Vektoren im $\mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$x^T := (x_1, \dots, x_n)$ transponierter Vektor $(x^T)^T := x$

$x = y$ gilt nur, wenn alle Koordinaten gleich sind ($x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$)

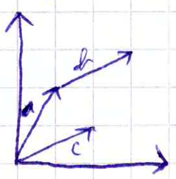
Der Zahlenraum $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots x_n)^T \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

Man nennt Vektoren Ortsvektoren, wenn diese vom Koordinatenursprung auf einen Punkt im $\mathbb{R}^n$ zeigen ($\vec{OQ}$)

Diesen bezeichnet man mit q oder $\vec{OQ}$

Verschiebungsvektoren sind Vektoren, die den Punkt im $\mathbb{R}^n$ verschieben. Diese sind zugleich auch Ortsvektoren, da sie auch vom Koordinatenursprung auf ein Punkt zeigen.

Beispiel:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Ortsvektor}} + \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\text{Verschiebungsvektor}}$$

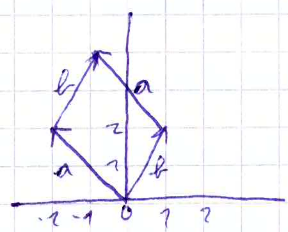


a, c Ortsvektoren

b Verschiebungsvektor $\quad c = b$ der gleiche Vektor

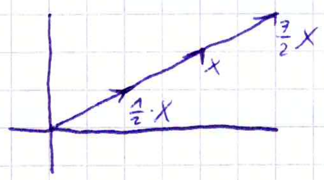
Addition von Vektoren

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ so ist $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$



Multiplikation von Vektoren

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ so ist $\alpha \cdot x = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \alpha \cdot x_3 \end{pmatrix}$



Wenn mit einem negativen α multipliziert wird, wird die Richtung des Vektors umgedreht.

Wenn man zwischen zwei Punkten P und Q einen Verschiebungsvektor erstellen möchte, rechnet man $p - q$ um einen Vektor von Q nach P zu erhalten.

Wenn die Vektoren $a, b \neq 0$ sind, sind sie parallel, wenn $a = \alpha \cdot b$. Ist α dabei kleiner 0 so haben die Vektoren eine gegensätzliche Richtung. Der Nullvektor ist zu jedem Vektor parallel.

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{aligned} 0{,}8a + 0{,}8b + 0{,}8c &= 0{,}8 \\ 0a + 0{,}2b + 0{,}1c &= 0{,}12 \\ 0{,}2a + 0b + 0{,}1c &= 0{,}08 \end{aligned}}_{\text{Lineares Gleichungssystem}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizienten Matrize}}$$

Eine $m \times n$ Matrize A ist ein rechteckiges Schema von reellen oder komplexen Zahlen a_{ij} mit m Zeilen und n Spalten.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i heißt Zeilenindexe
j heißt Spaltenindexe

$A = B :\Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$

Eine Matrize, deren Elemente alle den Wert 0 annehmen, heißt Nullmatrize

Wenn $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ A^T heißt transponierte Matrize und es werden dabei die Spalten von A als Zeilen verwendet.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}12 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}08 \end{array}\right)$ wird als erweiterte Koeffizienten Matrize bezeichnet.

Eine $n \times n$ Matrize heißt quadratisch

Schreibweise einer quadratischen Matrize $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$

Die Elemente von A bei denen $i = j$ zutrifft bilden die Hauptdiagonale

Eine quadratische Matrize bei der alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen 0 betragen heißt untere Dreiecksmatrize

Eine quadratische Matrize bei der alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen 0 betragen heißt obere Dreiecksmatrize

Wenn $\forall a_{ij} = 0 : i \neq j$ heißt A Diagonalmatrize.

Sollte die Diagonale einer Diagonalmatrize nur aus einsen bestehen, heißt diese Einheitsmatrize

Lösen von Linearen Gleichungssystemen

Zwei Gleichungssysteme sind äquivalent, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben.

Die dazugehörigen Matrizen sind äquivalent, wenn die Gleichungssysteme äquivalent sind.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 8 \\ 8y - 5z &= 11 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \text{Wird als Stufenform bezeichnet} \qquad \left.\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \text{Wird als reduzierte Stufenform bezeichnet}$$

Rechenmöglichkeiten

Ziel ist es mit Hilfe der Rechenmöglichkeiten aus dem LGS ein LGS mit (reduzierter) Stufenform umzuformen.

