = a \cdot b$

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \forall b \neq 0$

besch. + mon. => konv.

Monotonie

$a_n \geq a_{n+1}$ mon. fallend

$a_n > a_{n+1}$ streng mon. fallend

$a_n \leq a_{n+1}$ mon. steigend

$a_n < a_{n+1}$ streng mon. steigend

Vergleichssatz

$a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$

Sandwich-Lemma

$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \lim a_n = \lim b_n = \lim c_n$

Cauchy-Konvergenz

$|a_n - a_m| < \varepsilon$

sup: $a_n \leq K$ = k. Schranke

inf: $a_n \geq K$ = g. Schranke

lim sup: g. Häufungspunkt

lim inf: k. Häufungspunkt

eulersche Zahl e

$e := \lim (1+\frac{1}{n})^n$

$e^a = \lim (1+\frac{a}{n})^{n \cdot \frac{a}{a}} = e$

unendliche geo. Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$x < 0 \Rightarrow$ konv. $\quad x \geq 0 \Rightarrow$ div.

Cauchy Reihe

$|S_n - S_m| < \varepsilon$

konv. <=> cauchy konv.

$a \neq 0 \Rightarrow S_n$ div.

Teleskopsumme

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Partialbruchzerlegung

Majoranten / Minoranten

$0 \leq a_k \leq b_k$

b_k konv. => a_k konv.

a_k div. => b_k div.

konv. Maj. div. min.

Cauchy-Kondensationskriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$$

konv. <=> konv.

a_n = Nullfolge, mon. fall. $a_n \geq 0$

Wurzelkriterium

$a_n \geq 0$

$r := \lim \sqrt[n]{|a_n|}$

$r < 1 \Rightarrow$ abs. konv.

$r > 1 \Rightarrow$ div.

$r = 1$ undef.

Quotientenkriterium

$a_n \geq 0$

$r := \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$r < 1 \Rightarrow$ abs. konv.

$r > 1 \Rightarrow$ div.

$r = 1 \Rightarrow$ undef.

Wenn kein lim nutze größten Häufungspunkt

Alternierende Reihen

1. Gerade/Ungerade Partialsummen
2. Monotonie berechnen
3. Beschränktheit $g_n > (<) u_n$

=> konv. $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$

Leibniz-Kriterium

$a_n > 0$, mon. fall.

Nullfolge

Alter. Reihe => konv.

Exponentielle Funktion

$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\exp(1) = e$

$\exp(a+b) = \exp(a)\cdot\exp(b)$

$\exp(n) = e^n$

$\exp(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$

konv. $\forall x$

Cauchy-Produkt

$\sum a_n, \sum b_n$ abs. konv.

$\sum c_n = \sum a_k \cdot \sum b_k$

$\sum c_n \Rightarrow$ abs. konv.

Potenzreihen

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad r := \text{W Krit} / \text{Q Krit}$

$r = 0 \Rightarrow R = \infty$

$\frac{1}{r}$

$|x| < R = \cancel{\text{Q Krit} / \text{W Krit}} \Rightarrow$ konv.

$|x| > R \Rightarrow$ div.

R: Konvergenzradius

Ger. Potenzreihen

$\frac{a}{b+cx}$ Umformen

$\frac{1}{1-c(x-x_0)}$

$|x-x_0| < \frac{1}{|c|} \Rightarrow$ konv.

Cosinus / Sinus

$$\cos(x) := \mathrm{Re}(\exp(ix)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(x) := \mathrm{Im}(\exp(ix)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(x) \Rightarrow$ stetig

$\sin(x) \Rightarrow$ stetig

$\exp(x) \Rightarrow$ stetig

Alle Potenzreihen sind innerhalb R stetig

Additionstheoreme

$\sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \sin(v)\cos(u)$

$\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Epsilon-Delta-Kriterium

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$|x - x_0| < \delta \qquad \delta := \min(\delta_1, \delta_2)$

$\forall_\varepsilon > 0 \exists_\delta > 0 \forall x \in M: |x-x_0| < \delta: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Stetigkeit

$r\text{-}\lim_{x \to x_0} f(x) := \lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x)$ R

$l\text{-}\lim_{x \to x_0} f(x) := \lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x)$ L

$R = L = f(x_0)$

=> Stetig

Muss $\forall x_0$ gezeigt werden

Unstetigkeit nur für 1 x_0

Unstetigkeit

1. Sprungstellen
2. Unendlichkeitstellen
3. Oszillationsstellen
4. Singuläre Definition
5. Definitionslücken (ergänzbar)

Hyperbolischen Funktionen

$\cosh x := \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$

$\sinh x := \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$

$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cosh(-x) = \cosh(x)$

$\sinh(-x) = -\sinh(x)$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$\cos(x) = \cosh(ix)$

$\cosh(x) = \cos(ix)$

$\sin(x) = -i\cdot\sinh(ix)$

$\sinh(x) = -i\cdot\sin(ix)$

$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)$

$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y)$

Ableitungsregeln

$c\cdot g(x) \Rightarrow c\cdot g'(x)$

$f_1(x)\ldots \Rightarrow f'(x)\ldots$

$u(x)v(x) \Rightarrow u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

$\frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

$g(v(x)) \Rightarrow g'(v(x))\,v'(x)$

$(f^{-1})'(y) \Rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Lokale Extrema

$f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow x_0 = $ l. min.

