Determinanten in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

1×1 $\quad A = (a_1) \quad \det(A) := a_1$

2×2 $\quad A = (a, b) \qquad a, b \in \mathbb{R}^2$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} := a_1 b_2 - b_1 a_2$$

3×3 $\quad A = (a, b, c) \quad . \quad a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} := a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

$$\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

Die Determinanten ergeben im $\mathbb{R}^2$ die Fläche eines von a und b aufgespannten Parallelogramms.

Die Determinanten ergeben im $\mathbb{R}^3$ das Volumen eines von a, b und c aufgespannten Spats.

$$\det(a, b, c) = \langle c, a \times b \rangle = \|a \times b\| \cdot \|c\| \cdot \cos(\psi) = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \|c\| \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi)$$

Eigenschaften:

$\det(a, b, c) = \det(c, a, b) = \det(b, c, a)$

$\det(a, b, c) = -\det(c, b, a)$

$\det(a, a, c) = 0$

$\det(\alpha \cdot a, b, c) = \alpha \cdot \det(a, b, c) \qquad \det(\alpha \cdot a, \alpha \cdot b, c) = \alpha^2 \det(a, b, c) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\det(a, b, c + d) = \det(a, b, c) + \det(a, b, d)$

$\det(A) = \det(A^T)$

Wenn $\det(a, b, c) \neq 0$ ist, hat ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten (x_1, x_2, x_3), wo jede Gleichung eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ beschreibt, eine eindeutige Lösung. Bei $\det(a, b, c) = 0$, gibt es keine eindeutige Lösung bzw. keine Lösung.

$$\text{LGS} \left\{ \begin{array}{l} (E_1)\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = d_1 \\ (E_2)\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = d_2 \\ (E_3)\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = d_3 \end{array} \right\}$$