Polynome

Ein Polynom ist eine ganzrationale Funktion $p: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

a_n heißt Leitkoeffizient.

Wenn $a_n = 1$ so ist p normiert.

Die Funktion $p(x) \equiv 0$ heißt Nullpolynom. Bei einem beliebigen x kommt immer 0 raus.

Wenn $a_n \neq$ ist, ist n Grad des Polynoms bzp.: $x^2 + 4x - 1 = 3$ Polynom 2. Grades.

Schreibweise: $\deg(p) = n$ $\qquad \deg(0) = -\infty$

P_n ist die Menge aller Polynome mit einem Grad von höchstens n.

Ein Polynom vom Grad n hat höchsten n Nullstellen bei den reellen Zahlen und genau n bei komplexen Zahlen.

Ein konstantes Polynom ist z.B. $p(x) = 5$ also kommt bei jedem x 5 raus.

$(1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n)$ bildet eine Basis des Vektorraums P_n und $\dim(P_n) = n + 1$.

Diese Basis wird Monombasis genannt.

$d_n(x) = p_n(x) - q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) x^k$ nennt man Differenzpolynom. Ist $d_n = 0$ so sind p_n und q_n gleich.

Mithilfe eines LGS, mehreren Punkten und eines Polynoms n-ten Grades kann man selbst ein Polynom bestimm

Dies passiert, indem man bei n Punkten ein Polynom $n-1$. Grades erstellt, die Punkte einsetzt und zum Schluss die Koeffizientenmatrix löst um $a, b, \ldots$ zu erhalten.

Um Polynome in einer Form wie $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i(x) = 0$ auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen nimmt man sie z.B. bei $n = 3$ p_1, p_2 und p_3 und erstellt eine Matrix mit deren Koeffizienten.

$p_1(x) = 1 - 2x + 1x^2$

$p_2(x) = 1x - x^2$

$p_3(x) = x^2$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$