Konstante Folgen

Eine konstante Folge konvergiert gegen den Wert ihrer Folgenglieder.

Harmonische Folge

Eine harmonische Folge ist monoton fallend und enthält nur positive Folgenglieder. Das Infimum ist 0.

Divergenz beweisen

$\forall a \in \mathbb{R} \; \exists \varepsilon > 0 \; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n \geq N \; |a_n - a| \geq \varepsilon$

Zuerst setzt man in die Formel $|a_n - a| \geq \varepsilon$ a_n ein. Die Betragsstriche können durch die Bernoulli-Ungleichung auch weggelassen werden.

Nun muss die Formel nach $a_n \geq \varepsilon + a$ umgeformt werden. Danach setzt man für ε eine beliebige Zahl ein, z.B. die 1.

Zuletzt wird aus den beiden Bedingungen $a_n \geq a$ und $a_n \geq a + \varepsilon$ bewiesen, dass die Folge divergent ist.

Aufschreiben:

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $\varepsilon = \dots$ (1). Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $n \geq N$ so, dass $a_n \geq a + \varepsilon$.

$\Rightarrow |a_n - a| = a_n - a \geq (a + \varepsilon) - a = \varepsilon$

Vergleichssatz

Der Vergleichssatz besagt, dass bei $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \to \infty} b_n = b$ wenn fast immer $a_n \leq b_n$ gilt auch $a \leq b$ gelten muss.

Sandwich-Lemma

Es gilt $a_n \leq c_n \leq b_n$ und $\lim_{n \to \infty} a_n = a = \lim_{n \to \infty} b_n$.

Daraus folgt $\lim_{n \to \infty} c_n = a$.

Der Satz wird auch Einschnürungssatz genannt.

Beispiel: Sei $a_n = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $c_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Da c_n immer positiv ist gilt

$0 = a_n \leq c_n \leq b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow c_n$ ist eine Nullfolge.