Skalarprodukt

Beim Skalarprodukt müssen folgende Bedingungen erfüllt werden. $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Es gilt Symmetrie $\forall a,b \in \mathbb{R}^n : \langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}^n : \langle a,b+c\rangle = \langle a,b\rangle + \langle a,c\rangle$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \langle \alpha a,b\rangle = \alpha\langle a,b\rangle = \langle a,\alpha b\rangle$

positive Definitheit $\forall a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle a,a\rangle > 0 \qquad \langle 0,0\rangle = 0$

Das euklidische Skalarprodukt ist wie folgt definiert. $\langle a,b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ für $a = \begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$

Alternativ kann das Produkt wie folgt geschrieben werden, um einfacher rechnen zu können. $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$

Die euklidische Norm (Standardnorm)

Diese Norm gibt einem die Länge eines Vektors im $\mathbb{R}^n$. Diese erhält man, wenn man die Wurzel aus dem Skalarprodukt zweier gleichen Vektoren zieht.

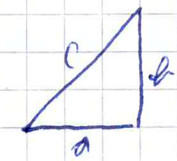
Beispiel: $\|a\| := \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ oder auch $\|a\| := \sqrt{a_1a_1 + a_2a_2 + \dots + a_na_n}$

Die Norm hat die Eigenschaften, enthalten in den reellen Zahlen zu sein und größer oder gleich 0 zu sein.

Zudem ist nur die Länge des Nullvektors gleich 0.

Zudem gilt $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|$

außerdem gilt die Dreiecksungleichung $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$



$c \leq a + b$

Eine Abbildung von $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Norm. Diese muss die obigen Eigenschaften besitzen.

Die l_p Norm

$$\|a\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Bei dieser Norm wird erst jedes a_i um p mal mit sich selbst multipliziert und am Ende wird die p-te Wurzel gezogen.

Spezialfälle:

$\|a\|_1 = |a_1| + |a_2| + |\dots| + |a_n|$

$\|a\|_2 = \sqrt{|a_1|^2 + |\dots|^2 + |a_n|^2}$ = euklidische Norm

$\|a\|_\infty = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$ z.B. $\|a\|_\infty = \max\{|2|, |-3|, |1|\} = 3$

Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm aber nicht anders herum.