Addition eines Vielfachen einer Zeile auf eine andere

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 6 \quad \cdot 2 \\ 4x + 6y + 6z &= 8 \quad - \\ 5x + 7y - 1z &= 3 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 6 \quad \cdot 2{,}5 \\ -2z &= -4 \\ 5x + 7y - z &= 3 \quad - \end{aligned} \iff \begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 6 \\ -2z &= -4 \\ -0{,}5y - 9z &= -12 \end{aligned}$$

Vertauschen von zwei Zeilen

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 6 \\ -2z &= -4 \\ -0{,}5y - 9z &= -12 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 6 \\ -0{,}5y - 9z &= -12 \\ -2z &= -4 \end{aligned}$$

Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 6 \\ -0{,}5y - 9z &= -12 \quad | \cdot 2 \\ -2z &= -4 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 6 \\ -y - 18z &= -24 \\ -2z &= -4 \end{aligned}$$

Berechnung:

z berechnen: $-2z = -4 \iff z = 2$

y berechnen: $-y - 18z = -24 \iff -y - 18 \cdot 2 = -24 \iff -y = 12 \iff y = -12$

x berechnen: $2x + 3y + 4z = 6 \iff 2x - 36 + 8 = 6 \iff 2x = 34 \iff x = 17$

also: $\left.\begin{aligned} x &= 17 \\ y &= -12 \\ z &= 2 \end{aligned}\right\}$ reduzierte Stufenform

Unter- und überbestimmte Gleichungssysteme

Es gibt 3 unterschiedliche Lösungsfälle in einem LGS:

1. Es existiert eine eindeutige Lösung.
2. Es existiert keine Lösung. (überbestimmtes LGS)
3. Es existieren unendlich viele Lösungen. (unterbestimmtes LGS)

Der erste nicht Null Eintrag in einer Matrize wird Pivot Element genannt. Eine Spalte in der ein Pivot Element (P) vorkommt heißt Pivot-Spalte.

Sollte man die Stufenform bzw. reduzierte Stufenform erhalten, erhält man immer eine eindeutige Lösung.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} P & 0 & 0 & x \\ 0 & P & 0 & x \\ 0 & 0 & P & x \end{array}\right)$$

Sollte bei der erweiterten Matrize die letzte Spalte eine Pivot Spalte sein, hat das LGS keine Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} P & 0 & 0 & x \\ 0 & P & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & P \end{array}\right)$$ Die Gleichung ist unlösbar, da $0x + 0y + 0z \neq 1$ $\quad 0 \neq 1$

Erhält man in der reduzierten Stufenform weniger Pivot Spalten als das Gleichungssystem Unbekannte hat, erhält man unendlich viele Lösungen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} P & x & x & x \\ 0 & P & x & x \end{array}\right)$$ Dabei ist eine Variable ein "freier Parameter", der einen beliebigen Wert annehmen kann.

In Vektor Schreibweise wird dann z.B.

$1x + 0y - 15z = 8$

$0x + 1y - 8z = 2$

als $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ geschrieben, wobei die Zeile $z = 0 + z \cdot 1$ hinzugefügt wird, da es sonst keine gültige Lösung ist.

Skalarprodukt

Beim Skalarprodukt müssen folgende Bedingungen erfüllt werden. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Es gilt Symmetrie $\forall a,b \in \mathbb{R}^n : \langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}^n : \langle a,b+c\rangle = \langle a,b\rangle + \langle a,c\rangle$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \langle \alpha a,b\rangle = \alpha\langle a,b\rangle = \langle a,\alpha b\rangle$

positive Definitheit $\forall a \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\} : \langle a,a\rangle > 0 \quad \langle 0,0\rangle = 0$

Das euklidische Skalarprodukt ist wie folgt definiert. $\langle a,b\rangle = a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$ für $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Alternativ kann das Produkt wie folgt geschrieben werden, um einfacher rechnen zu können. $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

Die euklidische Norm (Standardnorm)

Diese Norm gibt einem die Länge eines Vektors im $\mathbb{R}^n$. Diese erhält man, wenn man die Wurzel aus dem Skalarprodukt zweier gleichen Vektoren zieht.

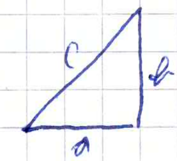
Beispiel:
$\|a\| := \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ oder auch $\|a\| = \sqrt{a_1a_1+a_2a_2+\dots+a_na_n}$

Die Norm hat die Eigenschaften, enthalten in den reellen Zahlen zu sein und größer oder gleich 0 zu sein.

Zudem ist nur die Länge des Nullvektors gleich 0.

Zudem gilt $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|$

außerdem gilt die Dreiecksungleichung $\|a+b\| \leq \|a\|+\|b\|$



$c \leq a + b$

Eine Abbildung von $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Norm. Diese muss die oberen Eigenschaften besitzen.