$f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow x_0 = $ l. max.

$f'(x) = 0$

Mittelwertsatz

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ erzeugt eine parallele Tangente zu $f'(x^*)$

$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x)+C$

Monotone Funktion

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ mon. wachsend

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ streng mon. wachsend

$f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ mon. fallend

$f'(x) <$ $\Rightarrow$ streng mon. fallend

streng mon $\Rightarrow$ max 1 Nullstelle

Lipschitz-Stetigkeit

$f:[a,b]$

$|f(x)-f(x_0)| \leq L\,|x-x_0| < L\cdot\delta < \varepsilon$

$L \geq 0 \Rightarrow$ lipschitz stetig $\Rightarrow$ gleich. stet. $\Rightarrow$ stetig

Eigenschaften cos/sin

$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$\exp(i\cdot\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$

$\tan := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\cot := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Ableitungen (Differenzierbarkeit)

Diff. $\Rightarrow$ stetig

$x^2 \Rightarrow 2x$

$C \Rightarrow 0$

$x^n \Rightarrow n x^{n-1}$

$e^x \Rightarrow e^x$

$\sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{-1}{x^2}$

$\sin \Rightarrow \cos$

de L'Hospital

$f,g:[a,b]$, $f(a)=g(a)=0$

$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

$g'(x)\neq 0$

$g(x)\neq 0$

Nutzen bei $\frac{0}{0}$ / $\frac{\infty}{\infty}$

wiederholbar

Krümmung

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ links / konvex

$f''(x) < 0 \Rightarrow$ rechts / konkav

$f''(x) = 0 \Rightarrow x$ Wendepunkt

Taylorreihe

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$x_0 = 0$

n meist angegeben

Ableitungen berechenbar

Extremwerte

$f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ab 1.

n ungerade $\Rightarrow$ kein Extremum

n gerade

$f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ l. Min.

$f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ l. Max.

2. Ableitung o. 1.

$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h)-2\cdot f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$

Tangentenverfahren von Newton

x_0, $f'(x)$ gegeben

1. $f(x_0)$
2. $f'(x_0)$
3. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
4. Schritt 1-4 mit x_1 wiederholen

! $f'(x_i) \approx 0$

! Ping Pong Effekt

Zwischenwertsatz

$f:[a,b]$ stetig

$f(a)=c$, $f(b)=d$ $\forall y\in[\min(c,d), \max(c,d)]$

$\exists x^*\in[a,b]: f(x^*)=y$

$f(a)\cdot f(b) < 0 \Rightarrow$ Nullstellensatz

Logarithmusfunktion

$\exp(\ln(x)) = x = \ln(\exp(x))$

$\ln(a)+\ln(b) = \ln(ab)$

$\ln(a)-\ln(b) = \ln(\frac{a}{b})$

$b\cdot\ln(a) = \ln(a^b)$

Tangentengleichung

$T(x) = m\,(x-x_0)+b$

$m = f'(x_0)$

$b = f(x)$

x_0: Wert x in $f(x)$

Mantelfläche

$M = \int_a^b 2\pi f(x)\cdot L\,dx$

Rotationsvolumen

$V = \int_a^b \pi\cdot f(x)^2\,dx$

Num. Br. Integr.

$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\cdot\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$

Näherungswert

Unbestimmte Integral

$F(x) = \int f(x)\,dx$

Bestimmtes Integral

$\int_a^b f(x)\,dx$

Flächenfunktion

$f(x)$ stetig

$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$

$= [F(x)]_a^b$

$= F(b)-F(a)$

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b \ldots$

$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \ldots$

$\frac{1}{x} \nearrow \ln|x|+C$

Unendliche Int. Intervalle

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

$:= \lim_{R\to\infty}\int_c^R f(x)\,dx$ 1

$+ \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^c f(x)\,dx$ 2

c ist beliebig

Wenn 1, 2 konv. $\Rightarrow$ 2 alles konv.

sonst div.

$\lim \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \Rightarrow$ Cauchy-Hauptwert

Unbeschränkte Integranden

$\int_a^b f(x)\,dx :=$

$\lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx +$

$\lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$

Flächenberechnung

1. Nullstellen berechnen
2. Integrale setzen
3. Betrag addieren

Absolute Konv.

$\int_a^b |f(x)|\,dx$

Abs. konv. $\Rightarrow$ konv.

Fläche zwischen 2 Int.

$|\int_a^b f(x)-g(x)|$

Majo-, Mino

$0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\quad$ $g(x)$ konv. $\Rightarrow f(x)$ konv.

$0 \leq g(x) \leq f(x)$ $\quad$ g div $\Rightarrow f$ div

Längenberechnung

$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

L heißt Bogenlänge

Integralkriterium

$f:[m-1,\infty)$ mon. fallend, $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[m-1,\infty)$

$\sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \leq \int_m^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \leq \int_{m-1}^{\infty} f(x)\,dx$

$\Rightarrow$ konv