Integration

Bei $a < b$. Eine Menge $M = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ heißt Zerlegung von $[a, b]$.

Dabei existieren $n+1$ Punkte und n Intervalle mit der Länge $\frac{b-a}{n}$

Eine Zerlegung in gleich lange Intervalle heißt äquidistante Zerlegung. $A = \{a = x_0, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = n\frac{b-a}{n}\}$

Sei f auf $[a, b]$ beschränkt und Z eine Zerlegung von $[a, b]$ und f eine monoton wachsende Funktion:

$U(Z, f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k-1})$ heißt Untersumme von f bzgl. Z $\quad \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \frac{b-a}{n}$

$O(Z, f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$ heißt Obersumme von f bzgl. Z $\quad \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \frac{b-a}{n}$

äquidistante Zer.

Im allgemeinen wird für die Untersumme bei $f(x_{k-1})$ das Minimum von x_{k-1} und x_k gewählt, bei der Obersumme das Maximum, so dass die Funktion nicht unbedingt monoton wachsend sein muss.

$U(Z, f) \leq O(Z, f)$

Sei f eine auf $[a, b]$ beschränkte Funktion und $I = \inf(O(Z, f)) = \sup(U(Z, f))$ so ist f integrierbar.

$I = \int_a^b f(x)\,dx$

b heißt obere Integrationsgrenze

I heißt Integral

a heißt untere Integrationsgrenze

x heißt Integrationsvariable

$f(x)$ heißt Integrand

Sei $f: [a, b]$ beschränkt, so ist f integrierbar, wenn es für jede $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z_ε von $[a, b]$ gibt und

$O(Z_\varepsilon, f) - U(Z_\varepsilon, f) < \varepsilon$ gilt.

Jede auf $[a, b]$ monotone Funktion ist integrierbar auf $[a, b]$

Das unbestimmte Integral

Sei $f: [a, b]$. Eine ableitbare Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ heißt Stammfunktion von f.

$F(x) = \int f(x)\,dx$ heißt unbestimmtes Integral

Beispiel:

$F(x)$	$f(x)$	unbestimmte Integral
x	1	$\int 1\,dx = x + C$
sin	cos	$\int \sin dx = \cos + C$

Das bestimmte Integral

Als bestimmtes Integral bezeichnet man ein Integral bei dem die Fläche in einem bestimmten Intervall berechnet werden soll: $\int_a^b f(x)\,dx$ oder auch $\int_a^b f(t)\,dt$