Die l_p Norm

$$\|a\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Bei dieser Norm wird erst jedes a_i um p mal mit sich selbst multipliziert und am Ende wird die p-te Wurzel gezogen.

Spezialfälle:

$\|a\|_1 = |a_1| + |a_2| + |\dots| + |a_n|$

$\|a\|_2 = \sqrt{|a_1|^2 + |\dots|^2 + |a_n|^2}$ = euklidische Norm

$\|a\|_\infty = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$ z.B. $\|a\|_\infty = \max\{|2|, |-3|, |1|\} = 3$

Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm aber nicht anders herum.

Einheitsvektoren

Ein Vektor $e \in \mathbb{R}^n$ heißt Einheitsvektor, wenn $\|e\| = 1$ ist.

Dabei ~~ist~~ sind $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ kanonische Einheitsvektoren.

Für jede l_p Norm mit einem Vektor $a \neq 0$ gibt es einen Einheitsvektor $\|e_i\|_p = 1$.

Dieser Vektor kann wie folgt normiert werden: $e_a = \frac{1}{\|a\|} a$

Die Vektoren v und λv sind nach der Normierung gleich, da diese solange $\lambda > 0$ ist in die selbe Richtung zeigen.

Orthogonale Vektoren

Als Orthogonale Vektoren bezeichnet man Vektoren, die senkrecht zueinander stehen.

Sei $a = (a_1, a_2)^T$ unser Vektor so ist:

$a' = (-a_2, a_1)^T$ um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn gedreht

$a'' = (a_2, -a_1)^T$ um $90°$ im Uhrzeigersinn gedreht.

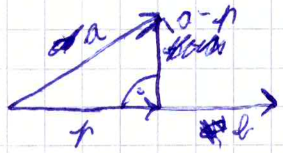
Zwei Vektoren werden als Orthogonal bezeichnet, wenn $\langle a, b \rangle = 0$ ist.

Dabei lässt sich b durch $b = \lambda(-a_2, a_1)$ darstellen. λ ist beliebig.

Schreibweise: $a \perp b$

Orthogonale Projektion

Eine orthogonale Projektion von a in Richtung b wird als $p_b(a)$ geschrieben. (von a auf b)



$p = \alpha b \Leftarrow p \parallel b$

$(a - p) \perp b \Rightarrow \langle a - p, b \rangle = 0$

Daraus folgt: $p = \frac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle} \cdot b$

Berechnen der Länge: $\|p_b(a)\| = \left\|\frac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle} b\right\| = \left|\frac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle}\right| \|b\| = \frac{|\langle a, b \rangle|}{\|b\|^2} \cdot \|b\| = \frac{|\langle a, b \rangle|}{\|b\|}$

also: $\|p_b(a)\| = \frac{|\langle a, b \rangle|}{\|b\|}$

Sollte b ein Einheitsvektor sein gilt: $p_b(a) = \langle a, b \rangle \cdot b$

$p_b(a)$ bezeichnet p in der Zeichnung.

Die orthogonale Projektion gibt einen einen Vektor p zurück, dessen Länge so angepasst wurde, dass ~~ein~~ Vektor p − a orthogonal zu p bzw. dem Ursprungsvektor b steht.

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \, \|b\|$

Dreiecksungleichung

$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

Winkel zwischen 2 Vektoren

Der Winkel zwischen 2 Vektoren wird wie folgt berechnet $\angle(a, b) := \arccos\left(\frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \, \|b\|}\right)$

Der Winkel ändert sich nicht, wenn die Vektoren normiert werden.

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\mathbb{R}^3$

Das Kreuzprodukt erzeugt bei zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ einen Vektor, der senkrecht zu den beiden Vektoren steht.

Rechnung: $\cancel{a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}$

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

Man berechnet mit dem Kreuzprodukt immer die Zeile, die beim Rechnen nicht benutzt werden.

Rechenregeln:

$a \times b = -b \times a$

$a \times a = 0$ Da $a_1 a_2 - a_1 a_2 = 0$ ergibt

$(a+b) \times c = a \times c + c \times b$

$\alpha a \times b = \alpha (a \times b) = a \times \alpha b$

$\langle a \times b, a \rangle = \langle a \times b, b \rangle = 0$

Wenn $a \times b \neq 0$, dann sind die Vektoren nicht parallel.

