Funktionen

Eine funktion ist Definiert durch $f: x \to y = f(x)$, was soviel bedeutet wie aus $D \to W$.
D steht dabei für die Definitionsmenge und W für die Wertemenge.

$\forall x \in D \; \exists y \in W$

Das bedeutet, dass es für jedes x aus der Definitionsmenge ein ~~[illegible]~~ y in der Wertemenge gibt.

Die Menge $G = \{(x,y) \mid x \in D, y = f(x)\}$ heisst Graph von f.

Wenn aus der Wertemenge nicht alle Werte genutzt werden gilt $B = \{y = f(x) \mid x \in D\}$.

Dies ist das Bild von f $(B = f(D)$

Eigenschaften

surjektiv : Alle Werte in der Wertemenge müssen verwendet werden.

injektiv : Alle Elemente in der Definitionsmenge zeigen eindeutig auf ein anderes Element in der Wertemenge

bijektiv : Funktion ist surjektiv und injektiv jedem Element in der Definitionsmenge ist genau ein Element in der Wertemenge zugeteilt.

Verketten

Wenn man die Wertemenge einer Funktion als Definitionsmenge einer 2. Funktion nimmt nennt man dies verketten von Funktionen.

$$\text{Definitionsmenge} \xrightarrow[\text{Funktion 1}]{} \text{Wertemenge}_1 \xrightarrow[\text{Funktion 2}]{} \text{Wertemenge}_2$$

Wenn man ~~[illegible]~~ die beiden funktionen g und f nimmt sieht die Syntax wie folgt aus:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Dabei wäre f funktion 1 und g Funktion 2.

Die Verkettung ist nicht kommutativ (umtauschbar) $f \circ g \neq g \circ f$

Bei einer umkehrbaren Funktion lassen sich Wertemenge und Definitionsmenge tauschen.

Definiert wird diese durch $W' \to D$ wobei $W' = f(D) \subset W$. Das bedeutet, dass in W' nur die Elemente enthalten sind, welche auch mit $f(D)$ erreicht werden.

$f^{-1}(f(x)) = x$ Da $f(x) = y$ und $f^{-1}(y) = x$

$f(f^{-1}(y)) = y$ Da $f^{-1}(y) = x$ und $f(x) = y$

Reelle Funktionen

Bei reellen Funktionen ist $D \subset \mathbb{R}^n$ und $W \subset \mathbb{R}^m$.

Beispiele:

$f: [a,b] \to b-a$ Intervall $\to \mathbb{R}$

$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f: n \to a_n$ $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f: z \to z^2$ $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$f: t \to \vec{a} + \vec{b} \cdot t$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Funktionen der Gestalt $x \to f(x) = y$ kürzer $y = f(x)$ haben folgende Mengen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Eigenschaften:

Bei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = 0$ eine Nullstelle.

$\exists c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq c \ \forall x \in D$ ist eine nach oben beschränkte Funktion.

$\exists c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq c \ \forall x \in D$ ist eine nach unten beschränkte Funktion.

Eine Funktion ist beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

$f(x) = f(-x) \ \forall x \in D$ bedeutet, dass die Funktion gerade bzw. achsensymmetrisch ist

$f(x) = -f(-x) \ \forall x \in D$ bedeutet, dass die Funktion ungerade bzw. punktsymmetrisch ist

$f(x+T) = f(x) \ \forall x \in D$ bedeutet, dass die Funktion periodisch ist

Polynome

Polynome sind die einfachste Klasse der Funktionen.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

mit $a_i, x \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ heißt Polynom oder ganzrationale Funktion vom Grad n.

Wenn $x_1, \ldots, x_n$ Nullstellen sind, so ist $p_n(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ die Faktorisierung von $p_n(x)$.

Nicht jedes Polynom hat eine reelle Faktorisierung, da z. B. manchmal keine Nullstellen vorhanden sind.

Ist n ungerade, existiert mindestens eine reelle Nullstelle

Wenn die Nullstelle in $\mathbb{C}$ liegt, ist sowohl $z = a + bi$ sowie $\bar{z} = a - bi$ Nullstelle.