Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\mathbb{R}^3$

Das Kreuzprodukt erzeugt bei zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ einen Vektor, der senkrecht zu den beiden Vektoren steht.

Rechnung: $\cancel{a \times b = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}$

$$a \times b = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

Man berechnet mit dem Kreuzprodukt immer die Zeile, die beim rechnen nicht benutzt werden.

Rechenregeln:

$a \times b = -b \times a$

$a \times a = 0$ da $a_1a_2 - a_1a_2 = 0$ ergibt

$(a+b) \times c = a \times c + \overset{c}{\cancel{a}} \times b$

$\alpha a \times b = \alpha(a \times b) = a \times \alpha b$

$\langle a \times b, a\rangle = \langle a \times b, b\rangle = 0$

Wenn $a \times b \neq 0$, dann sind die Vektoren nicht parallel.

Berechnen der Länge $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2$

$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 (1 - \cos^2\alpha)$

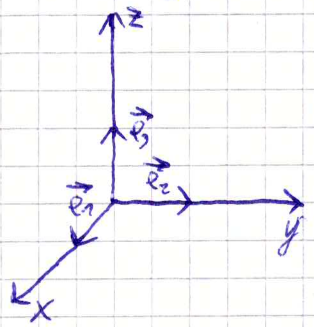
$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 \sin^2\alpha$

Dabei gibt die Länge des Kreuzprodukts ~~als~~ die Fläche eines Parallelogramms zurück.

Graßmannsche Identität

$a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c$

Für die 3 Vektoren $a, b, a \times b$ gilt, dass diese so gedreht werden können, dass ihre Lage den kanonischen Einheitsvektoren entsprechen.



$a, b, a \times b$ bildet ein Rechtssystem

$a, b, -a \times b$ bildet ein Linkssystem, da wenn man versucht das mit der linken Hand darzustellen mindestens ein Finger in die falsche Richtung zeigt.