Berechnen der Länge $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2$

$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 (1 - \cos^2 \alpha)$

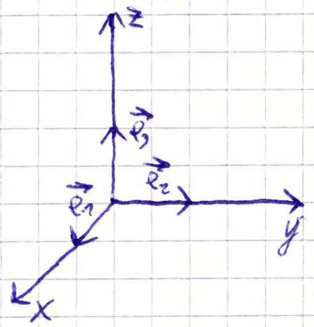
$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 \sin^2 \alpha$

Dabei gilt die Länge des Kreuzprodukts ~~als~~ die Fläche eines Parallelogramms zwischen.

Graßmannsche Identität

$a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$

Für die 3 Vektoren $a, b, a \times b$ gilt, dass diese so gedreht werden können, dass ihre Lage den kanonischen Einheitsvektoren entsprechen.



$a, b, a \times b$ bildet ein Rechtssystem

$a, b, -a \times b$ bildet ein Linkssystem, da wenn man versucht das mit der linken Hand darzustellen mindestens ein Finger in die falsche Richtung zeigt.

Geraden

Eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ wird durch folgende Formel definiert: $x = p + \alpha v$.

Dabei wird p als Ortsvektor / ~~Stütz~~ Aufpunkt bezeichnet und v als Richtungsvektor. α skaliert dabei die Länge von v, wodurch jeder Punkt auf der Geraden erreicht werden kann.

Zudem ist jede ~~...~~ skalierte Form von v ebenfalls ein Richtungsvektor.

Außerdem ist jeder Punkt auf der Geraden ebenfalls ein Aufpunkt.

Sollte eine Gerade mithilfe zweier Punkte p und q erstellt werden, eignet sich dazu folgende Formel.

$$x = p + \alpha(q - p)$$

Alle Gleichungen, die einen reellen Parameter enthalten und eine Gerade beschreiben, nennt man Parameterform.

Ein Vektor n welcher orthogonal zu v steht wird Normalvektor genannt.

~~Eine~~ Die Gleichung $\langle x, n \rangle = \langle p, n \rangle$ heißt Normalform von g. $(4x_1 + 3x_2 = 10)$

Da die Normalform auch große Koeffizienten enthalten kann, kann diese mit der Hessesche Normalform vereinfacht werden. $\frac{\langle x, n \rangle}{\|n\|} = \frac{\langle p, n \rangle}{\|n\|}$ Bsp. $\frac{1}{5}(4x_1 + 3x_2) = 2$

Geraden im Raum besitzen keine Parameterlose Form.

Ebene

Eine Ebene ist eine Fläche im Raum. Dabei gibt es 2 Richtungsvektoren w und v.

$x = p + \alpha v + \beta w$ Punkt-Richtungsgleichung

In der Ebene in Parameterform eignet sich jeder Punkt in der Ebene als Aufpunkt.

Beliebige zwei Vektoren eignen sich als Richtungsvektor, falls sie nicht parallel sind oder der Nullvektor.

Drei verschiedene Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen legen die Ebene fest.

Raum	Objekt	Punkt-Richtungs-Gleichung	Normalgleichung
$\mathbb{R}^2$	Gerade	$x = p + \alpha v$	$\langle x, n \rangle = \langle p, n \rangle$ · $ax_1 + bx_2 = c$
$\mathbb{R}^3$	Gerade	$x = p + \alpha v$	Existiert nicht!
$\mathbb{R}^3$	Ebene	$x = p + \alpha v + \beta w$	$\langle x, n \rangle = \langle p, n \rangle$ $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Umrechnen zwischen verschiedenen Darstellungsformen

Gerade:

Parameterform ⇒ Normalform

1. Normalvektor n finden. wenn $v=(v_1,v_2)^T$ dann ist $n=(v_2,-v_1)^T$
2. Rechte Seite $\langle p, n\rangle$ ausrechnen. $\langle x, n\rangle = 2$
3. linke Seite einsetzen. $v_2 x_1 - v_1 x_2 = 2$

Normalform ⇒ Parameterform.

1. Richtungsvektor v finden. wenn $n=(a,b)^T$ dann ist $v=(b,-a)^T$
2. Aufpunkt p finden. p erhält man, wenn man z.B. für $x_1=0$ einsetzt und x_2 berechnet
3. Aufstellen der Parameterform $x = p + \alpha v$

Ebene:

Parameterform ⇒ Normalform

1. Normalvektor n berechnen Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren
2. Punkt in der Ebene finden p aus der Parameterform verwenden
3. einsetzen $\langle x, n\rangle = \langle p, n\rangle \Leftrightarrow ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Normalform ⇒ Parameterform

1. Richtungsvektoren v und w finden Man vertauscht z.B. n_1 und n_2 setzt n_3 auf 0 und tauscht das Vorzeichen von n_1 um v zu erhalten. Dann vertauscht man n_1 und n_3 setzt n_2 auf 0 und tauscht das Vorzeichen von n_1 um w zu erhalten.
2. Aufpunkt p finden 0 einsetzen in x_1, x_2 und x_3 berechnen
3. Aufstellen der Parameterform $x = p + \alpha v + \beta w$

Lagebeziehung von Geraden und Ebenen

Zwei Geraden sind parallel wenn die Richtungsvektoren parallel sind.

