Gruppe

$x \circ y$ wird Verknüpfung genannt.

M und $\circ$ bilden ein Paar $(M, \circ)$ und werden als Gruppe bezeichnet, wenn folgend Bedingungen zutreffen:

Assoziativität: $\forall a,b,c \in M: \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ Vertauschbar

neutrales Element: $\forall x \in M: \quad x \circ e = x$ Bei normaler addition 0, bei normaler multiplikation 1

Inverses Element: $\forall x \in M \; \exists x' \in M: \quad x \circ x' = e$ Die Verknüpften Elemente ergeben immer das neutrale Element

Abgeschlossenheit: $\forall a,b \; \exists c \in M: \quad a \circ b = c$ c liegt dabei auch in der Menge

Wenn $x \circ y = y \circ x$ handelt es sich um eine abelsche bzw. kommutative Gruppe.

Wichtig:

M darf keine leere Menge sein.

$\forall x \in M: x' \circ x = x \circ x' \quad \vee \quad x \circ e = e \circ x$

Das inverse Element ist eindeutig

Das neutrale Element ist eindeutig

Zeichen:

$\oplus$ Plusverknüpfung (Nicht normales Plus)

$\odot$ Mal Verknüpfung (Nicht normales Mal)

① neutrales Element (Plus Verknüpfung)

⓪ Neutrales Element (Mal Verknüpfung)

Wenn $G = (M, \circ)$ eine Gruppe ist und $M' \subseteq M$, nennt man $U = (M', \circ)$ eine Untergruppe von G.

$U \leq G$

Dabei ist U eine Gruppe, wenn $U \neq \emptyset$, $\forall a,b \in M': a \circ b \in M'$ und $\forall a \in M: a^{-1} \in M$.

Man bezeichnet Gruppen als isomorph, wenn $\phi(a \circ b) = (a_2 \circ b_2)$. Schreibweise: $G_1 \cong G_2$

Produktgruppen:

Wenn $G_1 = (A, +)$ und $G_2 = (B, \circ)$ Gruppen sind, dann lässt sich aus $A \times B$ folgende Verknüpfung $*$ definieren: $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 \circ b_2 \end{pmatrix}$, $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$

Dabei kann durch Nachrechnen herausgefunden werden, dass $(A \times B, *)$ auch eine Gruppe ist.