Quotientenkriterium

Wenn eine Folge mit $a_n \geq 0$ existiert, dann gilt:

$A := \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$A < 1$: konvergiert die Reihe absolut

$A > 1$: divergiert die Reihe

$A = 1$: keine Aussage möglich

Sollte die Folge $a_n < 0$ sein so fügt man in der Definition Betragsstriche für $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ein.

Existiert beim anwenden von Wurzel- oder Quotientenkriterium kein Grenzwert kann die Konvergenz / Divergenz auch durch das Einsetzen des größten Häufungspunktes herausgefunden werden.

Bei den beiden Kriterien wird allerdings nur die absolute Konvergenz oder Divergenz gezeigt. Das heißt sollte $A = 1$ rauskommen kann die Reihe immer noch konvergent sein.

Alternierende Reihen

Eine Reihe mit der Folge $a_n \geq 0$ und dem Aufbau $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ heißt alternierende Reihe.

Eine Eigenschaft ist dabei, dass das Vorzeichen immer im Wechsel ist.

Zur Berechnung der Konvergenz betrachtet man einmal die geraden Partialsummen der Folge $(S_2, S_4, S_6, \dots)$ und einmal die ungeraden Partialsummen $(S_1, S_3, S_5, \dots)$.

Dadurch kann herausgefunden werden, ob die Folgen monoton fallend / steigend sind, in dem man die ersten Partialsummen berechnet.

Die Beschränktheit kann auch nachgewiesen werden, da z.B. $b_n = \{S_2, S_4, S_6, \dots\}$ und $c_n = \{S_1, S_3, S_5\}$

$c_n > b_1$ ist oder / und $b_n < c_1$

Damit ist die Konvergenz beider Teilfolgen bewiesen und es existieren

$x = \lim_{n \to \infty} b_n \qquad y - x = 0$

$y = \lim_{n \to \infty} c_n \qquad y = x$

$\Rightarrow$ Die Folge konvergiert.

Leibniz-Kriterium

Wenn $a_n > 0$, monoton fallend und eine Nullfolge ist, so ist die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ konvergent.