Zwei Geraden sind orthogonal wenn die Richtungsvektoren orthogonal sind.

Der Winkel zwischen 2 Geraden wird definiert durch $\angle(G, \tilde{G}) := \min\{\angle(v, \tilde{v}), \angle(v, -\tilde{v})\}$

Zwei Ebenen sind parallel oder orthogonal, wenn ihre Normalvektoren parallel oder orthogonal sind.

Eine Gerade mit dem Richtungsvektor v ist parallel zu einer Ebene mit Normalvektor n wenn $n \perp v$

Der Winkel zwischen 2 ~~Normalvektoren~~ Ebenen wird definiert durch $\angle(E, \tilde{E}) := \min\{\angle(n, \tilde{n}), \angle(n, -\tilde{n})\}$

Schnittmengen von Geraden und Ebenen

Ebene und Gerade

Zuerst wird die Gerade in Parameterform bestimmt, z.B. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Danach wird die Normalform der Ebene bestimmt, z.B. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

Dann berechnet man α indem die Zeilen der Geraden in die Normalform der Ebene gesetzt werden.

Zuletzt setzt man α in die Parameterform der Geraden ein und erhält den Schnittpunkt.

Ebene und Ebene

wird auf die gleiche Art wie Ebene und Gerade berechnet.

Geraden und Geraden

Man setzt die beiden Geraden gleich und erhält dann eine der folgenden Lösungen.

1. Die Geraden haben einen Schnittpunkt	LGS hat eine Lösung
2. Die Geraden sind parallel	LGS hat mehrere Lösungen (identisch) oder keine
3. Die Geraden sind windschief	LGS hat keine Lösung

Abstandsbestimmung:

Ein Punkt $q \notin E$ sei gegeben. Der Schnittpunkt der Geraden $\tilde{q} = q + \alpha n$ mit E heißt Lotfußpunkt.

Als Lot bezeichnet man $l := \tilde{q} - q$ und $s := q + 2l$ heißt Spiegelpunkt.

Der Abstand von q und E wird durch $d := \|l\|$ berechnet.

Rechenweg:

Bestimmen von r. Sollten zwei Geraden beteiligt sein so ist r das Kreuzprodukt beider Richtungsvektoren.

Ansonsten ist r der Normalvektor.

Danach braucht man einen Vektor a zwischen z. B. Ebene und Gerade oder Gerade und Punkt. Dabei kann ein beliebiger Punkt ausgesucht werden.

Zum Schluss wird l bzw. der Abstand d berechnet durch* $l = \frac{\langle a, r \rangle}{\langle r, r \rangle} r$ oder $d = \frac{|\langle a, r \rangle|}{\|r\|}$

Beim berechnen des Abstands zum Nullpunkt erhält man die Formel $d = \frac{|\langle p, n \rangle|}{\|n\|}$

Punkt - Gerade im $\mathbb{R}^3$

$a = l + r, \quad l = a - r$

r ist die Projektion von a auf v $\quad r = \frac{\langle a, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$

Also ergibt sich $\quad l = a - \frac{\langle a, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$

Sollten 2 Geraden parallel zueinander stehen wird der Abstand wie bei einem Punkt zu einer Geraden berechnet.

* Dabei wird a auf r projeziert.

Determinanten in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

1×1 $\quad A = (a_1) \quad \det(A) := a_1$

2×2 $\quad A = (a, b) \quad a, b \in \mathbb{R}^2$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} := a_1 b_2 - b_1 a_2$$

$-$ $\quad +$

3×3 $\quad A = (a, b, c) \quad a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} := a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

$$\det \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$

Die Determinanten ergeben im $\mathbb{R}^2$ die Fläche eines von a und b aufgespannten Parallelogramms.

Die Determinanten ergeben im $\mathbb{R}^3$ das Volumen eines von a, b und c aufgespannten Spats.

