Konvergenz monotoner Folgen

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Jede nach oben beschränkte monoton wachsende Folge ist konvergent. Der Grenzwert ist $\sup(a_n)$.

Jede nach unten beschränkte monoton fallende Folge ist konvergent. Der Grenzwert ist $\inf(a_n)$.

Intervallschachtllung

Sei $[a_n, b_n]$ ein abgeschlossenes Intervall und es gilt:

1. $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

$\Rightarrow$ $I_n = [a_n, b_n]$ heißt Intervallschachtelung und die Folgen konvergieren gegen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = S$$

a_n ist dabei monoton steigend und b_n ist monoton fallend. Beide sind beschränkt.

Die eulersche Zahl e

~~$e = (1+\frac{1}{n})^n = 2,718...$~~

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718...$$

Die eulersche Zahl ist beschränkt und streng monoton wachsend. Zudem ist sie transzendent wie π.

Zudem gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$

und: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}} = e$