Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Potenzreihen

Jede Potenzreihe ist im inneren des Konvergenzbereiches stetig und differenzierbar.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n$$

Beim ableiten bleibt der Konvergenzradius unverändert.

Monotonie

Eine Funktion $f:[a,b]$ für $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $x_1 < x_2$ heißt für:

$f(x_1) \leq f(x_2)$ monoton wachsend

$f(x_1) < f(x_2)$ streng monoton wachsend

$f(x_1) \geq f(x_2)$ monoton fallend

$f(x_1) > f(x_2)$ streng monoton fallend

mit hilfe der 1. Ableitung gilt:

$f'(x) \geq 0$ so ist f monoton wachsend

$f'(x) > 0$ so ist f streng monoton wachsend

$f'(x) \leq 0$ so ist f monoton fallend

$f'(x) < 0$ so ist f streng monoton fallend

Sollte ein Punkt $f'(x_0) = 0$ ergeben, so gilt trotzdem strenge monotonie wenn ansonsten $<$ bzw. $>$ gilt.

Eine streng monotone Funktion nimmt jeden Funktionswert in einem Intervall nur einmal an.

Ist eine Funktion streng monoton, dann hat diese auf einem Intervall höchstens eine Nullstelle.

Die Grenzwertsätze von de L'Hospital

Der zweite Mittelwertsatz besagt, dass wenn $f, g \in C[a,b]$, (a,b) differenzierbar ist ~~und~~, $g'(x) \neq 0$ und $g(a) \neq g(b)$ existiert ein x^*, so dass $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)}$

Die Regel von de L'Hospital besagt, dass wenn 2 differenzierbare Funktionen $f, g: [a,b]$ gegeben sind und $f(a) = g(a) = 0$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ existiert: $(g(x) \neq 0)$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ und $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

Die Regel kann genutzt werden, wenn der Grenzwert $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ ~~wäre~~ wäre. Sollte bei der Ableitung erneut $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ rauskommen kann die Ableitung erneut abgeleitet werden.