$\det(a, b, c) = \langle c, a \times b \rangle = \|a \times b\| \cdot \|c\| \cdot \cos(\psi) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\| \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi)$

Eigenschaften:

$\det(a, b, c) = \det(c, a, b) = \det(b, c, a)$

$\det(a, b, c) = -\det(c, b, a)$

$\det(a, a, c) = 0$

$\det(\alpha \cdot a, b, c) = \alpha \det(a, b, c) \qquad \det(\alpha \cdot a, \alpha \cdot b, c) = \alpha^2 \det(a, b, c) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$\det(a, b, c + d) = \det(a, b, c) + \det(a, b, d)$

$\det(A) = \det(A^T)$

wenn $\det(a, b, c) \neq 0$ ist, hat ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten (x_1, x_2, x_3), wo jede Gleichung eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ beschreibt, eine eindeutige Lösung. Bei $\det(a, b, c) = 0$, gibt es keine eindeutige Lösung bzw. keine Lösung.

$$\text{LGS} \left\{ \begin{matrix} (E_1) & a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = d_1 \\ (E_2) & b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = d_2 \\ (E_3) & c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = d_3 \end{matrix} \right\}$$

Gruppe

$x \circ y$ wird Verknüpfung genannt.

M und $\circ$ bilden ein Paar $(M, \circ)$ und werden als Gruppe bezeichnet, wenn folgend Bedingungen zutreffen:

Assoziativität: $\forall a, b, c \in M: \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ Vertauschbar

neutrales Element: $\forall x \in M: \quad x \circ e = x$ Bei normaler addition 0, bei normaler multiplikation 1

Inverses Element: $\forall x \in M \; \exists x' \in M: \; x \circ x' = e$ Die Verknüpften Elemente ergeben immer das neutrale Element

Abgeschlossenheit: $\forall a, b \; \exists c \in M: \quad a \circ b = c$ c liegt dabei auch in der Menge

Wenn $x \circ y = y \circ x$ handelt es sich um eine abelsche bzw. kommutative Gruppe.

Wichtig:

M darf keine leere Menge sein.

$\forall x \in M: x' \circ x = x \circ x' \quad \vee \quad x \circ e = e \circ x$

Das inverse Element ist eindeutig

Das neutrale Element ist eindeutig

Zeichen:

$\oplus$ Plus Verknüpfung (Nicht normales Plus)

$\odot$ Mal Verknüpfung (Nicht normales Mal)

(1) neutrales Element (Plus Verknüpfung)

(0) Neutrales Element (Mal Verknüpfung)

Wenn $G = (M, \circ)$ eine Gruppe ist und $M' \subseteq M$, nennt man $U = (M', \circ)$ eine Untergruppe von G.

$U \leq G$

Dabei ist U eine Gruppe, wenn $U \neq \emptyset$, $\forall a, b \in M': a \circ b \in M'$ und $\forall a \in M: a^{-1} \in M$.

Man bezeichnet Gruppen als isomorph, wenn $\phi(a \circ b) = (a_1 \circ b_2)$. Schreibweise: $G_1 \simeq G_2$

Produktgruppen:

Wenn $G_1 = (A, +)$ und $G_2 = (B, \circ)$ Gruppen sind, dann lässt sich aus $A \times B$ folgende Verknüpfung $*$ definieren: $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 \circ b_2 \end{pmatrix}$, $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$

Dabei kann durch Nachrechnen herausgefunden werden, dass $(A \times B, *)$ auch eine Gruppe ist.

Restklassen (Äquivalenzklassen) bzw. Endliche Gruppen

Restklassen werden ~~[illegible]~~ durch einen Strich über den jeweiligen Buchstaben gekennzeichnet.

$m \in N \quad \overline{k} = \{k + m\mathbb{Z}\}$

Die Lösungsmenge von z.B. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} := \{\overline{0}, \dots, \overline{m-1}\}$ bei $m \in N$.

Berechnet wird das ganze durch ~~[illegible]~~ $(a+b) \bmod m$

Beispiel bei $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \oplus)$

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	a
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	
b						

Dabei ist $\{\overline{0}; \overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}\}$ die Lösungsmenge

Zudem gilt für abelsche Gruppen Spiegelsymmetrie $(x \circ y = y \circ x)$

Das ist gut zu sehen wenn man sich das Ergebnis Diagonal anschaut.

Körper $(M, \oplus, \odot)$

Ein Körper muss 3 Bedingungen erfüllen. Beispielhaft werden diese mit dem Tripel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dargestellt.

1. $(\mathbb{R}, +)$ bildet eine abelsche Gruppe
2. $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ bildet eine abelsche Gruppe
3. Es gilt das Distributivgesetz $(x+y)\cdot z = (x\cdot z)+(y\cdot z)$

Jeder Körper besitzt mindestens 2 Elemente, da die neutralen Elemente von $\oplus$ und $\odot$ durch 2 unterschiedlich sein müssen.

