Supremum und Infimum

Bei einer Folge wie z.B. $a_n = \frac{1}{n}$ gibt es Schranken. Darunter versteht man, dass ~~an~~ $a_n < (>) K$ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

$a_n \leq K$ nennt man obere Schranke. Es gibt mehrere obere Schranken da auch $K+1$ als obere Schranke zählt.

Als Supremum wird die kleinste obere Schranke bezeichnet. Im Falle des Beispiels wäre diese 1.

$a_n \geq K$ nennt man untere Schranke. Dort gibt es auch mehrere.

Als Infimum bezeichnet man die größte untere Schranke, welche beim Beispiel 0 ist, da die Folge gegen 0 konvergiert.

Häufungspunkt

Wenn eine Teilfolge von a_n gegen a konvergiert so ist an dieser Stelle ein Häufungspunkt.

Bsp.: $a_n = (-1)^n = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$

Um alle ungeraden bzw. geraden Zahlen als ~~Werte~~ Teilfolge zu erhalten definiert man 2 Bedingungen.

$q_1(n) = 2n-1$

$q_2(n) = 2n$

Daraufhin ~~setzt man~~ setzt man für a_n $a_{q_1(n)}$ und $a_{q_2(n)}$ ein und berechnet die Konvergenz.

$a_{q_1(n)} = (-1)^{2n-1} = (-1, -1, -1, \dots) \longrightarrow -1$

$a_{q_2(n)} = (-1)^{2n} = (1, 1, 1, \dots) \longrightarrow 1$

$\Rightarrow$ 2 Häufungspunkte $(-1, 1)$

Wenn man 2 Häufungswerte erhält so ist die Folge divergent bei einem ist diese konvergent.

Limes Superior bezeichnet den größten Häufungspunkt $\lim \sup (a_n) = 1$

Limes Inferior bezeichnet den kleinsten Häufungspunkt $\lim \inf (a_n) = -1$

Achtung der Limes Superior / Inferior ist nicht identisch zum Supremum / Infimum.

Häufungspunkte müssen nicht unbedingt in ~~der~~ a_n enthalten sein z.B. ist bei $a_n = \frac{1}{n}$ 0 ein Häufungspunkt.

Ein Häufungspunkt enthält unendlich viele Werte z.B. von $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{n}$ existieren unendlich viele Werte.

Sollte eine Folge sowohl oben als auch unten beschränkt sein, so nennt mann diese beschränkt.

Eine beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.