Basis

Eine Basis $B = (v_1, \ldots, v_r)$ wird auch minimales Erzeugendensystem von V genannt. Dabei muss diese linear unabhängig sein und es muss $L(B) = V$ gelten.

$\emptyset$ ist die Basis des Nullvektorraums $\{0\}$.

Basisergänzungssatz

Beim Basisergänzungssatz, werden nach und nach einer Linearkombination Elemente hinzugefügt, bis diese eine Basis ergeben.

Sei $\underbrace{L(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m)}_{}^{=V}$ eine Basis. Daraus kann man entnehmen, dass $L(v_1, \ldots, v_n) \neq V$, da eine Basis ein minimales Erzeugendensystem ist. Nun können so solange w_j hinzugefügt bis sich daraus eine Basis ergibt. Dabei muss darauf geachtet werden, dass die Basis linear unabhängig bleibt.

Austauschlemma

Seien $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(w_1, \ldots, w_m)$ 2 Basen, so ist es möglich wenn man ein Element v_i aus der Basis nimmt dieses mit einem Element w_j zu ersetzen. Dabei ist dieses

$w_j \notin L(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$

Eindeutigkeit der Basislänge (Dimension)

Seien $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(w_1, \ldots, w_m)$ 2 Basen des gleichen K-Vektorraums, so ist $n = m$.

Dadurch kann man die Dimension des Vektorraums definieren, so dass $\dim(V) := n$.

Zudem ist die Dimension $\dim(\{0\}) := 0$ und $\dim(V) := \infty$, wenn V kein endlicher Vektorraum ist.