Vektorräume

Ein Vektorraum über K oder K-Vektorraum bei dem K ein beliebiger Körper und V eine nicht leere Menge mit den Abbildungen $\oplus: V \times V \to V$ und $\odot: K \times V \to V$ ist, benötigt folgende Axiome:

1. $(V, \oplus)$ ist eine kommutative Gruppe — Es muss $x \oplus y = y \oplus x$ gelten.
2. $\forall \lambda, \mu \in K, x \in V: \lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda \mu) \odot x$ — $\lambda\mu$ ist die Multiplikation aus dem Körper.
3. $\forall x \in V: 1 \odot x = x$ — 1 ist das neutrale Element aus V
4. $\forall \lambda \in K, \forall x, y \in V: \lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$
5. $\forall \lambda, \mu \in K, x \in V: (\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$ — Das $\oplus$ kommt, da 2 Elemente aus V addiert werden.

Wenn $K = \mathbb{R}$ heißt V reeller Vektorraum.

Wenn $K = \mathbb{C}$ heißt V komplexer Vektorraum.

Die Elemente aus V heißen Vektoren.

Die Elemente aus K heißen Skalare.

Jeder Körper ist ein Vektorraum über sich selbst.

Untervektorräume

Ein Untervektorraum $U \subseteq V$ ~~erfüllt~~ ~~ist~~ besitzt folgende Eigenschaften: $\forall x, y \in U, \lambda \in K$

$U \neq \emptyset$

$x \oplus y \in U$

$\lambda \odot y \in U$

Alle anderen Vektorraumaxiome leiten sich von V ab.

Der Nullvektor von V, sowie die inversen Elemente $x^{-1} \in U$ für jedes $x \in U$ sind enthalten in U.

$\{0\}$ und V sind Untervektorräume von V.

Wenn $U_1 \subseteq V$ und $U_2 \subseteq V$ dann ist $U_1 \cap U_2 \subseteq V$ (Schnittmengen sind Untervektorräume)

$U_1 + U_2 := \{v \in V \mid \exists u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 : v = u_1 + u_2\}$ ist ein Untervektorraum. (Summe)

Wenn $W = U_1 \oplus U_2$ und $W = U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt, so ist W eine direkte Summe.

Lineare Unabhängigkeit

Linearkombination: $v \in V$ ist darstellbar durch die Summe von $v_1, \dots, v_r$. $v = \lambda_1 v_1 + \dots, \lambda_r v_r$ $\lambda_i \in K$

Lineare Hülle: Die Menge $L(v_1, \dots, v_r)$ die durch verschiedene Linearkombinationen herstellen lässt.

Die Lineare Hülle ist ein Untervektorraum von V.

Erzeugendensystem: ~~Erst~~ Wenn $L(v_1, \dots, v_r) = V$ ist L ein Erzeugendensystem von V.

Endlich erzeugt: Wenn $v_1, \dots, v_r$ endlich ist, heißt V endlich erzeugt.

Linear Unabhängig: V heißt linear unabhängig, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$.

Dies bedeutet, dass es nur eine Möglichkeit gibt den Nullvektor zu erzeugen.

Sollte also $E = (e_1, e_2, e_3)$ ein Erzeugendensystem sein gibt es nur die Möglichkeit $0e_1 + 0e_2 + 0e_3 = 0$ um den Nullvektor ~~zu~~ erhalten

Linear abhängig: Ist es nicht eindeutig z.B. den Nullvektor durch eine Linearkombination zu erzeugen, so ist das Erzeugendensystem linear abhängig. Sollte also $\bar{E} = (e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2)$ ein Erzeugendensystem sein, so ist dieses nicht nur unnötig groß, da der zusätzliche Vektor die lineare Hülle nicht mehr vergrößert sondern auch linear abhängig, da sowohl $0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0(e_1 + e_2) = 0$ ~~und~~ als auch $-1e_1 + (-1)e_2 + 0e_3 + 1(e_1 + e_2) = 0$ den Nullvektor erzeugt.

Für lineare Unabhängige Vektoren gilt, dass kein Vektor eine Linearkombination der übrigen ist und, dass kein Vektor der Nullvektor ist.

Nachweis lineare Unabhängigkeit

Es gibt mehrere Möglichkeiten die lineare Unabhängigkeit nachzuweisen. Eine davon ist über LGS.

Beispiel: LGS

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \mid -2\cdot I \\ \mid -I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \mid -II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$

Sollten nur 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten

bzw. ist das LGS nicht eindeutig so sind

die Vektoren linear abhängig.

Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 15 + 4 + (-2) + 3 - 20 - 2 = \underline{\underline{-2}}$$

also linear unabhängig wäre das Ergebnis 0, dann wären die Vektoren linear abhängig

Berechnen der l. V. bei Funktionen

Bei Funktionen werden für n Funktionen n Vektoren mit n Elementen gebildet.

$$v_1 = \begin{pmatrix} f_1(x_1) \\ f_1(x_2) \\ f_1(x_3) \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} f_2(x_1) \\ f_2(x_2) \\ f_2(x_3) \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} f_3(x_1) \\ f_3(x_2) \\ f_3(x_3) \end{pmatrix}$$

Daraufhin berechnet man die Ergebnisse für beliebige x im Bereich. Zum Schluss überprüft man über die oberen Verfahren ob die Funktionen linear unabhängig sind.

Sollten die Vektoren linear unabhängig sein, so ist die Funktion auch linear unabhängig.

Sollten die Vektoren linear abhängig sein, so ist es nicht sicher ob die Funktion auch linear abhängig ist. Im Zweifel muss mit anderen x-Werten nochmal getestet werden.

Basis

Eine Basis $B = (v_1, \dots, v_r)$ wird auch minimales Erzeugendensystem von V genannt. Dabei muss diese linear unabhängig sein und es muss $L(B) = V$ gelten.

$\emptyset$ ist die Basis des Nullvektorraums $\{0\}$.

Basisergänzungssatz

Beim Basisergänzungssatz, werden nach und nach einer Linearkombination Elemente hinzugefügt, bis diese eine Basis ergeben.

Sei $\underbrace{L(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m)}^{=V}$ eine Basis. Daraus kann man entnehmen, dass $L(v_1, \dots, v_n) \neq V$, da eine Basis ein minimales Erzeugendensystem ist. Nun können so solange w_j hinzugefügt bis sich daraus eine Basis ergibt. Dabei muss darauf geachtet werden, dass die Basis linear unabhängig bleibt.

Austauschlemma

Seien $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_m)$ 2 Basen, so ist es möglich wenn man ein Element v_i aus der Basis nimmt dieses mit einem Element w_j zu ersetzen. Dabei ist dieses

$w_j \notin L(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$

Eindeutigkeit der Basislänge (Dimension)

Seien $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_m)$ 2 Basen des gleichen K-Vektorraums, so ist $n = m$.

Dadurch kann man die Dimension des Vektorraums definieren, so dass $\dim(V) := n$.

Zudem ist die Dimension $\dim(\{0\}) := 0$ und $\dim(V) := \infty$, wenn V kein endlicher Vektorraum ist.

Polynome

Ein Polynom ist eine ganzrationale Funktion $p: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

a_n heißt Leitkoeffizient.

Wenn $a_n = 1$ so ist p normiert.

Die Funktion $p(x) \equiv 0$ heißt Nullpolynom. Bei einem beliebigen x kommt immer 0 raus.

Wenn $a_n \neq$ ist, ist n Grad des Polynoms bsp.: $x^2 + 4x - 1 = 3$ Polynom 2. Grades.

Schreibweise: $\deg(p) = n$ $\qquad \deg(0) = -\infty$

P_n ist die Menge aller Polynome mit einem Grad von höchstens n.

Ein Polynom vom Grad n hat höchsten n Nullstellen bei den reellen Zahlen und genau n bei komplexen Zahlen.

Ein konstantes Polynom ist z.B. $p(x) = 5$ also kommt bei jedem x 5 raus.

$(1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n)$ bildet eine Basis des Vektorraums P_n und $\dim(P_n) = n+1$.

Diese Basis wird Monombasis genannt.

$d_n(x) = p_n(x) - q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) x^k$ nennt man Differenzpolynom. Ist $d_n = 0$ so sind p_n und q_n gleich.

Mithilfe eines LGS, mehreren Punkten und eines Polynoms n-ten Grades kann man selbst ein Polynom bestimm

Dies passiert, indem man bei n Punkten ein Polynom $n-1$. Grades erstellt, die Punkte einsetzt und zum

Schluss die Koeffizientenmatrix löst um $a, b, \ldots$ zu erhalten.

Um Polynome in einer Form wie $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i(x) = 0$ auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen nimmt man sich

z.B. bei $n = 3$ p_1, p_2 und p_3 und erstellt eine Matrix mit deren Koeffizienten.

$p_1(x) = 1 - 2x + 1x^2$

$p_2(x) = 1x - x^2 \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$p_3(x) = x^2$