Stetigkeit

Eine Funktion ist stetig, wenn im Definitionsbereich kein Sprung entsteht.

Bsp.:

$f(x) = x$ ist stetig

$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x = a \\ 1 & \text{falls } x = b \end{cases}$ ist nicht stetig

Wenn L ein Grenzwert darstellt und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ist gilt:

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$ diese Funktion heißt konvergent für $x \to x_0$ $\lim_{x\to x_0} f(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$

Sollte $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ sein, so heißt die Funktion stetig in x_0, sonst unstetig.

Zudem ist Stetigkeit die Vertauschbarkeit von Funktion und Grenzwert.

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$

Stetigkeit muss mit diesem Kriterium für alle Folgen gezeigt werden. Unstetigkeit muss nur mit einer Folge gezeigt werden.

Bei $x_n > x_0$ so gilt:

$r\text{-}\lim_{x\to x_0} f(x) := L = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ der Grenzwert heißt rechtseitiger Grenzwert, die Funktion rechtseitig stetig.

Bei $x_n < x_0$ so gilt:

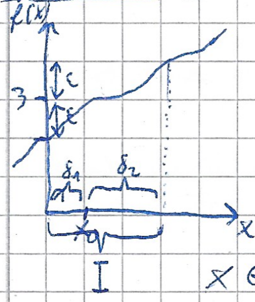
$l\text{-}\lim_{x\to x_0} f(x) := L = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ der Grenzwert heißt linksseitiger Grenzwert, die Funktion linksseitig stetig.

Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann in x_0 stetig, wenn: $r\text{-}\lim_{x\to x_0} f(x) = l\text{-}\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

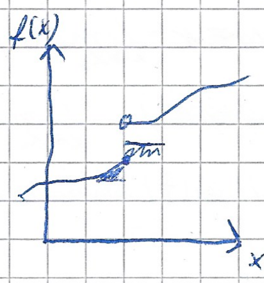
Eine Funktion heißt stetig, wenn $f: D \to \mathbb{R}$ auf $D = [a, b]$ für jedes $x_0 \in D$ stetig ist.

Dabei muss am Rand nur der einseitige Grenzwert betrachtet werden.

Epsilon-Delta-Kriterium



f ist stetig



ist nicht stetig, da für ein $\varepsilon < 1$ ein Sprung entsteht. Bsp.: $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$x \in I: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$|x - x_0| < \delta$

f ist stetig in $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A: |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Der Sinn liegt dabei, das ε möglichst klein werden zu lassen, um einen Sprung zu finden.